

А. И. АХИЕЗЕР, С. В. ПЕЛЕТМИНСКИЙ

# МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1977

530.1  
А 95  
УДК 530.1

**Методы статистической физики.** А. И. А х и з е р, С. В. П е л е т м и н с к и й. Монография. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977 г.

Книга посвящена систематическому изложению методов статистической механики, применяемых в современной физике. В основе изложения лежит метод сокращенного описания систем, состоящих из большого числа частиц. В книге дается изложение теории кинетических уравнений для классических и квантовых систем. Особенно подробно изучаются квантовые системы. На основе микроскопических уравнений движения и принципа ослабления корреляций выводятся основные уравнения макроскопической физики — уравнения гидродинамики (как нормальной, так и сверхтекучей жидкости) и уравнения Максвелла в среде.

Рассмотрен ряд приложений: теория явлений переноса в газах и твердых телах, теория броуновского движения, теория замедления нейтронов.

Рис. 3, библи. 119 назв.

А  $\frac{20402-058}{053(02)-77}$  93-77,

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1977 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
От авторов . . . . .	8
<b>Глава 1. Кинетические уравнения для классических систем</b>	
§ 1.1. Многочастичные функции распределения . . . . .	11
1.1.1. Кинетическое уравнение Больцмана (11). 1.1.2. Плотность вероятности фазовых точек (15). 1.1.3. Уравнения для многочастичных функций распределения (17).	
§ 1.2. Интегральные уравнения для многочастичных функций распределения . . . . .	21
1.2.1. Интегральные уравнения для функций распределения на кинетическом этапе эволюции (21). 1.2.2. Построение теории возмущений для систем с малой плотностью частиц (25).	
§ 1.3. Кинетические уравнения и явления переноса в газах . . . . .	27
1.3.1. Кинетическое уравнение в случае слабого взаимодействия (27). 1.3.2. Кинетическое уравнение в случае малой плотности (29). 1.3.3. Теория явлений переноса в газах (32).	
§ 1.4. Кинетические уравнения для частиц, взаимодействующих со средой . . . . .	37
1.4.1. Дифференциальное уравнение Фоккера — Планка для медленных процессов (37). 1.4.2. Теория броуновского движения (39). 1.4.3. Теория замедления нейтронов (48).	
§ 1.5. Статистическая механика системы заряженных частиц . . . . .	55
1.5.1. Кинетическое уравнение для электронов плазмы (55). 1.5.2. Теория экранирования (56). 1.5.3. Дисперсионное уравнение для волн в плазме (63).	
§ 1.6. Необратимость макроскопических процессов и эргодическая гипотеза . . . . .	66
1.6.1. Обратимость механических движений и необратимость макроскопических процессов (66) 1.6.2. Эргодическая гипотеза (72).	
<b>Глава 2. Общие принципы статистической механики квантовых систем</b>	
§ 2.1. Принципы квантовой механики . . . . .	78
2.1.1. Чистые состояния и смеси (78). 2.1.2. Динамический закон квантовой механики (81). 2.1.3. Процесс измерения (87).	
§ 2.2. Вторичное квантование . . . . .	89
2.2.1. Операторы рождения и уничтожения частиц (89). 2.2.2. Операторы физических величин (95).	
§ 2.3. Симметрия уравнений квантовой механики . . . . .	101
2.3.1. Инвариантность уравнений квантовой механики относительно непрерывных преобразований (101). 2.3.2. Инвариантность уравнений квантовой механики относительно пространственного отражения и обращения времени (109).	

§ 2.4. Принцип ослабления корреляций и эргодические соотношения для квантовых систем . . . . .	111
2.4.1. Принцип ослабления корреляций (111). 2.4.2. Уравнения движения (118). 2.4.3. Эргодические соотношения для квантовых систем (120).	
<b>Глава 3. Теория равновесных состояний квантовых систем</b>	
§ 3.1. Теория слабо неидеальных квантовых газов . . . . .	125
3.1.1. Распределение Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака (125). 3.1.2. Термодинамическая теория возмущений (131). 3.1.3. Квантовые виртуальные разложения (134).	
§ 3.2. Сверхтекучесть газа бозонов и фермионов . . . . .	140
3.2.1. Квазисредние (140). 3.2.2. Теория сверхтекучести бозе-газа (145). 3.2.3. Теория сверхтекучести ферми-газа и явление сверхпроводимости (152).	
<b>Глава 4. Методы исследования неравновесных состояний квантовых систем</b>	
§ 4.1. Реакция системы на внешнее возмущение . . . . .	166
4.1.1. Статистический оператор системы, находящейся в слабом внешнем поле (166). 4.1.2. Свойства функций Грина (170).	
§ 4.2. Общая теория релаксационных процессов . . . . .	175
4.2.1. Интегральное уравнение для статистического оператора в случае слабого взаимодействия (175). 4.2.2. Интегральное уравнение для статистического оператора в случае малых неоднородностей (182). 4.2.3. Интегральное уравнение для статистического оператора неоднородных систем с учетом слабых взаимодействий (191).	
§ 4.3. Суммирование секулярных членов . . . . .	196
4.3.1. Асимптотические операторы (196). 4.3.2. Функциональное уравнение для асимптотических операторов (201). 4.3.3. Суммирование секулярных членов и огрубленный статистический оператор (205).	
§ 4.4. Низкочастотная асимптотика функций Грина . . . . .	207
4.4.1. Линеаризация уравнений для огрубленного статистического оператора (207). 4.4.2. Асимптотика функций Грина в области малых частот и малых волновых векторов (212).	
<b>Глава 5. Кинетические уравнения для квантовых систем</b>	
§ 5.1. Кинетические уравнения в случае слабого взаимодействия . . . . .	220
5.1.1. Кинетический этап эволюции (220). 5.1.2. Кинетические уравнения для газов бозонов и фермионов во втором приближении теории возмущений (227). 5.1.3. Нулевой звук (235). 5.1.4. Интеграл столкновений в третьем приближении теории возмущений (236). 5.1.5. Энтропия слабонеидеального газа (241).	
§ 5.2. Кинетические уравнения с учетом только парных столкновений . . . . .	252
5.2.1. Статистический оператор на кинетическом этапе эволюции (252). 5.2.2. Разложение интеграла столкновений в ряд по степеням одночастичной функции распределения (254). 5.2.3. Квантовое виртуальное разложение интеграла столкновений (258).	
§ 5.3. Кинетические уравнения для частиц и излучения, взаимодействующих с внешней средой . . . . .	262
5.3.1. Кинетическое уравнение для частиц, взаимодействующих со средой (262). 5.3.2. Кинетическое уравнение для фотонов в среде (266).	
§ 5.4. Кинетические уравнения для частиц во внешнем поле и функции Грина в кинетическом приближении . . . . .	272
5.4.1. Интегральное уравнение для статистического оператора (272). 5.4.2. Кинетические уравнения для заряженных частиц в электромагнитном поле (277). 5.4.3. Связь между низкочастотной асимп-	

токовой функций Грина и кинетическими уравнениями (283).	
5.4.4. Интегральные уравнения для определения низкочастотной асимптотики функций Грина вырожденных бозе-систем (290).	
5.4.5. Функции Грина в случае слабого взаимодействия между квазичастицами (295).	
5.4.6. Одночастичные функции Грина вырожденных бозе-систем в кинетическом приближении (301).	
§ 5.5. Интеграл столкновений для фононов и теория теплопроводности диэлектриков . . . . .	308
<b>Глава 6. Уравнения макроскопической физики</b>	
§ 6.1. Уравнения гидродинамики нормальной жидкости . . . . .	314
6.1.1. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости (314).	
6.1.2. Уравнения гидродинамики неидеальной жидкости (318).	
6.1.3. Низкочастотная асимптотика гидродинамических функций Грина (326).	
§ 6.2. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости . . . . .	328
6.2.1. Поток гидродинамических величин (328).	
6.2.2. Уравнение движения для статистического оператора сверхтекучей жидкости (336).	
6.2.3. Уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости (340).	
§ 6.3. Уравнения макроскопической электродинамики . . . . .	347
6.3.1. Уравнения Максвелла — Лоренца для операторов электромагнитных полей (347).	
6.3.2. Отклик системы на внешнее электромагнитное возмущение (350).	
6.3.3. Связь между внутренними и внешними восприимчивостями (358).	
<b>Литература . . . . .</b>	<b>364</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя монография А. И. Ахиезера и С. В. Пелетминского, посвященная изложению методов статистической механики, займет, несомненно, особое место среди монографий по статистической механике, так как в ней единым образом выводятся и исследуются как кинетические уравнения для классических и квантовых систем, так и уравнения макроскопической физики, т. е. уравнения гидродинамики для обычной и сверхтекучей жидкости и уравнения макроскопической электродинамики.

Единство подхода к столь, казалось бы, разным вопросам достигается благодаря тому, что авторы положили в основу изложения идею сокращенного описания неравновесных состояний макроскопических систем. Сокращенное описание естественно возникает в ходе эволюции физических систем, обладающих большим числом степеней свободы, и поэтому столь же естественным и целесообразным представляется использовать это описание неравновесных систем и для получения кинетических уравнений и для получения уравнений гидродинамики. Если при этом система характеризуется слабым взаимодействием между частицами либо малой их плотностью, то гидродинамическому этапу эволюции предшествует кинетический этап, который может быть исследован с помощью кинетических уравнений. Если же взаимодействие между частицами не мало и плотность их велика, то кинетический этап эволюции отсутствует, и сразу возникает гидродинамический этап, который может быть исследован с помощью уравнений гидродинамики.

Четко придерживаясь концепции сокращенного описания, авторы строят теорию на основе общих принципов — таких, как принцип ослабления корреляций и эргодические соотношения, связанные с особенностями структуры гамильтонианов и свойствами их симметрии.

Особое внимание авторы уделяют изучению квантовых систем, причем изложению проблем квантовой статистики они предпосылают ясное изложение основ квантовой механики, включающее теорию измерений.

Метод сокращенного описания применяется авторами и для исследования асимптотического поведения таких универсальных величин, как равновесные двухвременные функции Грина.

Большое внимание уделяется рассмотрению систем со спонтанно нарушенной симметрией, особенно систем с нарушенной градиентной симметрией.

Монографию отличает четкость, ясность и последовательность математических построений — как в целом, так и в конкретных вопросах. Можно, например, отметить исследование вопросов, связанных с энтропией слабо неидеального газа, квантовыми вириальными разложениями в теории кинетических уравнений и т. д.

Но читатель найдет в этой монографии не только изложение формальных основ статистической механики. В монографии содержится также изложение и целого ряда важнейших конкретных приложений, хорошо иллюстрирующих общую теорию. К числу их относится кинетическая теория газов, теория броуновского движения, теория замедления нейтронов, теория явлений переноса в кристаллах и некоторые вопросы статистической теории плазмы.

Для монографии характерно, если можно так выразиться, равновесие между физикой и математикой, которое в значительной степени облегчает ее чтение и понимание.

Несомненно, что эта интересная и ценная книга принесет большую пользу широкому кругу читателей — как физиков, так и математиков, занимающихся проблемами статистической механики.

*Академик Н. Н. Боголюбов*

## ОТ АВТОРОВ

Свойства макроскопических тел в значительной мере обусловлены их атомно-молекулярной структурой. Именно, так как число атомов и молекул, входящих в состав макроскопических тел, колоссально велико, то возникают закономерности особого рода — статистические закономерности, которые вместе с микроскопическими законами движения атомов и молекул и определяют макроскопические свойства физических тел.

Физическая природа различных процессов, протекающих в макроскопических телах, может быть самой различной. Поэтому разные области физических явлений требуют развития разных теорий. Однако, несмотря на различие этих теорий, их объединяет общий метод исследования. Этим методом является метод статистической механики, основывающийся на рассмотрении макроскопических тел как систем, состоящих из огромного числа частиц. Поскольку точные значения координат и импульсов, относящихся к отдельным частицам, несущественны при макроскопическом описании (не говоря уже о том, что фактически мы не знаем всех этих величин), то по ним должно быть произведено усреднение, для чего должно быть введено понятие вероятности состояния.

В связи с введением понятия вероятности следует подчеркнуть, что вероятностное описание не является принципиально необходимым в классической физике. Мы пользуемся им по той причине, что практически невозможно да и нецелесообразно следить за движением каждого атома, хотя в принципе, если бы атомы подчинялись классической механике, это было бы возможно. В действительности атомы подчиняются не классической, а квантовой механике, и концепция вероятности оказывается лежащей в природе вещей. При этом принципиальная статистичность в поведении микрообъектов не противоречит классической детерминированности в поведении макрообъектов, так как макроскопическое рассмотрение предусматривает, как уже говорилось, усреднение по динамическим переменным, относящимся к отдельным атомам; при огромном же числе этих переменных усреднение в соответствии с общими теоремами тео-



рии вероятностей приводит к чрезвычайно сильному уменьшению всех дисперсий для макроскопических наблюдаемых.

Чрезвычайно существенным является то обстоятельство, что в ходе эволюции, которую претерпевает с течением времени каждая физическая система, меняется и характер вероятностного описания. Более точно можно сказать, что на разных этапах эволюции физической системы выражение для вероятности состояния имеет различную структуру, причем эта структура упрощается с течением времени. Это означает, что вероятность состояния системы по прошествии достаточно большого времени фактически определяется ограниченным числом функций, т. е. вероятность представляет собой функционал от некоторых функций, которые и могут быть использованы для макроскопического описания физических систем.

Эти функции удовлетворяют определенным уравнениям, которыми на разных этапах эволюции физической системы являются кинетические уравнения для функции распределения частиц, а также уравнения гидродинамики и другие уравнения переноса.

Настоящая книга посвящена изложению общих методов статистической механики, которые основаны на идее сокращенного описания систем с большим числом степеней свободы, а также ряду приложений этих методов.

Мы начинаем с изучения кинетических уравнений в случае классических систем (гл. 1). Здесь вводятся многочастичные функции распределения, которые на кинетическом этапе эволюции являются функционалами одночастичной функции распределения. Для этих функционалов строится цепочка зацепляющихся интегральных уравнений, эквивалентная цепочке дифференциальных уравнений Боголюбова, Борна, Грина, Кирквуда, Ивона и «граничному условию» Боголюбова, связанному с принципом ослабления корреляций для макроскопических систем. В этой же главе излагается теория явлений переноса, основанная на кинетическом уравнении Больцмана и выводится уравнение Фоккера — Планка для медленных процессов. Из приложений рассматривается теория броуновского движения и теория замедления нейтронов. В гл. 1 рассматриваются также основные вопросы статистической механики заряженных частиц. Заканчивается глава обсуждением вопросов, связанных с обратимостью механических движений и необратимостью макроскопических процессов.

В гл. 2 излагаются общие принципы статистической механики квантовых систем. Здесь наряду с общими принципами квантовой механики рассматривается принцип ослабления корреляций и эргодические соотношения для макроскопических квантовых систем.

Гл. 3 посвящена теории равновесных состояний квантовых систем. Здесь рассматриваются вопросы, связанные с термоди-

намической теорией возмущений и с квантовыми виртуальными разложениями.

На основе метода квазисредних строится теория сверхтекучести газов бозонов и фермионов.

