АВГУСТ АДЛЕР

ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Перевод с немецкого
проф. Г. М. Фихтенгольца

с приложением статьи
проф. С. О. Шатуновского
„ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ РЕШЕНИЕ
С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ“

с 179 чертежами

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАРКОМПРОСА РСФСР ✲ ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД ✲ 1940

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА.

Появление настоящей книги вызвано желанием представить в связном изложении и с некоторой полнотой интересные и особенно увлекательные для начинающего методы и теории решения геометрических задач на построение. При этом не предполагается никаких более или менее подробных сведений из высшей математики; все необходимые вспомогательные теоремы будут приведены; доказательство их, впрочем, часто будет лишь намечаться, так что сведущий читатель не утомится а начинающий будет побуждаем доказать эти простые предложения.

Для того чтобы книга удовлетворяла своему назначению — быть учебником, она снабжена многочисленными задачами для упражнения, решение которых по большей части вкратце указывается. Часть учебного материала разбита по задачам, так что читатель, несмотря на умеренный объем книги, будет ориентирован во всех чисто геометрических вопросах, связанных с геометрическими построениями.

Вена, Июль 1906. *А. Адлер.*

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА.

Задачи на построение представляют прекрасное средство для развития логического и ассоциативного мышления. Однако внедрение их в обиход нашей средней школы происходит крайне медленно. Одной из причин этого является отсутствие соответствующей литературы для учителей, из которой последние могли бы почерпнуть сведения о теории геометрических построений в целом. В связи с этим следует приветствовать решение Учпедгиза вновь издать перевод интересной книги Августа Адлера, которая излагает теорию задач на построение во всей ее широте. Здесь читатель найдет не только частные приемы решения конструктивных задач с помощью классических средств решения — циркуля и линейки, но и построения Штейнера и Маскерони — при ограниченном пользовании этими инструментами, построения с помощью других средств решения и, наконец, изложение вопроса о критериях разрешимости и об исстари знаменитых неразрешимых задачах.

Перевод был выполнен мною 30 лет назад, еще в бытность мою студентом Новороссийского университета, и вышел тогда под редакцией моего незабвенного учителя проф. С. О. Шатуновского. Написанное им „Введение", содержащее изложение его взглядов на природу конструктивных задач и сущность их решения, сохранено в неприкосновенном виде. Книга была снабжена (как проф. С. О. Шатуновским, так и мною) рядом примечаний, в которые я внес лишь небольшие изменения; эти примечания отмечены номерами и помещены в конце.

Ленинград
Сентябрь, 1939. Проф. *Гр. Фихтенгольц*

ВВЕДЕНИЕ.

Геометрические задачи и их решение с помощью циркуля и линейки.

Приступая к изложению теории конструктивных задач элементарной Геометрии, мы считаем необходимым несколько остановиться на общем определении задачи и разъяснении ее содержания. Что такое задача и каково ее содержание в наиболее общем случае? Следующее определение хотя, быть может, и не вполне отвечает на поставленный вопрос, но представляется нам достаточно общим.

Задача есть изложение требования „найти" по „данным" вещам другие, „искомые" вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях.

Принимая это определение задачи, мы предполагаем, конечно, что предварительно определены все термины, входящие в его состав (за исключением термина: „задача"), или что эти термины приняты без определения либо в силу соглашения, либо потому, что они имеют достаточно ясный смысл. Нам придется, однако, обратить особое внимание на поставленные выше в кавычки термины: найти, данные (вещи), искомые (вещи). Каково бы ни было их реальное содержание (в настоящий момент оно для нас безразлично), важным представляется то обстоятельство, что в каждой задаче рассматриваются два класса вещей (для нас опять безразлично, будут ли эти вещи конкретные или отвлеченные).

Один класс есть класс данных вещей. О них говорят, что они даны, указаны, известны, доступны нашему непосредственному или посредственному усмотрению, созерцанию, пониманию или представлению, находятся в нашем распоряжении, что мы эти вещи знаем, воображаем и т. д.

Наоборот, о вещах другого класса говорят, что они не даны, не известны, не указаны, что это суть искомые вещи, что они должны быть найдены или определены (вычислены — в Арифметике, построены — в Геометрии, вообще — обнаружены) и т. д.

Когда вещь найдена, о ней перестают говорить, как о вещи неизвестной: она переводится из класса искомых в класс данных вещей. Таким образом найти вещь это значит сделать так, чтобы мы не только могли, но и обязаны были причислить вещь к классу данных или известных вещей. Поэтому совершенно ясно, что задача не будет иметь содержания, термин „найти" ничего не будет означать, если не указаны те обстоятельства, события или условия, при осуществлении которых мы обязаны перечислить вещь из класса вещей неизвестных в класс известных вещей. *

Итак, в каждой отдельной отрасли знания или даже в каждой отдельной задаче термин найти может иметь свое особое значение, но он должен быть определен в том смысле, что явно должны быть указаны те условия, при осуществлении которых искомая вещь считается найденной. Эти условия нередко даются нам теми или другими преследуемыми целями, зависящими весьма часто от состояния нашего сознания или имеющихся в нашем распоряжении средств восприятия; но эти условия могут быть и иногда действительно являются предметом чистого соглашения. В последнем случае мы можем изменять условия, замещая одни другими, лишь бы только совокупность соглашений не содержала логического противоречия. Но нельзя не устанавливать никаких условий относительно перечисления вещи из класса искомых в класс данных, ибо при отсутствии таких условий задача не имеет смысла.

Если, например, А предлагает В разделить пополам данный прямолинейный отрезок MN, то прежде чем приступить к решению задачи, В должен узнать, при выполнении каких условий А будет считать, что середина O отрезка MN найдена, ибо в противном случае В может рассуждать как угодно и делать что угодно, между тем как А все будет говорить, что середина O не найдена. На практике, когда MN есть начерченный отрезок или вообще отрезок, определяемый двумя реальными (начерченными) точками, середина O считается найденной, когда она отмечена особым знаком или когда в ней находится ножка циркуля. В Геометрии середина O считается найденной только тогда, когда мы к ней пришли при помощи некоторых вполне определенных приемов, о чем речь будет ниже.

Предложения, которыми устанавливаются те факты, обстоятельства или условия, при наличности которых искомая вещь становится данной, мы будем называть *постулатами*, лежащими в основе решения данной задачи или данной группы задач, рассматриваемых в той или другой дисциплине (эти постулаты можно было бы назвать логическими средствами решения).

Переходя теперь к конструктивным задачам элементарной плоской Геометрии, мы прежде всего укажем те постулаты, которые обыкновенно кладутся в основание решения этих задач. Заметим для этой цели, что в элементарной плоской Геометрии рассматриваются только следующие образы.

1. Точки, прямые, прямолинейные отрезки, окружности и их дуги. Эти образы будем называть основными.

---

* Здесь уместно будет сделать следующее замечание: положим, что искомая вещь x будет нами считаться найденной тогда и только тогда, когда осуществится событие a. Можно поставить вопрос о том, при наличности каких признаков β мы будем говорить, что событие a осуществилось, затем — вопрос о том, каковы признаки γ, свидетельствующие о наличности признаков β и т. д. ad infinitum. Мы будем поэтому предполагать, что во всех рассматриваемых случаях нет никакого сомнения относительно того, осуществлены ли уже или еще не осуществлены те условия, при выполнении которых вещь должна быть переведена из класса искомых в класс данных вещей.

2. Совокупность основных образов.

3. Конечные или бесконечные (например, углы) части плоскости, ограничиваемые основными образами.

Мы принимаем:

Постулат I. Прямая и прямолинейный отрезок соответственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены две точки прямой или концы отрезка.

Постулат II. Окружность считается построенной тогда и только тогда, когда даны или построены ее центр и две точки, которыми определяется ее радиус. (Одною из этих точек может быть центр, а другою — точка на окружности.) Дуга окружности считается построенной в том и только в том случае, когда даны или построены ее центр и ее концы.

Постулат III. Точка построена, если она есть пересечение двух данных или построенных прямых.

Постулат IV. Точка построена, если она есть общая точка данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулат V. Точка построена, если она есть общая точка двух данных или построенных окружностей.

Постулат VI. Всякий другой образ считается построенным, если даны или построены основные образы, из которых он состоит или которые его ограничивают.

В черчении, где строятся не геометрические образы, а их графические изображения, эти постулаты практически осуществляются помощью циркуля и линейки, причем оба эти инструмента употребляются определенным образом, а именно: при помощи линейки проводится графическое изображение прямой через графически заданные точки, при помощи циркуля описывают из графически заданного центра графическую окружность, имеющую графически заданный радиус. Другое употребление циркуля или линейки может не соответствовать нашим первым двум постулатам. Что касается постулатов III — V, то их осуществление содержится в том факте, что мы непосредственно усматриваем общие точки графически данных прямых и окружностей. Случаи, когда эти общие точки лежат вне эпюра (рамок) чертежа и поэтому не усматриваются непосредственно и не считаются построенными, соответствуют тем случаям, когда тот или иной из постулатов III — V отбрасывается (см., например, задачи на стр. 61 и примечание 76).

Можно, конечно, установить другие постулаты, которым будут соответствовать либо другие чертежные инструменты, либо другие способы употребления циркуля и линейки. Можно, наоборот, задать чертежные инструменты и способ их употребления и поставить на разрешение вопрос о том, каковы соответственные постулаты (см., например, главы II, III, IV и примечания к ним), но какие-либо постулаты должны быть установлены (или соответствующие им инструменты выбраны), так как в противном случае задача лишена содержания.

Установленные нами постулаты, отвечающие обыкновенному способу пользования циркулем и линейкой, эквивалентны следующему допущению. Конструктивная задача элементарной плоской Геометрии считается решенной, если она приведена к решению конечного числа задач, из которых каждая есть одна из следующих пяти задач: I. через две данные точки провести прямую или отрезок, их соединяющий; II. из данной точки описать окружность данного радиуса или начертить дугу окружности по ее концам и ее центру; III. найти общую точку двух данных прямых; IV. найти общие точки данной прямой и данной окружности; V. найти общие точки двух данных окружностей. Для геометра безразлично, как решаются эти пять задач. Их решение ему известно по условию, и к ним должна сводиться всякая другая задача для того, чтобы считаться решенной.

Применив постулаты I — VI, мы поставим себе теперь на разрешение наиболее общую конструктивную задачу элементарной плоской Геометрии. Так как каждый образ определяется ограничивающими его основными (см. выше) образами, а эти, в свою очередь, считаются построенными, когда найдены некоторые определяющие их точки, то можно принять, что каждый геометрический образ задается некоторою системою точек и что требование построить геометрический образ есть требование о построении системы точек. Наиболее общая конструктивная задача может поэтому быть выражена так:

По данной системе точек $P_1(P_1', P_1'', \ldots P_1^{(h)})$, содержащей конечное число точек $P_1', \ldots P_1^{(h)}$, требуется построить другую конечную систему $Q(Q', Q'', \ldots Q^{(k)})$ точек, под условием, чтобы эти последние удовлетворяли некоторым наперед указанным требованиям.

Точки $P_1', \ldots P_1^{(h)}$ данной системы P_1 будем называть точками первого класса. Найдем все те образы, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — VI. Мы можем, впрочем, игнорировать последний постулат и задаться только таким вопросом: какие основные образы могут и должны считаться построенными, когда приняты постулаты I — V и дана система точек P_1? Если эта задача решена, то должны считаться построенными и все те образы, которые составляются из основных или ограничиваются ими.

Постулаты III — V говорят об основных образах, которые должны считаться построенными, когда даны (построены) прямые или окружности. Эти постулаты непосредственно ничего не могут дать в применении к точкам системы P_1. В силу же постулата I мы можем и должны считать построенными все прямые l_1 и прямолинейные отрезки λ_1, определяемые всевозможными парами точек первого класса. Эти прямые и отрезки будем называть прямыми и отрезками первого класса. В силу же постулата II теперь должны считаться построенными все окружности O_1, для которых центрами служат точки первого класса, а радиусами — прямолинейные отрезки первого класса. Эти окружности мы будем называть окружностями первого класса.

Таким образом, мы имеем теперь:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{точки} & P_1 \\ \text{прямые} & l_1 \\ \text{отрезки} & \lambda_1 \\ \text{окружности} & O_1 \end{array}\right\} \text{первого класса.}$$

Применяя теперь постулаты III—V, мы можем и должны считать построенными все отличные от точек P_1 точки встречи построенных уже окружностей и прямых. Эти точки P_2 мы будем называть точками второго класса. В силу постулатов I и II мы можем, по аналогии с предыдущим, считать построенными прямые l_2, отрезки λ_2 и окружности O_2 второго класса, затем точки P_3 третьего класса и т. д.

Совокупность точек классов P_2, $P_3 \ldots$ содержит в себе все те и только те точки, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — V, когда точки P_1 образуют данную, исходную систему точек. Если искомые точки Q найдутся среди точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$, то задача при наших постулатах разрешима. Если же искомых точек Q не будет среди точек $P_1, P_2, P_3, \ldots$, как бы далеко мы этот ряд ни продолжали, то задача не будет иметь решения. Поясним это еще так.

Если точки систем $P_1, P_2, \ldots$ не покрывают всей плоскости, так что на плоскости имеется одна или несколько точек q, которые не будут принадлежать ни к одному из классов $P_1, P_2, \ldots$, то всякая задача, в которой даны только точки P_1, а ищется хоть одна из точек q, будет неразрешимой при наших постулатах, хотя она и могла бы быть разрешимой при других постулатах. Так, например (если требования, которым должны удовлетворять точки q в нашей задаче, не противоречат друг другу), можно было бы принять за постулат, что точки q построены, когда точки P_1 даны; в этом случае задача, в которой точки q суть искомые, разрешима в силу установленного постулата.

В книге Адлера приводится много примеров задач, неразрешимых при одних, но разрешимых при других постулатах (см., например, § 35, 45, 46, 49 и 51).

В предыдущем изложении указан путь, следуя которому мы, приняв обычные постулаты, непременно найдем решение задачи, если только решение может быть получено при этих постулатах.

Рассмотрим, например, задачу о делении пополам прямолинейного отрезка AB, заданного его концами. Система P_1 точек первого класса состоит из двух точек A и B. Искомый образ есть точка C, делящая пополам отрезок AB. Отрезок AB, прямая AB, окружность $A(AB)$ центра A и радиуса AB и окружность $B(AB)$ образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого класса. Если M, N суть точки пересечения окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$, P и Q — вторые точки пересечения этих окружностей с прямою AB, то точки M, N, P, Q образуют систему точек второго класса. Среди 9 прямых и 28 окружностей второго класса имеется прямая MN, которая в пересечении с прямой AB дает искомую точку C. Поэтому искомая точка есть точка третьего класса.

Рассмотрим еще деление пополам дуги AB (окружности), заданной центром O и концами A и B. Точки O, A, B образуют систему точек первого класса. Три отрезка OA, OB, AB, три прямые OA, OB, AB и девять окружностей $N(PQ)$ (где центр N есть одна из точек A, B, O, а радиус PQ есть один из отрезков OA, OB, AB) образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого класса. Точки встречи этих образов друг с другом (исключая O, A, B) образуют систему точек второго класса. Среди них имеется отличная от O точка встречи C окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$. Прямая OC принадлежит второму классу а точка D ее встречи с окружностью $O(AB)$ (лежащая на данной дуге) принадлежит третьему классу и есть искомая точка.

Указанный общий метод решения задач при помощи циркуля и линейки не только страдает недостатками, свойственными всякому общему методу, но оставляет без ответа вопрос о критериях разрешимости или неразрешимости данной задачи при помощи циркуля и линейки. Критерии разрешимости или неразрешимости устанавливаются аналитически (стр. 14) и выражаются следующим образом.

Для того чтобы отрезок λ мог быть построен при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы длина λ могла быть выражена в функции рациональных чисел и отрезков первого класса при помощи конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений квадратных корней.

Отсюда выводится, что всякий отрезок, который строится с помощью циркуля и линейки, есть корень алгебраического неприводимого уравнения степени 2^n. Критерий разрешимости такого уравнения в квадратных радикалах уже дан был Венцелем.*

Мы остановимся еще на двух вопросах, а именно на вопросах о произвольных элементах и о геометрографических решениях.

Произвольные элементы. Нередко при решении геометрической задачи пользуются так называемыми произвольными точками, а именно — либо берут произвольную точку на плоскости, или на данной прямой, или на данной окружности или внутри (либо вне) данной фигуры, либо допускают еще, что эта произвольная точка отлична от некоторых данных или построенных уже точек. Такие допущения составляют особенные постулаты, которые должны быть установлены особыми договорами. При употреблении циркуля и линейки такие постулаты оказываются лишними: произвольную точку легко заменить построенной даже в том случае, когда она должна быть отлична от некоторых данных или построенных точек. Так, например, если на прямой или дуге уже имеются построенные точки, расположенные в порядке A, B, $C, \ldots K$, то мы можем заменить произвольную точку, отличную от A, B, C, $\ldots$ K серединой отрезка (дуги), определяемого (определяемой) двумя последовательными точками.

Есть, однако, и такие случаи, когда допущение о приобщении произвольных точек к числу данных или уже построенных является существенным: цикл разрешимых задач может быть сужен, если отбросить право пользования произвольными точками (см., например, примечания 74 и 97).

Геометрографические решения. Простейшее решение данной конструктивной задачи называют геометрографическим ее решением. Такое определение не имеет смысла, если не установлено мерило простоты. По Лемуану, простота решения определяется следующим образом. Лемуан рассматривает 4 элементарные операции: 1) прикладывание линейки к данной точке, 2) помещение ножки циркуля в данной точке, 3) проведение прямой и 4) описание окружности.

* В настоящее время мы имеем другой критерий: для того чтобы неприводимое уравнение могло быть решено в квадратных радикалах, необходимо и достаточно, чтобы оно имело группу порядка 2^n.

К каждой из этих операций Лемуан относит число 1 и называет число S всех элементарных операций, потребных для решения задачи, коэффициентом простоты или простотой решения. Проведение прямой через данные 2 точки имеет поэтому коэффициент простоты 3 (линейка прикладывается к двум точкам и проводится **одна** прямая). Вычерчивание окружности из данного центра O данным радиусом AB имеет коэффициент 4 (помещение **двух** ножек циркуля соответственно в A и B, помещение **одной** ножки циркуля в O, вычерчивание **одной** окружности) или 3 (если O совпадает с A или с B) или 2 (если циркуль имеет раствор AB вследствие того, что уже раньше вычерчивалась окружность радиуса AB).

Мы покажем, что, имея какое-либо решение задачи, можно при помощи конечного числа испытаний найти ее геометрографическое решение. Заметим для этой цели, что для получения точки класса $n > 1$ необходимо произвести по меньшей мере $2n + 1$ элементарных операций. Это докажется индуктивно. В самом деле, пусть будет $n = 2$. Так как точка 2-го класса есть пересечение двух линий 1-го класса, то для получения точки 2-го класса необходимо вычертить либо две прямые 1-го класса (простота 6), либо прямую и окружность 1-го класса (простота 7 или 6) или две окружности 1-го класса (простота 8, или 7, или 6, или 5). Таким образом при $n = 2$ число элементарных операций действительно не меньше, чем $5 = 2 \cdot 2 + 1$. Точка класса $n + 1$ есть пересечение прямой или окружности класса n с прямой или окружностью того же или низшего класса. Допустив наше предложение для числа n, заметим, что для получения прямой или окружности n-го класса 1) необходимо иметь точку n-го класса, что по допущению требует по меньшей мере $2n + 1$ операций, и 2) необходимо вычертить линию n-го класса, что требует по меньшей мере двух элементарных операций, так что для получения точки n-го класса необходимо сделать по меньшей мере $2n + 1 + 2 = 2(n + 1) + 1$ операций.

Положим теперь, что некоторая задача решена и решение имеет простоту S. Найдем наибольшее число ν, удовлетворяющее неравенству $2\nu + 1 \leq S$. Тогда $2(\nu + 1) + 1 > S$. Точка класса $\nu + 1$ требует $2(\nu + 1) + 1 > S$ элементарных операций. Отсюда следует, что в состав геометрографического решения не может войти ни одна точка класса $\nu + 1$, и потому для получения геометрографического решения достаточно испытать точки первых ν классов. Число этих точек конечно.*

Одесса, 1910 г. Проф. *С. О. Шатуновский.*

---

* Кажется, что до сих пор еще не был указан ни один метод получения геометрографического решения.

Примечание. Коэффициент простоты иногда может быть понижен от введения произвольных точек. В этом случае следует получить геометрографическое решение без введения произвольных точек и затем определить, какие из данных или построенных точек могут быть заменены произвольными. Так, например, без введения произвольных точек геометрографическое деление отрезка AB на две равные части имеет простоту 11. Если же заменить окружности $A(AB)$ и $B(AB)$ двумя окружностями произвольных равных радиусов, то простота будет 10.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ.

1. Под Теорией геометрических построений обыкновенно разумеют изложение методов для решения предложенных геометрических задач на построение.

Такого рода методов было указано большое число; им исключительно и будет посвящена первая глава настоящей книги.

Но существуют еще и другие вопросы, также относящиеся к Теории геометрических построений и гораздо реже подвергавшиеся разработке; в настоящем сочинении им отведена большая часть места.

2. К числу их принадлежит вопрос об области применения каждого из употребляемых средств решения, т. е. вопрос о том, какие задачи можно строго разрешить каждым из них в отдельности, какие же лишь помощью нескольких средств решения, взятых в совокупности.

В 1797 г. Маскерони (Mascheroni) в своем знаменитом сочинении „La Geometria del Compasso“ доказал, что все геометрические построения, которые раньше выполнялись циркулем и линейкой (т. е. все так называемые построения второй степени), могут быть выполнены также и помощью одного лишь циркуля. Эти построения особенно удобны для некоторых практических целей, например, для деления окружности на части, так как циркуль является более точным инструментом черчения, чем линейка, помощью которой проводятся прямые линии.

Вскоре после этого французские геометры стали заниматься решением задач, проводя лишь одни прямые линии.

Уже Ламберт (Lambert „Freie Perspektive“, 1774) искал и нашел такого рода построения, имеющие значение в перспективе и землемерии. Брианшон (Brianchon) в 1818 г. опубликовал сочинение „Les applications de la théorie des transversales“, касающиеся построений этого рода.

Особенную известность приобрела книга: „Die geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“ (1833), принадлежащая Якову Штейнеру (Steiner). В ней Штейнер учит построениям, которые могут быть выполнены помощью проведения одних лишь прямых линий, если (в плоскости чертежа) даны изображения некоторых фигур, например, параллелограмма, квадрата, круга. В частности, он доказывает там следующее предложение, которое носит его имя:

При пользовании произвольным начерченным кругом (вместе с его центром) каждую задачу на построение второй степени можно решить, проводя лишь одни прямые линии.

Следует, впрочем, заметить, что очень многие из построений, которые приводит Штейнер в своем сочинении, встречаются уже у Ламберта („Freie Perspektive“, 1774), и что основной его результат, приведенный нами выше, был раньше высказан Понселэ (Poncelet „Traité des propriétés projectives“, Париж 1822, стр. 187—190).

Гаусс (Gauss) доказал в своем знаменитом труде „Disquisitiones arithmeticae“, что построение правильного семнадцатиугольника возможно помощью циркуля и линейки.

Это построение особенно изящным образом было выполнено Штаудтом* и позже упрощено Шретером (Schröter).

Кортум (Kortum) и Смит (Smith) в двух трудах, удостоенных Берлинской академией премии Штейнера (1866), доказали, что каждую геометрическую задачу третьей и четвертой степени можно решить, ограничиваясь проведением прямых и окружностей, если только уже начерчено какое-либо отличное от круга коническое сечение.

В работе автора „Zur Theorie der Mascheronischen Konstructionen“ (Wiener Akademie, 1890) были указаны преимущества применения принципа обратных радиусов к решению задач при помощи одного лишь циркуля.

В другой работе: „Über die zur Ausführung geometrischer Konstruktionen notwendigen Hilfsmittel“ (Wiener Akademie, 1890) было доказано, что каждая геометрическая задача второй степени может быть строго решена также помощью линейки с двумя параллельными краями или помощью одного только подвижного прямого или острого угла (наугольника); таким образом каждое из употребляющихся средств решения: циркуль, линейка, наугольник — само по себе достаточно для решения всех геометрических задач второй степени; там же было показано, что прямой угол является наиболее могучим средством решения, причем с двумя прямыми углами можно строго решить все задачи третьей и четвертой степени.

В „Grundlagen der Geometrie“ Гильберта** особенную роль играют построения, которые могут быть выполнены путем проведения прямых линий и перенесения отрезков. Теорию этих построений дал Фельдблюм (Feldblum) в своей диссертации „Über elementar-geometrische Konstruktionen Inaugural-Dissertation, Göttingen 1899.

Заслуживают упоминания еще: H. Simon, „Geometrische Konstruktionen ohne Zirkel“ (Zeitschrift f. math. u. nat. Unterr. XXII, 1891) и G. Wallenberg, „Konstruktionen mit Lineal und Eichmass so wie mit dem Lineal allein“ (Sitzungberichte der Berliner math. Gesellschaft IV, 1905).

---

* Штаудт (v. Staudt), Crelle Journal 24, 1842.

** Гильберт (Hilbert), Grundlagen der Geometrie, Лейпциг 1903.

3. Всеми этими трудами дается некоторая законченность исследованиям относительно области применения обычных средств решения.

К Теории геометрических построений принадлежит также и классификация геометрических задач, т. е. подразделение их на визуальные[1] (visuelle Aufgaben) и метрические, на задачи второй, третьей, четвертой и высших степеней. Позже мы будем об этом говорить подробно.

4. К Теории геометрических построений относятся также некоторые доказательства невозможности: укажем, например, что циркулем и линейкой невозможно произвольный данный угол разделить на три равные части, что в этом же смысле невозможно удвоение куба, наконец, что этими средствами построения не разрешается и исстари знаменитая задача о квадратуре круга, как это впервые строго было доказано Линдеманном (Lindemann) в 1882 г.

5. К Теории геометрических построений принадлежит и вопрос относительно точности построения, выполненного тем или другим из употребительных чертежных инструментов. В самом деле, всякий результат вычерчивания содержит ошибки. Точка, найденная построением, не находится в том месте, которое она занимала бы при идеальном совершенстве всех употребленных инструментов; она лежит лишь в некоторой окрестности этого места, и эту окрестность можно считать имеющей форму эллипса. Таким образом в отношении каждого построения возникает вопрос о приблизительном, по крайней мере, определении степени его точности, а отсюда уж мы приходим к задаче — выполнить это построение так, чтобы вероятная ошибка результата была возможно меньшей. Такого рода исследования практически были бы чрезвычайно важны; кое-что по этому вопросу мы находим в сочинении Винера* „Darstellende Geometrie“.

В позднейшее время, благодаря инициативе Лемуана (Lemoine), было достигнуто, по крайней мере, то, что построения, которые раньше обыкновенно лишь воображались, стали в действительности выполняться, причем на основании данных Лемуаном определений стали оценивать степень их простоты; в частности же, стали изучать такие (геометрографические) построения, которые отличаются наибольшей простотой.

Лемуан употребляет только циркуль и одностороннюю линейку; если же в качестве средств построения допустить также двухстороннюю линейку и прямой угол (как это и делают на практике), то мы придем к другим построениям и, в частности, к другим геометрографическим решениям, как будет показано в заключении предлагаемого сочинения.

6. Специальных сочинений по Теории геометрических построений существует до сих пор лишь два: Ф. Клейна** и Ф. Энрикеса;*** обоими сочинениями мы часто будем пользоваться в последующем изложении. [2]

---

* Винер (Wiener), „Darstellende Geometrie“, ч. 1, стр. 185—191.

** Ф. Клейн (F. Klein), „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar-Geometrie“, Leipzig 1895.

*** Ф. Энрикес (F. Enriques), „Questioni Riguardanti La Geometria Elementare“, Bologna 1900.

Глава I.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ.

1. Каждое геометрическое построение решает некоторую геометрическую задачу на построение.

В геометрической задаче на построение требуется начертить [3] фигуру, удовлетворяющую определенным условиям.

Если данные условия являются необходимыми и достаточными для определения искомой фигуры, то задача называется определенной. Она может в этом случае иметь одно, два и больше решений; в соответствии с этим ее называют однозначной, двузначной, многозначной.

Если дано меньше условий, нежели необходимо для определения фигуры, то существует бесконечное множество фигур, удовлетворяющих условиям задачи: задача является неопределенной.

Если дано больше условий чем достаточно, то фигура переопределена; задача в этом случае вообще не разрешима. [4]

2. При решении геометрической задачи на построение обыкновенно поступают следующим образом.

Предполагают искомую фигуру уже известной и с помощью методов, к рассмотрению которых мы сейчас приступим, изучают фигуру до тех пор, пока не станет ясным тот путь, по которому задача может быть решена предложенными средствами решения.

Затем могут быть выполнены требуемые построения. Но после этого еще необходимо показать, что полученная фигура удовлетворяет требуемым условиям, т. е. что построение правильно.

Наконец, необходимо еще исследование задачи в ее целом, т. е. определение числа решений, зависимости между числом решений и данными величинами и т. д.

Таким образом в решении каждой задачи на построение должны быть отмечены четыре стадии:

1) анализ геометрической задачи на построение,
2) выполнение построения,
3) доказательство правильности решения,
4) исследование.

3. В качестве средств построения в настоящей главе мы будем пользоваться только циркулем и линейкой (односторонней), [5] другие же средства построения будут нами применяться лишь в следующих главах.

§ 1. Метод алгебраического анализа.

1. Если a, b, c суть данные отрезки, то, как известно, помощью циркуля и линейки, т. е. проводя лишь прямые ли-

нии и окружности, можно легко построить следующие отрезки:

$$a+b,\quad a-b,\quad \frac{ab}{c},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt{a^2+b^2},\quad \sqrt{a^2-b^2}.$$

Повторяя эти основные операции, можно построить и более сложные выражения, например, выражение:

$$x=\sqrt{a^2+b^2-cd},$$

причем полагаем

$$cd=y^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{b^2-y^2}=z;$$

тогда

$$x=\sqrt{a^2+z^2};$$

отрезки y, z, x могут быть построены на основании вышесказанного.

Если требуется построить отрезок

$$x=\frac{a^3b^2}{c^2d^2},$$

то полагаем

$$\frac{ab}{c}=u_1,\quad \frac{au_1}{c}=u_2,\quad \frac{au_2}{d}=u_3,$$

тогда

$$x=\frac{u_3b}{d};$$

отрезки u_1, u_2, u_3, x легко могут быть построены.

Может быть построено, например, и следующее выражение:

$$x=\frac{ab+\sqrt{c^2d^2-\sqrt{e^4-f^3g}}}{\sqrt{m^2+n^2+\frac{pq}{r}}},$$

где a, b, c и т. д. суть данные отрезки.

Вообще может быть построено каждое выражение, которое из данных отрезков получается помощью конечного числа рациональных операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и извлечений квадратных корней (см. Введение).

2. На этом основан чрезвычайно употребительный при решении геометрических задач на построение метод алгебраического анализа.

Стараются через данные величины выразить величину, непосредственно определяющую искомый результат (например, отрезок; в подходящих случаях при этом пользуются и аналитической геометрией), а затем уж обращаются к построению полученного выражения.

3. Применение этого метода мы иллюстрируем несколькими примерами.

Пример 1. Даны две прямые f, g и точка P. Требуется построить те окружности, которые проходят через точку P и касаются обеих прямых.

Предполагаем задачу решенной (черт. 1); тогда

$$\overline{RX}^2 = \overline{RP} \times \overline{RQ},$$

где Q есть отражение [6] точки P в биссектрисе угла. Отсюда следует

$$RX = \sqrt{RP \cdot RQ}.$$

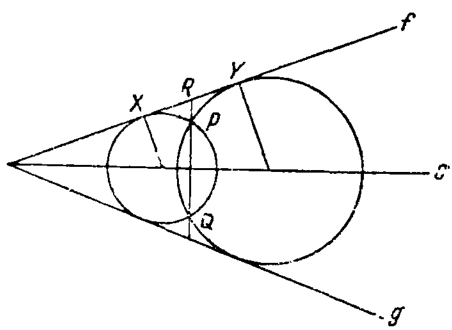
Пример 2. Дан треугольник ABC. Требуется построить три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других окружностей и двух сторон треугольника (задача Мальфатти). * Считаем задачу решенной (черт. 2). Пусть точка O будет центром вписанной в треугольник окружности (радиуса r). Радиусы кругов K и L обозначим соответственно через r_1 и r_2. Из точек K, O, L опустим перпендикуляры на сторону AB и таким путем построим точки D, E, F. Положим $AE = s$, $BE = t$, $AD = x$, $BF = y$.

Если мы проведем $KG \parallel AB$, то

$$LG = r_2 - r_1 \quad \text{и} \quad KG = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Из подобия [7] треугольников ADK и AEO следует, что

$$r_1 = \frac{xr}{s}.$$



Черт. 1.

Аналогично этому и $r_2 = \frac{yr}{t}$, что вытекает из подобия треугольников BFL и BEO.

Далее,

$$AB = AD + DF + FB,$$

следовательно:

$$x + y + 2\sqrt{r_1 r_2} = s + t$$

или (подставляя вместо r_1 и r_2 полученные для них выражения)

$$x + y + \frac{2r}{\sqrt{st}}\sqrt{xy} = s + t. \tag{1}$$

Если опустим из точек L, M, O перпендикуляры на сторону BC и положим $PC = u$ и $QC = z$, [8] то получится равенство

$$y + z + \frac{2r}{\sqrt{tu}}\sqrt{yz} = t + u. \tag{2}$$

* Этой знаменитой задачей впервые занимался Мальфатти (Malfatti, Memorie di matematica, Tomo X, parte I, Modena 1803). После него эта задача часто подвергалась обработке. Чисто геометрическое решение ее без доказательства дал Штейнер в 1826 г. в сочинении „Einige geometrische Betrachtungen“ (Crelle J. т. I). Доказательство правильности этого решения было дано Шретером (1874, Crelle, т. 77). Другое доказательство штейнеровского решения дает Петерсен (Petersen) в своей ценной работе „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstructionsaufgaben“ (Русский перевод: „Методы и теории решения геометрических задач на построение“. М. 1892).

Аналогично мы получим равенство и для третьей стороны:

$$z+x+\frac{2r}{\sqrt{us}}\sqrt{zx}=u+s. \tag{3}$$

Таким образом мы имеем **три уравнения для определения трех неизвестных** x, y, z.

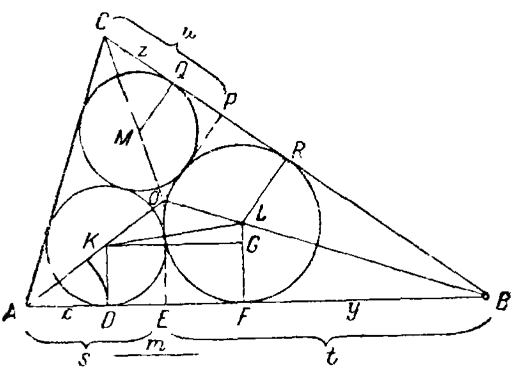
Мальфатти сообщает решения этих трех уравнений:

$$2x=s+t+u-r+\sqrt{r^2+s^2}-\sqrt{r^2+t^2}-\sqrt{r^2+u^2},$$
$$2y=s+t+u-r-\sqrt{r^2+s^2}+\sqrt{r^2+t^2}-\sqrt{r^2+u^2},$$
$$2z=s+t+u-r-\sqrt{r^2+s^2}-\sqrt{r^2+t^2}+\sqrt{r^2+u^2}.$$

Если подставить эти значения в вышеприведенные уравнения, то они удовлетворят последним. Путь, которым Мальфатти нашел решения, чрезвычайно сложен, как он сам указывает.

Геометрическое же построение величин x, y, z представляется чрезвычайно простым, ибо

$$\sqrt{r^2+s^2}=OA, \qquad \sqrt{r^2+t^2}=OB, \qquad \sqrt{r^2+u^2}=OC,$$



Черт. 2.

вследствие чего отрезки эти, равно как и отрезки s, t, u, r, легко могут быть построены.

Если же теперь построить выражение

$$\frac{1}{2}(OA+OB+OC-s-t-u+r)=m,$$

то

$$x=OA-m,$$
$$y=OB-m,$$
$$z=OC-m \text{ (черт. 2).}$$

Пример 3. Даны три окружности K_1, K_2, K_3, **коих центры лежат на одной прямой; радиус каждой из окружностей** K_2, K_3 **равен** r_2. **Последние две окружности имеют одно и то же центральное расстояние** a **от окружности** K_1 (r_1). **Требуется построить все окружности, которые касаются трех данных** (черт. 3).

Для того чтобы решить эту задачу вычислением, мы кладем в основание прямоугольную систему координат. При этом уравнения данных окружностей таковы:

$$K_1 \ldots \quad x^2+y^2=r_1^2,$$
$$K_2 \ldots (x-a)^2+y^2=r_2^2,$$
$$K_3 \ldots (x+a)^2+y^2=r_2^2.$$

Уравнение же каждой из искомых окружностей имеет вид:

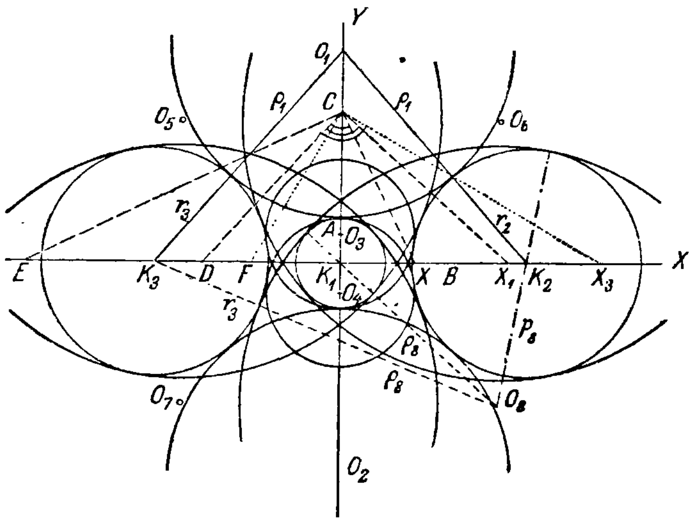
$$(x-p_i)^2+(y-q_i)^2=\rho_i^2.$$

Для круга O_1 (черт. 3) легко могут быть получены три уравнения, определяющие три неизвестные величины p_1, q_1, ρ_1; именно, из условий

$$\overline{O_1K_1} = \rho_1 + r_1,$$
$$\overline{O_1K_2} = \rho_1 + r_2,$$
$$\overline{O_1K_3} = \rho_1 + r_2$$

вытекают равенства

$$p_1^2 + q_1^2 = (\rho_1 + r_1)^2,$$
$$(p_1 - a)^2 + q_1^2 = (\rho_1 + r_2)^2,$$
$$(p_1 + a)^2 + q_1^2 = (\rho_1 + r_2)^2.$$



Черт. 3.

Из двух последних следует, что $p_1 = 0$, а отсюда уже непосредственно вытекает:

$$\rho_1 = \frac{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2(r_2 - r_1)} = \rho_2, \tag{1}$$

ибо радиус круга O_2 равен радиусу ρ_1 круга O_1 (черт. 3).

Окружность O_3 касается окружностей K_2 и K_3 извне, а окружности K_1 — изнутри. Таким образом, имеют место равенства

$$\overline{O_3K_1} \ldots p_3^2 + q_3^2 = (\rho_3 - r_1)^2,$$
$$\overline{O_3K_2} \ldots (p_3 - a)^2 + q_3^2 = (\rho_3 + r_2)^2,$$
$$\overline{O_3K_3} \ldots (p_3 + a)^2 + q_3^2 = (\rho_3 + r_2)^2.$$

Отсюда получается:

$$\rho_3 = \frac{a^2 - (r_2^2 - r_1^2)}{2(r_2 + r_1)} = \rho_4. \tag{2}$$

Для окружности O_5 имеют место равенства

$$p_5^2+q_5^2=(\rho_5-r_1)^2,$$
$$(p_5+a)^2+q_5^2=(\rho_5-r_2)^2,$$
$$(p_5-a)^2+q_5^2=(\rho_5+r_2)^2,$$

откуда получается:

$$\rho_5=\frac{a^2-(r_2^2-r_1^2)}{2r_1}=\rho_6=\rho_7=\rho_8.$$

Построение может быть выполнено по следующему плану.

Строим по порядку (черт. 3):

$$AB=r_2,\ BC=a,$$

тогда

$$CK_1=\sqrt{a^2-(r_2^2-r_1^2)}.$$

Если затем построить:

$$K_1D=2(r_2-r_1) \text{ и } CX_1\perp CD,$$

то

$$K_1X_1=\rho_1=\rho_2.$$

Аналогично построим

$$K_1X_2=\rho_3=\rho_4 \text{ и } K_1X_3=\rho_5=\rho_6=\rho_7=\rho_8.$$

§ 2. Метод геометрических мест.

1. Весьма удобным методом для решения геометрических задач на построение является метод геометрических мест.

Он основывается на следующем: Стараются свести всю задачу к нахождению некоторой точки X, что в большей части случаев сделать нетрудно.

Точка X определяется двумя условиями, вытекающими из требований задачи. Если устранить первое из условий, то существует не одна только точка X, но бесчисленное множество таких точек, составляющих в совокупности некоторую линию, некоторое геометрическое место. Если же устранить второе условие и ограничиться первым, то получится другое геометрическое место. Каждая точка пересечения этих двух геометрических мест удовлетворяет требованиям задачи.

2. Является необходимым предварительно изучить некоторые геометрические места. Мы приведем наиболее простые и вместе с тем наиболее употребительные из них.

a) Геометрическое место точек, находящихся от данной точки на данном расстоянии, есть окружность, описанная из данной точки как из центра данным расстоянием как радиусом.

b) Геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, состоит из двух прямых, проведенных параллельно данной прямой на данном от нее расстоянии.

c) Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек A и B, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB в его середине. (Симметраль точек A и B.)

d) Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных прямых, состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых, делящих пополам углы между данными прямыми (биссектрисы). [9]

e) Геометрическим местом точек, из которых отрезок AB виден под данным углом α, является дуга окружности, стягиваемая отрезком AB (построение ясно из черт. 4). [10]

f) Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных точек находятся в данном отношении $m:n$, есть некоторая окружность (черт. 5). [11] При этом,

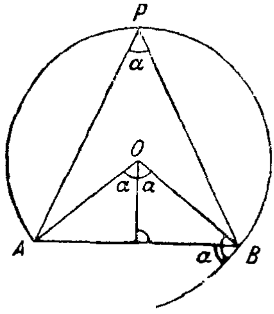
$$\frac{AP_1}{BP_1}=\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n},$$

откуда по известной теореме получается, что

$$\measuredangle APP_1=\measuredangle P_1PB.$$

Имеет место также пропорция

$$AP_1 : P_1B = AP_2 : BP_2.$$

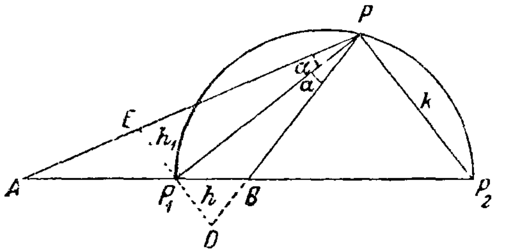


Черт. 4.

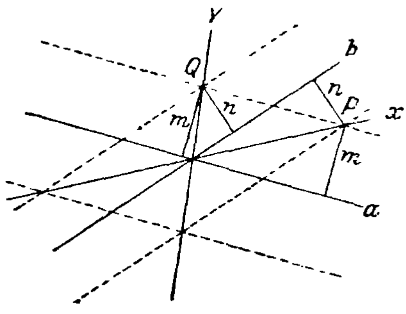
Четыре такие точки называются, как известно, четырьмя **гармоническими точками**.

g) Геометрическое место точек, расстояния которых от двух данных прямых находятся в данном отношении $m:n$, образуется двумя прямыми линиями x и y, проходящими через точку пересечения данных прямых (черт. 6).

h) Геометрическое место точек, квадраты расстояний которых от двух данных точек A и B сохраняют постоянную разность d^2, есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB.



Черт. 5.



Черт. 6.

Доказательство. Пусть точка P_1 (черт. 7) обладает указанным свойством, так что

$$\overline{P_1B}^2-\overline{P_1A}^2=d^2.$$

Если опустить из точки P_1 на AB перпендикуляр и взять на нем произвольную точку P, то

$$\overline{PB}^2=\overline{BD}^2+\overline{DP}^2$$

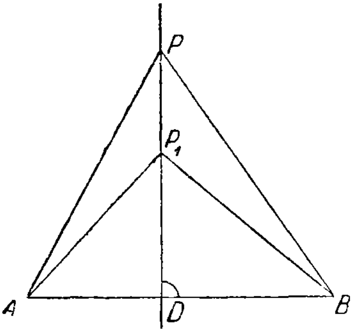
и

$$\overline{PA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DP}^2,$$

поэтому

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = d^2.$$

Из h) может быть выведено следствие, которое позже для нас будет важно. Мы лишь предпошлем ему краткое замечание.



Черт. 7.

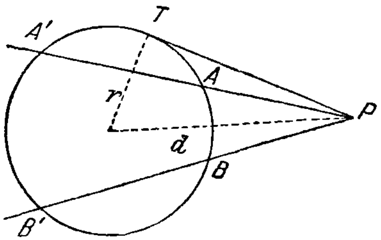
α) Как известно, справедливо следующее предложение: Если через точку P (черт. 8а, 8б) провести секущие к окружности, то постоянно

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = \ldots$$

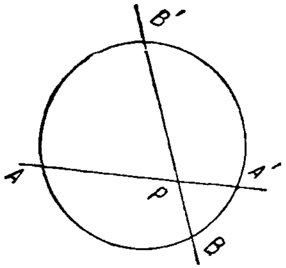
Это постоянное произведение называется степенью точки P в отношении данной окружности; степень равна $d^2 - r^2$, где d есть расстояние точки P от центра (центральное расстояние точки P), r — радиус окружности.

Если точка P лежит вне окружности, то степень точки также равна PT^2.

β) Если даны две окружности с центрами O_1 и O_2, то точка P имеет определенную степень по отношению к каждой из них. Если же



Черт. 8а.



Черт 8б.

точка P по отношению к обеим окружностям (с радиусами r_1 и r_2) имеет одну и ту же степень, то

$$\overline{PO_1}^2 - r_1^2 = \overline{PO_2}^2 - r_2^2,$$

так что

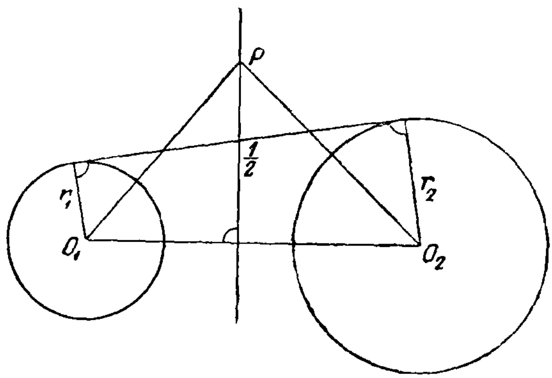
$$\overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 = r_1^2 - r_2^2 = \text{const}.$$

Следовательно, геометрическое место точек, имеющих одну и ту же степень в отношении обеих окружностей, есть (согласно h) прямая, перпендикулярная к линии центров этих окружностей. Прямая эта называется радикальной осью обеих окружностей.

Если окружности пересекаются, то их радикальная ось проходит через точки их пересечения, ибо каждая из точек пересечения имеет в отношении обеих окружностей степень, равную нулю. Если же окружности не пересекаются, то радикальную ось можно построить (черт. 9), опустив перпендикуляр на линию центров из середины общей касательной к обеим окружностям. Можно при этом следовать и другому пути, пользуясь теоремой: Если даны на плоскости три окружности, то определяемые ими три радикальные оси проходят через одну и ту же точку (радикальный центр трех окружностей). Доказательство теоремы основывается на том соображении, что точка пересечения двух каких-либо радикальных осей имеет одну и ту же степень в отношении всех трех окружностей, следовательно, лежит на третьей радикальной оси.

3. Мы разъясним метод геометрических мест на двух примерах.

α) Даны две окружности O_1, O_2 радиусов r_1 и r_2. Требуется построить такую окружность K, которая касалась бы обеих данных окружностей и имела бы данный радиус r.



Черт. 9.

Если откинуть требование, чтобы окружность K касалась окружности O_2, то искомых окружностей существует бесчисленное множество. Геометрическое место их центров состоит из двух концентрических с O_1 окружностей, радиусы которых соответственно равны $r_1 + r$ и $r_1 - r$. Аналогично мы получим для искомого центра X и другое геометрическое место, состоящее из двух окружностей, описанных из точки O_2, как из центра, радиусами $r_2 + r$ и $r_2 - r$.

Точка X должна совпадать с одной из точек пересечения обоих геометрических мест. Существует не больше восьми точек, удовлетворяющих требованиям задачи.

β) Даны три окружности K_1, K_2, K_3. Требуется построить все окружности, касающиеся трех данных (аполлониева задача о касании).

Если (черт. 10) через центр одной из данных трех окружностей, например, через центр окружности K_3, провести окружность, концентрическую с искомой X, то окажется, что упомянутая выше задача сведется к следующей.

Даны две окружности K_1', K_2' [12] и точка P. Требуется построить окружности, касающиеся двух данных и проходящие через точку P.

Геометрическое место центров всех окружностей, которые касаются окружности K_1' и проходят через точку P, есть эллипс или гипербола, в зависимости от того, лежит ли P внутри окружности K_1' или вне ее. [13] Центр окружности K_1' и точка P являются фокусами этих конических сечений; асимптоты гиперболы перпендикулярны к касательным, которые можно провести к окружности K_1' из точки P.

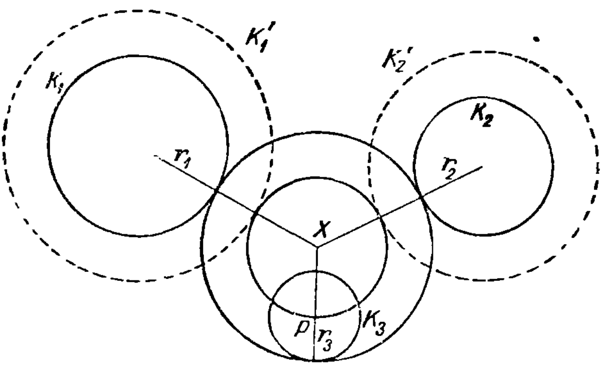
Каждая из данных трех окружностей может свестись и к одной точке или перейти в прямую. Геометрическое место центров окружностей, которые касаются прямой l и проходят через точку P, есть парабола, имеющая прямую l своей директрисой, а фокус — в точке P.

4. Задачи для упражнения.

В следующих задачах буквы, помещенные после изложения условий, указывают те геометрические места, которые находят особенное применение при решении рассматриваемой задачи.

Начинающему мы настоятельно рекомендуем в действительности решить задачу с помощью циркуля и линейки и продумать исследование решения.

1. Даны два отрезка a, b, произвольно расположенные один в отношении другого, и два угла α, β. Требуется построить точку, из которой отрезки a и b видны соответственно под углами α и β (e) (задача Потенó) (Pothenot).



Черт. 10.

2. Даны три прямые линии g_1, g_2, g_3. Требуется построить точку, расстояния которой от трех данных прямых находятся в данных отношениях (g).

3. Даны три окружности. Требуется построить точку, из которой ко всем трем окружностям можно провести касательные равной длины (h).

4. Даны окружности и две точки A, B. Требуется вписать в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы катеты его проходили соответственно через данные точки (e).

5. Даны две параллельные прямые и точка P. Требуется построить окружность, которая касалась бы обеих прямых и проходила бы через точку P (a, d).

6. Даны три равных окружности. Требуется построить окружность, которая касалась бы всех трех окружностей извне (c).

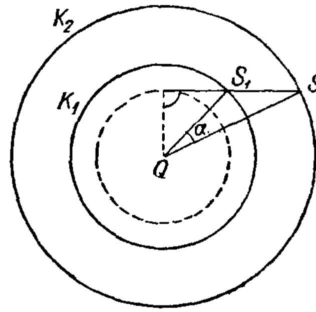
7. Данный отрезок a разложить на две части x и y так, чтобы среднее геометрическое между x и y равнялось второму данному отрезку b (b).

8. Дан треугольник ABC. Требуется построить точку, из которой все три стороны его были бы видны под одним и тем же углом (120°) (e).

9. На некоторой прямой лежат точки A, B, C, D. Требуется отыскать на плоскости такую точку, из которой отрезки AB, BC, CD видны под одним и тем же углом (f).[14]

10. Даны три окружности. Требуется построить окружность, которая все три окружности пересекла бы под прямым углом (h).[15]

11. Даны три окружности. Требуется построить такую точку, из которой все три окружности были бы видны под одним и тем же углом.[16] (Расстояния искомой точки от центров окружностей должны относиться, как соответственные радиусы.)

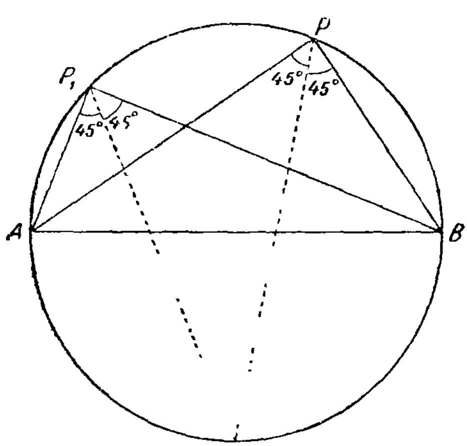


Черт. 11.

12. Даны две окружности K_1, K_2 и отрезок s. Требуется построить окружность данного радиуса r так, чтобы центр ее лежал на окружности K_1 и чтобы хорда пересечения ее с окружностью K_2 имела данную длину s. (Каково геометрическое место центров всех окружностей радиуса r, которые пересекают окружность K_2 по хорде s?)

13. Дана прямая g, на ней точка A, и вне ее точка B. Требуется найти на g точку X, для которой $\overline{AX}+\overline{XB}=s$, где s есть данный отрезок (c). (На данной прямой от точки A откладывают отрезок s.)

14. Даны три прямые линии a, b, c и точка P. Требуется провести через P прямую x так, чтобы три точки пересечения ее с данными прямыми вместе с точкой P образовали гармонический ряд точек. (Каково геометрическое место точек, которые гармонически отделяют точку P от двух прямых?[17] Сколько решений имеет задача?)



Черт. 12.

15. Даны две концентрических окружности K_1, K_2 и точка P. Требуется провести через P прямую x так, чтобы отрезок ее, заключенный между концентрическими окружностями, из центра был виден под данным углом α. (Если вращать вокруг центра угол α, продолжив одну из его сторон до пересечения с K_1, другую — до пересечения с K_2 и соединив прямыми точки пересечения, то эти прямые будут огибать некоторую новую концентрическую окружность, черт. 11.)

16. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Требуется через P провести прямую так, чтобы обе пары параллельных прямых отсекли на ней равные отрезки. (Рассматривают параллелограмм, образованный обеими парами параллельных линий.)

17. Даны четыре точки A, B, C, D. Требуется построить квадрат, стороны которого проходили бы через эти четыре точки. (Если на AB как на диаметре построить окружность (черт. 12), то биссектриса

угла APB будет проходить через точку S окружности, которая не изменяется при движении точки P по окружности.) [18]

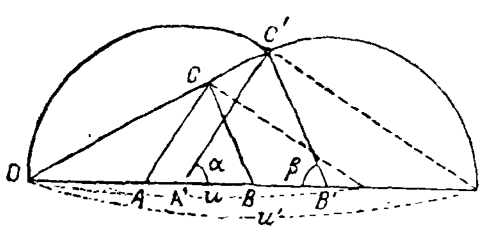
18. Даны две окружности K_1 и K_2. Требуется построить прямую, на которой они отсекают хорды, имеющие данные длины s_1 и s_2. (Общие касательные к двум окружностям.)

19. Дан четырехугольник. Требуется вписать в него параллелограмм так, чтобы стороны его имели данные направления. (Какое место опишет четвертая вершина параллелограмма, стороны которого имеют данные направления, если удалить одну из сторон четырехугольника?) [19] *

§ 3. Метод подобных фигур.

1. Некоторые задачи на построение обладают тем свойством, что бесконечно многие их решения, которые получаются при устранении части данных условий, образуют системy подобных между собой фигур. Например, если требуется построить треугольник по двум углам и по периметру и если последнее условие (касающееся величины периметра) устранить, то все треугольники, удовлетворяющие остальным условиям, подобны между собой.

При решении задач такого рода с большим удобством применяется метод подобных фигур: вначале строят фигуру, подобную искомой фигуре, а затем увеличивают или уменьшают ее в требуемом отношении.



Черт. 13.

В нашем примере — по углам α и β строят некоторый треугольник $A'B'C'$, периметр которого означим через u' (черт. 13); затем рассматривают точку O как центр подобия, наносят величину u, наконец, проводя параллельные прямые, строят искомый треугольник ABC.

2. Метод подобных фигур применяется постоянно в двух случаях.

α) Если для определения фигуры дана только одна длина, кроме нее же даны лишь углы и отношения. (Если не принимать в расчет данной длины, то все фигуры, удовлетворяющие остальным условиям, подобны.)

β) Если искомая фигура должна занимать определенное положение по отношению к данным линиям или точкам, так что устранение одного условия приводит к системе подобных и сходственно расположенных фигур.

---

* Дальнейшие многочисленные примеры можно найти в заслуживающей рекомендации (уже упоминаемой нами выше) книге Петерсена „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben". См. также прекрасную книгу Александрова.

3. Мы приведем теперь ряд задач для упражнения, которые могут быть решены помощью метода подобных фигур.

20. Известна сумма s стороны квадрата и его диагонали. Требуется построить квадрат.

21. В данный треугольник вписать квадрат.

22. В окружности даны два радиуса. Требуется построить хорду этой окружности, которая данными радиусами делилась бы на три равные части. (Обозначим через α угол между обоими радиусами. На произвольной прямой наносим подряд три равных отрезка $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$; затем восставляем перпендикуляр к отрезку $A'D'$ в его середине и отыскиваем на нем точку, из которой отрезок $B'C'$ виден под углом α; полученная фигура подобна искомой.)

23. Дан четырехугольник. Вписать в него ромб, стороны которого были бы параллельны диагоналям четырехугольника. (Чертят произвольный ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырехугольника, и проводят через его вершины прямые, параллельные сторонам четырехугольника.)

24. Требуется начертить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных прямых a и b.[20]

25. Даны две прямые l и a и точка F вне прямой a. Требуется отыскать на a такую точку X, расстояние которой от l было бы вдвое больше расстояния от F. (За центр подобия принимают точку пересечения прямых a и l.)

26. Даны две точки A и B и прямая g. Требуется построить окружность, проходящую через A и B и касающуюся прямой g.

27. Известны высоты h_a, h_b, h_c некоторого треугольника. Требуется построить этот треугольник. (Высоты треугольника, имеющего сторонами h_a, h_b, h_c, пропорциональны сторонам искомого треугольника.)

28. Даны две кривые K_1 и K_2 и точка P. Требуется через P провести прямую x так, чтобы $PA_1 : PA_2 = m : n$, где A_1, A_2 являются точками пересечения x соответственно с кривыми K_1, K_2, а m и n означают данные числа. (За центр подобия берут точку P и чертят кривую K_2', подобную кривой K_2 и сходственно с нею расположенную, с модулем $\frac{m}{n}$, т. е. умножают кривую K_2 на $\frac{m}{n}$.)*

§ 4. Метод вспомогательных фигур.

1. Некоторые геометрические задачи легко разрешаются путем присоединения к искомой фигуре отдельных линий, причем получаются фигуры, которые могут быть построены непосредственно по условиям задачи.

При изучении фигуры, подлежащей построению, принимается в соображение следующее.

Данные отрезки всегда вводят в фигуру. Если, например, дана сумма двух отрезков, то вводят в фигуру эту сумму.

Затем стараются найти линии, углы или целые части фигуры, которые легко могут быть определены

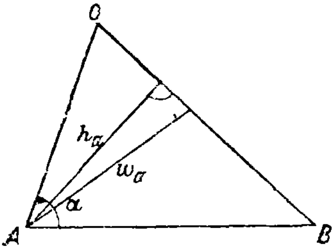
---

* Петерсен, там же.

по данным отрезкам; в частности, строят треугольники по трем данным элементам, которыми они определяются.

2 Поясним сказанное на нескольких задачах для упражнения.

29. Требуется построить треугольник ABC (черт. 14) по данному углу α, высоте h_a и биссектрисе w_a угла α. (По отрезкам w_a и h_a строится прямоугольный треугольник.)



Черт. 14.

30. Построить треугольник по высоте h_a, медиане m_a (исходящей из A) и радиусу r круга вписанного. (Сначала по отрезкам h_a, m_a строят прямоугольный треугольник и отыскивают вписанный круг по методу геометрических мест.) [21]

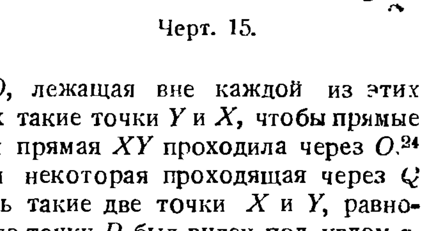
31. Построить треугольник по стороне a, сумме s двух других сторон b и c и высоте h_b. (Вводят в фигуру отрезок $b+c$, удлиняя сторону b в направлении от C к A на отрезок, равный c.)

32. Известны сторона a треугольника, противолежащий ей угол α и сумма s двух других сторон. Требуется построить треугольник. (Удлиняют b в сторону A на c и получают таким образом угол $\frac{\alpha}{2}$.)

33. Данную дугу окружности разложить на две дуги так, чтобы сумма соответствующих хорд была наибольшей. (Геометрическое доказательство?) [22]

34. Через точку пересечения двух окружностей провести прямую так, чтобы сумма отсекаемых на ней хорд была наибольшей. [23]

35. Даны прямая g, на ней точка O и вне ее две точки A и B. Требуется через A и B провести параллельные прямые AX и BYтак, чтобы $XO:OY = m:n$. (Делят прямую AB (черт. 15) в отношении $m:n$ и проводят через A и B прямые, параллельные ZO.)



Черт. 15.

36. Даны две параллельные прямые, на одной из них точка P, на другой — точка Q, наконец, точка O, лежащая вне каждой из этих прямых. Определить на данных прямых такие точки Y и X, чтобы прямые PX и QY были параллельны и чтобы прямая XY проходила через O. [24]

37. Даны две точки P и Q и некоторая проходящая через Q прямая g. Требуется на g определить такие две точки X и Y, равноотстоящие от Q, чтобы отрезок XY из точки P был виден под углом α. (Продолжают отрезок PQ до некоторой точки R так, чтобы отрезок QR равнялся PQ.) [25]

38. Известна сумма сторон треугольника, т. е. величина $s=a+b+c$, угол α и радиус R описанного круга. Требуется построить треугольник. [26]

39. Даны две параллельные прямые a и b, на прямой a точка A, на прямой b точка B и между обеими параллельными прямыми точка O. Требуется провести через O прямую, которая пересекала бы a и b

в точках X и Y так, чтобы $\overline{AX}+\overline{BY}=s$, где s есть данный отрезок. (Знаки отрезков $\overline{AX}$ и $\overline{BY}$ принимаются во внимание.)[27]

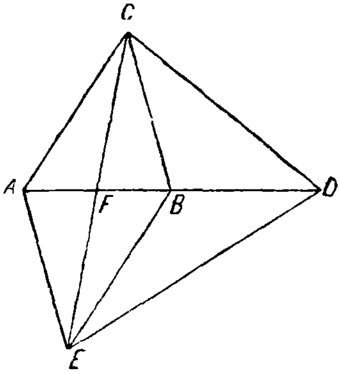
§ 5. Метод преобразования фигур.

(Параллельное перенесение, перекладывание, вращение.)

А) Параллельное перенесение.

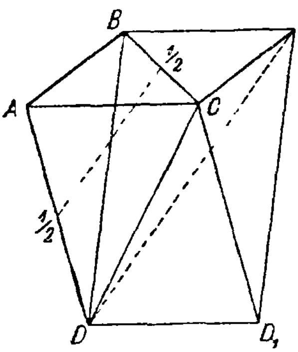
1. При решении геометрической задачи на построение часто бывает полезно перенести параллельно отдельные части фигуры и тем самым придать ей более удобный для решения вид.

Если, например, даны два отрезка и угол, между ними заключенный, и если один отрезок будет перенесен параллельно самому себе так, чтобы один из его концов совместился с одним из концов другого отрезка, то получится треугольник, из элементов которого известны две стороны и угол, между ними заключенный. Этот треугольник легко может быть построен, что может оказаться полезным при решении задачи.



Черт. 16.

Часто являются весьма полезными также и другого рода параллельные перенесения: если, например, в состав искомой фигуры входит многоугольник и через данную точку провести отрезки, параллельные и равные по длине сторонам многоугольника, то концы отрезков образуют новый многоугольник, который нередко легко поддается построению; затем уж строится искомый многоугольник.



Черт. 17.

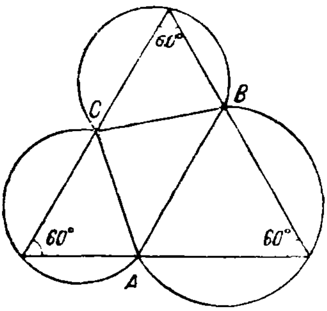
2. Для треугольника и четырехугольника существуют два особенно удобных параллельных перенесения.*

Именно, если в треугольнике ABC (черт. 16) перенести стороны AB, BC, AC соответственно в положения BD, EA, EB, то получится новый треугольник CDE. Стороны последнего параллельны медианам исходного треугольника и вдвое больше их по длине; углы, составленные сторонами, медианами и высотами в исходном треугольнике, сохраняют свое значение и в треугольнике CDE.

3. Для четырехугольника $ABCD$ во многих задачах является полезным следующее параллельное перенесение.

* Петерсен, там же.

Отрезок AC (черт. 17) переносят в положения BB_1 и DD_1; таким путем получается параллелограмм BB_1DD_1. Стороны его равны по длине диагоналям исходного четырехугольника; отрезки, исходящие из C, равны сторонам четырехугольника $ABCD$, а углы вокруг C равны углам того же четырехугольника; диагонали параллелограмма параллельны отрезкам, соединяющим середины противоположных сторон, и вдвое больше их по длине.



Черт. 18.

4. Мы снова предлагаем решить несколько задач для упражнения.

40. Даны три медианы треугольника. Требуется построить треугольник.

41. Даны две стороны параллелограмма и угол между диагоналями. Построить параллелограмм. (Одну диагональ переносят так, чтобы один из концов ее совпал с концом другой диагонали.)

42. Даны две окружности. Требуется построить отрезок данной длины s так, чтобы концы его лежали на данных окружностях и чтобы он был параллелен данной прямой.[28]

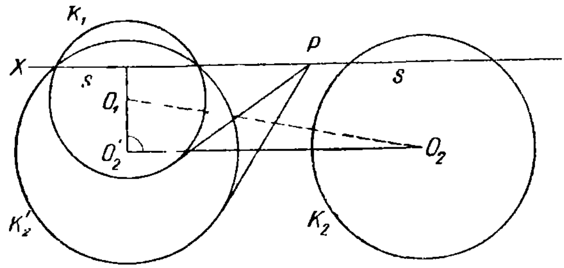
43. Дан треугольник ABC (черт. 18). Требуется описать вокруг него равносторонний треугольник с возможно большей площадью. (Задача сводится к тому, чтобы через точку пересечения двух окружностей провести прямую, для которой сумма отсекаемых на ней хорд была бы наибольшей. Задача 34.)

44. Даны диагонали трапеции и две непараллельные ее стороны. Построить трапецию.[29]

45. Даны стороны четырехугольника и длина отрезка, соединяющего середины диагоналей. Построить четырехугольник. (Соединяют середины диагоналей с серединами сторон.)[30]

46. На прямой линии g лежат две точки A и A'. Требуется разделить их гармонически точками P и P' так, чтобы отрезок PP' имел данную длину s.[31]

47. Требуется построить трапецию по параллельным сторонам и диагоналям.[32]



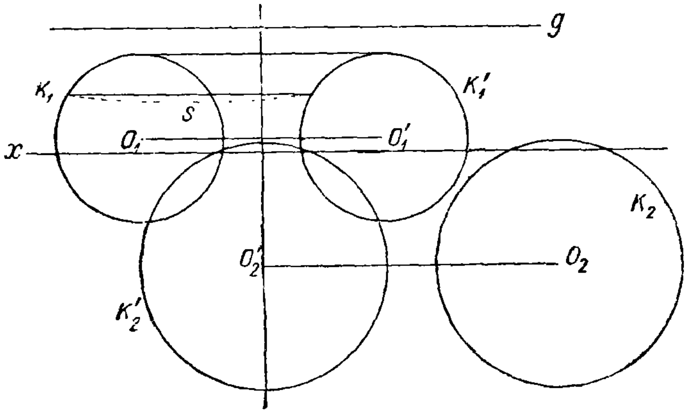
Черт. 19.

48. Даны диагонали четырехугольника, две противоположные стороны и угол между последними. Построить четырехугольник.[33]

49. Даны две окружности K_1 и K_2 и точка P (черт. 19). Требуется провести через точку P такую прямую, на которой обе окружности отсекли бы равные хорды. (Предполагают задачу решенною и перемещают окружность K_2 параллельно искомой прямой до тех пор, пока ее хорда не совпадет с хордой окружности K_1. Из нового центра O_2'

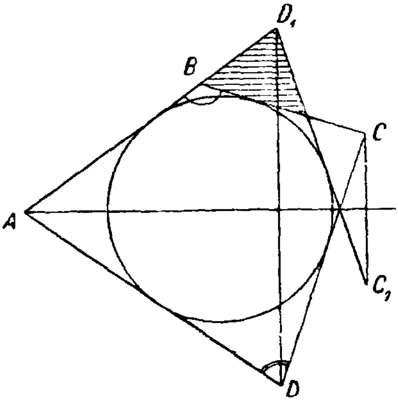
линия центров видна под прямым углом; касательная, проведенная из точки P к окружности K'_2, равна касательной из той же точки к окружности K_1.[84]

50. Даны две окружности K_1, K_2 и прямая g. Требуется провести параллельно g прямую x так, чтобы сумма хорд, которые на ней



Черт. 20.