Гл. 4 посвящена методам исследования неравновесных состояний квантовых систем. Здесь вводится реакция системы на внешнее возмущение, исследуются свойства функций Грина и развивается общая теория релаксационных процессов, основанная на идее сокращенного описания макроскопических систем. Подробно исследуется низкочастотная асимптотика функций Грина.

В гл. 5 рассматриваются кинетические уравнения для квантовых систем. Здесь выведены кинетические уравнения в случае слабого взаимодействия и в случае малой плотности. Изучен вопрос об энтропии слабо неидеального неравновесного квантового газа. Выведены кинетические уравнения для частиц в переменном внешнем поле и установлена связь между этими уравнениями и низкочастотной асимптотикой функций Грина как нормальных, так и вырожденных систем. Мы получаем также кинетические уравнения для частиц и излучения, взаимодействующих со средой. Из приложений рассматриваются такие вопросы, как теория нулевого звука, теория теплопроводности диэлектриков.

В гл. 6 рассматривается гидродинамический этап эволюции и выводятся уравнения гидродинамики как нормальной так и сверхтекучей жидкости. В этой же главе мы получаем уравнения макроскопической электродинамики и устанавливаем свойства электродинамических функций Грина.

Как мы уже указывали, наше изложение основывается на идее сокращенного описания систем, состоящих из большого числа частиц. Поэтому мы не касаемся в нашей книге вопросов, лежащих вне этой линии, например, не рассматриваем теорию уравнений для диагональных элементов статистического оператора, развиваемую в работах Пригожина и Ван-Хова. Мы не излагаем также диаграммной техники, так как ее основные результаты могут быть получены на основе метода сокращенного описания. В этой связи наша библиография не является сколько-нибудь исчерпывающей, и мы заранее просим извинения у тех авторов, работы которых по методам статистической физики не вошли в нашу библиографию.

Авторы выражают благодарность В. П. Приходько, А. И. Соколовскому и В. К. Федянину за ценные замечания и помощь при подготовке рукописи к изданию.

*А. И. Ахиезер,  
С. В. Пелетминский*

## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### § 1.1. Многочастичные функции распределения

**1.1.1. Кинетическое уравнение Больцмана.** В отличие от статистической термодинамики, которая занимается исследованием равновесных состояний макроскопических систем, состоящих из большого числа частиц, физическая кинетика занимается исследованием различных физических процессов, протекающих в таких системах.

По прошествии достаточно большого времени (оно называется временем релаксации) каждая макроскопическая система, предоставленная самой себе, переходит в состояние статистического равновесия. Поэтому физическая кинетика должна включать в себя как предельный случай статистическую термодинамику. Из общих соображений, однако, ясно, что предельное равновесное состояние должно описываться значительно проще, чем те процессы, в результате которых достигается это состояние. И действительно, все термодинамические свойства любого макроскопического тела могут быть исследованы с помощью универсального *распределения Гиббса* [42]

$$\omega(x_1, \dots, x_N) = \exp\{\beta(F - \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N))\}, \quad (1.1.1)$$

связывающего равновесную плотность вероятности  $\omega(x_1, \dots, x_N)$  того, что отдельные частицы системы имеют заданные координаты и импульсы  $x_i = (x_i, p_i)$ , с гамильтонианом системы  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)$  и такими макроскопическими величинами как температура  $T = \beta^{-1}$  и свободная энергия  $F$ .

Это распределение, установленное Гиббсом в 1901 г., справедливо для любой макроскопической системы, причем из микроскопических величин, относящихся к системе, оно содержит лишь гамильтониан системы, а из макроскопических величин в него входят параметры, которые характеризуют состояние равновесия, т. е. температура, объем и число частиц (свободная энергия является функцией температуры  $T$ , объема  $\mathcal{V}$  и числа частиц  $N$ ).

Универсальность распределения Гиббса, содержащего в себе в принципиальном отношении всю статистическую термодинамику, связана с тем, что оно описывает равновесные состояния.

При переходе от равновесных состояний к неравновесным состояниям универсальность теряется, и физическая кинетика получает для временного хода различных процессов на различных этапах эволюции системы различные соотношения, которые не могут быть объединены в единую универсальную формулу типа распределения Гиббса. Это связано с тем, что на разных этапах эволюции системы ее состояние описывается разными наборами величин, в отличие от распределения Гиббса, в которое входят только температура и объем.

Статистическая термодинамика и физическая кинетика берут свое начало от кинетической теории газов, созданной Максвеллом и Больцманом во второй половине XIX века. И именно на примере газа, являющегося простейшей физической системой, легче всего понять соотношение между статистической термодинамикой и физической кинетикой — двумя составными частями статистической физики.

Если в первом приближении не учитывать взаимодействия между частицами газа, то его гамильтониан будет иметь вид

$$\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq l \leq N} \left( \frac{p_l^2}{2m} + U(x_l) \right),$$

где  $p_l$  и  $x_l$  — импульс и радиус-вектор  $l$ -й частицы,  $U(x_l)$  — ее потенциальная энергия в заданном внешнем поле,  $m$  — масса частицы и  $N$  — число частиц (частицы предполагаются одинаковыми). Такая форма гамильтониана приводит к тому, что плотность вероятности  $\omega(x_1, \dots, x_N)$  распадается на произведение одночастичных функций распределения  $f_0(x_l, p_l)$

$$\omega(x_1, \dots, x_N) \propto \prod_{1 \leq l \leq N} f_0(x_l, p_l),$$

$$f_0(x, p) = C \exp \left\{ -\beta \frac{p^2}{2m} - \beta U(x) \right\}, \quad (1.1.2)$$

где  $C$  — нормировочная постоянная.

Функция  $f_0(x, p)$  носит название *распределения Максвелла — Больцмана*. Оно определяет (после умножения на  $d^3x d^3p$ ) число частиц, координаты и импульсы которых лежат в интервалах  $d^3x$  и  $d^3p$  вблизи данных значений  $x$  и  $p$  по прошествии большого времени (по сравнению с временем релаксации  $\tau_r$ ), когда газ приходит в состояние статистического равновесия.

Но может быть поставлен вопрос, как ведет себя одночастичная функция распределения при временах  $t$ , меньших времени релаксации  $\tau_r$ , и как происходит предельный переход к распределению Максвелла — Больцмана. Этот вопрос является простейшим и вместе с тем фундаментальнейшим вопросом физической кинетики. Он был решен Больцманом, установившим уравнение, которому удовлетворяет неравновесная одночастичная функция распределения  $f(x, p, t)$  в случае газа малой плот-

ности [33]. Уравнение это, носящее название *кинетического уравнения Больцмана*, имеет следующий вид.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1.1.3)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$  — скорость частицы,  $\mathbf{F} = -\partial U/\partial \mathbf{x}$  — внешняя сила, действующая на частицу, и  $(\partial f/\partial t)_c$  — так называемый *интеграл столкновений*. Функция распределения определяет (после умножения на  $d^3x d^3p$ ) число частиц, координаты и импульсы которых лежат в момент времени  $t$  в интервале  $d^3x d^3p$ , и удовлетворяет условию нормировки

$$\int d^3x d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = N.$$

Входящие в кинетическое уравнение слагаемые  $\mathbf{v} \partial f/\partial \mathbf{x}$  и  $\mathbf{F} \partial f/\partial \mathbf{p}$  определяют изменение функции распределения, обусловленное приходом и уходом частиц в элемент  $d^3x d^3p$  пространства координат и импульсов в результате движения частиц под действием внешней силы, величина же  $(\partial f/\partial t)_c$  определяет изменение функции распределения, обусловленное взаимодействием частиц газа друг с другом.

Если плотность газа невелика, то существенны только парные столкновения и интеграл столкновений имеет вид

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = \int d^3p_1 \int d\Omega |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma(\theta, \mathbf{v} - \mathbf{v}_1) (f'f'_1 - ff_1). \quad (1.1.4)$$

Здесь  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$  — импульсы каких-либо двух частиц до столкновения,  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}'_1$  — импульсы этих же частиц после столкновения, связанные с  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$  законами сохранения импульса и энергии;  $d\sigma = \sigma(\theta, \mathbf{v} - \mathbf{v}_1) d\Omega$  — дифференциальное сечение рассеяния в телесном угле  $d\Omega$  ( $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'$ ) и  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ ,  $f_1 = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t)$ ,  $f' = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}', t)$  и т. д. Величины импульсов частиц после столкновения, очевидно, однозначно определяются величинами  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}_1$ ,  $\theta$ .

Мы видим, что в интеграл столкновений входит сечение рассеяния, т. е. величина, имеющая вероятностный характер. Такого рода величины не входят ни в одно из динамических уравнений механики. Таким образом, можно сказать, что формулировка кинетического уравнения требует введения принципиально новой для механики концепции — концепции вероятности. С другой стороны, необратимость кинетических процессов также имеет вероятностный характер. Поэтому естественно, что кинетическое уравнение является тем математическим аппаратом, который позволяет исследовать необратимые процессы в газах и определять кинетические коэффициенты газа, т. е. коэффициенты теплопроводности, вязкости и диффузии.

Необратимости кинетических процессов соответствует рост энтропии системы, и кинетическое уравнение позволяет доказать

закон возрастания энтропии газа (*H-теорема Больцмана*). Плотность энтропии газа  $s(\mathbf{x}, t)$  определяется при этом, согласно Больцману, комбинаторным образом:

$$s(\mathbf{x}, t) = - \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t). \quad (1.1.5)$$

Из этого определения и кинетического уравнения (1.1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} &= \\ &= - \frac{1}{4} \int d^3p_1 \int d^3p \int d\Omega |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma(\theta, \mathbf{v} - \mathbf{v}_1) (f'f'_1 - ff_1) \ln \frac{ff_1}{f'f'_1}, \\ s(\mathbf{x}, t) &= - \int d^3p v f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \end{aligned}$$

откуда  $\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x s(\mathbf{x}, t) \geq 0$ . Знак равенства соответствует состоянию статистического равновесия, когда функция распределения определяется формулой (1.1.2).

Так как кинетическое уравнение содержит только первую производную от функции распределения по времени, то для него может быть поставлена задача Коши, т. е. задача нахождения функции распределения частиц  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  при  $t \neq 0$  по заданному начальному распределению  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, 0)$ . Эта задача имеет единственное решение [62], но в силу специфики структуры интеграла столкновений функция  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  будет положительной только при  $t > 0$ , т. е. во все последующие моменты времени по отношению к начальному моменту. Что же касается моментов времени, предшествующих начальному моменту, то для них решение кинетического уравнения может не быть положительным. Поэтому решение кинетического уравнения при  $t < 0$  не имеет, вообще говоря, физического смысла. Таким образом, в кинетическом уравнении Больцмана оба направления времени не эквивалентны. Это обстоятельство находится в соответствии с тем, что кинетическое уравнение пригодно для описания необратимых процессов.

Метод, который был использован самим Больцманом при выводе кинетического уравнения, носил в некотором смысле полуинтуитивный характер; в частности, при выводе считалось само собой разумеющимся, что состояние газа всегда может быть описано только с помощью одночастичной функции распределения, т. е. молчаливо предполагалось, что эффекты, связанные с корреляцией частиц, всегда пренебрежимо малы. Существенным является при этом то, что метод Больцмана не позволяет в принципе учесть эти эффекты. Между тем их учет имеет принципиальное значение, так как, только оценив эти эффекты, можно установить критерий применимости кинетического

уравнения — вопрос, на который должна дать ответ последовательная кинетическая теория. Кроме того, учет корреляций между частицами представляет и непосредственный физический интерес, ибо он позволяет исследовать кинетические процессы, обусловленные неидеальностью газа.

Таким образом, возникает важная проблема строгого вывода кинетического уравнения и нахождения поправок к нему, связанных с неидеальностью газа. Эта проблема была решена Боголюбовым, который показал, что кинетическое уравнение Больцмана, так же как и поправки к нему, могут быть получены, исходя из основных законов механики и некоторого общего принципа — так называемого принципа ослабления корреляций [20].

Существенное значение метода, развитого Боголюбовым, состоит в том, что он позволяет исследовать кинетические процессы также и в тех случаях, когда они не могут быть описаны с помощью обычного кинетического уравнения Больцмана.

Мы перейдем теперь к изложению методов получения кинетического уравнения Больцмана и других кинетических уравнений в случае классических систем.

1.1.2. Плотность вероятности фазовых точек. Рассмотрим фазовое пространство, образуемое координатами и импульсами всех частиц исследуемой физической системы, и введем в нем плотность вероятности  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t)$  фазовых точек, где  $x_i$  служит для обозначения радиус-вектора  $x_i$  и импульса  $p_i$   $i$ -й частицы. Смысл этой функции состоит в том, что величина

$$d\omega = \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) dx_1 \dots dx_N \quad (1.1.6)$$

определяет вероятность того, что в момент времени  $t$  координаты и импульсы частиц лежат в интервалах  $dx_1 \equiv d^3x_1 d^3p_1$ ,  $dx_2 \equiv d^3x_2 d^3p_2$ , ...

Напомним, что понятие вероятности предполагает введение ансамбля тождественных систем, относительное число которых с данными значениями динамических характеристик и определяет функцию  $\mathcal{D}$ . Так как система состоит из тождественных частиц, то функция распределения является симметричной функцией своих аргументов и ее естественно нормировать следующим образом:

$$\frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) = 1.$$

Такая нормировка приводит к простому соответствию между квантовыми и классическими формулами.

Подчеркнем, что описание системы с помощью функции  $\mathcal{D}$  является по существу полным, т. е. наиболее детальным возможным микроскопическим описанием классической системы многих частиц.

Наряду с плотностью вероятности  $\mathcal{D}$  можно ввести вероятности нахождения одной или нескольких частиц в данных элементах фазового пространства, независимо от того, где находятся в этом пространстве остальные частицы. Эти вероятности могут быть получены путем интегрирования функции  $\mathcal{D}$  по всем переменным, кроме тех, которые относятся к рассматриваемым частицам. В результате мы получим одночастичную, двухчастичную и вообще  $s$ -частичную функции распределения. Так, одночастичная функция распределения  $f_1(x_1, t)$  определяется интегралом

$$f_1(x_1, t) = \frac{1}{(N-1)!} \int dx_2 \dots dx_N \mathcal{D}(x_1 \dots x_N; t),$$

а  $s$ -частичная функция распределения — интегралом

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) = \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t). \quad (1.1.7)$$

Эти функции являются симметричными функциями своих аргументов.

Многочастичные функции распределения связаны между собой соотношениями

$$(N-s)f_s(x_1, \dots, x_s, t) = \int dx_{s+1} f_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}, t) \quad (1.1.8)$$

и удовлетворяют условиям нормировки

$$\int dx_1 \dots dx_s f_s(x_1, \dots, x_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!}. \quad (1.1.9)$$

Мы будем предполагать, что многочастичные функции распределения остаются конечными при безграничном увеличении общего числа частиц и объема системы, если при этом отношение числа частиц к объему системы остается конечным.

Формула (1.1.8) показывает, что старшие функции распределения несут в себе всю информацию, содержащуюся в младших функциях распределения. Это приводит к тому, что с увеличением числа  $s$  функции  $f_s$  становятся все более сложными. Однако, если увеличивается расстояние между частицами или между какими-либо группами частиц, то многочастичные функции существенно упрощаются. Это связано с тем, что при этом ослабевает корреляция между группами частиц, и поэтому многочастичная функция распределения распадается на произведение функций распределения, относящихся к каждой группе частиц. Выделим, например, из  $s$  частиц две группы частиц, содержащие соответственно  $s'$  и  $s''$  частиц, и пусть расстояние  $R$  между этими группами безгранично увеличивается. Тогда

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, t) f_{s''}(x''_1, \dots, x''_{s''}, t), \quad (1.1.10)$$





которые могут быть переписаны в виде

$$\dot{X}_l = \{X_l, \mathcal{H}(X)\}_X, \quad (1.1.14)$$

где скобка Пуассона  $\{A(X), B(X)\}_X$  определяется формулой

$$\{A(X), B(X)\}_X = \sum_{1 \leq l \leq N} \left( \frac{\partial A}{\partial X_l} \frac{\partial B}{\partial \mathcal{P}_l} - \frac{\partial A}{\partial \mathcal{P}_l} \frac{\partial B}{\partial X_l} \right) \quad (1.1.15)$$

( $\mathcal{H}(X)$  — гамильтониан системы, выраженный через переменные  $X$ ).

Так как переход от величин  $x_0$  к величинам  $X$ , согласно формуле (1.1.13), является каноническим преобразованием и  $\mathcal{H}(x_0) = \mathcal{H}(X(t, x_0))$  (поскольку система консервативна), то в силу инвариантности скобок Пуассона по отношению к каноническим преобразованиям

$$\{X_l, \mathcal{H}(X)\}_X = \{X_l(t, x_0), \mathcal{H}(x_0)\}_{x_0},$$

и, следовательно, уравнения (1.1.14) можно представить в виде

$$\dot{X}_l(t, x) = \{X_l(t, x), \mathcal{H}(x)\}_x,$$

где индекс 0 у величины  $x_0$  для простоты записи опущен. Так как все дифференциальные операции в этих уравнениях совершаются по начальным переменным  $x$ , то легко выписать формальное решение этих уравнений:

$$X_l(t, x) = S^{(N)}(t) x_l, \quad S^{(N)}(t) = \exp[it\Lambda^{(N)}], \quad (1.1.16)$$

где  $\Lambda^{(N)}$  — операторная скобка Пуассона

$$\Lambda^{(N)} = -i \sum_{1 \leq l \leq N} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathcal{P}_l} \frac{\partial}{\partial x_l} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}_l} \right), \quad (1.1.17)$$

представляющая собой самосопряженный оператор в фазовом пространстве  $x_i$ .

Заметим, что формула, аналогичная (1.1.16), справедлива для любой функции переменных  $x_l$ :

$$\mathcal{F}(X_1(t, x), \dots, X_s(t, x)) = S^{(N)}(t) \mathcal{F}(x_1, \dots, x_s). \quad (1.1.18)$$

Если в начальный момент времени система находилась в точке  $x_0 = (x_1(0), \dots, x_N(0))$  фазового пространства, то в момент времени  $t$  функция  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t)$  будет, очевидно, иметь вид

$$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) = \sum_{1 \leq l \leq N} \prod_{1 \leq i \leq N} \delta(x_{il} - X_l(t, x_0)),$$

где суммирование выполняется по всем перестановкам индексов  $i_l$ . Если же начальные условия распределены с плотностью вероятности  $\mathcal{D}(x_1(0), \dots, x_N(0); 0)$ , то плотность вероятности  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t)$  будет равна

$$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) = \frac{1}{N!} \int dx_1(0) \dots dx_N(0) \mathcal{D}(x_1(0), \dots, x_N(0); 0) \cdot \sum_{1 \leq l_1 \leq N} \prod_{1 \leq l_2 \leq N} \delta(x_{i_{l_1}} - X_{l_1}(t, x_0)). \quad (1.1.19)$$

Для консервативной системы  $X(t, X(-t, x')) = x'$ ; поэтому формулу (1.1.19) можно переписать после замены переменных  $x_0 \rightarrow X(-t, x')$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) &= \\ &= \frac{1}{N!} \int dx'_1 \dots dx'_N \mathcal{D}(X_1(-t, x'), \dots, X_N(-t, x'); 0) \times \\ &\times \sum_{1 \leq l_1 \leq N} \prod_{1 \leq l_2 \leq N} \delta(x_{i_{l_1}} - x'_i) = \mathcal{D}(X_1(-t, x), \dots, X_N(-t, x); 0), \end{aligned}$$

или, учитывая (1.1.18), в виде

$$\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) = S^{(N)}(-t) \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; 0). \quad (1.1.20)$$

При этом мы учли симметричность функции  $\mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; 0)$  и использовали теорему Лиувилля

$$dx_1(0) \dots dx_N(0) = dx'_1 \dots dx'_N.$$

Дифференцируя выражение (1.1.20) по  $t$  и используя определение (1.1.17) оператора  $\Lambda^{(N)}$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t) = \{\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N), \mathcal{D}(x_1, \dots, x_N; t)\} \quad (1.1.21)$$

Будем предполагать, что между частицами действуют только парные силы, описываемые потенциалом  $V(x_i, \dots, x_j) \equiv V_{i,j}$ . Если, кроме того, имеется некоторое постоянное внешнее поле  $U(x)$ , то гамильтониан системы будет иметь вид

$$\mathcal{H} = \sum_{1 \leq l \leq N} \mathcal{H}(x_l) + \sum_{1 \leq l < j \leq N} V_{l,j}, \quad \mathcal{H}(x_l) = \frac{p_l^2}{2m} + U(x_l). \quad (1.1.22)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.1.21) и используя определение многочастичных функций распределения, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} = & \frac{1}{(N-s)!} \sum_{1 \leq l \leq s} \int d\tau_{N-s} \{ \mathcal{H}(x_l), \mathcal{D} \} + \\ & + \frac{1}{(N-s)!} \sum_{s+1 \leq l \leq N} \int d\tau_{N-s} \{ \mathcal{H}(x_l), \mathcal{D} \} + \\ & + \frac{1}{(N-s)!} \sum_{1 \leq i < j \leq s} \int d\tau_{N-s} \{ V_{i,j}, \mathcal{D} \} + \\ & + \frac{1}{(N-s)!} \sum_{\substack{1 \leq l \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \int d\tau_{N-s} \{ V_{l,j}, \mathcal{D} \} + \\ & + \frac{1}{(N-s)!} \sum_{s+1 \leq l < j \leq N} \int d\tau_{N-s} \{ V_{l,j}, \mathcal{D} \}, \end{aligned}$$

где  $d\tau_{N-s} = dx_{s+1} \dots dx_N$ . Так как

$$\int dx_i \{ \mathcal{H}(x_i), \mathcal{D} \} = \int dx_i dx_j \{ V_{i,j}, \mathcal{D} \} = 0,$$

то второе и пятое слагаемые в этой формуле обращаются в нуль\*). Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N-s)!} \sum_{1 \leq i \leq s} \int d\tau_{N-s} \{ \mathcal{H}(x_i), \mathcal{D} \} + \\ + \frac{1}{(N-s)!} \sum_{1 \leq i < j \leq s} \int d\tau_{N-s} \{ V_{i,j}, \mathcal{D} \} = \\ = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} \mathcal{H}(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq s} V_{i,j}, f_s \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, наконец, симметрию функции  $D$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(N-s)!} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \int d\tau_{N-s} \{ V_{i,j}, \mathcal{D} \} = \\ = \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq l \leq s} V_{l,s+1}, f_{s+1} \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \{ \mathcal{H}^{(s)}, f_s \} + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V_{i,s+1}, f_{s+1} \right\}, \quad s < N, \quad (1.1.23)$$

\*) Обращение в нуль первого из этих интегралов связано с ослаблением корреляций при больших расстояниях между частицами и предполагаемой однородностью систем на бесконечности.

где  $\mathcal{H}^{(s)}$  — гамильтониан комплекса из  $s$  частиц:

$$\mathcal{H}^{(s)} = \sum_{1 \leq l \leq s} \mathcal{H}(x_l) + \sum_{1 \leq i < j \leq s} V_{i,j}, \quad \mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}(x) = \frac{p^2}{2m} + U(x).$$

Мы видим, что в уравнение для  $s$ -частичной функции распределения входит  $s + 1$ -частичная функция распределения. Иными словами, мы получили бесконечную цепочку уравнений для многочастичных функций распределения. Эта цепочка носит название *цепочки уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Ивона — Кирквуда*. Решение этих уравнений следует искать в классе функций, удовлетворяющих принципу ослабления корреляций (предполагается выполненным термодинамический предельный переход  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ).

Первое слагаемое в (1.1.23) описывает изменение функции распределения комплекса  $s$  частиц в пренебрежении влиянием остальных частиц, а второе слагаемое учитывает это влияние.

## § 1.2. Интегральные уравнения для многочастичных функций распределения

### 1.2.1. Интегральные уравнения для функций распределения на кинетическом этапе эволюции.

В предыдущем параграфе мы получили бесконечную цепочку уравнений для многочастичных функций распределения, которая сама по себе эквивалентна уравнению Лиувилля в предельном случае  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ . Значительное упрощение в описании состояния системы возникает в двух предельных случаях: когда взаимодействие между частицами системы мало, либо когда плотность частиц мала, а взаимодействие произвольно, но таково, что оно не приводит к образованию связанных состояний. Это упрощение связано с различным характером временной зависимости многочастичных и одночастичной функций распределения. Именно, на начальном этапе эволюции, когда время  $t$  мало по сравнению с некоторым характерным временем хаотизации  $\tau_0$ , многочастичные функции распределения испытывают очень быстрые изменения, тогда как одночастичная функция распределения при этом практически не меняется. Она претерпевает существенные изменения только при временах, сравнимых с временем релаксации  $\tau_r$ , которое значительно больше  $\tau_0$ . Время релаксации  $\tau_r$  определяет по порядку величины время, в течение которого устанавливается максвелловское распределение, и оно тем больше, чем меньше плотность частиц и чем слабее взаимодействие. По порядку величины время  $\tau_r$  представляет собой время между двумя столкновениями, т. е. время свободного пробега. Что же касается времени  $\tau_0$ , то оно практически не зависит ни от плотности частиц, ни от интенсивности их взаимодействия и обычно имеет масштаб продолжительности одного столкновения.

Чтобы разъяснить смысл введения времени  $\tau_0$ , рассмотрим сперва идеальный газ, т. е. систему невзаимодействующих частиц. В этом случае временная зависимость многочастичных функций распределения может быть сразу найдена с помощью уравнений (1.1.23), (1.1.20):

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) = S_0^{(s)}(-t) f_s(x_1, \dots, x_s, 0),$$

где  $S_0^{(s)}(t)$  — оператор эволюции  $s$  свободных частиц. Ясно, что

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) = f_s\left(x_1 - \frac{p_1}{m}t, p_1, \dots, x_s - \frac{p_s}{m}t, p_s, 0\right).$$

Используя принцип ослабления корреляций (1.1.10), получим отсюда

$$\begin{aligned} f_s(x_1, \dots, x_s, t) &\xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \prod_{1 \leq l \leq s} f\left(x_l - \frac{p_l}{m}t, p_l, 0\right) = \\ &= \prod_{1 \leq l \leq s} S_0^{(1)}(-t) f_1(x_l, 0). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Здесь  $\tau_0$  — величина порядка  $r_c/\bar{v}$ ,  $\bar{v}$  — средняя скорость частиц и  $r_c$  — радиус корреляции, т. е. расстояние, начиная с которого многочастичные функции распределения распадаются на произведение одночастичных. Обычно по порядку величины  $r_c$  совпадает с радиусом действия сил, так что  $\tau_0$ , как и указывалось, представляет собой продолжительность одного столкновения.

Формула (1.2.1) показывает, что в пространственно-однородном случае одночастичная функция распределения не зависит от времени, чего нельзя сказать о многочастичных функциях распределения (в пространственно-однородном случае они зависят от разностей координат частиц), которые быстро, за время порядка  $\tau_0$ , приобретают вид произведения одночастичных функций распределения.

Рассмотрим теперь систему с произвольным взаимодействием между частицами. Тогда по прошествии времени, большого по сравнению с  $\tau_0$ , уже не будет происходить факторизация типа (1.2.1) многочастичных функций распределения, но тем не менее упрощение в их асимптотическом поведении при  $t \gg \tau_0$  произойдет. Дело в том, что многочастичные функции, в отличие от одночастичной функции, быстро изменяются в течение времени порядка  $\tau_0$ . Поэтому они будут успевать «подстраиваться» к каждому мгновенному значению одночастичной функции  $f_1$ , которая как уже отмечалось, существенно изменяется лишь за время порядка  $\tau_r \gg \tau_0$ . Иными словами, при  $t \gg \tau_0$  многочастичные функции распределения становятся функционалами одночастичной

функции распределения:

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t)), \quad (1.2.2)$$

причем зависимость от времени функции  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  при  $t \gg \tau_0$  определяется только зависимостью одночастичной функции распределения от времени.

Таким образом, хотя функция  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  и зависит, вообще говоря, от начальных значений всех многочастичных функций распределения  $f_{s'}(x_1, \dots, x_{s'}, 0)$ ,  $s' = 1, 2, \dots$ , однако по прошествии времени, большого по сравнению с  $\tau_0$ , эта зависимость существенно упрощается и содержится только в функции  $f_1$ , функционалами которой становятся функции  $f_s$ . Поэтому функционалы  $f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))$  являются универсальными и не зависят от характера начальных условий для многочастичных функций. Это «стирание памяти», выражаемое асимптотическим соотношением (1.2.2), является фундаментальным свойством систем с большим числом частиц. Отметим наконец, что временная асимптотика многочастичных функций распределения только и представляет физический интерес, так как начальные функции распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s, 0)$  никогда точно не известны.

Наша задача будет теперь заключаться в том, чтобы, не исследуя начального этапа эволюции (при  $t \leq \tau_0$ ), сразу искать решение цепочки уравнений (1.1.23) в виде  $f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))$ . Для получения однозначного решения этих уравнений нам необходимо прежде всего сформулировать «граничное условие» для функционалов  $f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))$ . С этой целью заметим, что предельная функция распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))$  также должна удовлетворять принципу ослабления корреляций. Поэтому, согласно (1.2.1), справедливо асимптотическое соотношение

$$S_0^{(s)}(-\tau) f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t)) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \prod_{1 \leq i \leq s} S_0^{(1)}(-\tau) f_1(x_i, t),$$

откуда в силу произвольности функции  $f_1(x, t)$  находим

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_0^{(s)}(-\tau) f_s(x_1, \dots, x_s; S_0^{(1)}(\tau) f_1(x', t)) = \prod_{1 \leq i \leq s} f_1(x_i, t). \quad (1.2.3)$$

Это соотношение и представляет собой искомое «граничное условие».