отсекаются обеими окружностями, равнялась данному отрезку s. (Если перенести окружность K_1 (черт. 20) параллельно данной прямой на расстояние, равное s, то получится окружность K'_1; если, далее, построить перпендикуляр к линии центров O_1O_1' в ее середине и перенести окружность K_2 параллельно данной прямой так, чтобы ее центр упал на этот перпендикуляр, то уже определится искомая прямая x.)



Черт. 21.

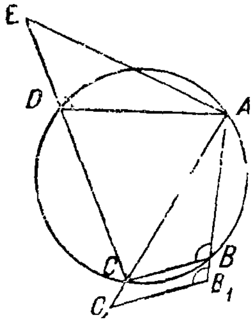
В) Перекладывание.

1. При этом методе фигуру приводят в положение, более удобное для решения, передвигая некоторую ее часть. И в этом случае следует по преимуществу вводить данные отрезки в фигуру, приводить к совпадению равные углы и отрезки или вычерчивать симметричные фигуры так, чтобы искомая точка оказалась на оси симметрии.

2. Метод выяснится при решении предлагаемых задач для упражнения.

51. Построить треугольник по сторонам a, b и по разности углов $\alpha - \beta = \delta$. (Если переложить искомый треугольник так, чтобы вершина A совпала с B, а B с A, то получится новый треугольник со сторонами a, b и с заключенным между ними углом δ.)

52. Даны стороны AD, AB, углы D и B четырехугольника $ABCD$, в который может быть вписан круг (описанный четырехугольник). Построить четырехугольник. (Проводят биссектрису угла A (черт. 21); пусть D_1, C_1 будут точки, симметричные точкам D и C в отношении этой биссектрисы; тогда прямая C_1D_1 также является касательной к окружности.)[35]



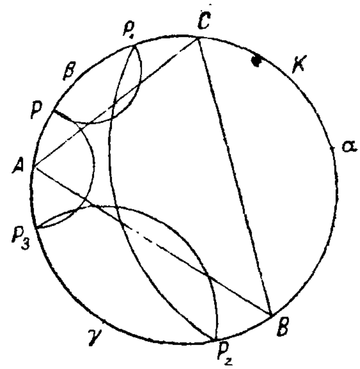
Черт. 22.

53. Даны четыре стороны вписанного в окружность четырехугольника. Построить четырехугольник. (Строят (черт. 22) $B_1A = AD$, B_1C_1 параллельно BC и $DE = B_1C_1$; тогда треугольник ADE конгруэнтен с треугольником AB_1C_1. Сначала строят треугольник CAE; при этом следует заметить, что $AE:AC = AD:AB$; см. геометрическое место f.)

54. Даны прямая l, точка F и прямая g, проходящая через F. Требуется построить на g такую точку X, которая равно отстояла бы от F и l. (Проводят через F нормаль n к прямой g и строят биссектрису угла между n и l.)

55. Даны окружность K, прямая g и на ней точка A. Требуется построить окружность, имеющую центр в некоторой точке X, так, чтобы она касалась g в точке A и пересекалась под прямым углом с окружностью K. (Если $K' = K$ пересекает прямую g в точке A под прямым углом, то точка X лежит на радикальной оси (перпендикуляре к линии центров в ее середине) окружностей K и K'.)

56. В окружность K требуется вписать треугольник ABC так, чтобы точки α, β, γ были серединами дуг, стягиваемых соответственными сторонами треугольника. (Если вращать произвольную точку P (черт. 23) по окружности вокруг β до точки P_1, затем P_1 вокруг α до точки P_2, и P_2 вокруг γ до точки P_3, то A будет серединой дуги $\overset{\frown}{P_3P}$.[36]



Черт. 23.

57. Даны окружность K и три исходящие из ее центра прямые a, b, c. Требуется описать треугольник ABC так, чтобы вершина A лежала на a, B на b, C на c. (Если произвольную касательную t (черт. 24) к окружности отразить в прямой a, полученную таким путем касательную t' — в прямой b и t'' в прямой c, то получится касательная t'''; сторона b искомого треугольника составляет равные углы с касательными t и t'''.)

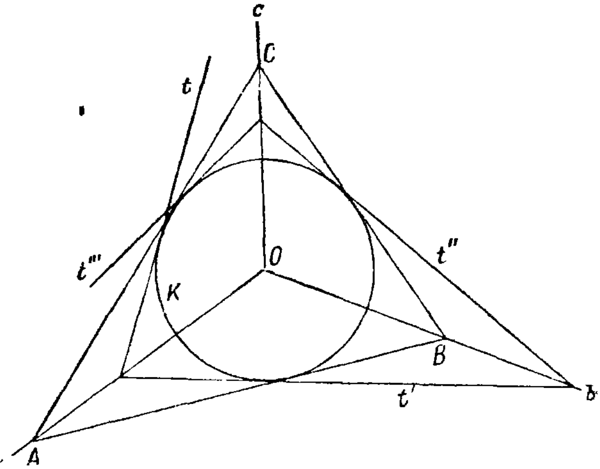
58. Даны треугольник ABC и прямая g, проходящая через вершину C. Требуется построить на g такую точку X, из которой стороны AC и BC видны под одним и тем же углом. (Отражают треугольник ABC в прямой g.)

59. Даны треугольник ABC и точка D на прямой AB. Ищется на AC такая точка X, из которой оба отрезка AD и DB видны под

одним и тем же углом. (Строят точку B_1, симметричную точке B в отношении прямой DX.)

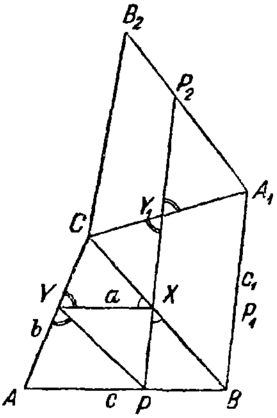
60. Даны две кривые C_1 и C_2 и прямая g. Требуется провести перпендикулярно к g прямую x так, чтобы обе кривые отсекали от нее равные отрезки, считая от точки пересечения g с x. (Поворачивают кривую C_2 вокруг g и рассматривают точки пересечения повернутой кривой с C_1.)

61. Даны прямая g и две точки A, B, лежащие с одной и той же стороны от прямой. Требуется построить на g точку X так, чтобы сумма $\overline{AX}+\overline{XB}$ была наименьшей. (Отражение B_1 точки B в прямой g соединяют с точкой A.)[37]



Черт. 24.

62. Даны треугольник ABC и точка P на стороне AB. Требуется вписать в треугольник новый треугольник PXY так, чтобы стороны искомого треугольника составляли равные углы со сторонами b и c данного треугольника (черт. 25).[38]



Черт. 25.

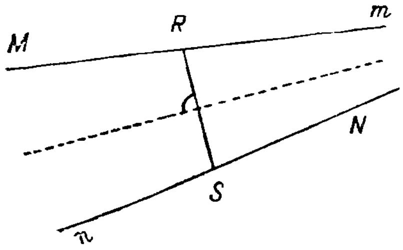
63. Дан треугольник ABC. Требуется вписать в него треугольник с наименьшим периметром. (По способу, употребленному в задаче 62, предложенная задача сводится к следующей (черт. 26). Даны две прямые m, n, на первой из них точка M, на второй — точка N. Требуется построить на этих прямых, соответственно, точки R и S так, чтобы $\overline{RM}=\overline{SN}$ и длина $\overline{RS}$ имела бы наименьшее значение. Отрезок RS будет перпендикулярен биссектрисе угла прямых m и n.)[39]

C) Вращение.

1. Если некоторую фигуру f повернуть вокруг центра O на угол α, то все точки фигуры опишут дуги различных радиусов, но отвечающие одному и тому же центральному углу α. Чтобы повернуть прямую g на угол α, можно, например, повернуть нормаль к этой прямой на угол α. Между новым положением g_1 прямой и первоначальным заключен угол вращения α.

Если, далее, приняв точку O за центр подобия, увеличить или уменьшить фигуру f_1 в определенном отношении или, как выражается Петерсен, умножить ее на некоторое число, то получится новая фигура f_2, подобная фигуре f_1, следовательно, и фигуре f.

2. Наоборот, если на плоскости даны две подобные и одинаково направленные[40] фигуры f и f_2, то всегда есть возможность построить точку O так, чтобы фигура f_2 могла быть получена из фигуры f путем вращения последней вокруг точки O и умножения на некоторое определенное число.

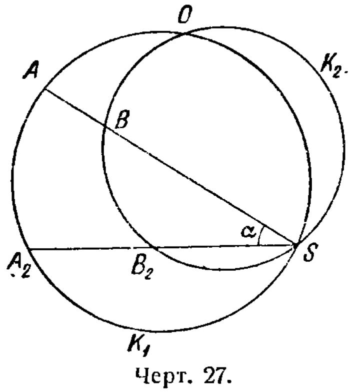


Черт. 26.

Достаточно доказать эту теорему лишь для того случая, когда фигура f есть отрезок AB, а фигура f_2 — отрезок A_2B_2, так как при одинаковом направлении обеих фигур все их точки совпадут, коль скоро будут приведены к совпадению оба отрезка. Для решения этой задачи заметим, что угол, составляемый обоими отрезками при точке S (черт. 27), и является искомым углом вращения α. Таким образом, точка O вместе с точками A, A_2, S должна лежать на некоторой окружности K_1 и вместе с точками B, B_2, S — на некоторой окружности K_2.[41] Число, на которое должна быть умножена фигура f, есть $\frac{A_2B_2}{AB}$.

3. При решении очень многих задач с удобством применяют вращение вокруг точки, причем, в случае надобности, пользуются и вышеприведенной теоремой.

Мы опять выясним это на задачах для упражнения.



Черт. 27.

64. Даны три прямые p, q, r и на p точка A. Требуется построить равносторонний треугольник так, чтобы одна из его вершин совпала с A, а две другие лежали соответственно на прямых q и r. (Вращают (черт. 28) сторону b, прямую r и вместе с ними точку C на $60°$ до совпадения с b_1, r_1, C_1.)

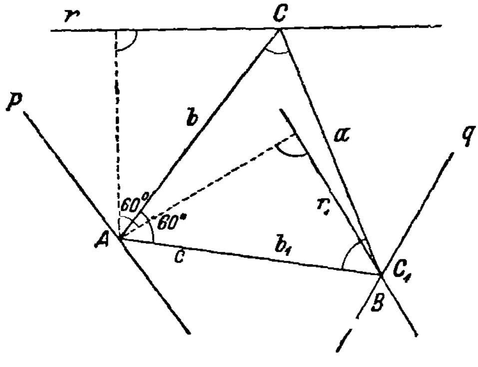
65. Дан квадрат. Требуется вписать в него равносторонний треугольник, одна из вершин которого лежала бы в точке, данной на стороне квадрата.[42]

66. Даны две прямые a и a_2, на первой — точка A, на второй — точка A_2 и вне обеих прямых — точка P. Требуется провести через P прямую x, которая встречает прямые a и a_2 соответственно в точках X и X_2 так, что

$$\overline{AX} : \overline{A_2X_2} = m : m_2,$$

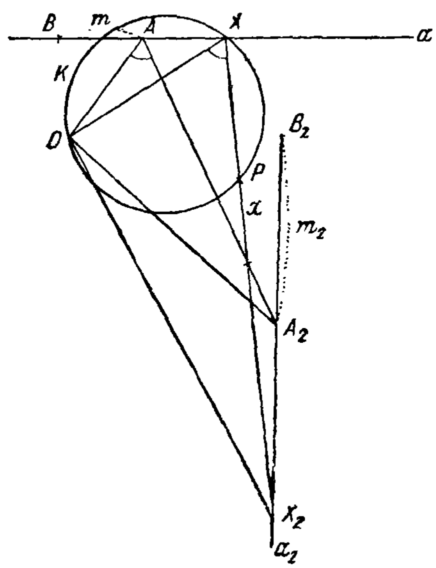
где m и m_2 суть данные числа. (На прямых a и a_2 от точек A и A_2 (черт. 29) откладывают отрезки, соответственно равные m и m_2; концы их обозначим через B, B_2. Затем рассматривают A и A_2, B и B_2 как сходственные (гомологичные) точки двух подобных систем и (сообразно с черт. 27) определяют центр вращения O. Так как, далее, треугольник XX_2O подобен треугольнику AA_2O, то $\measuredangle X = \measuredangle A$; поэтому точка X лежит на дуге K, построенной (согласно черт. 4) на отрезке OP.

67. Даны две прямые a и a_2, на них соответственно точки A и A_2 и вне обеих прямых — точка P. Требуется провести через P прямую, которая пересекла бы данные прямые соответственно в точках X, X_2 так, чтобы $\overline{AX} + \overline{A_2X_2} = s$, где s — данный отрезок. (Если отложить на a отрезок $AB = s$, то должно иметь место равенство $\overline{A_2X_2} = \overline{XB}$, так что предложенная задача сводится к задаче 66.) (Задача 68 опущена, ибо содержит ошибку.)



Черт. 28.

Петерсен в своем неоднократно нами упоминаемом сочинении приводит еще целый ряд весьма изящных задач на метод вращения, причем он пользуется следующими двумя предложениями.



Черт. 29.

a) Если многоугольник (оставаясь постоянно подобным самому себе) передвигается так, что три из его вершин описывают прямые линии, не проходящие через одну точку, то и каждая из остальных вершин многоугольника описывает прямую линию.

b) Если многоугольник (оставаясь постоянно подобным самому себе) передвигается так, что три его стороны вращаются вокруг постоянных точек, не лежащих на одной прямой, то все стороны многоугольника вращаются вокруг постоянных точек.

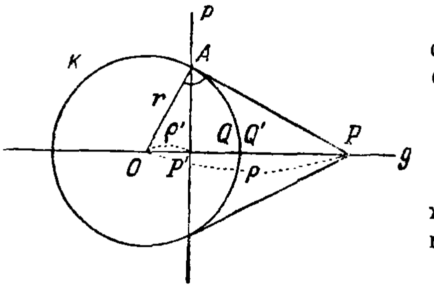
§ 6. Метод инверсии.

Весьма полезным методом для решения геометрических задач на построение, именно таких, которые относятся к окружностям, является метод инверсии или обратных радиусов. Он дает возможность заменять фигуры, содержащие окружности, более простыми фигурами.

1. Прежде всего мы должны будем разъяснить самый принцип инверсии (принцип обратных радиусов).

Пусть дана (черт. 30) окружность K радиуса r и точка P. Если прямую, соединяющую точку P с центром, продолжить до пересечения с полярой[43] p точки P, то получится точка P', которую и считают отвечающей точке P в отношении окружности K по принципу инверсии.

Из прямоугольного треугольника OAP вытекает немедленно, что



Черт. 30.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2,$$

следовательно, если положить $r = 1$, $OP = \rho$, $OP' = \rho'$,

$$\rho' = \frac{1}{\rho}.$$

Вот почему этот принцип отображения называется также принципом обратных радиусов.

Окружность K называется основной окружностью, точка O — центром инверсии, число r^2 — степенью инверсии.

2. Если точку P (черт. 30) передвигать вдоль прямой g, то и точка P' будет двигаться по этой прямой; если точку P постоянно удалять от центра, то P' будет постоянно приближаться к точке O; бесконечно удаленной точке прямой g по принципу инверсии отвечает точка O. Если P приближается вдоль прямой к точке O, то P' удаляется от O; точка Q окружности совпадает с отвечающей ей точкой Q'.

Между P и P' существует инволюционная зависимость, т. е., если P совпадает с P', то P' передвигается на место P, что вытекает из равенства

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$ [44]

Таким образом вся часть плоскости вне окружности отображается в части ее, ограниченной окружностью; все бесконечно удаленные точки имеют своим изображением точку O.

Если P передвигается вдоль некоторой прямой или кривой, то и точка P' описывает некоторую линию, которая носит название обратного изображения первой линии. В частности, прямая g отвечает сама себе (черт. 30), т. е. совпадает с отвечающей ей линией g'. Равным образом отвечает сама себе и окружность K, а именно, каждая ее точка сама себе отвечает.

3. Для последующего изложения важны некоторые теоремы, которые мы сейчас выведем.

а) Если (черт. 31) точки P' и Q' отвечают точкам P и Q относительно окружности K по принципу обратных радиусов, то

$$\triangle\, OPQ \sim \triangle\, OQ'P',$$

ибо

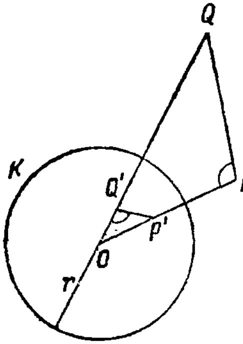
$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'},$$

следовательно:

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{OQ'} : \overline{OP'}.$$

Четыре точки P, P', Q, Q' лежат, таким образом, на окружности, 45
которая пересекает окружность K под прямым углом (с).

b) Если точка P движется вдоль прямой g, то точка P' описывает некоторую окружность, проходящую через O.



Черт. 31.

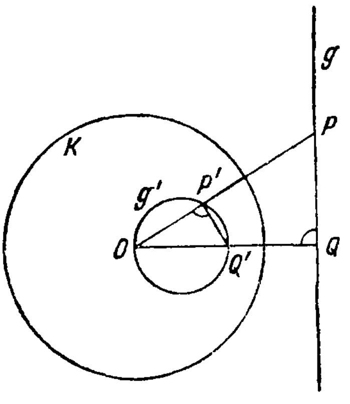
Доказательство. Если (черт. 32) OQ есть нормаль к g, P — произвольная точка на g, P' и Q' — точки, обратные точкам P и Q, то, согласно а),

$$\measuredangle OP'Q' = \measuredangle OQP = 90^\circ.$$

Таким образом P' лежит на окружности, построенной на отрезке OQ' как на диаметре.

Из чертежа ясно также, как построить окружность g', обратную прямой g.

c) Если A и A', B и B' суть взаимно обратные точки, лежащие на одной и той же прямой, исходящей из O, а P и P' — какая-нибудь другая пара взаимно обратных точек (черт. 33), то



Черт. 32.

$$\Delta\, APB \sim \Delta\, A'P'B',$$

ибо из а) вытекает:

$$\measuredangle\, OA'P' = \measuredangle OPA.$$

Равным образом

$$\measuredangle OB'P' = \measuredangle OPB,$$

следовательно:

$$\measuredangle A'P'B' = \measuredangle APB$$

(но их знаки противоположны).

Отсюда вывод: если точка P описывает окружность K_1, имеющую отрезок AB своим диаметром, то точка P' описывает окружность K'_1, имеющую своим диаметром отрезок $A'B'$.

Таким образом фигурой, обратной данной окружности, является снова некоторая окружность; обе окружности расположены так, что точка O является их внешним центром подобия.

Если окружность K_1 дана, то построение окружности K'_1 удобнее всего выполнить так: отыскивают точку Q', обратную точке Q, и строят центр окружности K_1' как точку, сходственную с центром окружности K_1. (Центры обеих окружностей не будут обратными точками.)

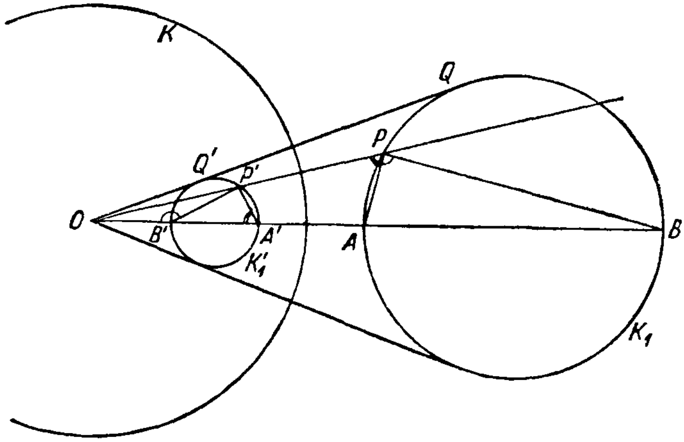
d) Из черт. 33 может быть выведено еще одно важное предложение: если APB есть бесконечно-малый треугольник, то обратную ему фигуру можно представить себе совпадающей с треугольником $A'P'B'$. Он подобен треугольнику APB, так как

$$\measuredangle P' = \measuredangle P \text{ и } \measuredangle B' = \measuredangle B.$$

Отсюда вытекает следующее предложение.

Если C_1, C_2 — две кривые, пересекающиеся под углом α, то и обратные им кривые C_1', C_2' пересекаются под тем же углом α;[46] в частности, если обе кривые касаются, то равным образом касаются и обратные им кривые.

Отображение, таким образом, удерживает в мельчайших частях сходство с отображаемой фигурой; оно сохраняет углы или конформно.



Черт. 33.

4. В тесной связи с упомянутым выше способом отображения находится другой способ, которым мы позже будем пользоваться.

Обозначим через O (черт. 34) постоянную точку, через r — данный отрезок, через P — произвольную точку плоскости; проведем прямую OP и на продолжении ее в сторону O построим точку P' так, чтобы

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = -r^2.$$

Если отнести друг к другу каждые две точки плоскости, удовлетворяющие этому равенству, то тем самым плоскость будет отображена сама в себе.

Если мы построим теперь точку P'' (черт. 34) по прежнему методу, т. е. так, чтобы

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP''} = r^2,$$

то станет ясным, что точка P' может быть получена из точки P'' при помощи вращения последней на 180°.

Таким образом, если F и F'' являются взаимно обратными фигурами по отношению к точке O как центру инверсии, и r^2, как степени инверсии, и если фигуру F'' повернуть вокруг O на 180°, то вновь образованная фигура F' и исходная фигура F будут также взаимно обратными при том же центре инверсии и степени $-r^2$.

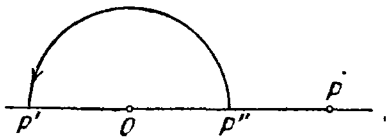
Радиус основного круга для степени $-r^2$ есть $r\sqrt{-1}$, т. е. является мнимым.

Выведенные выше теоремы сохраняют свою силу и для случая отрицательной степени.

Прямой отвечает снова проходящая через центр инверсии окружность, окружности отвечает окружность, причем O в этом случае является их внутренним центром подобия; отображение и теперь будет конформным, два обратных угла имеют, как и раньше, противоположные знаки.

Задачи для упражнения:

69. Кроме основной окружности K дана прямая. Требуется построить ее обратное изображение, если прямая касается окружности, пересекает ее или проходит вне ее.



Черт. 34.

Дана основная окружность K и еще окружность K_1. Построить фигуру, обратную K_1, в следующих случаях.

K_1 проходит через центр K; K_1 касается K извне или изнутри; K_1 пересекает K под острым углом, прямым углом; K_1 лежит целиком вне или внутри K.

70. Совокупность окружностей, имеющих одну и ту же радикальную ось,[47] называется пучком окружностей.

a) Если какие-либо две из этих окружностей пересекаются, то точки их пересечения лежат на их общей радикальной оси и вместе с тем принадлежат всем окружностям пучка. Пучок в этом случае имеет две вещественных основных точки и состоит из совокупности всех окружностей, проходящих через эти две точки (эллиптический пучок окружностей).

b) Может встретиться также такой случай, что никакие две окружности пучка не пересекаются в вещественных точках (гиперболический пучок окружностей).

Если K_1 и K_2 суть две окружности пучка, то по ним нетрудно построить остальные окружности пучка.

Если P есть точка пересечения их радикальной оси с центральной линией, то она имеет в отношении обеих окружностей одну и ту же степень p^2. Поэтому касательные, проведенные из P ко всем окружностям пучка, должны быть равны $(=p)$. Точки касания всех этих касательных лежат, таким образом, на окружности K, которая имеет центром точку P и пересекает все окружности пучка под прямым углом.

Если хотят построить еще какую-нибудь окружность K_3 пучка, то в окружности K проводят произвольный радиус и на конце его E восставляют к нему перпендикуляр, который пересечет центральную линию в точке O_3. Окружность O_3 (E) принадлежит пучку, ибо она имеет в точке P также степень p^2.[48]

Из построения вытекает также соотношение

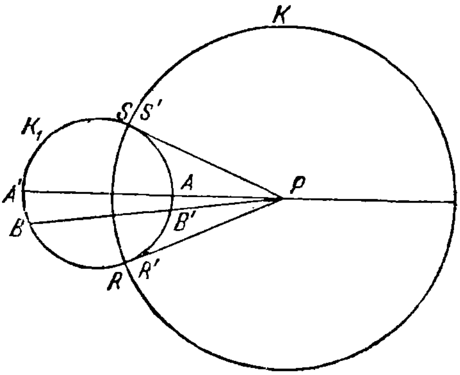
$$r^2 = d^2 - p^2,$$

где r - радиус окружности O_3, d — расстояние ее центра от P и p^2 — — постоянная степень точки P.

Если положить $d = p$, то $r = 0$, т. е. этот гиперболический пучок содержит также две точки (точки-окружности); они лежат в пересечении линии центров с окружностью K.

c) Если p есть общая радикальная ось пучка, Q - какая-нибудь точка этой оси, то она в отношении всех окружностей пучка имеет одну и ту же степень q^2; из нее, таким образом, ко всем окружностям можно провести касательные равной длины.

Если вокруг Q описать окружность радиусом q, равным этим касательным, то она пересечет все окружности пучка ортогонально (под прямым углом).



Черт. 35.

Таким образом вокруг каждой точки радикальной оси может быть описана окружность, пересекающая все окружности пучка ортогонально.

d) Совокупность всех этих ортогональных окружностей образует новый пучок, имеющий линию центров данного пучка своей радикальной осью.

Доказательство. Каждая окружность K_1 первого (данного) пучка пересекается ортогонально всеми окружностями второго пучка. Касательные к окружностям второго пучка в этих точках пересечения проходят, таким образом, через центр O_1 взятой окружности K_1.

Следовательно, произвольная точка O_1 линии центров первого пучка имеет одну и ту же степень в отношении всех окружностей второго пучка.

e) Если первый пучок имеет вещественные основные точки, то ортогональный пучок их не имеет. Узловые точки первого пучка (общие всем его окружностям) являются точками-окружностями ортогонального пучка.

Если же первый пучок не имеет вещественных основных точек, то второй пучок их имеет, именно, в точках-окружностях первого пучка.

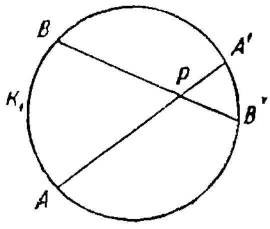
f) Если начертить фигуру, обратную системе концентрических окружностей и их диаметров, то получатся два ортогональных пучка окружностей. [49]

71. Дана окружность K_1 и вне ее точка P.

Если провести из P касательные к K_1 и вокруг P описать окружность K радиусом, равным этим касательным, то окружность K_1 будет отвечать сама себе по принципу инверсии в отношении окружности K; это требуется доказать. [50]

Окружности K и K_1 пересекаются под прямым углом. Отвечающие друг другу точки A и A', B и B',... (черт. 35) окружности K_1 образуют при этом инволюцию. Степенью нашей инверсии будет степень точки P в отношении окружности K_1.

И в том случае, когда P лежит внутри K_1 (черт. 36), можно установить инверсию, взяв точку P за центр, причем окружность K_1 отвечает сама себе. Степень инверсии снова равна степени точки P в отношении окружности K_1 и, следовательно, является отрицательной.



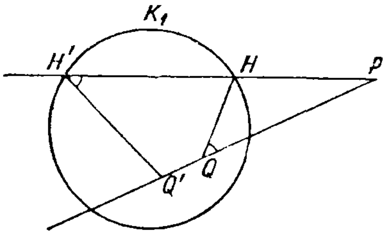
Черт. 36.

Основной круг K инверсии — мнимый. [51]

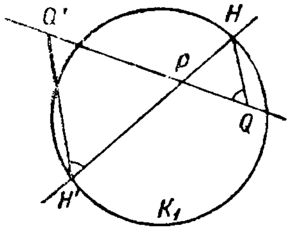
72. Даны окружность K_1 и точка P вне или внутри K_1 (черт. 37а, 37б). Требуется для некоторой точки Q построить точку Q', отвечающую ей в такой инверсии, при которой точка P является центром и окружность K_1 отвечает сама себе (см. 3 а).

73. Даны две окружности K_1 и K_2, которые касаются в точке A. Требуется, принявши точку A за центр инверсии, построить фигуры, обратные окружностям K_1, K_2; каково относительное взаиморасположение этих фигур? [52]

74. Пусть (черт. 38) K_1, K_2 — две данные окружности, p — их радикальная ось, K_3 — окружность, касающаяся обеих данных, t — общая касательная, которая принадлежит к той же системе касательных окружностей, что и K_3.



Черт. 37а.



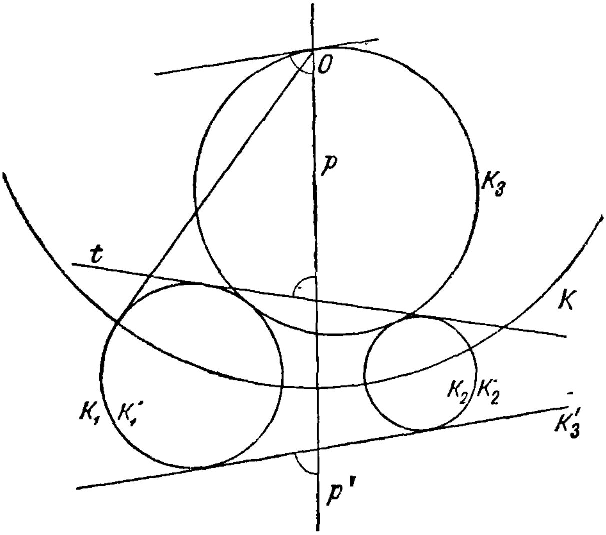
Черт. 37б.

Тогда окружность K_3 пересекает радикальную ось p под тем же углом, под которым пересекает ее прямая t; это предложение находит себе применение при решении аполлониевой задачи о касании.

Для доказательства проведем из точки O касательную к окружности K_1 (или K_2) и примем эту касательную за радиус окружности K, в отношении которой инвертируем всю рассматриваемую фигуру; при этой инверсии K_1, K_2 и p отвечают сами себе; K_3 переходит в общую касательную K'_3. Отображение будет конформным.

75. Даны окружность K и точки A и B. Требуется построить такую окружность, которая проходила бы через точки A и B и касалась бы окружности K.

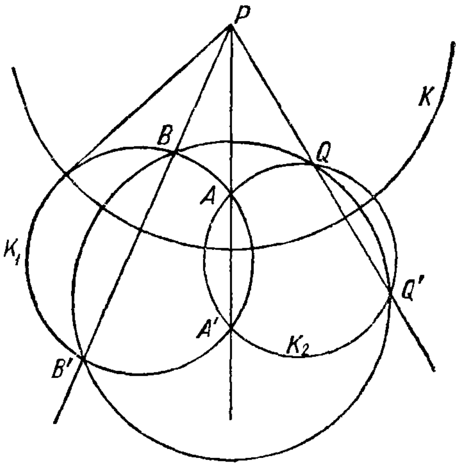
За центр инверсии берут произвольную точку окружности, если возможно — одну из точек пересечения с окружностью K перпендикуляра, восставленного к отрезку AB в его середине.



Черт. 38.

76. Даны три окружности K_1, K_2, K_3, имеющие общую точку S. Требуется построить окружность, касающуюся трех данных. (За центр инверсии принимают точку S.)

77. Даны окружность K_1, точки P и Q; проводят через P (черт. 39) произвольную секущую, которая пересекает K_1 в точках A и A', и затем строят окружность K_2, проходящую через точки A, A' и Q; если изменять секущую AP, то получатся новые окружности K_2, которые все проходят не только через точку Q, но еще через одну постоянную точку Q', и образуют, следовательно, пучок. (Касательные, проведенные из точки P к окружностям K_1 и K_2, равны по длине; если вокруг P описать окружность K радиусом, равным этим касательным, и принять ее за основную окружность инверсии, то K_1 и все окружности K_2 будут отвечать сами себе. Таким образом, окружности K_2 должны проходить еще через точку Q', отвечающую в силу инверсии точке Q.)



Черт. 39.

78. Даны окружность K_1 и две точки Q и Q'. Требуется построить окружность, которая проходит через Q и Q' и касается окружности K_1 (77).

79. Даны две окружности K_1 и K_2. Требуется построить окружность K, в отношении которой обе окружности были бы взаимно обратными (степень инверсии предполагается положительной).

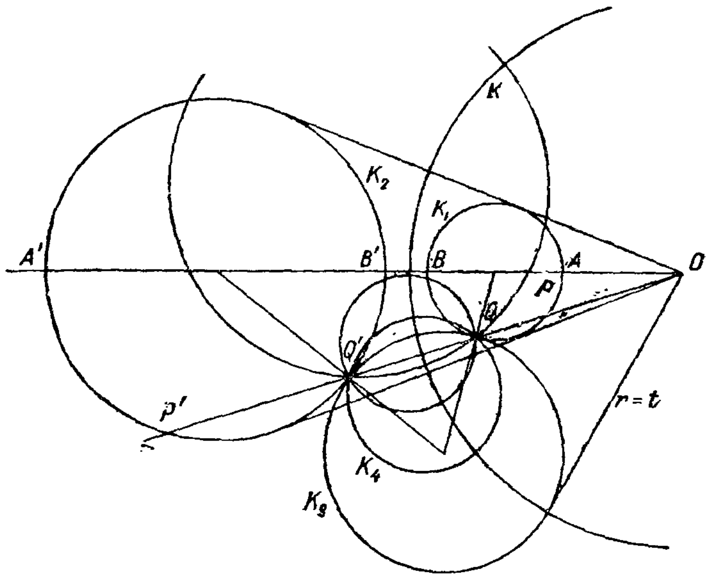
Центр O окружности K (черт. 40) должен быть внешним центром подобия окружностей K_1, K_2; радиус r окружности K определяется из равенства:

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}.$$

Так как обе окружности должны быть взаимно обратными фигурами, то получаем далее:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2.$$

Из принципа инверсии непосредственно вытекает, что окружность K_3 которая касается окружности K_1 в точке Q и проходит через точку Q', должна касаться окружности K_2 в точке Q'. В самом деле, в силу инверсии она отвечает сама себе, следовательно, пересекает основную



Черт. 40.

окружность инверсии под прямым углом (ср. 71). Отсюда вытекает часто применяемое предложение: е с л и о к р у ж н о с т ь к а с а е т с я д в у х д а н н ы х о к р у ж н о с т е й, т о п р я м а я, с о е д и н я ю щ а я о б е т о ч к и к а с а н и я, п р о х о д и т ч е р е з ц е н т р п о д о б и я, именно, через в н е ш н и й центр,—если касание для обеих окружностей о д н о г о р о д а, через в н у т р е н н и й центр—если касание н е о д н о г о р о д а.

Степень в н е ш н е г о центра подобия в отношении всех однородно касающихся окружностей K_3 оказывается, таким образом, постоянной, а именно, она равна

$$r^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}.$$

Как видоизменилась бы предшествующая задача, если бы вместо внешнего центра подобия за центр инверсии был принят внутренний центр подобия? (Окружность K была бы при этом мнимой.)

80. Если через взаимно обратные точки Q и Q' черт. 40 (задача 77) провести какую-нибудь окружность K_3, то по отношению к окружности K она отвечает сама себе и, таким образом, пересекает K ортогонально, а обе окружности K_1, K_2 — под равными углами. K_3 является изогональной окружностью обеих окружностей K_1, K_2.

Каждая ортогональная относительно K окружность есть изогональная окружность для K_1 и K_2, так как при инверсии она отвечает сама себе.

Пусть теперь будут даны три окружности M_1, M_2, M_3; через $A_{1,2}$ обозначим один из центров подобия окружностей M_1 и M_2, через $K_{1,2}$ — окружность, в отношении которой окружности M_1 и M_2 будут взаимно обратными, когда $A_{1,2}$ есть центр инверсии; символы $A_{1,3}$ и $K_{1,3}$ имеют аналогичное значение в отношении окружностей M_1 и M_3.

Все окружности, ортогональные в отношении окружности $K_{1,2}$ ($K_{1,3}$), пересекаются (согласно задаче 80) с окружностями M_1 и M_2 (M_1 и M_3) под равными углами. Все общие ортогональные окружности для окружностей $K_{1,2}$ и $K_{1,3}$ пересекаются, таким образом, со всеми тремя данными окружностями под равными углами.

Совокупность ортогональных окружностей двух данных окружностей образует пучок (70), который имеет своею радикальною осью линию центров этих двух окружностей.

Совокупность всех полученных указанным выше путем окружностей, изогональных в отношении M_1, M_2, M_3 образует, таким образом, пучок, имеющий своей радикальной осью — ось подобия a.[53]

Можно исходить из другой оси подобия трех окружностей, при этом снова получится пучок изогональных окружностей, имеющий эту ось подобия своею радикальною осью.

Таким образом мы приходим к теореме:

Совокупность всех изогональных окружностей трех данных окружностей образует четыре пучка, каждый из которых имеет своею радикальною осью одну из осей подобия.

Каждой окружности, касающейся окружностей M_1, M_2, M_3, соответствует другая окружность, также касающаяся окружностей M_1, M_2, M_3 и принадлежащая вместе с первой одному и тому же пучку.

Пусть точка Z будет радикальным центром трех окружностей; пусть, далее, окружность K пересекается со всеми тремя окружностями под прямым углом; K есть, таким образом, окружность, описанная около Z радиусом, равным каждой из касательных, которые могут быть проведены из Z к трем окружностям.

Если теперь принять окружность K за основную окружность инверсии, то окружности M_1, M_2, M_3 как ортогональные окружности K будут отвечать сами себе, и каждой изогональной окружности трех данных окружностей отвечает изогональная окружность того же пучка; в частности, каждой окружности, касательной к трем данным, отвечает другая окружность, также касательная к данным.

Но две окружности, взаимно обратные в отношении K, имеют точку Z своим центром подобия и пересекаются на окружности K.[54] Отсюда следует:

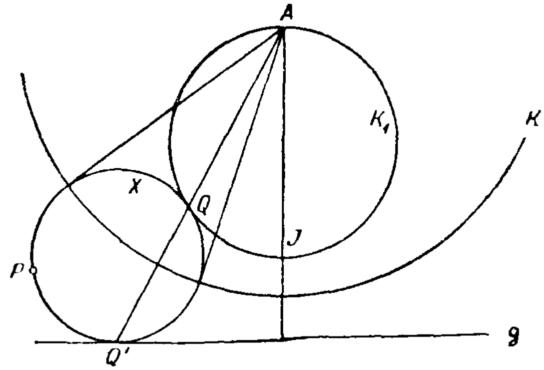
a) Основные точки четырех пучков изогональных окружностей лежат на K; окружность K, таким образом, принадлежит всем четырем пучкам изогональных окружностей.

Основные точки, следовательно, являются точками пересечения осей подобия с окружностью K.

b) Касательные окружности тех же пучков пересекают K в упомянутых выше основных точках и имеют точку Z своим центром подобия.

Эти замечания будут полезны при решении аполлониевой задачи о касании.

81. Даны две окружности K_1 и K_2 и точка P. Требуется построить окружность, проходящую через P и касающуюся обеих окружностей. За центр инверсии принимают центр подобия окружностей K_1 и K_2 и определяют радиус r основной окружности инверсии, в отношении которой окружности K_1 и K_2 отвечают одна другой.



Черт. 41.

Искомая окружность при этой инверсии отвечает сама себе и поэтому должна проходить через точку P', обратную точке P. Таким образом задача эта сводится к задаче 78.

За центр инверсии принимают сначала внешний, а затем внутренний центр подобия.

82. Даны прямая g, окружность K_1 и точка P. Требуется построить окружности X, которые касаются g и K_1 и проходят через P (черт. 41).

Принимают за центр инверсии точку A (или J), затем определяют основную окружность так, чтобы окружность K_1 и прямая g отвечали одна другой (для точки J эта окружность будет мнимой).

Степень точек A и J в отношении искомых окружностей непосредственно может быть определена из чертежа.

83. Пусть даны окружность K и n основных окружностей инверсии $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$, ..., $O_n(r_n)$; строят окружность K_1, обратную K в отношении $O_1(r_1)$, окружность K_2, обратную K_1 в отношении $O_2(r_2)$, окружность K_3, обратную K_2 в отношении $O_3(r_3)$ и т. д. Наконец, получают окружность K_n, обратную предпоследней окружности K_{n-1} в отношении $O_n(r_n)$.

Окружность K_n может совпадать с окружностью K; в таком случае окружность $O_n(r_n)$ должна быть тою окружностью, в отношении которой K_{n-1} и K отвечают друг другу.

Мы предположим, что окружность $O_n(r_n)$ именно так и выбрана.

Если теперь взять на окружности K какую-либо точку A, то помощью последовательных инверсий получится точка A_1 на окружности K_1, A_2 на K_2, ..., наконец, точка A_n на окружности K_n, вообще несовпадающая с взятой на K точкой A. Мы ставим себе следующую задачу.

Найти на окружности K такую точку A, которая совпала бы с точкой A_n.

Искомую точку обозначим через X. Ее разыскание представляет собою задачу последующего изложения. При этом главную роль играют две точки.

Если построить точку, отвечающую точке O_1 при второй инверсии $O_2(r_2)$, затем найти точку, отвечающую только что построенной при третьей инверсии $O_3(r_3)$, и т. д., то после $n-1$ последовательных инверсий относительно центров $O_2, \ldots, O_n$ получится некоторая точка H_1.

Если теперь найти точку, отвечающую точке O_n при инверсии $O_{n-1}(r_{n-1})$, затем — точку, отвечающую найденной при инверсии $O_{n-2}(r_{n-2})$, и т. д., проходя тот же ряд инверсий в обратном порядке, то, наконец, после $n-1$ инверсий получится точка H_n.

Каждой прямой a, проходящей через точку H_n, отвечает после n последовательных инверсий относительно центров O_1, O_2, ..., O_n некоторая прямая a', проходящая через H_1.

Доказательство. Первая инверсия преобразует прямую a в некоторую окружность a_1, проходящую через точку O_1; эта окружность после второй инверсии заменяется снова некоторой окружностью и т. д. Наконец после $n-1$ инверсий получится окружность, которая должна проходить через O_n, так как точка H_n, которая лежит на прямой a, после $n-1$ последовательных инверсий переходит в O_n. Последняя оставшаяся еще инверсия относительно O_n переводит упомянутую окружность в некоторую прямую a'.

При этом помощью первой инверсии по отношению к центру O_1 прямая a переходит в некоторую окружность a_1, которая должна проходить через O_1; окружность a_1, таким образом, помощью последовательных инверсий по отношению к центрам O_2, O_3, ..., O_n также переводится в прямую a'. Но так как окружность a_1 проходит через точку O_1, то прямая a' должна проходить через точку H_1, чем и доказывается теорема.

Таким образом после n инверсий по отношению к центрам $O_1, \ldots, O_n$ пучок лучей, исходящих из точки H_n, переходит в пучок лучей, исходящих из точки H_1.

При помощи точек H_1 и H_n и строится решение нашей задачи, однако же мы должны различать два случая в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным числом.

Дело в том, что при каждой инверсии угол α равен отвечающему ему углу, но имеет противоположный знак.

Если угол подвергнуть n последовательным инверсиям, то абсолютная величина его останется неизменной, знак же не изменится лишь в том случае, если n есть четное число. Если же n — нечетное число, то знак угла будет обратным.

a) n — четное число.

Если соединить искомую точку X на окружности K с точкой H_n, то этой прямой после n инверсий будет отвечать прямая XH_1. Обе линии должны при точке X составлять с окружностью равные углы одного и того же знака. Это возможно лишь тогда, когда X лежит на прямой H_1H_n.

Таким образом, наша задача имеет два решения: точки пересечения прямой H_1H_n с исходной окружностью K.

b) n — нечетное число.

В этом случае прямая H_1H_n не отвечает сама себе.

Если рассматривать эту прямую, как принадлежащую пучку H_1, и обозначить ее через s, то ей по вышесказанному отвечает некоторая прямая s' пучка H_n; если же отнести прямую H_1H_n к пучку H_n, обозначив ее при этом через σ, то в пучке H_1 ей отвечает прямая σ'.

Прямые H_1H_n, s' и σ' должны пересекать окружность K под равными углами, они поэтому должны касаться одной и той же окружности, имеющей общий центр с окружностью K. Далее, паре прямых s, σ' отвечает пара s', σ; следовательно, должны быть равны углы между σ' и s, σ и s'.

Это возможно лишь тогда, когда точки H_1 и H_n равно отстоят от центра окружности K.

Если теперь через точки H_1, H_n и центр окружности K провести новую окружность, то последняя пересечет окружность K в искомых точках X; в самом деле, прямая, соединяющая любую из этих точек пересечения с H_1, пересекает окружность K под тем же углом, что и прямая, соединяющая эту точку с точкой H_n.

Петерсен рассматривает (там же, № 201) эту задачу; но он не выводит того свойства, что точки H_1 и H_n равно отстоят от центра окружности K. Его построение точек X поэтому является менее простым, нежели вышеприведенное.

84.* Даны окружность K и четыре точки O_1, O_2, O_3, O_4. Требуется в окружность K вписать четырехугольник $XYZO$ так, чтобы стороны его XY, YZ, ZO, OX проходили соответственно через точки O_1, O_2, O_3, O_4.

[Помощью некоторой инверсии по отношению к центру O_1 окружность K преобразуется в самое себя (задача 71) затем инверсия по отношению к центру O_2 снова преобразует ее в самое себя; к аналогичным результатам приводят и (надлежаще выбранные) инверсии по отношению к O_3, O_4. Окружность K, таким образом, помощью четырех определенных инверсий преобразуется в самое себя. Точка X определяется согласно задаче 83, a).] [55]

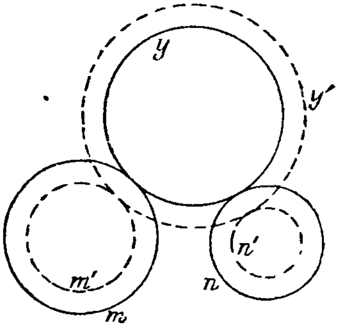
85. * Даны окружность и три точки O_1, O_2, O_3; требуется построить треугольник, вписанный в окружность так, что стороны его проходят через данные точки.

* Петерсен, там же.

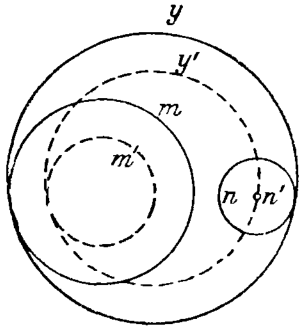
[Сводится к задаче 83, b).]

86. Даны три окружности K_1, K_2, K_3. Требуется построить окружность, касающуюся трех данных (аполлониева задача о касании).

Указанные методы дают нам возможность предложить целый ряд способов для решения этой исстари знаменитой задачи; мы изложим в пунктах a), b), c), d) некоторые из этих способов.



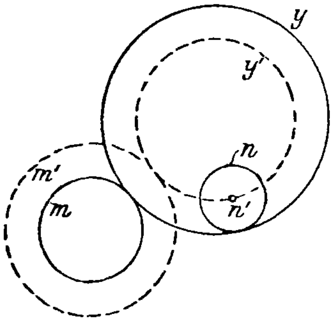
Черт. 42а.



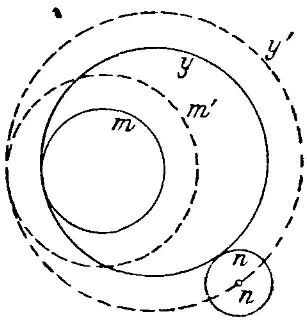
Черт. 42б.

a) Всегда можно эту задачу свести к следующему частному случаю.

Даны две окружности и точка. Требуется построить окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку.



Черт. 43а.



Черт. 43б.

Эта задача имеет (81) четыре решения.

Приведение общей задачи к этому частному случаю производится на основании следующего соображения.

Обозначим через m и n две окружности, через y — касающуюся их окружность (черт. 42а, 42б, 43а, 43б).

Мы можем эти три окружности изменять таким образом, чтобы центры их оставались постоянными и чтобы окружность y постоянно касалась окружностей m и n; при этом лишь увеличиваются или уменьшаются радиусы окружностей.

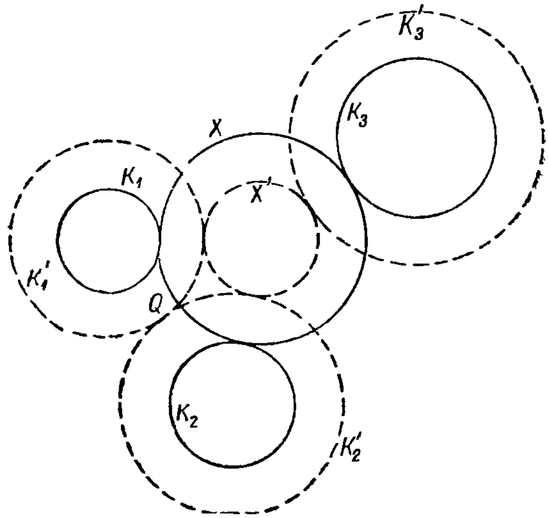
Если y касается обеих окружностей m и n одинаковым образом (черт. 42а, 42б), то радиусы обеих окружностей либо одновременно возрастают, либо одновременно убывают.

Если же y касается обеих окружностей m и n неодинаковым образом (черт. 43а, 43б), то радиус одной из этих окружностей возрастает в то время, как радиус другой убывает.

Пусть теперь даны три окружности K_1, K_2, K_3 с центрами в точках O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3. Обозначим через X окружность, касающуюся трех данных. Тогда окружность K_1 может быть сведена к точке O_1, причем одновременно радиусы двух других окружностей, как было указано выше, увеличиваются или уменьшаются. Задача, таким образом, сводится к задаче 81.

Построение может быть выполнено по следующему плану.

Вокруг точки O_2 описывают две окружности K_2' и K_2'' радиусами r_2+r_1 и r_2-r_1, вокруг точки O_3 подобным же образом описывают окружности K_3', K_3'' радиусами r_3+r_1 и r_3-r_1. После этого строят такие окружности, которые проходят через O_1 и сверх того касаются окружностей K_2' и K_3' или K_2'' и K_3'', а именно — обеих одинаковым образом (четыре решения).



Черт. 44.

Далее строят окружности, которые проходят через O_1 и сверх того касаются окружностей K_2', K_3'' или K_2'', K_3', а именно — неодинаковым образом (четыре решения).

Найденные восемь окружностей будут концентрическими с искомыми окружностями. Задача поэтому имеет восемь решений.

b) Предполагают задачу решенною, затем увеличивают или уменьшают радиусы окружностей таким образом, чтобы две окружности, например, K_1' и K_2' касались друг друга в точке Q (черт. 44).

Если теперь принять точку Q за центр инверсии, то окружности K_1' и K_2' обратятся в параллельные прямые и т. д.

c) Обозначим через K окружность, которая пересекает все три данные окружности под прямым углом (стр. 42).

Если принять точку O на окружности K за центр инверсии, то данные окружности преобразуются в окружности, центры которых лежат на одной прямой. С помощью еще одной инверсии можно притти к случаю, изображенному на черт. 3. [56]

Является выгодным по возможности выбирать центр инверсии в точке пересечения окружности K с одной из данных окружностей.

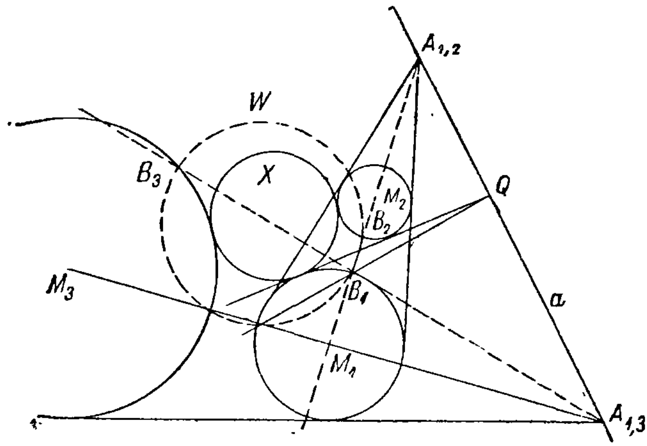
Если две из данных окружностей пересекаются, то удобно центр инверсии поместить в точке их пересечения, благодаря чему эти окружности преобразуются в прямые линии.

Полезно также, прежде чем применить инверсию, свести одну из окружностей к точке (с помощью приема, указанного в задаче 86, а).

d) Из предложений, установленных в задаче 80, вытекает следующее решение аполлониевой задачи о касании.

Пусть даны три окружности M_1, M_2, M_3 (черт. 45).

Мы исходим из оси подобия, например, из внешней оси подобия a, и строим изогональную окружность W, принадлежащую тому пучку изогональных окружностей, для которого радикальной осью служит прямая a.



Черт. 45.

Для этой цели мы берем на окружности M_1 точку B_1 и строим точку B_2 на M_2, обратную точке B_1 в отношении точки $A_{1,2}$ как центра инверсии;[57] сверх того мы находим на окружности M_3 точку B_3, обратную точке B_1 в отношении $A_{1,3}$ как центра инверсии.

Окружность W, проходящая через три точки B_1, B_2, B_3, является изогональной окружностью (80).

Если теперь построить радикальную ось окружностей W и M_1 и через Q обозначить точку пересечения ее с прямой a, то Q будет иметь одну и ту же степень в отношении M_1 и W; но так как точка Q лежит на прямой a, то она будет иметь ту же степень и в отношении искомой окружности X, которая принадлежит пучку изогональных окружностей W, ибо a является радикальной осью этого пучка. Таким образом Q есть точка радикальной оси окружностей X и M_1.

Так как, далее, окружности X и M_1 должны касаться друг друга, так что их радикальная ось есть их общая касательная, то отсюда уже вытекает способ построения точки касания окружностей X и M_1 (черт. 45).

е) Изящное решение аполлониевой задачи, основанное на стереометрических исследованиях, будет нами рассмотрено в следующем параграфе.

§ 7. Стереометрические исследования как средство решения геометрических задач на построение.

1. Стереометрические исследования часто с пользою применяются при решении геометрических задач на построение, например, при решении следующей задачи.

Дано коническое сечение. Требуется построить другое коническое сечение, которое имело бы двойное касание с данным коническим сечением и удовлетворяло бы трем другим условиям, например, проходило бы через три точки.

Мы, однако, не станем ближе рассматривать эту задачу и прибегнем к стереометрическим исследованиям лишь для решения задач и для доказательства предложений в рамках обрабатываемых нами проблем.

2. Прежде всего мы помощью рассмотрения пространственных образов докажем несколько предложений, которыми позже будем пользоваться.

a) Пусть даны две окружности K_1 и K_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2.

Восставим в точках O_1 и O_2 к плоскости чертежа перпендикуляры и отложим на них соответственно радиусы r_1 и r_2; построенные этим путем точки S_1 и S_2 соединим соответственно со всеми точками окружностей K_1, K_2.

Полученные таким образом конические поверхности, для которых направляющими служат окружности, мы будем называть прямоугольными коническими поверхностями, так как каждое их осевое сечение представляет собою прямоугольный равнобедренный треугольник.

Если теперь в обеих окружностях провести два одинаково направленных радиуса, то они будут проекциями двух параллельных образующих конических поверхностей. Если через эти образующие провести плоскость, то след ее пройдет через точку A пересечения прямой, соединяющей вершины конусов, с плоскостью чертежа, поэтому прямая, соединяющая концы радиусов, также проходит через точку A.[58]

При этом мы представляли себе обе конические поверхности расположенными по одну и ту же сторону плоскости чертежа.

Если же взять точку S_1 по одну сторону плоскости чертежа, а точку S_2 — по другую, то совершенно аналогично получится главное свойство внутреннего центра подобия обеих окружностей.

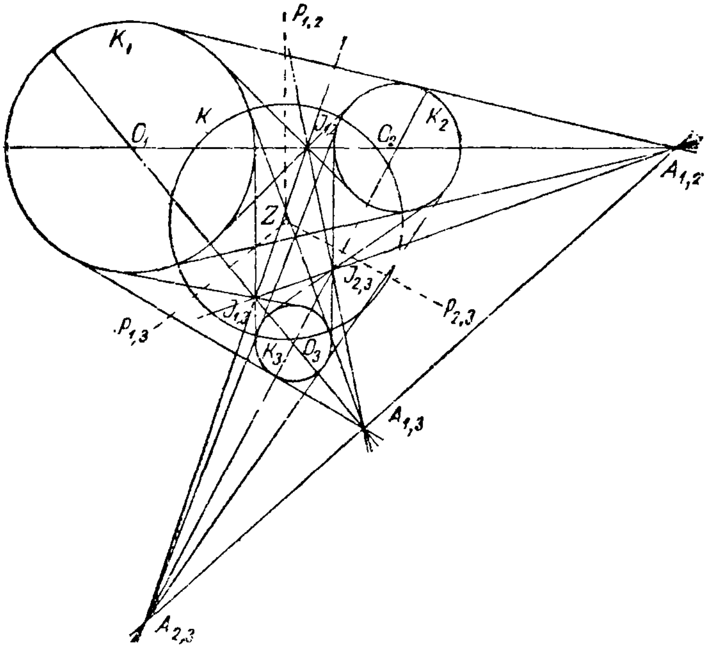
b) Пусть даны (черт. 46) три окружности K_1, K_2, K_3 с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами r_1, r_2, r_3.

В точках O_1, O_2, O_3 снова восставляем перпендикуляры, на которых откладываем радиусы r_1, r_2, r_3, например, все — вверх от плоскости чертежа; таким образом получаются точки S_1, S_2, S_3.

Точка пересечения прямой S_1S_2 с плоскостью чертежа есть внешний центр подобия $A_{1,2}$ обеих окружностей K_1, K_2. Аналогично этому и $A_{1,3}$ лежит в пересечении той же плоскости с прямой S_1S_3, $A_{2,3}$ — в пересечении этой же плоскости с прямой S_2S_3.

Три прямые S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1 лежат в плоскости, определяемой тремя вершинами конусов. Следовательно, их следы $A_{1,2}$, $A_{2,3}$, $A_{3,1}$ лежат на одной прямой.

Если, далее, построить эти конические поверхности иначе: на окружности K_1 — вверх от плоскости чертежа, а на окружностях K_2 и K_3 — вниз, то с помощью совершенно аналогичных рассуждений выведется предложение, что точки $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, $A_{2,3}$ лежат на одной прямой, и т. д.



Черт. 46.

Таким образом с помощью стереометрических исследований доказано следующее предложение.

Шесть центров подобия трех окружностей образуют вершины полного четырехсторонника.[59]

Стороны его носят название осей подобия трех окружностей.

c) Рассматривая пространственные образы, можно легко получить и основные предложения теории поляр для окружности.

Пусть дана окружность K. Ее рассматривают как окружность большого круга некоторого шара, одна половина которого расположена над плоскостью чертежа, а другая под нею.

Если взять теперь точку P вне шара (на плоскости чертежа), то ее поляра p будет ортогональной проекцией круга касания того конуса, который можно из точки P описать вокруг шара. Если точка P

передвигается вдоль некоторой прямой g, то этот круг касания изменяется, но его окружность всегда проходит через точку касания тех касательных к шару плоскостей, которые могут быть проведены через прямую g. Поляра точки P вращается, таким образом, вокруг точки G, если P описывает прямую g.

Если G описывает некоторую прямую f, то g вращается вокруг точки F — полюса прямой f. Действительно, поляра g точки G согласно вышесказанному может быть найдена следующим образом: в точке G восставляем перпендикуляр к плоскости чертежа, продолжаем его до пересечения с поверхностью шара в некоторой точке S, затем проводим через S касательную к поверхности шара плоскость, которая пересечет плоскость чертежа по искомой прямой g.

Прямая f будет проекцией некоторого круга s шара. Касательные плоскости во всех точках окружности этого круга огибают некоторый конус вращения, вершина которого F лежит на плоскости чертежа.

Если теперь передвигать точку G вдоль прямой f, то точка S постоянно будет лежать на окружности s, так что ее касательная плоскость всегда будет проходить через F, т. е.: если точка G передвигается по прямой f, то ее поляра g вращается вокруг точки F.

d) Мы докажем теперь еще одно предложение, опираясь на стереометрические исследования. Предложением этим мы впоследствии часто будем пользоваться. Оно состоит в следующем.

Обозначим через A, B, C и A', B', C' вершины двух треугольников, лежащих в одной плоскости, через a, b, c и a', b', c' — соответственные их стороны. Если прямые, соединяющие соответственно вершины A и A', B и B', C и C', проходят через одну и ту же точку S, то стороны a и a', b и b', c и c' соответственно пересекаются в трех точках P, Q, R, лежащих на одной прямой s.

Наоборот: Если стороны a и a', b и b', c и c' пересекаются соответственно в точках P, Q, R, лежащих на одной прямой, то прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну и ту же точку S.[60]

Доказывая оба эти предложения при помощи стереометрических исследований, мы будем пользоваться следующими двумя непосредственно очевидными истинами.

1. Если прямая g лежит в плоскости F, то след ее на другой плоскости E лежит на прямой пересечения плоскостей E и F.

2. Если проектировать прямую g на плоскость E, то проекция прямой g всегда пройдет через ее след на плоскости E, независимо от того, будет ли центр проекции конечной точкой или бесконечно удаленной.

α) Рассмотрим теперь на плоскости E два треугольника ABC и $A'B'C'$, расположенные так, что прямые, соединяющие соответственно точки A и A', B и B', C и C', проходят через одну и ту же точку S.

Проведем через S произвольную прямую h, не лежащую, однако, в плоскости E, и возьмем на ней две точки O и O'; точку O соединим с вершинами треугольника ABC, а точку O' — с вершинами второго треугольника $A'B'C'$.

Прямые OA и $O'A'$ пересекутся в некоторой точке A'', так как они лежат в одной и той же плоскости; равным образом пересекутся прямые OB и $O'B'$ — в точке B'', прямые OC и $O'C'$ — в точке C''.

Мы получили в пространстве треугольник $A''B''C''$, по отношению к которому оба данных треугольника будут центральными проекциями, именно, треугольник ABC есть проекция треугольника $A''B''C''$ из центра O, треугольник $A'B'C'$ есть проекция того же треугольника из центра O'.

Прямые a и a' должны поэтому проходить через след прямой $B''C''$ на плоскости E. Точка $P(\equiv a \times a')$ является, таким образом, следом прямой $B''C''$.

Аналогично этому, точка $Q(\equiv b \times b')$ есть след прямой $A''C''$ и точка $R(\equiv c \times c')$ — след прямой $A''B''$ на плоскости E.

Точки P, Q, R должны лежать на прямой пересечения плоскости E с плоскостью, определяемой тремя точками A'', B'', C''.

Этим доказывается первая часть теоремы.

β) *Пусть два треугольника ABC и $A'B'C'$, лежащие в одной плоскости, будут так расположены, что точки P, Q, R пересечения соответственных сторон a и a', b и b', c и c' лежат на одной прямой s.*

Проведем через s вспомогательную плоскость H и построим на ней треугольник $A''B''C''$ так, чтобы сторона $B''C''$ проходила через точку P, $C''A''$ — через Q, $A''B''$ — через R.

Стороны этого нового треугольника обозначим через a'', b'', c''. Если мы теперь проведем три плоскости соответственно через прямые a и a'', b и b'', c и c'', то они пересекутся в некоторой точке O; O есть такая точка пространства, из которой треугольник $A''B''C''$ проектируется в ABC.

Аналогично этому мы находим точку O', из которой треугольник $A''B''C''$ проектируется в $A'B'C'$.

Прямая OO' пересекает плоскость E в точке S, которая должна лежать на одной прямой с точками A, A', равно как с точками B, B' и C, C'. Это вытекает из того, что точки O, O' лежат с каждой парой точек A и A', B и B', C и C' в одной плоскости.[61] Теорема доказана вполне.

Два треугольника, находящиеся в такого рода относительном положении, называются двумя *перспективно* расположенными или *гомологичными* треугольниками.

3. *Отображение окружностей плоскости в пространстве (циклография Фидлера)* (Fiedler).

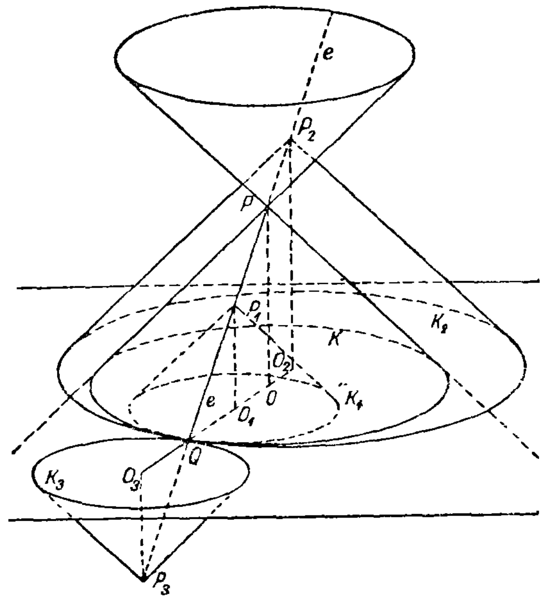
Обозначим через K окружность на плоскости E, через O — ее центр, через r — ее радиус; восставим в точке O перпендикуляр к плоскости E и отложим на нем радиус r. Мы *построим таким образом некоторую точку* P.

Если, наоборот, *дана точка* P, *то ей будет отвечать на плоскости* E *одна лишь окружность*, которую можно получить, опустив из точки P на плоскость E перпендикуляр и описав вокруг основания его окружность радиусом, равным длине этого перпендикуляра.

Точка P вместе с окружностью K определяет прямоугольный конус, который мы уже выше изучали. Каждой окружности K отвечают две точки пространства: одна над плоскостью чертежа, другая под нею. (Плоскость E мы предполагаем горизонтальной.)

Если окружность сводится к точке, то она совпадает со своим пространственным изображением. Прямой g отвечают две плоскости, проходящие через g и пересекающиеся с E под углом в 45°.[61a]

4. Пусть дана на плоскости E окружность K; пусть точка P будет ее пространственным изображением, именно, над плоскостью E (черт. 47).



Черт. 47.

Если теперь взять на образующей e конической поверхности какую-нибудь точку, то ей отвечает определенная окружность на плоскости E, которая касается окружности K в точке Q, являющейся следом образующей e на плоскости E. Если при этом точка лежит над плоскостью E, ниже точки P, как, например, точка P_1, то отвечающая ей окружность K_1 касается окружности K изнутри, в то время как окружность K_2, которая отвечает точке P_2 (черт. 47), касается окружности K, заключая ее в себе; окружности K_3, отвечающие всем точкам конической поверхности, лежащим под плоскостью E, касаются окружности K извне.

5. Решение аполлониевой задачи о касании.

Этих немногих замечаний достаточно для решения аполлониевой задачи о касании.

Пусть даны три окружности K_1, K_2, K_3. Строим соответствующие конусы по методу циклографии. Каждой окружности отвечают два конуса. Мы сначала будем рассматривать те три конуса, которые лежат над плоскостью чертежа.

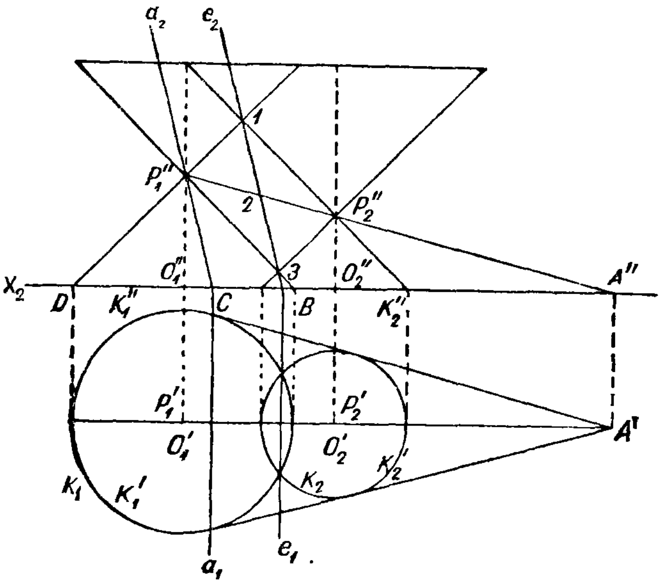
Любые два из этих конусов пересекаются по некоторой кривой, которая, как мы сейчас увидим, оказывается гиперболой. Точки X_1, X_2 пересечения этой гиперболы с третьим конусом суть те точки, которые одновременно принадлежат поверхностям всех трех конусов.

Если теперь на плоскости чертежа построить окружности, отвечающие этим общим точкам X_1 и X_2, то они должны будут касаться данных окружностей, т. е. будут двумя из искомых окружностей.

Другие решения получатся, если не ограничиваться исключительно конусами, расположенными над плоскостью чертежа, а взять некоторые из них расположенными под нею.

6. Выполнение построения для решения аполлониевой задачи о касании.

1. Предыдущий пункт уже содержит общее решение аполлониевой задачи. Для того же чтобы сделать возможно более простым выполнение самого построения, нужны еще некоторые замечания.



Черт. 48.

a) На черт. 48 представлены в ортогональной проекции план и профиль двух прямоугольных конических поверхностей P_1, P_2, оси которых перпендикулярны горизонтальной плоскости проекций и равноотстоят от вертикальной плоскости проекций.

Вторая проекция кривой пересечения этих двух конусов есть часть прямой e_2. Кривая пересечения, таким образом, лежит в одной плоскости и является гиперболой. [62]

Первый след e_1 плоскости, в которой лежит кривая пересечения, проходит через общие точки окружностей K_1' и K_2', т. е.: горизонтальный след плоскости, в которой лежит кривая пересечения обеих конических поверхностей, есть радикальная ось окружностей K_1 и K_2.

b) Прямая P_1P_2 пересекает основную плоскость в точке A — центре подобия обеих окружностей. Прямая a_1 черт. 48 является полярой точки A относительно окружности K_1. Прямые a_1 и a_2 суть следы плоскости, которая проходит через точку P_1 и называется полярной плоскостью точки A в отношении конуса P_1.