Обратимся теперь к цепочке уравнений (1.1.23), причем для простоты будем предполагать, что внешнее поле отсутствует. При  $t \gg \tau_0$  производная по времени от многочастичной функции распределения может быть, согласно (1.2.2), записана в виде

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = \int dx \frac{\delta f_s(x_1, \dots, x_s; f_1(x', t))}{\delta f_1(x, t)} \frac{\partial f_1(x, t)}{\partial t}, \quad (1.2.4)$$

где  $\delta f_s / \delta f_1$  обозначает функциональную производную. Используя эту формулу, перепишем цепочку уравнений (1.1.23) в виде

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x, t)} \mathcal{L}(x; f) = \\ = \{ \mathcal{H}^{(s)}, f_s(f) \} + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V_{i, s+1}, f_{s+1}(f) \right\}, \\ \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \mathcal{L}(x; f(x', t)), \quad s = 2, 3, \dots \quad (1.2.5)$$

$$\mathcal{L}(x_i; f) = \{ \mathcal{H}(x_i), f(x_i) \} + \int dx_2 \{ V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f) \},$$

где  $f(x, t) \equiv f_1(x, t)$ ,  $f_s(f) \equiv f_s(x_1, \dots, x_s; f(x', t))$ ,  $\mathcal{H}(x) = p^2/2m$ .

Выделим в этих уравнениях члены, не содержащие взаимодействия. Вводя обозначения

$$\mathcal{L}(x; f) = \mathcal{L}_0(x; f) + L(x; f),$$

$$\mathcal{L}_0(x; f) = \{ \mathcal{H}(x), f(x) \} = -\frac{p}{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad (1.2.6)$$

$$L(x_i; f) = \int dx_2 \{ V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f) \},$$

перепишем (1.2.5) в виде

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} \mathcal{L}_0(x; f) - \{ \mathcal{H}_0^{(s)}, f_s(f) \} = \mathcal{K}_s(f), \quad (1.2.7)$$

где

$$\mathcal{K}_s(f) \equiv \mathcal{K}_s(x_1, \dots, x_s; f(x)) = \{ V^{(s)}, f_s(f) \} +$$

$$+ \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V_{i, s+1}, f_{s+1}(f) \right\} - \int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} L(x; f), \quad (1.2.8)$$

$$\mathcal{H}_0^{(s)} = \sum_{1 \leq i \leq s} \mathcal{H}(x_i), \quad V^{(s)} = \sum_{1 \leq i < j \leq s} V_{i, j}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_0^{(1)}(-\tau) f(x) = \mathcal{L}_0(x; S_0^{(1)}(-\tau) f(x'))$$

и, следовательно,

$$\int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} \mathcal{L}_0(x; f) |_{f \rightarrow S_0^{(1)}(-\tau) f} = \frac{\partial}{\partial \tau} f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f),$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f) - \{ \mathcal{H}_0^{(s)}, f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f) \} = \mathcal{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f). \quad (1.2.9)$$

Учитывая далее определение  $S_0^{(s)}(\tau)$  (1.1.17), получим отсюда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} S_0^{(s)}(\tau) f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f) = S_0^{(s)}(\tau) \mathcal{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f). \quad (1.2.10)$$



Интегрируя последнее уравнение по  $\tau$  в пределах от  $-\infty$  до 0, с учетом граничного условия (1.2.3), получим окончательно следующую цепочку интегральных уравнений для многочастичных функций распределения [20, 9]:

$$\begin{aligned} f_s(x_1, \dots, x_s; f) &= \\ &= \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) + \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(s)}(\tau) \mathcal{K}_s(x_1, \dots, x_s; S_0^{(1)}(-\tau) f), \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

где  $\mathcal{K}_s$  определяется формулой (1.2.8).

Подчеркнем, что эти уравнения справедливы в том случае, когда в асимптотической области  $\tau_r \gg t \gg \tau_0$  состояние системы можно описывать одночастичной функцией распределения. В свою очередь это справедливо для систем со слабым взаимодействием либо для систем с малой плотностью (предполагается, что не могут образовываться связанные состояния частиц).

Решение уравнений (1.2.11) в случае слабого взаимодействия можно искать методом итераций. Найдя таким образом в некотором приближении двухчастичную функцию распределения  $f_2$ , получим, согласно (1.2.5), следующее уравнение для одночастичной функции распределения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} &= L(x; f), \\ L(x_1; f) &= \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(x_1, x_2; f)\}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Это уравнение носит название кинетического уравнения.

**1.2.2. Построение теории возмущений для систем с малой плотностью частиц.** Уравнения (1.2.11) удобны для исследования систем со слабым взаимодействием между частицами, так как в этом случае легко может быть развита теория возмущений. Важную роль играет также случай систем с малой плотностью и произвольным взаимодействием между частицами. При этом непосредственное использование уравнений (1.2.11) затруднительно, однако этим уравнениям может быть придана другая форма, позволяющая развить теорию возмущений и для систем с малой плотностью.

Представим для этого цепочку интегральных уравнений (1.2.11) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(\tau) &= \mathcal{F}_s^{(0)}(\tau) + \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{\eta\tau'} S_0^{(s)}(\tau') \mathcal{K}_s(\tau + \tau'), \\ \eta &\rightarrow +0, \quad \mathcal{F}_s(\tau) = f_s(S_0^{(1)}(-\tau) f), \\ \mathcal{K}_s(\tau) &= \mathcal{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau) f), \quad \mathcal{F}_s^{(0)}(\tau) = \prod_{1 \leq i \leq s} S_0^{(1)}(-\tau) f(x_i). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Вводя компоненты Фурье функций  $\mathcal{F}_s$ ,  $\mathcal{F}_s^{(0)}$ ,  $\mathcal{K}_s$ , соответствующие переменной  $\tau$ ,

$$\mathcal{F}_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{iz\tau} \mathcal{F}_s(z),$$

перепишем (1.2.13) в виде

$$\mathcal{F}_s(z) = \mathcal{F}_s^{(0)}(z) + \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\tau(\eta+iz)} e^{i\Lambda_0^{(s)}\tau} \mathcal{K}_s(z),$$

откуда

$$i\Lambda_0^{(s)}\mathcal{F}_s(z) = i\Lambda_0^{(s)}\mathcal{F}_s^{(0)}(z) + \mathcal{K}_s(z) - (\eta + iz)(\mathcal{F}_s(z) - \mathcal{F}_s^{(0)}(z)),$$

где  $\Lambda_0^{(s)}$  — операторная скобка Пуассона для свободного движения частиц. Учитывая теперь, что

$$i\Lambda_0^{(s)}\mathcal{F}_s^{(0)}(z) = -iz\mathcal{F}_s^{(0)}(z),$$

перепишем последнее уравнение в виде

$$\{i(\Lambda^{(s)} + z) + \eta\} \mathcal{F}_s(z) = \eta\mathcal{F}_s^{(0)}(z) + K_s(z),$$

где  $K_s(z)$  — фурье-образ функции  $K_s(\tau)$ , определяемой соотношениями

$$K_s(\tau) = K_s(S_0^{(1)}(-\tau)f),$$

$$K_s(f) = \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s+1} V_{i, s+1}, f_{s+1}(f) \right\} - \int dx \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x)} L(x; f), \quad (1.2.14)$$

откуда следует

$$\mathcal{F}_s(z) = \{i(\Lambda^{(s)} + z) + \eta\}^{-1} \{\eta\mathcal{F}_s^{(0)}(z) + K_s(z)\}.$$

Замечая далее, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-iz\tau}}{\eta + i(\Lambda^{(s)} + z)} = \begin{cases} 0, & \tau > 0, \\ e^{\eta\tau} e^{i\Lambda^{(s)}\tau}, & \tau < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\Lambda^{(s)}} \mathcal{F}_s^{(0)}(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} S^{(s)}(\tau) S_0^{(s)}(-\tau) \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i),$$

получим окончательно [20, 9]

$$\begin{aligned} f_s(x_1, \dots, x_s; f) &= \tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; f) + \\ &+ \int_{-\infty}^0 d\tau S^{(s)}(\tau) K_s(x_1, \dots, x_s; S_0^{(1)}(-\tau)f), \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

где

$$\tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; f) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} S^{(s)}(\tau) S_0^{(s)}(-\tau) \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i)$$

и  $K_s(x_1, \dots, x_s; f)$  определяется формулой (1.2.14).

Эти уравнения, как видно из их вывода, эквивалентны уравнениям (1.2.11). Однако, в отличие от последних, они удобны для исследования систем с малой плотностью частиц. Действительно, замечая, что в силу условия нормировки одночастичной функции распределения  $f$  разложение по степеням плотности эквивалентно функциональному разложению по степеням  $f$  и что такое разложение  $f_s$  начинается с  $s$ -й степени  $f$ , мы видим (учитывая определения (1.2.14), (1.2.12)), что разложение интегрального члена в (1.2.15) начинается с  $s + 1$  степени  $f$ .

### § 1.3. Кинетические уравнения и явления переноса в газах

**1.3.1. Кинетическое уравнение в случае слабого взаимодействия.** Перейдем теперь к более подробному исследованию цепочки интегральных уравнений для многочастичных функций распределения.

В случае слабого взаимодействия между частицами решение уравнений (1.2.11) можно искать в виде ряда по степеням энергии взаимодействия

$$f_s(f) = f_s^{(0)}(f) + f_s^{(1)}(f) + \dots, \quad s \geq 2. \quad (1.3.1)$$

Этому разложению соответствует разложение функционала  $L$

$$L(f) = L^{(1)}(f) + L^{(2)}(f) + \dots$$

$$L^{(m)}(f) \equiv L^{(m)}(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2^{(m-1)}(x_1, x_2; f)\}. \quad (1.3.2)$$

Подстановка этих разложений в (1.2.11) приводит к следующей системе рекуррентных уравнений для определения функций  $f_s^{(k)}$ :

$$f_s^{(0)}(x_1, \dots, x_s; f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i),$$

$$\begin{aligned} f_s^{(k)}(f) = & \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(s)}(\tau) \left( \{V^{(s)}, f_s^{(k-1)}(f)\} + \right. \\ & \left. + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}^{(k-1)}(f) \right\} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=0}^k \int dx \frac{\delta^{(i)}(x)}{\delta f_i(x)} L^{(k-i)}(x; f) \right)_{f \rightarrow S_0^{(1)}(\tau)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.3.3) \end{aligned}$$

Обычно достаточно ограничиться учетом членов нулевого и первого приближений. При этом, как следует из предыдущих формул, функция  $f_s^{(1)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} f_s^{(1)}(x_1, \dots, x_s; f) &= \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq s} V\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j + \frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j}{m} \tau\right), \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Далее, согласно (1.3.2), (1.3.3),

$$L^{(1)}(x_i; f) = \int d\mathbf{x}_2 \{V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), f(x_1) f(x_2)\},$$

или

$$L^{(1)}(x; f) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}, \quad (1.3.5)$$

где

$$U(x; f) \equiv U = \int d^3x' V(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \int d^3p' f(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t). \quad (1.3.6)$$

Поэтому кинетическое уравнение (1.2.12) в приближении, линейном по взаимодействию, можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.3.7)$$

Это уравнение имеет простой физический смысл. Функция  $U$  представляет собой усредненный потенциал, действующий на данную частицу со стороны всех остальных частиц. Его можно назвать поэтому самосогласованным потенциалом; величина же  $-\partial U/\partial \mathbf{x}$  представляет собой самосогласованную силу. Уравнение (1.3.7) показывает, что изменение функции распределения  $f$  складывается в этом приближении из двух слагаемых — слагаемого  $\mathbf{v} \partial f/\partial \mathbf{x}$ , связанного с выходом частицы из окрестности точки  $\mathbf{x}$  в результате свободного движения со скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ , и слагаемого  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}$ , связанного с выходом частицы из окрестности точки  $\mathbf{p}$  импульсного пространства под действием самосогласованной силы  $-\partial U/\partial \mathbf{x}$ . Уравнение (1.3.7) называется *кинетическим уравнением с самосогласованным полем*.

Найдем теперь вид функционала  $L^{(2)}(x; f)$ . Подставляя (1.3.4) в (1.3.2) для  $m = 2$ , получим

$$\begin{aligned} L^{(2)}(x_i; f) &= \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau \int d\mathbf{x}_2 \left\{ V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \left\{ V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \frac{\tau}{m}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\right), f(x_1) f(x_2) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что характерные для системы размеры неоднородности  $a$  значительно больше радиуса действия сил  $r_0$  между частицами. В этом случае градиенты одночастичной функции распределения  $\partial f/\partial x$  можно считать малыми. По этой же причине входящую в  $L^{(2)}(x_1; f)$  функцию  $f(x_2)$  можно разложить в ряд по степеням  $x_2 - x_1$  около точки  $x_1$ . В результате в низшем, нулевом приближении по градиентам  $f$ , получим следующее выражение для  $L^{(2)}(x_1; f)$  [20]:

$$L^{(2)}(x_1; f) = -\frac{\partial}{\partial p_1} \mathcal{J}(x_1; f), \quad (1.3.8)$$

$$\mathcal{J}_i(x_1; f) = C \int d^3 p_2 |p_1 - p_2|^{-3} ((p_1 - p_2)^2 \delta_{ik} - (p_1 - p_2)_i (p_1 - p_2)_k) \times \left( \frac{\partial f(x_1)}{\partial p_{1k}} f(x_2) - \frac{\partial f(x_2)}{\partial p_{2k}} f(x_1) \right)_{x_1=x_2},$$

где

$$C = \frac{m}{8\pi} \int_0^\infty dq q^3 V_q^2, \quad V_a = \int d^3 x V(x) e^{-iqx}.$$

Функционал  $L^{(2)}$  носит название *интеграла столкновений*. Мы видим, что в случае слабого взаимодействия интеграл столкновений имеет вид дивергенции в импульсном пространстве от некоторого вектора  $\mathcal{J}_i$ , который можно назвать током частиц в импульсном пространстве.

Кинетическое уравнение (1.2.12) с учетом членов, квадратичных по взаимодействию, имеет, таким образом, следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\partial \mathcal{J}_i}{\partial p_i}. \quad (1.3.9)$$

Это уравнение носит название *интегрального уравнения Фоккера — Планка*.

**1.3.2. Кинетическое уравнение в случае малой плотности.** В предыдущем разделе мы получили кинетическое уравнение в случае слабого взаимодействия между частицами. Перейдем теперь к выводу кинетического уравнения для газа малой плотности, не считая при этом взаимодействие слабым (мы будем предполагать лишь, что взаимодействие между частицами не приводит к образованию связанных состояний).