Точки A'', B, C, D будут четырьмя гармоническими точками.[63] Четыре луча, соединяющих с ними точку P_1'', образуют, следовательно, гармонический пучок лучей, который, как известно, пересекает каждую прямую (в том числе и прямую e_2) в четырех гармонических точках.

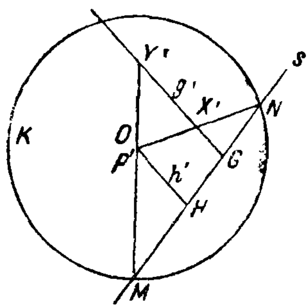
Далее, так как точка *2* черт. 48 есть середина отрезка $\overline{1, 3}$, так что четвертая гармоническая точка ряда *1*, *2*, *3* лежит в бесконечности, то прямая a_2 должна быть параллельна прямой e_2. Отсюда заключаем о параллельности плоскостей a_1, a_2 и e_1, e_2.

Итак, имеет место предложение:

Плоскость e_1, e_2, в которой лежит кривая пересечения обоих конусов P_1, P_2, параллельна полярной плоскости a_1, a_2 точки A относительно конической поверхности K_1 (или K_2).

c) Обозначим через K некоторую окружность в плоскости чертежа (черт. 49); на ней снова построим прямоугольный конус (с вершиною P). Проекция P' вершины на плоскость чертежа совпадает с точкой O.

Соединим некоторую точку H плоскости чертежа с точкой P прямою h; h' есть ее проекция. Через произвольную точку G плоскости чертежа проведем прямую g параллельно h (прямая g', параллельная h', есть ее проекция). Требуется определить точки X, Y пересечения прямой g с конической поверхностью.



Черт. 49.

Проведем через прямые h и g вспомогательную плоскость; она пересечет плоскость чертежа по линии s, а коническую поверхность по двум образующим, проекциями которых служат прямые OM и ON. Искомые точки X, Y должны лежать на этих образующих. Итак, точки X', Y' найдены (черт. 49).

2. С помощью этих и ранее приведенных замечаний мы теперь легко уже можем решить аполлониеву задачу.

Пусть будут даны три окружности K_1, K_2, K_3 с центрами O_1, O_2, O_3 (черт. 50).

a) Вообразим себе на этих окружностях прямоугольные конические поверхности P_1, P_2, P_3, все три — над плоскостью чертежа. Требуется определить общие точки этих трех конусов.

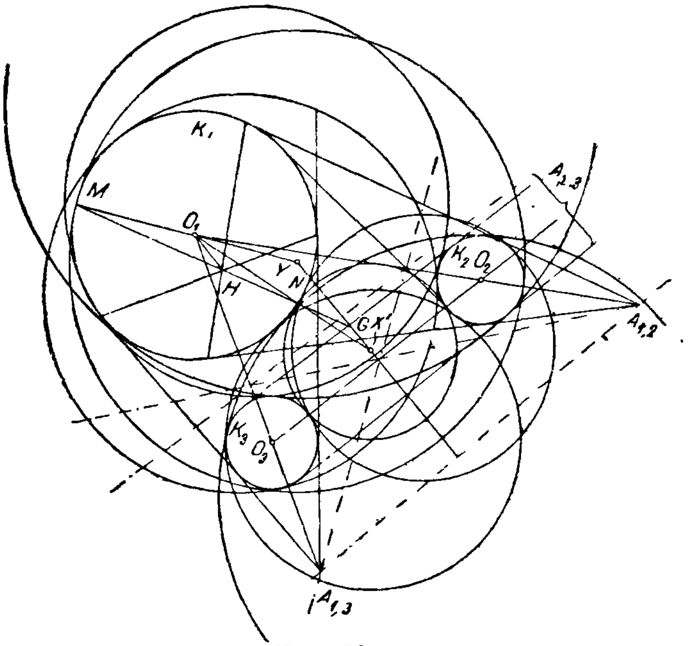
С этой целью рассмотрим кривую пересечения конусов P_1 и P_2. Эта кривая лежит в плоскости $s_{1,2}$, проведенной через радикальную ось $p_{1,2}$ параллельно той плоскости, которая, как мы это показали в предыдущем пункте [см. a) и b)], определяется полярой $a_{1,2}$ и точкой P_1.

Обратимся теперь к кривой пересечения конических поверхностей P_1 и P_3. Она лежит в плоскости $s_{1,3}$, проведенной через радикальную ось $p_{1,3}$ параллельно плоскости $a_{1,3}$, P_1.

b) Таким образом общие точки трех конических поверхностей лежат на прямой g пересечения обеих плоскостей $s_{1,2}$ и $s_{1,3}$ и могут быть получены как точки пересечения прямой g с каким-нибудь из трех конусов, например с P_1.

Далее, прямая g параллельна прямой h пересечения обеих плоскостей $a_{1,2}$, P_1 и $a_{1,3}$, P_1; поэтому проекции X', Y' точек пересечения прямой g с конусом P_1 определяются согласно пункту с) (черт. 49).

Найденные таким путем точки X' и Y' будут центрами окружностей, которые касаются трех данных окружностей. Точки касания можно найти, соединив прямыми точки X', Y' с центрами данных окружностей.



Черт. 50.

c) Итак, нами уже получены две из искомых окружностей.

Другие касательные окружности мы получим, если не все три конуса возьмем по одну сторону плоскости чертежа, но два из них по одну, а третий по другую сторону от нее.

Каждое такое построение дает две окружности, следовательно, всего их будет восемь. Бо́льшего числа решений получить нельзя, так как, допустив, например, что все три конуса лежат над плоскостью, мы придем к тем же решениям, к которым мы пришли бы в предположении, что все три конуса расположены под нею.

3. Это жергонново (Gergonne) решение аполлониевой задачи о касании может быть представлено и в другом виде.

Точка H пересечения прямых $a_{1,2}$ и $a_{1,3}$ (черт. 50) будет полюсом одной из осей подобия трех окружностей [§ 7, 2, b)].

Точка G пересечения прямых $p_{1,2}$ и $p_{1,3}$ есть радикальный центр трех окружностей (§ 6). Прямая O_1H перпендикулярна к оси подобия, следовательно, и прямая g' перпендикулярна к последней.

Для нахождения центров X' и Y' поступают так.

Сначала строят радикальный центр G трех окружностей (черт. 50), затем полюс H одной из осей подобия относительно окружности K_1. Если соединить точки H и G прямою, то она пересечет окружность K_1 в двух точках M и N. Проекции точек M и N из центра O_1 на перпендикуляр g', опущенный из точки G на ось подобия, и будут искомыми точками X', Y'.

Каждая из четырех осей подобия трех окружностей доставляет два решения, так что всего их восемь.

На черт. 50 вычерчены все восемь касательных окружностей. Для того чтобы не загромождать чертежа, построение приведено лишь для окружностей, касающихся однородно.

Задачи для упражнения.

88. Какое геометрическое место образуют пространственные изображения P всех окружностей плоскости, касающихся двух прямых линий? [64]

89. Совокупность всех окружностей, имеющих общую радикальную ось, называется пучком окружностей. [65]

Если две какие-либо окружности пучка пересекаются в двух вещественных точках, так что пучок имеет вещественные основные точки, то между окружностями пучка существует наименьшая, именно та, которая имеет общую хорду своим диаметром. Если же пучок окружностей не имеет вещественных основных точек, то к числу окружностей пучка принадлежат также две точки K_1 и K_2.

Именно, если P есть точка пересечения радикальной оси с линией центров окружностей, p^2 — степень точки P в отношении всех окружностей пучка, d — расстояние центра одной из окружностей пучка от точки P, r — радиус этой окружности, то всегда имеет место равенство:

$$r^2 = d^2 - p^2.$$

Таким образом

$$r = 0,$$

если

$$d = p.$$

Какую кривую опишут пространственные изображения пучка окружностей с вещественными основными точками, с мнимыми основными точками? [66]

90. Каждому пучку окружностей отвечает ортогональный пучок окружностей. [67] Именно, если p есть общая радикальная ось первого пучка, то каждая точка прямой p есть центр некоторой окружности, которая пересекает все окружности первого пучка ортогонально.

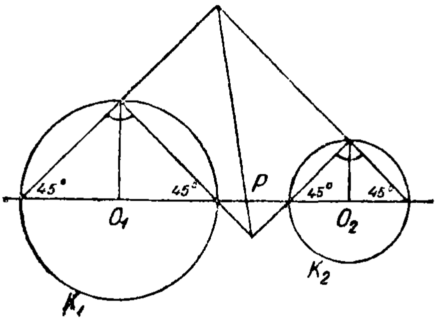
Если начертить все эти ортогональные окружности, то они снова образуют некоторый пучок, который имеет мнимые или вещественные основные точки в зависимости от того, имеет ли первый пучок вещественные или мнимые основные точки.

Пусть теперь дан некоторый пучок окружностей и соответствующий ортогональный пучок. Каковы пространственные изображения окружностей обоих пучков?

91. Даны точка A плоскости чертежа и окружность K. Какое геометрическое место образуют пространственные изображения всех окружностей плоскости, которые проходят через точку A и касаются окружности K? [68]

92. Дана прямая g. Какое геометрическое место образуют пространственные изображения всех окружностей плоскости, которые касаются прямой g? [69]

93. Даны прямая и точка. Какое геометрическое место образуют вершины всех прямоугольных конических поверхностей, отвечающих тем окружностям, которые касаются данной прямой и проходят через данную точку? [70]



Черт. 51.

94. Дана окружность. Какое геометрическое место образуют пространственные изображения всех окружностей плоскости, которые касаются данной окружности? [71]

95. Даны две окружности. Какое геометрическое место образуют вершины всех прямоугольных конических поверхностей, отвечающих окружностям, которые касаются двух данных? [72]

96. Даны окружность и прямая. Какое геометрическое место образуют вершины всех прямоугольных конических поверхностей, отвечающих окружностям, которые касаются данной окружности и данной прямой? (См. задачи 92, 94.)

97. Даны две окружности K_1 и K_2. Если провести прямые, как показано на черт. 51, то точка P будет лежать на радикальной оси обеих окружностей. (Доказательство получается из черт. 48 путем вращения плоскости симметрии обеих конических поверхностей.)

98. *Даны две окружности и точка P. Требуется по указанному выше способу Жергонна построить четыре касательные окружности.*

Радикальная ось точки и окружности делит пополам касательные, которые можно провести из точки к окружности. Если даны точка и окружность, то их внешний и внутренний центры подобия совпадают с данной точкой. Если даны две окружности и точка, то осей подобия существует, таким образом, всего лишь две.

99. *Даны две окружности и прямая. Требуется построить все окружности, касающиеся данных окружностей и прямой.*

Если из двух окружностей одна вырождается в прямую, то радикальная ось обеих окружностей совпадает с прямой; внутренний и внешний центры подобия при этом лежат на рассматриваемой окружности, а именно, *внутренним центром подобия* является точка этой окружности, *наиближайшая* к прямой, *внешний* же *центр* подобия совпадает с точкой окружности, наиболее удаленной от прямой.

Все построение имеет такой же вид, как и прежде.

100. Даны окружность, прямая и точка. Требуется построить все окружности, касающиеся данной окружности и данной прямой и проходящие через данную точку.

Если из двух окружностей одна вырождается в прямую, в то время как другая сводится к точке, то радикальная ось совпадает с прямой, а оба центра подобия сливаются с точкой.

В этом случае снова применимо построение Жергонна.

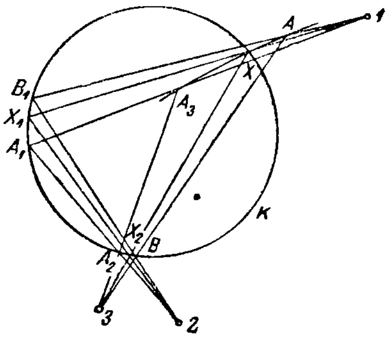
101. Даны окружность и две точки. Требуется построить все окружности, которые проходят через эти точки и касаются данной окружности.

Если две окружности сводятся к точкам, то их радикальной осью будет перпендикуляр к определяемому этими точками отрезку в его середине, внутренний центр подобия совпадает с серединой линии центров, в то время как внешний центр подобия лежит в бесконечности.

§ 8. Приближенное решение задач на построение.

1. В предшествующих параграфах мы изучали важнейшие методы, полезные при решении геометрических задач на построение, и применили их к большому числу задач.

Дальнейшие примеры можно найти в часто цитируемой нами книге Петерсена „Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben“ (на нем. яз. перев. Fischer Benzon, Копенгаген 1879) и в многочисленных других сочинениях.



Черт. 52.

Если для решения предложена геометрическая задача на построение, то, несмотря на указанные методы, нередко приходится долго размышлять и внимательно изучать фигуру, пока не будет найдено удовлетворительное решение.

2. Если же эта геометрическая задача должна быть решена быстро, между тем как строгое ее решение неизвестно или вообще невозможно с помощью циркуля и линейки (существуют и такие задачи, как мы позже увидим), то применяются приближенные методы.[73]

Один чрезвычайно употребительный приближенный метод мы разъясним на примере.

3. Требуется решить построением следующую задачу.

Дана окружность K и три точки $1, 2, 3$ (черт. 52). Предлагается вписать в окружность треугольник XX_1X_2 так, чтобы стороны треугольника проходили соответственно через данные точки $1, 2, 3$ (ср. задачу 85).

С целью решения этой задачи берут некоторую точку A на окружности K и определяют затем точки A_1, A_2, A_3 (черт. 52). A есть искомая точка X, если A_3 совпадает с A.

Если же изменять взятую точку A, то точка A_3 опишет некоторую кривую f, так называемую *кривую ошибок*, которая пересекает данную окружность K в искомой точке X.

Строят небольшое число точек кривой f вблизи ее точки пересечения с K.

Таким путем строится точка X с совершенно достаточной для практики точностью.

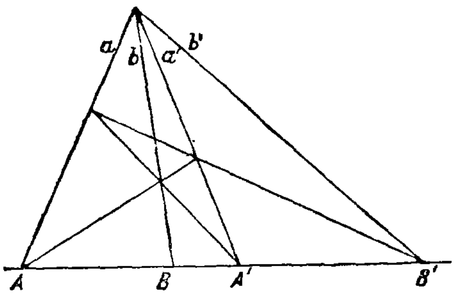
Глава II.

ПОСТРОЕНИЯ, ВЫПОЛНЯЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОВЕДЕНИЯ ЛИШЬ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ, ПРИ УСЛОВИИ ПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫМИ ФИГУРАМИ (ПОСТРОЕНИЯ ШТЕЙНЕРА).

§ 9. Введение.

1. В настоящей главе мы, главным образом, будем рассматривать задачи, которые могут быть решены с помощью проведения лишь прямых линий, если уже начерчены либо две параллельные прямые, либо параллелограм, в частности, квадрат, либо, наконец, окружность.

2. Существуют также и такие задачи, которые могут быть решены с помощью проведения исключительно прямых линий без употребления каких-либо данных фигур.[74]



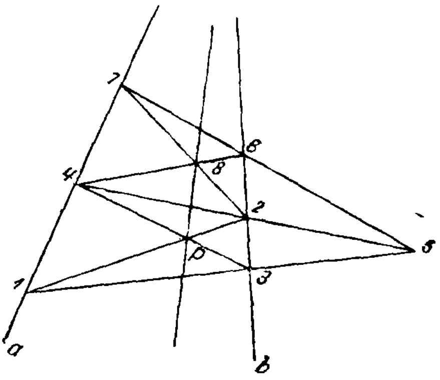
Черт. 53.

Этими средствами можно, например, по трем данным точкам A, B, A' построить такую точку B', которая от точки B гармонически отделялась бы точками A, A' (черт. 53).[75]

Равным образом, всегда можно, проводя лишь прямые линии, построить четвертый луч b' (черт. 53) гармонического пучка — по трем его лучам.

Следующая задача также может быть решена путем проведения прямых линий без других предположений.

Даны две прямые a, b и точка P (черт. 54). Требуется провести через P прямую, которая проходила бы через недоступную точку[76] пересечения обеих данных прямых a и b. Решение ясно из чертежа; оно основывается на двукратном применении теоремы, выражаемой предыдущим чертежом.



Черт. 54.

В проективной Геометрии известен еще целый ряд задач, которые могут быть решены проведением одних лишь прямых линий, без обращения к каким-либо чуждым задаче данным.

Если, например, известны пять точек некоторого конического сечения, то с помощью шестиугольника Паскаля можно, проводя лишь прямые линии, построить вторую точку пересечения конического сечения с прямой, проходящей через одну из данных пяти точек.

Вот другая задача такого же рода.

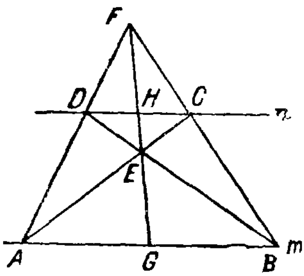
Если известны пять точек A, B, C, D, E конического сечения K_1 и пять точек A, B, C, F, G конического сечения K_2, так что даны три общих точки этих конических сечений, то четвертая их общая точка может быть построена проведением одних прямых линий.

102. Две вершины четырехугольника лежат в доступной части плоскости чертежа, две другие — в недоступной ее части. Требуется построить прямую, соединяющую обе недоступные вершины, проводя одни лишь прямые линии.

§ 10. Построения, выполняемые помощью проведения одних лишь прямых линий, если даны две параллельные прямые.*

Мы должны сначала упомянуть об одном предложении, которое в последующем изложении часто будет находить себе применение.

1. Если (черт. 55) соединить точку E пересечения обеих диагоналей трапеции $ABCD$ с точкой F пересечения обеих непараллельных сторон ее, то сторона AB делится прямою EF пополам.



Черт. 55.

В самом деле:

$$\overline{AG} : \overline{GB} = \overline{DH} : \overline{HC},$$

и

$$\overline{AG} : \overline{GB} = \overline{HC} : \overline{DH}.$$

Умножение этих пропорций приводит к доказательству предложения.

С помощью этого предложения могут быть решены следующие задачи.

103. На прямой даны три точки A, G, B так, что точка G лежит в середине отрезка AB. Требуется, проводя одни лишь прямые линии, построить прямую, проходящую через данную точку D и параллельную данной прямой.

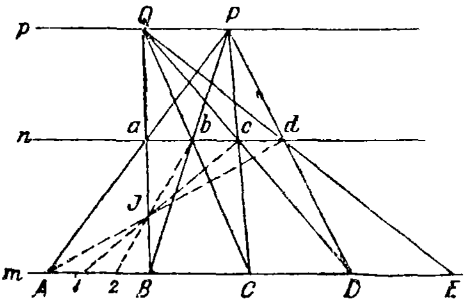
104. Даны две параллельные прямые m, n и на прямой m отрезок AB. Требуется разделить этот отрезок пополам, проводя одни лишь прямые линии.

105. Даны две параллельные прямые m, n и вне их точка P. Требуется построить проходящую через точку P прямую, параллельную данным, проводя одни

* Построения следующих § 10, 11, 12, 13 изложены в известном сочинении Якова Штейнера „Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises“ (Berlin 1833, Oswalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften, Nr. 60). Имеется русский перевод этой книги.

лишь прямые линии. (Сначала строят на прямой m два равных отрезка.)

106. Даны две параллельные прямые m, n и на m некоторый отрезок. Требуется его удвоить, пользуясь лишь проведением прямых линий.*



Черт. 56.

2. Если даны две параллельные прямые m, n и на одной из них отрезок AB, то без труда могут быть решены следующие задачи.

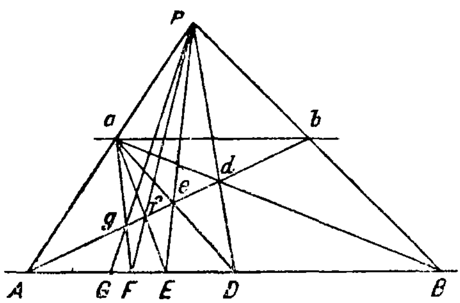
107. Требуется увеличить отрезок AB (черт. 56) в несколько раз. (Проводят прямую p, параллельную m, см. задачу 105.)

108. Требуется разделить отрезок AB на данное число равных частей, например, на три части. (Сначала утраивают отрезок AB и определяют точку J (черт. 56)).

109. Требуется на прямой m построить отрезок, отношение которого к отрезку AB равнялось бы $r:s$, где r и s суть целые взаимно простые числа. (Отрезок AB делят на r равных частей и откладывают одну из этих частей s раз.)

110. Требуется отрезок AB разделить на две части, которые относились бы, как $r:s$.

Замечание. Брианшон** в своем сочинении дал чрезвычайно изящный способ построения путем проведения одних лишь прямых линий третьей, четвертой, пятой...части данного отрезка AB, в предположении, что дана некоторая прямая ab, параллельная прямой AB.



Черт. 57.

Берут произвольную точку P (черт. 57) и проводят прямые Ab и Ba; отрезок AD будет половиной отрезка AB. Если, далее, провести прямые Da и Pe, то отрезок AE будет третьей частью отрезка AB, ибо точки A, E, D, B являются четырьмя гармоническими точками, как это вытекает из их положения в полном четырехугольнике $aedP$.

---

* Во всей этой главе единственной дозволенной чертежной операцией является проведение прямых линий. Таким образом задача только тогда считается решенной, если она решена с помощью проведения прямых линий.

** Брианшон (Brianchon), „Application de la Théorie des Transversales“. стр. 37, Париж 1818.

Действительно,

$$\overline{AE}:\overline{ED}=\overline{AB}:\overline{DB};$$

но так как $\overline{AB}=2\,\overline{DB}$, то отсюда следует, что

$$\overline{AE}=2\,\overline{ED},$$

так что

$$\overline{AE}=\frac{1}{3}\,\overline{AB}.$$

Если затем провести прямые Ea и Pf, то получится точка F, причем

$$\overline{AF}=\frac{1}{4}\,\overline{AB},$$

что вытекает из рассмотрения гармонических точек A, F, E, D.

Если провести прямые Fa и Pg, то получится точка G, причем

$$\overline{AG}=\frac{1}{5}\,\overline{AB},$$

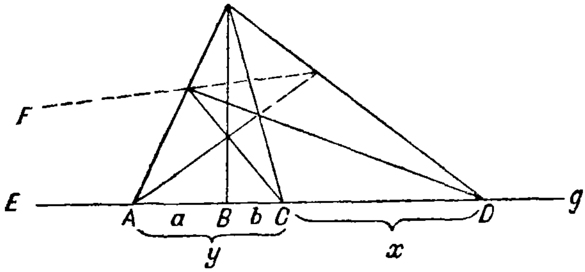
как это следует из рассмотрения четырех гармонических точек A, G, F, E.

Это построение может быть повторяемо неограниченное число раз.

111. Вообразим, что фигура черт. 57 так спроектирована целиком на другую плоскость, что точка P переносится в бесконечность и угол при A становится прямым. Какая фигура при этом получится?

3. На некоторой прямой g (черт. 58) даны два отрезка AB, BC, находящиеся друг к другу в определенном рациональном отношении $a:b$ (например, $5:3$).

Требуется, пользуясь лишь проведением прямых линий, построить прямую, проходящую через данную точку P и параллельную прямой g. Решение задачи сводится к тому, чтобы получить на прямой g два равных по длине отрезка.



Черт. 58.

Допустим, что a больше b, и построим четвертую гармоническую точку D (черт. 58). Тогда

$$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{CD}$$

или

$$a:b=(a+b+x):x,$$

так что

$$x=\frac{b(a+b)}{a-b}.$$

Следовательно:

$$\overline{CD}:\overline{AC}=\frac{b(a+b)}{a-b}:(a+b)=b:(a-b).$$

Таким образом мы получили два отрезка, которые относятся, как $b:(a-b)$; при этом числитель и знаменатель отношения (оставаясь целыми числами) будут соответственно меньше[77] предыдущих.

(В нашем частном случае оба эти отрезка относятся, как $3:2$.)

Теперь с отрезками AC, CD мы поступим точно таким же образом, т. е. построим точку E, которая от C гармонически отделяется точками A, D, и получим два отрезка, для которых числитель и знаменатель отношения снова меньше предыдущих. Повторяя это построение, мы, наконец, придем к отрезкам, равным по длине.

В нашем частном примере:

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 5 : 3,$$

поэтому (черт. 58)

$$\overline{AC} : \overline{CD} = 2 : 3.$$

Если построить точку E, гармонически связанную с C в отношении точек A, D, то

$$\overline{AD} : \overline{DE} = 2 : 1.$$

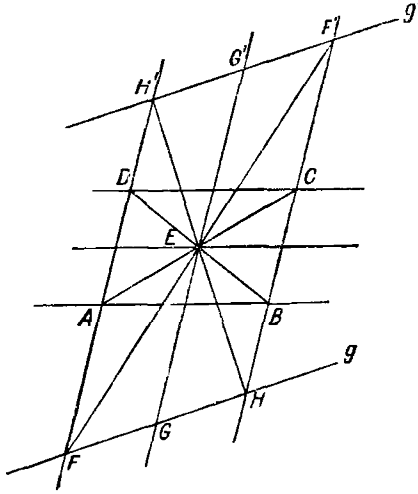
Если, наконец, построить точку F, гармонически сопряженную с D в отношении A, E, то получатся уже два равных отрезка AE и EF, ибо

$$\overline{AE} : \overline{EF} = 1 : 1,$$

т. е.

$$\overline{AE} = \overline{EF}.$$

4. Из этой задачи явствует, что пользование двумя параллельными прямыми равносильно пользованию двумя отрезками, находящимися в данном рациональном отношении, т. е. если начерчены параллельные прямые, то легко могут быть построены отрезки, находящиеся в желаемом рациональном отношении, если же, наоборот, даны отрезки, находящиеся в определенном рациональном отношении, то немедленно можно построить параллельные прямые.



Черт. 59.

§ 11. Построения, выполняемые проведением одних лишь прямых линий, если дан параллелограмм.

В этом случае легко могут быть решены следующие задачи (как всегда, проведением лишь прямых линий).

112. Требуется через точку E (черт. 59) провести прямую, параллельную одной из сторон данного параллелограмма $ABCD$.*

113. Требуется через произвольную данную точку провести прямую, параллельную произвольной данной прямой g.

* В последующем мы не всегда будем указывать те уже рассмотренные задачи, к которым сводится решение предлагаемых задач.

На прямой g получаются два равных отрезка FG и GH. Второе решение ясно из чертежа, который показывает, что легко может быть построена прямая g', параллельная g.

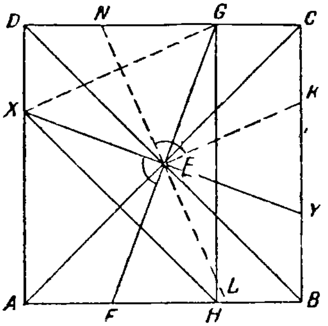
114. Дан отрезок AB, произвольно расположенный относительно параллелограмма. Требуется разделить этот отрезок в определенном отношении.

115. Даны три параллельные прямые a, b, c, которые на четвертой прямой d отсекают отрезки, находящиеся в известном отношении $p:q$. Какая фигура эквивалентна этим данным?[78]

116. Два отрезка на произвольной прямой разделены в определенном рациональном отношении. Требуется построить параллелограмм.*

§ 12. Построения, выполняемые проведением лишь прямых линий, когда дан квадрат.

Если допускается пользование начерченным квадратом, то с его помощью могут быть решены все задачи предыдущих § 10, 11; сверх того могут быть решены еще следующие задачи.



Черт. 60.

117. Требуется восставить перпендикуляр к произвольной прямой FG, проходящей через центр квадрата.

Проводим GH (черт. 60) параллельно CB, далее, HX параллельно BD. Тогда $XY \perp FG$.[79]

118. Даны прямая g и точка P. Требуется из точки P опустить перпендикуляр на прямую g. (Проводят через точку E прямую g', параллельную g, и т. д.)

119. Дан прямой угол XEG с вершиной в центре квадрата (черт. 60). Требуется разделить этот прямой угол пополам. (Если провести EK параллельно XG и LN перпендикулярно к EK, то этим будет найдена биссектриса.)

120. Требуется разделить пополам произвольный данный прямой угол.

121. Из трех лучей a, b, c два последние взаимно перпендикулярны. Требуется построить четвертый луч d так, чтобы угол bd равнялся углу ab. (Так как луч d гармонически отделяется от луча a лучами b и c,[80] то луч d может быть построен с помощью лишь проведения прямых линий.)

122. Дан угол ab. Требуется увеличить его в целое число раз, пользуясь при этом квадратом и проводя лишь прямые линии. (Следует принять в соображение предыдущую задачу.)

Таким образом с помощью квадрата можно повторить угол несколько раз.

---

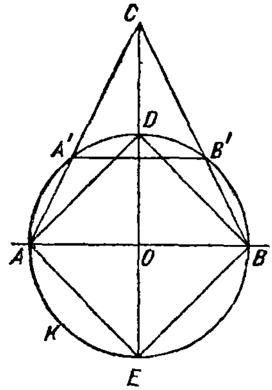
* В этих задачах часто, кроме решений, непосредственно вытекающих из задач, уже решенных раньше, существуют еще и другие, более простые решения; следует всегда стремиться найти наиболее простое решение.

§ 13. Построения, выполняемые проведением одних лишь прямых линий, когда дана постоянная окружность и ее центр.[81]

1. Дана окружность K и ее центр O.

Тогда можно, проводя лишь прямые линии, построить квадрат (черт. 61), причем проводят $A'B'$ параллельно диаметру AB ($\overline{AO} = \overline{OB}$), а затем поступают, как указано на чертеже.

Таким образом с помощью окружности K можно решить все задачи, которые в предыдущих § 9, 10, 11, 12 были решены с помощью проведения лишь прямых линий. Следовательно, можно, в частности, проводить параллели, опускать перпендикуляры, делить и повторять несколько раз отрезки и повторять углы.



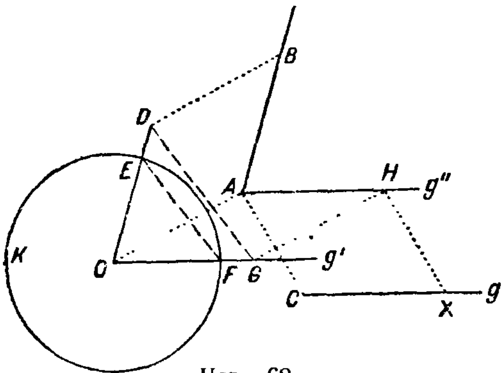
Черт. 61.

Но сверх того могут быть решены задачи, которых нельзя решить с помощью одного квадрата, например, может быть разделен пополам произвольный угол.

Мы также сейчас увидим, что при пользовании постоянной окружностью (вместе с центром) можно решить все задачи, которые обыкновенно решаются с помощью циркуля и линейки, т. е. все задачи элементарной Геометрии, все так называемые геометрические задачи второй степени.

2. Одну из этих задач мы сейчас рассмотрим.

123. Пусть, кроме вспомогательной окружности K, будут даны отрезок AB (черт. 62), прямая g и на g точка C. Требуется построить на g точку X так, чтобы выполнялось равенство $\overline{CX} = \overline{AB}$.*



Черт. 62.

Строят отрезок OD (черт. 62), параллельный отрезку AB и равный ему по длине, проводят g' и g'' параллельно g, DG параллельно EF, GH параллельно OA и HX параллельно AC.

3. Докажем теперь, что при пользовании вспомогательной окружностью каждая задача второй степени может быть решена с помощью проведения одних лишь прямых линий.

Для этой цели сделаем предварительно следующее замечание.

---

* Проводя одни лишь прямые линии, как во всех задачах этой главы.

Сколь сложно ни было бы геометрическое построение, выполняемое при неограниченном пользовании циркулем и линейкой, оно всегда слагается из некоторого числа чертежных операций простейшего рода.

Именно, с помощью линейки непосредственно можно выполнить только следующие операции:

1) проведение прямой линии,

2) определение точки пересечения проводимой прямой с уже начерченной,

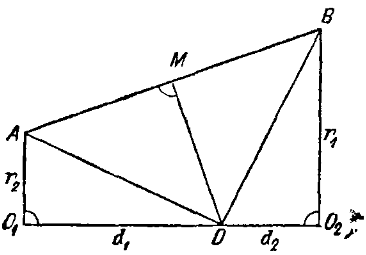
3) нахождение точки пересечения проводимой прямой с уже начерченной дугой окружности.

С помощью же циркуля прямо выполняются только следующие операции:

4) проведение окружности,

5) нахождение точки пересечения проводимой окружности с начерченной уже прямой,

6) построение точки пересечения проводимой окружности с наперед заданной.[82]



Черт. 63.

Если предоставлено неограниченно пользоваться циркулем и линейкой, то выполнение этих операций не представляет никаких затруднений; трудность же решения геометрической задачи на построение состоит лишь в том, чтобы эти операции надлежащим образом скомбинировать.

Если же, наоборот, средства построения ограничены, то требуется прежде всего показать, что и помощью этих ограниченных средств могут быть выполнены вышеназванные операции.[83] Этим и будет строго доказано, что все задачи на построение второй степени могут быть разрешены и ограниченными средствами.

4. В нашем случае могут быть проводимы лишь одни прямые линии.

Выполнение упомянутых выше операций 1, 2 не представляет поэтому никаких трудностей. Задачи 4 мы с помощью проведения прямых линий вообще не можем решить; но мы можем построить произвольное число точек окружности, как мы сейчас увидим. Таким образом остается еще показать, что нашими ограниченными средствами могут быть решены следующие две задачи.[84]

А) Окружность задана ее центром и радиусом и сверх того дана прямая. Требуется построить точки пересечения этой прямой с заданной окружностью.

В) Две окружности заданы их центрами и радиусами. Требуется определить точки пересечения этих окружностей.

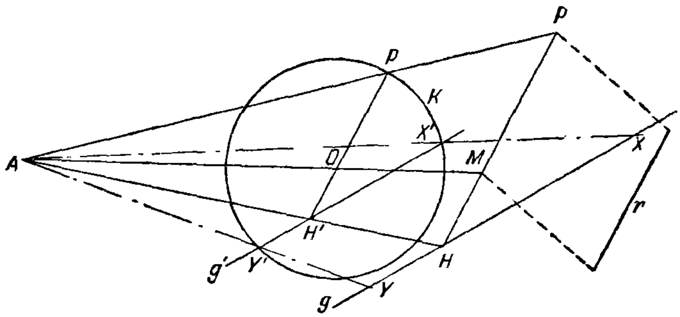
5. Задача В может быть приведена к задаче А. Именно

есть возможность с помощью проведения одних лишь прямых линий построить **радикальную ось** обеих данных окружностей.*

Мы укажем **два различных способа для выполнения этого построения радикальной оси.**

1 способ. Пусть точки O_1, O_2 будут центрами обеих данных окружностей (черт. 63), а r_1, r_2 — их радиусами, заданными с помощью произвольно расположенных отрезков.

Проведем O_1A и O_2B (черт. 63) перпендикулярно к отрезку O_1O_2 (задача 118), сделаем отрезок O_1A равным r_2 и O_2B — равным r_1 (задача 123). Разделим теперь пополам отрезок AB в точке M и восставим в ней перпендикуляр MD; последний пересечет линию центров обеих окружностей в точке D, которая уже лежит на искомой радикальной оси.



Черт. 64.

Доказательство. Из черт. 63 следует, что

$$d_1^2 + r_2^2 = d_2^2 + r_1^2,$$

так что

$$d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

чем и доказывается, что D есть точка радикальной оси (стр. 20).

2 способ ясен из черт. 9.

(124. Кроме вспомогательной окружности заданы еще две окружности их центрами и радиусами. Построить их общую радикальную ось по второму способу.)

6. Теперь мы должны показать, **как может быть решена нашими ограниченными средствами задача** A.

Пусть будут даны, кроме основной окружности K с центром O (черт. 64), еще точка M, отрезок r и прямая g. **Требуется построить точки** X, Y **пересечения прямой** g **с окружностью, описанной вокруг** M **радиусом** r.

С этой целью проведем отрезок MP, параллельный и равный r (черт. 64), затем прямую OP', параллельную прямой MP; тогда точка A будет внешним центром подобия окружностей K_1 и K.

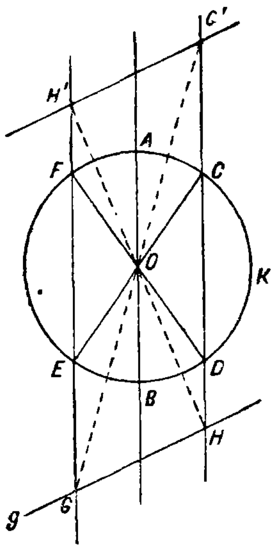
---

* Штейнер (в указанном его сочинении) не идет по этому пути, но помощью преобразования по принципу подобия сводит задачу В к следующей: „Определить точки пересечения определенной вспомогательной окружности с другой окружностью, заданной ее центром и радиусом“.

Проведя в этих подобных системах прямую g', отвечающую прямой g,[85] мы немедленно получим точки X', Y', а потом и точки X и Y.

Замечание. Если точка A лежит в недоступной части плоскости чертежа, то можно провести радиус окружности K, параллельный MP, но направленный в противоположную сторону; при этом уже пользуются внутренним центром подобия J обеих окружностей K_1 и K.

7. Таким образом с помощью наших ограниченных средств решения может быть решена основная задача A. Этим доказана теорема Штейнера, гласящая, что все геометрические задачи, которые обыкновенно решаются с помощью циркуля и линейки, могут быть решены и путем проведения одних лишь прямых линий, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и ее центр.[86]*



Черт. 65.

Именно, если некоторая геометрическая задача на построение должна быть решена с помощью наших ограниченных средств решения, то представим себе эту задачу решенной обычными средствами и будем следовать этому решению шаг за шагом, выполняя каждую в нем встречающуюся чертежную операцию ограниченными средствами; а это всегда возможно, как было доказано.

8. Однако этот способ решать задачи с помощью наших средств решения оказывается по большей части очень громоздким. Поэтому полезно непосредственно найти для наичаще встречающихся задач простые решения с помощью вспомогательной окружности.

Мы рассмотрим (по Штейнеру) эти основные построения, причем будем давать или, по крайней мере, намечать решения задач.

125. Провести прямую, параллельную данной прямой линии g.

При этом следует различать три случая:

1) g есть диаметр AB окружности K,

2) g пересекает эту окружность в двух точках E, F,

3) g лежит вне окружности. (Решение — согласно черт. 65.)

126. Даны прямая g и точка P. Опустить из P перпендикуляр на g. (Если g есть диаметр AB окружности K (черт. 66) и отрезок $A'B'$ параллелен AB, то прямая CO перпенди-

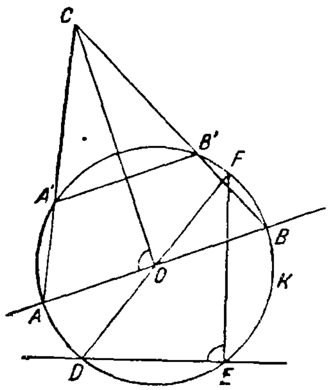
---

* Штейнер, там же.

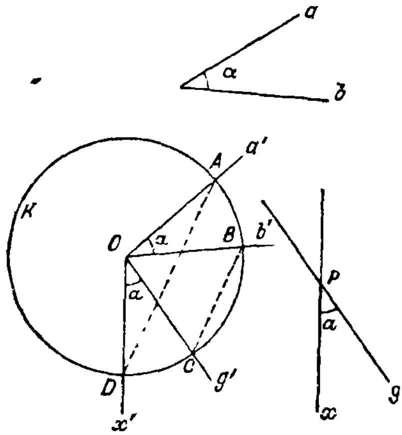
Штейнерово сочинение, как известно, носит название „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises...“. О центре окружности при этом нет речи, в то время как он играет важную роль, ибо без этого центра некоторые из задач § 11, 12, 13 не могут быть решены путем проведения одних прямых линий.

кулярна к g. Если же g пересекает окружность K (черт. 66) в двух точках D, E, то хорда FE перпендикулярна к DE.)

127. Даны угол α со сторонами a, b, прямая g и точка P. Требуется через точку P провести прямую x так, чтобы она с прямой g составляла угол α.



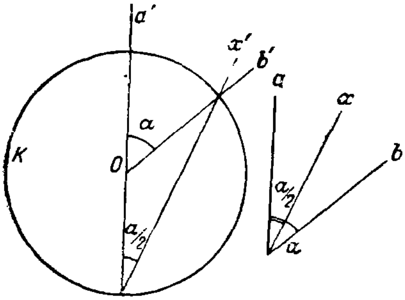
Черт. 66.



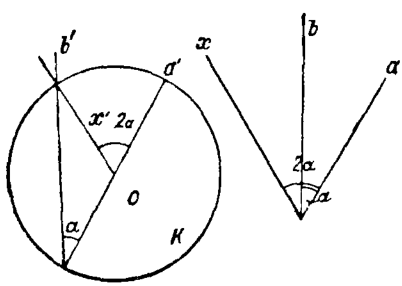
Черт. 67.

(Через точку O (черт. 67) проводят прямые a', b', g', параллельные соответственно прямым a, b, g, затем проводят AD параллельно BC и x параллельно x'.)

128. Дан (кроме вспомогательной окружности, которая в этом параграфе постоянно предполагается данной) угол α со сторонами a, b. Требуется построить биссектрису x этого угла.



Черт. 68.



Черт. 69.

(Через точку O (черт. 68) проводят прямые a', b', соответственно параллельные прямым a,b.)

129. Удвоить данный угол α. (Проводят прямые a', b', соответственно параллельные прямым a, b (черт. 69).)

130. Дан треугольник, одна из вершин которого лежит на вспомогательной окружности. Требуется построить три высоты треугольника и центры вписанной и описанной окружности.

131. Даны окружность K и две точки A, B. Требуется построить центры окружностей, проходящих через A, B и касающихся K, проводя при этом одни лишь прямые линии и принимая K за основную окружность.

132. Даны три окружности K_1, K_2, K_3 и центр O_1 окружности K_1. Требуется по способу Жергонна помощью проведения одних прямых линий построить центр одной из окружностей, которые касаются трех данных.

133. Даны две окружности K и K_1 и сверх того центр окружности K. Требуется построить центр O_1 окружности K_1, проводя одни лишь прямые линии.

134. Если, кроме начерченной окружности, ничего более не дано, то нет возможности построить центр окружности с помощью проведения одних прямых линий. Если же сверх того дан параллелограмм, то можно найти центр окружности. (Как?)[87]

135. Если дан квадрат, то нет надобности знать центр штейнеровой вспомогательной окружности. Что нужно еще присоединить к квадрату, чтобы он вместе с присоединенной фигурой был эквивалентен штейнеровой вспомогательной окружности вместе с ее центром?

9. Вместо штейнеровой окружности может быть дано и другое коническое сечение, например, эллипс. Кроме самого эллипса, необходимо еще знать его центр и один из фокусов. Центр нужен для проведения параллелей, а фокус — для построения перпендикуляров.

136. Предлагается решить некоторые из рассмотренных только что задач с помощью проведения одних лишь прямых линий, если дан эллипс вместе с его центром O и одним из фокусов.

Можно легко построить прямые, параллельные любому из диаметров эллипса, а следовательно, и определить сопряженный диаметр. Если требуется провести через O прямую x, параллельную прямой g, пользуясь лишь прямыми линиями, то строят полюс G прямой g. Прямая, соединяющая его с центром, есть поляра u бесконечно удаленной точки U прямой g, и искомая прямая x сопряжена с диаметром u.

Вместо центра эллипса может быть также дан параллелограмм. Если дан квадрат, то достаточно знать лишь самый эллипс, в знании центра и фокуса нет надобности.

Глава III.

ПОСТРОЕНИЯ, ВЫПОЛНЯЕМЫЕ ПОМОЩЬЮ ОПИСЫВАНИЯ ОКРУЖНОСТЕЙ (ПОСТРОЕНИЯ МАСКЕРОНИ). *

§ 14. Лемма.

1. Единственным чертежным инструментом, которым мы будем пользоваться в настоящей главе, является циркуль[88]. Допускается только описывание окружностей; ни одна прямая линия не должна входить в построение. Для доказательства же правильности построения мы будем прибегать к прямым линиям.

2. Прежде всего мы докажем следующее простое предложение.

Пусть ABC будет данный треугольник, D — середина стороны AB, угол ADC равен α. Тогда из треугольника ADC следует:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{DC}\cos\alpha,$$

а из треугольника BCD:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\overline{BD}\cdot\overline{DC}\cos\alpha.$$

Если сложить оба равенства и заметить, что

$$\overline{AD} = \overline{BD},$$

то получится:

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2.$$

Это равенство и составляет содержание предложения, которым мы неоднократно будем пользоваться.

§ 15. Деление окружности на равные части.

1. Окружность легко может быть разделена с помощью одного циркуля на шесть равных частей (черт. 71).

Прежде чем рассматривать деление окружности на другое число частей, полезно решить две основные задачи, именно: разделить данную дугу окружности пополам и построить правильный вписанный пяти- и десятиугольник.

2. Деление пополам дуги AB (черт. 70 а, 70 б).

* Mascheroni, „La geometria del compasso", Павия 1797; на нем. и франц. яз. перевел Грузон, 1820. Содержание сочинения Маскерони изложено в книге Гутта (Hutt) „Die Mascheronischen Konstruktionen", 1880. Фришауф (Frischauf) в своем сочинении „Über die geometrischen Konstruktionen von L. Mascheroni und J. Steiner", Грац, 1869, также в существенвом воспроизводит эти построения.

Строим параллелограммы $ABOC$, $ABDO$ и проводим прямую CB (черт. 70 а).

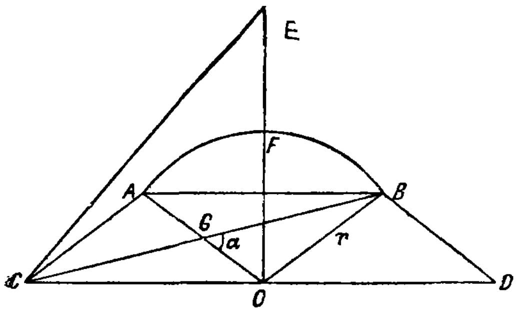
По лемме § 14 имеет место соотношение:

$$\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{AG}^2 + 2\overline{BG}^2.$$

Если обозначить радиус дуги через r, длину отрезка AB через d, то из этого соотношения вытекает:

$$\overline{CB}^2 = 2d^2 + r^2.$$

Из треугольника COF (где F есть середина дуги AB) следует:



Черт. 70а.

$$\overline{CF}^2 = d^2 + r^2,$$

и из треугольника COE:

$$\overline{OE}^2 = d^2 + r^2.$$

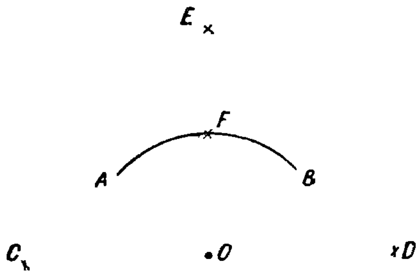
Таким образом $\overline{CF} = \overline{OE}$.

В случае, когда требуется с помощью одного лишь циркуля разделить пополам дугу AB, поступают поэтому следующим образом (черт. 70 б).

Описывают окружности вокруг концов A, B дуги радиусом r, затем вокруг точки O — радиусом, равным хорде AB. Таким путем получаются точки C и D. Описывая окружности вокруг точек C и D радиусом CB, получают точку E. Наконец, искомая точка F получится в пересечении данной дуги AB с окружностью, описанной вокруг точки C или D радиусом OE.

3. Построение стороны пяти- и десятиугольника. Если требуется построить сторону вписанного в окружность (черт. 71) правильного пяти- или десятиугольника, то поступают следующим образом.

Сначала строят вершины A, B, C, D, E вписанного шестиугольника; затем определяют точку G, в которой пересекаются окружности, описанные вокруг точек A и D как центров радиусом $AC = BD$.



Черт. 70б.

Если теперь вокруг точек C и E описать радиусом OG окружности, которые пересекутся в точке K, то отрезок OK и будет искомой стороной десятиугольника, а отрезок KH — стороной пятиугольника.

Доказательство. Проведем вспомогательную прямую CE, которая пересечет диаметр AD в точке L. Тогда

$$\overline{AC} = r\sqrt{3},\ \overline{OG} = \overline{AH} = r\sqrt{2} = \overline{CK},\ \overline{LC} = \frac{r}{2}\sqrt{3}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{KL} = \frac{r}{2}\sqrt{5} \quad \text{и} \quad \overline{KO} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = s_{10}.$$

Итак, KO есть длина стороны правильного вписанного десятиугольника, а HK согласно известной теореме ($s_5^2 = r^2 + s_{10}^2$) есть длина стороны пятиугольника.

137. Разделить окружность на шесть равных частей, на три, на две равные части; затем — на пять, на десять равных частей, на четыре равные части (сообразно с двумя основными задачами).

138. Разделить окружность на восемь равных частей.

Решение этой задачи можно свести к делению пополам четвертой части окружности (137).

Второе решение состоит в следующем.

Делают (черт. 71) $\overline{GN} = \overline{OA} = r$; точка N делит дугу AH пополам, ибо треугольник ONG — прямоугольный равнобедренный, так что угол $AON = 45°$.

Если построить (черт. 71)

$$\overline{RH} = \overline{AO} \text{ и } \overline{AP} = \overline{DP} = \overline{RG},$$

то отрезок OP также равен стороне правильного вписанного восьмиугольника, т. е. равен $\overline{AN}$.

Доказательство. $\overline{OG} = r\sqrt{2}$. [89] Поэтому из прямоугольного треугольника AOP следует:

$$\overline{OP} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = s_8.$$

139. Разделить окружность на шестнадцать равных частей.

С этой целью либо делят пополам (сообразуясь с основной задачей 2) восьмую часть окружности, либо же поступают следующим образом: строят точку P (138, черт. 71) и определяют точку Q так, чтобы

$$\overline{QP} = \overline{AO} = r.$$

Тогда $\overline{AQ}$ есть сторона правильного вписанного шестнадцатиугольника.

Доказательство:

$$\Delta OQP \cong \Delta ANO,$$

так как

$$\overline{AN} = \overline{OP}$$

и

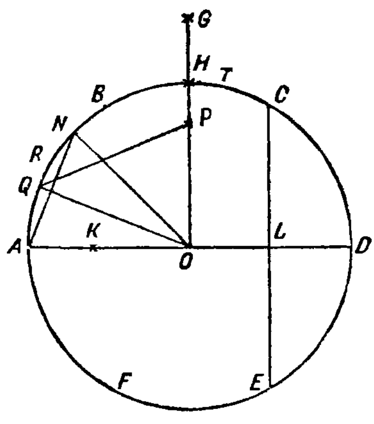
$$\overline{AO} = \overline{NO} = \overline{QO} = \overline{QP} = r.$$

Поэтому

$$\measuredangle ANO = \measuredangle QOP = \frac{3}{4}R, \text{ [90]}$$

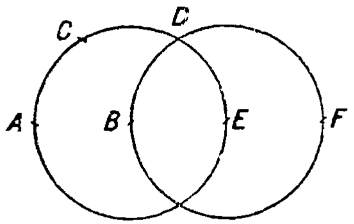
так что

$$\measuredangle AOQ = \frac{1}{4}R.$$



Черт. 71.

140. Разделить окружность на 12, 24, 48, 15, 20, 120, 240 равных частей.



Черт. 72.

Следует заметить:

$$\frac{u}{3}-\frac{u}{4}=\frac{u}{12},\quad 2\frac{u}{5}-\frac{u}{3}=\frac{u}{15},$$

$$\frac{u}{12}-\frac{u}{16}=\frac{u}{48},\quad \frac{u}{4}-\frac{u}{5}=\frac{u}{20},$$

$$\frac{u}{8}-\frac{u}{12}=\frac{u}{24},\quad 5\frac{u}{24}-\frac{u}{5}=\frac{u}{120},$$

$$5\frac{u}{48}-\frac{u}{10}=\frac{u}{240}.$$

§ 16. Умножение и деление отрезков.

141. Требуется удвоить, повторить несколько раз отрезок, заданный его концами AB.

Описывают (черт. 72) радиусом AB вокруг точки B окружность и строят

$$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}.$$

Тогда

$$\overline{AE}=2\overline{AB}.$$

Если описать окружность $E(B)$,* то подобным же образом получится

$$\overline{AF}=3\overline{AB}.$$

142. Отрезок s, заданный его концами A, B, требуется разделить на n равных частей.

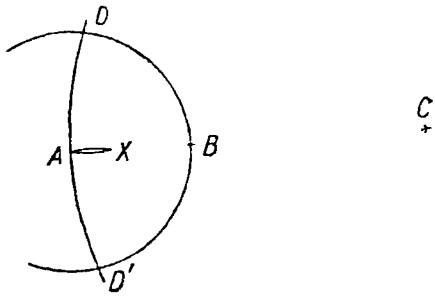
Маскерони для решения этой основной задачи дает два метода, которые, впрочем, могут быть сведены один к другому.

1 метод. Строят (черт. 73) $\overline{AC}=n\cdot\overline{AB}$ и описывают затем окружности $A(B)$ и $C(A)$, в результате чего получают точки D и D'. Окружности $D(A)$ и $D'(A)$ пересекаются в точке X, для которой имеет место равенство

$$\overline{AX}=\frac{1}{n}\overline{AB}.$$

Доказательство. Точка X, как явствует из симметрии всей фигуры, лежит на прямой AC.

Оба равнобедренных треугольника AXD и ADC подобны один другому, так что



Черт. 73.

$$\overline{AX}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{AC}.$$

---

* Окружность, имеющую точку M своим центром и проходящую через точку P, мы будем обозначать символом $M(P)$.

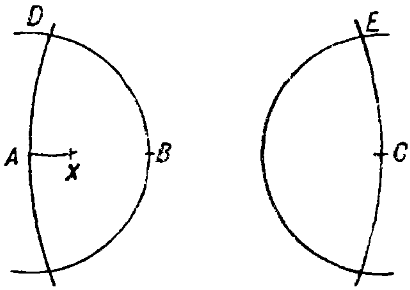
Так как при этом отрезок $\overline{AD}$ (равный $\overline{AB}$) равен $\frac{1}{n}\overline{AC}$, то

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}.$$

2 метод. По прежнему строят отрезок $\overline{AC}$ (черт. 74), равный $n \cdot \overline{AB}$; затем описывают окружности $A(B)$, $A(C)$, $C(A)$ и $C(E)$, последнюю — радиусом, равным $\overline{AB}$. Если теперь вокруг C описать окружность радиусом $\overline{ED}$, то она пересечется с окружностью $D(A)$ в точке X, причем $\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB}$.

Доказательство. На чертеже прямая CX параллельна прямой DE, следовательно, и прямой AC. Точка X, таким образом, есть точка пересечения окружности $D(A)$ с прямой AC, т. е. совпадает с точкой X, построенной по первому методу.

Если найден отрезок AX, то повторным его откладыванием могут быть построены все точки деления на данном отрезке.



Черт. 74.

143. Разделить отрезок AB на две, на четыре равные части, на восемь равных частей и т. д.

Из предыдущего пункта вытекает, в частности, способ деления отрезка на две, на четыре равные части, на восемь равных частей и т. д.

Маскерони дает еще два чрезвычайно изящных метода для этой же цели.

1 метод. Удваивают отрезок AB (черт. 75), затем описывают, как и прежде, окружности $A(B)$, $C(A)$, $D(A)$ $D'(A)$ и получают, таким образом (142), середину X отрезка AB.

Если далее сделать $\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{BD}$, то окружности $F(A)$ и $F'(A)$ пересекутся в точке Y, которая является серединой отрезка XB.

Если затем построить $\overline{AG} = \overline{AG'} = \overline{BF}$, то окружности $G(A)$ и $G'(A)$ пересекутся в середине Z отрезка YB, и т. д.

Построение может быть повторено неограниченное число раз.

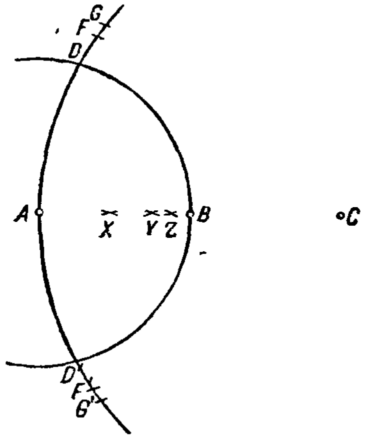
Доказательство. X есть середина отрезка AB.

Поэтому, на основании леммы § 14, имеем (черт. 75):

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\,\overline{AX}^2 + 2\,\overline{XD}^2.$$

Отсюда, если положить $\overline{AB}$ равным s, следует, что

$$\overline{BD}^2 = \frac{3}{2}s^2.$$



Черт. 75.

Из подобия двух равнобедренных треугольников AFY и ACF вытекает:

$$\overline{AY}:\overline{AF}=\overline{AF}:\overline{AC}.$$

Но так как $\overline{AF}^2=\overline{BD}^2=\frac{3}{2}s^2$ и

$$\overline{AC}=2s,$$

то получается:

$$AY=\frac{3}{4}s,$$

т. е.

$$XY=\frac{1}{4}s.$$

Таким образом Y есть середина отрезка XB.

Если аналогично этому, с помощью леммы § 14, вычислить длину отрезка

$$\overline{BF}=\overline{AG},$$

то из подобия двух треугольников AGZ и ACG получится для длины отрезка YZ величина $\frac{1}{8}$ s, и т. д.

2 метод. Пусть AB будет отрезком, подлежащим делению.

Строят $\overline{AC}=2\overline{AB}$ (черт. 76) с помощью окружности $B(A)$ и затем описывают окружности $A(B)$, $A(C)$, $C(D)$. Таким путем получаются точки E, E'.

Если сделать теперь

$$\overline{XE}=\overline{XE'}=\overline{CD},$$

то точка X будет серединой отрезка AB.

Если далее сделать

$$\overline{CF}=\overline{CF'}=\overline{BE} \quad \text{и} \quad \overline{FY}=\overline{F'Y}=\overline{BE},$$

то точка Y будет лежать в середине отрезка XB.

Если затем сделать

$$\overline{CG}=\overline{CG'}=\overline{BF} \quad \text{и} \quad \overline{GZ}=\overline{G'Z}=\overline{BF},$$

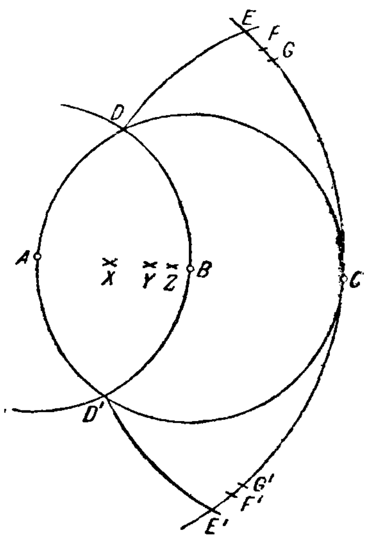
то точка Z будет серединой отрезка YB, и т. д.

Доказательство. Из подобия двух равнобедренных треугольников XEC и CAE (черт. 76) следует:

$$\overline{XC}:\overline{CE}=\overline{CE}:\overline{AC}.$$

Если положить $\overline{AB}$ равным s, то

$$\overline{CE}=\overline{CD}=s\sqrt{3},$$



Черт. 76.

и отсюда

$$\overline{XC} = \frac{3}{2}s,$$

т. е. точка X есть середина отрезка AB.

Для того чтобы доказать аналогичное свойство точки Y, мы вычислим сперва длину отрезка BE.

С помощью леммы § 14 получается:

$$\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 = 2\,\overline{AB}^2 + 2\,\overline{BE}^2.$$

Заметив, что

$$\overline{AE} = 2s, \quad \overline{CE} = \overline{DC} = s\sqrt{3},$$

получим

$$\overline{BE}^2 = \overline{CF}^2 = \frac{5}{2}s^2.$$

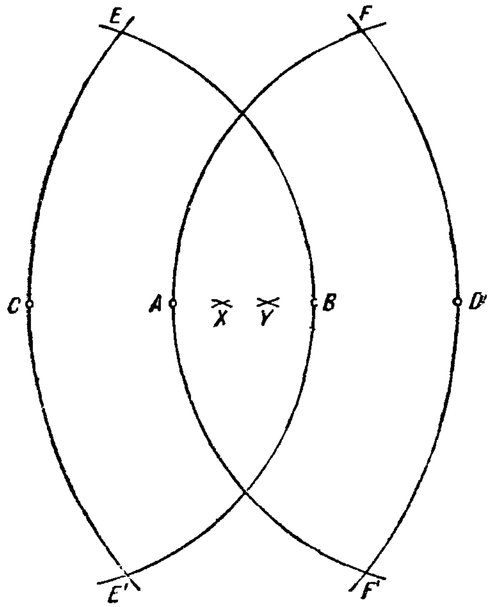
Затем рассмотрим два равнобедренных треугольника YFC и CAF. Из их подобия следует:

$$\overline{YC} : \overline{CF} = \overline{CF} : \overline{AC}.$$

Поэтому, подставив найденное значение для $\overline{CF}$, получим, что

$$YC = \frac{5}{4}s,$$

т. е. точка Y есть середина отрезка XB.



Черт. 77.

Для того чтобы доказать аналогичное свойство точки Z, вычисляют сначала длину $\overline{BF}$ с помощью леммы § 14. Из подобия треугольников ZGC и CAG следует далее, что точка Z есть середина отрезка YB, и т. д.

144. Разделить отрезок на три равные части.

И для этого случая Маскерони дает еще одно изящное построение, отличное от тех, которые получаются по общим методам.

Строят (черт. 77) сначала $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BD}$; затем описывают окружности $C(B)$, $C(D)$, $D(C)$, $D(A)$. Такмм путем получаются точки E, E' и F, F'. Если сделать теперь

$$\overline{XE} = \overline{XE'} = \overline{YF} = \overline{YF'} = \overline{CB},$$

то точки X и Y разделят отрезок AB на три равные части.

Доказательство. Из подобия двух равнобедренных треугольников CXE и CDE следует:

$$\overline{CX} : \overline{CE} = \overline{CE} : \overline{DC};$$

затем

$$\overline{CE} = 2\,\overline{AB} \quad \text{и} \quad \overline{CD} = 3\,\overline{AB},$$

поэтому

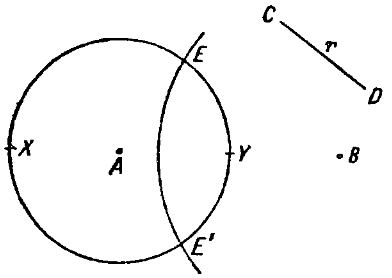
$$\overline{CX} = \frac{4}{3}\overline{AB}, \text{ так что } \overline{AX} = \frac{1}{3}\overline{AB}.$$

§ 17. Сложение и вычитание отрезков. Построение параллелей и перпендикуляров.

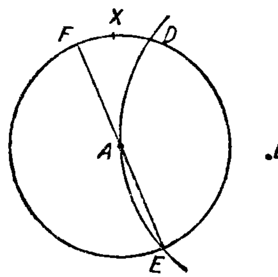
145. Данный отрезок увеличить или уменьшить на длину другого данного отрезка.

Пусть заданы (их концами) отрезки AB и CD.

Отрезком CD как радиусом описывают вокруг точки A окружность K (черт. 78) и пересекают ее произвольной окружностью K_1, имеющей центр в точке B. Таким путем получаются точки E, E'. Если разделить пополам каждую из двух дуг EE' в точках X и Y, то отрезок BX будет суммой данных отрезков, а отрезок BY — их разностью.



Черт. 78.



Черт. 79.

146. Восставить перпендикуляр x в точке A к отрезку AB, заданному его концами A и B, т. е. найти некоторую точку X этого перпендикуляра.*

Вокруг точек A и B строят две окружности одного и того же, но произвольного радиуса. Обозначим через C точку их пересечения. Если теперь начертить окружность $C(B)$ и удвоить отрезок BC, то получится точка X искомого перпендикуляра. Действительно, точка X лежит на диаметре окружности $C(B)$, проходящей через точки A и B.

Если искомый перпендикуляр должен иметь данную длину s, то описывают вокруг A (черт. 79) радиусом s окружность K, затем пересекают ее окружностью $B(A)$ в точках D и E. Если теперь построить такую точку F окружности K, которая лежала бы на одной прямой с точками A и E, то середина дуги FD и будет искомой точкой X.

147. Опустить из точки P перпендикуляр на прямую AB.

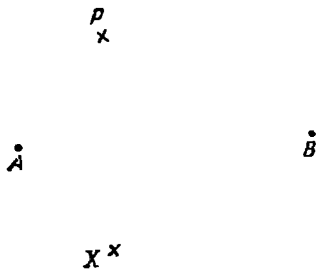
Описывают окружности $A(P)$ и $B(P)$ (черт. 80). Вторая точка пересечения X этих окружностей лежит на искомой нормали и является отражением точки P в AB.

---

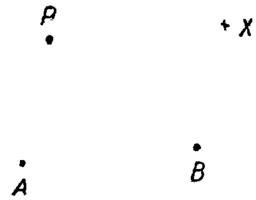
* При решении всех этих задач, равно как и предшествовавших им, можно чертить лишь окружности, но никак не прямые линии.

148. Построить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку.

Пусть даны прямая AB и точка P. Описывают из точки P окружность радиусом AB (черт. 81) и из точки B окружность радиусом AP. Точка X их пересечения лежит на искомой параллели.



Черт. 80.



Черт. 81.

§ 18. Построение пропорциональных отрезков.

149. Требуется по трем отрезкам a, b, c построить четвертый пропорциональный, т. е. такой отрезок x, который вместе с данными образовал бы пропорцию

$$a:b=c:x.$$

Пропорция эта легко может быть решена с помощью одного только циркуля, как показывают следующие рассуждения.

Описывают вокруг точки O (черт. 82) две концентрические окружности и делают

$$\overline{AA'}=\overline{BB'}.$$

Тогда

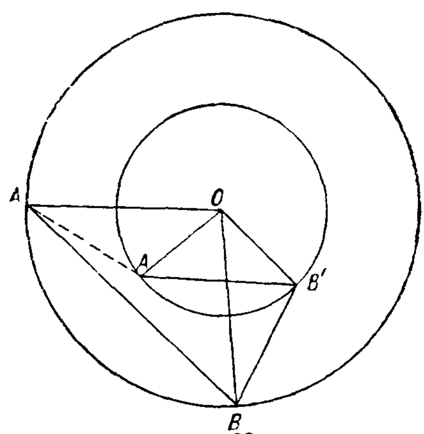
$$\triangle AOA' \cong \triangle BOB',$$

и поэтому

$$\triangle AOB \sim \triangle A'OB'.$$

Отсюда:

$$\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{AB}:\overline{A'B'}.$$



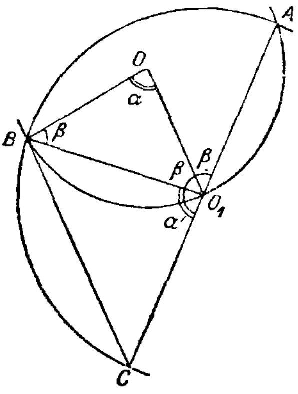
Черт. 82.

Таким образом, если описать концентрические окружности радиусами a и b, сделать отрезок AB равным c и отрезки AA', BB' равными одному и тому же произвольному отрезку, то отрезок $A'B'$ и будет искомым отрезком x, удовлетворяющим вышенаписанной пропорции.

Если отрезок c настолько велик, что не может быть сделан хордою окружности O (A), то вместо него берут отрезок $\frac{c}{n}$, где n есть некоторое достаточно большое натуральное число. При этом в результате упомянутого построения получается не отрезок x, но $\frac{x}{n}$.

150. Построить третий пропорциональный к двум отрезкам a и b, т. е. решить пропорцию:

$$a:b=b:x.$$



Черт. 83.

Задача эта может быть решена по только что указанному методу. Но Маскерони дает еще одно решение, которое мы и приводим.

Вокруг точки O описывают радиусом a окружность (черт. 83); на ней берут произвольную точку O_1 и описывают вокруг нее радиусом b окружность ABC, причем точка C определяется так, чтобы дуга AC была полуокружностью.

При этом каждый из углов α, α' черт. 83 дополняется углом 2β до двух прямых. Следовательно, углы α и α' равны. Отсюда вытекает, что

$$\triangle CO_1B \sim \triangle BO_1O.$$

Поэтому имеет место пропорция:

$$\overline{O_1O}:\overline{BO_1}=\overline{BO_1}:\overline{BC}$$

или

$$a:b=b:x.$$

Таким образом отрезок BC есть третий геометрически пропорциональный к двум отрезкам a и b.[91]

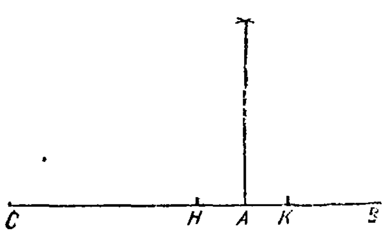
151. Построение среднего геометрически пропорционального отрезка.

Требуется решить пропорцию $a:x=x:b$.

Маскерони для решения этой задачи дает два различных метода.

1 метод. Пусть (черт. 84) $\overline{AB}=a$ и $\overline{AC}=b$.

Отыскивают середину H отрезка BC, затем точку K так, чтобы выполнялось равенство $\overline{KA}=\overline{AH}$.



Черт. 84.

Если теперь описать из точек H и K окружности радиусом HB, то они пересекутся в некоторой точке X. Отрезок XA и будет искомым средним геометрически пропорциональным между двумя данными отрезками a и b.

Доказательство усматривается непосредственно, так как X лежит на полуокружности, которая имеет точку H своим центром, а отрезок $a+b$ своим диаметром.

2 м е т о д. Делают $\overline{AB}=a$ и $\overline{AC}=b$ (черт. 85). Далее, делят пополам отрезок AB в точке H и строят

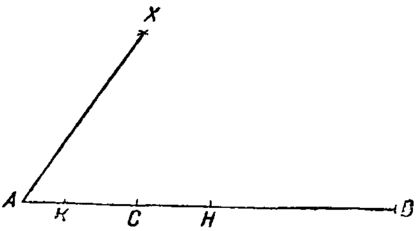
$$\overline{KC}=\overline{CH}.$$

Если теперь из точек H и K описать окружности радиусом HA, то они пересекутся в некоторой точке X.

Отрезок AX есть искомое геометрическое среднее. В самом деле, точка X лежит на полуокружности, имеющей H своим центром и AB — диаметром.

152. П р о и з в е с т и з о л о т о е д е л е н и е о т р е з к а AB.

Вокруг точки B (черт. 86) описывают окружность радиусом AB, находят вершины C, D, E, F, G вписанного шестиугольника и точку H пересечения двух окружностей $A\,(D)$, $E\,(C)$.



Черт. 85.

Если теперь построить точку X так, что

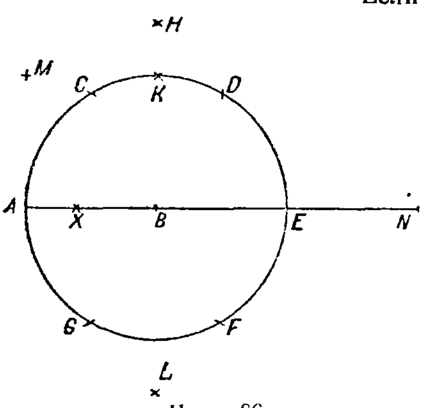
$$\overline{XD}=\overline{XF}=\overline{BH},$$

то точка X и произведет золотое сечение отрезка AB, так как отрезок XB (согласно § 15, 2) есть сторона вписанного в окружность правильного десятиугольника.

153. И з в л е ч е н и е к в а д р а т н ы х к о р н е й.

Если (черт. 86) положить $\overline{AB}=1$, то

$$\overline{BH}=\sqrt{2},\quad \overline{AD}=\sqrt{3},\quad \overline{AE}=\sqrt{4}=2.$$



Черт. 86.

Если далее отыскать такую точку M, что

$$\overline{MA}=\overline{MK}=\overline{AB},$$

то

$$\overline{ME}=\sqrt{5}.$$

Если удлинить отрезок AE на AB до точки N, так что

$$\overline{ND}=\overline{NF}=\overline{DA},$$

то

$$\overline{HN}=\sqrt{6},\quad \overline{CN}=\sqrt{7}.$$

Если построить теперь точку L как точку пересечения окружностей $A\,(F)$ и $E\,(G)$, то

$$\overline{LH}=\sqrt{8},\quad \overline{AN}=\sqrt{9},\quad \overline{MN}=\sqrt{10}.$$

З а м е ч а н и е. С помощью найденных нами корней натуральных чисел от 1 до 10 легко можно построить корни всех чисел до 36.

Если, например, требуется найти $\sqrt{23}$, то полагают

$$23=25-2,$$

так что

$$(\sqrt{23})^2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2.$$

Если построить теперь прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна 5, а один из катетов равен $\sqrt{2}$ (катет может быть построен, как выше указано), то тем самым будет найден $\sqrt{23}$.

154. Если известны корни из чисел до 36, то можно построить корни всех натуральных чисел до 361 (это утверждение обосновывается аналогично предыдущему).

Если требуется извлечь квадратный корень из (положительной рациональной) дроби, т. е. построить выражение

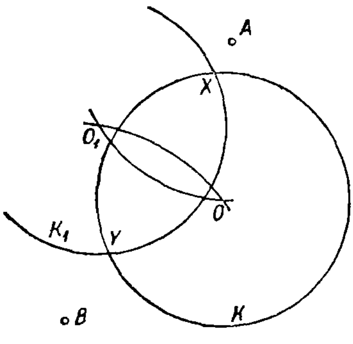
$$\sqrt{\frac{m}{n}}, \text{ то полагают } \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{1 \cdot \sqrt{m}}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда ясно, что для получения $\sqrt{\frac{m}{n}}$ нужно построить четвертый геометрически пропорциональный к отрезкам

$$1, \sqrt{m} \text{ и } \sqrt{n}.$$

§ 19. Пересечение прямых линий с окружностями и прямыми. Умножение и деление углов.

155. Определить точки пересечения начерченной окружности с прямой, заданной двумя ее точками. Обозначим через K данную окружность, через A, B — две данные точки прямой.



Черт. 87.

Строят (черт. 87) отражение K_1 окружности K в прямой AB; K и K_1 пересекутся в искомых точках X и Y.

Если данная прямая проходит через центр окружности K, то из точки A прямой описывают произвольным радиусом вспомогательную окружность H, которая пересечет окружность K в точках B и B'. Если разделить пополам дугу BB', то точки деления X, Y будут искомыми точками.

156. Определить точку пересечения двух прямых AB и CD, пользуясь лишь описыванием окружностей. Каждая из этих прямых задана двумя ее точками.

Отражают (черт. 88) точки C и D в прямой AB. Таким путем получают прямую C_1D_1, которая также проходит через искомую точку X. Если определить теперь точку C'' так, что

$$\overline{CC''} = \overline{DD_1}$$

и

$$\overline{D_1C''} = \overline{DC},$$

то отрезок D_1C'' будет параллелен отрезку DC, следовательно, имеет место пропорция

$$\overline{C_1X} : \overline{C_1D_1} = \overline{C_1C} : \overline{C_1C''}.$$

Если построить к отрезкам C_1C'', C_1C, C_1D_1 четвертый геометрически пропорциональный и отложить его от точки C_1 на прямой C_1D_1 (задача 145), то и получится искомая точка X.

157. Перенести угол.

Пусть угол α будет задан тремя точками A, B, C (черт. 89); пусть, сверх того, будут даны точки E и D. Требуется определить точку X так, чтобы

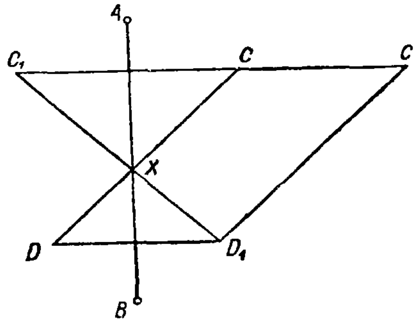
$$\measuredangle XED = \measuredangle CBA.$$

Треугольники ABC и DEX подобны; поэтому имеют место следующие пропорции:

$$\overline{XD} : \overline{DE} = \overline{CA} : \overline{AB}$$

и

$$\overline{XE} : \overline{DE} = \overline{CB} : \overline{AB}.$$



Черт. 88.

Таким образом отрезки XD и XE могут быть построены как четвертые геометрически пропорциональные. Отсюда затем уж получается точка X и угол α.

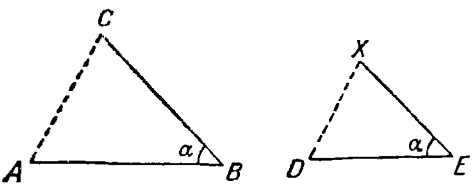
158. Данный угол повторить несколько раз или разделить пополам.

Пусть угол α снова будет задан тремя точками A, B, C (черт. 90). Описывают окружности $B(A)$, $B(C)$ и делают

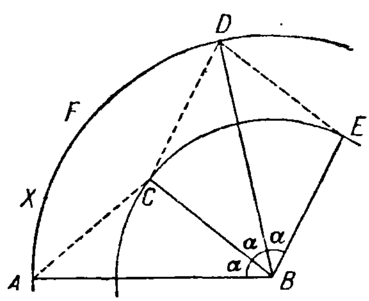
$$\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \ldots$$

Тогда

$$\measuredangle DBA = 2\alpha,$$
$$\measuredangle EBA = 3\alpha.$$
$$\cdot\ \cdot\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$



Черт. 89.



Черт. 90.

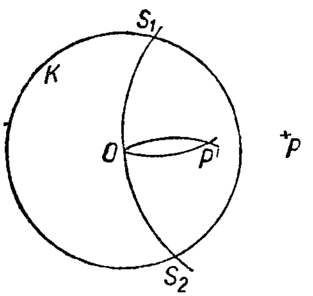
Для деления угла пополам можно применять различные способы, например, следующий:

Снова описывают окружности $B(A)$ и $B(C)$, определяют точку D, делят пополам дугу AD в точке F и дугу AF — в точке X.

§ 20. Применение принципа обратных радиусов к решению геометрических задач на построение второй степени с помощью одного только циркуля. *

Построения, данные Маскерони, чрезвычайно изящны, но часто получаются столь искусственным путем, что при чтении объемистого его сочинения (из которого вышеизложенное представляется лишь кратким извлечением) естественно появляется желание найти **общий принцип** для получения таких же или им подобных построений.

Это достигается с помощью принципа обратных радиусов, как будет показано в последующем изложении.



Черт. 91.

1. **Построение обратной точки помощью одного лишь циркуля.**

Если K есть окружность радиуса r и P — произвольная точка, лежащая в плоскости этой окружности, то, как известно (стр. 34), обратная ей точка P' лежит в пересечении центральной линии PO с полярой точки P в отношении окружности K.

При этом имеет место равенство:

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Если точка P описывает прямую линию, то обратная ей точка P' движется по окружности, проходящей через центр O основной окружности K. Если же точка P описывает некоторую окружность A, то P' также описывает окружность A', расположенную в отношении A так, что O есть внешний центр подобия обеих окружностей.

Для нашей цели необходимо построить с помощью циркуля по точке P обратную ей точку P'. Этого можно достичь следующим путем.

Описывают окружность $P(O)$ (черт. 91), которая пересечет K в точках S_1 и S_2; окружности $S_1(O)$ и $S_2(O)$ пересекутся друг с другом (кроме O) еще в некоторой точке P', которая и будет обратной точке P в отношении окружности K.

Именно, вследствие симметрии фигуры, точка P' лежит на линии OP. Из подобия же двух равнобедренных треугольников S_1OP' и PS_1O вытекает сверх того, что

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Построение это применимо всякий раз, когда точка P лежит вне окружности; для точек же внутри окружности лишь тогда, когда расстояние их от центра больше половины радиуса. Как поступать в том случае, когда это не имеет места, будет показано позже.

2. **Построение центра той окружности, которая отвечает данной прямой или данной окружности при инверсии относительно K.**

---

* A. Adler, „Zur Theorie der Mascheronischen Konstruktionen“, Wiener Akademie, Bd. XCIX, Abt. II a, 1890.

a) Искомый центр M окружности G', отвечающей прямой g, (черт. 92), получится, если построить сначала отражение M' точки O в прямой g и затем найти точку, обратную точке M' относительно окружности K.

Доказательство. Если P и P' суть точки пересечения прямой OM с прямою g и окружностью G', то

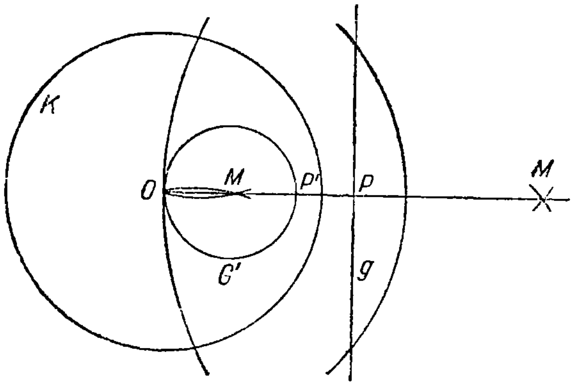
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OP'},$$

следовательно,

$$\overline{OM'} = 2\overline{OP},$$

как это прямо вытекает из соотношения

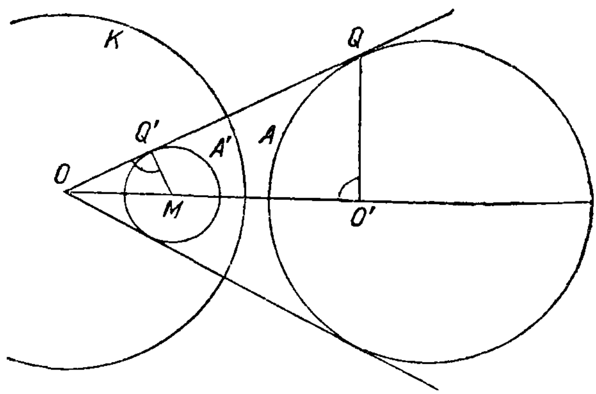
$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}.$$



Черт. 92.

Прямая g может быть задана двумя ее точками, так как их уже достаточно (147) для построения отражения M' точки M.

b) Если окружности A и A' будут взаимно обратными в отношении окружности K, и через точку O провести к обеим окружностям общую касательную, то ее точки касания Q, Q' (черт. 93) должны быть взаимно обратными в отношении окружности K.



Черт. 93.

Если теперь провести $Q'M$ перпендикулярно к этой касательной и QO' перпендикулярно к центральной линии окружностей, то треугольники OQO' и $OQ'M$ будут подобны. Отсюда следует, что

$$\overline{OM} : \overline{OQ'} = \overline{OQ} : \overline{OO'},$$

так что

$$\overline{OM} \cdot \overline{OO'} = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'} = r^2.$$

Таким образом, точки O' и M будут взаимно обратными в отношении окружности K.

Теперь, как это ясно из чертежа, O' есть точка, обратная точке O относительно окружности A, а M есть центр окружности A'.

Итак, для того чтобы получить точку M, следует разыскать точку O', обратную точке O относительно данной окружности A, а затем точку M, обратную найденной точке O' в отношении основной окружности K.

3. Общий метод решения геометрических задач на построение с помощью одного лишь циркуля.

Пользуясь тем, что было изложено в пунктах 1 и 2, можно не только доказать, что все геометрические задачи на построение второй степени разрешимы одним циркулем, но и дать метод, с помощью которого их решение может быть получено.

Каждое выполненное построение второй степени дает фигуру, составленную из прямых линий и окружностей. Фигура, ей обратная относительно некоторой окружности K, принятой за основную, будет состоять лишь из одних окружностей, которые легко могут быть построены (согласно пункту 2) с помощью одного лишь циркуля.

Так как сверх того построение, служащее для перехода от точки P к обратной ей точке P', также может быть выполнено (см. пункт 1) с помощью одного лишь циркуля, то сказанное выше дает уж метод, посредством которого могут быть решены одним циркулем все конструктивные задачи второй степени.

Именно, если требуется решить некоторую геометрическую задачу помощью одного лишь циркуля, то следует представить себе эту задачу решенной обыкновенными средствами, благодаря чему перед умственным взором явится некоторая фигура F, состоящая из прямых линий и окружностей.

Теперь следует провести по возможности более подходящую основную окружность K и затем построить фигуру F', обратную фигуре F в отношении K. Наконец, строят обратное изображение того образа, который принимается за результат на полученной таким образом фигуре F', что и приводит к искомому результату.

Все встречающиеся при этом построения могут быть выполнены с помощью одного лишь циркуля. Окружность K следует при этом выбирать возможно более удобной.

В большинстве случаев надлежит разложить всю задачу на несколько частей, из которых каждая решается согласно вышесказанному.

4. Замечания.

а) Пользуясь вышеизложенным, мы рассмотрим теперь задачу: разделить отрезок AB на n равных частей.

С этой целью повторим n раз отрезок AB, в результате чего получим точку C, и построим затем точку X, обратную точке C относительно окружности A (B).

Тогда

$$\overline{AX} = \frac{1}{n}\overline{AB},$$

ибо

$$\overline{AX} \cdot \overline{AC} = \overline{AB}^2.$$

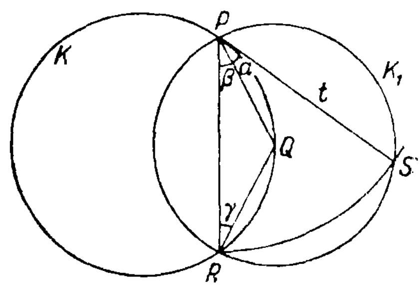
Легко заметить, что это построение есть в точности то самое, какое для этой цели дал Маскерони.

b) Мы должны еще показать (§ 20, 1), как найти точку, обратную точке P, если P лежит внутри круга K и расстояние ее от центра меньше $\frac{r}{2}$.

С этой целью мы прежде всего множим отрезок OP на целое число n, выбранное так, чтобы полученная в результате точка P_1 отстояла от O дальше, чем на $\frac{r}{2}$. Теперь построим точку P_1', обратную точке P_1, и умножим отрезок OP_1' на n. Найденная таким путем точка P' будет обратной точке P, что вытекает из равенства:

$$\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=\overline{OP}_1\cdot\overline{OP_1'}.$$

c) Указанное выше (§ 20, 1) построение обратной точки с помощью одного лишь циркуля проще обычного построения с помощью прямых линий; оно непосредственно показывает основное значение принципа обратных радиусов для всего, что касается окружности.



Черт. 94.

В самом деле, если желают создать Геометрию циркуля, к чему стремится Маскерони в своем труде, то ведь необходимо начать с вычерчивания окружности; после этого проще всего будет присоединить еще точку P и начертить определенную ею окружность. Почти невольно приходишь к нашему построению как самому простому из всех возможных.

Если взять точку P на самой окружности (черт. 94), то получается еще одно простое построение.

Именно, если P есть точка окружности K и если описать окружность $Q(P)=K_1$, причем Q есть произвольная точка окружности K, то получится точка R. Если теперь пересечь K_1 окружностью $P(R)$, то получится точка S, и можно показать, что прямая SP есть касательная к окружности K в точке P.

В самом деле, прямая PQ есть линия центров обеих окружностей K_1 и $P(R)$. Поэтому

$$\measuredangle\alpha=\measuredangle\beta.$$

А так как и

$$\measuredangle\gamma=\measuredangle\beta,$$

ибо

$$\overline{PQ}=\overline{QR},$$

то

$$\measuredangle\alpha=\measuredangle\gamma,$$

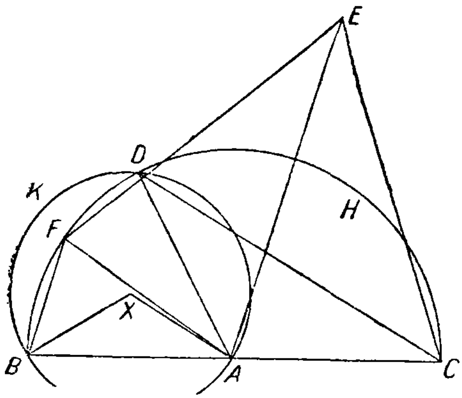
так что прямая PS есть касательная к окружности K в точке P.

Это построение — наиболее простое из тех, которые могут быть выполнены с помощью проведения окружностей; кроме данной окружности K, оно требует проведения только двух окружностей.

d) При решении геометрических задач на построение с помощью одного только циркуля можно следовать и по совершенно иному пути.

Штейнер, как мы знаем (глава II), показал, что все геометрические задачи могут быть решены с помощью проведения одних лишь прямых линий, коль скоро в плоскости чертежа дана окружность K и ее центр O.

Если представить себе теперь задачу решенной по штейнерову способу, то получится фигура, состоящая, кроме окружности K, только из прямых линий.



Черт. 95.

Если теперь принять K за окружность инверсии и построить фигуру, обратную полученной, то она будет состоять только из окружностей, которые, за исключением K, все проходят через точку O.

Так как переход от штейнеровой фигуры к ей обратной может быть выполнен с помощью одного лишь циркуля, то мы убеждаемся в следующем.

Не только возможно, как это показал еще Маскерони, решить все геометрические конструктивные задачи второй степени при исключительном пользовании циркулем, но можно даже поставить еще условием, чтобы все входящие в построение окружности, за исключением одной из них, проходили через одну и ту же произвольно выбранную точку.

Таким образом не только можно каждое геометрическое построение выполнить, проводя одни лишь окружности, но можно и эти окружности подчинить ограничениям.

Задачи для упражнения.

159. Построение центра X начерченной окружности K.

Первый метод (по Маскерони).

Берут на окружности K точку A (черт. 95), описывают произвольным радиусом AB окружность H и определяют точку C так, чтобы дуга BC была полуокружностью.

Радиусом CD описывают вокруг точек A и C окружности, которые пересекаются в точке E, и строят на H точку F так, что

$$\overline{FE} = \overline{CD}.$$

Отрезок BF будет искомым радиусом окружности K.

Доказательство.

$$\measuredangle BAE = \measuredangle ACE + \measuredangle AEC = \measuredangle FAE + \measuredangle FAB,$$

а так как

$$\triangle ACE \cong \triangle AFE,$$

то

$$\measuredangle FAB = \measuredangle FEA,$$

поэтому

$$\triangle ABF \sim \triangle AFE.$$

Отсюда вытекает, что

$$\overline{BF} : \overline{AF} = \overline{AF} : \overline{AE},$$

или

$$\overline{BX} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{CD},$$

причем X определяется так, что

$$\overline{BX} = \overline{AX} = \overline{BF}.$$

Из последней пропорции вытекает, что

$$\triangle ABX \sim \triangle ADC.$$

Отсюда далее получается:

$$\measuredangle BAX = \measuredangle ACD = \frac{1}{2} \measuredangle BAD,$$

а это дает нам, наконец, возможность заключить, что

$$\triangle BAX \cong \triangle AXD.$$

Таким образом

$$\overline{AX} = \overline{BX} = \overline{DX},$$

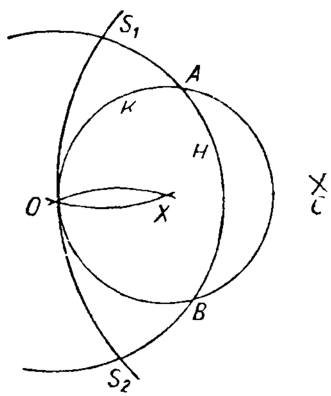
т. е. точка X есть искомый центр окружности K.

Второй метод. Решение с помощью принципа обратных радиусов.

Берут на окружности K центр инверсии O и описывают вокруг него произвольным радиусом окружность инверсии H, лишь бы только она пересекла окружность K в двух точках A, B.

Прямой AB (черт. 96) при инверсии относительно H отвечает тогда окружность K.

Если сообразно с задачей 147 построить точку C, симметричную точке O относительно AB, и точку X, обратную точке C относительно H, то X и будет искомым центром окружности K.



Черт. 96.

160. Даны три точки A, B, C окружности. Требуется построить ее центр.

При решении этой задачи можно следовать тому же принципу, что и при решении последней задачи: с помощью инверсии преобразуют окружность K в прямую g, а затем, обратно, отыскивают центр той окружности, которая при этой инверсии отвечает прямой g.

С этой целью принимают точку A за центр инверсии, окружность $A(B)$ — за окружность инверсии H и строят сначала точку D, которая отвечает C относительно H по принципу обратных радиусов.

Тогда BD есть та именно прямая g, обратным изображением которой относительно H является данная окружность K. Теперь строят отражение E точки A в прямой g и точку X, обратную E относительно H.

Точка X и будет искомым центром окружности ABC.

161. Приближенное выпрямление окружности.

Маскерони дает для приближенного выпрямления четвертой части окружности $\left(\text{т. е. для приближенного определения } \frac{\pi}{2}\right)$ простой и практически очень ценный метод.

Если (черт. 71) начертить

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AO}$$

и описать окружности $A(C)$ и $D(B)$, то в пересечении их получится точка G. Если сделать

$$\overline{BT} = \overline{BG},$$

то отрезок $\overline{AT}$ приблизительно будет равен четвертой части окружности.

Доказательство. Если $\overline{AO} = 1$, то $\overline{OG} = \sqrt{2}$. Так как $\overline{BC} = 1$, то из треугольника EGO следует, что

$$BG = \sqrt{3 - \sqrt{6}}.$$

В треугольнике ABT угол $ATB = 30°$, сторона $\overline{AB} = 1$ и сторона $\overline{BT} = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$.

Если обозначить длину отрезка AT через x, то имеет место равенство:

$$1 = x^2 + (3 - \sqrt{6}) - 2x\sqrt{3 - \sqrt{6}} \cos 30°,$$

$$1 = x^2 + 3 - \sqrt{6} - x\sqrt{9 - 3\sqrt{6}}.$$

Отсюда получается:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{9 - 3\sqrt{6}} + \sqrt{1 + \sqrt{6}}\right) = 1{,}5712\ldots$$

Так как $\frac{\pi}{2} = 1{,}5708\ldots$, то четвертая часть окружности найдена с точностью до первых трех десятичных знаков.

Разница между результатом, найденным построением, и вычисленным значением составляет $\frac{4}{10\,000}$ радиуса, т. е., например, $\frac{1}{10}$ *мм*, если радиус равен $\frac{1}{4}$ *м*. Результат этот вполне достаточен для всех случаев, могущих встретиться на практике.

§ 21. Построения при одном растворе циркуля.

1. Мы видели выше, что все задачи на построение, которые обыкновенно решаются циркулем и линейкой, могут быть строго разрешены с помощью проведения одних лишь окружностей и что можно даже подчинять проводимые окружности некоторым условиям.

Мы знаем также, что построения, совершаемые с помощью одного лишь циркуля, имеют особенный практический интерес, так как циркуль является гораздо более точным чертежным инструментом, чем линейка.

Для практических целей было бы наиболее удобным, если бы все проводимые окружности имели один и тот же радиус, т. е. если бы все построения выполнялись одним циркулем при одном его растворе.

2. Кантор (Cantor) в своей книге „Geschichte der Mathematik", стр. 383, считает несомненным, что грекам была известна Геометрия одного раствора циркуля; далее, Кантор упоминает и о том, что значительная часть сочинения „Книга геометрических построений" арабского математика Abû'l Wafâ посвящена решению задач при одном растворе циркуля.

3. Если пытаться решить геометрические основные задачи при помощи циркуля с постоянным раствором, не проводя при этом прямых линий, то окажется, что хотя можно увеличивать отрезки в целое число раз, но нельзя их делить.

Таким образом невозможно выполнить все геометрические построения с помощью этого ограниченного средства решения, не проводя ни одной прямой линии.

Иначе обстоит дело, если, кроме циркуля с постоянным раствором, допускается и односторонняя линейка. Тогда все задачи на построение могут быть разрешены этими ограниченными средствами, ибо по теореме Штейнера достаточно и одной окружности для того, чтобы разрешить все задачи на построение второй степени проведением одних лишь прямых линий.

Геометрия одного раствора циркуля должна быть поэтому понимаема только в том смысле, что допускается и проведение прямых линий, причем делают построения возможно более простыми.

162. Допустим, что даны два циркуля с различными, но постоянными растворами. Какие задачи можно решить с их помощью, если проводить только дуги окружностей и не проводить ни одной прямой линии?

Глава IV.

ПОСТРОЕНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙКИ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ КРАЯМИ (ДВЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ НА ПОСТОЯННОМ РАССТОЯНИИ). ПОСТРОЕНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПОДВИЖНОГО ПРЯМОГО УГЛА. ПОСТРОЕНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОДВИЖНОГО УГЛА. ПОСТРОЕНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙКИ И ПОСТОЯННОГО ОТРЕЗКА (ЭТАЛОНА ДЛИНЫ). ПОСТРОЕНИЯ, СОВЕРШАЕМЫЕ С ПОМОЩЬЮ БИССЕКТОРА.

§ 22. Введение.

1. Строгие и приближенные решения геометрических задач на построение.

Обыкновенно говорят: Геометрическая задача на построение может быть решена строго, если для ее решения необходимо только описывать окружности и проводить прямые в конечном числе, и если при идеальном совершенстве инструментов решение было бы точно.

Наоборот, говорят о приближенном решении задачи, если даже при идеально совершенных инструментах избранный путь не может привести к математически точному решению задачи или если ее решение требует неограниченного числа построений.

Эти замечания важны для следующего.

Пусть будет дана задача: На прямой g требуется построить точку X так, чтобы из нее данный отрезок AB был виден под прямым углом. Решение ее может быть получено, если приложить к точкам A и B подвижной прямой угол (например, из дерева) и передвигать его до тех пор, пока вершина угла не коснется прямой g.

Обыкновенно решают задачу другим путем. Тем не менее, если поступить вышеуказанным образом, то точка X при этом будет найдена никак не приближенно, ибо при идеальном совершенстве употребленного инструмента точка X получилась бы вполне точно.

Правда, прямой угол необходимо некоторое время передвигать, пока он не придет в надлежащее положение; но это обстоятельство отнюдь не делает нашего построения приближенным, ибо и при соединении двух точек прямою приходится некоторое время передвигать линейку, пока она не примет надлежащего положения.[92]

2. Основные операции.

а) Из рассмотрения штейнеровых построений (стр. 68) мы знаем, что с помощью проведения прямых линий и окружностей могут быть непосредственно выполнены только следующие шесть основных операций:

1) проведение прямых линий, 2) определение точки пересечения проводимой прямой с уже начерченной, 3) определение точек пересечения проводимой прямой с уже начерченной окружностью, 4) описывание окружности, 5) построение точек пересечения проводимой окружности с начерченной уже прямой, 6) построение точек пересечения проводимой окружности с уже начерченной.

Если средства решения ограничены, то необходимо показать, что с их помощью могут быть выполнены упомянутые выше шесть основных операций.[93]

b) В настоящей главе всегда будет допускаться проведение прямых линий.

Следовательно, задачи 1) и 2) могут быть непосредственно разрешены; решение задачи 4) без циркуля может быть произведено лишь по точкам.[94] Таким образом остаются только задачи 3), 5), 6), которые, как было показано выше (стр. 68—69), могут быть сведены к одной задаче, а именно:

A) Дана прямая, сверх того задана окружность ее центром и радиусом. Требуется построить точки пересечения прямой с окружностью.

Для того чтобы доказать, что предложенным средством решения могут быть выполнены все построения, нужно лишь обнаружить, что с его помощью может быть решена главная задача A.

c) Тогда с помощью нашего ограниченного средства решения можно было бы разрешить каждую произвольно предложенную задачу, следуя шаг за шагом за ее решением, совершаемым при неограниченном пользовании циркулем и линейкой, но выполняя каждую из примененных операций лишь при помощи данного средства решения.

Однако такого рода метод во многих случаях не заслуживает предпочтения, так как многие из наиболее простых и наиболее часто встречающихся конструктивных задач (так называемые элементарные геометрические задачи) могут быть с помощью нашего средства решения легче разрешены другим путем, нередко даже более просто, чем циркулем или линейкой.

3. Элементарные задачи.

Поэтому удобнее сначала заняться решением этих элементарных задач, тем более, что на них основывается и решение главной задачи A.

Этими элементарными задачами являются (по Штейнеру, „Geometrische Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises") следующие:

a) провести параллельную прямую;

b) повторить произвольное данное число раз отрезок, длина которого дана, или разделить его на произвольное число равных частей;

c) провести взаимно перпендикулярные прямые;

d) данный угол разделить пополам или повторить произвольное число раз;

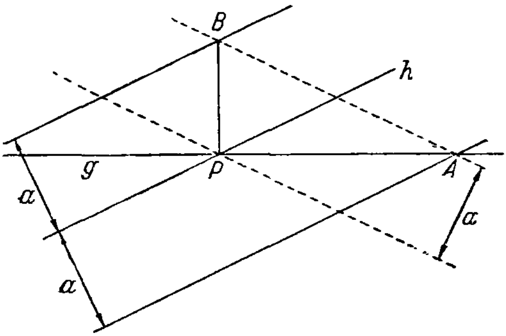
e) через данную точку провести прямую, которая с данной прямой образовала бы угол, равный некоторому данному по величине и положению углу;

f) провести от данной точки в произвольном направлении отрезок, равный некоторому данному по величине и положению отрезку.

В настоящей главе мы постоянно будем прежде всего указывать решения этих задач, а затем уже — главной задачи A.

§ 23. Геометрические построения, выполняемые с помощью линейки о двух параллельных краях (две параллельные прямые на постоянном расстоянии a). [95]

a) В результате получится, что с помощью линейки о двух параллельных краях могут быть строго разрешены все конструктивные геометрические задачи второй степени и что встречающиеся при этом построения иногда даже проще, чем обычные, совершаемые с помощью циркуля и линейки.



Черт. 97.

b) Мы должны прежде всего с помощью одной только линейки о двух краях разрешить штейнеровы элементарные задачи.

При этих построениях мы часто будем пользоваться теоремой о трапеции (стр. 62).

163. Провести параллель (построение такое же, как на черт. 55).

164. Данный по величине отрезок повторить несколько раз или разделить (решается так же, как на черт. 56).

165. Провести взаимно перпендикулярные прямые. Даны прямая g и на ней точка P. Требуется в точке P восставить перпендикуляр к g.

Проводят через P прямую h (черт. 97) и дважды прикладывают к ней линейку; затем помещают линейку в плоскости чертежа так, чтобы один ее край проходил через P, а другой — через A (черт. 97). Прямая PB есть искомый перпендикуляр.

Прямая h выбирается так, чтобы точка A достаточно далеко отстояла от точки P.

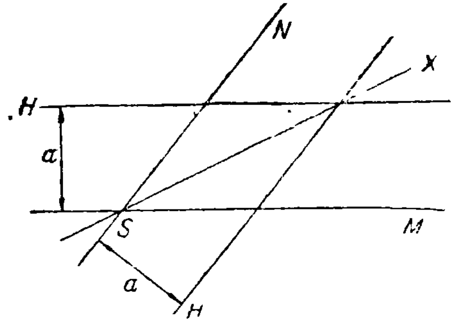
Само построение, согласно § 22, 1 настоящей главы, ни в каком случае не является приближенным, ибо при идеальном совершенстве употребленного инструмента результат получился бы вполне точным.

166. Разделить пополам или повторить несколько раз данный угол.

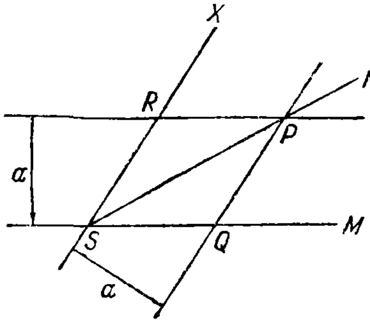
Если требуется разделить пополам угол MSN, то поступают так, как указано на черт. 98 (через a обозначена ширина линейки).

Построение проще обычного, совершаемого с помощью циркуля и линейки (односторонней).

Для того чтобы удвоить угол MSN (черт. 99), прикладывают сначала линейку к прямой SM и получают таким образом точку P; затем помещают линейку так, чтобы один ее край проходил через точку P, а другой через точку S. Фигура $SQPR$ есть ромб.



Черт. 98.



Черт. 99.

167. Провести через точку P прямую x так, чтобы она с данной прямой l составляла угол, равный углу ASB, заданному по величине и положению.

Строят прямую SL', параллельную l (черт. 100), и биссектрису h угла ASL'. Если затем сделать

$$\measuredangle X'Sh = \measuredangle hSB = \measuredangle \beta$$

и

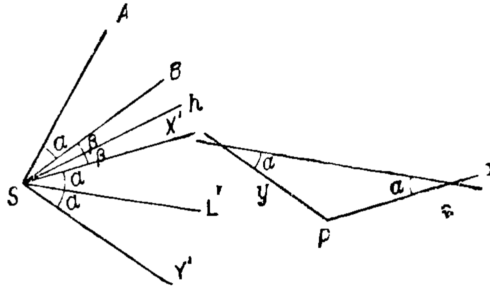
$$\measuredangle Y'SL' = \measuredangle L'SX' = \measuredangle \alpha,$$

то прямые SY' и SX' будут параллельны искомым прямым.

168. Даны прямая g, на ней точка M и отрезок AB. Требуется на g построить точку X так, чтобы $\overline{MX} = \overline{AB}$.

На черт. 101 прямая h есть биссектриса угла $A'Mg$; прямая $A'X$ параллельна h.

c) Покончив с элементарными построениями, мы обращаемся к решению главной задачи А.



Черт. 100.

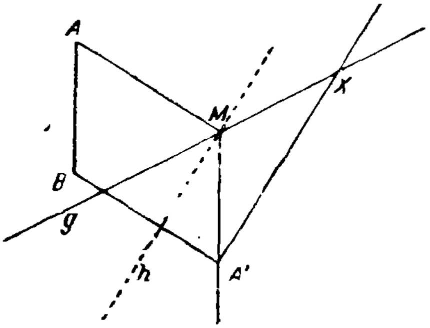
Пусть будет дана прямая g (черт. 102) и отрезок MA, параллельный g. Требуется построить точки X_1 и X_2 пересечения прямой g с окружностью, описанной из точки M как из центра радиусом MA.*

Прикладывая линейку к прямой MA, получают прямую g' (черт. 102); теперь проводят произвольную прямую MB, которая пересечет g

* Если радиус окружности задан в виде произвольного отрезка, то с помощью задачи 167 можно провести радиус параллельно g.

в точке B, а g' — в точке B', и затем проводят прямую $A'B'$ параллельно прямой AB.

Если теперь поместить линейку в плоскости чертежа так, чтобы один из ее краев проходил через M, а другой — через A', что возможно сделать двумя различными способами, то и получатся искомые точки X_1 и X_2.



Черт. 101.

Доказательство. Фигуры $MA'DX_2'$ и $MA'CX_1'$ суть ромбы. X_1' и X_2' являются точками пересечения прямой g' с окружностью $M(A')$. Следовательно, точки X_1 и X_2 лежат в пересечении прямой g с концентрической окружностью $M(A)$.

d) Построение точек пересечения двух окружностей может быть сведено к предыдущей задаче совершенно так же, как это сделано на стр. 68.

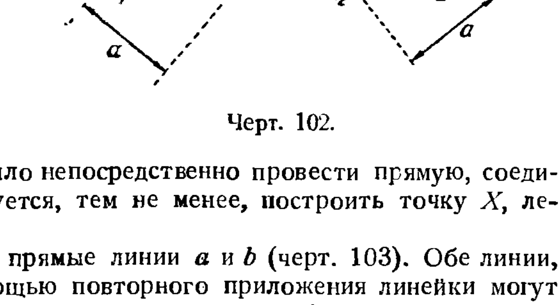
e) Таким образом мы строго доказали, что с помощью линейки о двух параллельных краях (две параллельные прямые на постоянном расстоянии) можно решить каждую задачу на построение второй степени, и видели также, что решения совсем не сложны, иной раз даже проще обыкновенных.

Эти построения имеют практическое значение для землемерия.

Задачи для упражнения.

169. Дан треугольник. Требуется с помощью линейки о двух параллельных краях построить центры вписанного и описанного кругов.

170. Дан отрезок AB, меньший, чем расстояние a между краями линейки. Требуется в точке A восставить к отрезку AB перпендикуляр. (Умножают отрезок AB на достаточно большое число.)



Черт. 102.

171. Даны две точки A и B. Употребляемая для построения линейка слишком коротка для того, чтобы можно было непосредственно провести прямую, соединяющую эти точки. Требуется, тем не менее, построить точку X, лежащую на прямой AB.

Проводят через B две прямые линии a и b (черт. 103). Обе линии, в случае надобности, помощью повторного приложения линейки могут быть сколь угодно продолжены в сторону точки A.

Если теперь провести прямые c, d, e и построить прямую e' параллельно e, c' параллельно c, d' параллельно d, то точка X будет принадлежать прямой AB.

Следовательно, прямую, соединяющую точки A и B, можно начертить и с помощью короткой линейки.

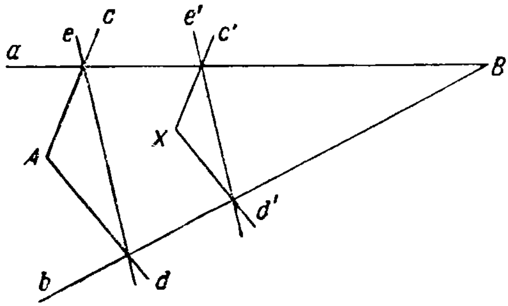
Вообще каждая из вышеприведенных задач разрешима также и с помощью короткой линейки.

172. Замечательный метод для решения геометрических задач с помощью линейки о двух параллельных краях может быть заимствован из построений Штейнера, как это указывает Ф. Энрикес (F. Enriques). *

a) С помощью линейки о двух параллельных краях, ширина которой есть a, можно проводить прямые линии; но легко можно также с ее помощью проводить касательные из любой точки P к окружности K, если дан ее центр M и если радиус ее равен a.

Посредством же этих чертежных операций можно построить полюс каждой прямой и поляру каждой точки относительно K.

b) Если геометрическую задачу решают по способу Штейнера, то получается фигура F, которая, кроме штейнеровой окружности, содержит только прямые линии.



Черт. 103.

Если теперь построить фигуру F', полярную для фигуры F относительно окружности, определяемой центром M и радиусом a, то построение это, согласно вышесказанному, кроме проведения прямых, потребует еще лишь проведения касательных к окружности K. Переход от F к F', равно как и от F' к F, также может быть выполнен с помощью только этих двух операций.

c) Таким образом все конструктивные задачи второй степени могут быть решены с помощью линейки о двух параллельных краях, причем употребление ее может даже подлежать ограничениям. [96]

Предлагается решить задачи этого параграфа указанным здесь путем.

§ 24. Построения, совершаемые с помощью прямого угла.

a) Единственно применяемым в настоящей главе инструментом черчения является подвижной прямой угол [97] (хотя бы из дерева), например, прямоугольный треугольник, гипотенуза которого удалена.

b) В результате нами снова будет выведено, что с помощью этого инструмента могут быть выполнены все построения второй степени.

Позже мы увидим, что прямой угол есть более могучее средство построения, чем циркуль, так как с помощью двух или трех прямых

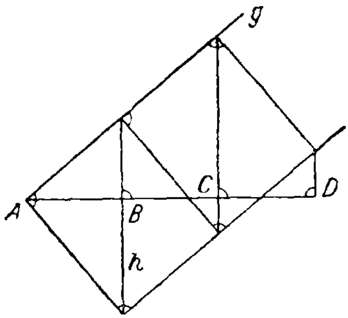
* Ф. Энрикес (F. Enriques), „Vorlesungen über projective Geometrie" стр. 267 (на нем. яз. перев. Dr. Флейшер, Лейпциг 1903).

углов можно строго разрешать также и уравнения третьей степени, чего, как известно, нельзя сделать даже при помощи многих циркулей.

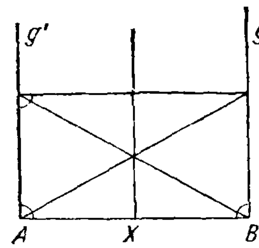
Мы снова рассмотрим по порядку элементарные задачи (§ 22, 3). Решение некоторых из них получается непосредственно.

173. П р о в е с т и   п а р а л л е л и   с   п о м о щ ь ю   п р я м о г о   у г л а. (Проводят сначала перпендикуляры.)

174. П о в т о р и т ь   и л и   р а з д е л и т ь   о т р е з о к.



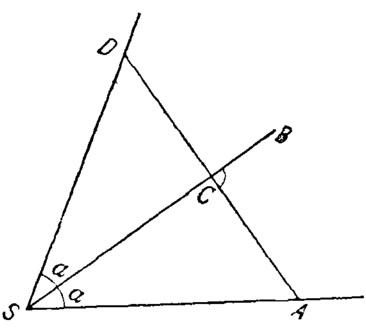
Черт. 101.



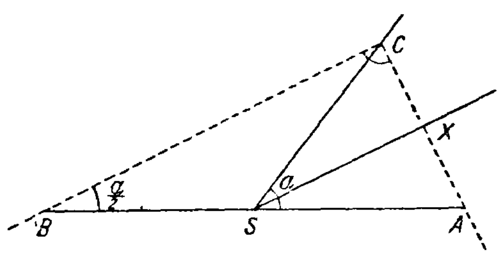
Черт. 105.

Пусть (черт. 104) требуется утроить отрезок AB. Проводят прямую g в произвольном направлении через A, строят h перпендикулярно к AB и поступают так, как указано на черт. 104. Как разделить пополам отрезок AB, показывает черт. 105.

Деление отрезка на большее число равных частей производится, как и раньше (стр. 63), с помощью двух параллельных прямых или же по указанному выше методу Б р и а н ш о н а. (Фигура $ABba$ при этом будет прямоугольником.)



Черт. 106.



Черт. 107.

175. П р о в е с т и   в з а и м н о   п е р п е н д и к у л я р н ы е   п р я м ы е. (Разрешается непосредственно.)

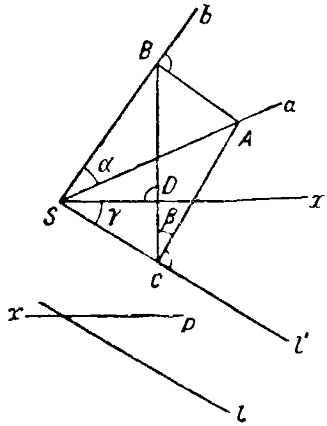
176. П о в т о р и т ь   и л и   р а з д е л и т ь   п о п о л а м   д а н н ы й   у г о л.

Если требуется удвоить угол ASB, то, согласно черт. 106, проводят $AC \perp SB$ и делают $\overline{CD} = \overline{AC}$.

Если требуется разделить пополам угол ASC, то поступают следующим образом. Делают $\overline{BS} = \overline{AS}$ (черт. 107), помещают затем прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы стороны угла проходили через A и B, а вершина его лежала на второй стороне угла α. Прямая x, параллельная BC, и будет искомой биссектрисой угла. (Построение это, согласно § 22, 1, ни в коем случае не должно считаться приближенным.)

177. Через данную точку P провести прямую x так, чтобы она с данной прямой l составила угол, равный заданному по величине и положению углу ASB (черт. 108).

Проводят через S прямую l' параллельно l, берут на a произвольную точку A и опускают перпендикуляры AB, AC соответственно на b и l'; затем соединяют точки B, C и опускают из S перпендикуляр SD на BC. Искомая прямая x параллельна SD.



Черт. 108.

Доказательство. $ABSC$ есть вписанный четырехугольник. Поэтому

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \beta$$

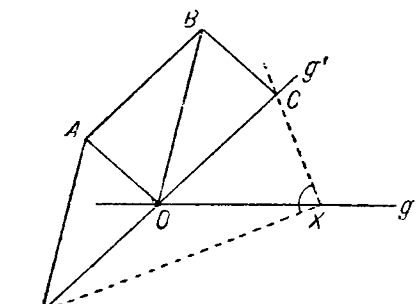
как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Далее

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \beta$$

как углы, образованные взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно,

$$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \alpha.$$

178. Даны прямая g, на ней точка O и сверх того отрезок AB. Требуется построить на g точку X так, чтобы $\overline{OX} = \overline{AB}$.



Черт. 109.

Проводя параллели, строят (черт. 109)

$$\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AB}$$

и помещают затем прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы катеты его проходили через C и D, а вершина его лежала на g. (Построение ни в коем случае не приближенное.)

179. Главная задача A: Даны прямая g и параллельный ей отрезок MA. Требуется построить точки X_1, X_2 пересечения прямой g с окружностью, имеющей своим центром точку M, а радиусом — отрезок MA.

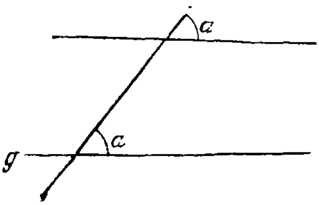
Продолжают отрезок MA в сторону точки M на длину, равную его собственной длине, в результате чего получают точку B; затем помещают прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы его стороны проходили через A и B, а его вершина лежала на g.

180. Дан треугольник ABC. Требуется с помощью лишь прямого угла построить центр O описанной около треугольника окружности.

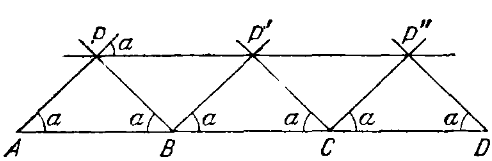
Восставляют в точке A перпендикуляр к стороне AC и в точке B — перпендикуляр к BC; прямая, соединяющая точку пересечения перпендикуляров с точкой C, проходит через искомую точку O.

§ 25. Построения, выполняемые с помощью произвольного угла.

a) В этом параграфе мы предполагаем, что подвижной угол α (например, из дерева) есть единственный чертежный инструмент; α может иметь произвольные значения, за исключением $180°$. [98]



Черт. 110.



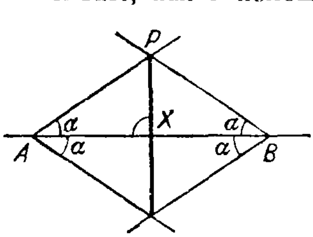
Черт. 111.

В результате будет установлено, что с помощью лишь этого инструмента можно строго разрешить все геометрические задачи второй степени.

b) Для доказательства этого мы должны показать, как с помощью нашего инструмента решаются шесть элементарных задач и основная задача § 22.

181. Провести параллель. (Решение непосредственно усматривается из черт. 110.)

182. Повторить или разделить отрезок. Чертеж 111 показывает, как с помощью подвижного угла α утроить отрезок AB: прикладывая угол α к точкам A и B, определяют точку P, проводят через нее параллель к AB и строят затем точки P', C, P'', D.



Черт. 112.

Чертеж 112 показывает, как разделить отрезок AB пополам.

Деление отрезка на бо́льшее число частей выполняется так же, как на стр. 63.

183. Опустить перпендикуляр. (Решение усматривается из черт. 112.)

184. Даны прямая g, на ней точка O и вне ее отрезок AB. Требуется построить на g точку X так, чтобы $\overline{OX} = \overline{AB}$.

Определяют, согласно черт. 113, точки C, D и E; затем помещают угол α в плоскости чертежа так, чтобы его стороны проходили через E и C, а вершина лежала на g.

Доказательство. Точки C, E и X лежат на окружности, с центром в точке O и радиусом, равным AB.

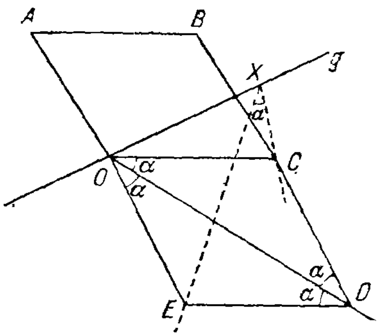
185 Разделить пополам или повторить угол.

Деление угла ASB пополам производится согласно с черт. 114, причем предварительно делают $\overline{SA} = \overline{SB}$.

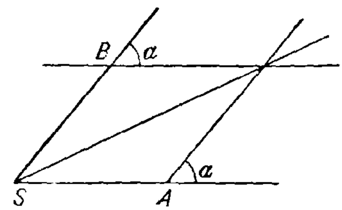
Способ удвоения угла показывает черт. 115. На стороне SA берут точку M и определяют затем с помощью повторного прикладывания угла α точки N, O, P.

186. Перенести данный угол.

187. Главная задача А: Даны прямая g и отрезок MA,



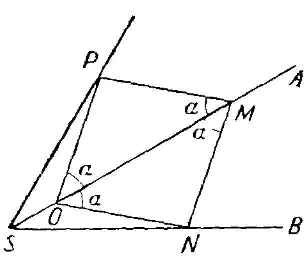
Черт. 113.



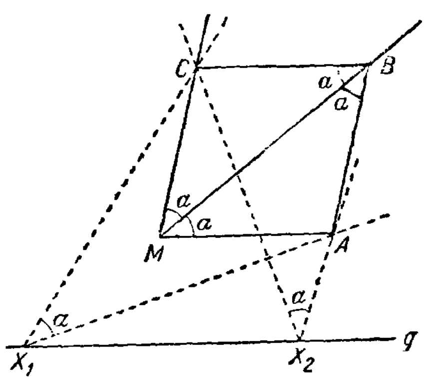
Черт. 114.

параллельный g. Требуется построить точки X_1 и X_2 пересечения прямой g с окружностью, имеющей своим центром точку M, а радиусом — отрезок MA.

Строят (черт. 116) ромб $MABC$ с помощью повторного прикладывания угла α. Если теперь поместить угол α в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили через точки A и C, а вершина лежала на прямой g, то точки X_1 и X_2 будут искомыми



Черт. 115.



Черт. 116.

точками пересечения прямой g с окружностью, ибо они вместе с точками A и C лежат на одной окружности, имеющей центр в точке M.

Замечание. Циркуль, линейка, прямой и острый углы являются обычными чертежными инструментами каждого чертежника.

Нами доказано, что каждым из этих инструментов в отдельности могут быть решены все конструктивные задачи второй степени.

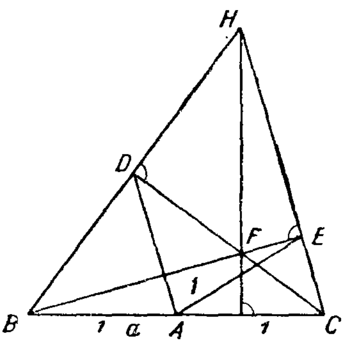
§ 26. Построения, производимые с помощью односторонней линейки и постоянного отрезка (эталона длины). *

1. В этой главе дозволенными чертежными операциями являются: проведение прямых линий и перенесение некоторого отрезка.

Перенесение отрезка может быть выполнено с помощью эталона длины, т. е. инструмента, который позволяет переносить совершенно определенный отрезок, например, единицу длины (таким инструментом может служить хотя бы полоска бумаги определенной длины).

Переносимый отрезок при этом можно откладывать лишь на начерченной уже прямой от данной на ней точки.[99]

Таким образом не дозволяется операция, состоящая в прикладывании конца эталона к данной точке и вращении его вокруг этого неподвижного конца до того положения, в котором другой конец падает на данную прямую; другими словами, не дозволяется таким путем строить прямоугольный треугольник, один из катетов которого известен, а гипотенуза равна длине эталона.



Черт. 117.

2. Мы должны прежде всего решить по порядку при помощи наших ограниченных средств решения штейнеровы элементарные задачи (стр. 95—96).

188. Провести параллель. (Выполняется согласно стр. 62, ибо, прикладывая дважды эталон, можно получить на каждой прямой два равных отрезка).

189. Повторить или разделить отрезок (согласно стр. 63).

190. Провести перпендикуляр.

Требуется восставить перпендикуляр к прямой a (черт. 117).

Берут на a произвольную точку A, строят отрезки

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE} = 1,$$

равные длине эталона, и проводят BD и CE. Прямая FH перпендикулярна к a, ибо BE и CD суть высоты треугольника BCH.

191. На данной прямой построить данный угол.

Пусть будут даны (черт. 108) прямая l, угол $BSA = \alpha$ и точка P. Требуется провести через P прямую, которая пересекала бы l под углом α.

Проводят через S прямую l' параллельно l, берут произвольную точку A на одной из сторон угла α и опускают перпендикуляры AB

---

* Гильберт, „Grundlagen der Geometrie", 2-е изд. 1903 (Д. Гильберт. „Основания геометрии", перевод с V нем. изд., изд-во „Сеятель", Птг. 1923), Фельдблюм, „Ueber elementargeometrische Konstruktionen", диссертация, Геттинген 1899.

и AC. Если теперь провести SD перпендикулярно к BC, то, согласно стр. 101,

$$\angle DSC = \angle BSA = \angle \alpha.$$

Искомая прямая x параллельна SD.

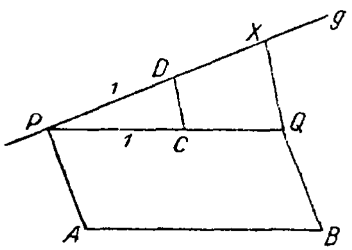
192. Данный отрезок отложить на данной прямой от данной точки.

Пусть будут даны отрезок AB, прямая g и на ней точка P. Требуется определить такую точку X на g, для которой $\overline{XP} = \overline{AB}$.

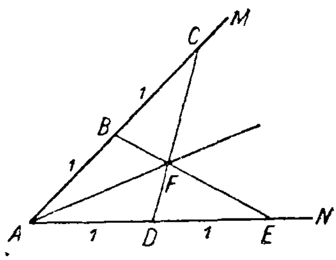
Эталон, который может и не быть равным отрезку AB, отмечен здесь (черт. 118) числом 1.

Проводят, сообразно с задачей 188, PQ параллельно AB (черт. 118) определяют с помощью эталона точки C, D и проводят QX параллельно CD. Тогда PX равняется AB.

Таким образом для перенесения произвольного отрезка достаточно одного эталона длины.*



Черт. 118.



Черт. 119.

193. Разделить пополам или повторить данный угол.

Пусть требуется разделить пополам угол MAN.

Если построить (черт. 119)

$$\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{DA} = \overline{DE} = 1,$$

то прямая AF будет искомой биссектрисой.

Если желают удвоить угол, то из произвольной точки, взятой на одной стороне, опускают на другую сторону перпендикуляр и продолжают его в сторону подошвы на длину, равную его собственной длине.

3. Таким образом штейнеровы элементарные задачи могут быть строго решены с помощью наших ограниченных средств решения.

Для того чтобы показать теперь, что все задачи, которые обыкновенно решаются с помощью циркуля и линейки, можно решить, пользуясь лишь проведением прямых линий и перенесением отрезков, следовало бы только решить еще задачу А (стр. 95), которая требует построения точек пересечения начерченной прямой с окружностью, заданной ее центром и радиусом, ибо, пользуясь указанным выше спо-

---

* И. Кюршак (J. Kürschák), „Das Streckenübertragen", Math. Ann., Bd. 55, 1902.

собом (стр. 68—69), можно свести к этой задаче и при наших ограниченных средствах решения задачу „об определении точек пересечения двух окружностей“.

Но эта главная задача А не может быть разрешена с помощью наших ограниченных средств решения. Именно, мы не в состоянии найти второй катет прямоугольного треугольника, гипотенуза и катет которого даны.

Этому будет дано строгое доказательство в одной из следующих глав.

4. Какие задачи разрешимы этими ограниченными средствами решения?

На этот вопрос может быть дан полный ответ.

а) Если a, b, c, ... суть данные отрезки, то, согласно вышесказанному, с помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков можно построить выражения:

$$a+b, \quad a-b, \quad \frac{a \cdot b}{c}$$

(причем придется пользоваться лишь откладыванием отрезков и построением параллелей) и выражение:

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

(посредством построения прямого угла и откладывания отрезков).

Можно строить и более сложные выражения.* Например, выражение:

$$w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

можно построить, найдя сначала

$$u=\sqrt{x^2+y^2},$$

а затем

$$w=\sqrt{u^2+z^2}.$$

Предложенными ограниченными средствами решения может быть построено и выражение $v=a\sqrt{n}$, где a — данный отрезок, а n — целое число.

В самом деле,

$$v=\sqrt{a^2+a^2+a^2+\ldots+a^2},$$

так что v может быть построено с помощью проведения перпендикуляров и откладывания отрезков.

Можно, например, построить и следующее выражение:

$$x=a\sqrt{33-12\sqrt{2}},$$

ибо

$$x=\sqrt{(4a)^2+(2a\sqrt{2}-3a)^2}.$$

Сначала строят отрезок $2a\sqrt{2}$ как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $2a$, а затем строят отрезок x как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами $4a$ и $(2a\sqrt{2}-3a)$.

---

* Фельдблюм, там же.

b) Таким образом может быть построено всякое выражение, которое получается из данных отрезков путем сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из суммы квадратов.

Поэтому, если при решении какой-либо геометрической задачи на построение приходят окончательно путем вычисления к выражению, которое, кроме рациональных операций, содержит только извлечение квадратных корней из сумм квадратов, то задача эта может быть решена нашими ограниченными средствами решения.

Так, например, при решении задачи Мальфатти (стр. 16) приходят к выражениям, которые кроме рациональных операций содержат лишь извлечения квадратных корней из суммы квадратов. Следовательно, эта задача может быть решена нашими ограниченными средствами решения.

Если s есть сторона правильного треугольника, то высота его

$$h = \frac{s}{2}\sqrt{3};$$

поэтому и правильный треугольник может быть построен нашими ограниченными средствами решения.

Если r есть радиус окружности, то

$$s_{10} = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1) \quad \text{и} \quad s_5 = \sqrt{s_{10}^2 + r^2},$$

где s_{10} и s_5 означают соответственно стороны правильных вписанных десяти- и пятиугольника. Оба многоугольника, следовательно, могут быть построены с помощью лишь проведения прямых линий и откладывания отрезков.

5. a) Но выражение $\sqrt{a^2 - b^2}$ (а следовательно, и выражение $\sqrt{ab}$) не может быть построено этими ограниченными средствами решения, что будет строго доказано позже.

Поэтому не могут быть разрешены все те задачи, для которых вычисление приводит к результатам, содержащим корни из разности квадратов или из произведения двух отрезков.

b) Пусть, например, даны прямая g и две вне ее лежащие точки A, B. Требуется построить окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой g.

Если обозначить точку пересечения прямых AB и g через C, а искомую точку касания через X, то, как известно,

$$\overline{CX} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}.$$

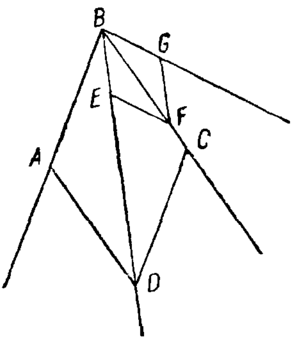
Но нашими ограниченными средствами решения невозможно построить $\sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}$, и потому можно быть уверенным, что предложенными средствами решения наша задача не может быть разрешена ни этим, ни иным путем.

c) Вообще этими ограниченными средствами не может быть разрешена аполлониева задача о касании.

Конечно, три окружности, которые даются в этой задаче, не должны быть предложены для пользования уже начерченными, ибо в противном случае можно было бы разрешить эту задачу по Штейнеру, проводя одни лишь прямые линии. Окружности должны быть заданы их центрами и радиусами. Но тогда задача неразрешима нашими ограниченными средствами решения.

§ 27. Построения с помощью биссектора.

Фельдблюм * дал инструмент, с помощью которого можно делить пополам углы. Он изучил затем те построения, которые могут быть выполнены путем проведения прямых линий и деления пополам углов с помощью этого инструмента, и нашел, что не все геометрические построения второй степени выполнимы этим путем, но лишь те из них, которые выполнимы с помощью проведения прямых линий и откладывания отрезков.



Черт. 120.

1. Упомянутый инструмент — биссектор — имеет форму ромба (черт. 120), подвижного при всех вершинах; две стороны его и диагональ продолжены.

Если в этом инструменте сближать точки A и C, то точки B и D будут удаляться друг от друга, и наоборот; но при этом прямая BD постоянно делит пополам угол ABC.

Фельдблюм употребляет этот инструмент исключительно для деления углов пополам, но не для удваивания их. [100] Поэтому даже следующие задачи представляют некоторые трудности.

2. Даны прямая линия g и на ней точка A. Требуется в точке A восставить к g перпендикуляр.

Для того чтобы указать решение, которое дает Фельдблюм, мы нуждаемся в двух предложениях из основного курса проективной Геометрии.

a) Если a, b, c и a', b', c' суть соответственные лучи двух проективных пучков, то луч d' второго пучка, отвечающий произвольному лучу d первого пучка, может быть построен путем проведения одних лишь прямых линий.

b) Если рассматривать каждые два взаимно перпендикулярные луча одного и того же пучка как соответственные, то все лучи пучка окажутся разбитыми на пары взаимно соответственных лучей.

Таким образом, если даны a, b, c, a', b', c', причем $a' \perp a$, $b' \perp b$, $c' \perp c$, то для каждого луча d можно построить перпендикулярный ему луч d' путем проведения одних лишь прямых линий.

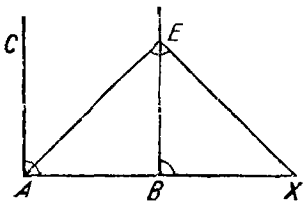
c) Теперь мы возвратимся к нашей задаче. Проводят через A произвольную прямую h, отыскивают с помощью биссектора равноде-

---

* Фельдблюм, „Ueber elementargeometrische Konstruktionen", диссертация, Геттинген 1899.

лящую a угла hg и равноделящую a' смежного с ним угла; a' есть перпендикуляр к a.

Если через A провести вторую прямую k и снова разделить пополам угол kg и смежный с ним, то получатся две взаимно перпендикулярные прямые b, b'; аналогично строят и третью пару перпендикулярных прямых c, c'.



Черт. 121.

Искомая прямая g', перпендикулярная к g, определяется из соотношения:

$$(a'b'c'g') \,\overline{\wedge}\, (abcg). \quad ^{101}$$

Замечание. Если бы было дозволено с помощью биссектора также и удваивать углы, то задача эта могла бы быть решена значительно проще.

3. Удвоение и повторение несколько раз отрезка.

Если отрезок AB (черт. 121) должен быть удвоен, то проводят $AC \perp AB$, $BE \perp AB$; делят затем угол A пополам и строят $EX \perp AE$. Тогда $AX = 2AB$.

4. Проведение параллелей выполняется с помощью задачи 3.

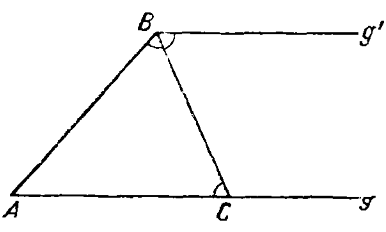
5. Повернуть отрезок вокруг одного из его концов.

Пусть будут даны отрезок AB и прямая g, проходящая через один из концов отрезка AB. Требуется построить на g точку C так, чтобы $\overline{AC} = \overline{AB}$.

Проводят через точку B прямую g' параллельно g (черт. 122) и делят пополам угол при B.

6. Данный отрезок отложить на данной прямой от данной точки.

Переносят отрезок параллельно самому себе до тех пор, пока один из его концов не совпадет с данной точкой, а затем вращают его вокруг этой точки до совпадения с данной прямой.



Черт. 122.

Замечание. С помощью деления углов пополам и проведения прямых линий можно произвольно переносить отрезки. Так как, с другой стороны, с помощью перенесения отрезков и проведения прямых линий можно разделить пополам каждый угол, то биссектор и эталон длины, в некотором смысле, эквивалентны один другому.

Каждая задача, которая может быть разрешена с помощью эталона длины и проведения прямых линий, может быть решена также и с помощью биссектора и проведения прямых линий, и наоборот.

Если же некоторая задача не может быть строго решена с помощью проведения прямых линий и откладывания отрезков, то она неразрешима и с помощью проведения прямых и деления углов пополам.

Глава V.

ЗАДАЧИ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ.

§ 28. Леммы из проективной Геометрии.

Для последующего изложения необходимо знание некоторых теорем из проективной Геометрии. Мы считаем целесообразным изложить здесь во введении все, что нам позже понадобится.

1. Двойное отношение, гармонические ряды точек и пучки лучей, инволюция на прямой линии.

a) Если A, B, C, D суть четыре точки некоторой прямой, то выражение

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = (ABCD)$$

называют двойным или ангармоническим отношением этих четырех точек.

Это двойное отношение, как известно, по теореме Паппа (Pappus), не изменяется при проектировании, т. е., если эти четыре точки спроектировать на другую прямую, то аналогично образованное двойное отношение соответствующих точек равно двойному отношению данных точек.

Под двойным отношением четырех лучей пучка разумеют двойное отношение четырех точек, в которых эти лучи пересекаются с произвольной прямой.

Если четыре точки имеют двойное отношение, равное —1, то они называются четырьмя гармоническими точками.

Четыре луча пучка носят название четырех гармонических лучей, если они пересекаются с какой-нибудь прямой в четырех гармонических точках.

b) Если A и A' суть точки прямой, то на ней можно найти бесконечное множество пар точек B, B', которые вместе с A, A' будут четырьмя гармоническими точками, причем пара точек A, A' разделяется парой точек B, B'. [102]

Если точка B движется вдоль прямой (при неподвижных A, A'), то перемещается и точка B'. В частности, если точка B совпадет с серединой отрезка AA', то точка B' удаляется в бесконечность.

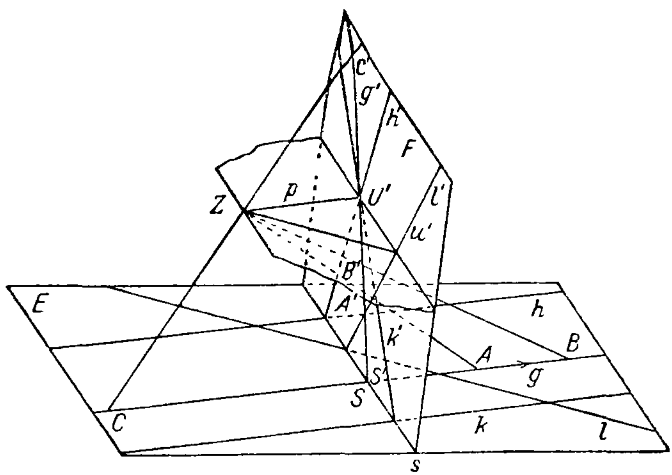
Если a, a' суть стороны угла, а b, b' суть равноделящие этого угла и смежного с ним, то четыре луча a, b, a', b' образуют гармонический пучок лучей. [103]

c) Пусть снова будут даны точки A, A'. Совокупность всех пар точек (таких пар бесконечное множество), которые гармонически разделяются точками A и A', называются инволюцией.

Если на той же прямой AA' дана еще пара точек M, M', то пары точек, гармонически разделенных точками M, M', образуют вторую инволюцию на том же основании.

Можно без труда доказать, что эти обе инволюции имеют одну и только одну общую пару точек, которая может быть и мнимой.

Таким образом, если A, A' и M, M' суть две пары точек на одной и той же прямой, то существует лишь единственная пара точек X, X', которые гармонически разделяются как точками A, A', так и точками M, M'. [104]



Черт. 123.

Пусть, далее, a, a' будут две произвольные прямые линии на плоскости, а S — их точка пересечения. Если две точки B, B' той же плоскости расположены так, что прямые b, b', соединяющие их с точкой S, гармонически разделяются прямыми a, a', то говорят: Прямые a, a' гармонически разделяются точками B, B'.

В частности, если a, a', m, m' суть четыре луча одного и того же пучка и g есть произвольная прямая плоскости, то, согласно вышесказанному, на этой прямой существует единственная пара точек X, X', которыми гармонически разделяются как лучи a, a', так и лучи m, m'.

2) Перспектива пространственных образов.

a) Проектирование и пересечение, т. е. две основные операции проективной Геометрии, приводят к понятию о бесконечно удаленных элементах, которое имеет большое значение для последующего и поэтому должно быть здесь развито. [105]

Пусть E и F будут две произвольные плоскости, s — прямая их пересечения, Z — произвольная точка пространства (черт 123).

Представим себе, что точки и прямые плоскости E спроектированы из точки Z на плоскость F.