Исходными уравнениями являются уравнения (1.2.15). Многочастичные функции распределения будем искать в виде функционального ряда по степеням одночастичной функции распределения, так как такое разложение представляет собой по существу разложение по степеням плотности частиц:

$$f_s(f) = f_s^{(s)}(f) + f_s^{(s+1)}(f) + \dots, \quad s \geq 2$$

(как уже отмечалось в разделе 1.2.2 разложение  $f_s(f)$  начинается с членов  $s$ -го порядка по плотности частиц.) Этому разложению соответствует следующее разложение функционала  $L(x; f)$

$$L(x; f) = L^{(2)}(x; f) + L^{(3)}(x; f) + \dots, \quad (1.3.10)$$

$$L^{(k)}(x; f) = \int dx' \{V(x - x'), f_2^{(k)}(x, x'; f)\}.$$

Кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения  $f$  имеет, согласно (1.2.12), вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} = L^{(2)}(x; f) + \dots \quad (1.3.11)$$

Из уравнений (1.2.15) следует, что

$$f_s^{(s)}(x_1, \dots, x_s; f) = \tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} S^{(s)}(-\tau) S_0^{(s)}(\tau) \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i). \quad (1.3.12)$$

Для нахождения  $L^{(2)}(x; f)$  необходимо знать функцию  $f_2^{(2)}(f)$ , которая, согласно (1.3.12), имеет вид

$$f_2^{(2)}(x_1, x_2; f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} f\left(S^{(2)}(-\tau) x_1 + \tau S^{(2)}(-\tau) \frac{p_1}{m}, S^{(2)}(-\tau) p_1\right) \times \\ \times f\left(S^{(2)}(-\tau) x_2 + \tau S^{(2)}(-\tau) \frac{p_2}{m}, S^{(2)}(-\tau) p_2\right).$$

Замечая, что существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S^{(2)}(-\tau) p_i = \mathcal{P}_i(x_1, x_2), \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(S^{(2)}(-\tau) x_i + \tau S^{(2)}(-\tau) \frac{p_i}{m}\right) = X_i(x_1, x_2), \quad i = 1, 2,$$

можно представить  $f_2^{(2)}(f)$  в виде

$$f_2^{(2)}(x_1, x_2; f) = f(X_1, \mathcal{P}_1) f(X_2, \mathcal{P}_2),$$

откуда в соответствии с (1.3.10)

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f(X_1, \mathcal{P}_1) f(X_2, \mathcal{P}_2)\}.$$

Предположим теперь, что радиус действия сил  $r_0$  мал по сравнению с характерными размерами неоднородности  $a$ ,  $r_0 \ll a$ , т. е. по сравнению с теми расстояниями, на которых существенно изменяется одночастичная функция распределения  $f(x)$ . Учитывая, что  $|X_i - x_i| \sim r_0$  ( $i = 1, 2$ ), можно  $L^{(2)}$  в нулевом приближении по градиентам представить в виде

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int dx_3 x' \delta(x' - x_1) \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f(x', \mathcal{P}_1) f(x', \mathcal{P}_2)\}_{x_1, x_2}. \quad (1.3.13)$$

Так как переменные  $x_1, p_1, x_2, p_2$  переходят в переменные  $X_1, \mathcal{P}_1, X_2, \mathcal{P}_2$  в результате реального движения системы двух частиц с гамильтонианом  $\mathcal{H}^{(2)} = p_1^2/2m + p_2^2/2m + V(x_1 - x_2)$ , то эти две группы переменных связаны между собой каноническим преобразованием. В переменных  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  гамильтониан  $\mathcal{H}^{(2)}$  имеет вид

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{P}_1^2/2m + \mathcal{P}_2^2/2m,$$

так как  $\mathcal{H}^{(2)} = S^{(2)}(-\tau)\mathcal{H}^{(2)}$  и  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} S^{(2)}(\tau)V(x_1 - x_2) = 0$ . Поэтому, учитывая инвариантность скобок Пуассона по отношению к каноническим преобразованиям, имеем

$$\{\mathcal{H}^{(2)}, f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2)\}_{x_1, x_2} = \{\mathcal{H}^{(2)}, f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2)\}_{X_1, X_2} = 0$$

и, следовательно,

$$\{V(x_1 - x_2), f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2)\}_{x_1, x_2} = \frac{p_2 - p_1}{m} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2).$$

Вычислим теперь интеграл по  $x_2$  от этой скобки Пуассона, входящей в выражение для  $L^{(2)}(x_1; f)$ . Это интегрирование происходит фактически по разности  $x_2 - x_1$ , так как в силу трансляционной инвариантности  $\mathcal{P}_1(x_1, x_2), \mathcal{P}_2(x_1, x_2)$  зависит от разностей  $x_2 - x_1$ . Перейдем поэтому в интеграле по  $x_2$  к цилиндрическим координатам  $\xi, b, \varphi$ , начало которых находится в точке  $x_1$  и ось  $\xi$  направлена вдоль вектора  $p_2 - p_1$ :

$$\int d^3x_2 \{V(x_1 - x_2), f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2)\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dbb \int_{-\infty}^\infty d\xi \frac{|p_2 - p_1|}{m}, \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2) &= \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dbb \frac{|p_2 - p_1|}{m} \{f(x', \mathcal{P}_1)f(x', \mathcal{P}_2)\}_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}. \end{aligned}$$

Согласно определению,  $\mathcal{P}_1(x_1, x_2), \mathcal{P}_2(x_1, x_2)$  — импульсы двух частиц в момент времени  $\tau = -\infty$ . Эти частицы в момент времени  $\tau = 0$  находились в точках  $x_1, x_2$  и имели соответственно импульсы  $p_1, p_2$ . Ясно, что если  $\xi = (x_2 - x_1)(p_2 - p_1)/|p_2 - p_1| > 0$ , то столкновение частиц произошло при  $\tau < 0$ , если же  $\xi < 0$ , то оно произошло при  $\tau > 0$ . Учитывая это, имеем

$$\mathcal{P}_i(x_1, x_2)|_{\xi=-\infty} = p'_i(p_1, p_2, b), \quad \mathcal{P}_i(x_1, x_2)|_{\xi=\infty} = p_i, \quad (1.3.15)$$

где  $p'_1, p'_2$  — импульсы частиц на бесконечности (если начальные импульсы равны  $p_1$  и  $p_2$  и прицельный параметр равен  $b$ ). Принимая это во внимание, после подстановки (1.3.15) в (1.3.14)

получим

$$L^{(2)}(x_1; f) = \int d^3 p_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} db b \frac{|p_2 - p_1|}{m} \{f(x_1, p'_1) f(x_1, p'_2) - f(x_1, p_1) f(x_1, p_2)\}. \quad (1.3.16)$$

Если столкновение характеризовать углом  $\theta$  ( $\theta$  — угол между  $p'_1 - p'_2$  и  $p_1 - p_2$ ), то  $b$  представляет собой функцию  $|p_2 - p_1|$  и  $\theta$ . При этом величина

$$\sigma(\theta, v_2 - v_1) = \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

будет дифференциальным сечением рассеяния. Учитывая это, перепишем окончательно уравнение (1.3.11) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \\ &= \int d^3 p_2 \int d\Omega |v_2 - v_1| \sigma(\theta, v_2 - v_1) \{f(x_1, p'_1) f(x_1, p'_2) - \\ &\quad - f(x_1, p_1) f(x_2, p_2)\} \equiv L^{(2)}(x_1; f). \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

Мы получили кинетическое уравнение Больцмана, которое, как видно из его вывода, справедливо при достаточно малой плотности частиц, когда  $N/V^0 \ll r_0^{-3}$ , интенсивность же взаимодействия может быть произвольной, лишь бы оно не приводило к образованию связанных состояний. Кроме того, пространственная неоднородность распределения частиц должна быть достаточно малой\*).

При выводе кинетического уравнения (1.3.17) мы считали, что на частицы не действуют внешние силы. При наличии таких сил в гамильтониан системы должна быть включена соответствующая потенциальная энергия. Если при этом силы достаточно слабы и достаточно медленно изменяются в пространстве, то они не будут оказывать влияния на процесс столкновения и действие их будет только кинематическим, т. е. в левую часть уравнения (1.3.17) добавится, как нетрудно понять из (1.1.23), слагаемое  $F \partial f / \partial p$ , где  $F$  — внешняя сила, действующая на частицу,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial p} = L^{(2)}(x; f). \quad (1.3.18)$$

**1.3.3. Теория явлений переноса в газах.** Важнейшим приложением кинетического уравнения Больцмана является теория явлений переноса в газах. Чтобы разъяснить, как строится эта теория, заметим прежде всего, что по прошествии времени, большого по сравнению с временем релаксации  $\tau_r$  ( $\tau_r$  — время

\*) Поправки по плотности к интегралу столкновений Больцмана исследовались в работе [63].



установления максвелловского распределения), описание состояния системы с помощью функции распределения становится по существу излишним, так как на этом этапе эволюции системы ее состояние достаточно описывать с помощью гидродинамических величин — плотности массы  $\rho^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ , плотности энергии  $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  (или температуры  $T(\mathbf{x}, t)$ ) и плотности импульса  $\pi(\mathbf{x}, t)$  (или гидродинамической скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ). Это означает, что при  $t \gg \tau_r$  функция распределения становится функционалом гидродинамических величин

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \xrightarrow{t \gg \tau_r} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \rho^{(m)}(\mathbf{x}', t), \varepsilon(\mathbf{x}', t), \pi(\mathbf{x}', t)). \quad (1.3.19)$$

Этот функционал является универсальным в том смысле, что он явно не зависит от начальной функции распределения, «память» о которой содержится лишь в гидродинамических величинах  $\rho^{(m)}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$ . Кроме того, зависимость этого функционала от времени определяется зависимостью от времени гидродинамических величин.

Таким образом, на гидродинамическом этапе эволюции решение кинетического уравнения следует искать в виде

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \rho^{(m)}(\mathbf{x}', t), \varepsilon(\mathbf{x}', t), \pi(\mathbf{x}', t)). \quad (1.3.20)$$

Так как многочастичные функции распределения при  $l \gg \tau_0$  являются универсальными функционалами одночастичной функции распределения, то при  $t \gg \tau_r$  они становятся, в соответствии с (1.2.2), универсальными функционалами гидродинамических величин \*).

Отметим, что соотношение (1.3.19), соответствующее гидродинамическому этапу эволюции, аналогично соотношению (1.2.2), соответствующему кинетическому этапу эволюции, только вместо многочастичных функций распределения в соотношении (1.3.19) выступает одночастичная функция распределения, а вместо одночастичной функции распределения в (1.2.2) — гидродинамические величины в (1.3.19). Заметим также, что при нахождении решения кинетического уравнения в форме (1.3.20) не требуется никаких дополнительных граничных условий типа (1.2.3), необходимых на кинетическом этапе для нахождения многочастичных функций распределения из цепочки уравнений (1.1.23).

Соотношение (1.3.19) предполагает, что характерные промежутки времени  $\tau_m$  и пространственные расстояния  $a_m$ , на которых существенно изменяются гидродинамические величины, велики по сравнению с временем  $\tau_r$  и длиной  $l = \tau_r \bar{v}$  свободного пробега частиц газа ( $\bar{v}$  — средняя тепловая скорость). Это озна-

\*) Метод нахождения решения кинетического уравнения в форме (1.3.20) принадлежит Гильберту, Чепмену и Энскогу [119]. Обобщение этого метода на случай учета поправок к кинетическому уравнению Больцмана принадлежит Боголюбову [20].

чает, что временная и пространственные производные от функции распределения (так же как и от гидродинамических величин) являются малыми величинами. Поэтому решение кинетического уравнения Больцмана в этом случае следует искать в виде разложения по степеням параметра  $l/a_m$ , а формально в виде ряда по градиентам плотностей массы, энергии и импульса

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots \quad (1.3.21)$$

При этом очевидно, что функционал  $f$  должен удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \langle m \rangle, & \varepsilon(\mathbf{x}, t) &= \langle mv^2/2 \rangle, \\ \pi(\mathbf{x}, t) &\equiv \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \langle m\mathbf{v} \rangle, \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

где

$$\langle A(\mathbf{p}) \rangle = \int d^3p A(\mathbf{p}) f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \rho^{(m)}, \varepsilon, \pi), \quad \mathbf{v} = \mathbf{p}/m.$$

Чтобы установить гидродинамические уравнения для величин  $\rho^{(m)}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $T$ , заметим, что если некоторая величина  $\chi(\mathbf{p})$ , относящаяся к молекуле, сохраняется при столкновениях молекул, т. е.

$$\chi(\mathbf{p}_1) + \chi(\mathbf{p}_2) = \chi(\mathbf{p}'_1) + \chi(\mathbf{p}'_2)$$

( $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}'_1$ ,  $\mathbf{p}'_2$  — импульсы частиц до и после столкновения), то, как легко проверить, справедливо тождество

$$\int d^3p \chi(\mathbf{p}) L^{(2)}(\mathbf{x}; f) = 0.$$

Поэтому, умножив кинетическое уравнение (1.3.17) на  $\chi$  и проинтегрировав его по  $\mathbf{p}$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi \rangle + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{v}\chi \rangle = 0.$$

Полагая здесь последовательно  $\chi = m$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $p^2/2m$ , получим искомые гидродинамические уравнения

$$\frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} + \frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.3.23)$$

где  $t_{ik}$  — тензор натяжений и  $q_i$  — плотность потока энергии:

$$t_{ik} = m^{-1} \langle p_i p_k \rangle, \quad q_i = m^{-1} \langle p_i p^2/2m \rangle. \quad (1.3.24)$$

Чтобы написанные гидродинамические уравнения приобрели конкретное физическое содержание, должны быть вычислены величины  $t_{ik}$  и  $q_i$ , а для этого должна быть известна функция распределения молекул газа, т. е. должно быть решено кинетическое уравнение Больцмана. Вернемся для этого к разложению (1.3.21). Подставляя разложение (1.3.21) в кинетическое

уравнение Больцмана, получим

$$L^{(2)}(x; f^{(0)}) = 0, \quad (1.3.25)$$

$$L_1^{(2)}(x; f^{(1)}) = \left( \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} \right)^{(1)} + v \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x}, \quad (1.3.26)$$

где  $L_1^{(2)}(x; f^{(1)})$  — линейризованный относительно  $f - f^{(0)} \approx f^{(1)}$  интеграл столкновений и  $(\partial f^{(0)}/\partial t)^{(1)}$  — производная  $\partial f^{(0)}/\partial t$ , вычисленная с помощью уравнений (1.3.23) в приближении, линейном по градиентам. (Напомним, что  $f^{(0)}$  и  $f^{(1)}$  зависят от времени и координат только вследствие зависимости от времени и координат гидродинамических величин.) Ясно, что по порядку величины  $L_1^{(2)}(x; f^{(1)}) \sim -\tau_r^{-1} f^{(1)}$ . Из условий (1.3.22) следует, что

$$\rho^{(m)} = \langle m \rangle^{(0)}, \quad \varepsilon = \langle mv^2/2 \rangle^{(0)}, \quad \rho^{(m)} u_i = \langle mv_i \rangle^{(0)}, \quad (1.3.27)$$

$$\langle m \rangle^{(k)} = 0, \quad \langle mv^2/2 \rangle^{(k)} = 0, \quad \langle mv_i \rangle^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.3.28)$$

где  $\langle A \rangle^{(l)} = \int d^3p A(p) f^{(l)}(x, p; \rho^{(m)}, \varepsilon, \pi)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$

Решение уравнения (1.3.25) с учетом условий (1.3.27) определяется локальным распределением Максвелла

$$f^{(0)} = \rho^{(m)} m^{-1} (2\pi mT)^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2T} (v - u)^2 \right\}, \quad (1.3.29)$$

где  $\rho^{(m)}$ ,  $T$ ,  $u$  являются функциями координат и времени, причем локальная температура  $T(x, t)$  связана с локальной плотностью энергии  $\varepsilon(x, t)$  соотношением

$$\varepsilon(x, t) = \frac{3}{2} m^{-1} \rho^{(m)}(x, t) T(x, t) + \frac{1}{2} \rho^{(m)}(x, t) u^2(x, t). \quad (1.3.30)$$

(В силу условий (1.3.27) решение уравнения (1.3.25) однозначно.)