Пусть g будет произвольная прямая плоскости E (черт. 123). Проекцию g' этой прямой на плоскости F можно найти, взяв на g две точки A и B и определив их проекции на F; прямая g' должна пересечь g в некоторой точке S прямой s.

b) Если точку B все дальше передвигать вдоль прямой g по направлению стрелки, то и точка B' будет изменять свое положение; в частности, когда точка B станет бесконечно удаленной, ее изображение B' совпадет с точкой U' прямой g', в которой прямая p, параллельная g, встречает плоскость F (черт. 123).

Если снова передвигать точку B вдоль прямой g, но в обратном направлении, то будет двигаться и ее изображение, которое снова совпадет с U', коль скоро B удалится в бесконечность.

Итак, бесконечно удаленные элементы прямой g отображаются в одной точке U'. Это приводит нас к допущению, что прямая имеет одну бесконечно удаленную точку. В этом смысле говорят о бесконечно удаленной или несобственной точке прямой g.

Изображение g' прямой g можно также получить, если провести через Z луч p, параллельный прямой g и пересекающий плоскость F в точке U', и соединить U' с S, ибо U' есть изображение бесконечно удаленной точки прямой g, а S — изображение следа прямой g на плоскости проекций F.

Если в плоскости E дано несколько параллельных прямых g, h, k, то им отвечает один и тот же параллельный луч, исходящий из Z. Следовательно, их изображения проходят через одну и ту же точку.

Таким путем мы приходим к допущению, что параллельные прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке.

c) Возьмем на плоскости еще одну прямую l и отыщем изображение ее бесконечно удаленной точки. С этой целью через Z проведем луч, параллельный l, и продолжим его до пересечения с плоскостью F (черт. 123).

Если прямая l изменяется, то изменяется и параллельный ей луч, проходящий через Z, но последний всегда лежит в той плоскости, которая может быть проведена через точку Z параллельно плоскости E.

Изображения бесконечно удаленных точек всех прямых плоскости лежат, таким образом, на совершенно определенной прямой u' плоскости F; эта прямая лежит в пересечении плоскости F с плоскостью, проведенной через Z параллельно E.

Итак, все бесконечно удаленные элементы плоскости отображаются в некоторой прямой линии.

Если изображение фигуры, не содержащей бесконечно удаленных элементов, есть прямая, то и сама фигура должна быть прямою. Поэтому мы приходим к допущению: плоскость E имеет одну бесконечно удаленную или несобственную прямую.

Аналогичные исследования в пространстве приводят к утверждению: параллельные плоскости имеют общую бесконечно удаленную прямую; все бесконечно удаленные элементы пространства лежат на некоторой плоскости.

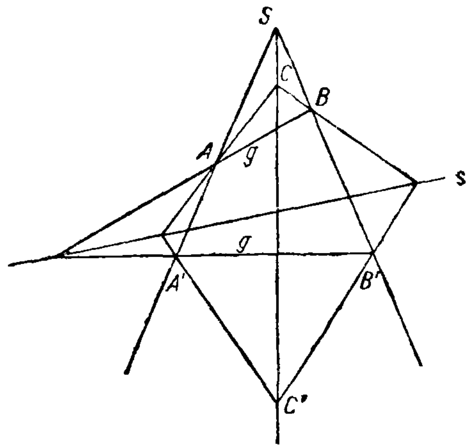
3. Центральная коллинеация на плоскости, или гомология. *

Пусть будут даны на плоскости: точка S, прямая s, которая может также проходить через S, и две точки A, A', лежащие на одном луче, исходящем из S (черт. 124).

Возьмем произвольную другую точку B на той же плоскости, соединим ее с A прямою g, точку пересечения прямых g и s соединим с A' прямою g', которая пересечет прямую SB в точке B' (черт. 124).

Две такого рода точки B, B' мы будем называть соответственными точками.

Если теперь дана третья точка C, то отвечающую ей точку C' можно определить либо с помощью пары точек A, A', либо же с помощью точек B, B'.



Черт. 124.

В обоих случаях, в силу теоремы о перспективно расположенных треугольниках (стр. 51), приходят к одной и той же точке C'. Если D, E, F,... суть дальнейшие точки плоскости, то отвечающие им точки можно найти, исходя из любой пары соответственных точек.

Две прямые линии, находящиеся в таком же отношении, как прямые g и g', h и h', k и k' на черт. 124, называются соответственными.

Таким образом каждые две соответственные точки лежат на прямой, проходящей через S, и каждые две соответственные прямые пересекаются в точке на прямой s. Каждая точка прямой s отвечает сама себе; каждая прямая, исходящая из S, также отвечает сама себе. Точка S совпадает с отвечающей ей точкой; равным образом, прямая s совпадает с отвечающей ей прямой.

Если точка P описывает прямую g, то соответствующая ей точка P' описывает прямую g', соответствующую g; если прямая g вращается вокруг некоторой точки Q, то соответствующая ей прямая g' вращается вокруг точки Q', отвечающей Q.

Соответствие, которое таким путем устанавливается между точками и прямыми плоскости, называют центральной коллинеацией или гомологией. С нею, как известно, очень часто приходится встречаться в начертательной Геометрии и в геометрических задачах.

Точка S называется центром коллинеации, прямая s — осью коллинеации.

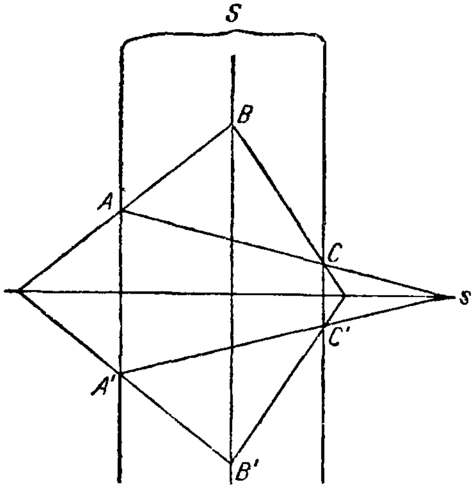
Основные элементы S, s и A, A' могут иметь различное взаиморасположение; им характеризуются частные случаи гомологии.

---

* Ф. Энрикес, „Vorlesungen über projective Geometrie", Лейпциг 1903.

Мы упомянем здесь о тех из них, которые будут важны для нас впоследствии.

a) Ось коллинеации s есть конечная прямая (черт. 125); отрезок AA' расположен перпендикулярно к прямой s и делится ею пополам; сверх того, центр коллинеации S, который должен лежать на прямой AA', бесконечно удален.



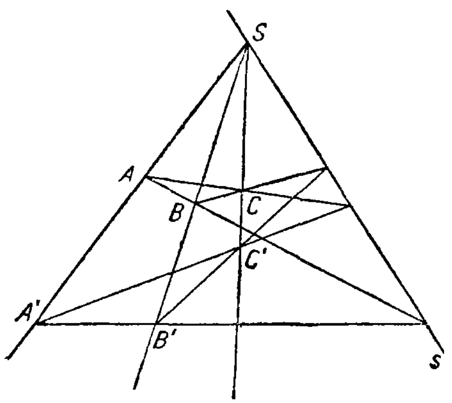
Черт. 125.

При этом два соответственных треугольника ABC и $A'B'C'$ (черт. 125) конгруэнтны, но обратно расположены; одна из фигур может быть приведена к совпадению с другой путем поворота вокруг оси коллинеации.

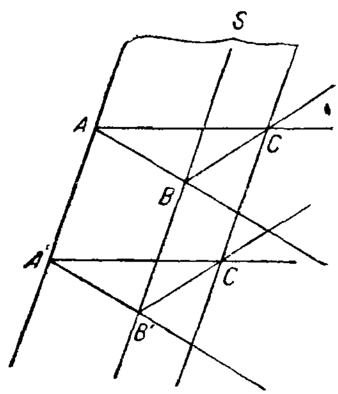
Обе фигуры расположены симметрично относительно оси коллинеации s. Симметрия, таким образом, является частным случаем гомологии.

С помощью проектирования двух фигур, симметрично расположенных относительно оси, на новую плоскость получается общий случай гомологии.

b) Пусть ось коллинеации проходит через S.



Черт. 126.



Черт. 127.

Построение соответственных точек и прямых производится, как и в общем случае (черт. 126).

c) Если взять S и s бесконечно удаленными, т. е. если за ось коллинеации принимается бесконечно удаленная прямая нашей плоскости и S есть одна из ее точек, то прямые, соединяющие соответственные точки, параллельны; сверх того, параллельны соответственные прямые (черт. 127).

Два соответственных треугольника ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны и могут быть приведены к совпадению с помощью параллельного перенесения.

Итак, параллельное перенесение также есть частный случай гомологии и при проектировании переходит в общий случай.

4. Мнимые циклические точки, абсолютная инволюция.

a) Пусть будет дана прямоугольная система координат. Тогда уравнение каждой окружности, лежащей в плоскости осей координат, может быть написано в виде:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

причем для каждой данной окружности a, b, c суть данные числа. Мы хотим определить точки J_1, J_2 пересечения окружности, выражаемой этим уравнением, с бесконечно удаленной прямой. С этой целью мы полагаем $x=\frac{x'}{t'}$, $y=\frac{y'}{t'}$ и находим уравнение окружности в однородных координатах: *

$$x'^2+y'^2+ax't'+by't'+ct'^2=0.$$

Для бесконечно удаленной точки должно быть $t'=0$, поэтому

$$x'^2+y'^2=0,$$

так что

$$\frac{y'}{x'}=\frac{y}{x}=\pm i,$$

т. е. тангенсы углов, образуемых прямыми OJ_1, OJ_2 с осью x-ов равны $+i$ и $-i$, так что эти углы не зависят от a, b, c.

Согласно с этим все окружности плоскости пересекают бесконечно удаленную прямую в двух совершенно определенных точках J_1, J_2, называемых мнимыми циклическими точками.

Итак, окружность может быть рассматриваема как коническое сечение, проходящее через мнимые циклические точки. Поэтому окружность определяется уже тремя точками.

b) Из многочисленных соотношений, которые могут быть установлены для мнимых циклических точек, мы укажем только те, которые нужны будут нам позже.

Прежде всего докажем следующую важную теорему.

Если a и b суть две взаимно перпендикулярные прямые, то они гармонически разделяются мнимыми циклическими точками. Наоборот, если две прямые гармонически разделяются мнимыми циклическими точками то они взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Положим, что XOY (черт. 128) есть прямоугольная система координат, a, b — две произвольные прямые, i_1, i_2 —

* M. Симон (M. Simon), „Analitische Geometrie der Ebene".

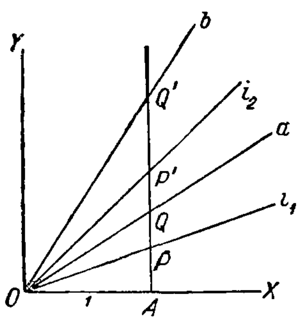
те прямые, которые соединяют O с мнимыми циклическими точками. Уравнения мнимых прямых i_1, i_2, согласно а), могут быть представлены в виде:

$$i_1 \ \ldots \ y = ix,$$
$$i_2 \ \ldots \ y = -ix.$$

Напишем уравнения прямых a, b, проходящих через O:

$$a \ \ldots \ y = mx,$$
$$b \ \ldots \ y = nx.$$

Возьмем теперь точку A на расстоянии 1 от O на оси x-ов и, проведя через A параллель оси y-ов, рассмотрим точки ее пересечения с четырьмя прямыми i_1, i_2, a, b.



Черт. 128.

Двойное отношение четырех лучей при этом равняется двойному отношению точек пересечения, так что

$$(i_1 i_2 ab) = (PP'QQ') = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q}} : \frac{\overline{PQ'}}{\overline{P'Q'}}.$$

Далее,

$$\overline{AP} = +i; \qquad \overline{AQ} = m$$
$$\overline{AP'} = -i; \qquad \overline{AQ'} = n,$$

поэтому

$$(PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Если прямые a, b взаимно перпендикулярны, то, как известно, существует соотношение:

$$n = -\frac{1}{m};$$

тогда

$$(PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i-\frac{1}{m}}{+i-\frac{1}{m}},$$

откуда следует, что

$$(PP'QQ') = -1,$$

чем доказана первая часть теоремы.

Пусть теперь, наоборот,

$$(PP'QQ') = -1,$$

так что

$$\frac{-i+m}{+i+m} = \frac{+i-n}{+i+n}.$$

Отсюда вытекает:

$$n = -\frac{1}{m},$$

что доказывает теорему.

c) Мы выведем еще одну чрезвычайно важную формулу, которая допускает проективное представление угла, именно — формулу Лагерра (Laguerre).

Мы снова составим двойное отношение четырех лучей i_1, i_2, a, b, где i_1, i_2 суть те прямые, которые соединяют O с мнимыми циклическими точками, а прямые a, b являются произвольными лучами, проходящими через O (черт. 128). Тогда

$$(i_1 i_2 ab) = (PP'QQ') = \frac{-i+m}{+i+m} : \frac{-i+n}{+i+n}.$$

Далее, $m = \operatorname{tg}\alpha$ и $n = \operatorname{tg}\beta$, поэтому

$$(PP'QQ') = \frac{-i\cos\alpha + \sin\alpha}{+i\cos\alpha + \sin\alpha} : \frac{-i\cos\beta + \sin\beta}{+i\cos\beta + \sin\beta}$$
$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} : \frac{\cos\beta + i\sin\beta}{\cos\beta - i\sin\beta}.$$

Как известно (формула Эйлера):

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}.$$

Если подставим вместо z соответствующие значения, то получим:

$$(PP'QQ') = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} : \frac{e^{i\beta}}{e^{-i\beta}}$$
$$= e^{2i\alpha} : e^{2i\beta}$$
$$= e^{2i(\alpha-\beta)}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha - \beta = \frac{1}{2i} l DV,$$

где DV есть двойное отношение четырех лучей i_1, i_2, a, b, т. е. двойное отношение сторон угла и двух проходящих через его вершину минимальных прямых (изотропные прямые).

Поэтому два угла равны, если двойное отношение, образуемое сторонами первого угла с мнимыми циклическими точками, равно двойному отношению, образуемому сторонами второго угла с мнимыми циклическими точками.

5. Визуальные (visuelle) и метрические свойства геометрических фигур.*

a) Свойства фигуры могут принадлежать к двум различным категориям.

α) Они могут быть визуальными (свойствами положения, графическими, начертательными свойствами) и находиться в связи только с понятиями о точке, о прямой, о коническом сечении и т. д., давая лишь указания относительно расположения этих элементов.

Если, например, три прямые пересекаются в одной точке, несколько точек фигуры лежат на одной прямой, прямая касается конического сечения фигуры, либо две фигуры гомологично отвечают друг другу, то все эти свойства будут визуальными.

---

* Ф. Энрикес, „Vorlesungen über projektive Geometrie“, Лейпциг 1903.

β) Они могут быть метрическими и связаны тогда с понятиями о длине отрезка и величине угла.

Мы имеем дело с метрическими свойствами фигуры, если, например, в ее состав входят два равных отрезка или два равных угла, прямой угол, угол в 60°, или если входящее в нее коническое сечение есть окружность, и т. д.

γ) Можно говорить также о проективных свойствах фигуры. Свойство фигуры называют проективным, если оно не изменяется при произвольном проектировании на другую плоскость, т. е. переходит в аналогичное (выражаемое одинаковыми словами) свойство трансформированной фигуры.

Каждое визуальное свойство является также и проективным; т. е. сохраняется при проектировании; но не каждое проективное свойство будет визуальным.

Если, например, двойное отношение четырех точек некоторой прямой равно двум, то это свойство сохраняется при проектировании. Действительно, четыре данные точки при проектировании переходят в четыре точки с таким же двойным отношением (стр. 110).

Это свойство, таким образом, является проективным; но оно совсем не визуальное, так как значение двойного отношения может быть определено только путем измерения (сравнения двух отрезков).

Наоборот, если, например, два пучка лучей $abcd$ и $a'b'c'd'$ имеют одно и то же двойное отношение, то это свойство есть свойство визуальное, ибо в этом случае, как известно, можно построить третий пучок лучей, находящийся в перспективном положении по отношению к обоим пучкам.

Для того чтобы иметь возможность утверждать, что два пучка лучей имеют одно и то же двойное отношение, нет надобности определять двойное отношение каждого из пучков, но достаточно лишь обнаружить, что может быть построен пучок, находящийся в перспективном положении с данными пучками.

b) Если два угла равны, то это свойство есть метрическое свойство обеих фигур.

Но мы видели уже выше, что стороны каждого из двух равных углов образуют с мнимыми циклическими точками плоскости одно и то же двойное отношение.

Утверждение же, что два двойных отношения некоторой фигуры равны, выражает визуальное свойство этой фигуры.

Поэтому мы можем упомянутое выше метрическое свойство рассматривать как визуальное, если введем обе мнимые циклические точки.

Легко могут быть даны и другие примеры.

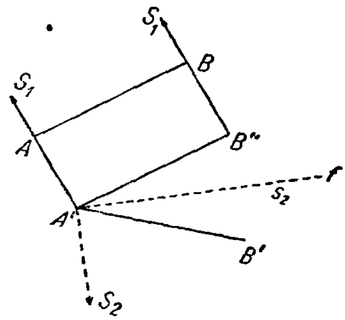
Если, например, точка M есть середина отрезка AB, то это свойство есть метрическое. Но точка M от бесконечно удаленной точки гармонически разделяется точками A и B. Если поэтому дана эта бесконечно удаленная точка, то указанное соотношение является визуальным свойством.

Равноделящие угла (a, b) и смежного с ним угла взаимно перпендикулярны. Они, следовательно, являются теми прямыми пучка a, b, которые гармонически разделяются как лучами a, b, так и мнимыми циклическими точками, и сообразно с этим они определяются визуальными свойствами, соотношениями расположения, если только даны мнимые циклические точки.

6. Мы теперь покажем вообще, что с присоединением бесконечно удаленной прямой и мнимых циклических точек, которые вместе называются также абсолютом плоскости чертежа, каждое метрическое свойство фигуры может быть рассматриваемо как визуальное.

a) Все метрические свойства фигуры сводятся к двум понятиям, именно, к понятию о равенстве двух отрезков и к понятию о равенстве двух углов.

Для того чтобы доказать упомянутое выше предложение, мы поэтому должны лишь представить равенство двух отрезков как визуальное свойство, ибо выше мы уже определили равенство двух углов как визуальное свойство фигуры, если дан абсолют плоскости.



Черт. 129

b) Если теперь AB и $A'B'$ суть два равных отрезка (черт. 129), то можно отрезок AB привести к совпадению со вторым отрезком, перенеся сначала отрезок AB параллельно самому себе и отразив затем полученный таким путем отрезок в биссектрисе f (черт. 129).

Но параллельное перенесение есть частный случай гомологии. Осью s_1 гомологии при этом является бесконечно удаленная прямая плоскости, а центром S_1 — бесконечно удаленная точка прямой AA' (§ 28).

Отражение, равным образом, есть частный случай гомологии. Ось коллинеации s_2 совпадает при этом с биссектрисой f, а центр коллинеации S_2 — с бесконечно удаленной точкой прямой g, перпендикулярной к биссектрисе.

Если теперь дан абсолют плоскости, то тем самым даны s_1, S_1, и в таком случае s_2, S_2 могут быть определены без помощи измерения путем построения таких прямых f, g, которые гармонически разделяются, с одной стороны, прямыми A' B' и $A'B''$, с другой же мнимыми циклическими точками.

Поэтому, если присоединен абсолют плоскости, то и равенство двух отрезков можно рассматривать как визуальное свойство.

7. Разъясним еще несколькими примерами представление метрических свойств в виде визуальных.

a) Если две прямые взаимно перпендикулярны, то это метрическое свойство можно выразить визуально, говоря: две прямые гармонически разделяются мнимыми циклическими точками.

b) Если данный четырехугольник есть параллелограмм, то с присоединением бесконечно удаленной прямой можно также сказать: противоположные стороны пересекаются на бесконечно удаленной прямой.

Это свойство визуальное.

c) Если фигура есть квадрат, то это свойство с помощью абсолюта плоскости можно выразить визуально, сказав: противоположные стороны пересекаются на бесконечно удаленной прямой в точках, которые гармонически разделяются мнимыми циклическими точками; диагонали также гармонически разделяются мнимыми циклическими точками.

d) Треугольник будет равносторонним, если каждая пара его сторон образует с мнимыми циклическими точками одно и то же двойное отношение.

e) Сумма углов треугольника составляет 180°. Как можно представить это утверждение в виде визуального свойства треугольника?

f) Угол некоторой фигуры содержит 60°. Как можно выразить это визуально?

§ 29. Классификация геометрических задач на построение.

Геометрические задачи на построение могут быть рассматриваемы с различных точек зрения и сообразно с этим разделяются на классы

a) Во-первых, их можно, в связи с изложенным выше, подразделить на визуальные и метрические задачи на построение.

Именно, каждая геометрическая конструктивная задача требует построения некоторой фигуры, обладающей данными свойствами.

Если все эти свойства являются визуальными, то и саму задачу называют визуальной задачей на построение.

Если же хоть некоторые из требуемых свойств принадлежат к метрическим, то и задача называется метрической.

Визуальные задачи не меняют своего словесного выражения при проектировании данных и искомых образов из какого-нибудь центра на вторую плоскость, т. е. если спроектировать данные образы, то построение по их проекциям проекций искомых образов требует точно таких же операций на второй плоскости, какие необходимы для того, чтобы на первой плоскости по данным образам построить искомые.

Визуальные задачи поэтому всегда могут быть разрешены с помощью проектирования и пересечения прямых, конических сечений и т. д. друг с другом.

Метрическая задача требует для своего решения, кроме проведения прямых линий, еще сравнения и перенесения отрезков и углов, проведения окружностей или же черчения высших кривых.

Мы знаем, что каждое метрическое свойство фигуры всегда может быть рассматриваемо как визуальное свойство, если только к фигуре присоединен абсолют плоскости.

Можно поэтому также сказать: *каждая метрическая задача с помощью присоединения абсолюта плоскости может быть преобразована в визуальную задачу.*

Мы называем задачу *проективной*, если проектирование не меняет ее словесного выражения.

Например задача: по трем лучам пучка построить четвертый, который вместе с этими тремя образовал бы двойное отношение, равное двум, — является проективной; но она совсем не представляет собою визуальной задачи, ибо в ней речь идет об измерении.

b) К другому важному принципу классификации геометрических задач на построение приходят, решая задачи путем вычисления.

Задачи при этом подразделяются в зависимости от рода производимых операций и степени уравнений, к которым приводит их решение.

Прежде всего их делят на алгебраические и трансцендентные в зависимости от того, приводится ли их решение к алгебраическим уравнениям или к трансцендентным.

Так, например, квадратура круга представляет собою трансцендентную задачу на построение.

Алгебраические задачи на построение подразделяются далее на задачи первой, второй, третьей, четвертой степени, соответственно наивысшей степени встречающихся при их решении уравнений.

c) Можно также классифицировать геометрические задачи на построение по роду кривых, которые чертятся при их решении, или по свойству инструментов, употребляемых для черчения кривых и, следовательно, для решения задач.

Сообразно с этим, можно, как мы знаем, говорить о геометрических задачах на построение, решаемых с помощью проведения одних лишь прямых линий (стр. 61) или одних окружностей (стр. 73 и след.).

Можно говорить о задачах, которые разрешимы, например, с помощью проведения прямых линий, окружностей и одной конхоиды.

Можно также вести речь о геометрии прямых линий, циркуля, эллиптического циркуля и т. д.

d) Каждая геометрическая задача, для которой вообще существует решение, может быть решена построением, но не с помощью всякого инструмента.

Трисекция угла, например, не может быть строго выполнена с помощью циркуля и линейки, но, как мы скоро докажем, выполняется с помощью высших средств решения.

Итак, не существует абсолютно неразрешимых задач, но есть лишь относительно неразрешимые.*

Греки допускали только циркуль и линейку в качестве средств решения, поэтому многие задачи были неразрешимыми, как, например, знаменитые задачи о трисекции угла, удвоении куба, квадратуре круга.

Но все эти задачи могут быть решены построением, даже задача о квадратуре круга, сводящаяся к построению отрезка, равного по длине данной окружности. Эта задача не может быть строго решена циркулем и линейкой, даже и эллиптическим циркулем: она разрешается лишь с помощью инструмента, чертящего трансцендентные кривые, как, например, интеграф Абданк-Абакановича.

§ 30. Визуальные задачи первой и второй степени.

А) Визуальные задачи первой степени.

1. Эти задачи не изменяют своего словесного выражения при проектировании, не требуют никакого из-

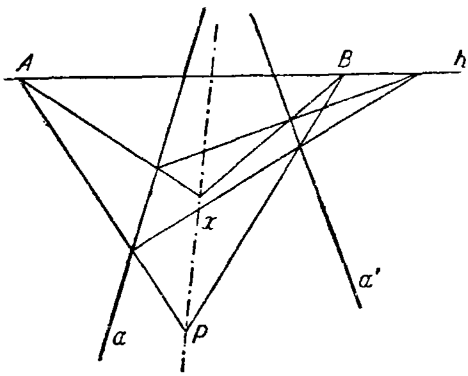
* Ф. Энрикес, там же, стр. 268.

мерения отрезков или углов и, будучи решаемы вычислением, приводят к уравнениям первой степени.

На основании последнего соображения они во всяком случае имеют одно решение, если они не распадаются в ряд других линейных задач.

Их решение требует только операций проектирования и пересечения. Они поэтому разрешимы с помощью проведения одних лишь прямых линий, ибо применение конического сечения во всяком случае дало бы два решения.

Наоборот, относительно каждой геометрической задачи на построение, которая имеет только одно решение и является визуальной, так что не изменяет своего словесного выражения при проектировании и не требует никакого измерения, можно утверждать, что она разрешима с помощью проведения одних лишь прямых линий.



Черт. 130.

2. Новейшая Геометрия знает много визуальных задач первой степени.

Например: построение по трем данным точкам четвертой гармонической; построение двух проективных рядов точек или пучков лучей, когда даны три пары соответственных элементов; построение проективных плоских систем, когда даны четыре пары соответственных элементов; определение второй точки пересечения прямой, исходящей из известной уже точки конического сечения, с этим сечением, заданным пятью элементами; определение четвертой точки пересечения двух конических сечений, если уже известны три точки пересечения.

Все эти задачи визуальные, имеют только одно решение и поэтому могут быть решены с помощью проведения одних прямых линий.

Следует заметить, что не каждая проективная задача (стр. 120), имеющая только одно решение, также может быть решена с помощью проведения одних прямых линий.

Пусть, например, будут даны три точки некоторого ряда. Требуется определить четвертую точку этого ряда так, чтобы двойное отношение, образованное ею с тремя данными точками, равнялось двум.

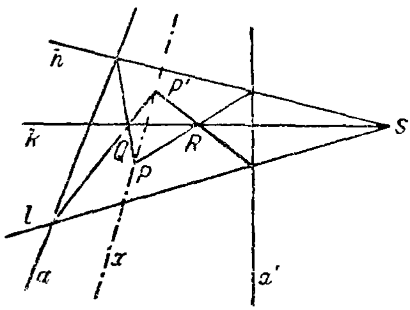
Эта задача будет проективной, но не визуальной; она не может быть решена с помощью проведения одних прямых линий, если не дан абсолют плоскости.

3. Мы не станем вдаваться в подробности решения линейных визуальных задач, так как они относятся к проективной Геометрии. Мы лишь рассмотрим некоторые из этих задач и укажем их решение, которое во всех задачах основано на теореме о перспективно расположенных треугольниках (стр. 51).

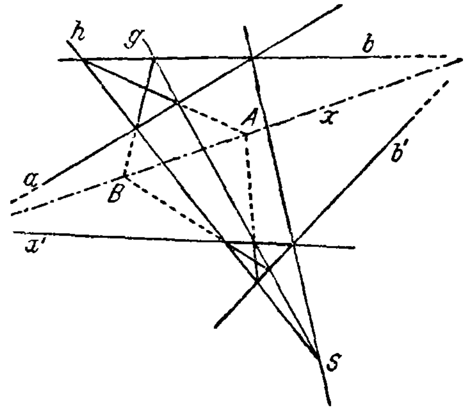
194. Даны две прямые линии a, a' и точка P. Требуется провести прямую x через точку P и через недоступную точку пересечения обеих данных прямых.

Решение выполняется согласно черт. 130 или 131. На первом чертеже прямая h и точки A, B произвольны; на втором — произвольными являются прямые h, k, l и точка S.

195. Даны две пары прямых a, a', b, b', причем точки пересечения $a \times a'$, $b \times b'$ лежат вне эпюра чертежа (черт. 132). Требуется построить прямую, соединяющую обе эти точки.



Черт. 131.

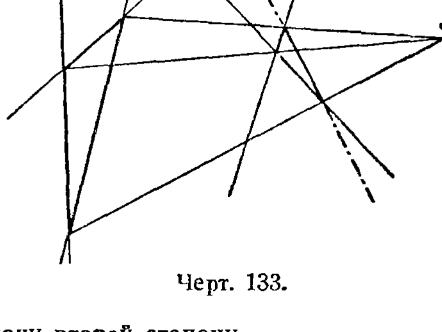


Черт. 132.

С этой целью на второй диагонали четырехсторонника $aa'bb'$ берут произвольную точку S, проводят через нее прямые h, g и рассматривают получившиеся перспективно расположенные треугольники.

Точки A и B лежат на искомой прямой x.

196. Прямая g, лежащая вне эпюра чертежа, задана двумя парами прямых a, a' и b, b' (черт. 133), сверх того дана прямая c, пересекающая прямую g в точке P, лежащей вне эпюра. Требуется построить вторую прямую c', проходящую через P. Соединяют точки $a \times b$ и $a' \times b'$ (черт. 133), берут на этой прямой произвольную точку S и строят c' как сторону треугольника, который находится в перспективе относительно треугольника abc и точки S.



Черт. 133.

B) Визуальные задачи второй степени.

1. Эти задачи требуют лишь установления определенных соотношений положения искомой фигуры и, будучи решаемы вычислением, приводят к уравнениям

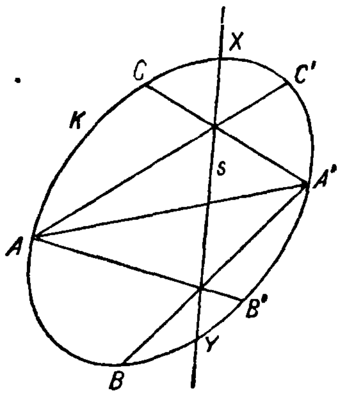
первой и второй степени; они не изменяют своего словесного выражения при проектировании и не требуют никакого измерения отрезков или углов.

Так как каждое уравнение второй степени имеет два решения, то и каждая задача второй степени, если она не распадается на большее число задач второй степени, имеет только **два решения**, которые, однако, могут и совпасть или быть мнимыми.

Поэтому говорят также: **геометрические задачи второй степени имеют либо два решения, либо одно, либо совсем решений не имеют.**

Визуальными задачами второй степени будут, например, следующие:

Определение точки пересечения прямой с коническим сечением, заданным пятью точками; построение касательной из данной точки к коническому сечению, заданному пятью точками; построение остальных точек пересечения двух конических сечений, если известны две их общие точки; построение двойных точек двух проективных рядов, расположенных на одной прямой и заданных тремя парами соответственных точек; построение двойных точек инволюции, заданной двумя ее парами точек, или (иными словами) определение такой пары точек прямой, которые гармонически разделяются двумя парами точек той же прямой, и т .д.



Черт. 134.

2. Все визуальные задачи на построение второй степени могут быть сведены (как мы докажем) к следующей задаче.

Между двумя рядами точек, расположенными на начерченном коническом сечении K (черт. 134), **установлена проективная зависимость, заданная тремя парами соответственных точек** AA', BB', CC'. **Требуется определить двойные элементы** X и Y (**точки, отвечающие сами себе**) **этой проективной зависимости.**

Для получения этих точек проектируют, как известно, оба расположенные на K ряда точек соответственно из A и A' и строят таким путем два проективных пучка, которые находятся в перспективном положении друг к другу, так как они имеют общий луч AA', отвечающий сам себе.

Поэтому соответственные лучи этих двух пучков пересекаются в точках некоторой прямой s, которая с удобством может быть использована для восстановления обоих рядов точек.

Легко видеть, что точки пересечения s с K и будут искомыми точками X, Y.

К решенной выше задаче сводится, как известно, определение двойных элементов двух проективных рядов точек, расположенных на одной прямой, а следовательно, и определение точек пересечения прямой линии с коническим сечением, заданным пятью его элементами.

Ранее упомянутые задачи также могут быть сведены к этой задаче.

3. Каждая визуальная задача второй степени может быть решена с помощью проведения одних лишь прямых линий, если в плоскости чертежа дано постоянное коническое сечение K.[106]

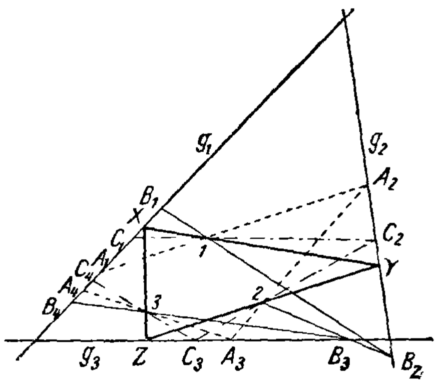
Для решения каждой визуальной задачи второй степени можно лишь проводить прямые, определять конические сечения, строить точки пересечения прямых с прямыми же и с коническими сечениями, производить операции проектирования и пересечения.

Но построение точек пересечения прямой с коническим сечением, заданным пятью его элементами, всегда может быть сведено к основной задаче пункта 2 и при пользовании коническим сечением K может быть выполнено путем проведения одних лишь прямых линий.

Поэтому каждую визуальную задачу второй степени можно решить, проводя одни лишь прямые линии, если в плоскости начерчено коническое сечение, например, окружность, причем нет надобности знать ее центр (ср. стр. 70).

4. Каждая визуальная задача второй степени может быть, таким образом, окончательно сведена к определению двойных элементов двух проективных наложенных друг на друга рядов точек.

Отсюда вытекает чрезвычайно общий метод решения такого рода задач, так называемый „метод испытания". Мы разъясним его на примере.



Черт. 135.

Пусть будут даны три прямые g_1, g_2, g_3 и три точки *1*, *2*, *3* (черт. 135). Требуется начертить треугольник XYZ так, чтобы вершины его лежали соответственно на прямых g_1, g_2, g_3, а стороны проходили соответственно через точки *1*, *2*, *3*.

Берут на g_1 произвольную точку A_1, проектируют ее из *1* на g_2 в точку A_2, затем A_2 из *2* на g_3 в точку A_3 и A_3 из *3* на g_1 в точку A_4.

Если точка A_1 описывает прямую g_1, то A_2 пробегает ряд точек на g_2, находящийся в перспективе по отношению к ряду точек на g_1, A_3 пробегает ряд точек на g_3, перспективно расположенный в отношении g_2, наконец, A_4 — ряд точек на g_1, перспективный относительно g_3.

Ряды точек, которые пробегаются на g_1 точками A_1 и A_4, будут, следовательно, проективными; искомые точки X являются двойными точками этой проективной зависимости, ибо если A_4 совпадет с A_1 то мы будем иметь решение задачи.

Задачи для упражнения.

197. Даны два треугольника ABC и DEF. Требуется построить новый треугольник XYZ, вписанный в треугольник ABC и описанный около треугольника DEF.

198. Даны коническое сечение и три точки. Требуется вписать в коническое сечение треугольник так, чтобы стороны его проходили через данные точки.

199. Даны коническое сечение и три прямые. Требуется построить такой треугольник, который был бы описан около конического сечения и вершины которого лежали бы на данных прямых.

Замечание. Хотя с помощью начерченного конического сечения можно решить каждую визуальную задачу второй степени путем проведения одних лишь прямых линий, но нельзя решить ни одной метрической задачи.

Так, например, этими средствами нельзя разделить пополам отрезок, провести параллельную прямую, опустить перпендикуляр.

§ 31. Метрические задачи первой и второй степени.

1. Таковы геометрические задачи на построение, которые при решении их путем вычисления приводят к уравнениям соответственно первой или второй степени и в которых, между прочим, идет речь и об измерении.

Линейными метрическими задачами являются, например, следующие: разделить пополам отрезок; провести прямую, параллельную к данной; опустить перпендикуляр, и т. д.

Эти задачи имеют только одно решение, так как они зависят от линейного уравнения. Однако они не разрешимы путем проведения одних прямых линий, коль скоро не дан абсолют плоскости.

К метрическим задачам второй степени относятся, например, следующие: деление пополам угла; перенесение отрезка; определение точек пересечения прямой с окружностью, заданной ее центром и радиусом, и т. д.

Все эти задачи имеют два решения (которые могут также совпасть или быть мнимыми), так как они зависят от квадратных уравнений; они не могут быть решены путем проведения одних прямых даже при пользовании начерченным коническим сечением, коль скоро не дан абсолют плоскости.

2. Но, согласно § 28, каждое метрическое свойство можно рассматривать как визуальное, если поставить в связь с фигурой абсолют плоскости.

Две параллельные прямые определяют бесконечно удаленную точку, две пары параллельных прямых (параллелограмм) определяют бесконечно удаленную прямую.

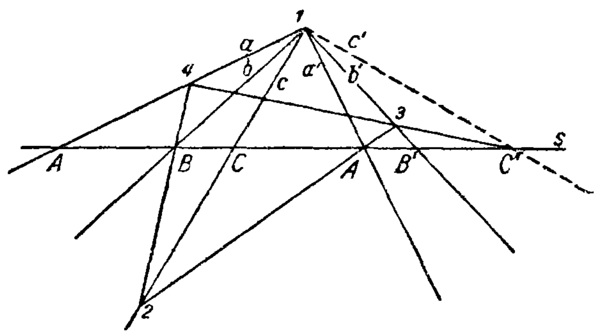
Если дан начерченный квадрат, то им определяется бесконечно удаленная прямая и сверх того еще и мнимые циклические точки. Именно, они гармонически разделяются каждыми двумя смежными сторонами квадрата, а также его диагоналями; следовательно, они вполне определены.

Итак, начерченный квадрат определяет бесконечно удаленную прямую и мнимые циклические точки, т. е. абсолют плоскости.

Поэтому, если дан квадрат, то каждую линейную метрическую задачу можно рассматривать как визуальную линейную задачу и решить ее с помощью проведения одних прямых линий (§ 12).

Если начерчена окружность и дан ее центр, то тем самым дан абсолют плоскости. Именно, бесконечно удаленная прямая есть поляра центра в отношении окружности, а мнимые циклические точки являются точками пересечения окружности с определенной таким образом бесконечно удаленной прямой.

Начерченной окружности без центра достаточно, согласно § 30, для решения каждой визуальной задачи второй степени путем проведения одних прямых линий. Если же, кроме самой окружности, дан и центр ее, то каждая метрическая задача второй степени может быть рассматриваема как визуальная и поэтому может быть решена с помощью проведения одних лишь прямых линий. Результат этот нами был получен уже раньше в главе II.



Черт. 136.

Если начерчены коническое сечение и квадрат, то можно каждую визуальную и метрическую задачу второй степени решить путем проведения одних лишь прямых; того же можно достигнуть и с помощью начерченного конического сечения, если даны его центр и один из фокусов (§ 13).

Задачи для упражнения.

200. Даны две параллельные прямые a, a' и точка P. Построить проходящую через P прямую, параллельную a и a', проводя одни лишь прямые линии (ср. черт. 130, 131). (Бесконечно удаленная точка рассматривается как точка, лежащая вне эпюра.)

201. Даны две пары параллельных прямых aa', bb', т. е. параллелограмм; сверх того, даны прямая c и точка P; построить прямую c', проходящую через P и параллельную c, проводя одни лишь прямые линии (ср. черт. 133). (Бесконечно удаленная прямая рассматривается, как лежащая вне эпюра).

202. По известной теореме проективной Геометрии, три пары противоположных сторон полного четырехугольника $1\ 2\ 3\ 4$ пересекают каждую прямую s в трех парах точек A и A', B и B', C и C' некоторой инволюции (черт. 136). С другой стороны, известно следующее.

Если каждые два взаимно перпендикулярные луча a и a', b и b', c и c', ... некоторого пучка отнести один к другому, то лучи пучка образуют инволюцию.

Но инволюция определяется двумя парами ее элементов. Поэтому, если луч a перпендикулярен к a', луч b перпендикулярен к b', то луч c', перпендикулярный к c, может быть, согласно черт. 136, построен линейно.

(Берут произвольную прямую s и точку 2 на c; строят затем точки 3, 4) (ср. § 27).

203. Даны квадрат, прямая g и, сверх того, точка P. Провести через P перпендикуляр к g, пользуясь лишь прямыми линиями. (Решается с помощью предыдущей задачи) (ср. § 12).

204. Даны квадрат, три точки A, B, C и прямая g, проходящая через A. Путем проведения одних прямых линий определить вторую точку пересечения прямой g с окружностью, проходящей через A, B, C.

§ 32. Графическое решение уравнений второй степени.

Если обратиться к вычислению, то каждая геометрическая задача второй степени требует решения уравнений второй степени, коэфициенты которых получаются из известных величин с помощью рациональных операций и извлечений квадратных корней.

Если при решении некоторой геометрической задачи путем вычисления приходят к квадратному уравнению

$$x^2+mx+n=0, \qquad (1)$$

то либо коэфициент m должен быть известным отрезком и n — квадратом некоторого отрезка, либо же m и n будут числами, когда какой-либо отрезок принят за единицу; само x может быть найдено в виде отрезка путем построения выражения

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}. \qquad (2)$$

Если в качестве средств построения для решения уравнения (1) дан только циркуль или линейка о двух параллельных краях (две параллельные прямые на постоянном расстоянии), то строят найденное значение для x с помощью этих средств решения по ранее данным правилам.

Мы не станем ближе исследовать оба эти случая, но вместо этого мы подробнее рассмотрим решение квадратного уравнения с помощью штейнеровой окружности и с помощью прямого угла.

1. Решение квадратного уравнения путем проведения одних лишь прямых линий при пользовании начерченною окружностью.

Пусть будет дано для решения уравнение

$$x^2-px+q=0, \qquad (3)$$

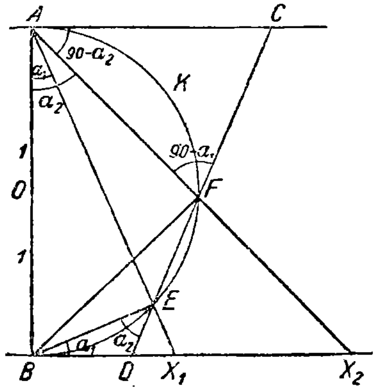
где p и q суть рациональные числа. В данной вспомогательной окружности K радиуса 1 (черт. 137) проведем диаметр AB, построим на его концах касательные к K и определим на них точки C и D так, чтобы $\overline{AC}=\frac{4}{p}$ и $\overline{BD}=\frac{q}{p}$ по абсолютной величине и по знаку, причем положительное направление для обеих касательных мы выбираем одно и то же.

Прямая CD (черт. 137) пересекает окружность в двух точках E и F, которые, будучи проектируемы из A, дают точки X_1, X_2. Мы докажем, что $\overline{BX_1}=x_1$, $\overline{BX_2}=x_2$ суть искомые корни уравнения (3).

Доказательство. Приняв x_1, x_2, следовательно, и точки X_1, X_2, за данные, определим отсюда отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ нашей фигуры

Из нее следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{x_1}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{x_2}{2}.$$



Черт. 137.

В треугольнике AFC

$$\sphericalangle A=90-\alpha_2 \quad \text{и} \quad \sphericalangle F=90-\alpha_1,$$

поэтому

$$\overline{AC}=\frac{\overline{AF}\cos\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Из треугольника AFB получается

$$\overline{AF}=2\cos\alpha_2.$$

Поэтому

$$\overline{AC}=\frac{2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{4}{x_1+x_2}.$$

Аналогично из треугольника DBE, в котором

$$\sphericalangle B=\alpha_1 \quad \text{и} \quad \sphericalangle E=\alpha_2,$$

следует, что

$$\overline{BD}=\frac{\overline{BE}\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{x_1x_2}{x_1+x_2}.$$

Но x_1 и x_2 суть корни уравнения:

$$x^2-px+q=0;$$

поэтому

$$x_1+x_2=p \quad \text{и} \quad x_1\cdot x_2=q,$$

так что

$$\overline{AC}=\frac{4}{p} \quad \text{и} \quad \overline{BD}=\frac{q}{p},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. С помощью штейнеровой окружности, как известно, можно (глава II) умножать отрезки и делить их, проводя одни лишь прямые.

Поэтому, если p и q суть рациональные числа, то отрезки $\frac{4}{p}$ и $\frac{q}{p}$ могут быть построены с помощью одних прямых линий.

Корни уравнения определяются отрезками BX_1 и BX_2. Если желают найти их числовые значения, то необходимо определить отношения этих отрезков к радиусу окружности.

При этом прежде всего узнают, сколько раз радиус круга укладывается в BX_1, затем делят радиус на десять равных частей и определяют, сколько раз может быть отложена $\frac{1}{10}$ радиуса; в случае надобности, определяют еще, сколько раз укладывается $\frac{1}{100}$ радиуса.

2. Определение корней уравнения второй степени с помощью прямого угла.

Пусть для решения будет дано уравнение

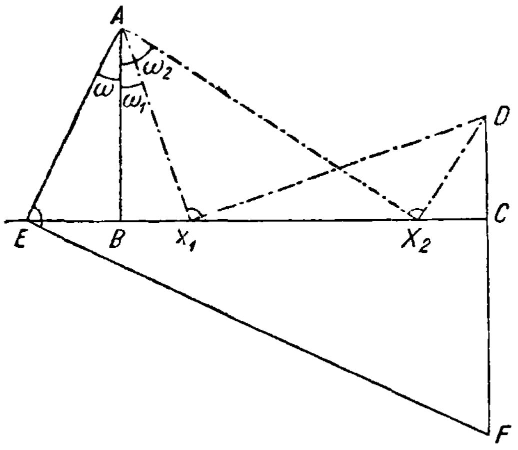
$$a_1x^2+a_2x+a_3=0, \tag{4}$$

где a_1, a_2, a_3 суть целые числа (в частности, a_1 есть положительное целое число).

a) Мы прежде всего будем различать два случая.

α) Коэфициент a_3 будет положительным, имея, таким образом, тот же знак, что и a_1.

В этом случае чертят прямоугольную ломаную линию $ABCD$ (черт. 138), стороны которой по порядку пропорциональны коэфициентам a_1, a_2, a_3, причем CD имеет направление, противоположное направлению AB.



Черт. 138.

Если теперь провести прямую AE, наклоненную к AB под произвольным углом ω, и EF перпендикулярно к AE и положить $\operatorname{tg}\omega=x$, то

$$\overline{BE}=a_1x,$$
$$\overline{CE}=a_1x+a_2,$$
$$\overline{CF}=(a_1x+a_2)x,$$
$$\overline{FD}=a_1x^2+a_2x+a_3.$$

Если F совпадает с D, то

$$\overline{FD}=0,$$

так что $\operatorname{tg}\omega$ будет корнем уравнения.

На чертеже $\operatorname{tg}\omega_1$ и $\operatorname{tg}\omega_2$ (с отрицательным знаком) суть корни уравнения, так как прямоугольные ломаные линии AX_1D и AX_2D заканчиваются в D.

Такого рода разрешающую ломаную линию легко построить с помощью прямого угла. Его помещают в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили через A и D, а вершина лежала на прямой BC (в случае надобности — на ее продолжении). Тогда корнями уравнения будут:

$$x_1=-\frac{\overline{BX_1}}{\overline{AB}},\quad x_2=-\frac{\overline{BX_2}}{\overline{AB}}.$$

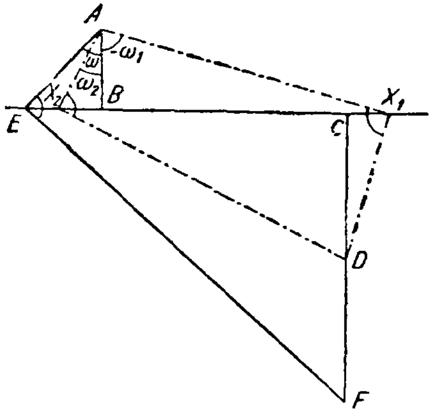
β) Свободный член a_3 данного для решения уравнения будет отрицательным, т. е. его знак обратен знаку a_1.

В этом случае чертят прямоугольную ломаную линию, со сторонами a_1, a_2, a_3, причем отрезки a_1 и a_3 одинаково направлены (черт. 139).

Если построить на AB произвольный угол ω и провести FE перпендикулярно к AE, то, положив снова $\operatorname{tg}\omega = x$, получим:

$$\overline{BE} = a_1 x, \quad \overline{CE} = a_1 x + a_2,$$
$$\overline{FD} = a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

(число a_3 будет отрицательным).



Черт. 139.

Определение корней уравнения требует построения разрешающей ломаной линии. Этого можно достигнуть, поместив прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили через A и D, а вершина его лежала на неограниченной прямой BC.

b) Оба случая α) и β) могут быть объединены следующим правилом. Чертят ломаную линию, стороны которой равны коэфициентам предложенного уравнения (принимая некоторый удобно выбранный отрезок за единицу); две первые стороны взаимно перпендикулярны, в остальном их взаимное расположение можно выбирать произвольно; третья же сторона ломаной линии должна иметь направление, совпадающее с направлением параллельной ей первой стороны, или противоположное ему — в зависимости от того, имеют ли коэфициенты a_1 и a_3 предложенного уравнения неодинаковые или одинаковые знаки.

Если разрешающие ломаные линии найдены, то определение знаков найденных значений требует еще внимания.

Для угла ω за положительное должно принимать то направление, исходя от AB, при котором угол $\omega = 270^\circ$ отвечает положительному направлению прямой BC, причем это положительное направление указывается отрезком BC или CB, смотря по тому, будет ли коэфициент a_2 положительным или отрицательным.

Замечание. Если пользуются прямым углом как единственным инструментом черчения, то, как известно, можно проводить параллельные прямые, опускать перпендикуляры, умножать и делить отрезки (§ 24).

Можно, следовательно, построить с помощью этого инструмента и ломаную линию $ABCD$, которая „представляет" трином $a_1 x^2 + a_2 x + a_3$, коль скоро a_1, a_2, a_3 суть рациональные числа.

Разрешающие ломаные разыскиваются опять-таки при исключительном пользовании прямым углом. Численное определение корней может также быть произведено при помощи одного лишь прямого угла.

Глава VI.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕВОЗМОЖНОСТИ.

§ 33. Введение.

1. В предыдущих главах мы неоднократно говорили о невозможности выполнить построение данными средствами решения.

Мы упоминали, например, что для решения квадратных задач на построение с помощью постоянной окружности и односторонней линейки, кроме самой окружности, необходимо иметь еще и центр ее и что, в частности, невозможно путем проведения одних лишь прямых линий разделить отрезок пополам или провести параллельную прямую, если центр штейнеровой окружности не дан.

Мы упоминали, что невозможно также построить неизвестный центр начерченной окружности путем проведения одних лишь прямых линий.

Далее, нами было упомянуто, что не все геометрические задачи на построение второй степени могут быть решены с помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков, что, например, таким путем не может быть построено выражение $\sqrt{a^2-b^2}$, где a и b — данные отрезки.

2. Строгое доказательство всех этих утверждений является настоятельным требованием нашей любознательности, ибо наше стремление к познанию может быть удовлетворено лишь тогда, когда мы либо получаем полное решение задачи или строгое доказательство теоремы, либо же нами ясно понято основание невозможности достижения успеха и вместе с тем стала понятной необходимость неудачи. *

Поэтому мы исчерпаем в настоящей главе вопросы, которые нами были упомянуты выше, и затем докажем еще, что каждая задача, которая при решении ее путем вычисления приводит к неприводимым уравнениям третьей степени (как, например, трисекция произвольного угла и удвоение куба), не может быть строго решена путем проведения прямых линий и описывания окружностей.

§ 34. О невозможности определить абсолют плоскости с помощью визуальных чертежных операций.

1. Под визуальной чертежной операцией разумеют проведение прямых линий, пересечение прямых между собой и с другими данными фигурами, которые могут быть также кривыми линиями, например, коническими сечениями и т. д.; исключаются всякие виды измерения.

* Гильберт „Grundlagen der Geometrie“, стр. 82.

При этом мы предполагаем также, что данные начерченные фигуры не определяют абсолюта плоскости, как это, например, имеет место в том случае, когда даны окружность и ее центр.

2. С помощью проведения прямых линий, пересечения и проектирования бесконечно удаленная прямая и абсолютная инволюция на ней (с циклическими точками в качестве двойных точек) не могут быть определены.

В самом деле, если бы мы могли определить абсолют плоскости или, по крайней мере, бесконечно удаленную прямую путем проведения одних лишь прямых линий, то можно было бы все выполненное таким образом построение спроектировать на вторую плоскость так, чтобы бесконечно удаленная прямая перешла в совершенно произвольную прямую g, а абсолютная инволюция J_1, J_2 — в данную (мнимую) инволюцию на g.

При посредстве тех же операций, с помощью которых находят бесконечно удаленную прямую на первом чертеже, можно было бы построить совершенно произвольную прямую g. Таким образом, оказалось бы возможным с помощью данной операции найти не только некоторую определенную, но и произвольную прямую плоскости, что невозможно. [107]

3. Бесконечно удаленная прямая в чистой Геометрии положения, которая трактует только о зависимостях, связывающих положение, но не о результатах измерения, не занимает вовсе исключительного места; она является такой же прямой, как и всякая другая, ибо путем проектирования она может быть переведена во всякую другую прямую.

Бесконечно удаленная прямая не может быть определена с помощью проектирования и пересечения без всякого пользования измерением, она не может входить ни в какие визуальные соотношения с фигурами, не содержащими никакого измерения.

4. Поэтому представляется также невозможным разделить пополам отрезок с помощью проведения одних прямых линий, ибо в противном случае можно было бы определить бесконечно удаленную прямую с помощью визуальных операций, что, согласно вышесказанному, невозможно.

Равным образом, невозможно найти путем проведения одних прямых линий центр начерченной окружности, ибо тогда абсолют оказался бы найденным с помощью визуальных операций, чего быть не может.

5. Если дано начерченное коническое сечение, то хотя с помощью проведения прямых линий могут быть решены все визуальные задачи второй степени (стр. 125), но не может быть решена ни одна метрическая задача, например, не может быть разделен пополам отрезок, ибо в противном случае путем визуальных операций был бы определен абсолют плоскости. Но абсолют плоскости не может входить ни в какие визуальные соотношения с коническим сечением, которое задано только своим контуром.

Но если, кроме окружности, известен ее центр или квадрат, или же, кроме конического сечения, даны его центр и один из фокусов, то тем самым дается абсолют плоскости, так что всякая задача первой и второй степени разрешима с помощью проведения одних лишь прямых линий (стр. 127).

§ 35. Доказательство невозможности решить каждую задачу второй степени с помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков. *

1. Перенесение отрезков в этом параграфе выполняется с помощью эталона длины (отрезка данной длины, которую мы можем принять за единицу) (§ 26).

Будет доказано, что не каждая квадратная задача может быть решена с помощью этих ограниченных средств решения.

Но прежде всего мы ответим на вопрос о том, какие задачи могут быть решены предложенными средствами.

2. Аналитическое представление координат точек, которые могут быть построены с помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков.

a) В основание мы кладем прямоугольную систему координат и относим к ней все данные точки при помощи их координат.

Если P_1, P_2 и P_3, P_4 суть две произвольные данные пары точек, то прямые, соединяющие эти пары точек, имеют соответственно уравнения:

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

$$y-y_3=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}(x-x_3).$$

Определив координаты точки пересечения этих двух прямых, легко заметить, что эти координаты получаются с помощью одних лишь рациональных операций из координат точек P_1, P_2, P_3, P_4.

Если соединить эту точку пересечения с другой данной точкой и рассмотреть точку пересечения этой соединительной прямой с какой-нибудь другой прямой, определяемой данными точками и т. д., то окажется, что координаты всех точек, которые могут быть построены по данным точкам с помощью проведения прямых линий, будут числами, которые из координат данных точек могут быть получены с помощью рациональных операций.

Точно так же рационально выражаются через координаты данных точек и угловые коэфициенты этих прямых, например, $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Поэтому, если через одну из данных или построенных уже точек провести прямую, параллельную некоторой уже построенной прямой, и взять точку пересечения проведенной прямой с другой построенной прямой, то координатами этой точки всегда будут числа, которые могут быть получены как результаты применения одних только рациональных операций к координатам данных точек.

b) Перенесение отрезка может быть заменено его параллельным перенесением и следующим за этим вращением вокруг одного из концов.

---

* Гильберт „Grundlagen der Geometrie", 2-е изд., стр. 76, 77.

Параллельное перенесение требует определения точки пересечения прямых, параллельных данным прямым, т. е. только рациональных операций над данными координатами.

c) Мы теперь ближе рассмотрим вращение отрезка. Пусть при некоторой прямоугольной системе координат XOY (черт. 140) будет дан угол ω с помощью точки C, имеющей координаты a, b, и сверх того точка P с координатами x, y.

Требуется повернуть эту точку P вокруг O на угол ω и определить координаты x', y' полученной таким путем точки P'.

Имеем:

$$x' = r\cos(\alpha + \omega) = r\cos\alpha\cos\omega - r\sin\alpha\sin\omega.$$

А так как

$$\cos\omega = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\omega = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

и

$$r\cos\alpha = x, \quad r\sin\alpha = y,$$

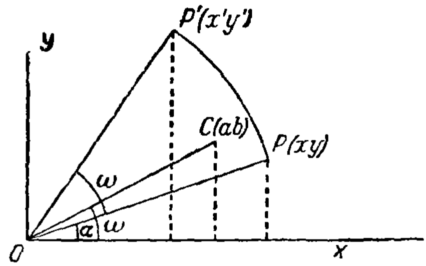
то

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$

Аналогично находим

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y;$$

при этом корень берется с положительным знаком.



Черт. 140.

Отсюда мы заключаем, что координаты x', y' искомой точки P' могут быть получены из координат данных точек C, P помощью рациональных операций и извлечения квадратного корня из суммы двух квадратов.

d) Таким образом, если M и N суть две точки, которые построены помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков, то координаты точек M, N всегда могут быть получены из координат данных точек путем производства рациональных операций и извлечений квадратного корня из суммы двух квадратов. Это же справедливо и относительно длины отрезка MN.

Итак, мы можем утверждать теорему: Если некоторая геометрическая фигура получена с помощью односторонней линейки и эталона длины, то координаты найденных точек должны быть такими функциями координат данных точек, определение которых требует применения только четырех рациональных операций и разве еще извлечения квадратного корня из суммы двух квадратов; эти операции должны притом применяться конечное число раз.

3. Докажем теперь, что не всякая геометрическая задача на построение может быть решена с помощью наших ограниченных средств решения.

С этой целью мы построим некоторую определенную область Ω алгебраических чисел.

Мы исходим из числа 1 и применяем к нему и ко всем получающимся числам четыре рациональные операции и пятую операцию $|\sqrt{1+\omega^2}|$, причем ω всякий раз означает некоторое число, полученное с помощью этих пяти операций. Самый корень мы всегда берем лишь с положительным знаком.

Эта числовая область, очевидно, содержит координаты и расстояния всех точек, которые могут быть получены из двух точек (0, 0), (1, 0), отнесенных к некоторой прямоугольной системе координат с помощью проведения прямых линий и перенесения отрезков.

В частности, в ней содержится отрезок $\sqrt{2}$, но нет в ней отрезка

$$s=\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}.$$

Действительно, наша область содержит только вещественные числа, так как мы начинаем с вещественного числа, а мнимое число не может быть получено из вещественных с помощью наших операций.

Далее, если ω есть какое-нибудь число нашей области, то этой же числовой области принадлежит и сопряженное с ω алгебраическое число,[108] что прямо вытекает из определения числовой области Ω.

Наша числовая область Ω содержит поэтому только такие числа, которые сами будут вещественными и которые будут сопряжены только с вещественными числами.

Сопряженным с s числом будет число

$$s'=\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}.$$

Оно мнимое. Следовательно, числа s' и s не принадлежат числовой области Ω.

Мы предложим теперь следующую задачу.

В некотором прямоугольном треугольнике гипотенуза $c=1$, один из катетов $a=|\sqrt{2}|-1$. Требуется построить второй катет с помощью наших ограниченных средств решения.

Оба числа a и c содержатся в области Ω. Искомый катет есть $\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$; это число в нашей области Ω не содержится.

Следовательно, задача не может быть решена нашими средствами решения, в то время как она легко решается при неограниченном пользовании циркулем и линейкой.

§ 36. Доказательство невозможности строгого решения с помощью проведения прямых линий и описывания окружностей геометрической задачи, которая зависит от неприводимого уравнения третьей степени.

В этом параграфе будет доказано, что с помощью циркуля и линейки невозможно строго разрешить геометрическую задачу, которая, будучи решаема путем вычисления, оказывается зависящей от неприводимого[109] уравнения третьей степени.

Для того чтобы иметь возможность доказать это, мы предварительно упомянем о некоторых важных понятиях Алгебры.

1. Область рациональности.

Над данным числом a и всеми теми числами, которые будут получаться, производятся рациональные операции и только они, т. е. числа складываются, вычитаются, умножаются и делятся (исключается деление на нуль).

Таким путем получается бесконечное множество чисел. Совокупность всех чисел, получающихся указанным образом из данного числа a, называется областью рациональности.

Под этим, таким образом, разумеют такую числовую область (числовой корпус), что если над числами ее производить рациональные операции, то в результате получаются лишь числа, содержащиеся в этой области.

В частности, если a есть рациональное число, то с помошью вышеупомянутых операций получаются все рациональные числа, т. е. корпус рациональных чисел.

2. Обозначим через R_1 совокупность всех рациональных чисел и через a некоторое определенное рациональное число.

Если все числа R_1 сочетать с $\sqrt{a}$ с помощью рациональных операций и все этим путем полученные числа снова подвергнуть рациональным операциям, то получится новая область рациональности R_2, которая содержит R_1 как часть.

В область R_2 входит число $z_1 = m_1 + n_1\sqrt{a}$, где m_1, n_1 суть рациональные числа. Действительно, число z_1 получается из чисел m_1, n_1 и $\sqrt{a}$ путем рациональных операций.

Все числа, принадлежащие области R_2, могут быть представлены в форме $M+N\sqrt{a}$, где M и N принадлежат уже области R_1, т. е. являются рациональными числами.

Действительно, все числа области R_2 получатся, если сочетать с помощью рациональных операций сначала число $\sqrt{a}$ с числами области R_1, а затем полученные числа между собою.

Пусть теперь z_1 и z_2 будут числа, полученные первым способом; они должны иметь вид:

$$z_1 = m_1 + n_1\sqrt{a}, \quad z_2 = m_2 + n_2\sqrt{a}.$$

Складывая числа z_1 и z_2 или вычитая одно из другого, получим результат вида $M+N\sqrt{a}$. Если составить произведение $z_1 \cdot z_2$, то оно снова будет иметь тот же вид. Наконец, если образовать частное $\frac{z_1}{z_2}$, причем сделать знаменатель рациональным и преобразованный числитель разделить на него, то снова получится результат вида $M+N\sqrt{a}$, где M и N суть числа области R_1.

Таким образом можно утверждать: если к области рациональных чисел присоединить новое число $\sqrt{a}$ (приобщить $\sqrt{a}$), где a есть рациональное число, то получится новая область рациональности, и каждое число этой расширенной области рациональности может быть представлено в форме $M+N\sqrt{a}$, где M и N суть рациональные числа, т. е. принадлежат исходной области рациональности, и, в частности, могут быть нулями.

3. R_1 снова означает область рациональных чисел.

Если приобщить к ней, например, $\sqrt{3}$, то получится новая область R_2, все числа которой могут быть написаны в форме $m+n\sqrt{3}$, где m и n суть рациональные числа.

Но область R_2 не содержит, однако, числа $\sqrt{5}$; ибо в противном случае было бы:

$$m+n\sqrt{3}=\sqrt{5},$$

где m и n рациональные числа, что невозможно.

Если к области R_2 приобщить $\sqrt{5}$, то получится новая область R_3. Все числа этой новой области могут быть (пункт 2) представлены в виде $k+l\sqrt{5}$, где k и l суть числа, которые принадлежат области R_2, следовательно, могут содержать также и $\sqrt{3}$.

4. Мы снова отправляемся от области R_1 рациональных чисел, приобщаем число $\sqrt{a_1}$, где a_1 — рациональное число, и получаем таким путем область R_2; к ней мы приобщаем число $\sqrt{a_2}$, причем a_2 (но не $\sqrt{a_2}$) принадлежит к области R_2, в результате получаем область рациональности R_3. К этой области мы приобщаем $\sqrt{a_3}$, где a_3 принадлежит области R_3, и т. д.

Наконец, приобщением $\sqrt{a_{n-1}}$ мы получим область R_n и дальнейшим приобщением $\sqrt{a_n}$ — область R_{n+1}.

Каждое число последней области имеет при этом форму $p+q\sqrt{a_n}$, где p, q, a_n принадлежат уже предпоследней области.

5. Пусть будет дано число z, которое из других данных чисел может быть получено с помощью рациональных операций и извлечений квадратного корня, но имеет совершенно произвольную форму.

Пусть, например, $z=\dfrac{\sqrt{a+\sqrt{b}-\sqrt{c}}}{\sqrt{m-\sqrt{n}}}$, где a, b, c, m, n суть рациональные числа.

С помощью последовательного приобщения квадратных корней можно получить из области рациональных чисел область, в которой содержится z.

Если мы приобщим к области R_1 рациональных чисел число $\sqrt{b}$, то новая область R_2 будет содержать число $a+\sqrt{b}$. Если мы теперь приобщим к области R_2 число $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ и к полученной таким образом области R_3 число $\sqrt{c}$, то получим область R_4, в которой содержится числитель дроби z. Если мы затем приобщим к области R_4 число $\sqrt{n}$, то в новой области R_5 будет содержаться и $m-\sqrt{n}$.

Наконец, приобщив к R_5 число $\sqrt{m-\sqrt{n}}$, мы получим область R_6, в которой содержатся числитель и знаменатель числа z, а следовательно, и само число z.

Таким образом, отправляясь от рациональных чисел, мы построили область рациональности, в которой содержится число z.

6. Теперь мы в состоянии доказать, что уравнение третьей степени, не имеющее рациональных корней, неразрешимо в квадратных радикалах.

А) Пусть будет дано уравнение:

$$x^3+ax=b, \tag{1}$$

где a и b суть рациональные числа. Это уравнение, как известно, имеет три корня: x_1, x_2, x_3; коэфициент при x^2 есть нуль, следовательно, должно иметь место равенство:

$$x_1+x_2+x_3=0. \tag{2}$$

Мы допустим теперь, что ни один из этих корней не будет рациональным, и докажем, что тогда ни один из них не может быть представлен цепью квадратных радикалов.

Доказательство. Мы дадим непрямое доказательство. Допустим, что один из трех корней, например x_1, выражается с помощью квадратных радикалов.

Тогда, согласно п. 5, путем приобщения квадратных радикалов может быть построена область рациональности, в которой содержится x_1. Если $\sqrt{l}$ есть последний из приобщаемых при этом радикалов, то

$$x_1=m+n\sqrt{l}, \tag{3}$$

где m, n и l, согласно п. 5, должны принадлежать предшествующей области рациональности.

Если подставить это значение x в равенство (1), то получится:

$$M+N\sqrt{l}=0, \tag{4}$$

где

$$M=m^3+3mn^2l+am-b, \quad N=3m^2n+n^3l+an.$$

M, N, l принадлежат, таким образом, предшествующей области рациональности; $\sqrt{l}$ ей не принадлежит; поэтому $\sqrt{l}$ не может равняться $-\frac{M}{N}$.

Следовательно, равенство (4) может иметь место только в том случае, если $M=0$ и $N=0$. Тогда уравнение (1) удовлетворяется и значением

$$x_2=m-n\sqrt{l}, \tag{5}$$

в чем можно убедиться вычислением.

Из равенства (2) вытекает далее, что

$$x_3=-(x_1+x_2)=-2m. \tag{6}$$

Этот результат можно выразить так: если один из корней уравнения (1) может быть выражен с помощью квадратных радикалов, то путем приобщения квадратных радикалов может быть образована область, которой принадлежит x_1; той же области должен принадлежать и второй корень уравнения; третий же корень x_3 принадлежит тогда предшествующей области.

Но так как x_3 принадлежит предпоследней области, то с помощью аналогичных умозаключений выведем, что x_1 или x_2 принадлежит предпоследней области, а оставшийся корень относится к области, ей предшествующей, и т. д. Наконец, таким путем придем к области рациональных чисел.

Таким образом мы видим, что допущение, будто один из корней уравнения может быть представлен с помощью квадратных корней, должно быть отвергнуто, коль скоро уравнение не имеет рациональных корней, что именно и было предположено.

Этим показано, что кубическое уравнение (1) неразрешимо в квадратных радикалах, в случае если оно не имеет рациональных корней.

В) Кубическое уравнение общего вида

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0 \tag{1}$$

с помощью подстановки

$$z = x - \frac{A}{3} \tag{2}$$

может быть представлено в форме:

$$x^3 + ax = b. \tag{3}$$

Таким образом общее уравнение третьей степени может быть представлено в приведенной форме (3) без употребления квадратных корней.

Поэтому общее уравнение и полученное из него приведенное уравнение либо оба одновременно имеют рациональные корни, либо оба их не имеют.

Следовательно, полученное выше предложение может быть формулировано в общем виде: кубическое уравнение с рациональными коэфициентами, не имеющее рациональных корней, не может быть разрешено в квадратных радикалах.

С) Необходимо еще показать, как узнать, имеет ли уравнение третьей степени с рациональными коэфициентами рациональные корни.

Это выполняется с помощью легко доказуемого предложения Алгебры, которое гласит: если уравнение имеет исключительно целые коэфициенты и коэфициент при наивысшей степени неизвестного равен $+1$, то каждый рациональный корень уравнения должен быть целым числом, на которое свободный член делится без остатка.

Доказательство. Пусть будет дано уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{1}$$

где a_1, $a_2 \ldots a_n$ суть целые числа.

Допустим теперь, что рациональное число $\frac{p}{q}$ будет корнем этого уравнения; при этом можно предполагать, что p и q суть взаимно простые целые числа. Тогда должно иметь место равенство:

$$p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0. \qquad (2)$$

Отсюда, путем деления на q, получаем:

$$\frac{p^n}{q} + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p q^{n-2} + a^n q^{n-1} = 0. \qquad (3)$$

Все члены, начиная со второго, оказываются целыми числами, следовательно, и первый член также должен быть целым числом. Так как p и q суть числа взаимно простые, то это возможно лишь в том случае, когда $q = 1$.

Каждый рациональный корень уравнения (1) будет целым числом.

Принимая во внимание, что q равно 1, мы из равенства (2) путем деления на p выведем:

$$p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{p} = 0. \qquad (4)$$

Из этого равенства вытекает, что и последний член должен быть целым числом; p, следовательно, будет делителем числа a_n.

Отсюда следует: Если предложено уравнение, у которого коэфициент при наивысшей степени неизвестного равен 1 и в котором все остальные коэфициенты суть целые числа, то без труда можно распознать, имеет ли это уравнение рациональные корни или нет. С этой целью отыскивают лишь все делители абсолютной величины свободного члена и узнают, удовлетворяют ли они предложенному уравнению, если дать им положительный или отрицательный знак. Если этого не будет, то уравнение совсем не имеет рациональных корней.

D) Пусть, например, будет дано уравнение $x^3 - 2 = 0$, к которому приходят в задаче об удвоении куба.

Число 2 имеет делителями 1 и 2. Оба эти числа, снабженные положительным или отрицательным знаком, не удовлетворяют уравнению.

Следовательно, это уравнение не имеет рациональных корней и потому неразрешимо в квадратных радикалах.

Пусть далее будут даны уравнения:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$$

и

$$y^3 - 3y + 1 = 0.$$

Оба уравнения, согласно С), могут иметь только рациональные корни $+1$ или -1; но так как этого нет, то они вообще не имеют рациональных корней и потому неразрешимы в квадратных радикалах.

7. Каждая задача, приводящая к уравнениям, неразрешимым в квадратных радикалах, не может быть решена с помощью проведения прямых линий и описывания окружностей, и потому неразрешима при помощи циркуля и линейки.

a) В самом деле, каждая фигура, построенная с помощью этих средств решения, состоит из прямых линий и окружностей.

В основание всей фигуры положим систему прямоугольных координат. Определение путем вычисления точек пересечения прямых приводит при этом к линейным уравнениям. Определение точек пересечения прямой с окружностью или точек пересечения двух окружностей приводит к квадратным уравнениям.

При вычислении различных элементов фигуры приходят поэтому только к уравнениям первой и второй степени. Координаты всех точек должны, следовательно, выражаться в координатах данных точек с помощью рациональных операций и извлечений квадратного корня.

b) *Если, наоборот, дано выражение, которое содержит только рациональные операции и квадратные корни, то оно может быть построено циркулем и линейкой с помощью* повторного сложения и вычитания отрезков, построения четвертого геометрически пропорционального, построения среднего геометрически пропорционального и пифагоровой теоремы.

c) Поэтому, если задача при решении ее вычислением приводит к уравнению третьей степени, которое неразрешимо в квадратных радикалах, то задача эта не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

§ 37. О возможности или невозможности решения геометрической задачи с помощью циркуля и линейки.

1. Нередко случается, что задача, повидимому простая, не поддается попыткам решить ее с помощью циркуля и линейки.

В основании этого иной раз лежит трудность найти верный путь, но может также случиться, что задача эта циркулем и линейкой *вообще неразрешима*.

Поэтому чрезвычайно важно иметь *простые* средства для распознавания того, принадлежит ли предложенная геометрическая задача к числу разрешимых или неразрешимых (ср. § 29).

В заключении предыдущего параграфа мы познакомились с одним из средств: решают задачу вычислением; если при этом приходят к уравнениям степени не выше второй, то задача разрешима; если же, наоборот, приходят к неприводимым уравнениям третьей степени,[110] то задача не разрешима циркулем и линейкой.

Далее, как показано будет ниже (§ 47, 1), решение каждого уравнения четвертой степени зависит от решения уравнения третьей степени, называемого его резольвентным уравнением; первое разрешимо или не разрешимо в квадратных радикалах, в зависимости от того, разрешимо ли в квадратных радикалах резольвентное уравнение или нет.

Для уравнений высших степеней часто бывает полезна следующая теорема из Алгебры.

Неприводимому уравнению нечетной степени не удовлетворяет выражение, составленное из квадратных радикалов.

2. Более простое средство, с помощью которого без затруднительных вычислений можно определить, разрешима ли или не разрешима предложенная задача циркулем и линейкой, основывается на следующих предложениях.

Если известны пять элементов, определяющих коническое сечение, например, пять точек, то можно построить циркулем и линейкой точки его пересечения с произвольной прямой (§ 30).

Соответственно этому и построение касательной из данной точки к коническому сечению, определяемому пятью его элементами, также есть квадратная задача.

В Алгебре строго доказываются следующие предложения, обратные этим.

a) Если построение точек пересечения некоторой кривой с произвольной прямой выполняется циркулем и линейкой, то кривая есть коническое сечение.

b) Единственными кривыми, касательные к которым из каждой произвольной точки могут быть построены циркулем и линейкой, являются конические сечения.

c) Окружность и прямая линия суть единственные кривые, точки пересечения которых с произвольной окружностью могут быть построены с помощью циркуля и линейки.

Существуют также и высшие кривые, точки пересечения которых с определенными прямыми или окружностями могут быть найдены с помощью циркуля и линейки. Так, например, в случае паскалевой улитки (§ 46) вторые точки пересечения прямых, проходящих через двойную точку кривой, легко могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Но прямая должна проходить через двойную точку, она, следовательно, не произвольная прямая.

Точки пересечения паскалевой улитки с произвольными прямыми, наоборот, не могут быть точно построены циркулем и линейкой.

3. Приведенными предложениями мы воспользуемся для того, чтобы определить, разрешима ли или не разрешима с помощью циркуля и линейки следующая задача.

205. Даны две прямые линии g_1, g_2, произвольная точка P и произвольный отрезок s. Требуется через P провести прямую так, чтобы на ней прямыми g_1 и g_2 был отсечен отрезок s.

Попытки решить циркулем и линейкой эту, повидимому, простую задачу не приводят ни к чему, они и не могут увенчаться успехом, ибо эта задача вообще не разрешима циркулем и линейкой.

Для того чтобы доказать это, мы сначала устраним прямую g_2, проведем через P произвольную прямую и нанесем на ней от точки ее пересечения с g_1 отрезок s.

Получаемые таким путем точки X образуют некоторую кривую c; точки пересечения этой кривой c с g_2, будучи соединены с P, и дадут искомые прямые.

Сама прямая g_2 есть произвольная прямая плоскости. Поэтому, если бы точки пересечения ее с c могли быть построены циркулем и линейкой, то кривая c должна была бы быть коническим сечением.

Но кривая c не есть коническое сечение, а представляет собою конхоиду, как это явствует из самого способа ее образования (§ 45).

Итак, наша задача не разрешима циркулем и линейкой.

4. Совершенно подобно тому, как это сделано в предыдущей задаче, можно поступать и во многих других задачах с целью определить, будут ли это задачи второй или более высокой степени.

Задачу выражают так, чтобы в ней требовалось отыскать точку X, которая лежит на данной прямой g или на данной окружности k. Затем устраняют соответственно g или k; задача в этом случае имеет уже не одно решение, но бесконечное множество их. Для точки X получается геометрическое место.

Если теперь точка X должна лежать на прямой g, то это геометрическое место должно быть либо прямой линией, либо коническим сечением (в частности, окружностью), если только задача разрешима циркулем и линейкой.

Если же точка X должна лежать на окружности k, то найденное геометрическое место необходимо будет прямой линией или окружностью, коль скоро задача должна быть степени не выше второй, предполагая совершенно общие условия взаимного расположения.

5. Иные задачи могут быть сведены к отыскиванию прямых x, которые проходят через данную точку P или касаются определенной окружности K или конического сечения S.

Если устранить P, K или S, то получится для x некоторое геометрическое место, и с помощью теорем a), b), c) снова можно определить, разрешима ли задача с помощью циркуля и линейки или нет.

6. Замечание. Из сказанного выше вытекает и общий метод решения геометрических задач на построение.

Задачу сводят к отысканию некоторой точки X, которая должна лежать на данной прямой g. Затем устраняют g и строят место, описываемое при этом точкой X. Если задача разрешима циркулем и линейкой, это место должно быть коническим сечением. Его точки пересечения с g и будут искомыми точками.

206. Даны окружность K с центром O и две точки A, B в произвольном относительно O положении. Требуется определить на K точку X так, чтобы угол AXB был разделен пополам касательной к окружности в точке X.

Разрешима ли эта задача с помощью циркуля и линейки или нет? В каком положении должны находиться точки A и B, чтобы задача была квадратной? (Ср. § 6.)

Глава VII.

ДЕЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ. (ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.)

§ 38. Введение.

1. Как известно, с помощью циркуля и линейки можно построить ряд правильных многоугольников или, что то же, разделить данную окружность на равные части. Можно построить правильные шестиугольник, треугольник, двенадцатиугольник, десятиугольник и пятиугольник.

Но с помощью циркуля и линейки не может быть построен правильный семиугольник или девятиугольник, наоборот, можно построить правильный семнадцатиугольник, как позже увидим.

В последующем рассматриваются вопросы этого рода.

2. Пусть будет дана окружность, радиус которой, как это впредь всегда будет предполагаться, равен 1. Через s_n обозначим сторону правильного вписанного n-угольника.

Из получающихся равнобедренного и прямоугольного треугольников вытекает:

$$s_n = 2\sin\frac{\pi}{n}.$$

По стороне n-угольника можно вычислить сторону $2n$-угольника s_{2n}, которая равна $2\sin\frac{\pi}{2n}$. С этой целью пользуются формулой:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда получается:

$$1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{n}} = 2\sin^2\frac{\pi}{2n},$$

или

$$2-\sqrt{4-s_n^2} = s_{2n}^2,$$

или

$$s_{2n} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_n^2}}.$$

По стороне шестиугольника можно, таким образом, вычислить длины сторон 12-угольника, 24-угольника, 48-угольника, и т. д.

По стороне вписанного многоугольника можно также определить сторону описанного многоугольника. Таким путем, как известно, Архимед определял число π.

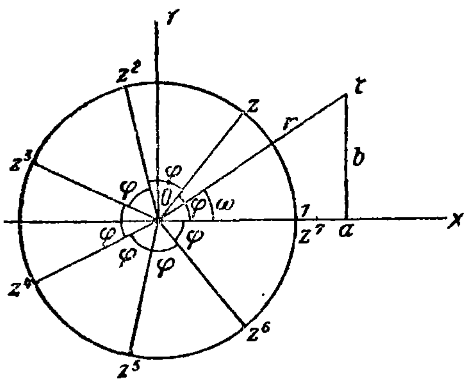
§ 39. Геометрическое представление комплексных чисел.

Мы должны прежде всего сказать несколько слов о гауссовом изображении комплексных чисел, так как оно находится в тесной связи с построением правильных многоугольников. Мы, впрочем, будем заниматься комплексными числами лишь постольку, поскольку это нужно для последующего.

1. Возьмем произвольное комплексное число $\zeta = a + bi$.

а) Мы кладем в основание прямоугольную систему координат и, принимая во внимание как величины, так и знаки чисел a и b, рассматриваем их соответственно как абсциссу и ординату и получаем точку (черт. 141) с координатами a, b.

Каждому числу ζ отвечает одна и только одна точка плоскости, и каждой точке плоскости отвечает одно и только одно число $\zeta = a + bi$. Можно поэтому рассматривать точку как изображение комплексного числа; комплексные числа таким путем отображаются на плоскости.



Черт. 141.

Две точки плоскости только тогда совпадают друг с другом, когда равны соответствующие их координаты.

Если поэтому два комплексных числа $\zeta = a + bi$ и $\zeta' = a' + b'i$ равны, то должны выполняться равенства: $a' = a$ и $b' = b$.[111]

b) Исходя из этого отображения, приходят к важному способу представления комплексных чисел.

Отрезок $O\zeta$ (черт. 141) обозначают через r; его всегда считают положительным и называют **абсолютной величиной** комплексного числа; угол ω (черт. 141), который также задается комплексным числом, называют его **фазой (амплитудой)**. Из чертежа вытекает, что

$$a = r\cos\omega, \quad b = r\sin\omega.$$

Можно поэтому написать число ζ также в форме:

$$\zeta = r(\cos\omega + i\sin\omega).$$

Этот способ представления особенно важен в виду теоремы **Муавра** (Moivre):

$$\zeta^n = r^n(\cos n\omega + i\sin n\omega).$$

Если n целое число, а только этим случаем мы и будем в последующем пользоваться, то формула эта легко доказывается.

2. Мы рассматриваем в последующем только **комплексные числа, абсолютные величины которых равны 1**. Пусть z будет таким числом. Тогда

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

По теореме Муавра:

$$z^2 = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$$
$$z^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Изображения этих степеней z лежат на окружности радиуса 1 (черт. 141). Фаза числа z^2 равна 2φ, фаза числа z^3 равна 3φ, фаза числа z^n равна $n\varphi$.

На фигуре z^7 совпадает с 1. Таким образом, $z^7 = 1$; z есть корень этого уравнения. Говорят, что z есть корень седьмой степени из единицы.

Легко заметить, что деление окружности на n равных частей сводится к определению корней уравнения $z^n - 1 = 0$. Поэтому уравнения такого вида носят также название уравнений деления окружности.

Деление окружности на n равных частей (с помощью циркуля и линейки) возможно в том и только в том случае, когда корни уравнения $z^n - 1 = 0$ могут быть выражены с помощью квадратных радикалов.

§ 40. Корни из единицы.

1. В предыдущем параграфе мы видели, что деление окружности на n равных частей зависит от решения уравнения $x^n - 1 = 0$. Мы рассмотрим теперь его решение.

Из уравнения следует:

$$x = \sqrt[n]{1} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

где r и φ подлежат определению. С помощью возведения в степень получается:

$$1 = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Отсюда вытекает, что

$$r^n \cos n\varphi = 1, \ r^n \sin n\varphi = 0.$$

Следовательно,

$$r = \sqrt[n]{1} = 1,$$

так как r должно быть положительным и 1 есть единственное положительное число, n-я степень которого равна 1. Для определения φ имеем уравнения:

$$\cos n\varphi = 1, \ \sin n\varphi = 0.$$

Отсюда следует:

$$n\varphi = 0, \ 2\pi, \ 4\pi \ \dots \ 2k\pi \ \dots$$
$$\varphi = 0, \ \frac{2\pi}{n}, \ \frac{4\pi}{n} \dots \frac{2k\pi}{n} \dots$$

Этим дается решение задачи в трансцендентной форме.

Таким образом каждый корень приведенного выше уравнения $x^n - 1 = 0$ имеет вид:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Если в этом выражении положить $k=n$, то получится то же число, что и для $k=0$, именно, корень 1. Если положить $k=n+m$, где $m<n$, то получится тот же корень, что и для $k=m$.

Отсюда мы заключаем, что мы будем получать различные значения только для $k=0, 1, 2, 3, \ldots n-1$. Можно, таким образом, сказать: уравнение $x^n-1=0$ имеет n корней (которые являются корнями n-й степени из единицы). Они имеют вид

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}, \text{ где } k=0,1,2,3\ldots n-1.$$

Мы полагаем

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Тогда

$$\varepsilon^k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

Таким образом, корни n-й степени из единицы могут быть представлены так:

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3\ldots\varepsilon^{n-1}.$$

Корни n-й степени из единицы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots \varepsilon^{n-1}$ все отличны друг от друга, как это прямо видно по их изображениям. Действительно, изображениями их будут вершины правильного n-угольника, вписанного в окружности радиуса 1, причем точка, отвечающая числу 1, служит одной из вершин.

Так как $\varepsilon^n=1$, то

$$\varepsilon^{n-k}=\varepsilon^{-k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n};$$

этим равенством мы также будем пользоваться.

2. Алгебраическое определение корней из единицы.

Построение правильного n-угольника сводится, как было указано, к определению корня n-й степени из единицы, т. е. такого числа ε, которое удовлетворяет уравнению $x^n-1=0$. Но

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1),$$

откуда следует, что 1 всегда будет корнем уравнения $x^n-1=0$ и что каждый другой корень ε удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^{n-1}=-1.$$

Построение правильного n-угольника тогда и только тогда может быть выполнено с помощью циркуля и линейки, когда корни этого уравнения могут быть выражены в квадратных радикалах.

§ 41. Построение правильных пятиугольника и десятиугольника.

1. Построение правильного пятиугольника зависит от корней пятой степени из единицы, которые должны удовлетворять уравнению:

$$\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon=-1. \qquad (1)$$

Так как $\varepsilon^5 = 1$, то согласно указанному выше $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^3 = \varepsilon^{-2}$. Уравнение (1) переходит поэтому в следующее:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = -1. \tag{2}$$

Это уравнение разрешимо в квадратных радикалах.

Именно, если положить

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y, \tag{3}$$

то

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

и для y получится уравнение:

$$y^2 + y - 1 = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравнения суть:

$$y_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

и

$$y_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Путем подстановки y_1 в уравнение (3) получается

$$\varepsilon = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}).$$

Задача алгебраически решена.

2. Мы прежде всего исследуем геометрическое значение y_1. Как известно,

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5},$$

так что

$$\varepsilon^{-1} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5},$$

поэтому

$$y_1 = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = 2\sin\frac{\pi}{10} = s_{10}.$$

Уравнение (4) имеет два корня — один положительный и один отрицательный. Положительный корень будет, таким образом, стороной вписанного в окружность правильного десятиугольника. С помощью правильного десятиугольника легко построить пятиугольник.

Но можно также без труда вычислить s_5 на основании формулы (§ 38, 2)

$$2 - \sqrt{4 - s_5^2} = s_{10}^2.$$

Отсюда выводится известное соотношение:

$$s_5^2 = \frac{1}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 1 + s_{10}^2.$$

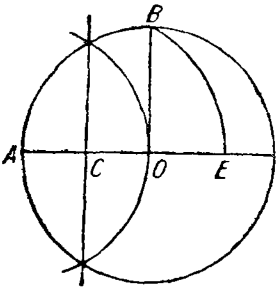
3. Для построения правильного десятиугольника, а вместе с тем и правильного пятиугольника мы должны разрешить геометрически уравнение:

$$y^2 + y - 1 = 0. \tag{4}$$

Мы выполним решение этого уравнения с помощью различных средств решения.

a) Решение уравнения (4) с помощью циркуля и линейки.

Мы построим в этом случае корень



Черт. 142.

$$y = s_{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Радиус окружности равен 1. Опишем окружность $A(O)$ и $C(B)$ (черт. 142). Отрезок OE равен стороне десятиугольника, а BE — стороне пятиугольника.

Замечание. Это построение дает также и стороны шестиугольника, треугольника и четырехугольника.

Уравнение $y^2 + y - 1 = 0$ можно написать также в виде

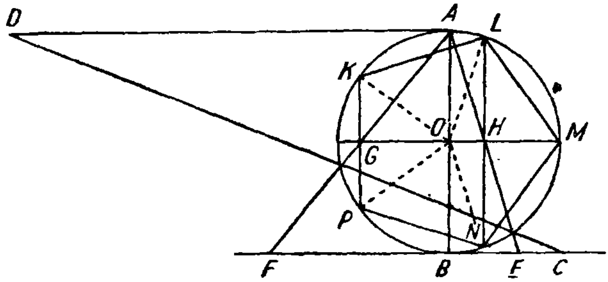
$$y : (1 - y) = 1 : y,$$

т. е. y есть бо́льшая часть радиуса, разделенного в крайнем и среднем отношении.

b) Построение правильного пятиугольника путем проведения одних лишь прямых линий при пользовании штейнеровой вспомогательной окружностью.

С этой целью мы должны разрешить уравнение $y^2 + y - 1 = 0$ по методу, изложенному на стр. 128.

В нашем случае $p = -1$ и $q = -1$. Поэтому на касательных в точках A и B откладываем соответственно отрезки -4 и $+1$ (черт. 143). Если соединить друг с другом полученные таким образом точки и спроектировать точки пересечения этой соединительной прямой с окружностью из точки A на нижнюю касательную, то на ней получатся искомые корни уравнения. Таким образом (черт. 143) длина отрезка BE равна $y_1 = s_{10}$; сторона пятиугольника равна отрезку EO. Задача решена.



Черт. 143.

Фон-Штаудт (von Staudt) также указал очень изящный способ нахождения вершин правильного пятиугольника с помощью точек G, H (черт. 143), причем $OM \perp AB$.

В § 41,2 мы доказали формулу $2\cos\frac{2\pi}{5} = s_{10}$, так что

$$\overline{OH} = \frac{\overline{EB}}{2} = \frac{s_{10}}{2} = \cos\frac{2\pi}{5}.$$

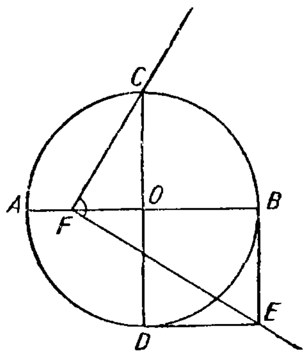
Следовательно,

$$\measuredangle LOM = \measuredangle MON = \frac{2\pi}{5}.$$

С помощью аналогичных рассуждений найдем, что $\overline{OG} = \cos\frac{\pi}{5}$, поэтому $\measuredangle POG = \frac{\pi}{5}$, чем и оправдано построение Штаудта.

c) Построение правильного пятиугольника с помощью одного только циркуля мы уже привели в § 15.

d) Построение правильного пятиугольника с помощью одной линейки (о двух параллельных краях) требует построения выражения, содержащего радикал. Выполнить это.



Черт. 144.

e) Построение правильного пятиугольника с помощью подвижного прямого угла представляется особенно простым.

С этой целью мы должны разрешить уравнение $y^2 + y - 1 = 0$ исключительно с помощью прямого угла. Это выполняется по указанному в § 32 методу.

Построение производится следующим образом. В окружности, в которую должен быть вписан правильный пятиугольник или десятиугольник, проводят два взаимно перпендикулярных диаметра AB, CD (черт. 144) и определяют точку E так, что $EB \perp OB$ и $ED \perp OD$. Если затем расположить прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы его стороны проходили через точки C и E, а вершина лежала на прямой AB, то отрезок $OF = s_{10}$ и $FC = s_5$.

§ 42. Правильные семи- и девятиугольник.

1. Правильный семиугольник.

При делении окружности на семь частей вопрос приводится, согласно вышесказанному, к решению уравнения:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 = -1.$$

Так как $\varepsilon^7 = 1$, то $\varepsilon^6 = \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon^5 = \varepsilon^{-2}$, $\varepsilon^4 = \varepsilon^{-3}$. Поэтому рассматриваемое уравнение может быть представлено в виде:

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = -1.$$

Если для решения этого уравнения положить $\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$, то

$$\varepsilon^2 + \varepsilon^{-2} = y^2 - 2,$$

и

$$\varepsilon^3 + \varepsilon^{-3} = y^3 - 3y.$$

Для определения y получаем кубическое уравнение

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

От этого уравнения зависит, таким образом, построение правильного семиугольника. Но уравнение это (§ 36) неразрешимо в квадратных радикалах.

Следовательно, построение правильного семиугольника не может быть выполнено с помощью циркуля и линейки.

Исследуем еще геометрическое значение y:

$$y=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}\right)=2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Итак, если соединить хордой две вершины семиугольника, разделенные одной из вершин, то расстояние этой хорды от центра есть $\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{y}{2}$.

2. Правильный девятиугольник.

Правильный девятиугольник требует несколько иной постановки вопроса. Именно, его можно построить, если разделить окружность на три равные части, а затем каждую треть снова разделить на три равные части.

Таким образом, если ε есть корень девятой степени из единицы, то ε^3 есть корень третьей степени. Для корней девятой степени выполняется поэтому равенство:

$$(\varepsilon^3)^2+\varepsilon^3+1=0$$

или

$$\varepsilon^6+\varepsilon^3+1=0. \tag{1}$$

Но так как $\varepsilon^9=1$, то $\varepsilon^6=\varepsilon^{-3}$; последнее уравнение поэтому переходит в следующее:

$$\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}+1=0. \tag{2}$$

Если положить

$$\varepsilon+\varepsilon^{-1}=y,$$

то

$$\varepsilon^3+\varepsilon^{-3}=y^3-3y,$$

и для y получается уравнение

$$y^3-3y+1=0. \tag{3}$$

Это уравнение, по § 36, неразрешимо в квадратных радикалах. Поэтому построение правильного девятиугольника не может быть выполнено с помощью циркуля и линейки.

Уравнение (3) имеет корни:

$$y_1=\varepsilon+\varepsilon^{-1}=\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}\right)=2\cos\frac{2\pi}{9},$$

$$y_2=\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}=\left(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)=2\cos\frac{4\pi}{9}$$

$$y_3=\varepsilon^4+\varepsilon^{-4}=\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)+\left(\cos\frac{8\pi}{9}-i\sin\frac{8\pi}{9}\right)=2\cos\frac{8\pi}{9}=$$

$$=-2\cos\frac{\pi}{9},$$

в чем можно убедиться, подставив значения корней $y_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}$ и $y_3 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4}$ в уравнение (3) и воспользовавшись равенством (2).

Уравнение (3) имеет, таким образом, три вещественных корня: два положительных и один отрицательный; y_1 притом будет наибольшим из положительных корней.

Корни y_1 и y_2 имеют геометрическое значение, которым с удобством можно воспользоваться при построении правильного девятиугольника. Именно:

$$\frac{y_1}{2} = \cos\frac{2\pi}{9}$$

и, следовательно, отрезок $y_1 : 2$ равен расстоянию от центра той хорды, которая соединяет две вершины девятиугольника, разделенные одной из вершин.

Далее,
$$y_2 = 2\cos\frac{4\pi}{9} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{9}\right) = 2\sin\frac{\pi}{18}$$

есть сторона правильного 18-угольника.

§ 43. Построение правильного семнадцатиугольника.

1. Гаусс (Gauss) доказал, что это построение выполнимо циркулем и линейкой.

Задача зависит от решения уравнения:

$$x^{17} - 1 = 0,$$

которое, как будет показано, разрешимо в квадратных радикалах.

Если положить

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17},$$

то корнями семнадцатой степени из единицы (§ 40) будут $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{16}$ или также: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \ldots \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \varepsilon^{-7} \ldots \varepsilon^{-1}$, так как

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{-k}.$$

Уравнение, из которого должны быть определены корни семнадцатой степени из единицы, как известно, таково:

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \ldots \varepsilon^{-1} = -1. \qquad (1)$$

2. В целях решения этого уравнения, положим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8} &= \eta \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7} &= \eta_1. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Оба равенства вместе содержат все комплексные корни семнадцатой степени из единицы. Левые части равенств следуют тому закону, что каждый из их членов есть квадрат предшествующего.

Если составить сумму левых частей этих равенств, то она должна равняться -1 (равенство (1)), так что

$$\eta + \eta_1 = -1.$$

Если составить произведение тех же количеств, то каждая степень числа ε получится четыре и только четыре раза, в чем можно убедиться вычислением. Поэтому (равенство (1)):

$$\eta \cdot \eta_1 = -4.$$

Отсюда вытекает, что η и η_1 суть корни следующего уравнения:

$$x^2+x-4=0. \tag{3}$$

Таким образом $\eta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$ и $\eta_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Теперь положим

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon+\varepsilon^4+\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-4}&=z\\ \varepsilon^2+\varepsilon^8+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-8}&=z_1\\ \varepsilon^3+\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^5&=z_2\\ \varepsilon^6+\varepsilon^7+\varepsilon^{-6}+\varepsilon^{-7}&=z_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти четыре равенства содержат снова все комплексные корни семнадцатой степени из единицы. Замечаем, что в любом из этих равенств каждый из членов есть четвертая степень предшествующего.

Сложением и умножением этих равенств убеждаемся в справедливости следующих равенств:

$$z+z_1=\eta,$$
$$z\cdot z_1=-1,$$

так что z и z_1 суть корни уравнения:

$$x^2-\eta x-1=0. \tag{5}$$

Из системы равенств (4) получаются также равенства:

$$z_2+z_3=\eta_1$$

и

$$z_2\cdot z_3=-1,$$

так что z_2 и z_3 суть корни уравнения:

$$x^2-\eta_1 x-1=0. \tag{6}$$

Положим, наконец,

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon+\varepsilon^{-1}&=y,\\ \varepsilon^4+\varepsilon^{-4}&=y_1; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

откуда найдем, что

$$y+y_1=z,$$

где z есть положительный корень уравнения (5), и

$$y_1\cdot y=z_2,$$

где z_2 — положительный корень уравнения (6).

Следовательно, y и y_1 будут корнями уравнения:

$$x^2-zx+z_2=0; \tag{8}$$

y больше, чем y_1.

Если, наконец, подставить значение y в уравнение $\varepsilon+\varepsilon^{-1}=y$, то получится уравнение, из которого может быть вычислено значение ε:

$$\varepsilon=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{y^2-4}.$$

Этим доказано, что корни семнадцатой степени из единицы могут быть выражены с помощью квадратных радикалов.

Мы укажем еще на геометрическое значение y_1 — меньшего корня уравнения (8):

$$y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = \left(\cos\frac{8\pi}{17} + i\sin\frac{8\pi}{17}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{17} - i\sin\frac{8\pi}{17}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34},$$

поэтому y_1 есть сторона вписанного правильного 34-угольника.

3. Построение правильного семнадцатиугольника.

а) С этой целью решают построением последовательно квадратные уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&x^2 + x - 4 = 0, \text{ имеющее корни } \eta,\ \eta_1 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17},\\
&\qquad \eta > 0,\ \eta_1 < 0;\\
&x^2 - \eta x - 1 = 0, \text{ имеющее корни } z,\ z_1 = \frac{\eta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\eta^2 + 4},\\
&\qquad z > 0,\ z_1 < 0;\\
&x^2 - \eta_1 x - 1 = 0, \text{ имеющее корни } z_2,\ z_3 = \frac{\eta_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\eta_1^2 + 4},\\
&\qquad z_2 > 0,\ z_3 < 0;\\
&x^2 - zx + z_2 = 0, \text{ имеющее корни } y,\ y_1 = \frac{z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{z^2 - 4z_2},\\
&\qquad y > y_1.
\end{aligned}\right\} \quad (S)$$

y_1 есть сторона вписанного 34-угольника. Далее, $y = \varepsilon^1 + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17}$, следовательно, $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17}$ есть расстояние от центра той хорды, которая соединяет две вершины 17-угольника, разделенные одной из его вершин.

Решение этой системы квадратных уравнений будет произведено четырьмя различными способами: A) при неограниченном пользовании циркулем и линейкой (построения Серре-Бахмана, Шуберта (Serret-Bachmann, H. Schubert)), B) путем проведения одних прямых линий при помощи штейнеровой окружности (построение Штаудта (Staudt)); C) с помощью одного лишь циркуля (построение Жерара (Gérard)); D) с помощью прямого угла.

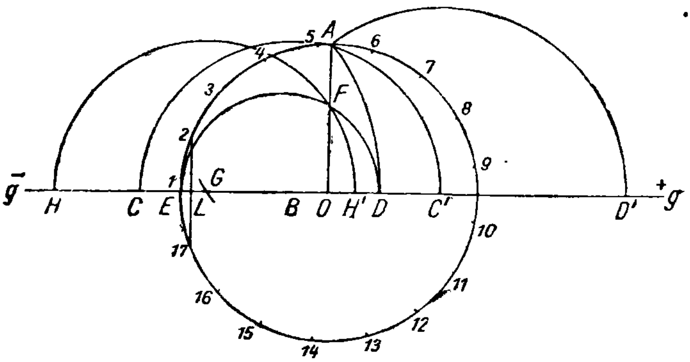
A) Построение правильного семнадцатиугольника с помощью циркуля и линейки.

1. Строят по порядку корни системы (S).

С этой целью чертят прямоугольный треугольник с катетами 2 и $\frac{1}{2}$; тогда гипотенуза этого треугольника равна $\frac{1}{2}\sqrt{17}$.

Если вокруг точки пересечения катета $\frac{1}{2}$ с гипотенузой описать полуокружность радиусом $\frac{1}{2}$, то на гипотенузе получатся значения η и η_1, причем отрезок η_1 должен быть взят с отрицательным знаком.

Построив, далее, прямоугольный треугольник с катетами, равными $\frac{\eta}{2}\left(\text{соотв.,}\ \frac{\eta_1}{2}\right)$ и единице, и описав полуокружность радиусом $\frac{\eta}{2}\left(\text{соотв.,}\ \frac{\eta_1}{2}\right)$, получим на гипотенузе этого треугольника корни z, z_1 (z_2, z_3), причем отрезок z_1 (z_3) должен быть взят с отрицательным знаком.



Черт. 145.

Если, наконец, начертить треугольник с катетами $\frac{z}{2}$ и z_2, то отсюда получатся искомые значения y и y_1.

Если теперь на радиусе окружности, описанной радиусом 1, отложить от центра отрезок $\frac{y}{2}$ и восставить к отрезку в полученной таким путем точке перпендикуляр, то он пересечет окружность в двух вершинах правильного 17-угольника, отделенных друг от друга одной из его вершин.

Таким образом для решения требуется построить четыре прямоугольных треугольника. Если их надлежащим образом сочетать, то можно будет обойтись без некоторых линий.

Это достигается в построении Серре-Бахмана.

2. Пусть $\overline{OA} = 1$ будет радиус данной окружности, которая должна быть разделена на 17 равных частей (черт. 145). Перпендикулярно к OA проводят прямую g и выбирают на ней положительное направление.

Строят: $\overline{OB} = -\frac{1}{4}$. Тогда: $\overline{BA} = \frac{1}{4}\sqrt{17}$.

Затем описывают окружности $B(A)$, $C(A)$ и $C'(A)$.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\overline{OC}=\overline{OB}+\overline{BC}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17}=\frac{\eta_1}{2},$$

$$\overline{OC'}=\overline{OB}+\overline{BC'}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{17}=\frac{\eta}{2},$$

$$\overline{OD'}=\overline{OC'}+\overline{C'D'}=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1}=z,$$

$$\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{CD}=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1}=z_2.$$

Делают, далее,

$$\overline{OE}=-1,$$

строят на ED как на диаметре полуокружность и чертят

$$\overline{FG}=\frac{1}{2}\overline{OD'}.$$

Если описать окружность $G(F)$, то получатся точки H и H'; при этом

$$-\overline{OH}+\overline{OH'}=\overline{HH'}=2\overline{GH'}=\overline{OD'}=z,$$

$$-\overline{OH}\cdot\overline{OH'}=\overline{OF}^2=-\overline{OE}\cdot\overline{OD}=z_2,$$

так как

$$-\overline{OE}=1.$$

Сумма двух отрезков $-\overline{OH}$ и $\overline{OH'}$, таким образом, равна z, а произведение их равно z_2. Следовательно, эти отрезки будут корнями y, y_1 уравнения:

$$x^2-zx+z_2=0.$$

При этом $y=\overline{HO}$ и $y_1=\overline{OH'}$.

По вышесказанному,

$$\frac{y}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{2}\overline{HO}$$

и OH' есть сторона правильного 34-угольника.

Строят, наконец,

$$\overline{OL}=\frac{1}{2}\overline{OH}$$

и восставляют в L перпендикуляр к OH. Этот перпендикуляр пересекает данную окружность в точках *2* и *17* искомого 17-угольника.

3. Шуберт в своем сочинении „Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis" также дает простое построение правильного 17-угольника. Система уравнений (S) при этом снова разрешается с помощью прямоугольных треугольников, которые располагаются возможно более удобным образом друг относительно друга.

B) Построение правильного семнадцатиугольника по Штаудту.

1. Построение правильного 17-угольника производится путем проведения прямых линий при пользовании начерченной окружностью.

В качестве этой вспомогательной окружности мы можем выбрать именно ту окружность, которая должна быть разделена на семнадцать равных частей.

Решение этой задачи выполняется путем графического решения уравнений системы (S) с помощью наших теперешних средств построения.

В § 32, 1 было показано, как можно найти корни квадратного уравнения, проводя одни лишь прямые линии, если дана начерченная окружность.

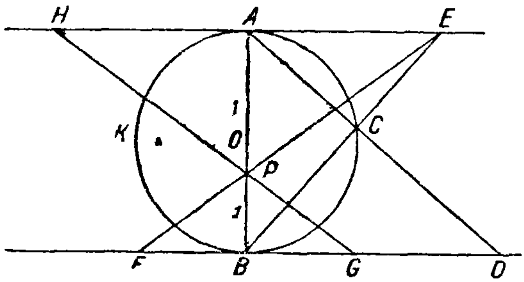
Этим способом мы и воспользуемся в настоящем случае. Но для того чтобы не прерывать нашего изложения позже, мы должны доказать здесь еще две леммы, имеющие значение для последующего.

Лемма 1. Пусть AB будет диаметр окружности K с радиусом 1 и C — произвольная точка окружности K (черт. 146). Треугольники EAB и ABD подобны, так что

$$\overline{AE} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BD},$$

поэтому

$$\overline{AE} \cdot \overline{BD} = 4.$$



Черт. 146.

Лемма 2. Пусть EF и GH (черт. 146) будут две произвольные прямые, которые пересекаются в точке P прямой AB. Тогда

$$\overline{AE} : \overline{BF} = \overline{AP} : \overline{BP} = \overline{AH} : \overline{BG},$$

поэтому

$$\overline{AE} \cdot \overline{BG} = \overline{BF} \cdot \overline{AH}$$

по абсолютной величине и по знаку.

2. Итак, прежде всего речь идет о решении уравнения:

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

Сравним это уравнение с уравнением

$$x^2 - px + q = 0,$$

решенным на черт. 137, и заметим, что в нашем случае

$$p = -1, \quad q = -4.$$

Поэтому мы отложим соответственно на касательных в A и B (черт. 147) отрезки

$$\frac{4}{p} = -4 \quad \text{и} \quad \frac{q}{p} = +4,$$

соединим полученные точки прямою и точки пересечения этой прямой с окружностью будем проектировать из точки A на касательную t_2, в результате чего получим корни η и η_1.

Теперь мы должны решить следующее уравнение:

$$x^2 - \eta x - 1 = 0.$$

Для него

$$p = \eta \quad \text{и} \quad q = -1.$$

Теперь на t_1 и t_2 откладываются от точек A и B соответственно отрезки

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{\eta} \quad \text{и} \quad \frac{q}{p} = -\frac{1}{\eta}.$$

Откладывание этих обоих отрезков с помощью наших лемм (черт. 146) производится с поразительной простотой.

Именно, если спроектировать точку пересечения прямой a с окружностью K из B на t_1, то на t_1 получится отрезок $\frac{4}{\eta}$ (по первой лемме).

Если соединить точки $+1$ и -4, затем полученную таким путем точку P прямой AB соединить с ранее построенной точкой $\frac{4}{\eta}$ на t_1, то на t_2 получится (по второй лемме) отрезок $-\frac{1}{\eta}$.

Но теперь

$$\frac{4}{\eta} = \frac{4}{p} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\eta} = \frac{q}{p}.$$

Поэтому, если спроектировать точки пересечения прямой b (черт. 147) с окружностью K из A на t_2, то получатся корни z и z_1.

Для того чтобы решить теперь уравнение:

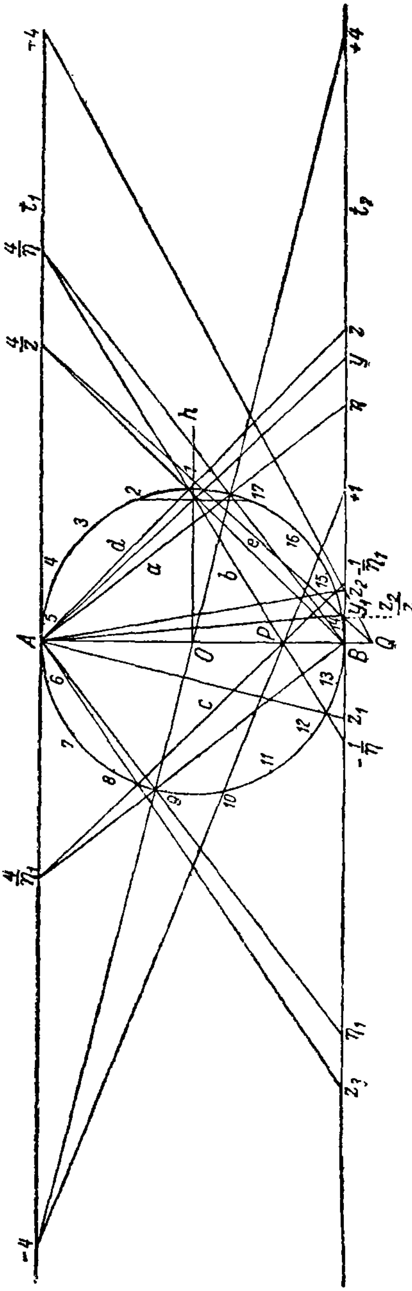
$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0,$$

откладывают отрезки

$$\frac{4}{p} = \frac{4}{\eta_1} \quad \text{и} \quad \frac{q}{p} = -\frac{1}{\eta_1}.$$

Это делается точно так же, как и при решении предшествующего уравнения.

Если спроектировать точки пересечения получаемой при этом прямой c (черт. 147) с окружностью K из A, то на t_2 получатся корни z_2 и z_3.



Черт. 147.

Наконец, подлежит решению еще уравнение:

$$x^2 - zx + z_2 = 0.$$

Для него

$$p = z \quad \text{и} \quad q = z_2.$$

Таким образом требуется на t_1 и t_2 отложить соответственно отрезки $\frac{4}{z}$ и $\frac{z_2}{z}$.

С этой целью проектируют точку пересечения прямой d (черт. 147) с окружностью K из B и получают (согласно первой лемме) на t_1 отрезок $\frac{4}{z}$ по абсолютной величине и по знаку.

Если соединить прямою точку $+4$ на t_1 с точкой z_2 на t_2 и полученную таким путем точку Q на AB с точкой $\frac{4}{z}$ на t_1, то эта прямая e (черт. 147) (согласно второй лемме) отсечет на t_2 (вправо от B) отрезок $\frac{z_2}{z}$. (Это вытекает из пропорциональности получаемых отрезков, ибо имеет место пропорция $4 : \frac{4}{z} = z_2 : \frac{z_2}{z}$.)

Но теперь

$$\frac{4}{z} = \frac{4}{p} \quad \text{и} \quad \frac{z_2}{z} = \frac{q}{p}.$$

Поэтому, если спроектировать точки пересечения прямой e с окружностью K из A на t_2, то получатся корни y и y_1 последнего уравнения.

y_1, как известно, будет стороной правильного 34-угольника; по ней уж можно построить сторону 17-угольника.

По y также можно определить сторону правильного 17-угольника. Известно (§ 43, 2), что

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

Таким образом, если через O провести прямую h параллельно t_1 и продолжить ее до пересечения с прямою Ay в точке L, то перпендикуляр к h в точке L пересечет окружность K в вершинах *2* и *17* правильного 17-угольника.

C) Построение правильного семнадцатиугольника с помощью одного только циркуля.

1. Речь идет о решении системы уравнений (S) (стр. 155) с помощью этого ограниченного средства черчения, т. е. о построении радикальных выражений, которые могут быть написаны в следующем виде:

$$\frac{\eta}{2}=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$\frac{\eta_1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4},$$

$$z=\frac{\eta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2+1},$$

$$z_2=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2+1},$$

$$y=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-z_2}.$$

Для того чтобы найти эти выражения с помощью одного циркуля, поступают по Жерару (Gérard) следующим образом.

Пусть будет дана окружность $\mathfrak{K}$ (черт. 148), радиус которой равен единице. Берут на данной окружности произвольную точку A, строят

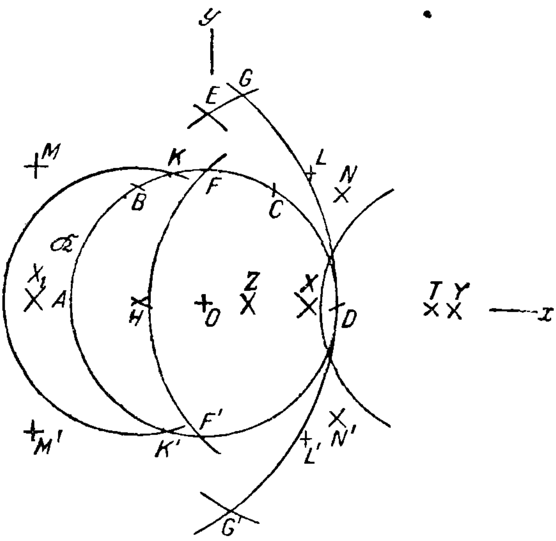
$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1,$$

и описывают окружности $A(C)$, $D(B)$. Тогда

$$\overline{OE}=\sqrt{2}.$$

Описывают вокруг D окружность радиусом $\sqrt{2}$, в результате чего получают точки F, F' и окружности $G(D)$ и $G'(D)$, пересекающиеся в точке H, причем точки G, G' лежат в пересечении окружностей $A(D)$ и $D(B)$. Тогда

$$\overline{OH}=\overline{HA}.$$



Черт. 148.

Вокруг полученной таким путем точки H строят окружность радиуса 1, которая пересекает данную окружность в точках K и K'.

Представим себе теперь, что в основание всей фигуры положена прямоугольная система координат (черт. 148).

Точка K имеет координаты

$$-\frac{1}{4},\ \sqrt{1-\frac{1}{16}}.$$

Если описать вокруг точек K и K' окружности радиусом $\sqrt{2}$, то они пересекутся в двух точках оси x-ов, которые мы обозначим через X и X_1.

Расстояние точки X от прямой KK' равно $\frac{1}{4}\sqrt{17}$, как в этом легко убедиться из соответствующего прямоугольного треугольника. Следовательно, отрезок

$$\overline{OX} = \frac{1}{4}\sqrt{17} - \frac{1}{4} = \frac{\eta}{2}.$$

Равным образом, находим, что

$$\overline{OX_1} = \frac{\eta_1}{2},$$

по абсолютной величине и по знаку.

Теперь путем проведения одних окружностей строят точки L, L' с абсциссой $\frac{\eta}{2}$ и ординатами ± 1, кроме того, определяют такую точку Y, для которой имеет место соотношение

$$\overline{LY} = \overline{L'Y} = \overline{XE}.$$

Тогда

$$\overline{OY} = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} = z,$$

ибо

$$\overline{XE} = \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 2}$$

и

$$\overline{XY} = \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}.$$

Для того чтобы определить z_2, строят прежде всего точки M, M с координатами $\frac{\eta_1}{2}$, ± 1 и определяют точку Z так, что

$$\overline{MZ} = \overline{M'Z} = \overline{X_1E}.$$

Тогда

$$\overline{OZ} = z_2,$$

ибо

$$\overline{X_1E} = \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 2},$$

так что

$$\overline{OZ} = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta_1}{2}\right)^2 + 1},$$

причем следует заметить, что $\eta_1 < 0$.

Остается еще построить лишь y.

С этой целью определяют точки N, N' так, что

$$\overline{ON} = \overline{ON'} = \overline{NY} = \overline{N'Y} = \overline{AZ}.$$

Абсциссы точек N, N' равны $\frac{z}{2}$. Ординаты точек N, N' равны $\pm\sqrt{(1+z_2)^2-\frac{z^2}{4}}$, в чем можно убедиться из рассмотрения соответствующих прямоугольных треугольников.

Теперь, наконец, определяют точку T так, что

$$\overline{NT}=\overline{N'T}=\overline{ZB}.$$

Тогда

$$\overline{OT}=y.$$

Действительно, точка B имеет координаты $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, а координаты точки Z суть z_2, 0. Поэтому

$$\overline{BZ}=\sqrt{1+z_2+z_2^2}$$

и

$$\overline{OT}=\frac{z}{2}+\sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2-z_2}=y=2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

Теперь описывают вокруг T радиусом 1 окружность, которая пересечет данную окружность в двух вершинах *2* и *17* правильного 17-угольника, ибо

$$\frac{\overline{OT}}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}.$$

2. Впрочем, можно итти и многими другими путями при построении 17-угольника с помощью одного только циркуля.

В главе III мы показали, как можно выполнить все геометрические построения с помощью одного лишь циркуля, если ту фигуру, которую необходимо начертить при неограниченном пользовании циркулем и линейкой, преобразовать в фигуру, состоящую из одних окружностей, с помощью инверсии относительно надлежаще выбранной основной окружности.

На стр. 158 и след. было показано построение правильного 17-угольника с помощью ш т е й н е р о в о й окружности. Коль скоро дана окружность вместе с ее центром, это построение выполняется путем проведения одних лишь прямых линий, так как и касательные к окружности и отрезки *1*, *4* могут быть построены с помощью проведения одних лишь прямых линий, согласно главе II.

Если теперь представить себе, что построение правильного 17-угольника выполнено по этому способу и что начерчена фигура, обратная найденной, то эта обратная фигура будет состоять только из окружностей, проходящих через центр данной окружности.

207. Предлагается построить 17-угольник по этому способу с помощью циркуля, пользуясь разъяснениями главы III.

208. В § 43, А) мы показали построение 17-угольника с помощью циркуля и линейки. Само построение, кроме окружностей, содержит лишь две прямые линии (черт. 145).

По главе III можно определить точки пересечения прямых линий с окружностями путем проведения одних лишь окружностей. Предлагается выполнить построение § 43, A), не проводя прямых линий, и сравнить его с данным построением Жерара.

D) Построение правильного семнадцатиугольника с помощью прямого угла.

Речь идет снова о решении следующих уравнений:

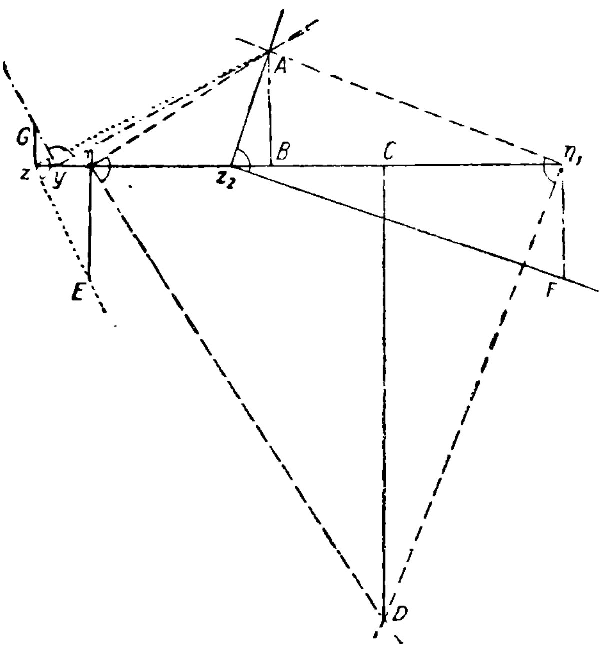
$$\begin{array}{llll}
x^2+x-4=0, & \text{имеющего корни} & \eta,\ \eta_1, & \text{причем}\ \eta>0,\ \eta_1<0 \\
x^2-\eta x-1=0, & \quad » \qquad\quad » & z,\ z_1, & \quad » \quad z>0,\ z_1<0 \\
x^2-\eta_1 x-1=0, & \quad » \qquad\quad » & z_2,\ z_3, & \quad » \quad z_2>0,\ z_3<0 \\
x^2-zx+z_2=0, & \quad » \qquad\quad » & y,\ y_1, & \quad » \quad y>y_1.
\end{array}$$

Решение этих уравнений с помощью прямого угла может быть выполнено по § 32.

Чертят прежде всего ломаную линию $ABCD$ (черт. 149), причем

$$\overline{AB}=\overline{BC}=1 \quad \text{и} \quad \overline{CD}=4.$$

Затем располагают прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили через A и D, а вершина его лежала на прямой BC. Таким путем получают корни η и η_1.



Черт. 149.

Если теперь провести через точки η и η_1 (черт. 149) прямые

$$\overline{\eta E}=1, \quad \overline{\eta_1 F}=1,$$

то ломаная линия $AB\eta E$ будет представлять трином $x^2-\eta x-1$, а ломаная $AB\eta_1 F$ — трином $x^2-\eta_1 x-1$.

Для определения z и z_2 (z_1 и z_3 не изображены на чертеже) помещают прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили один раз через A и E, другой раз — через A и F и чтобы вершина его оба раза лежала на BC. Получаются корни z и z_2.

Теперь в точке z перпендикулярно к BC проводят отрезок

$$\overline{zG}=\overline{Bz_2}$$

(черт. 149). Составленная таким образом ломаная линия $ABzG$ представляет трином x^2-zx+z_2.

Если теперь поместить прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы стороны его проходили через A и G, а вершина лежала на BC, что можно выполнить двумя различными способами, то получатся корни y, y_1.

Больший из них y начерчен; отсюда уж немедленно вытекает построение правильного 17-угольника, ибо

$$\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{17} \text{ и т. д.}$$

§ 44. Теоремы о возможности построения правильных многоугольников.

1. Деление окружности на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 равных частей было известно уже в древности, равно как и деление пополам произвольной дуги, что дает возможность построить 24-угольник по 12-угольнику и т. д.

Было известно также и деление окружности на 15 частей. Так как

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5},$$

то $\frac{1}{15}$ окружности может быть получена, если из $\frac{2}{3}$ окружности отнять $\frac{3}{5}$ ее.

Вообще справедливо предложение: если n есть произведение двух взаимно простых чисел a и b, то

$$\frac{1}{n} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

где x и y суть целые положительные числа.

Действительно, неопределенное уравнение

$$bx - ay = 1$$

всегда разрешимо в целых положительных числах, если a и b суть взаимно простые числа.

2. Гаусс в своем знаменитом сочинении „Disquisitiones arithmeticae" впервые расширил доставшиеся нам от древних сведения относительно возможности деления окружности на равные части, причем им было доказано следующее предложение.

Если p есть простое число вида $p = 2^{2^n} + 1$, то деление окружности на p частей возможно. Для каждого же другого простого числа и для каждой степени простого числа, основание коей больше двух, деление окружности с помощью циркуля и линейки невозможно.

Если положить (в целях ближайшего рассмотрения этой теоремы) $n = 0$, то $p = 2^1 + 1 = 3$ будет простым числом. Если положить $n = 1$, то $p = 2^2 + 1 = 5$ снова есть простое число. Если положить $n = 2$, то $p = 2^{2^2} + 1 = 17$.

Деление окружности на 17 частей в силу теоремы Гаусса возможно. Мы выше его выполнили.

Если $n=3$, то $p=2^{2^3}+1=257$. Так как 257 есть простое число, то деление окружности на 257 равных частей выполнимо с помощью циркуля и линейки. *

Если положить $n=4$, то $p=2^{2^4}+1=65537$. Это число снова оказывается простым. Уравнение $x^{65537}-1=0$ разрешимо поэтому в квадратных радикалах, для чего Гаусс указывает необходимые методы.

Для $n=5$, 6, 7 число $p=2^{2^n}+1$ не будет простым. Для $n=8$ получается число, о котором неизвестно, простое ли оно или нет.

Из теоремы Гаусса вытекает также, что для каждой степени простого числа деление окружности невозможно, коль скоро это простое число больше двух.

Поэтому оказывается невозможным разделить окружность, например, на 9, 25, 27 частей.

3. Таким образом возможно деление окружности на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24 $\left(\frac{1}{24}=\frac{2}{3}-\frac{5}{8}\right)$, 30 равных частей и невозможно — на 7, 11, 13, 19, 23, 29 частей, так как это простые числа, не могущие быть представленными в виде $2^{2^n}+1$; равным образом, невозможно разделить окружность на 9, 25, 27 частей, так как 9, 25, 27 суть степени простых нечетных чисел.

Невозможно, далее, разделить окружность на 14, 21, 28, 18, 22 равные части, ибо если бы, например, можно было разделить окружность на 14 равных частей, то можно было бы разделить ее и на 7 равных частей, чего, однако, нельзя сделать. Аналогично этому нельзя разделить окружность на 18, 22 равные части, так как невозможно разделить ее соответственно на 9, 11 равных частей. [112]

---

* Ришело (Richelot) опубликовал относительно этого объемистую работу (Crelle-Journal, B. 9, 1832), примыкающую к Гауссову сочинению.

Глава VIII.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ.

§ 45. Удвоение куба (Делийская проблема).

Если s есть сторона данного куба, S — искомая сторона куба двойного объема, то

$$S^3 = 2s^3,$$

так что

$$S = s\sqrt[3]{2}.$$

Знаменитая задача об удвоении куба приводит, таким образом, к построению выражения $\sqrt[3]{2}$.

Эта задача есть частный случай следующей задачи, которая много раз рассматривалась древними. [113]

Даны два отрезка a и b. Требуется построить два средних пропорциональных, т. е. два отрезка x, y, которые удовлетворяли бы уравнениям

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Из этих равенств вытекает, что

$$x = \sqrt[3]{a^2b}$$

$$y = \sqrt[3]{b^2a},$$

и если, в частности,

$$a = 1, \ b = 2,$$

то

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{4}.$$

Удвоение куба требует построения выражения $\sqrt[3]{2}$ или графического определения корней уравнения:

$$x^3 - 2 = 0.$$

Это уравнение третьей степени не имеет рациональных корней и поэтому неразрешимо в квадратных радикалах (§ 36).

Выражение $\sqrt[3]{2}$, таким образом, не может быть построено циркулем и линейкой.

Для решения этой задачи необходимы конические сечения или еще высшие кривые, которые могут быть начерчены по точкам или с помощью инструментов.

1. Графическое решение с помощью конических сечений

α) Если рассмотреть параболы

$$x^2 = ay,$$
$$y^2 = bx,$$

то координатами точки их пересечения (не совпадающей с началом) будут числа:

$$\xi = \sqrt[3]{a^2 b}, \quad \eta = \sqrt[3]{ab^2}.$$

β) Если построить два конических сечения

$$x^2 = ay,$$
$$xy = ab,$$

то точка их пересечения, не совпадающая с началом, имеет координаты

$$\xi = \sqrt[3]{a^2 b}, \quad \eta = \sqrt[3]{ab^2}.$$

γ) Если рассмотреть окружность

$$x^2 + y^2 - bx - ay = 0$$

и параболу

$$y^2 = bx,$$

то точка пересечения, отличная от начала, имеет координаты

$$\xi = \sqrt[3]{a^2 b}, \quad \eta = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Во всех трех случаях нахождение обоих средних пропорциональных сводится, таким образом, к определению точек пересечения двух конических сечений. [114]

Если, в частности, $a = m$, $b = 1$, то

$$\xi = \sqrt[3]{m^2}, \quad \eta = \sqrt[3]{m}.$$

Для определения $\sqrt[3]{m}$ можно, следовательно, применить один из трех способов α), β), γ).

Для $b = 1$ третий метод является практически наиболее удобным. В этом случае уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = x;$$

она, таким образом, не зависит от m и может быть поэтому начерчена раз навсегда. [115]

Координатами центра окружности тогда будут числа:

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{2} = \frac{m}{2}.$$

Так как окружность проходит через начало, то нет необходимости вычислять ее радиус.

Сообразно с этим, следующий способ оказывается практичным, если нужно графически определить большое число корней третьей степени.

На бумаге, разграфленной на квадратные миллиметры (можно иметь бумагу, которая разграфлена весьма точно), чертят параболу $P\,(y^2 = x)$, отыскивают точку M с абсциссой $\frac{1}{2}$ и ординатой $\frac{m}{2}$, помещают в нее одну ножку размерного циркуля и раздвигают его до начала координат. Затем определяют точку пересечения с параболой окружности, проходящей через начало.

Это может быть произведено размерным циркулем весьма точно без проведения самой окружности. Непосредственно получаемая ордината точки пересечения и будет корнем третьей степени из m.

2. Решение с помощью конхоиды Никомеда (около 150 г. до н. э.).

a) Никомед нашел чрезвычайно просто строящуюся высшую кривую, которая может быть применена не только для графического удвоения куба, но также и для трисекции угла и для графического решения уравнений третьей степени. Сама кривая получается следующим путем.

Пусть будут даны точка F (черт. 150), прямая g и отрезок s. Проводят через F произвольную прямую h и откладывают на ней от точки H ее пересечения с g отрезок s. Полученные таким образом точки при изменении прямой h образуют некоторую кривую c: конхоиду Никомеда.

Точку F называют полюсом кривой, прямую g — ее основанием, отрезок s — интервалом.

Нетрудно построить механизм, с помощью которого можно было бы чертить такого рода кривую.

Уже Никомед построил такой механизм. После циркуля он является древнейшим инструментом для вычерчивания кривых линий.

b) Мы прежде всего выведем уравнение этой кривой.

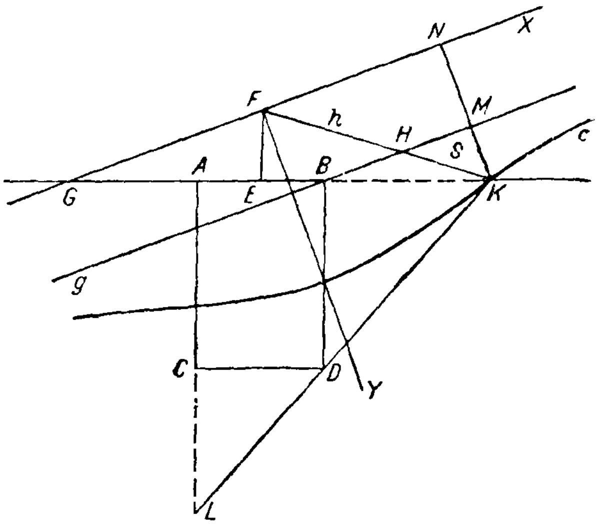
Из подобных треугольников KHM и KFN (черт. 150) вытекает, что

$$\frac{\overline{KF}}{\overline{KH}}=\frac{\overline{KN}}{\overline{KM}}$$

или

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{s}=\frac{y}{y-p}.$$

Положение системы координат при этом ясно из черт. 150; p есть расстояние полюса F от основания g.



Черт. 150.

Из уравнения видно, что кривая — четвертого порядка, имеет точку F своей двойной точкой и состоит из двух частей, имеющих основание g общей асимптотой. Кривая сверх того проходит через две мнимые циклические точки.

c) Теперь покажем, как с помощью этой кривой определить оба средних пропорциональных между двумя отрезками a и b.

Два взаимно перпендикулярные отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (черт. 150) пусть будут соответственно равны a и b. Далее, пусть

$$\overline{AC}=a.$$

E будет серединой отрезка AB, и прямая FE будет перпендикулярна к AB, так что

$$\overline{FE}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Проводят затем прямую FG и параллельно ей через точку B прямую g. Если построить теперь конхоиду c, которая имеет полюс F, основание g и интервал $s=\frac{b}{2}$, то она пересечет прямую AB в точке K,[116] откуда немедленно получается точка L с помощью четвертой вершины D прямоугольника $ABCD$.

Теперь с помощью вычислений нетрудно доказать, что $\overline{BK}$ и $\overline{CL}$ будут двумя средними пропорциональными между отрезками $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Для краткости мы не станем здесь вдаваться в это доказательство. *

Если, в частности,

$$a=1, \quad b=2,$$

то

$$\overline{CL}=\sqrt[3]{2}, \quad \overline{BK}=\sqrt[3]{4}.$$

d) Если желательно определить два средних пропорциональных, то нет необходимости в построении всей кривой; достаточно начертить ту ее часть, которая по предположению содержит точки пересечения.

Самое точку пересечения на практике удобно находить с помощью бумажной полоски, на которую нанесен отрезок $s=\frac{b}{2}$ и которую надлежащим образом передвигают.

Заслуживает упоминания, что это определение $\sqrt[3]{2}$ с помощью бумажной полоски ни в коем случае не будет лишь приближенным решением задачи (§ 22).[117]

3. Решение с помощью циссоиды Диоклеса (около 150 г. до н. э.).

а) Диоклес нашел для решения рассматриваемой задачи кривую, которая хотя и не может быть построена помощью столь простого механизма, как конхоида, но зато теснее связана с решаемой задачей.

Пусть AB (черт. 151) будет данным отрезком, имеющим длину 1. Проведем через его концы перпендикуляры g_1 и g_2 и возьмем на g_1 произвольную точку P_1. Этой точке P_1 мы на g_2 отнесем такую точку P_2, для которой

$$\overline{AP_2}=\overline{BP_1}^3$$

($\overline{AB}$ принимается за единицу).

---

* См. F. Enriques „Questioni Riguardanti La Geometria Elementare“, Болонья 1900, стр. 423—427.

Таким образом, если положить $\overline{BP_1} = s$, то

$$\overline{AP_2} = s^3.$$

Теперь проведем прямые AP_1 и BP_2; они пересекутся в точке P, которая при изменении s опишет некоторую кривую, циссоиду Диоклеса.

b) Мы прежде всего выведем уравнение этой кривой (черт. 151).

Уравнение прямой AP_1 есть

$$y = sx,$$

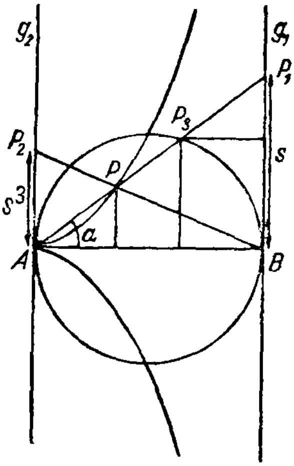
а уравнение прямой BP_2:

$$y = -s^3(x-1).$$

Исключив s из обоих уравнений, мы получим

$$y^2 = \frac{x^3}{1-x}$$

—уравнение циссоиды.



Черт. 151.

c) Выведем еще одно свойство этой кривой, которое может быть использовано для ее построения.

С этой целью построим на AB полуокружность и положим угол $BAP_1 = \alpha$ (черт. 151). Пусть прямая AP_1 пересекает полуокружность не только в A, но еще в некоторой точке P_3. Тогда $AP = P_3P_1$.

Для того чтобы это доказать, достаточно обнаружить только, что оба отрезка имеют равные по длине проекции на прямой AB.

Проекция отрезка P_3P_1 на AB есть

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$$

Проекция отрезка AP (абсцисса точки P) может быть найдена, если в уравнении циссоиды положить $y = x \operatorname{tg} \alpha$ и определить затем x.

Мы найдем, что

$$x = \sin^2\alpha,$$

чем и доказывается теорема.

4. Решение Аполлония (около 200 г. до н. э.).

Пусть AB и AC будут две смежные стороны прямоугольника $ABCD$ и E—центр его.

Если на продолжениях сторон AB и AC определить две точки X и Y так, чтобы они равноотстояли от E и чтобы прямая, их соединяющая, проходила через D, то будут иметь место соотношения:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{CX}}{\overline{AB}}.$$

Для краткости мы не станем вдаваться в доказательство этих двух равенств* и заметим лишь, что X и Y должны лежать соответственно на продолжениях сторон AB и AC в сторону точек B и C.

---

* F. Enriques, там же, стр. 435—437.

5. Решение с помощью двух прямых углов (Платон, около 400 г. до н. э.).

Пусть будут даны две взаимно перпендикулярные прямые f и g; пусть A будет произвольная точка на f и $ABCD$ — прямоугольная ломаная линия, выбранная так, что A и C лежат на f, а B и D — на g (черт. 152). Тогда

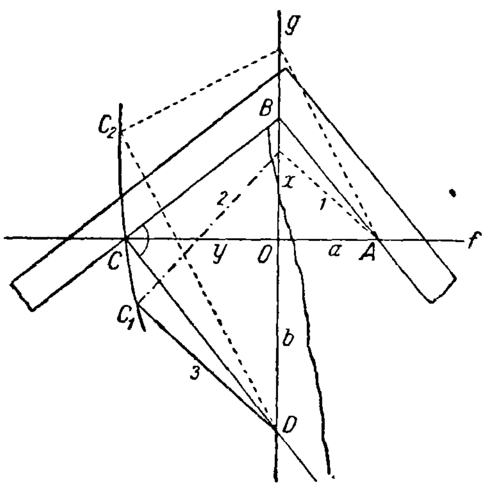
$$a : x = x : y = y : b,$$

т. е. x и y будут двумя средними пропорциональными между a и b.

а) Если a и b даны, то, согласно вышесказанному, x и y можно определить, построив прямоугольную ломаную линию $ABCD$. Две вершины ее A, D даны, а две другие B, C должны быть построены.

Этого можно достигнуть приближенными методами, построив кривую ошибок для точки B или C.

С этой целью проводят из A произвольную прямую 1, в точке ее пересечения с g восставляют к ней перпендикуляр 2 и опускают из D перпендикуляр на 2. Его точка пересечения C_1 с прямой 2 есть точка кривой ошибок. Аналогично определяют и вторую точку C_2.



Черт. 152.

Всегда можно точки C_1 и C_2 определить так, чтобы они лежали вблизи прямой f. Тогда кривую ошибок на этом коротком расстоянии можно рассматривать как почти прямую.

b) Если имеются в распоряжении два подвижных прямых угла, то задача может быть строго разрешена.

Нужно лишь оба прямых угла расположить в плоскости чертежа так, чтобы они соприкасались вдоль одного катета (черт. 152) и чтобы второй катет одного угла проходил через A, а второй катет другого угла — через D. Далее, вершина первого угла должна лежать на g, а второго — на f. [118]

Правильного расположения углов достигают после короткого передвижения, в результате чего получается строгое решение предложенной задачи (§ 22).

Если, в частности,

$$a = 1,$$

то

$$x = \sqrt[3]{b}, \quad y = \sqrt[3]{b^2}.$$

Таким образом, если

$$a = 1, \quad b = 2,$$

то

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

6. Приближенный метод Буонафальче (Buonafalce).*

Пусть ABC будет прямоугольный равнобедренный треугольник с катетами AB и AC. Делят гипотенузу на шесть равных частей и строят на катете AC (от C к A) точку D так, что

$$\overline{CD}=\frac{1}{6}\overline{BC}.$$

Тогда $\overline{BD}$ приблизительно равняется $\overline{AB}\sqrt[3]{2}$.