Зная  $f^{(0)}$ , легко вычислить  $t_{ik}$  и  $q_i$  в нулевом приближении по градиентам

$$\begin{aligned} t_{ik}^{(0)} &= m^{-1} \langle p_i p_k \rangle^{(0)} = p \delta_{ik} + \rho^{(m)} u_i u_k, \\ q_i^{(0)} &= m^{-1} \langle p_i p^2/2m \rangle^{(0)} = (\varepsilon + p) u_i, \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

где  $p = \rho^{(m)} m^{-1} T$  — давление идеального газа. Используя эти формулы, нетрудно найти из (1.3.23) величины  $\partial \rho^{(m)}/\partial t$ ,  $\partial u_i/\partial t$ ,  $\partial T/\partial t$  в первом приближении по градиентам

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} \right)^{(1)} &= -\frac{\partial \rho^{(m)} u_i}{\partial x_i}, \quad \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^{(1)} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho^{(m)}} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)^{(1)} &= -u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2}{3} T \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (1.3.29), уравнение (1.3.26) можно представить в виде

$$L_1^{(2)}(x; f^{(1)}) = f^{(0)} \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \tilde{v}_i \left( \frac{m \tilde{v}^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) + \frac{m}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \tilde{v}_i \tilde{v}_k - \frac{1}{3} \tilde{v}^2 \delta_{ik} \right) \right\},$$

где  $\bar{v}_i = v_i - u_i$ . В соответствии с тензорной структурой правой части этого уравнения функцию  $f^{(1)}$  следует искать в виде

$$f^{(1)} = -\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} A_i - \frac{1}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} B_{ik}, \quad (1.3.32)$$

где

$$A_i = \bar{v}_i A(\bar{v}^2), \quad B_{ik} = \left( \bar{v}_i \bar{v}_k - \frac{1}{3} \bar{v}^2 \delta_{ik} \right) B(\bar{v}^2)$$

и  $A$  и  $B$  — некоторые скалярные функции  $\bar{v}^2$ ,  $\rho^{(m)}$ ,  $T$ . Функции  $A_i$  и  $B_{ik}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} L_1^{(2)}(x; A_i) &= -f^{(0)} \bar{v}_i \left( \frac{m\bar{v}^2}{2T} - \frac{5}{2} \right), \\ L_1^{(2)}(x; B_{ik}) &= -f^{(0)} m \left( \bar{v}_i \bar{v}_k - \frac{1}{3} \bar{v}^2 \delta_{ik} \right). \end{aligned} \quad (1.3.33)$$

Эти уравнения определяют функцию  $B$  однозначно, а функцию  $A$  с точностью до  $Cf^{(0)}$ , где  $C$  — произвольная постоянная, которая находится из третьего условия (1.3.28)

$$\int d^3p \bar{v}^2 A(\bar{v}^2) = 0.$$

Заметим, что первые два из условий (1.3.28) выполняются автоматически.

Найдя функции  $A$  и  $B$  (для чего существуют в основном только численные методы), можно вычислить тензор натяжений  $t_{ik}$  и плотность потока энергии  $q_i$  с точностью до членов, квадратичных по градиентам

$$t_{ik} = t_{ik}^{(0)} + t_{ik}^{(1)} + \dots, \quad q_i = q_i^{(0)} + q_i^{(1)} + \dots, \quad (1.3.34)$$

где  $t_{ik}^{(0)}$ ,  $q_i^{(0)}$  определяются формулами (1.3.31), и

$$\begin{aligned} t_{ik}^{(1)} &= m \langle \bar{v}_i \bar{v}_k \rangle^{(1)} = -\eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right), \\ q_i^{(1)} &= t_{ik}^{(1)} u_k + \langle \bar{v}_i m \bar{v}^2 / 2 \rangle^{(1)} = t_{ik}^{(1)} u_k - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Входящие сюда величины  $\eta$  и  $\kappa$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности — определяются, согласно (1.3.32), интегралами

$$\eta = \frac{m}{15T} \int d^3p v^4 B(v^2), \quad \kappa = \frac{m}{6T} \int d^3p v^4 A(v^2).$$

По порядку величины они равны

$$\eta \sim \frac{2}{3} \bar{v} \rho^{(m)} l, \quad \kappa \sim \frac{1}{3} c_p l \bar{v},$$

где  $\bar{v} = (3T/m)^{1/2}$ ,  $c_p = \frac{5}{2}$  — теплоемкость газа при постоянном давлении, отнесенная к одной молекуле, и  $l$  — длина свободного пробега молекулы.

Подставляя (1.3.34) в (1.3.23), получим замкнутую систему гидродинамических уравнений с учетом диссипативных процессов.

Аналогичным образом может быть развита теория диффузии газов, но для этого следует рассматривать смесь газов и для каждой ее компоненты писать соответствующее кинетическое уравнение. Мы не будем заниматься здесь этим вопросом и вернемся к нему в гл. 6, в которой мы получим общие гидродинамические уравнения не только для газов, но и для многокомпонентной жидкости \*).

## § 1.4. Кинетические уравнения для частиц, взаимодействующих со средой

**1.4.1. Дифференциальное уравнение Фоккера — Планка для медленных процессов.** В случае слабого взаимодействия импульсы частиц при каждом столкновении испытывают малые изменения, и поэтому любой кинетический процесс в системе со слабым взаимодействием между частицами будет медленным. В разделе 1.3.1 было показано, что в этом случае интеграл столкновений имеет вид дивергенции в импульсном пространстве от некоторого вектора — тока столкновений, который представляет собой интегральный оператор относительно функции распределения.

Структура тока столкновений значительно упрощается, и он становится вместо интегрального оператора дифференциальным, если рассматриваются столкновения частиц не друг с другом, а с некоторыми посторонними объектами, в частности с частицами, не входящими в состав исследуемой системы и находящимися в состоянии статистического равновесия. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим какие-либо динамические переменные  $\xi_i \equiv \xi$  (не обязательно импульс), характеризующие состояние частицы системы, которые испытывают в результате столкновений с некоторыми объектами малые изменения. Состояние этих объектов мы будем считать известным, и поставим вопрос о том, как изменяется в результате столкновений функция распределения частиц  $f(\xi, t)$ . Столкновения можно при этом характеризовать вероятностью, зависящей только от переменных  $\xi_i$  и их изменений  $\Delta\xi_i$ . Обозначим через  $\omega_{\Delta\xi}(\xi, \Delta\xi) \prod_i d\Delta\xi_i$  вероятность того, что за время  $\Delta t$  динамические переменные  $\xi_i$  в результате столкновения претерпят изменения, лежащие между  $\Delta\xi_i$  и  $\Delta\xi_i + d\Delta\xi_i$ . При этом величины  $\Delta\xi_i$  предполагаются малыми по сравнению с  $\xi_i$ , а величина  $\Delta t$  — малой по сравнению с промежутком времени между двумя последовательными столкновениями и большой по

---

\* ) С более детальным изложением кинетической теории газов можно ознакомиться по монографиям [44, 103, 117] и [10].

сравнению с продолжительностью одного столкновения. Вероятность  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$  предполагается удовлетворяющей условию нормировки

$$\int \omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi) \prod_i d\Delta\xi_i = 1. \quad (1.4.1)$$

Из смысла вероятности  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$  следует, что функция распределения  $f(\xi, t + \Delta t)$  в момент времени  $t + \Delta t$  связана с функцией распределения  $f(\xi, t)$  в момент времени  $t$  уравнением

$$f(\xi, t + \Delta t) = \int \omega_{\Delta t}(\xi - \Delta\xi, \Delta\xi) f(\xi - \Delta\xi, t) \prod_i d\Delta\xi_i. \quad (1.4.2)$$

Мы предполагаем, что динамические переменные  $\xi$  испытывают лишь малые изменения в процессе столкновений. Чтобы это предположение оправдывалось, необходимо предполагать, что функция  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$  резко возрастает при  $\Delta\xi \rightarrow 0$ . В этом случае можно разложить функцию  $f(\xi - \Delta\xi, t) \omega_{\Delta t}(\xi - \Delta\xi, \Delta\xi)$  в ряд по степеням величин  $\Delta\xi$ , входящих в первый аргумент и переписать уравнение (1.4.2) в виде

$$f(\xi, t + \Delta t) = f(\xi, t) + \int \left\{ -\Delta\xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} (f(\xi, t) \omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \Delta\xi_j \Delta\xi_k \frac{\partial^2}{\partial \xi_j \partial \xi_k} (f(\xi, t) \omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \Delta\xi_j \Delta\xi_k \Delta\xi_l \left( \frac{\partial^3 f(\eta, t) \omega_{\Delta t}(\eta, \Delta\xi)}{\partial \eta_j \partial \eta_k \partial \eta_l} \right)_{\eta = \xi + \theta \Delta\xi} \right\} \prod_i d\Delta\xi_i,$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$  (при этом было использовано условие нормировки (1.4.1)). Вводя далее моменты вероятности  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi)$

$$\langle \Delta\xi_i \dots \Delta\xi_s \rangle_{\Delta t} = \int \omega_{\Delta t}(\xi, \Delta\xi) \Delta\xi_i \dots \Delta\xi_s \prod_j d\Delta\xi_j$$

и предполагая, что существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = A_i(\xi), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \Delta\xi_k \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = B_{ik}(\xi) \quad (1.4.3)$$

и что при любых  $i, k, l$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\xi_i \Delta\xi_k \Delta\xi_l \rangle_{\Delta t}}{\Delta t} = 0,$$

получим окончательно следующее уравнение для функции распределения  $f(\xi, t) \equiv f$  [78, 118, 64]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \xi_i} (A_i(\xi) f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} (B_{ik}(\xi) f). \quad (1.4.4)$$

Это уравнение, в отличие от интегрального кинетического уравнения (1.3.9), является дифференциальным и носит название

уравнения Фоккера — Планка. Оно справедливо в том случае, когда динамические переменные, характеризующие частицу, медленно меняются при рассеянии частиц, само же рассеяние происходит на посторонних объектах, состояние которых считается полностью заданным.

Так же как и в (1.3.8), интеграл столкновений  $L(\xi; f)$  имеет вид дивергенции в пространстве динамических переменных от некоторого вектора — тока столкновений  $\mathcal{J}_i$ :

$$L(\xi; f) = - \frac{\partial \mathcal{J}_i(\xi)}{\partial \xi_i}, \quad \mathcal{J}_i(\xi) = A_i(\xi) f - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (B_{ik}(\xi) f), \quad (1.4.5)$$

но ток имеет вид не интегрального, а дифференциального оператора, примененного к функции распределения.

Легко убедиться, что если вероятность  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta \xi)$  имеет вид нормального гауссова распределения

$$\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta \xi) =$$

$$= (\det B)^{-1/2} (2\pi \Delta t)^{-n/2} \exp \left\{ - \frac{(\Delta \xi_i - A_i \Delta t) B_{ik}^{-1} (\Delta \xi_k - A_k \Delta t)}{2 \Delta t} \right\}, \quad (1.4.6)$$

где  $B_{ik}$  — положительно определенная матрица,  $\det B$  — ее детерминант,  $n$  — число переменных  $\xi_i$ , то будут справедливы формулы (1.4.3). Более того, если  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta \xi)$  имеет вид гауссова распределения, то не только третий, но и все последующие моменты  $\langle \Delta \xi_i \Delta \xi_k \dots \Delta \xi_s \rangle_{\Delta t}$  стремятся к нулю при  $\Delta t \rightarrow 0$  быстрее, чем  $\Delta t$ , т. е. в этом случае будет справедливо уравнение Фоккера — Планка. Заметим, что справедливо и обратное утверждение, а именно, если уравнение Фоккера — Планка имеет вид (1.4.4), то вероятность  $\omega_{\Delta t}(\xi, \Delta \xi)$  в окрестности каждой точки пространства  $\xi$  определяется локальным гауссовым распределением (1.4.6) с параметрами  $B_{ik}$  и  $A_i$ , зависящими от  $\xi^*$ .

**1.4.2. Теория броуновского движения.** Дифференциальное уравнение Фоккера — Планка можно получить и другим путем, если исходить из дифференциальных уравнений для физических величин  $\xi_i$  при наличии «случайных сил». Покажем, как это делается.

Будем предполагать, что величины  $\xi_i$  изменяются со временем в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\dot{\xi}_i = - a_{ik} \xi_k + \tilde{Y}_i(t; \omega), \quad \tilde{Y}_i(t; \omega) = K_i + Y_i(t; \omega), \quad (1.4.7)$$

где  $a_{ik}$ ,  $K_i$  — некоторые постоянные, а  $Y_i(t; \omega)$  — так называемые «случайные силы», зависящие как от времени  $t$ , так и от случайных параметров  $\omega$  (случайные величины  $Y_i$  зависят от времени и поэтому называются также случайным процессом).

\*) Более подробное изложение этого метода можно найти в работах [118, 64].

Покажем прежде всего, как, исходя из этих уравнений (они называются *уравнениями Ланжевена*), построить функцию распределения  $f(\xi, t)$  для величин  $\xi$ . Пусть при  $t = 0$  величины  $\xi$  равнялись  $\xi(0)$ ; тогда из уравнений (1.4.7) могут быть найдены значения величин  $\xi = \xi(t, \xi(0); \omega)$  в момент времени  $t$  при фиксированных значениях случайных параметров  $\omega$ :

$$\xi(t, \xi(0); \omega) = e^{-at}\xi(0) + \int_0^t d\tau e^{-a(t-\tau)}\tilde{Y}(\tau; \omega), \quad (1.4.8)$$

где  $a \equiv \|a_{ik}\|$  — матрица, составленная из величин  $a_{ik}$  (она действует на векторы  $\xi(0)$  и  $\tilde{Y}(\tau; \omega)$ ). Функция распределения величин  $\xi$  в момент времени  $t$  при фиксированных значениях величин  $\xi(0)$  и параметров  $\omega$ , в соответствии с результатами раздела 2.1.2, представляет собой, очевидно, многомерную  $\delta$ -функцию:

$$f(\xi, t; \xi(0), \omega) = \delta(\xi - \xi(t, \xi(0); \omega)) \equiv \prod_i \delta(\xi_i - \xi_i(t, \xi(0); \omega)).$$

Если величины  $\xi$  в начальный момент времени были распределены с плотностью вероятности  $f(\xi(0), 0)$  и параметры  $\omega$  не были фиксированы, то функция распределения величин  $\xi$  в момент времени  $t$  будет иметь вид

$$f(\xi, t) = \int d\xi(0) f(\xi(0), 0) \langle \delta(\xi - \xi(t, \xi(0); \omega)) \rangle, \quad (1.4.9)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по параметрам  $\omega$ . Используя соотношение  $\delta(\xi) = (2\pi)^{-n} \int dq \exp[iq\xi]$  ( $n$  — число переменных  $\xi$ ), представим  $\langle \delta(\xi - \xi(t, \xi(0); \omega)) \rangle$  с учетом (1.4.8) в виде

$$\langle \delta(\xi - \xi(t, \xi(0); \omega)) \rangle = (2\pi)^{-n} \int dq G(q, t) \exp[iq(\xi - e^{-at}\xi(0))],$$

где

$$G(q, t) = \left\langle \exp \left\{ -iq \int_0^t d\tau e^{-a(t-\tau)} \tilde{Y}(\tau; \omega) \right\} \right\rangle. \quad (1.4.10)$$

Раскладывая функцию распределения  $f(\xi, t)$  в интеграл Фурье

$$f(\xi, t) = (2\pi)^{-n} \int dq e^{iq\xi} f(q, t), \quad (1.4.11)$$

найдем, согласно (1.4.9),

$$f(q, t) = G(q, t) f(e^{-\tilde{a}t}q, 0), \quad (1.4.12)$$

где  $\tilde{a}$  — матрица, транспонированная по отношению к  $a$ .