Доказательство. Пусть $\overline{AB}$ будет равно 1. Тогда

$$\overline{BC}=\sqrt{2}$$

и

$$\overline{AD}=1-\frac{\sqrt{2}}{6},$$

поэтому

$$\overline{BD}=\sqrt{1+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{37-6\sqrt{2}}}{18}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{37-6\sqrt{2}}=1{,}25863,$$

между тем как

$$\sqrt[3]{2}=1{,}2599.$$

Таким образом $\overline{BD}$ есть приближенное значение $\sqrt[3]{2}$; ошибка не превосходит $\frac{2}{1000}$.

7. При практическом черчении нередко требуется строить $\sqrt[3]{2}$. Методы двух последних параграфов могут быть тогда непосредственно применены с пользою.

§ 46. Трисекция угла.

1. Уравнение, к которому приводит трисекция угла α.

Для нашей цели мы развернем выражение

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3$$

сначала по теореме Муавра, затем по строке бинома и получим:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{3}+i\sin\frac{\alpha}{3}\right)^3=\cos\alpha+i\sin\alpha=$$

$$=\left(\cos^3\frac{\alpha}{2}-3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3}\right)+i\left(3\cos^2\frac{\alpha}{3}\sin\frac{\alpha}{3}-\sin^3\frac{\alpha}{3}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\cos\alpha=\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}\sin^2\frac{\alpha}{3}=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}. \qquad (1)$$

---

* Enriques, там же, стр. 439.

Пусть α будет данным углом, а произвольный отрезок — единицей длины. Тогда можно рассматривать $\cos\alpha$ как данный, а $\cos\frac{\alpha}{3}$ как искомый отрезок. Если положить

$$2\cos\alpha = a,$$

$$2\cos\frac{\alpha}{3} = x,$$

то из равенств (1) получится уравнение:

$$x^3 - 3x - a = 0. \qquad (2)$$

Когда это уравнение для некоторого данного a разрешимо в квадратных радикалах, то трисекция соответствующего угла выполнима при помощи циркуля и линейки, и наоборот: если для данного угла выполнима трисекция, то соответствующее уравнение (2) должно быть разрешимо в квадратных радикалах.

Рассмотрим ближе этот вопрос.

А) Углы, трисекция которых выполнима с помощью циркуля и линейки.

а) Такими углами будут, например, угол в 90° и в $45 \left(=\frac{90^\circ}{2}\right)$. Для этих углов величина a в уравнении (2) соответственно равна нулю и $\sqrt{2}$.

Само уравнение соответственно принимает вид

$$x^3 - 3x = 0$$

и

$$x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0.$$

Первое уравнение имеет корни $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, а корнями второго будут $\sqrt{2+\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2-\sqrt{3}}$, что вполне согласуется с делением углов 90° и 45° на три части.

b) Можно легко указать еще бесчисленное множество углов, для которых трисекция выполнима с помощью циркуля и линейки.

Именно, если разделить пополам угол в 45°, то получится угол, трисекция которого возможна; это же имеет место и для угла $\frac{45^\circ}{4}$ и т. д. Вообще возможна трисекция каждого угла вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n — целое положительное число.

Можно найти еще другие углы, трисекция которых производится при помощи циркуля и линейки.

Пусть s будет отрезок, который при помощи циркуля и линейки получается из единицы посредством некоторого, впрочем, совершенно произвольного построения. Если положить

$$2\cos\alpha = a = s^3 + 3s,$$

то можно построить $\cos\alpha$, а вместе с тем и угол α.

Соответствующее уравнение:

$$x^3 - 3x - a = 0$$

имеет корень s. Поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{3}=\frac{s}{2},$$

т. е. трисекция этого угла с помощью циркуля и линейки возможна.

B) Углы, трисекция которых невыполнима при помощи циркуля и линейки.

Таких углов можно указать бесчисленное множество.

Пусть, например, a будет равно 1, так что

$$\cos\alpha=\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \alpha=60^\circ.$$

Соответствующее уравнение

$$x^3-3x-1=0$$

не имеет рациональных корней, ибо таковыми могли бы быть только $+1$ и -1 (§ 36). Поэтому уравнение неразрешимо в квадратных радикалах (§ 36).

Таким образом угол в 60° не может быть разделен на три части с помощью циркуля и линейки; угол в 20° (а следовательно, и угол в 40°) не может быть построен с помощью этих средств решения.

Это совпадает с одним из ранее (§ 42) полученных результатов: центральный угол, отвечающий стороне правильного девятиугольника, содержит именно 40°, и потому этот угол в такой же мере не может быть построен, как и сам девятиугольник.

Можно указать еще бесконечное множество значений a, для которых соответствующее уравнение неразрешимо в квадратных радикалах. Существует поэтому бесконечное множество углов, трисекция которых не может быть выполнена при помощи циркуля и линейки.

2. Трисекция угла с помощью конических сечений.

Трисекцию угла можно произвести, вычертив коническое сечение и найдя точку его пересечения с окружностью.

Мы укажем два метода такого рода.

а) Метод Шаля (Chasles).

Пусть требуется разделить угол AOB (черт. 153) на три равные части.

α) Описывают вокруг O произвольным радиусом окружность K и в A проводят к ней касательную t. Затем при O строят на OB произвольный угол ω (черт. 153) и при A на t — тот же угол ω, но в противоположном направлении.

Получаемая таким путем точка пересечения P (черт. 153) при изменении ω описывает некоторую кривую h — гиперболу Шаля.

Если X есть одна из точек пересечения гиперболы h с окружностью K, то

$$\sphericalangle BOX=\frac{1}{3}\sphericalangle BOA.$$

Именно, если P_1 и P_2 суть точки окружности K, отвечающие точке P, то всегда (черт. 153)

$$\sphericalangle AOP_2=2\sphericalangle BOP_1.$$

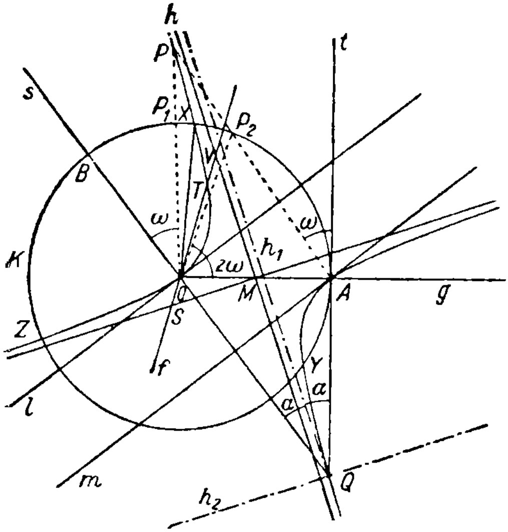
Если теперь точки P и P_2 совпадают в одной точке X, то

$$\measuredangle AOX = 2 \measuredangle BOX.$$

β) Изучим ближе кривую h.

Она получается из двух пучков O и A. Каждый луч, исходящий из A, определяет некоторый угол ω, и ему соответствует поэтому совершенно определенный луч пучка O, и наоборот.

В частности, лучу s пучка O ($\omega = 0$) отвечает луч t пучка A; лучу g пучка A ($\omega = 90°$) отвечает тот луч l пучка O, который перпендикулярен к s. Если же отнести g к пучку O, то ему отвечает луч m пучка A, причем луч m должен быть параллелен лучу l.



Черт. 153.

Биссектрисы угла Q (черт. 153) обозначим через h_1 и h_2; положим, что h_1 составляет с s (и с t) угол α.

Если построить теперь такой луч пучка O, который с s образует угол α, то соответственный луч пучка A будет параллелен первому лучу, так что точка их пересечения бесконечно удалена; это же имеет место, если рассматриваемый луч пучка O параллелен биссектрисе h_2.

Оба пучка лучей с центрами в точках O и A конгруэнтны, следовательно, проективны, но имеют противоположное направление углов. Оба пучка поэтому определяют равностороннюю гиперболу,[119] которая проходит через OAQ, в O имеет касательную l и в A имеет касательную m.

Так как касательная l параллельна m, то середина M отрезка OA есть центр гиперболы.

Асимптоты гиперболы параллельны прямым h_1 и h_2.

γ) Для практического выполнения построения следует прежде всего построить точку M и обе асимптоты. Для определения точек X, Y, Z выгодно воспользоваться следующим свойством гиперболы: для точек пересечения прямой f (черт. 153) с гиперболой и асимптотами имеет место соотношение

$$\overline{TV} = \overline{OS}.$$

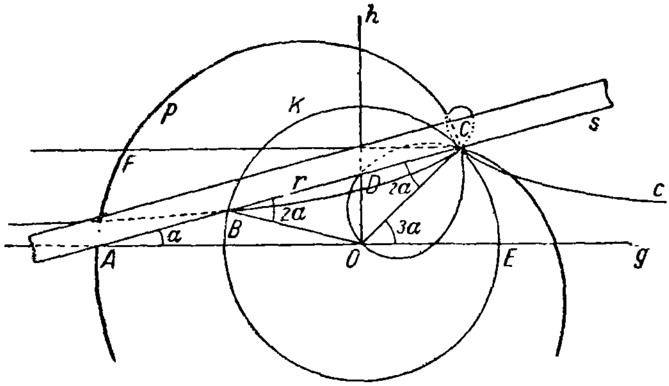
Далее, нет необходимости строить всю гиперболу; достаточно начертить лишь часть ее вблизи предполагаемых точек пересечения с окружностью K. Это быстро и точно достигается с помощью линейки, разделенной на части (масштаба).

Не считая точки A, гипербола пересекает окружность еще в трех точках X, Y, Z; они образуют вершины равностороннего треугольника, в чем легко убедиться. Поэтому и

$$3 \measuredangle BOY = 3 \measuredangle BOX + 360^\circ = \measuredangle BOA + 360^\circ.$$

δ) Углу AOB отвечают, впрочем, две гиперболы Шаля. Одну из них мы нашли, проводя касательную к окружности в точке A. Если же провести касательную к окружности в точке B и поступать затем по предыдущему, то два пучка лучей O и B определяют вторую равностороннюю гиперболу.

b) Мы упомянем еще об одном методе трисекции угла с помощью конического сечения и окружности,* не входя, однако, в его детальное рассмотрение. Нам для этого нужна известная легко доказуемая теорема.



Черт. 154.

„Пусть l будет данной прямой и A—данной точкой, не лежащей на l.

Геометрическое место всех точек, для которых расстояние от A вдвое больше расстояния от l, есть гипербола, имеющая точку A своим фокусом, прямую l—директрисой. Второй фокус, центр и асимптоты легко могут быть найдены."

Пусть AOB будет угол, который требуется разделить.

Представим себе, что те две прямые, которые проходят через O и делят угол на три равные части, уже найдены.

Опишем вокруг O окружность и возьмем точки A, C, D, B ее пересечения с этими исходящими из O четырьмя прямыми. Пусть теперь l будет биссектрисой угла AOB.

Из получающейся фигуры явствует, что искомая точка C отстоит от A вдвое дальше, чем от l. Вследствие этого точка C лежит на гиперболе и есть точка пересечения этой гиперболы с окружностью.

3. Трисекция угла с помощью бумажной полоски.

Пусть (черт. 154)

$$\overline{AB} = \overline{BO} = \overline{OC} = BD = r$$

* F. Enriques, там же, стр. 451—453.

и

$$\measuredangle BAO = \alpha.$$

Тогда

$$\measuredangle OBC = 2\alpha, \ \measuredangle COE = 3\alpha$$

(при этом

$$\measuredangle ODB = 90^\circ - \alpha,$$

т. е. отрезок OD перпендикулярен к прямой AO).

Из этого замечания вытекает простой метод трисекции угла COE — метод, который проще всего может быть осуществлен с помощью бумажной полоски. [117]

Пусть будет дан угол COE (черт. 154). Опишем вокруг O произвольным радиусом r окружность K, которая пересечет стороны угла в точках C и E.

Нанесем теперь на край бумажной полоски отрезок $\overline{AB} = r$ и поместим бумажную полоску в плоскости чертежа так, чтобы край ее проходил через C, точка A лежала на g и точка B на K.

Тогда уже

$$\measuredangle CAE = \frac{1}{3} \measuredangle COE.$$

Правильное положение бумажной полоски удается найти с полной строгостью после некоторого перемещения бумажки.

Трисекция угла указанным путем выполняется строго (§ 22).

Метод же не только практически полезен, но представляет и теоретический интерес, так как из него можно вывести целый ряд методов для трисекции угла.

Мы их приводим ниже.

4. Трисекция угла с помощью никомедовой конхоиды и паскалевой улитки.

a) Для того чтобы придать бумажной полоске s (черт. 154) правильное положение, можно поступить следующим образом.

Край ее прикладывают к C, точку A помещают на прямой g и передвигают бумажную полоску до тех пор, пока B не упадет на окружность K. При этом передвижении точка B опишет конхоиду c, для которой C будет полюсом, g — основанием и r — интервалом (§ 45).

Точка пересечения c с K и будет искомой точкой B. [120] Отсюда ясно, как можно воспользоваться конхоидой для трисекции угла.

На черт. 154 чертят еще прямую FC, параллельную g.

Пусть теперь дан будет произвольный угол $FCO = 3\alpha$.

Откладывают на стороне CO произвольный отрезок r, получают таким образом точку O и проводят через нее прямую g параллельно FC. Затем описывают окружность K вокруг точки O как центра радиусом r и строят конхоиду, имеющую точку C своим полюсом, прямую g — основанием, отрезок r — интервалом. Точка B пересечения этой конхоиды с окружностью K и определяет искомую третью часть угла 3α.

Легко видеть, что для каждого данного угла нужно чертить конхоиду, в силу чего этот метод, конечно, имеет только исторический интерес.

b) Вообразим теперь бумажную полоску расположенной в плоскости чертежа так, что край ее проходит через C и точка B лежит на окружности K; это можно осуществить бесконечным множеством способов. Точка A описывает при этом некоторую кривую p, так называемую паскалеву улитку (черт. 154).

Из чертежа ясно, что, наоборот, с помощью паскалевой улитки можно произвольный угол разделить на три части.

Пусть будет дана начерченная паскалева улитка p, сверх того точка O на ней.

Если требуется разделить угол на три равные части, то проводят прямую FC (черт. 154) так, чтобы угол FCO равнялся данному углу. Если теперь провести через O прямую g параллельно CF, то g пересечет паскалеву улитку в некоторой точке A, причем, как видно из чертежа,

$$\measuredangle FCA = \frac{1}{3} \measuredangle FCO.$$

Итак, с помощью раз навсегда начерченной паскалевой улитки можно делить на три равные части произвольный угол. Это достигается тем, что паскалева улитка, например, вырезается из дерева или вычерчивается на прозрачном материале.

5. Инструменты для деления угла на три равные части.

Для выполнения этой задачи были изобретены многие инструменты. Один из них есть тот, которым Никомед пользовался для черчения своей конхоиды (§ 45). Другим применимым инструментом был бы тот, который вычерчивал бы паскалеву улитку, что легко достигается.

Укажем вкратце еще на некоторые инструменты такого рода.

a) Если на черт. 154 поместить точку D так, что $\overline{BD} = r$, то, как мы знаем из п. 3, точка D будет лежать на прямой h, перпендикулярной к g в точке O.

На этом замечании основаны два метода, дающие возможность произвести трисекцию угла с помощью бумажной полоски.

α) Можно, во-первых, нанести на бумажную полоску отрезок

$$\overline{BD} = r$$

и поместить эту полоску в плоскости чертежа так, чтобы край ее проходил через точку C и чтобы точка B полоски лежала на окружности K, а точка D — на прямой h.

β) Можно также отложить на бумажной полоске отрезок

$$\overline{AD} = 2r$$

и расположить полоску в плоскости чертежа так, чтобы край ее проходил через точку C, точка A лежала на прямой g, а точка D — на прямой h.

В обоих случаях оказывается найденной третья часть угла COE.

На последнем методе основывается устройство инструмента для трисекции угла, который был указан Амадори (Amadori).*

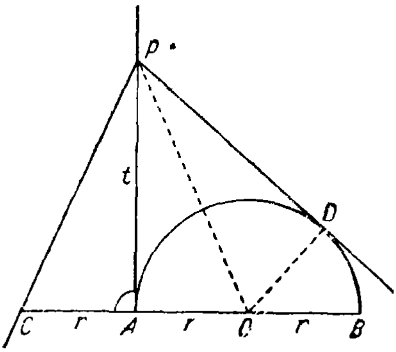
* Enriques, там же, стр. 457—459.

Инструмент сделан из металла, состоит из окружности K, прямых g, h и металлической полоски, на которую нанесены точки A и D на расстоянии $2r$ одна от другой; точка A может двигаться только вдоль прямой g, а точка D — вдоль прямой h.

Способ пользования инструментом непосредственно вытекает из черт. 154.

Мы не станем подробнее его рассматривать, так как инструменты для трисекции угла имеют только теоретический интерес.

b) Фельдблюм* предложил для трисекции угла инструмент, который получается из указанного в § 27 инструмента для деления углов пополам.



Черт. 155.

Имеем (черт. 120):

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA},$$

далее,

$$\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GB}.$$

Все входящие в состав фигуры линии представим себе сделанными из дерева или металла и подвижными во всех указанных точках.

Тогда BD постоянно будет биссектрисой угла ABC, а CB — биссектрисой угла DBG, поэтому

$$\measuredangle ABD = \frac{1}{3} \measuredangle BDG.$$

Инструмент может быть применен для трисекции произвольного данного угла. [121]

Присоединяя новые ромбы, можно построить инструмент, который может быть применен для деления любого угла на 4, 5, ..., n равных частей.

c) Пусть ADB будет полуокружностью, t — касательной к ней в точке A и

$$\overline{CA} = \overline{AO} = \overline{OB} = r.$$

Если теперь взять на t произвольную точку P (черт. 155), соединить ее с точкой C и провести из нее касательную PD к полуокружности, то найдем, что

$$\measuredangle CPA = \measuredangle OPA = \measuredangle OPD = \frac{1}{3} \measuredangle CPD.$$

В инструменте, устройство которого основано на этой теореме, полуокружность, касательная t и отрезок CA сделаны из дерева и неподвижно прикреплены друг к другу.

Если требуется теперь разделить на три части произвольный, но не слишком большой угол CPD, то инструмент помещают в плоскости чертежа так, чтобы касательная t проходила через P, точка C лежала на одной из сторон угла, а другая сторона касалась полуокружности в точке D.

Тогда угол CPA будет искомой третьей частью.

---

* Feldblum, Inaugural-Dissertation, Геттинген 1899.

§ 47. Графическое решение уравнений третьей и четвертой степени.

Геометрическая задача третьей или четвертой степени приводит к уравнению третьей или четвертой степени. Геометрическое решение задачи будет поэтому и графическим решением некоторого уравнения третьей или четвертой степени.

Мы займемся в этом параграфе именно графическим решением уравнений третьей и четвертой степени.

1. Приведение биквадратного [122] уравнения к кубическому.

Решение уравнения четвертой степени может быть, как известно, приведено к решению уравнения третьей степени.

Пусть требуется решить уравнение:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

Положим прежде всего:

$$x=y-\frac{a}{4}$$

и преобразуем уравнение (1) в уравнение

$$y^4+Ay^2+By+C=0. \tag{2}$$

Теперь положим

$$2y=u+v+w,$$

где u, v, w суть величины, которые еще должны быть определены. Можно их подчинить двум условиям:

$$u^2+v^2+w^2=-2A,$$
$$uvw=-B$$

и найти затем u^2, v^2, w^2 как корни уравнения

$$z^3+2Az^2+(A^2-4C)z-B^2=0. \text{[123]} \tag{3}$$

Если z_1, z_2, z_3 суть корни этого уравнения, которое называется **резольвентой** биквадратного уравнения (1), то для корней уравнения (2) выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}
2y_1 &= \sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3},\\
2y_2 &= \sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},\\
2y_3 &= -\sqrt{z_1}+\sqrt{z_2}-\sqrt{z_3},\\
2y_4 &= -\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_3}.
\end{aligned}$$

Таким образом корни уравнения (1) могут быть получены из корней резольвенты с помощью рациональных операций и извлечения квадратного корня.

Поэтому общее уравнение (1) разрешимо или неразрешимо в квадратных радикалах в зависимости от того, разрешима ли или неразрешима в квадратных радикалах его резольвента (3).

2. Решение с помощью конических сечений.

Мы дадим здесь лишь *важнейшие методы для графического решения уравнений третьей и четвертой степени.*

К этой цели можно итти двумя различными путями: можно, во-первых, искать конические сечения, разрешающие данные уравнения; во-вторых, можно, взяв два конических сечения, искать разрешаемые с их помощью уравнения.

Разъясним это на двух примерах.

Первый пример. Пусть будет дано уравнение

$$x^3+ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

Оно разрешается с помощью конических сечений

$$x^2=y \tag{2}$$

и

$$xy+ay+bx+c=0, \tag{3}$$

ибо исключение y из уравнений (2), (3) приводит к уравнению (1).

Уравнение (2) представляет в прямоугольных координатах параболу, имеющую параметром 1 и не зависящую от коэфициентов разрешаемого уравнения. Она может быть начерчена раз навсегда.

Уравнение (3) представляет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой параллельны осям координат; центр гиперболы имеет координаты $-a$, $-b$.

Для решения уравнений третьей степени можно на основании сказанного поступить следующим образом.

Чертят параболу с параметром 1, всего удобнее — на бумаге с миллиметровой сеткой, затем асимптоты гиперболы и сверх того еще одну точку гиперболы, например, точку ее пересечения с осью x-ов или с осью y-ов. После этого можно уже весьма точно найти точку пересечения гиперболы с параболой, не чертя всей гиперболы. (Ср. § 46, стр. 176.)

Второй пример. Мы теперь возьмем два конических сечения — окружность K:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2 \tag{4}$$

и параболу P:

$$y^2+x=0. \tag{5}$$

Исключая x из обоих уравнений, получим:

$$y^4+(1+2m)y^2-2ny+(m^2+n^2-r^2)=0. \tag{6}$$

Таким образом, с помощью этих двух конических сечений можно решать уравнения вида

$$z^4+az^2+bz+c=0. \tag{7}$$

Для этой цели нужно лишь положить:

$$1+2m=a,$$
$$-2n=b,$$
$$m^2+n^2-r^2=c.$$

Парабола (5) не зависит от коэфициентов уравнения, подлежащего решению, и может быть начерчена на бумаге с миллиметровой сеткой раз навсегда. Координатами центра окружности K служат числа:

$$m=\frac{a-1}{2},\quad n=-\frac{b}{2},$$

радиус же удовлетворяет соотношению

$$r^2 = m^2 + n^2 - c.$$

Таким образом центр и радиус могут быть легко найдены, именно, с помощью миллиметровых делений, нанесенных на бумаге.

Полезно также не описывать самой окружности K, но пользоваться для определения точек пересечения P и K размерным циркулем.

Непосредственно отсчитываемые величины ординат точек пересечения будут корнями уравнения (7).

Следует указать, что этот метод не только практически применим, но имеет также и теоретический интерес.

Определение корней биквадратного уравнения (7) (в форме (7) может быть представлено с помощью рациональных операций каждое полное биквадратное уравнение) требует, кроме пользования постоянной параболой, только употребления циркуля и линейки.

Итак, для решения биквадратных уравнений мы нуждаемся, кроме окружностей и прямых, только в постоянном коническом сечении.

Уравнение (7) может принимать и частные виды.

Если, например,

$$c = 0,$$

то уравнение (7) переходит в уравнение:

$$z^3 + az + b = 0.$$

Решение этого уравнения также может быть произведено по вышеупомянутому методу. При этом можно обойтись и без вычисления r, ибо окружность K должна проходить через начало координат.

Если, далее,

$$a = 0,$$

то уравнение (7) получает вид:

$$z^3 + b = 0.$$

Корни этого уравнения также могут быть найдены с помощью параболы и размерного циркуля. Аналогично можно разрешать квадратные уравнения, определять квадратные корни и т. д.

§ 3. Графическое решение уравнений третьей и четвертой степени с помощью произвольно начерченного конического сечения.

Теперь мы покажем, как с помощью произвольного данного конического сечения можно находить корни каждого уравнения третьей и четвертой степени, следуя при этом методам, указанным Шалем.*

С этой целью мы должны предварительно сделать некоторые замечания, связанные с новой Геометрией и графическим исчислением.

а) Пусть K будет начерченное коническое сечение. Возьмем в плоскости кривой K прямую линию g и на ней так разместим обыкновенный ряд чисел, чтобы каждой точке прямой g отвечало положительное или отрицательное число, измеряющее расстояние этой точки от некоторой произвольно выбранной на g начальной точки.

---

* Шаль (Chasles), Comptes rendues, 1880.

Возьмем теперь на K произвольную точку O и вообразим, что к каждой точке P кривой K отнесено такое число, которое отвечает точке пересечения прямой g с лучом PO.

Каждой точке P кривой K отвечает при этом одно совершенно определенное число, и наоборот — каждое число отвечает одной лишь точке кривой K. В частности, точке O на K отвечает число, относящееся к точке пересечения прямой g и касательной в точке O к кривой K. Число бесконечность отвечает точке пересечения K с прямой, проведенной через O параллельно g.

Можно также сказать, что при этом ряд чисел на g проектируется из O на коническое сечение.

В последующем мы будем рассматривать два таких ряда точек на K. Точки и отвечающие им числа первого ряда всегда будут обозначаться через ξ, а точки и числа второго ряда — через η.

Совпадающим точкам обоих рядов отвечают одни и те же числа.

b) Пусть теперь требуется с помощью этого постоянного конического сечения K решить следующее уравнение:

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{1}$$

Мы рассмотрим с этой целью соответствие между точками обоих рядов на K, устанавливаемое равенством:

$$(\eta^2+a\eta)\xi^2+(b\eta^2+c\eta+d)=0. \tag{2}$$

Каждому числу ξ, как вытекает из равенства (2), отвечают два числа η, и наоборот — каждому числу η отвечают два числа ξ.

Следовательно, каждой точке ξ первого ряда на K отвечают две точки η второго ряда и каждой точке η второго ряда на K отвечают две точки ξ первого ряда.

Может также случиться, что некоторой точке первого ряда в силу соотношения (2) отвечает та точка второго ряда, которая с нею совпадает и, следовательно, определяет то же число, что и она.

Эти двойные точки могут быть найдены, если положить в уравнении (2):

$$\xi=\eta=x.$$

При этом из уравнения (2) получается уравнение (1), и становится ясным, что всего существует четыре таких двойных точки и что отвечающие им числа суть корни уравнения (1).

Таким образом решение уравнения (1) сводится к построению этих двойных точек.

С этой целью мы должны, однако, ближе изучить соответствие, устанавливаемое равенством (2) между точками двух рядов на K.

c) Пусть η' будет произвольной точкой второго ряда (или соответствующее ей число) на K, а ξ' и ξ'' — отвечающие ей точки (числа) первого ряда.

Тогда из уравнения (2) вытекает, что

$$\xi''=-\xi'.$$

Точке ξ' отвечает в силу уравнения (2) не только точка η', но еще и вторая точка η''. Равным образом, точке ξ'', кроме η', отвечает еще другая точка второго ряда, и это должна быть именно точка η'', так как уравнение (2) содержит только ξ^2 и, следовательно, имеет один и тот же вид для величин ξ' и ξ'', которые отличаются лишь знаками

Итак две точки ξ' и ξ'' первого ряда, которые отвечают некоторой точке η' второго ряда, отвечают также и одной и той же второй точке η''.

Равным образом, очевидно, что две точки η' и η'', которые отвечают одной точке ξ', должны отвечать также и одной и той же точке ξ''.

Таким образом равенством (2) не только определяется соответствие между рядом точек ξ' и рядом точек η, но также устанавливается соответствие между точками ряда ξ, равно как и соответствие между точками ряда η.

А именно, две точки ξ' и ξ'' ряда ξ отвечают друг другу, если они отвечают одной и той же точке η второго ряда.

Но так как между обеими этими точками ξ' и ξ'' должно существовать соотношение

$$\xi'' = -\xi',$$

то им определяется инволюция, т. е. все прямые, соединяющие точки ξ' с соответственными точками ξ'', проходят через одну и ту же постоянную точку S. [124]

Две точки η' и η'' ряда η отвечают одна другой, если они отвечают одной и той же точке ξ первого ряда. Из уравнения (2) очевидно, что и соответствие между η' и η'' определяет инволюцию и что поэтому прямые, соединяющие точки η' с соответственными точками η'', проходят через постоянную точку S'.

d) Таким образом уравнением (2) определяются два пучка S и S', расположенные в плоскости кривой K.

Каждый луч s пучка S пересекает K в двух точках ξ' и ξ'', которые отвечают одной и той же точке η' ряда η. Но они (по предыдущему) отвечают также и одной и той же точке η'' второго ряда; η' и η' лежат на луче s' пучка S'.

Легко видеть, что к каждому лучу пучка S таким образом отнесен один и только один луч пучка S', и наоборот. Лучи обоих пучков сопряжены одно-однозначным соответствием, которое, как явствует из уравнения (2), определяет проективную зависимость между ними.

Поэтому пучки лучей S и S' определяют коническое сечение K_1, пересекающее K в четырех точках, которые будут искомыми двойными точками дву-двузначного соответствия между точками двух рядов ξ и η на K.

e) Для определения K_1 поступают следующим образом: в уравнение (2) вместо η' подставляют какое-нибудь определенное число, например, 0. Таким путем получаются два значения ξ', ξ''. Прямая s, соединяющая точки ξ' и ξ'', есть луч пучка S. Теперь подставляют ξ' в уравнение и определяют из него η''.

Если соединить прямой точки η' и η'', то получится соответствующий луч s' пучка S'. Таким же способом строят еще два луча пучка S и отвечающие им лучи пучка S'.

f) Этим показано, как можно разрешить общее уравнение четвертой степени с помощью единственного данного начерченного конического сечения.

Точки пересечения K_1 с K можно определить, построив кривую K_1 по точкам или следуя пути, который будет указан в следующем пункте.

§ 4. Результаты работ Кортума и Смита относительно геометрических задач на построение третьей и четвертой степени.

Кортум и Смит в двух сочинениях, увенчанных Берлинской академией в 1866 г. премией Штейнера, показали, что каждая геометрическая задача третьей и четвертой степени может быть строго решена путем проведения окружностей и прямых линий, коль скоро в плоскости дано начерченное отличное от окружности коническое сечение.

Для краткости мы не станем излагать этих работ и упомянем только о следующем.

Обе эти работы имеют высокий теоретический интерес в том отношении, что они представляют собой непосредственное продолжение исследований Штейнера. Именно, Штейнер (глава II) показал, что все построения второй степени могут быть выполнены путем проведения прямых линий, если дана для пользования окружность вместе с ее центром. Таким образом необходимые для решения квадратных задач средства высшего порядка Штейнер свел к минимуму.

Для решения задач третьей и четвертой степени, как мы знаем, недостаточно одних окружностей, ибо определение точек пересечения окружностей приводит к уравнениям лишь второй степени.

Для решения такого рода задач нужны конические сечения или высшие кривые, и снова возникает вопрос о сведении к минимуму числа неизбежно присоединяемых кривых.

Кортум и Смит и показали, что одного только начерченного конического сечения достаточно для решения всех задач третьей и четвертой степени.

В предыдущем пункте мы пришли к такой задаче.

Именно, было дано начерченное коническое сечение K, и второе коническое сечение K_1 было задано пятью его точками (или двумя проективными пучками лучей); искомыми были точки пересечения этих двух конических сечений. Для этой цели нет надобности строить кривую K_1 по точкам. По Кортуму и Смиту, точки пересечения можно получить, описывая окружности и проводя прямые, при условии пользования начерченным коническим сечением.

Впрочем, мы уже на стр. 183 видели, что все задачи третьей и четвертой степени могут быть решены циркулем и линейкой при помощи единственного конического сечения.

Парабола P на стр. 182 нисколько не зависела от разрешаемого уравнения четвертой степени: само решение уравнения там выполнялось путем присоединения к параболе P окружностей и прямых линий.

§ 48. Решение уравнений третьей степени с помощью двух прямых углов.

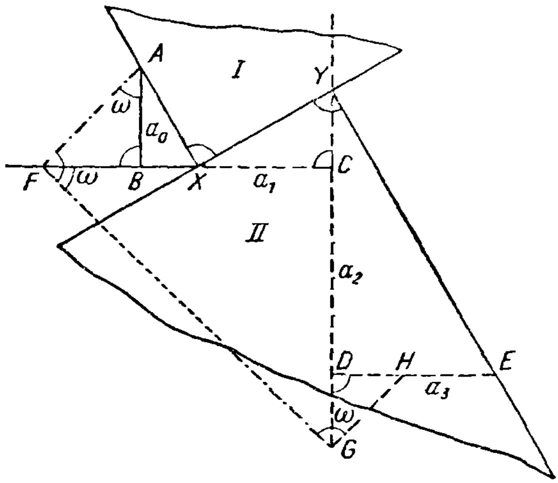
1. Пусть будет дано уравнение:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 суть рациональные числа.

Мы чертим прямоугольную ломаную линию $ABCDE$, стороны которой по порядку равны a_0, a_1, a_2, a_3. Первые две стороны a_0, a_1 должны быть взаимно перпендикулярны, в остальных же отношениях они могут быть расположены произвольно. Для следующих же сторон должно быть соблюдено следующее правило.

Две параллельные стороны ломаной линии одинаково или неодинаково направлены в зависимости от того, имеют ли соответствующие коэфициенты уравнения противоположные или одинаковые знаки.



Черт. 156.

На черт. 156 отрезки AB и CD одинаково направлены, следовательно, a_0 и a_2 имеют различные знаки. Равным образом, одинаково направлены отрезки BC и DE. Отсюда можно заключить, что a_1 и a_3 имеют различные знаки.

Ломаную линию $ABCDE$ называют ломаной, представляющей левую часть уравнения. *

В последующем, мы для определенности будем считать коэфициенты a_0 и a_1 положительными. Тогда a_2 и a_3, в соответствии с чертежом, должны быть отрицательными.

2. Строим при A произвольный угол ω (черт. 156) и чертим новую ломаную $AFGH$.

Тогда

$$\overline{FB} = a_0 \operatorname{tg} \omega = a_0x,$$

если

$$\operatorname{tg} \omega = x.$$

Далее,

$$\overline{FC} = a_0x + a_1,$$

$$\overline{CG} = (a_0x + a_1)\,x,$$

$$\overline{DG} = a_0x^2 + a_1x + a_2$$

* Cremona, „Graph. Calcul".

(a_2 есть отрицательное число). Наконец,

$$\overline{EH} = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3.$$

Если точка H совпадает с E, то

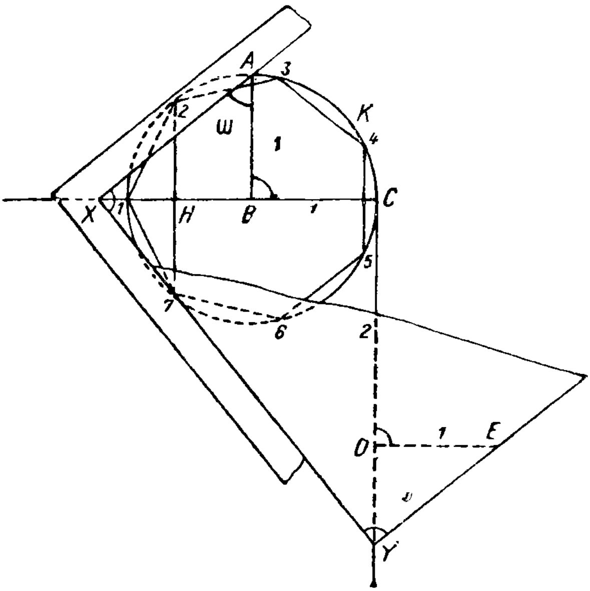
$$\overline{EH} = 0,$$

так что

$$x = \operatorname{tg} \omega$$

является корнем уравнения, подлежащего решению.

Из приведенных рассуждений ясно, как решить уравнение (1): нужно лишь определить угол ω так, чтобы ломаная линия $AFGH$ заканчивалась в E.



Черт. 157.

Такого рода **разрешающую** ломаную линию легко построить с помощью двух прямоугольных треугольников I и II (черт. 156), как это явствует из чертежа.

Вместо одного из прямоугольных треугольников в иных случаях употребляется прямой угол, как например, на черт. 157. [125]

3. Если с помощью двух прямоугольных треугольников найдена разрешающая ломаная, то необходимо еще исследовать, удовлетворяет ли уравнению $+\operatorname{tg}\omega$ или $-\operatorname{tg}\omega$, т. е. нужно установить, в каком направлении $\measuredangle\omega$ должен считаться положительным. На этот счет можно установить общее правило, но удобнее в каждом частном случае произвести небольшое исследование относительно того, должно ли найденное значение x брать с положительным или отрицательным знаком.

Если $a_0 = 1$, то корень x выражается отрезком XB.

Замечание. Этим показано, как с помощью двух прямых углов может быть решено каждое уравнение третьей степени, а вместе с тем и каждое уравнение четвертой степени.

Само решение ни в коем случае не будет лишь приближенным, но совершенно строгим (§ 22).

Отсюда замечают, что прямой угол есть наиболее могущественное из обычных средств построения; он могущественнее циркуля, ибо даже с помощью нескольких циркулей нельзя решать задач степени выше второй.

В черчении нередко приходится решать задачи третьей и четвертой степени. Для строгого их решения часто предлагается присоединить к обычным средствам решения еще высшее, например, параболу ($y^2 + x = 0$). Но из вышесказанного явствует, что в этом нет необходимости.

§ 49. Построение правильного семиугольника и девятиугольника с помощью двух прямых углов.

1. Построение правильного семиугольника.

Построение правильного семиугольника требует решения уравнения (§ 42,1):

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0. \qquad (1)$$

Чертят ломаную линию $ABCDE$ (черт. 157), представляющую уравнение (1) и, согласно вышесказанному, строят разрешающую ломаную $AXYE$. Тогда

$$\overline{XB} = y.$$

Затем отыскивают (§ 42,1) середину H отрезка XB и восставляют к нему в точке H перпендикуляр. Этот последний пересекает окружность K в вершинах 2 и 7 вписанного семиугольника (черт. 157).

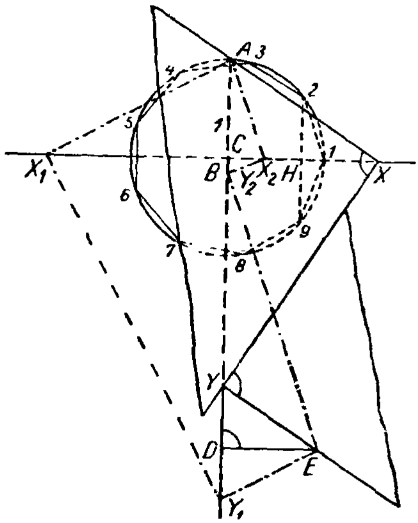
2. Построение правильного девятиугольника.

Построение правильного девятиугольника зависит от решения уравнения (§ 42,2):

$$y^3 - 3y + 1 = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение, как известно, имеет два положительных корня и один отрицательный, причем большим из положительных корней будет

$$y = 2\cos\frac{2\pi}{9} > 1.$$



Черт. 158.

Для решения уравнения (2) чертят (черт. 158) соответственную ломаную $ABCDE$ и разрешающую ломаную $AXYE$, причем

$$y = \overline{BX} > 1.$$

Исходя из середины H отрезка BX, находят, как и прежде, вершины 2 и 9 вписанного в окружность правильного девятиугольника (черт. 158).

§ 50. Визуальные задачи третьей и четвертой степени.

Таковы задачи, не содержащие никакого измерения, следовательно, не меняющие своего словесного выражения при проектировании на произвольную плоскость и приводящие к уравнениям третьей или четвертой степени, если решать их вычислением.

Новая Геометрия знает большое количество визуальных задач третьей и четвертой степени. *Основной задачей четвертой степени* является следующая.

Два конических сечения заданы каждое пятью определяющими его элементами. Определить точки встречи этих сечений.

Эта задача, как известно, может быть сведена к задаче третьей степени:

Дана общая точка двух конических сечений и сверх того еще по четыре точки каждого из них; определить остальные три общие точки конических сечений.

Последняя задача является *основной задачей третьей степени.*

Все визуальные задачи третьей и четвертой степени могут быть сведены к этим двум задачам.

Важную задачу третьей степени представляет собою определение двойных точек плоской коллинеации, заданной четырьмя парами соответственных точек; она может быть сведена к основной задаче.

Каждая задача третьей степени имеет, по меньшей мере, одно вещественное решение, самое же большее — три, соответственно тому, что каждое уравнение третьей степени с вещественными коэфициентами имеет всегда одно, самое же большое — три вещественных решения.

Результаты работ *Кортума* и *Смита* могут быть применены и к визуальным задачам третьей и четвертой степени. Мы, однако, не можем ближе входить в рассмотрение этих задач и вынуждены сослаться на учебники новой геометрии.

Глава IX.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КВАДРАТУРЫ КРУГА. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫПРЯМЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ. ПРАВИЛА ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ ТОЧНОСТИ ПОСТРОЕНИЙ.

§ 51. Исторические замечания относительно квадратуры круга.

1. Квадратура круга требует построения квадрата, равновеликого данному кругу.

Этот квадрат можно найти, если начертить прямоугольник, имеющий основанием половину окружности круга, а высотою — радиус его, и затем преобразовать этот прямоугольник в равновеликий квадрат.

Итак, вопрос сводится к тому лишь, чтобы построить полуокружность, т. е. к выпрямлению полуокружности. Если радиус окружности равен 1, то длина полуокружности равна π. Поэтому задача может быть также сведена к построению отрезка, длина которого в точности равна π.

Решение этой задачи представляет собою исстари знаменитую проблему. Уже в „Папирусе Ринда“ (2000 лет до н. э.) рассматривалась задача о преобразовании круга в равновеликий квадрат и для этой цели было дано следующее правило:

„За сторону квадрата следует взять $\frac{8}{9}$ диаметра.“

Так как

$$\frac{8}{9}d=\frac{16}{9}r \quad \text{и} \quad \left(\frac{16}{9}\right)^2=3{,}16,$$

то, как легко видеть, это правило не так уж неточно и, во всяком случае, удовлетворяет всем целям землемерия.

У греков квадратура круга вместе с вычислением π является часто рассматриваемой задачей. Для ее решения были несколько раз найдены кривые.

Архимед определяет число π с помощью многоугольников, вписанных в круг и описанных около него. Его метод был обработан Гюйгенсом (Huyghens). Около того же времени (1600) Рудольф ван Цейлен (van Ceulen) вычислил число π с 20 знаками; оно по сию пору носит даже его имя.

Спустя сто лет при построении диференциального и интегрального исчислений были даны многочисленные формулы и ряды для вычисления π.

Особенно замечательны — формула Валлиса (Wallis):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

и ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$$

Были даны также ряды, позволяющие легко вычислить π. В настоящее время π вычислено с 700 десятичными знаками.

Первые десять десятичных знаков π таковы:

$$\pi=3.1415926535\ldots$$

Ламберт (Lambert) показал, что π есть число иррациональное; Лежандр (Legendre) доказал, что и π^2 есть иррациональное число. *

Но лишь в позднейшее время впервые была выяснена природа числа π, и вместе с тем была вполне разрешена задача о квадратуре круга.

2. Различают алгебраические и трансцендентные числа. Число называется алгебраическим, если оно есть корень некоторого алгебраического уравнения с рациональными коэфициентами.

Если же число не может быть корнем такого уравнения, то его называют трансцендентным числом.

Лиувилль (Liouville) в 1844 г. впервые доказал существование трансцендентных чисел. Георг Кантор (Georg Cantor) в основной своей работе „Über die Eigenschaften des Inbegriffs algebraischer Zahlen“ (Crelle J. Bd. 77, 1873) обнаружил существование трансцендентных чисел значительно более простым путем.

Предположение, что π есть такого рода число, представлялось весьма вероятным.

Эрмит (Hermite) доказал (Compt. r. 1873), что e есть трансцендентное число. Линдеманн (Lindemann) в своей работе „Über die Zahl π“ (Math. Ann. 20, 1882) на основании работы Эрмита впервые доказал, что и π — трансцендентное число.

Рассуждения Линдеманна были значительно упрощены сначала Вайерштрассом (Weierstrass), затем Гильбертом, Гурвицем (Hurwitz), Горданом (Math. Ann. 43), так что в настоящее время доказательство может быть дано в совершенно элементарном виде. [126]

Этими работами задача о квадратуре круга вполне исчерпывается, т. е. строго доказывается, что ее конструктивное решение невозможно.

Этим не только доказано, что невозможно с помощью циркуля и линейки начертить прямолинейный отрезок, равный длине полуокружности данного круга, но также и то, что задача эта не может быть решена и с помощью эллиптического циркуля, конхоидального циркуля или, вообще, инструмента, чертящего алгебраические кривые.

Решение ее может быть получено только с помощью инструмента, чертящего трансцендентные кривые.

---

* F. Rudio, „Archimedes, Huyghens, Lambert, Legendre“, Vier Abhandlungen über die Kreismessung, Лейпциг 1892. Русский перевод этой книги: Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр, „О квадратуре круга“, ГТТИ, 1934.

Оказывается нетрудным изобрести аппарат, с помощью которого можно было бы чертить надлежащую трансцендентную кривую (например, $y = \arcsin x$) и вместе с тем построить π.

Аппаратом, который служит для этой и еще для иных целей, является особенно тщательно устроенный интеграф Абданк-Абакановича. Этот инструмент позволяет по данной (так называемой, диференциальной) кривой

$$y = f(x)$$

чертить интегральную кривую

$$v = \int f(x)\,dx.$$

§ 52. Приближенное выпрямление окружности.

Для практических целей важно иметь методы построения простым путем отрезка, приближенно равного окружности данного круга.

Такого рода методы и были даны в большом числе. Ниже будут указаны некоторые из них, наиболее важные; сначала же мы сделаем одно замечание.

1. О точности выполненного построения.

a) Ни один из употребленных для построения инструментов не совершенен.

При установке ножки циркуля в данной точке, при прикладывании линейки к данной точке, при описывании окружности, при черчении прямой линии в построение вносятся ошибки даже и в том случае, когда все это делается с величайшей тщательностью.

Следует заметить, что при описывании окружности получается меньшая погрешность, чем при проведении прямой линии. Дело в том, что употребляемая линейка никогда не бывает на всем протяжении точно ограничена прямой линией; затем, пишущий штифт при черчении прямой линии не сохраняет постоянного расстояния от линейки, во-первых, потому что он притупляется, во-вторых, ввиду незаметного вращения его вокруг оси во время черчения прямой линии.

b) Каждая точка построения определяется пересечением двух линий; но каждая из последних имеет конечную ширину, так что математическая точка лежит внутри некоторого параллелограмма, который может быть рассматриваем как ромб. Отсюда снова проистекают погрешности в построении при прикладывании к этой точке линейки или при помещении в нее ножки циркуля.

c) Можно принять, что при черчении отрезок в $\frac{1}{10}$ *мм* еще может быть различаем и измерен и что поэтому погрешность при помещении ножки циркуля в уже найденную построением точку (площадку) или при прикладывании линейки к такой площадке, а также ширина тонкой построенной линии (ширина штриха) и диаметр площадки не превосходят 0,1 *мм*; предполагается тщательное вычерчивание.

d) Для практического черчения чрезвычайно важно было бы исследовать, в какой зависимости находится окончательная погрешность в результате построения от частных погрешностей, допущенных при отдельных основных построениях, и как должно выполнять все построение, чтобы вероятная ошибка была возможно мала, а точность результата — возможно велика.

Такого рода исследования, которые на основании опыта должны быть произведены по методу наименьших квадратов, впервые были выполнены в частном случае у Хр. Винера.* Ф. Клейн** настойчиво указывает на важность теории ошибок для начертательной геометрии.

В связи с этим в позднейшее время были опубликованы работы, трактующие об этой теории ошибок. Таковы диссертации Ф. Гэйера,*** П. Бемера,**** К. Нитца.***** Последняя работа содержит подробную литературу всего вопроса.

2. Мы применим сделанные указания к **приближенным построениям для выпрямления окружности.**

Так как невозможно построить отрезок, длина которого в точности равнялась бы длине окружности, то каждое построение, производимое с этой целью, является приближенным, и полученный с его помощью результат даже при идеальном совершенстве чертежных инструментов будет отличаться от искомого результата на некоторый отрезок f_1, который может быть вычислен.

К этой теоретической ошибке f_1 при производстве самого построения присоединяется еще чертежная ошибка f_2. Полная ошибка f, таким образом, равна

$$f = f_1 + f_2.$$

Для того чтобы ошибка f была наименьшей, недостаточно сделать возможно малой только f_1, нужно также уменьшить вероятную величину f_2; f_2 вообще тем больше, чем больше число примененных чертежных операций.

Так, существуют приближенные построения, которые дают π с теоретической точностью до десятого десятичного знака, так что f_1 меньше единицы десятого десятичного порядка. Но так как эти построения чрезвычайно сложны, то величина f_2 может быть доведена лишь до единицы второго десятичного порядка. Такого рода построение поэтому не имеет никакой практической ценности.

Приближенное построение лишь тогда практически ценно, когда оно требует возможно малого числа чертежных операций; при этом достаточно, чтобы ошибка f_1 была меньше 0,1 *мм*.

а) Приближенное построение, по большей части достаточное для практических целей, вытекает из теоремы, что длина окружности приближенно равняется

* Хр. Винер (Chr. Wiener), Darstellende Geometrie, ч. 1, стр. 187—190.

** Ф. Клейн (F. Klein), Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, стр. 358 и далее.

*** Ф. Гэйер (F. Geuer), Die Genauigkeit geometrischer Zeichnungen, behandelt nach dem Gaußschen Ausgleichungsverfahren, Фрейбург 1902.

**** П. Бемер (P. Böhmer), Über geometrische Approximationen, Геттинген 1904.

***** К. Нитц (K. Nitz), Anwendungen der Theorie der Fehler in der Ebene auf Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Кенигсберг 1905.

$3\frac{1}{7}$ диаметра.

Так как

$$3\frac{1}{7} = 3{,}142806,$$

то достаточно прибавить еще

$$f_1 = -0{,}0012,$$

чтобы получить

$$\pi = 3{,}1416.$$

Если диаметр окружности имеет 10 *см*, то f_1 приблизительно равняется $\frac{1}{8}$ *мм*, так что для окружностей, радиусы коих меньше 5 *см*, это построение вполне достаточно.

b) Целесообразный метод для выпрямления дуги окружности состоит в откладывании небольших равных хорд вдоль по дуге и на прямой.

При этом снова сталкиваются с двумя ошибками — с теоретической f_1, которая слагается из разностей между дугами и хордами, и с чертежной ошибкой f_2, зависящей от неточности переноса и возрастающей вместе с числом операций.

Отнюдь не рекомендуется откладывать очень малые отрезки. Для окружности, которая имеет, например, радиус в 5 *см*, следует взять хорду приблизительно в 5 *мм*, т. е. такую хорду, которая во всей окружности уложилась бы от 20 до 25 раз.

c) Кроме этих приближенных построений, существуют еще некоторые особенно замечательные построения, которые непосредственно дают отрезок, приближенно равный всей окружности, ее половине или четверти.

Мы упомянем прежде всего построение Маскерони (§ 20). Оно позволяет с помощью одного только циркуля построить отрезок s, равный 1,5711996, т. е. отрезок, который приближенно воспроизводит четвертую часть окружности

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5707963.$$

Теоретическая ошибка f_1 достигает при этом $\frac{4}{10000}$, построение поэтому вполне достаточно для окружностей, радиусы которых меньше 50 *см*.

Так как оно до конца может быть просто выполнено с помощью одного только циркуля, то его следует отнести к числу лучших известных методов для выпрямления.

d) Шпехт (Specht) дает (Crelle J. Bd. 3) метод, приводящий к очень точному результату.

Пусть будет дана окружность K с центром O и радиусом r. Проведем диаметр OA (черт. 159), касательную в точке A и построим на этой касательной точки B и C так, чтобы выполнялись равенства

$$\overline{AB} = \frac{11}{5}r, \quad \overline{BC} = \frac{2}{5}r.$$

Затем определим на диаметре OA такую точку D, для которой

$$\overline{AD} = \overline{OB},$$

и проведем через D прямую, параллельную OC.

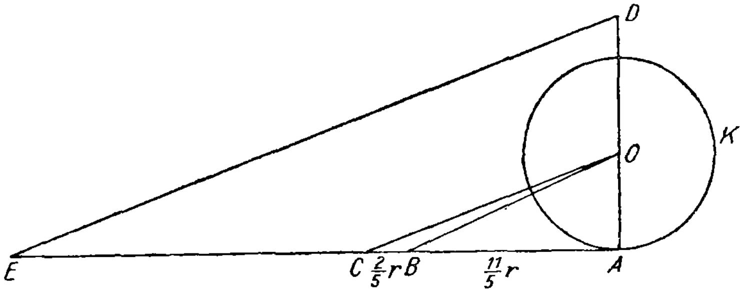
Отрезок AE приближенно равен окружности круга.

Именно,

$$\overline{OB} = \frac{r}{5}\sqrt{146}, \quad \overline{AC} = \frac{13}{5}r.$$

Поэтому

$$\overline{AE} = \frac{13\,r}{25}\sqrt{146} = r \cdot 6{,}283184,$$

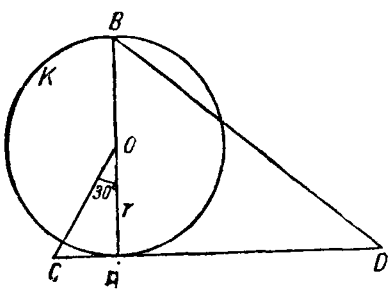


Черт. 159.

между тем как вычисленная длина окружности равна

$$u = r \cdot 6{,}283185.$$

Следовательно, теоретическая ошибка f_1 есть $\frac{r}{10^6}$. Этот метод теоретически доставляет, таким образом, очень большую точность; лишь при радиусе в 100 *м* величина f_1 достигает $\frac{1}{10}$ *мм*.



Черт. 160.

e) Укажем еще одно простое приближенное построение.

Пусть K будет окружность, подлежащая выпрямлению, и AB — один из ее диаметров (черт. 160).

Проведем касательную к окружности в точке A, определим точку C так, чтобы выполнялось равенство

$$\measuredangle COA = 30°,$$

затем построим на касательной такую точку D, для которой

$$\overline{CD} = 3r.$$

Тогда BD приближенно воспроизводит половину окружности круга.

Именно,

$$\overline{AC} = \frac{r}{3}\sqrt{3},$$

поэтому

$$\overline{AD} = 3r - \frac{r}{3}\sqrt{3}$$

и

$$\overline{BD} = r\sqrt{4 + \frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}} = \frac{r}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} = r.3{,}141533,$$

между тем как

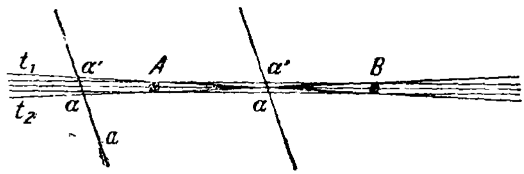
$$\frac{u}{2} = r \cdot 3{,}141593.$$

Таким образом теоретическая ошибка f_1 равна $\frac{6}{100000}$ r, так что достигает величины $\frac{1}{10}$ *мм* лишь для радиуса в 2 *м*.

§ 53. Правила для увеличения точности построений.

1. Положим, что две точки A и B, входящие в состав некоторого построения, должны быть соединены прямою g (черт. 161); точки A и B при этом (стр. 193, b) заданы пересечением каких-нибудь двух линий одинаковой конечной ширины.

Поэтому каждая из этих точек лежит в некоторой области, которую — в виду нашей цели — можно считать кругом.



Черт. 161.

При прикладывании линейки к обеим точкам ей можно придать не одно, но очень много положений; ее можно передвигать в некоторой области, бóльшая часть которой ограничена двумя касательными t_1 и t_2, которые могут быть рассматриваемы как полоски шириною в 0,1 *мм*.

Точка пересечения другой прямой a с начерченной таким образом прямой g будет расположена внутри отрезка $\alpha\alpha'$, если прямую a на мгновение считать бесконечно тонкой.

На этих соображениях основаны следующие два правила, которые должны быть принимаемы во внимание при точных построениях.*

a) Если прямая g на всем своем протяжении должна быть определена возможно более точно, то определяющие ее точки A и B следует брать возможно более отдаленными друг от друга.

b) Если точка S пересечения двух прямых g и a должна быть определена возможно более точно, то следует эти прямые определить при помощи точек, по возможности более близко лежащих к искомой точке S.

2. Пусть будут даны две начерченные прямые g_1 и g_2; их точка пересечения S расположена в ромбе, ширина которого равняется ширине начерченных линий.

* Винер (Wiener), „Darstellende Geometrie", Bd. I, стр. 190.

Если эти прямые пересекаются под прямым углом, то этот ромб переходит в квадрат; если же они пересекаются под очень острым углом, то этот ромб становится очень растянутым.

Если эту точку пересечения нужно соединить прямой с другой точкой P, то оказывается, что эта прямая лишь тогда может быть определена точно при произвольном положении точки P, когда угол $g_1\ g_2$ близок к прямому. Наоборот, если угол $g_1\ g_2$ будет очень острым, то прямая PS лишь в том случае может быть начерчена точно, когда точка P лежит внутри острого угла.

Отсюда вытекает правило, которое также должно быть принимаемо во внимание при точных построениях.

c) Если точка S пересечения двух прямых линий g_1 и g_2 должна служить для точного определения дальнейших прямых, то прямые g_1 и g_2 должны пересекаться под углом, мало отличающимся от прямого. Две прямые g_1 и g_2, пересекающиеся под острым углом, также могут служить для точного определения других прямых линий, если последние образуют с g_1 и g_2 небольшие углы.

Можно, вместе с Винером (см. выше), установить ещё одно заслуживающее внимания правило черчения.

d) Следует производить построения с растворами циркуля, меньшими 60°, так как при большем растворе циркуля в результат (благодаря ножкам циркуля) вкрадывается неточность.

3. Принимая в расчет эти правила, Винер (там же) выполняет некоторые элементарные построения. Мы приведем лишь одно из них вновь:

Разделить пополам отрезок AB возможно точнее.

Возьмем отрезок, не на много больший, чем $\frac{1}{2}\ \overline{AB}$, опишем им окружности вокруг точек A и B и соединим прямой полученные таким путем точки пересечения S_1 и S_2.

Точки S_1 и S_2 лежат близко друг к другу; поэтому соединяющая их прямая на всем своем протяжении определена не точно; но ее точка пересечения с отрезком AB определится с полной точностью (правила b и c).

Глава X.

ГЕОМЕТРОГРАФИЯ.

§ 54. Допущения Лемуана.

1. В конце предшествующей главы были указаны некоторые правила для производства точных построений, а перед тем было сказано несколько слов относительно вероятной погрешности построения, выполненного в действительности.

При этом было упомянуто, что последний вопрос, практически столь важный, начал разрабатываться лишь в последнее время, несмотря на то, что геометрическими построениями занимаются уже в течение длинного ряда лет.

Причиной этого, главным образом, служило то обстоятельство, что постоянно (как это делали еще древние) считали построение выполненным, коль скоро было показано, каким образом оно может быть сведено к рассмотренным уже задачам; само же построение во многих случаях вовсе не выполнялось. Поэтому простота и точность геометрического решения задачи не играли никакой роли.

Яков Штейнер был первым, который (в своей книге „Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linien und eines festen Kreises") определенно указал на то, что выполнение построений в действительности, т. е. с инструментами в руке, есть нечто совсем отличное от выполнения их, как он выражается, лишь с помощью языка.

Он говорит: „Легко сказать, я делаю это и это, а затем то; но затруднительность или даже, как можно сказать в иных случаях, невозможность действительного выполнения очень сложных построений требует, чтобы для каждой предложенной задачи было тщательно взвешено, какой из различных способов полного ее решения является простейшим, какие из операций, которые несколько легкомысленно выполняются языком, могут быть обойдены, коль скоро дело касается устранения излишних трудностей и достижения наибольшей точности. Одним словом, речь идет о разыскании способов, при помощи которых геометрические задачи могут быть разрешены теоретически или практически наиболее просто и точно".

Часть его пожеланий выполнена.

Теория чертежных инструментов, т. е. изучение вопросов, какие задачи могут быть разрешены с помощью одного только циркуля, одной линейки, одного прямого угла, как мы видели в предшествующих главах, некоторым образом закончена.

Вопрос о простоте построения будет рассмотрен в настоящей главе.

2. Предположим, что одна и та же задача может быть разрешена построением различными способами; тогда возникает вопрос, какой из них будет простейшим.

На это немедленно можно ответить: тот, который при действительном решении требует проведения меньшего числа линий.

Часто на самом деле прибегали* к указанию числа начерченных окружностей и прямых в решенных задачах.

Лемуан (Lemoine) идет несколько дальше; он определяет не только число начерченных линий, но подсчитывает еще подготовительные операции, под которыми он разумеет прикладывание линейки к точке и помещение ножки циркуля в данную точку.

Он принимает, что каждое произведенное с помощью циркуля и линейки построение составляется из четырех элементарных операций.

Этими элементарными операциями являются следующие.

1) Прикладывание линейки к данной точке.

Лемуан называет ее операцией R_1 и обозначает символом ор: (R_1). Прикладывание линейки к двум данным точкам он обозначает поэтому символом ор: $(2R_1)$.

2) Помещение ножки циркуля в данную точку или в произвольную точку данной прямой.

Он обозначает эту операцию символом ор: (C_1). Согласно с этим, помещение обеих ножек циркуля в две данные точки он обозначает символом ор: $(2C_1)$.

3) Проведение прямой линии по линейке.

Символ этой операции — ор: (R_2).

4) Описывание окружности или дуги окружности.

Эту операцию Лемуан обозначает символом ор: (C_2).

В соответствии со сказанным, к каждому выполненному построению относится некоторое выражение вида

$$l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2.$$

Лемуан называет это выражение символом построения.

Кроме того, Лемуан составляет суммы

$$l_1 + l_2 + m_1 + m_2 = S,$$
$$l_1 + m_1 = E$$

и называет число S (Simplicité) коэфициентом простоты, степенью простоты или, коротко — простотой построения, а E (Exactitude) — точностью построения.

3. Мы разъясним допущения Лемуана на задаче.

Пусть угол будет задан его сторонами. Требуется построить его равноделящую.

С этой целью обыкновенно идут следующим путем. Одну из ножек циркуля помещают в вершину O $(1C_1)$ и описывают произвольным радиусом окружность $(1C_2)$, которая пересечет стороны угла в точках A и B. Затем помещают ножку циркуля в точку A $(1C_1)$ и тем же

* Винер (Wiener), „Darstellende Geometrie“, Bd. I.

радиусом описывают дугу окружности ($1C_2$), помещают после того ножку циркуля в точку B ($1C_1$) и, сохраняя тот же раствор циркуля, описывают дугу ($1C_2$), которая пересечет дугу, имеющую центр в точке A, в некоторой точке D. Наконец, прикладывают линейку к точкам O и D ($2R_1$) и проводят прямую OD ($1R_2$).

Лемуанов символ для этого построения имеет вид:

$$\text{op: } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (9;5)$$

(1 прямая, 3 окружности).

Символ дает совокупность всех примененных операций, но не указывает последовательности, в которой они применены.

Число 9, измеряющее количество всех примененных элементарных операций, Лемуан называет простотой построения. Число 5, показывающее, сколько было применено подготовительных операций, и равное сумме коэфициентов при R_1 и S_1, Лемуан называет точностью этого построения.

4. С каждым построением Лемуан связывает символ его, числа S и E, затем — число начерченных прямых и число начерченных окружностей.

Если задача может быть решена построением различными способами, то Лемуан называет геометрографическим то из этих решений, которому отвечает наименьшее число S.

Разыскивание такого рода решений и составляет главную задачу Геометрографии Лемуана. * [127]

§ 55. Критика и распространение допущений Лемуана.

1. Лемуан называет число S всех элементарных операций, примененных при выполнении данного построения, простотой построения.

Это предполагает, что все упомянутые выше элементарные операции рассматриваются как одинаково простые. Относительно этого, однако, можно быть различных мнений.

Большинство чертежников, например, считает проведение прямой линии менее простым, чем прикладывание линейки к точке.

Опыт не дает возможности решить, какие из четырех операций (стр. 200) являются простейшими, так что можно вместе с Лемуаном считать их одинаково простыми.

Можно поэтому поставить в связь с простотой построения число S, приняв, что из двух конструктивных решений одной и той же задачи простейшим является то, которому отвечает наименьшее число S.

2. Число E подготовительных операций, т. е. сумму коэфициентов при R_1 и C_1 в символе, Лемуан называет точностью построения.

Это допущение ни в коем случае не может быть оправдано. Оно ставит точность построения в зависимость только от прикладывания линейки к точке и помещения ножки циркуля в точку. Таким образом допускается, что только эти две операции вводят в черчение погрешность и что остальные применяемые опера-

---

* E. Lemoine, „Géométrographie ou art des constructions géométriques“, Paris, „Scientia“ № 18.

ции — проведение прямых линий и описывание окружностей — не вводят никакой погрешности.

Мы, однако, знаем из предыдущего, что в особенности черчение прямой линии, по многим причинам, вводит в результат черчения погрешность, бóльшую той, которая проистекает из описывания окружности, и, вероятно, бóльшую также и той погрешности, которая имеет своим источником прикладывание линейки к точке или помещение в данную точку ножки циркуля.

Поэтому число E не может быть поставлено в связь с точностью построения; оно для построения не имеет никакой практической ценности. В последующем мы постоянно будем его игнорировать.

3. Лемуан в отношении черчения циркулем различает две подготовительных операции.

1) Помещение ножки циркуля в данную точку.

2) Помещение ножки циркуля в произвольную точку прямой.

Он обозначает эти две операции различными символами.

Ради простоты мы обозначили их одним и тем же символом C_1.*

4. Выше было упомянуто, что уже давно установилось обыкновение рассматривать число начерченных линий как меру простоты построения.

Но нужно признать, что лишь благодаря инициативе Лемуана появился общий интерес к такого рода геометрическим вопросам. На самом деле стали вычерчивать решения задач, начали устанавливать символы и определять степень простоты этих решений, возникло стремление получить наиболее простые построения.

При этом подтвердились слова Штейнера, что выполнение построения на деле есть нечто совсем отличное от выполнения на словах.

Оказалось, что даже дошедшие до нас основные планиметрические построения подчас могут быть упрощены или даже заменены более простыми, конечно, в предположении, что слово „простота" понимается в вышеопределенном лемуановом смысле.

И в отношении более сложных построений нередко случалось, что построения, которые вообще считались наиболее простыми и изящными решениями задачи, при их действительном выполнении после точного определения их символов оказывались стоящими по простоте ниже других построений, считавшихся ранее менее простыми и изящными.

Так, например, приведенное в § 7 жергоново решение аполлониевой задачи о касании считается вообще наиболее простым и изящным. Если же выполнить построение, то обнаружится, что отвечающее ему число S больше, чем те числа, которые связаны с решениями, повидимому, менее простыми.**

---

*Равно как Рэйш (J. Reusch, „Planimetrische Konstruktionen in geometrographischer Ausführung", Leipzig 1904).

**Что касается литературы этого предмета, то, кроме уже упомянутой оригинальной работы Лемуана и сжатой также указанной уже работы Рэйша, можно назвать еще: Р. Гюнтше (R. Güntsche), „Beiträge zur Geometrographie", Archiv f. M. u. Ph. Reihe 3. u. 6. Bd; отчеты заседаний Берлинского математического общества. 1902; Zeitschrift f. math. und naturw. Unterricht, 1903; Unterrichtsblätter für Math. und Nat. 1902; Г. Боденштедт (Bodenstedt), Unterrichtsblätter für Math. und. Nat. 1904.

5. Кроме циркуля и линейки при черчении употребляется еще линейка о двух параллельных краях и подвижной прямой угол (например, из дерева).

Если, например, нужно провести две параллельные, но произвольные прямые, то их не строят, но просто проводят линии вдоль краев двухсторонней линейки, в результате чего и получается желаемое.

Если требуется — для другого примера — в точке P начерченной прямой g восставить к ней перпендикуляр, то не выполняют этого построения с помощью циркуля и прямой линии, но прикладывают надлежащим образом подвижной прямой угол (прямоугольный треугольник) и немедленно получают искомую прямую.

Чтобы получать точные результаты, двухсторонняя линейка и прямой угол должны быть при этом возможно точными чертежными инструментами; это требование, впрочем, должно предъявлять к каждому чертежному инструменту.

Как линейка о двух параллельных краях, так и прямой угол достаточны в отдельности для решения каждой задачи на построение второй степени; это было установлено в IV главе. Построения с помощью двухсторонней линейки имеют особенное значение для многих целей, например, для землемерия. Прямой угол, как мы видели в § 48, является чрезвычайно мощным чертежным инструментом, так как с помощью нескольких прямых углов могут быть конструктивно строго решены и задачи третьей степени.

Поэтому рекомендуется не ограничиваться основными операциями, связанными с употреблением односторонней линейки и циркуля, но распространить их введением в употребление двухсторонней линейки и подвижного прямого угла, так как и эти инструменты употребляются при действительном построении.

Согласно с этим, мы дополним лемуановы элементарные операции следующими.

A) С помощью линейки о двух параллельных краях можно выполнить еще следующие две новые элементарные операции.

a) Можно расположить двухстороннюю линейку в плоскости чертежа так, чтобы один из ее краев совпадал с начерченною уже прямою. (См. задачу 166 черт. 98.)

Мы будем эту операцию считать равнозначущей прикладыванию линейки к двум данным точкам и потому будем обозначать ее знаком ор: $(2R_1)$.

b) При некоторых построениях (см. задачу 165) бывает необходимо расположить двухстороннюю линейку в плоскости чертежа так, чтобы один из ее краев проходил через данную точку, в то время как другой край проходит через другую данную точку.

Эту операцию мы рассматриваем также как равнозначущую прикладыванию линейки к двум данным точкам и обозначаем ее поэтому знаком ор: $(2R_1)$.

B) С помощью прямого угла (например, из дерева) можно выполнить следующие три новые элементарные операции.

a) Можно расположить прямой угол так, чтобы одна из сторон его лежала на начерченной уже прямой — op: $(2R_1)$.

b) При решении некоторых задач бывает необходимым расположить прямой угол в плоскости чертежа так, чтобы каждая из его сторон проходила через одну из данных двух точек — op: $(2R_1)$.

c) Иные задачи (см. задачу 176) требуют такого расположения угла, чтобы вершина его лежала на начерченной линии.

Эту операцию мы обозначаем символом op: (W_1).

Если прямой угол помещают в плоскости чертежа так, что вершина его совпадает с данной точкой P данной прямой g, а одна из сторон его совпадает с g, то эта операция, в силу сказанного, изображается символом op: $(R_1 + W_1)$.

C) Наконец, мы допустим, что необходимо расположить прямой угол так, чтобы вершина его находилась на некоторой прямой или кривой линии, и сверх того, что положение вершины должно быть отмечено некоторой добавочной точкой.

Эту операцию мы обозначим символом op: (P_1).

Разъясним эти допущения примером.

Пусть в целях решения некоторой геометрической задачи на построение (например, задачи 176) прямой угол помещен в плоскости чертежа так, что одна из его сторон проходит через данную точку A, другая сторона — через данную точку B, а вершина лежит на прямой линии g, и пусть положение вершины должно быть отмечено.

Тогда символ построения имеет вид:

$$\text{op: } (2R_1 + W_1 + P_1).$$

Эти элементарные построения (п. 3) мы присоединим к построениям Лемуана, далее все эти построения мы будем считать равнозначущими и число их S будем рассматривать как мерило простоты выполненного построения.

Замечание. Невозможно доказать равнозначность этих операций, ее можно лишь допустить.

При введении обозначений для элементарных операций мы старались вводить как можно меньше новых символов.

Здесь предполагается также, что все употребляемые чертежные инструменты для каждого предложенного построения имеют надлежащую величину, т. е. не слишком велики и не слишком малы. Те же допущения делает и Лемуан относительно своих чертежных инструментов.

Нередко, однако, действительное выполнение построения посредством обычно употребляемых („нормальных“) методов делается затруднительным или невозможным вследствие неблагоприятных соотношений расположения. Как помочь в этих случаях указывают: А. Виттиг * и Пауль Цюльке. **

§ 56. Примеры и задачи для упражнения.

1. В следующих примерах и задачах для упражнения не только циркуль и односторонняя линейка, но и линейка о двух параллельных краях и прямой угол должны быть рассматриваемы как равноценные чертежные инструменты, что и имеет место на практике.

Подлежит решению следующая основная задача.

Выполнить все простые и важные построения при пользовании всеми чертежными инструментами; определить для каждого построения его символ и простоту и, в особенности, отыскать такие построения, для которых степень простоты возможно мала.

Такого рода геометрографические построения имеют действительную практическую ценность.

2. В последующем будут выполнены только некоторые из простейших построений при пользовании всеми чертежными инструментами, причем будет определяться символ построения и, в частности, степень его простоты S.

Число S_1, помещенное при некоторых из этих задач, указывает самую меньшую степень простоты, достигнутую до сих пор в отношении этих построений, если, вместе с Лемуаном, допускать в качестве чертежных инструментов только циркуль и линейку.

3. Вспомогательные построения.

209. Построить две произвольные взаимно перпендикулярные прямые.

Решение производится с помощью прямого угла op: $(2R_2)$, $S=2$; (S_1*** $=8$).

210. Даны прямая g и на ней точка P. Требуется восставить перпендикуляр x к g в точке P.

Это выполняется с помощью прямого угла.

$$\text{op: } (R_1+R_2+W_1),\ S=3;\ (S_1=8).\text{***}$$

211. Дан отрезок AB. Восставить перпендикуляр к нему в его середине.

Классическое построение. Описывают окружности $A(r)$,**** $B(r)$ и соединяют полученные точки пересечения C и D.

$$\text{op:}(2R_1+R_2+2C_1+2C_2),\quad S=7.$$

Это дошедшее до нас так называемое классическое построение есть вместе с тем и наиболее простое.

---

* А. Виттиг (Wittihg), „Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene" (Progr. Nr. 564, Gymn. z. h. Kreuz., Dresden 1899).

** Пауль Цюльке. (Paul Zühlke), „Ausführung elementargeometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen" (Progr. Nr. 150, Oberrealschule zu Charlottenburg, Ostern 1906).

*** Рэйш, там же.

**** Символ $A(r)$ означает окружность с центром A и радиусом r.

(В § 23 мы показали, как разделить отрезок пополам с помощью двухсторонней линейки, а в § 24—как разделить отрезок пополам с помощью прямого угла. Предлагается установить символ для этих обоих построений и определить их простоту.)

212. Даны прямая g и вне ее точка P. Требуется опустить из P на g перпендикуляр x.

Решение производится с помощью прямого угла: его прикладывают к g и подвигают до тех пор, пока вторая сторона его не коснется P, и проводят затем искомый перпендикуляр.

$$\text{op}: (3R_1 + R_2),\ S = 4;\ (S_1 = 9).^{*}$$

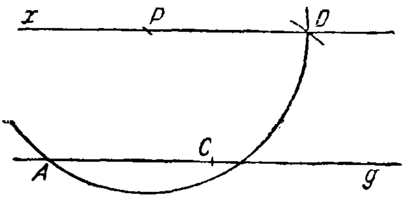
213. Требуется провести две произвольные параллельные прямые.

Это выполняется с помощью двухсторонней линейки.

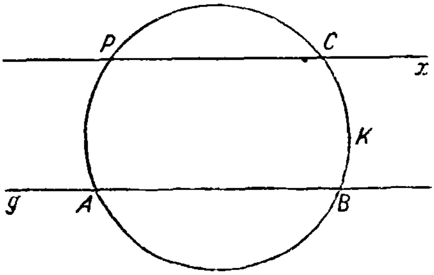
$$\text{op}: (2R_2), S = 2;\ (S_1{}^{*} = 8).$$

214. Даны отрезок d и прямая g. Требуется провести прямую x параллельно g на расстоянии d от нее.

С помощью прямого угла проводят произвольный перпендикуляр к $g(2R_1 + R_2)$, откладывают на нем от точки его пересечения с g отрезок d с помощью циркуля $(3C_1 + C_2)$ и через полученную таким путем точку с помощью прямого угла проводят искомую параллельную прямую $x(W_1 + R_1 + R_2)$. Всего имеем:



Черт. 162.



Черт. 163.

$$\text{op}: (3R_1 + 2R_2 + 3C_1 + C_2 + W_1),\quad S = 10;\ (S_1 = 15).^{**}$$

215. Даны прямая g и точка P. Провести через P прямую, параллельную прямой g.

Мы прежде всего приведем два построения, которые до сих пор были геометрографическими.

a) Описывают вокруг P окружность $P(r)$ достаточно большого радиуса (черт. 162), затем окружность $A(r)$, в результате чего получаем точку C. Если описать окружность $C(r)$, которая пересечет окружность $P(r)$ в точке D, то PD и будет искомой линией x.

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2),\ S = 9.$$

b) Описывают произвольную проходящую через P окружность K (черт. 163), которая пересечет g в точках A и B. Если теперь сделать с помощью циркуля

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AP},$$

* Рэйш, там же.

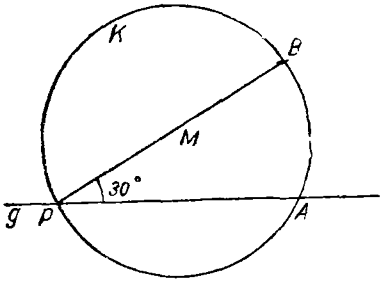
** Рэйш, там же.

то PC есть искомая прямая x.

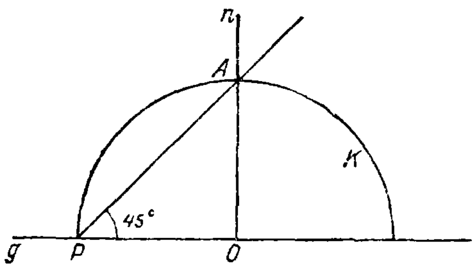
$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2), \quad S = 9.$$

С помощью прямого угла поступают следующим образом. Располагают угол в плоскости чертежа так, чтобы одна из его сторон совпала с g, а другая сторона проходила через P $(3R_1)$, проводят через P перпендикуляр n к $g(R_2)$, прикладывают затем прямой угол к n так, чтобы вершина его совпадала с P, и чертят x.

$$\text{op}: (4R_1 + 2R_2 + W_1), \quad S = 7.$$



Черт. 164.



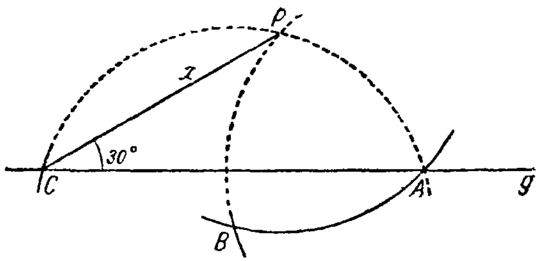
Черт. 165.

216. Даны прямая g и на ней точка P. Требуется через P провести прямую, которая с g образовала бы угол в 30 или 45°.

a)* Проводят через P окружность K произвольного радиуса r и затем описывают окружность $A(r)$, в результате чего получают точку B (черт. 164). Тогда

$$\measuredangle BPA = 30^\circ$$

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2), \quad S = 7.$$



Черт. 166.

b) С помощью прямого угла чертят прямую n (черт. 165), перпендикулярную к g, на произвольном расстоянии от $P(2R_1 + R_2)$; затем вокруг точки O с помощью циркуля описывают окружность $O(P)$; прямая AP образует с g требуемый угол в 45°.

$$\text{op}: (4R_1 + 2R_2 + 2C_1 + C_2), \quad S = 9 \text{ (до сих пор } S_1 = 13).*$$

217. Даны прямая g и вне ее точка P. Через P требуется провести прямую, составляющую с g угол в 30°.

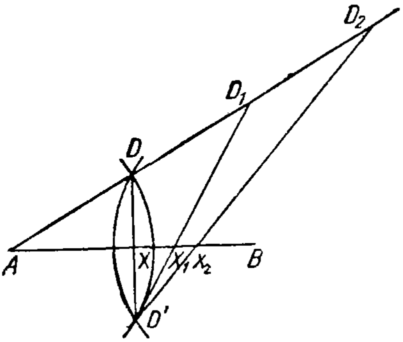
Описывают окружность $P(r)$ произвольным, но достаточно большим радиусом (черт. 166), затем окружность $A(r)$, которая пересекает $P(r)$ в точке B, и, наконец, окружность $B(r)$, определяющую точку C;

* Рэйш, там же.

PC есть искомая прямая x.

$$\text{op}:(2R_1+R_2+3C_1+3C_2),\quad S=9.^*$$

(Предлагается решить эту задачу для случая, когда прямая x составляет с g угол в 45 или 60°, употребляя все чертежные инструменты.)



Черт. 167.

218. Дан угол α, сверх того прямая g и на ней точка P. Требуется провести через P прямую x так, чтобы угол (xg) равнялся α.

Классическое построение является в этом случае также и геометрографическим; оно имеет символ

$$\text{op}:(2R_1+R_2+5C_1+3C_2),\quad S=11.$$

219. Дан отрезок AB. Требуется определить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ... этого отрезка.*

Описывают (черт. 167) окружности $A(r)$, $B(r)$ произвольным, но достаточно большим радиусом и получают точки D и D'. Затем чертят прямую AD и на ней точки D_1, D_2, D_3, ... так, что

$$\overline{AD}=\overline{DD_1}=\overline{D_1D_2}=\overline{D_2D_3}=\ldots.$$

Отсюда, соединяя прямыми точку D' соответственно с точками D_1, D_2, ..., получают точки X_1, X_2... При этом

$$\overline{XB}=\frac{1}{2}\overline{AB},\quad \overline{X_1B}=\frac{1}{3}\overline{AB},\quad \overline{X_2B}=\frac{1}{4}\overline{AB}\ \ldots$$

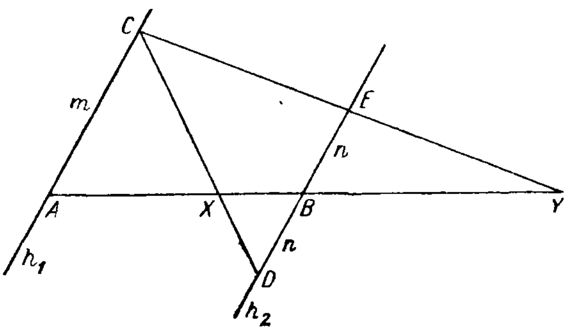
Предлагается установить символ построения последовательных точек X_1, X_2, X_3, ... и сравнить это построение с указанным в задаче 110 (черт. 57).

220. Даны отрезок AB и два произвольных отрезка m и n. Требуется построить на прямой AB такие точки X и Y, для которых выполняется пропорция

$$\overline{AX}:\overline{XB}=m:n$$

или

$$\overline{AY}:\overline{BY}=m:n.$$



Черт. 168.

С помощью двухсторонней линейки проводят через A и B две произвольные параллельные прямые h_1 и h_2 (черт. 168) $(2R_1+2R_2)$.

* Рэйш, там же.

Затем с помощью циркуля откладывают отрезки m и n (последний дважды) и получают точки C, D, $E\,(6C_1+2C_2)$. Наконец, проводят прямые CD и CE, в результате чего находят точки X и Y.

$$\text{op}:(6R_1+4R_2+6C_1+2C_2),\ S=18;\ (S_1=20).^*$$

221. Даны три точки A, X, B некоторой прямой линии. Требуется построить точку Y, которая гармонически отделялась бы точкой X от точек A и B.

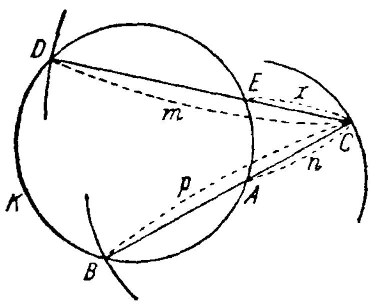
До сих пор степень простоты S_1 достигала 13.* Предлагается понизить эту степень при условии пользования всеми чертежными инструментами.

222. К трем данным отрезкам m, n, p требуется построить четвертый пропорциональный.

Предположим при этом, что

$$p > n.$$

A) Мы прежде всего приведем решения, бывшие до сих пор геометрографическими, т. е. те, которые выполняются с помощью только циркуля и линейки.



Черт. 169.

Первое построение.

Чертят произвольную, но достаточно большую окружность K (черт. 169), берут на K произвольную точку A и описывают окружности $A(n)$ и $A(p-n)$, причем $p-n$ определяется с помощью циркуля по данным отрезкам p и n. Точку B пересечения окружности $A(p-n)$ с K соединяют с A, в результате чего на окружности $A(n)$ получают точку C. Затем отыскивают на K такую точку D, для которой

$$\overline{CD}=m,$$

и проводят прямую CD, которая пересекает K во второй точке E. Тогда:

$$\overline{EC}=x,$$

ибо, по теореме о секущей:

$$m\cdot x=n\cdot p.$$

$$\text{op}:(4R_1+2R_2+10C_1+5C_2),\ S=21.$$

Второе построение.

Оно вытекает из следующей теоремы.

Пусть ABC будет вписанный в окружность K треугольник (черт. 170); пусть, далее, прямая AD будет параллельна BC, и AX — произвольная прямая, проходящая через A и встречающая K сверх того еще в точке Y. Тогда:

$$\overline{AX}\cdot\overline{DY}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}.$$

---

* Рэйш, там же.

(Доказательство этой теоремы получается из подобных треугольников DBY и ABX.)

Для построения x чертят окружность K (черт. 170), берут на ней точку A и строят:

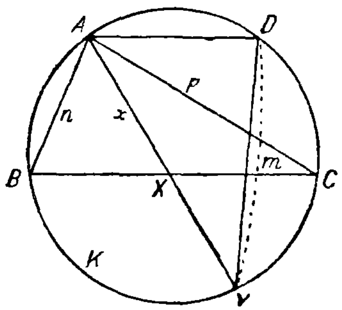
$$\overline{AB}=n,\ \overline{AC}=p,\ \overline{CD}=\overline{AB},\ \overline{DY}=m.$$

Если провести теперь AY, то отрезок AX и будет искомым четвертым пропорциональным.

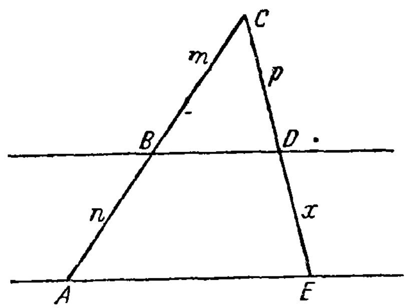
$$\text{ор}:\ (4R_1+2R_2+10C_1+5C_2),\ S=21.$$

Отметим, что оба построения имеют один и тот же символ, одно и то же число S.

В) Если в качестве чертежного инструмента допустить еще и линейку о двух параллельных краях, то это число S может быть понижено.



Черт. 170.



Черт. 171.

Проводят с помощью линейки две произвольные параллельные прямые ($2R_2$), берут на одной из них точку A (черт. 171) и определяют с помощью циркуля точку B так, чтобы отрезок AB равнялся n; затем проводят прямую AB и строят (опять с помощью циркуля) BC равным m и CD равным p.

Если, наконец, соединить C с D и продолжить эту прямую до пересечения с проходящей через A прямой, параллельной BD, то отрезок DE и есть искомый отрезок x.

$$\text{ор}:\ (4R_1+4R_2+9C_1+3C_2),\ S=20.$$

Отметим, что с помощью этого чертежного инструмента число S удалось понизить на 1.

(Постараться найти с помощью расширенных средств черчения такие построения, для которых S было бы еще меньше.)

С) Для построения четвертого пропорционального x к трем отрезкам m, n, p будут далее указаны методы, которые чрезвычайно просты, но имеют один только тот недостаток, что они требуют, чтобы отрезок $2m$ был больше каждого из двух средних членов пропорции:

$$m:n=p:x.$$

Мы изложим теперь эти методы.

1. Прежде всего мы упомянем об указанном в § 18 построении Маскерони для определения четвертого пропорционального. Оно имеет символ

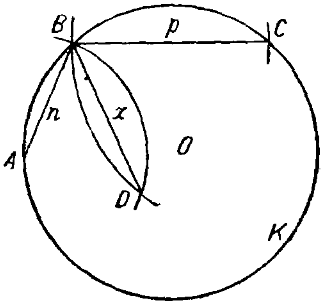
$$\text{op}: (9C_1 + 5C_2), \ S = 14.$$

2. Другое построение при исключительном пользовании циркулем Лемуан выводит из следующего предложения.

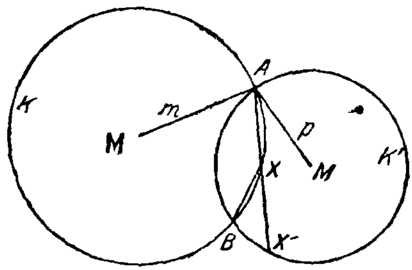
В каждом треугольнике произведение двух сторон равно произведению удвоенной высоты, опущенной на третью сторону, и радиуса описанного круга.

(Это предложение есть частный случай той теоремы, которая была применена при втором построении стр. 209.)

Сообразуясь с этим, построение четвертого пропорционального к m, n, p производится следующим образом.



Черт. 172.



Черт. 173.

Описывают окружность радиуса m и берут на ней произвольную точку A (черт. 172). Затем описывают окружность $A(n)$, которая пересечет K в точке B, и окружность $B(p)$, встречающую K в точке C. Если, наконец, построить окружность $C(p)$, которая пересечет окружность $A(n)$ в точке D, то

$$\overline{AD} = x,$$

ибо $\overline{BD}$ есть удвоенная высота треугольника ABC.

$$\text{op}: (9C_1 + 4C_2), \ S = 13.$$

Нет надобности проводить линии n, p, x фигуры; очевидно, что вся фигура может быть построена с помощью одного циркуля. Но она требует, чтобы $2m$ было $> p$.

3. Гюнтше дает (там же) замечательное графическое решение рассматриваемой задачи. Оно вытекает из следующей теоремы.

Пусть K и K' (черт. 173) будут две окружности радиусов, соответственно m и p. Если через одну из общих точек этих окружностей (A) провести произвольную прямую, которая пересечет K в точке X, а K' — в точке X', то постоянно

$$\overline{BX} : \overline{BX'} = m : p,$$

причем B есть вторая общая точка окружностей K и K'. ($\measuredangle BAX$ есть угол, вписанный в обе окружности; поэтому треугольник BMX подобен треугольнику $BM'X'$.)

Построение, вытекающее из этого свойства, имеет символ

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 3C_2), \quad S = 13.$$

Предлагается выполнить построение.

223: Даны два отрезка m и n. Требуется определить третий пропорциональный x этих двух отрезков. Отрезок x, таким образом, должен удовлетворять следующей пропорции:

$$m : n = n : x.$$

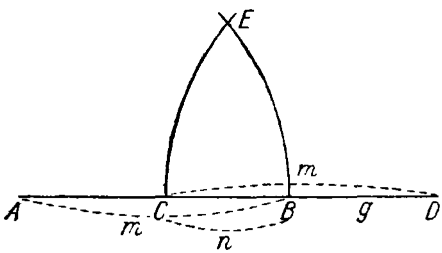
Предлагается применить методы, указанные выше, и отыскать геометрографическое построение.

224. Даны два отрезка m и n. Требуется определить средний пропорциональный этих двух отрезков. Таким образом должна быть графически разрешена пропорция:

$$m : x = x : n.$$

Всегда можно предположить, что $m > n$.

Мы прежде всего приведем решения, бывшие до сих пор геометрографическими; второе из них есть лишь простое видоизменение первого.



Черт. 174.

Первое построение.

Проводят прямую g, берут на ней произвольную точку A (черт. 174) и описывают окружность $A(m)$, которая пересечет g, положим, в точке B. Затем определяют с помощью циркуля точку C так, чтобы отрезок BC равнялся n, и ищут такую точку D, для которой CD равно m. Наконец, если описать окружность $D(C)$, то отрезок CE (или BE) будет искомым отрезком x.

При этом не лишено важности следующее замечание.

При построении точки C одна из ножек циркуля находится в B; затем должна быть определена точка D, для каковой цели удерживают одну ножку циркуля в B, а другую одновременно помещают в A; этим путем выбрасывается одна элементарная операция.

Построение имеет символ:

$$\text{op}: (R_2 + 9C_1 + 4C_2), \quad S = 14.$$

Доказательство примененной теоремы.

Расстояние a точки E фигуры от прямой g есть

$$a = \sqrt{mn - \frac{n^2}{4}}.$$

Поэтому

$$\overline{CE} = \sqrt{a^2 + \frac{n^2}{4}} = \sqrt{mn}.$$

Второе построение.

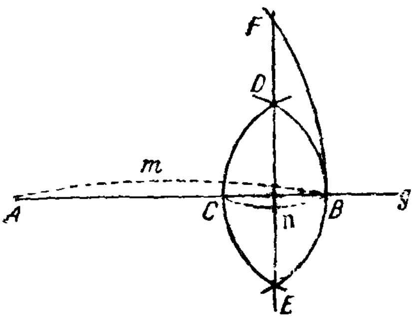
Снова проводят прямую g, берут на ней произвольную точку A (черт. 175) и чертят окружность $A(m)$, которая встречает g в точке B; затем описывают окружности $B(n)$, $C(n)$ и соединяют полученные точки D, E. Отрезок BF есть x.

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2),\ S = 14.$$

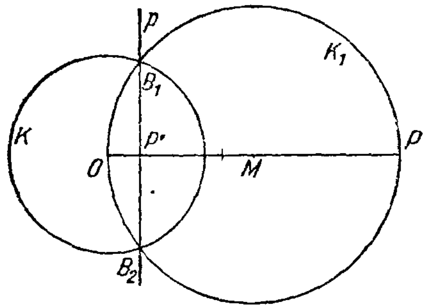
225. Построение обратной точки относительно данной окружности.

Пусть будут даны окружность K (черт. 176) и точка P, допустим, вне окружности. Если найти поляру p точки P относительно K, то точка P' пересечения ее с центральной линией OP будет обратной точке P в отношении окружности K (§ 20).

a) Классическое построение.



Черт. 175.



Черт. 176.

Проводят OP, делят пополам этот отрезок в точке M, описывают окружность $M(O)$ и соединяют полученные точки пересечения B_1 и B_2 (черт. 176).

$$\text{op}: (6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2),\ S = 16.$$

b) Можно выполнить построение с помощью одного только циркуля (§ 20, 1).

Тогда символом построения будет

$$\text{op}: (6C_1 + 3C_2),\ S = 8.$$

c) Построение с помощью прямого угла.

Помещают прямой угол в плоскости чертежа так, что его стороны проходят через O и P, а вершина лежит на K, и отмечают положение вершины; это построение выполняют дважды.

Прямая, соединяющая отмеченные точки, есть поляра p. Следовательно, точка ее пересечения с центральной линией есть искомая точка P'.

$$\text{op}: (8R_1 + 2R_2 + 2W_1 + 2P_2),\ S = 14.$$

Построение это ни в коем случае не приближенное, но строгое (ср. § 22, 1).

Также и с помощью лишь двухсторонней линейки можно определить точку P', обратную данной точке P.

Предлагается найти это построение.

Найдено, что построение с помощью одного только циркуля будет геометрографическим даже в том случае, если в качестве инструментов для черчения допущены и двухсторонняя линейка и прямой угол.

226. Построение поляры точки P относительно окружности K.

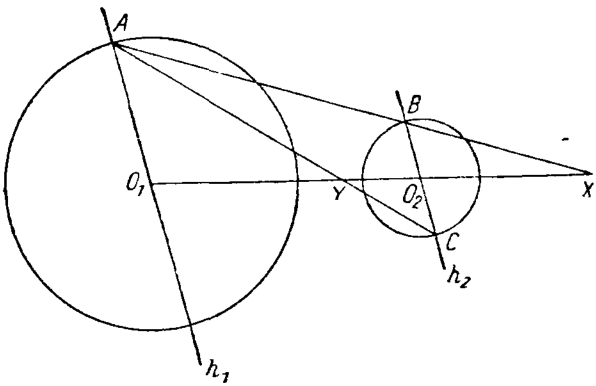
a) Классическое построение.

$$(\text{op}: 6R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2), S = 16.*$$

b) Построение поляры с помощью прямого угла.

Поступают совершенно так, как в предшествующем пункте, только нет надобности в вычерчивании центральной линии.

$$\text{op}: (6R_1 + R_2 + 2W_1 + 2P_1), \quad S = 11.$$



Черт. 177.

227. Построение центров подобия двух окружностей.

Для этого построения Лемуан в качестве наименьшего значения S находит число 17. Последнее может быть уменьшено при пользовании линейкой о двух параллельных краях.

Пусть будут даны две окружности K_1, K_2 вместе с их центрами O_1, O_2. Проводят прежде всего центральную линию обеих окружностей; затем располагают линейку в плоскости чертежа так, чтобы один край ее проходил через O_1, а другой через O_2, и проводят параллельные линии вдоль краев линейки. Обе эти линии пересекаются с окружностями в точках, которые, будучи надлежащим образом соединены прямыми (черт. 177), определяют искомый центр подобия.

$$\text{op}: (8R_1 + 5R_2), \quad S = 13.$$

228. Основная задача.

Из немногих приведенных примеров ясно, что при пользовании прямым углом и двухсторонней линейкой могут быть найдены другие

* Ср. Рэйш, там же.

и часто более простые построения, чем при пользовании только циркулем и односторонней линейкой.

А так как прямой угол и двухсторонняя линейка на практике применяются в качестве инструментов черчения так же, как и циркуль и односторонняя линейка, и *исследования этой главы вообще только в том случае имеют значение, если они ставятся в связь с действительным выполнением построения*, то *возникает задача*: „*Выполнить все простые или важные построения снова при пользовании всеми чертежными инструментами, установить их символы на основании вышеупомянутых распространенных допущений, определить степень их простоты; в особенности же — отыскать геометрографические решения*“.

ПРИМЕЧАНИЯ.

[1] Из ряда терминов — визуальный, дескриптивный, графический, — употребляющихся в русском языке, мы сочли возможным остановиться на термине автора.

[2] Имеется русский перевод первого сочинения: Ф. Клейн, „Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии", Казань 1898, и немецкий перевод второго: F. Enriques „Fragen der Elementargeometrie", Leipzig 1907. В новом итальянском издании книга Энрикеса носит название: „Questioni Rigardanti La Mathematica Elementare".

[3] С формальной точки зрения, черчение играет лишь вспомогательную роль (см. Введение).

[4] Это обычное подразделение конструктивных задач на определенные, неопределенные и переопределенные обыкновенно не проводится с надлежащей последовательностью. Так, например, построение треугольника, стороны которого проходят через три данные точки и имеют данные длины, есть задача определенная, но и задача о построении треугольника по трем данным сторонам рассматривается как задача определенная в том смысле, что все треугольники, удовлетворяющие требованиям этой задачи, конгруэнтны. Так как эта классификация задач для последующих теорий не имеет важности, то мы на ней останавливаться не будем.

[5] Условия, отвечающие употреблению циркуля и линейки, см. в Введении.

[6] В тех случаях, когда говорится об отражении точки R в данной прямой s, на месте прямой предполагается плоское отражающее зеркало, и изображение в нем точки R строится по известному закону, т. е. из точки R на прямую s опускается перпендикуляр и на нем по другую сторону от прямой s строится точка Q, отстоящая от s на таком же расстоянии, что и R.

[7] Легко усмотреть, что точки K, L, M лежат на биссектрисах соответствующих углов, в пересечении же биссектрис находится точка O.

[8] При этом $\overline{RB}=\overline{BF}=y$, $\overline{PB}=\overline{BE}=t$.

[9] Если данные прямые параллельны, то геометрическое место сводится к прямой, параллельной данным и равноотстоящей от них.

[10] Кроме изображенной на чертеже дуги, к геометрическому месту принадлежит и симметричная ей дуга по другую сторону отрезка AB.

[11] Точки P_1, P_2 делят отрезок AB соответственно внутренним и внешним образом в отношении $m:n$. Если точка P удовлетворяет поставленным условиям, т. е. если $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n=\overline{AP_1}:\overline{BP_1}=\overline{AP_2}:\overline{BP_2}$, то прямые PP_1 и PP_2, очевидно, являются биссектрисами соответственно внутреннего и внешнего углов треугольника APB. Следовательно, $PP_1 \perp PP_2$ и точка P лежит на окружности, построенной на отрезке P_1P_2 как на диаметре. Для доказательства обратного утверждения мы возьмем произвольную точку P на окружности и проведем $ED \perp PP_1$ (при этом $ED \parallel PP_2$). Из подобия треугольников легко получим, что

$$\frac{h}{k}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}},\quad \frac{h_1}{k}=\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}},\quad \text{откуда}\quad \frac{h}{h_1}=\frac{\overline{BP_1}}{\overline{BP_2}}:\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AP_2}}=1,$$

$h=h_1$. Из равенства треугольников PEP_1 и PDP_1 заключаем, что PP_1 есть биссектриса угла APB, так что $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AP_1}}{\overline{BP_1}}=\dfrac{m}{n}$.

[12] Окружности K_1', K_2' описаны радиусами, которые получаются из радиусов окружностей K_1, K_2 увеличением или уменьшением их на длину радиуса окружности K_3 (на чертеже в обоих случаях радиусы увеличены).

[13] Искомые центры лежат, таким образом, в точках пересечения двух из упомянутых конических сечений; обратное неверно. Задача вообще имеет 8 решений.

[14] Обозначим через O искомую точку. Тогда OB есть биссектриса угла AOC, OC — биссектриса угла BOD. Следовательно,

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}},\quad \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}.$$

[15] Говорят, что окружности пересекаются под углом α, если под углом α пересекаются касательные к этим окружностям в точке их пересечения.

Равным образом, под углом прямой с окружностью разумеют угол между прямой и касательной к окружности в точке пересечения прямой и окружности.

Если окружности пересекаются под прямым углом, то центр каждой из окружностей лежит на касательной к другой окружности в точке пересечения окружностей. Решение задачи сводится к построению точки, из которой ко всем трем окружностям можно было бы провести равные касательные.

[16] Говоря об угле, под которым видна из данной точки данная окружность, имеют в виду угол между касательными, проведенными из точки к окружности.

[17] В состав геометрического места входят три прямые, проходящие через точку пересечения данных прямых и обладающие тем свойством, что каждая из них вместе с данными прямыми и прямой, соединяющей точку их пересечения с точкой P, составляют гармонический пучок лучей.

Таким образом предложенная задача имеет три решения.

[18] Другое, более простое решение этой задачи основывается на следующем предложении: если точки A и B лежат на противоположных сторонах квадрата, точки C и D на других двух его противоположных сторонах и если $AB \perp CD$, то $\overline{AB}=\overline{CD}$.

[19] Пусть вершинами четырехугольника будут точки A, B, C, D, и пусть удалена будет сторона CD. Из точек A и B проводим две прямые, каждую — в одном из данных направлений. Точки M и N пересечения первой с прямой BD и второй с прямой AC соединим прямою, которая и является искомым геометрическим местом.

[20] Ср. § 1, 3, пример I.

[21] Если M есть середина стороны a и вписанный круг касается этой стороны в точке Q, то $2\overline{MQ}=b-c$ $(b>c)$. Пусть N будет подошва высоты h_a. Положив $\overline{MN}=q$, имеем $b^2-c^2=\left(\frac{a}{2}+q\right)^2-\left(\frac{a}{2}-q\right)^2=2aq$. Сверх того, $(a+b+c)\,r=ah_a$, поэтому $\overline{MQ}=qr:(h_a-r)$.

[22] Пусть C будет середина, D какая-либо другая точка рассматриваемой дуги. Из C радиусом CA опишем окружность. Тогда ломаная ACB равна диаметру, а ломаная ADB равна хорде этой окружности.

[23] Из центров O и O_1 опустим перпендикуляры Oo и O_1o_1 на прямую MN, проходящую через точку пересечения этих окружностей. Тогда вообще $\overline{oo_1}<\overline{OO_1}$, и только в случае, когда $MN \parallel OO_1$, будем иметь $\overline{oo_1}=\overline{OO_1}$.

[24] Прямая, соединяющая середину отрезка PQ с точкой O, пересекает данные прямые соответственно в искомых точках X, Y.

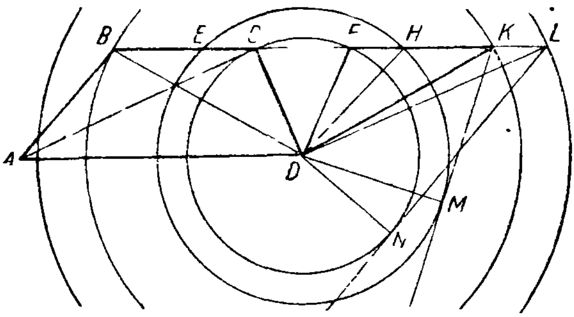
[25] Отрезок PR из точек X, Y виден под углом $180^\circ-\alpha$.

[26] В окружности, описанной радиусом R, строим хорду, которая видна из центра под углом 2α; эта хорда равна стороне a. Далее, см. задачу 32.

[27] На прямых a, b от точек A и B в положительном направлении откладываем отрезки, равные s, и построенные таким образом точки A', B' соединяем прямыми соответственно с точками B и A. Прямая, проходящая через точку пересечения этих прямых и точку O, пересекает прямые a, b соответственно в точках X, Y. Если точка O равноотстоит от данных прямых, то задача оказывается либо невозможной, либо неопределенной.

[28] Угол между линией центров и искомой хордой дан. Переносим хорду параллельно самой себе так, чтобы один из ее концов проходил через центр данного круга.

[29] Предположим задачу решенной. Пусть трапеция $ABCD$ (черт. 178) будет искомой. Отложим отрезки BH и CL, равные AD. Тогда $\overline{AB}=\overline{DH}$, $\overline{AC}=\overline{DL}$, кроме того, $AB \parallel DH$ и $AC \parallel DL$, так что $\sphericalangle BAC = \sphericalangle HDL$, отсюда $\triangle BAC = \triangle HDL$ и $\overline{HL}=\overline{BC}$. Так как $\overline{HK}=\overline{BE}$, то $\overline{KL}=\overline{HL}-\overline{HK}=\overline{BC}-\overline{BE}=$ $=\overline{EC}=\overline{FH}$.



Черт. 178.

Проведем из точки K касательную KM к окружности $D(H)$ и из точки L касательную LN к окружности $D(F)$.

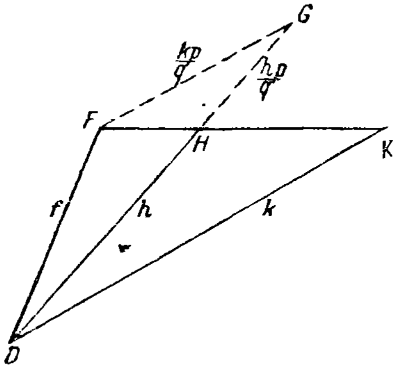
Тогда $\overline{LN}^2=\overline{CL}\cdot\overline{FL}$, $\overline{KM}^2=\overline{EK}\cdot\overline{HK}$.

Но $\overline{CL}=\overline{EK}$ (ибо $\overline{KL}=\overline{EC}$), следовательно, $\overline{FL}:\overline{HK}=\overline{LN}^2:\overline{KM}^2$, откуда

$$\overline{FH}:\overline{HK}=\frac{1}{2}(\overline{LN}^2-\overline{KM}^2):\overline{KM}^2,$$

так как $\overline{FH}=\overline{KL}=\frac{1}{2}(\overline{FL}-\overline{HK})$.

Заметим, что каждая из касательных KM, LN как катет некоторого прямоугольного треугольника, коего гипотенуза и другой катет даны, может быть построена непосредственно по данным отрезкам, так что, исходя из последних, можно построить два отрезка p, q, отношение которых равно отношению $\overline{FH}:\overline{HK}$. Если построен треугольник FDK (черт. 178), то легко может быть построена и искомая трапеция. Таким образом мы свели предложенную задачу к следующей.



Черт. 179.

Даны отрезки f, h, k, p, q. Требуется построить треугольник FDK, для которого $DF=f$, $DK=k$, $DH=h$, причем H есть точка, в которой отрезок FK делится внутренним образом в отношении $p:q$. Решение же последней задачи усматривается из черт. 179 (сначала строится треугольник FDG).

[30] При этом пользуются теоремой: отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен ее половине.

[31] От середины O отрезка $AA'=a$ отложим на нем отрезок OO_1, равный гипотенузе прямоугольного треугольника, которого катеты равны $\frac{a}{2}$ и $\frac{s}{2}$. Окружность, описанная из O радиусом $\frac{s}{2}$, пересекает прямую в искомых точках.

[32] См. черт. 17. Точка C в настоящем случае лежит на DB_1.

[33] Пусть будут даны (черт. 17) отрезки AB и DC и угол между ними. Строят сначала треугольник B_1CD, из элементов которого известны две стороны DC и CB_1 и угол DCB_1.

[34] Таким образом отрезок $O_2'P$ является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого известны (касательная и радиус круга K_2) (см. геометрические места a, e).

[35] Сперва строят заштрихованный треугольник (черт. 21). Центр окружности лежит в пересечении биссектрис двух его внешних углов.

[36] Откладываем дуги $P_1C = AP = AP_3$ и $P_2B = P_1C$. Тогда β есть середина дуги $A\beta C$, α есть середина дуги $C\alpha B$ и γ есть середина дуги $B\gamma A$.

[37] Если X есть пересечение прямых B_1A и g, а Y точка на g, то ломаная AXB равна прямой AXB_1, а ломаная AYB равна ломаной AYB_1.

[38] Треугольник ABC вращением около стороны CB приводится в положение A_1CB. В свою очередь, этот треугольник вращением около A_1C приводится в положение A_1B_2C. Точки P, X, Y_1, P_2 располагаются на прямой, и отрезок PP_2 равен периметру треугольника XPY.

[39] На черт. 25 точки B_2 и B суть точки M и N.

[40] Две конгруэнтные фигуры, лежащие в одной плоскости, одинаково направлены, если для приведения их в совпадение нет надобности выводить одну из них из плоскости. Два прямоугольных треугольника, которых гипотенузы служат диагоналями прямоугольника и которые имеют общий катет, неодинаково направлены. Две подобные фигуры одинаково направлены, когда умножением одной из них на некоторое число мы получаем фигуру конгруэнтную другой и одинаково с нею направленную.

[41] $\angle AOA_2 = \angle BOB_2$ и $\angle AA_2O = \angle ASO = \angle BB_2O$, поэтому треугольники AOA_2 и BOB_2 подобны. При повороте первого около O на угол $AOA_2 = \alpha$, точки A и B расположатся соответственно на прямых OA_2 и OB и прямая AB станет параллельна прямой A_2B_2.

[42] Это есть частный случай предыдущей задачи.

[43] Из точки P, лежащей вне круга O, проведем к нему две касательные PP_1 и PP_2. Проведем также прямые PO и P_1P_2, пересекающиеся в точке Q, и прямую Q_1Q_2, проходящую через точку P параллельно прямой P_1P_2. Прямые P_1P_2 и Q_1Q_2 называются соответственно полярами точек P и Q относительно круга O. Точки P и Q соответственно называются полюсами прямых P_1P_2 и Q_1Q_2 относительно круга O.

[44] Если между точками двух покрывающих одна другую систем установлено соответствие такого рода, что, коль скоро точке P первой системы отвечает точка P' второй системы, то и точке P' первой системы отвечает точка P второй системы, то говорят что обе системы точек находятся в инволюции или образуют инволюцию.

Таким образом система точек P прямой g и система им обратных точек P' покрывают одна другую, образуя инволюцию.

[45] Так как $\angle OQ'P' = \angle P'PQ$, то $\angle P'PQ + \angle P'Q'Q = 2d$.

Точки P, P', Q, Q' лежат на одной окружности. Если q есть длина касательной к ней из точки O, то $q^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$, $q = r$.

[46] Приведем более строгое доказательство. Обозначим через M точку пересечения кривых C_1 и C_2; через центр инверсии O проведем прямую a, которая пересечет кривые C_1 и C_2 соответственно в точках A_1 и A_2. Образы, обратные рассматриваемым, будем обозначать теми же буквами со штрихами. Согласно черт. 33, $\angle A_1'M'A_2' = \angle A_1MA_2$. При вращении луча a по направлению к предельному положению OM, точки A_1, A_2 приближаются к M, точки A_1', A_2' — к M', угол A_1MA_2 при этом стремится как к пределу к углу α между касательными к C_1 и C_2 в точке M; угол же $A_1'M'A_2'$ стремится к соответствующему углу α'. Из постоянного равенства углов A_1MA_2 и $A_1'M'A_2'$ вытекает равенство их пределов α и α'; касательные к кривым C_1 и C_2 в точке M пересекаются под тем же углом, что и касательные к кривым C_1' и C'_2 в точке M'.

[47] При этом каждая точка оси имеет одну и ту же степень в отношении всех рассматриваемых окружностей.

[48] Т. е. точка P в отношении этой окружности имеет степень p^2.

[49] Диаметры пересекают концентрические окружности под прямым углом. См. конец пункта 3, d.

[50] Окружность K отвечает сама себе; окружность K_1', обратная K_1, пересекает K в тех же двух точках, что и K_1. Кроме того, так как K_1 пересекает K под прямым углом, то и обратные им кривые K_1' и K также пересекаются ортогонально (см. предложение в конце 3, d). Следовательно, окружности K_1 и K_1' совпадают.

[51] С формальной точки зрения вещественная окружность K_1 и мнимая окружность инверсии K пересекают друг друга под прямым углом. В самом деле, пусть O будет центр окружности K_1. Положим $OP = l$ и обозначим через r радиус окружности K_1. Если примем O за начало прямоугольной системы координат и OP за положительное направление оси x-ов, то окружности K_1, K и окружность, построенная на OP как на диаметре, будут соответственно иметь уравнения:

$$x^2+y^2-r^2=0; \quad (x-l)^2+y^2+r^2-l^2=0;$$
$$\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2=0.$$

Третья окружность проходит через мнимые точки пересечения первых двух окружностей, как это вытекает из тождества:

$$[x^2+y^2-r^2]+[(x-l)^2+y^2+r^2-l^2]-2\left[\left(x-\frac{l}{2}\right)^2+y^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]=0.$$

Угол OiP, которого мнимая вершина находится на окружности, имеющей OP диаметром, будет прямым. Вместе с тем OiP есть один из углов пересечения окружностей K_1 и K.

[52] Обратными фигурами являются две параллельные прямые.

[53] Об осях подобия см. § 7.

[54] В двух действительных или мнимых точках, в чем легко убедиться, написав уравнения какой-либо окружности K и двух в отношении ее взаимно обратных окружностей.

[55] Инверсия относительно центра O_1 замещает точку X точкой Y, затем инверсия относительно центра O_2 приводит ее в точку Z, дальнейшие инверсии совмещают ее последовательно с точкой O и, наконец, с нею же самою.

[56] На черт. 33 обозначим соответственно через r, ρ и R радиусы окружностей K, K_1' и K_1, через O, ω, O_1—их центры. Положим также $\overline{OQ}=t$, $\overline{OQ'}=\tau$, $OO_1=a$, $O\omega=\alpha$ (на прямой OO_1 выбирается положительное направление, определяющее знаки чисел OO_1, $O\omega$).

Проведя радиусы $\omega Q'$ и O_1Q, имеем:

$$t\cdot\tau=r^2, \quad \frac{\alpha}{a}=\frac{\rho}{R}=\frac{\tau}{t}=\frac{r^2}{t^2}=\frac{r^2}{a^2-R^2},$$

поэтому:

$$\alpha=\frac{ar^2}{a^2-R^2}; \quad \rho=\frac{Rr^2}{a^2-R^2}. \tag{1}$$

Пусть теперь $O_1(R_1)$, $O_2(R_2)$, $O_3(R_3)$ будут три окружности, а $\omega_1(\rho_1)$, $\omega_2(\rho_2)$, $\omega_3(\rho_3)$ — окружности им обратные при инверсии $O(r)$.

Если точки ω_1, ω_2, ω_3 лежат на прямой k, то k есть (выродившаяся) окружность, ортогональная относительно окружностей $\omega_1(\rho_1)$, $\omega_2(\rho_2)$, $\omega_3(\rho_3)$. Поэтому фигурой, обратной прямой k, будет окружность K, проходящая через центр инверсии O и ортогональная в отношении окружностей $O_1(R_1)$, $O_2(R_2)$, $O_3(R_3)$. Наоборот, если центр инверсии O лежит на упомянутой окружности K, то обратной ей фигурой будет прямая k, ортогональная в отношении окружностей $\omega_1(\rho_1)$, $\omega_2(\rho_2)$, $\omega_3(\rho_3)$ и проходящая поэтому через центры ω_1, ω_2, ω_3. Всегда можно при помощи инверсии заменить три данные окружности тремя окружностями, центры коих лежат на одной прямой k.

Пусть $O_1(R_1)$, $O_2(R_2)$, $O_3(R_3)$ будут такими именно окружностями. Для того чтобы при инверсии относительно $O(r)$ центры ω_1, ω_2, ω_3 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно выбрать центр инверсии O на той прямой k на которой лежат центры O_1, O_2, O_3. Предположив это условие выполненным, и выбрав на k по произволу положительное направление, мы положим $a_1 = OO_1$, $a_2 = OO_2$, $a_3 = OO_3$, $\alpha_1 = O\omega_1$, $\alpha_2 = O\omega_2$, $\alpha_3 = O\omega_3$.

В силу равенства (1) имеем:

$$\alpha_1 = \frac{a_1 r^2}{a_1^2 - R_1^2}; \quad \alpha_2 = \frac{a_2 r^2}{a_2^2 - R_2^2}; \quad \alpha_3 = \frac{a_3 r^2}{a_3^2 - R_3^2};$$

$$\rho_1 = \frac{R_1 r^2}{a_1^2 - R_1^2}; \quad \rho_2 = \frac{R_2 r^2}{a_2^2 - R_2^2}; \quad \rho_3 = \frac{R_3 r^2}{a_3^2 - R_3^2}.$$

Если положить, далее, $O_1O_2 = c_3$, $O_2O_3 = c_1$ (принимая во внимание знаки), то

$$a_1 - a_2 = c_3; \quad a_2 - a_3 = c_1, \tag{2}$$

причем c_3, c_1 не зависят от положения центра инверсии. Коль скоро из трех центров ω_1, ω_2, ω_3 последний равноотстоит от первых двух,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_3,$$

т. е.

$$\frac{a_1}{a_1^2 - R_1^2} + \frac{a_2}{a_2^2 - R_2^2} = \frac{2a_3}{a_3^2 - R_3^2}. \tag{3}$$

Наконец, если желательно, чтобы было $\rho_1 = \rho_2$, то должно выполняться равенство:

$$\frac{R_1}{a_1^2 - R_1^2} = \frac{R_2}{a_2^2 - R_2^2}. \tag{4}$$

Таким образом для замены — путем инверсии — трех окружностей $O_1(R_1)$, $O_2(R_2)$, $O_3(R_3)$ тремя окружностями черт. 3 необходимо удовлетворить четырем уравнениям (2), (3), (4), располагая тремя величинами a_1, a_2, a_3. Отсюда видно, что автор ошибается, утверждая, что задача Аполлония путем двух инверсий приводится к частному случаю черт. 3.

[57] Окружность M_1 в этой инверсии соответствует окружности M_2.

[58] Точка A, очевидно, является внешним центром подобия окружностей K_1, K_2, так как через нее проходят и обе внешние общие касательные этих окружностей.

[59] Полным четырехсторонником называют плоскую фигуру, составленную из 4 неограниченных прямых. Полный четырехсторонник имеет 6 вершин. Каждые две, не лежащие на одной стороне, называются противоположными.

[60] Предложение это носит название теоремы Дезарга (Désargues) по имени открывшего его в XVII в. французского геометра.

[61] Точки O, O' и, например, A, A' лежат в плоскости, определяемой двумя пересекающимися в точке A'' прямыми OA и OA'.

[61a] Эти две плоскости суть общие касательные плоскости всех конусов, определяемых точками прямой g.

[62] Приняв за плоскость xy прямоугольной системы координат плоскость, в которой лежат основания конусов P_1 и P_2, за начало координат — центр O_1, за ось x-ов — линию центров O_1O_2 и обозначив через r_1 и r_2 радиусы оснований конусов, найдем, что эти конусы выражаются соответственно уравнениями

$$z = r_1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = r_2 - \sqrt{(d-x)^2 + y^2},$$

где $d = O_1O_2$. Исключив y, имеем уравнение

$$(r_1 - r_2)[z + r_1 + r_2] = d(-2x + d)$$

плоскости, в которой лежит кривая пересечения конусов. При $z = 0$ это уравнение есть уравнение радикальной оси окружностей O_1 и O_2 и вместе с тем уравнение следа рассматриваемой плоскости на плоскости XY.

[63] В силу гармонических свойств поляры.

[64] Четыре прямые, проходящие через точку пересечения данных прямых.

[65] См. задачу 70 (стр. 37) и примечание 47.

[66] В обоих случаях кривая лежит в плоскости, проходящей через линию центров и перпендикулярной к плоскости чертежа. Если за ось x-ов принять линию центров, а за ось y-ов — перпендикуляр к ней в точке пересечения ее с радикальной осью пучка, то уравнение кривой имеет вид — в первом случае:

$$y^2 - x^2 = a^2,$$

во втором случае:

$$x^2 - y^2 = p^2,$$

причем a есть половина отрезка между основными точками, p — степень начала в отношении всех окружностей пучка.

Итак, в обоих случаях кривые суть равнобочные гиперболы, имеющие оси координат своими осями.

В первом случае решение можно получить проще, исходя из примечания 68.

[67] См. задачу 70 (стр. 37—38).

[68] Геометрическим местом пространственных изображений окружностей, проходящих через данную точку, является коническая поверхность, имеющая своей вершиной данную точку, причем все ее образующие наклонены к плоскости чертежа под углом в 45°. См. задачу 94 и примечание 71.

Искомой кривой являются две гиперболы, лежащие в пересечении двух конических поверхностей.

[69] Две плоскости, проходящие через данную прямую под углом в 45° к плоскости чертежа.

[70] Две параболы, симметрично расположенные относительно плоскости чертежа и лежащие соответственно в двух плоскостях, пересекающих плоскость чертежа по данной прямой под углом в 45° (см. примечания 68 и 69).

[71] Две прямоугольные конические поверхности, отвечающие данной окружности (см. черт. 47).

[72] Две гиперболы, по которым пересекаются отвечающие данным окружностям прямоугольные конические поверхности (см. черт. 47).

[73] Мы считаем полезным подчеркнуть, что приближенными способами задача не решается, но лишь производятся некоторые чертежные операции, практически заменяющие решение.

[74] Эти средства решения отвечают, очевидно, пользованию (кроме постулатов I, II, VI) постулатом III (см. Введение). Следует заметить, что в настоящей главе автор часто пользуется произвольными образами, которые не могут быть замещены построенными (например, по точкам A, B, A' черт. 53 не может быть построена ни одна точка вне прямой AB). Как указывалось в Введении, право пользования такими произвольными образами должно быть обосновано специальным условием. В § 9, 10, 11, 12 к средствам решения, указываемым автором, можно присоединить, например, еще следующие условия.

α. Может считаться построенной произвольная точка плоскости вне данной прямой.

β. Может считаться построенной произвольная точка на данной прямой, не совпадающая ни с одной из уже построенных на прямой точек.

[75] Доказательство основывается на гармонических свойствах полного четырехугольника.

[76] Всякий раз, как речь идет о лежащих в „недоступной части плоскости чертежа" геометрических образах, с формальной точки зрения дело сводится к тому, что добавочными условиями мы ограничиваем свое право пользоваться ранее заключенными условиями.

Хотя в силу постулата III (см. Введение) считается построенной точка пересечения данных прямых a, b, в силу же постулата I могла бы уже считаться построенной прямая, соединяющая эту точку с данной точкой P, мы, однако, лишаем себя права пользоваться последним условием именно в этом случае.

Практическое значение такого рода ограничений ясно само собою.

[77] Точнее: числитель и знаменатель не больше предыдущих, причем, по крайней мере, один из членов дроби меньше соответствующего члена в предшествующей дроби.

[78] На основании § 10, 4, по этим даным можно построить параллелограмм, и наоборот.

[79] $\overline{GC} = \overline{HB} = XD$, $\overline{EC} = ED$; $\angle GCE = \angle XDE = 45^\circ$; $\triangle GCE \cong \triangle XDE$ $\angle GEC = \angle XED$.

Так как $\angle DEG \perp \angle GEC = d$, то и $\angle XEG = \angle XED + \angle DEG = d$.

[80] Ибо b и c суть биссектрисы углов между прямыми a и d.

[81] В настоящем параграфе сохраняются постулаты I, II и III (см. Введение). Вместо постулатов IV и V вводятся следующие.

IV′. Считается построенной некоторая окружность K и ее центр O.

V′. Считаются построенными точки пересечения данных или построенных прямых с окружностью K.

Следует заметить к тому же, что относительно произвольных элементов, кроме условий α, β примечания 74, может быть заключено еще условие.

γ. Может считаться построенной произвольная точка на окружности K, не совпадающая ни с одной из уже построенных на ней точек.

[82] Это место с достаточной ясностью показывает, насколько практическая точка зрения мешает выяснению сущности вопроса. Выделенные автором основные операции, производимые циркулем и линейкой, практически покрывают одна другую, именно, 2-я и 3-я совпадают с первой, 5-я и 6-я — с четвертой. Гораздо более удобным является исследование вопроса с формальной точки зрения, с точки зрения принятых постулатов (см. Введение). Фактически, конечно, и автор имеет их именно в виду, что выясняется из сопоставления операции 1 с постулатом I, операции 2 с постулатом III, операции 4 с постулатом II, операции 6 с постулатом V, наконец, операций 3 и 5 с постулатом IV.

[83] Иначе говоря, если вместо постулатов I, II, III, IV, V установлены другие постулаты, то для того чтобы доказать, что с их помощью разрешимы все задачи второй степени, необходимо и достаточно обнаружить, что первые постулаты удовлетворены, когда последние приняты.

[84] Оставаясь на практической точке зрения, нет оснований считать окружность построенной, коль скоро построены некоторые ее точки. В деле построения окружностей циркуль не может быть заменен никаким другим инструментом, не предназначенным для описывания окружностей. Таким образом следует оставить циркуль специально для этой цели (операция 4), но лишь не употреблять его при построении точек (операция 5, 6).

Относительно формальных условий, отвечающих этим ограниченным средствам построения, см. примечание 81.

[85] Системы точек K_1 и K имеют точку A центром подобия и отношение $\overline{MP} : \overline{OP'}$ отношением подобия. При том же центре и том же отношении подобия произвольной точке H прямой g отвечает точка H' прямой g'.

[86] Истинное содержание теоремы Штейнера выясняется примечанием 81.

[87] В окружности строят (см. задачу 112) две прямые, параллельные одной из сторон параллелограмма, и две прямые, параллельные другой стороне (смежной с первой). В двух полученных таким образом трапециях проводят прямые, соединяющие точки пересечения диагоналей с точками пересечения непараллельных сторон; в пересечении этих прямых и находится искомый центр (ср. теорему, § 10, 1).

[88] На этот раз из обычных постулатов сохраняются лишь постулаты I, II, V и VI.

Хотя автор и упоминает об исключительном пользовании циркулем, но для построения прямых линий необходимо оставить линейку (операция 1, стр. 68; ср. примечание 84): запрещается лишь пользоваться ею в целях построения точек (операции 2 и 3). Разумеется, указанные выше условия лучше характеризуют сущность сделанных ограничений, нежели замечания относительно употребления тех или иных инструментов черчения.

Специальных условий о праве вводить произвольные образы не приходится теперь заключать, ибо все произвольные образы, коими пользуется автор, могут быть заменены построенными (следует принять во внимание заключенное в Введении условие задавать все геометрические образы системами точек).

[89] Отрезок RH определяется из треугольника ROG, в котором $\angle ROG = 60°$ (ибо треугольник ROG — равносторонний).

[90] Буква R (Rectus) есть знак прямого угла.

[91] Способ примененный в задаче 142 (см. черт. 73) для построения n-й части данного отрезка, может быть применен и к построению третьего пропорционального отрезка; он, впрочем, почти совпадает с указанным в тексте методом, но требует одной окружностью меньше.

[92] С формальной точки зрения все разъяснения настоящего пункта недостаточно убедительны.

Мы говорим, что задача может быть решена строго, если искомые ее объекты могут быть построены, основываясь исключительно на заключенных условиях или установленных постулатах. Наоборот, задача не решена строго, если в результате наших умозаключений оказались построенными не искомые объекты задачи, а какие-либо другие.

Что же касается того, какие именно условия заключать, то это, конечно, относится всецело к области нашего усмотрения. Обычно заключаются условия, указанные во Введении, но задача будет решена не менее строго, если при решении ее пользовались какими-либо другими предварительно заключенными условиями. Положим, например, что принят следующий постулат.

Если построены прямая и две точки вне ее, то считаются построенными те (две) точки прямой, из которых отрезок между данными точками виден под прямым углом.

Тогда искомая точка X предложенной в тексте задачи должна считаться построенной непосредственно в силу этого условия; этим задача разрешена вполне строго.

В области черчения упомянутое условие и отвечает тому передвиганию прямого угла, которое описано в тексте.

[93] См. примечание 83.

[94] Ср. примечание 84.

[95] Мы приведем формальные условия, которые отвечают употреблению линейки о двух параллельных краях (отстоящих один от другого на расстоянии a).

Прежде всего сохраняются постулаты I, II, III и VI Введения. Кроме них устанавливаются еще следующие.

Если дана или построена прямая g, то считаются построенными две прямые, параллельные g и отстоящие от нее на расстоянии a.

Если даны или построены две точки, расстояние между которыми не меньше a, то считаются построенными две пары параллельных прямых, отстоящих одна от другой на расстоянии a и проходящих соответственно через данные точки.

Первому постулату отвечает в области черчения прикладывание линейки одним краем к данной прямой; второму же — соответствует помещение линейки в плоскости чертежа так, чтобы один ее край проходил через одну из данных точек, а другой — через другую точку; это может быть выполнено двумя различными способами (см. черт. 97).

Относительно произвольных элементов остаются в силе условия α, β примечания 74.

[96] См. также F. Enriques, „Fragen der Elementargeometrie", стр. 135.

[97] Сохраняются обычные постулаты I, II, III и VI. Кроме них вводятся следующие.

Считается построенной прямая, перпендикулярная к данной или построенной прямой и проходящая через данную или построенную точку.

Считается построенной лежащая на данной или построенной прямой точка, из которой данный или построенный отрезок виден под прямым углом.

Первое из этих условий отвечает хорошо известному чертежникам приему, при котором прямой угол одной стороной прикладывают к построенной прямой и заставляют его скользить по ней, пока другая сторона не придет в соприкосновение с построенной точкой. Второе же условие осуществляется следующим мало употребительным приемом: стараясь, чтобы стороны угла проходили через концы отрезка, передвигают угол по плоскости чертежа, пока вершина его не упадет на построенную прямую.

Относительно произвольных элементов заключаем условие.

Считается построенной произвольная точка вне построенной прямой.

Необходимость заключения условий относительно произвольных элементов (коль скоро угодно, чтобы новыми средствами решения были разрешимы все задачи второй степени) ясна, например, из того, что без таких условий, с помощью одних только указанных выше постулатов, не может быть разделен пополам заданный концами отрезок, ибо не может быть построена вообще ни одна точка, кроме данных концов отрезка.

[98] Можно предположить угол α отличным от 90° (этот частный случай рассмотрен в предыдущем параграфе).

Соответствующие инструменту постулаты совершенно аналогичны указанным в примечании 97. Опускается лишь условие относительно произвольных элементов, ибо в нем сейчас нет надобности: все произвольные элементы, упоминаемые в настоящем параграфе, могут быть построены.

[99] Сохраняются обычные постулаты I, II, III, VI.

Кроме них заключается условие.

На данной или построенной прямой считается построенной точка, которая отстоит на расстоянии a от другой, лежащей на прямой и данной или ранее построенной точки (a есть длина эталона).

Наконец, относительно произвольных элементов заключается обычное условие (см. примечание 97).

[100] Употреблению биссектора отвечает следующий постулат.

Если построены две пересекающиеся прямые, то считается построенной и равноделящая угла между ними.

[101] Символ $\overline{\wedge}$ указывает на проективную зависимость.

[102] Последнее обстоятельство нетрудно установить на основании равенства:

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{BA'}} = -\frac{\overline{AB'}}{\overline{BB'}}.$$

[103] В этом можно убедиться, если рассмотреть ряд точек пересечения этих лучей с прямой, параллельной одной из биссектрис, и применить только что сделанное в тексте замечание.

[104] Выберем на рассматриваемой прямой произвольное начало и произвольное направление и обозначим абсциссы точек A, A', M, M', X, X' соответственно через a, a', m, m', x, x'.

Тогда, по свойству точек X, X', будут иметь место соотношения:

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = -\frac{\overline{AX'}}{\overline{A'X'}} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{MX}}{\overline{M'X}} = -\frac{\overline{MX'}}{\overline{M'X'}},$$

или

$$\frac{x-a}{x-a'} = -\frac{x'-a}{x'-a'}, \quad \frac{x-m}{x-m'} = -\frac{x'-m}{x'-m'},$$

откуда нетрудно усмотреть справедливость сделанного в тексте утверждения.

[105] Вполне строгое обоснование понятия о бесконечно удаленных элементах можно найти в книге Е. Л. Буницкого.*

[106] Это отвечает принятию постулатов I, II, III, VI и еще следующего.

Считаются построенными точки пересечения данных или построенных прямых с коническим сечением K

[107] См. F. Enriques „Fragen der Elementargeometrie", стр. 119—122.

* Е. Л. Буницкий. „О бесконечно удаленных элементах в геометрии положения", Одесса 1903.

[108] Два радикальных выражения называются сопряженными, если они разнятся лишь знаками некоторых из входящих в их состав радикалов.

[109] Алгебраическое уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с рациональными коэфициентами называется неприводимым, если его левая часть не разлагается на множители с рациональными же коэфициентами. Для уравнения третьей степени это равносильно тому, что оно не имеет рационального корня.

[110] Здесь и в дальнейшем автор имеет в виду неприводимые уравнения с рациональными коэфициентами. См. предыдущее примечание.

[111] Автор неявно допускает, что различным точкам плоскости должны соответствовать неравные комплексные числа.

[112] Пусть $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots l^\lambda$, где $a, b, c, \ldots l$ — различные простые числа, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ — натуральные числа. Числа $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots l^\lambda$ будут взаимно простыми.

Из предложения, формулированного в п. 1, вытекает, что для того чтобы было возможно деление окружности на k равных частей, достаточно, чтобы возможно было деление ее на $a^\alpha, b^\beta, \ldots, l^\lambda$ равных частей (необходимость этого условия ясна сама собою). Если же в отношении чисел $a^\alpha, b^\beta, \ldots l^\lambda$ иметь в виду указанную в п. 2 теорему Гаусса, то придем к следующей общей теореме:

„Для того чтобы возможно было разделить окружность с помощью циркуля и линейки на k частей, необходимо и достаточно, чтобы число k имело вид:

$$k = 2^r p_1 p_2 \ldots p_m,$$

где $r = 0, 1, 2, 3, \ldots; p_1, p_2, \ldots p_m$ суть различные простые числа, каждое из которых имеет вид:

$$p = 2^{2^n} + 1“.$$

[113] На то обстоятельство, что задача об удвоении куба есть частный случай формулированной ниже в тексте задачи, впервые указал (по утверждению историков) Гиппократ Хиосский (вторая половина V в. до н. э.).

[114] Из трех указанных методов α, β, γ первые два принадлежат греческому геометру Менехму (около 300 г. до н. э.), а последний — французскому математику Декарту.

[115] В этом случае мы имеем следующее формальное допущение: считается построенной парабола $y^2 = x$, а также и точки ее встречи с построенной окружностью, проходящей через начало и имеющей центр в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{m}{2}\right)$.

[116] Пользование конхоидой для построения искомых точек отвечает формально следующим постулатам.

Конхоида считается построенной, коль скоро построены ее полюс, основание и интервал.

Считаются построенными точки пересечения построенной конхоиды с построенной прямой (окружностью).

[117] В соответствии с этим методом практического построения постулат, приведенный в предыдущем примечании, может быть, если угодно, формулирован иначе.

Если даны или построены точка P, прямая g, прямая (окружность) k и, наконец, отрезок s, то считаются построенными соответственно на g и k две точки, лежащие на одной прямой с P, расстояние между которыми равно s.

Это (несколько громоздкое) условие вполне отвечает практически вдвиганию отрезка (полоски бумаги, линейки с нанесенным на ней отрезком) s между прямой g и прямой (окружностью) k так, чтобы продолжение его проходило через P.

Коль скоро принят приведенный постулат, является (см. примечание 92) излишним доказывать, что построения с его помощью будут точными, а не приближенными.

Как указывает историк математики Цэйтен (Zeuthen, „Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter“; есть русский перевод), у древних греков долгое время такого рода вдвигание отрезков было в такой же мере употребительным средством решения задач, как и циркуль и линейка (см. Enriques, „Fragen von Elementargeometrie", Teubner 1907, стр. 204, 205).

[118] С формальной точки зрения этот прием отвечает условию считать построенными точки B и C, коль скоро построены точки A, D и прямые g, f.

[119] Геометрическое место точек пересечения соответственных лучей двух проективных пучков есть коническое сечение. Что в данном случае мы имеем равностороннюю гиперболу, можно элементарно обосновать на том соображении, что в пучках A и O имеются две пары взаимно параллельных соответственных лучей, вследствие чего кривая имеет две действительные бесконечно удаленные точки, и асимптоты кривой, соответственно параллельные лучам h_1 и h_2, взаимно перпендикулярны.

[120] См. примечание 116.

[121] Употребление этого инструмента, очевидно, отвечает непосредственному условию считать построенными прямые, делящие данный угол на 3 равные части.

[122] Термин „биквадратный" употребляется для обозначения уравнения четвертой степени вообще, а не в том узком смысле, какой ему придается обычно в русских учебниках.

[123] Так как $4y^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$, то $uv + uw + vw = 2y^2 + A$.

Поэтому, возводя в квадрат, имеем:

$$u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2 = (2y^2 + A)^2 - 2uvw(u + v + w) = (2y^2 + A)^2 + 4By = 4(y^4 + Ay^2 + By) + A^2 = A^2 - 4C.$$

[124] См. книгу Th. Reye „Die Geometrie der Lage" (Leipzig 1886), 1, стр. 138—139.

[125] Это отвечает простому условию считать построенными точки X и Y, коль скоро построены точки A, B, C, D, E.

[126] См., например, книгу Вебера и Вельштейна „Энциклопедия элементарной математики", т. I (Одесса 1907), стр. 525—535.

[127] Ср. Введение „Геометрографические решения".

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава VII.

Деление окружности. (Построение правильных многоугольников.)

Глава VIII.

Геометрические построения третьей и четвертой степени.

Сгр.

Глава IX.

Исторические замечания относительно квадратуры круга. Приближенное выпрямление окружности. Правила для увеличения точности построений.

Глава X.

Геометрография.

Редактор *А. Г. Чахирев.* Технический редактор *П. А. Классен.* Корректор *А. А. Морозова.*

Сдано в набор 5/III 1940 г. Подписано к печати 12/XII 1940 г. Учпедгиз № 304. Заказ № 3698. Тираж 5.000 экз. М 31073. Формат бумаги $60\times92^{1}/_{16}$. Печ. л. $14^{1}/_{2}$. Уч. изд. листов 19,07. Бумага ф-ки „Сокол".

Государственное учебно-педагогическое издательство Наркомпроса РСФСР. Ленинградское отделение. Ленинград, Пр. 25 Окт., д. 28.

4-я тип. ОГИЗа РСФСР треста „Полиграфкнига" им. Евг. Соколовой, Ленинград, пр. Кр. Командиров, 29.