Для вывода уравнения Фоккера — Планка будем предполагать, что случайный процесс  $Y_i(t; \omega)$  является стационарным



гауссовым процессом. Это означает, что справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \langle Y_{i_1}(t_1; \omega) \dots Y_{i_{2n+1}}(t_{2n+1}; \omega) \rangle &= 0, \\ \langle Y_{i_1}(t_1; \omega) \dots Y_{i_{2n}}(t_{2n}; \omega) \rangle &= \\ &= \sum g_{i_1 i_2}(t_1 - t_2) \dots g_{i_{2n-1} i_{2n}}(t_{2n-1} - t_{2n}), \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

где  $g_{i_1 i_2}(t_1 - t_2)$  — некоторая функция разности  $t_1$  и  $t_2$  и суммирование производится по всем возможным разбиениям величин  $i_1, t_1; i_2, t_2; \dots; i_{2n}, t_{2n}$  на пары (число разбиений равно, очевидно,  $(2n-1)!! = 2n!/n!2^n$ ). Функции  $g_{i_1 i_2}(t_1 - t_2)$  отличны от нуля в некотором интервале  $t_1 - t_2$ , а именно при  $|t_1 - t_2| \leq \tau_0$ , где величина  $\tau_0$  характеризует «память» случайного процесса  $Y_i(t; \omega)$ . Мы будем для простоты считать, что  $\tau_0 = 0$ , так что

$$g_{i_1 i_2}(t_1 - t_2) = C_{i_1 i_2} \delta(t_1 - t_2),$$

где  $C_{i_1 i_2}$  — некоторые константы. Вводя обозначение

$$M(q, t) = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 q e^{-at_1} g(t_1 - t_2) e^{-at_2} q \equiv \int_0^t dt_1 q e^{-at_1} C e^{-at_2} q \quad (1.4.14)$$

(мы используем матричную форму записи), получим, согласно (1.4.10), (1.4.13),

$$G(q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{(2n)!}{n!2^n} (-i)^{2n} M^n(q, t) \exp \left\{ -iq \int_0^t d\tau e^{-a\tau} K \right\},$$

или

$$G(q, t) = \exp \left\{ -iq \int_0^t d\tau e^{-a\tau} K - \frac{1}{2} M(q, t) \right\}. \quad (1.4.15)$$

Легко видеть, что  $G(q, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G(q, t)}{\partial t} + qa \frac{\partial G(q, t)}{\partial q} + iKqG(q, t) = -\frac{1}{2} qCqG(q, t)$$

и начальному условию

$$G(q, 0) = 1.$$

Заметим далее, что справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial t} f(e^{-at}q, 0) + qa \frac{\partial}{\partial q} f(e^{-at}q, 0) = 0.$$

Тогда из (1.4.12) следует, что функция  $f(q, t)$  удовлетворяет такому же уравнению, как и функция  $G(q, t)$ . Возвращаясь от

переменных  $q$  к переменным  $\xi$ , получим поэтому

$$\frac{\partial f(\xi, t)}{\partial t} + K \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ a \xi f(\xi, t) + \frac{1}{2} C \frac{\partial f(\xi, t)}{\partial \xi} \right\}. \quad (1.4.16)$$

Заметим, что такое же уравнение мы получили бы и при  $\tau_0 \neq 0$ , необходимо лишь, чтобы выполнялось неравенство  $\tau_0 \ll \bar{a}^{-1}$ , где  $\bar{a}$  — определяет порядок величины матричных элементов  $a_{ik}$ . Величина  $\bar{a}^{-1}$  представляет собой, как видно из (1.4.16), время, в течение которого существенно изменяется функция  $f(\xi, t)$ .

Мы получили таким образом уравнение Фоккера — Планка, в котором, однако, величины  $A$  и  $B$  не зависят от  $\xi$ . (Общее дифференциальное уравнение Фоккера — Планка соответствует уравнению Ланжевена (1.4.7) с зависящими от  $\xi_i$  величинами  $a_{ij}$  и  $K_i$ .) Изложим теперь, основываясь на этом уравнении, теорию броуновского движения.

Исходными являются следующие уравнения движения броуновской частицы:

$$\dot{v} = -\gamma v + K + Y, \quad \dot{x} = v, \quad (1.4.17)$$

где  $x$  и  $v$  — координата и скорость частицы,  $K$  — регулярная внешняя сила (например, сила тяжести),  $Y$  — случайная сила, действующая на частицу, и  $\gamma$  — коэффициент трения. Для шарообразной броуновской частицы радиуса  $a$  и массы  $m$  величина  $\gamma$  определяется формулой Стокса  $\gamma = 6\pi a \eta / m$ , где  $\eta$  — коэффициент вязкости среды.

Заметим, что уравнения Ланжевена (1.4.17) соответствуют полуфеноменологическому подходу, при котором действие среды разделяется на две части: с одной стороны — гидродинамическое трение, описываемое членом  $-\gamma v$ , и случайные толчки, описываемые случайной силой  $Y$ , происходящие с большой частотой — с другой. Такое разделение имеет смысл потому, что частота, с которой происходят толчки, значительно больше коэффициента трения. Естественно считать, что сила  $Y$ , описывающая случайные толчки, представляет собой гауссовый стационарный процесс (1.4.13).

Согласно (1.4.17) величины  $\xi_i$  в (1.4.7) обозначают теперь радиус-вектор и скорость броуновской частицы  $\xi \equiv (x, v)$ , а элементы матрицы  $a$  равны

$$a_{v_i v_k} = \gamma \delta_{ik}, \quad a_{x_i v_k} = -\delta_{ik}, \quad a_{x_i x_k} = a_{v_i x_k} = 0. \quad (1.4.18)$$

Векторы случайной силы  $Y_i$  и регулярной силы  $K_i$  имеют теперь компоненты

$$Y_{v_i} = Y_i, \quad Y_{x_i} = 0, \quad K_{v_i} = K_i, \quad K_{x_i} = 0$$

и, наконец, величины  $C_{ik}$  равны

$$C_{v_i v_k} = C \delta_{ik}, \quad C_{x_i x_k} = C_{v_i x_k} = C_{x_i v_k} = 0.$$

(Матрица  $C_{v_i v_k}$  кратна единичной в силу изотропии среды.) Поэтому уравнение Фоккера—Планка (1.4.16) для функции распределения  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  броуновских частиц приобретает вид [118]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left( \gamma v_i f + \frac{1}{2} C \frac{\partial f}{\partial v_i} \right). \quad (1.4.19)$$

В этом уравнении величина  $\mathbf{K}$  (которая предполагалась постоянной) может быть медленно меняющейся функцией  $\mathbf{x}$ .

Уравнение легко также получить из общего уравнения Фоккера—Планка (1.4.4). Для этого следует лишь учесть, что  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{v} \Delta t$  и поэтому

$$\omega_{\Delta t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{v}) = \delta(\Delta \mathbf{x} - \mathbf{v} \Delta t) \omega_{\Delta t}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; \Delta \mathbf{v}).$$

Используя эту формулу и определения (1.4.4) величин  $A_i, B_{ik}$ , получим

$$A_{v_i}(\xi) = v_i, \quad B_{x_i v_k} = B_{v_i x_k} = B_{x_i x_k} = 0.$$

Предполагая далее, что

$$A_{v_i}(\xi) = K_i(\mathbf{x}) - \gamma v_i, \quad B_{v_i v_k} = C \delta_{ik},$$

мы и приходим к уравнению (1.4.19).

Покажем теперь, что величина  $C$  однозначно определяется температурой среды. Заметим для этого, что в состоянии равновесия распределение броуновских частиц должно быть максвелловским:

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = Q \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left( \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + U(\mathbf{x}) \right) \right\},$$

где  $T$  — температура среды,  $Q$  — константа, определяющая число броуновских частиц и  $m\mathbf{K} = -\nabla U(\mathbf{x})$ . Подставляя это выражение в (1.4.19), легко видеть, что  $C = 2\gamma T/m$  и, следовательно,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = L(\mathbf{x}, \mathbf{v}; f), \quad (1.4.20)$$

где

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}; f) = \gamma \frac{\partial}{\partial v_i} \left( v_i f + \frac{T}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} \right).$$

Определим теперь функцию  $G(q, t)$  в случае броуновского движения. Используя в преобразовании Фурье (1.4.11) обозначения  $\xi = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ,  $q = (\mathbf{k}, q)$ , получим в соответствии с (1.4.14) и (1.4.15)

$$G(q, t) = \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau q(\tau) \mathbf{K} - \gamma \frac{T}{m} \int_0^t d\tau q'(\tau) \right\}, \quad (1.4.21)$$

где

$$q(\tau) = q e^{-\gamma \tau} + k \gamma^{-1} (1 - e^{-\gamma \tau}).$$

Это выражение вместе с уравнениями (1.4.11), (1.4.12) позволяет найти функцию распределения  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  в любой момент времени, если известно начальное распределение  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ .

Если в начальный момент времени распределение броуновских частиц было пространственно-однородным и все частицы обладали скоростью  $\mathbf{v}_0$ , т. е.  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0) = n\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$ , где  $n$  — плотность броуновских частиц, то их функция распределения в момент времени  $t$ , согласно (1.4.21), (1.4.12), будет иметь вид [118]

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n \left( \frac{m}{2\pi T (1 - e^{-2\gamma t})} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m(\mathbf{v} - e^{-\gamma t} \mathbf{v}_0)^2}{2T (1 - e^{-2\gamma t})} \right\}$$

(предполагается, что  $\mathbf{K} = 0$ ). Мы видим, что распределение  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  стремится с ростом  $t$  к максвелловскому распределению, причем время релаксации  $\tau_r$  по порядку величины равно обратному коэффициенту трения  $\tau_r \sim \gamma^{-1}$ .

Определим еще характер изменения функции распределения броуновских частиц в пространственно-неоднородном случае при  $t \gg \tau_r$ . Для простоты будем считать, что  $\mathbf{K} = 0$ . Входящий в выражение (1.4.21) для  $G(q, t)$  интеграл  $\int_0^t d\tau q^2(\tau)$  при  $t \gg \gamma^{-1}$  равен

$$\int_0^t d\tau q^2(\tau) \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} \frac{k^2}{\gamma^2} t + \frac{1}{2\gamma} \left( q^2 + \frac{2qk}{\gamma} - 3 \frac{k^2}{\gamma^2} \right).$$

Поэтому

$$G(q, t) \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} \exp \left\{ - \frac{\gamma T}{m} \left[ \frac{k^2}{\gamma^2} t + \frac{1}{2\gamma} \left( q^2 + \frac{2qk}{\gamma} - 3 \frac{k^2}{\gamma^2} \right) \right] \right\} \equiv \equiv G_\infty(q, t). \quad (1.4.22)$$

Функция распределения  $f(\xi, t) \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  связана с функцией  $G(\xi, t)$ , в соответствии с (1.4.12), соотношением

$$f(\xi, t) = \int d\xi_0 G(\xi - \xi(t, \xi_0), t) f(\xi_0, 0),$$

где

$$G(\xi, t) = (2\pi)^{-6} \int dq e^{iq\xi} G(q, t), \quad \xi(t, \xi_0) = e^{-at} \xi_0.$$

Далее, согласно (1.4.17), (1.4.18), компоненты  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  вектора  $\xi(t, \xi_0) \equiv (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\mathbf{v}} = -\gamma \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{v}(t) = e^{-\gamma t} \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{x}(t) = -\gamma^{-1} e^{-\gamma t} \mathbf{v}_0 + \mathbf{x}_0 + \gamma^{-1} \mathbf{v}_0.$$

Поэтому при  $t \gg \gamma^{-1}$ , в силу (1.4.22),

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \xrightarrow[t \gg \gamma^{-1}]{} \int d^3x_0 d^3v_0 G_\infty\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{v}_0}{\gamma}, \mathbf{v}, t\right) f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0) \equiv f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \quad (1.4.23)$$

где

$$G_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = (2\pi)^{-6} \int d^3k d^3q e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\mathbf{q}\mathbf{v}} G_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{q}, t).$$

Замечая, что

$$(2\pi)^{-3} \int d^3q e^{-a\mathbf{q}^2} = (4\pi a)^{-3/2}, \quad (1.4.24)$$

получим после несложных вычислений

$$G_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}} \left(4\pi\left(t - \frac{2}{\gamma}\right)\mathcal{D}\right)^{-3/2} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{x} - \gamma^{-1}\mathbf{v})^2}{4\mathcal{D}(t - 2\gamma^{-1})}\right\}, \quad (1.4.25)$$

где

$$\mathcal{D} = T/m\gamma. \quad (1.4.26)$$

Покажем теперь, что функция распределения  $f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  представляет собой некоторый универсальный функционал плотности броуновских частиц  $n(\mathbf{x}, t)$

$$f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)). \quad (1.4.27)$$

Плотность броуновских частиц  $n(\mathbf{x}, t)$  при  $t \gg \gamma^{-1}$  определяется формулой

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3v f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t),$$

откуда, согласно (1.4.23), (1.4.25),

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3x_0 d^3v_0 f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0) \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \left(4\pi\mathcal{D}\left(t - \frac{2}{\gamma}\right)\right)^{-3/2} \times \\ \times \int d^3v \exp\left\{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \gamma^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0))^2}{4\mathcal{D}(t - 2\gamma^{-1})}\right\}.$$

Используя формулу (1.4.24), получим окончательно

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3x_0 d^3v_0 \frac{f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)}{\left(4\pi\mathcal{D}\left(t - \frac{3}{2\gamma}\right)\right)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{v}_0}{\gamma}\right)^2}{4\mathcal{D}\left(t - \frac{3}{2\gamma}\right)}\right\}. \quad (1.4.28)$$

Легко видеть, что плотность частиц  $n(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению диффузии

$$\partial n / \partial t = \mathcal{D} \Delta n, \quad (1.4.29)$$

и, следовательно,  $\mathcal{D}$  представляет собой коэффициент диффузии броуновских частиц. (Формула (1.4.26), связывающая коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$  с коэффициентом трения  $\gamma$ , называется *формулой Эйнштейна*.)

Учитывая формулу (1.4.25) и используя (1.4.28), можно переписать выражение (1.4.23) для  $f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  в виде

$$f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}} n\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma}, t - \frac{1}{2\gamma}\right). \quad (1.4.30)$$

Мы видим, что функция распределения броуновских частиц в момент времени  $t$  определяется плотностью частиц в момент времени  $t - \frac{1}{2\gamma}$ . Но, согласно уравнению диффузии (1.4.29), величину  $n\left(\mathbf{x}, t - \frac{1}{2\gamma}\right)$  можно выразить через плотность броуновских частиц  $n(\mathbf{x}, t)$  и ее пространственные производные в момент времени  $t$ :

$$n\left(\mathbf{x}, t - \frac{1}{2\gamma}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(-\frac{\mathcal{D}}{2\gamma} \Delta\right)^l n(\mathbf{x}, t).$$

Поэтому функция распределения  $f_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  фактически является функционалом от плотности частиц  $n(\mathbf{x}', t)$ .

Таким образом, мы видим, что при  $t \gg \gamma^{-1}$  происходит упрощение в описании состояния броуновских частиц, а именно, при  $t \gg \gamma^{-1}$  состояние броуновских частиц можно характеризовать плотностью частиц  $n(\mathbf{x}, t)$ , функция же распределения становится функционалом плотности  $n(\mathbf{x}', t)$ :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}'; t)),$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)) = \quad (1.4.31)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(-\frac{\mathcal{D}}{2\gamma} \Delta\right)^l n\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma}, t\right),$$

причем плотность частиц  $n(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению диффузии (1.4.29), и «память» о начальном состоянии  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, 0)$  содержится, как это видно из формулы (1.4.28), только в плотности частиц  $n(\mathbf{x}, t)$ .

Возникающее упрощение в описании состояния броуновских частиц находится в соответствии с изложенной в разделах 1.2.1, 1.3.3 общей схемой перехода от полного микроскопического описания к кинетическому и от кинетического к гидродинамическому описанию. Далее мы увидим, что упрощение в описании состояния системы с течением времени характерно не только для классических, но и для квантовых систем и поэтому может быть использовано как основной принцип построения физической кинетики.

Заметим, что величину  $n\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma}, t\right)$ , входящую в формулу (1.4.31), в свою очередь, можно разложить в ряд по степеням  $\frac{v}{\gamma}$ :

$$n\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{v}}{\gamma}, t\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{1}{\gamma}\right)^s (v\nabla)^s n(\mathbf{x}, t). \quad (1.4.32)$$

В результате функционал  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t))$  представится в виде разложения в ряд по градиентам функции  $n(\mathbf{x}, t)$ . Так как в силу (1.4.26)  $\mathcal{D}\gamma^{-1} \sim l^2$ ,  $v\gamma^{-1} \sim l$  ( $l$  — длина свободного пробега броуновской частицы), то это разложение фактически представляет собой разложение в ряд по степеням  $l/a_m$ , где величина  $a_m$  определяет характерные размеры неоднородностей. Первые два члена этого разложения имеют вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)) &= f^{(0)} + f^{(1)} + \dots \\ f^{(0)} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} n(\mathbf{x}, t), \\ f^{(1)} &= \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} \left(-\frac{1}{\gamma} v\nabla\right) n(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.4.33)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что функционал (1.4.31) содержит поправки (к распределению Максвелла) как угодно высокого порядка по градиентам, в то время как уравнение диффузии является точным и не содержит поправок, связанных с пространственными производными более высокого порядка, чем вторая.

Рассмотрим в заключение этого раздела броуновское движение при наличии слабого внешнего силового поля. Так же как и при отсутствии внешних сил, функция распределения  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  при  $t \gg \gamma^{-1}$  будет функционалом только одной «гидродинамической» переменной — плотности частиц  $n(\mathbf{x}, t)$ :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \xrightarrow{t \gg \gamma^{-1}} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)),$$

причем этот функционал будет удовлетворять кинетическому уравнению Фоккера — Планка (1.4.20). Плотность броуновских частиц

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3v f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)) \quad (1.4.34)$$

удовлетворяет, согласно (1.4.20), уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \int d^3v \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}; n(\mathbf{x}', t)).$$

Разлагая  $f$  в ряд по степеням градиента плотности:

$$f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots$$

получим, согласно (1.4.20), следующие уравнения для определения  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$ :

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}; f^{(0)}) = 0,$$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}; f^{(1)}) = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)^{(1)} + \mathbf{v} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{K} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{v}}, \quad (1.4.35)$$

где

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)^{(1)} = -\operatorname{div} \int d^3v \mathbf{v} f^{(0)}.$$

Из (1.4.34) следуют дополнительные условия на  $f^{(0)}$ ,  $f^{(1)}$

$$n = \int d^3v f^{(0)}, \quad \int d^3v f^{(1)} = 0. \quad (1.4.36)$$

Поэтому из первого уравнения (1.4.35) находим, что в нулевом приближении  $f$  имеет вид

$$f^{(0)} = n(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}\right) \quad (1.4.37)$$

и, следовательно,

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)^{(1)} = 0.$$

Из второго уравнения (1.4.35) с учетом (1.4.36) получим

$$f^{(1)} = -\frac{1}{\gamma} \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2T}\right) \mathbf{v} \left( \nabla n - \frac{m}{T} \mathbf{K} n \right). \quad (1.4.38)$$

(При  $\mathbf{K} = 0$  формулы (1.4.37), (1.4.38) переходят в формулы (1.4.33).) Зная  $f^{(1)}$ , легко найти плотность тока  $j$ :

$$j = -\mathcal{D} \left( \nabla n - \frac{m}{T} \mathbf{K} n \right)$$

( $\mathcal{D}$  определяется формулой (1.4.26)), и, следовательно, уравнение диффузии при наличии силового поля имеет вид

$$\partial n / \partial t = \operatorname{div} (\mathcal{D} \nabla n - \gamma^{-1} \mathbf{K} n). \quad (1.4.39)$$

(Это уравнение носит название *уравнения Смолуховского*.) Таким образом, при наличии внешнего силового поля ток складывается из двух слагаемых — тока диффузии  $\mathcal{D} \nabla n$  и тока, обусловленного силовым полем  $\gamma^{-1} \mathbf{K} n$ . Полный ток, очевидно, обращается в нуль, если распределение частиц является бoльцмановским.

**1.4.3. Теория замедления нейтронов.** Другой важной физической задачей, в которой возникает уравнение Фоккера—Планка, является замедление нейтронов в веществе. Если быстрый нейтрон движется в веществе, то благодаря упругим столкновениям нейтрона с ядрами, обладающими тепловой энергией (такое ядро можно считать покоящимся), происходит замедление нейтрона. Именно, при каждом столкновении нейтрона с ядром он теряет в среднем энергию, равную  $\frac{m}{M} \epsilon$ , где  $m$  и  $\epsilon$  — масса и энергия нейтрона и  $M$  — масса ядра вещества.



Чтобы описать процесс замедления, нужно ввести функцию распределения нейтронов  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv f_p(\mathbf{x}, t)$  по импульсам  $\mathbf{p}$  и координатам  $\mathbf{x}$  и установить кинетическое уравнение для этой функции. Если для простоты не учитывать захвата нейтронов ядрами вещества, то кинетическое уравнение будет иметь следующий вид [5]:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{x}} = \int d^3p' \left\{ \omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M}) f_{p'} - \omega(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} - \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M}) f_p \right\} \equiv L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f), \quad (1.4.40)$$

где  $\epsilon_p = p^2/2m$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$  и  $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\epsilon_p - \epsilon_{p'} - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2/2M) d\mathbf{p}'$  — отнесенная к единице времени вероятность перехода нейтрона из состояния с импульсом  $\mathbf{p}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'$ , лежащим в интервале  $\mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$  (так как в результате этого перехода первоначально покоящееся ядро приобретает импульс  $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ , то в  $\delta$ -функцию входит энергия отдачи ядра  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2/2M$ ). Первое слагаемое в интеграле столкновений определяет изменение функции распределения нейтронов, обусловленное переходами нейтронов из состояний  $\mathbf{p}'$  в состояние  $\mathbf{p}$  в результате столкновений с покоящимися ядрами, а второе слагаемое — изменение функции распределения, обусловленное переходом нейтронов из состояния  $\mathbf{p}$  в состояние  $\mathbf{p}'$  также в результате столкновений с покоящимися ядрами. Ясно, что определяющая вероятность функция  $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  пропорциональна плотности ядер. Отметим, что если бы мы учитывали движение ядер и ввели поэтому функцию распределения ядер  $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ , по импульсам  $\mathcal{P}$ , то в интеграл столкновений входила бы, очевидно, величина

$$\omega(\mathbf{p}, \mathcal{P}; \mathbf{p}', \mathcal{P}') (f_p \mathcal{F}(\mathcal{P}) - f_{p'} \mathcal{F}(\mathcal{P}')),$$

где  $\omega(\mathbf{p}, \mathcal{P}; \mathbf{p}', \mathcal{P}')$  — отнесенная к единице времени вероятность перехода нейтрона и ядра из состояния с импульсами  $\mathbf{p}$  и  $\mathcal{P}$  в состояние с импульсами  $\mathbf{p}'$  и  $\mathcal{P}'$ . Полагая в таком интеграле столкновений  $\mathcal{F}(\mathcal{P}) = n\delta(\mathcal{P})$ , мы снова придем к интегралу столкновений  $L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f)$ , в котором благодаря отдаче ядра функция  $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  не симметрична относительно перестановки  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ .

Заметим, что если бы было необходимо учесть захват нейтронов, то к  $L$  следовало бы добавить слагаемое  $-\tau_c^{-1} f_p$ , где  $\tau_c$  — время жизни нейтрона по отношению к захвату (эта величина является функцией энергии нейтрона).

Мы рассмотрим здесь случай тяжелого замедлителя, когда  $M \gg m$ . При этом замедление будет происходить медленно, так как при каждом столкновении нейтрона с ядром будет теряться незначительная доля энергии нейтрона. Покажем, что в этом случае замедление будет описываться уравнением типа уравнения Фоккера — Планка.

Если  $M \gg m$ , то функции  $\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  и  $\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2/2M)$  можно разложить в ряд по степеням  $M^{-1}$ :

$$\omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \omega_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \dots$$

$$\delta\left(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M}\right) = \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \delta'(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) + \dots,$$

после чего интеграл столкновений приобретает вид

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = L^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) + L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) + \dots,$$

где

$$L^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = \int d^3p' \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) (f_{p'} - f_p), \quad (1.4.41)$$

$$L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = \int d^3p' \delta(\varepsilon_p + \varepsilon_{p'}) \{ \omega_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_{p'} - \omega_1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f_p \} + \\ + \int d^3p' \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \{ \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') f_{p'} + \omega_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) f_p \} \delta'(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}).$$

Точный интеграл столкновений (1.4.40) удовлетворяет, очевидно, условию  $\int d^3p L(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = 0$ , а интеграл столкновений  $L^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f)$  — условию

$$\int dO_p L^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f) = 0, \quad (1.4.42)$$

где  $dO_p$  — элемент телесного угла вектора  $\mathbf{p}$ .

Так как  $|L^{(1)}| \ll |L^{(0)}|$ , то величина

$$n(\mathbf{x}, \varepsilon; t) = \int \frac{dO_p}{4\pi} f_p(\mathbf{x}, t), \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}$$

будет медленно меняться с течением времени. Она определяет распределение нейтронов по энергиям.

По прошествии времени, большого по сравнению со временем  $\tau_e$  между двумя последовательными столкновениями нейтрона с ядрами функция распределения нейтронов  $f_p$  станет некоторым функционалом от  $n(\mathbf{x}, \varepsilon; t)$ :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \xrightarrow[t \gg \tau_e]{} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n(\mathbf{x}', \varepsilon'; t)) \equiv f_p(\mathbf{x}; n),$$

причем этот функционал должен удовлетворять соотношению

$$\int \frac{dO_p}{4\pi} f_p(\mathbf{x}; n) = n(\mathbf{x}, \varepsilon; t). \quad (1.4.43)$$

Интегрируя кинетическое уравнение (1.4.40) по  $dO_p$  и учитывая (1.4.42), получим временное уравнение для  $n(\mathbf{x}, \varepsilon; t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \int \frac{dO_p}{4\pi} \mathbf{v} f_p(\mathbf{x}, n) = \int \frac{dO_p}{4\pi} L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; f(n)). \quad (1.4.44)$$

Предположим, что характерные размеры пространственных неоднородностей функции распределения нейтронов велики по

сравнению с их длиной свободного пробега. Тогда функционал  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n(\mathbf{x}', \varepsilon'; t))$  можно искать в виде разложения по степеням  $m/M$  и градиентов  $\partial n/\partial \mathbf{x}$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n) = n(\mathbf{x}, \varepsilon; t) + f_p^{(1)}(\mathbf{x}; n) + \dots,$$

где  $f^{(1)}$  может содержать члены, пропорциональные  $m/M$  и  $\partial n/\partial \mathbf{x}$ . Из (1.4.43) следует, что

$$\int dO_p f_p^{(1)}(\mathbf{x}; n) = 0. \quad (1.4.45)$$

Уравнение для определения  $f^{(1)}$  имеет, согласно (1.4.40), вид

$$\int d^3 p' \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) (f_{p'}^{(1)} - f_p^{(1)}) + L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n) = \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)^{(1)} + \mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.4.46)$$

где  $(\partial n/\partial t)^{(1)}$  — скорость изменения функции распределения нейтронов по энергиям, вычисленная в приближении, линейном по градиентам функции  $n$  и параметру  $m/M$ . Учитывая (1.4.44), имеем

$$(\partial n/\partial t)^{(1)} = L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n).$$

Поэтому уравнение (1.4.46) принимает вид

$$\int d^3 p' \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'}) (f_{p'}^{(1)} - f_p^{(1)}) = \mathbf{v} \partial n/\partial \mathbf{x}.$$

Отсюда, учитывая (1.4.45), получим

$$f_p^{(1)}(\mathbf{x}; n) = -\tau_e(\varepsilon) \mathbf{v} \partial n/\partial \mathbf{x}, \quad \varepsilon = \varepsilon_p, \quad (1.4.47)$$

где

$$\tau_e^{-1}(\varepsilon) = \int d^3 p' \omega_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\varepsilon - \varepsilon') (1 - \cos \vartheta), \quad \varepsilon' = \varepsilon_{p'},$$

и  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Величина  $\tau_e(\varepsilon)$  и определяет время, по прошествии которого распределение нейтронов можно описывать с помощью функции распределения по энергиям. По порядку величины  $\tau_e$  равно времени между двумя последовательными столкновениями нейтрона с ядрами.

Таким образом, согласно (1.4.44), функция распределения  $n$  нейтронов по энергии в приближении, квадратичном по градиентам  $n$  и линейном по  $m/M$ , удовлетворяет уравнению

$$\partial n/\partial t - \mathcal{D}(\varepsilon) \Delta n = L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n),$$

где

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = 1/3 v^2 \tau_e(\varepsilon). \quad (1.4.48)$$

Так как  $n$  является функцией только энергии нейтрона, то первое слагаемое в формуле (1.4.41) при подстановке  $f \rightarrow n$  обращается в нуль (следует учесть, что  $\omega_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  зависит от  $\mathbf{p}^2, \mathbf{p}'^2$ ,

$pp')$ , и мы приходим к следующему выражению для  $L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n)$ :  
 $L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n) =$

$$= \int d^3 p' \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \{w_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') n(\varepsilon') - w_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) n(\varepsilon)\} \delta'(\varepsilon - \varepsilon').$$

Замечая, что

$$(n(\varepsilon') - n(\varepsilon)) \delta'(\varepsilon - \varepsilon') = \frac{\partial n(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \delta(\varepsilon - \varepsilon'),$$

имеем

$$L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n) = g(\varepsilon) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} + h(\varepsilon) n,$$

где

$$g(\varepsilon) = \int d^3 p' \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} w_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\varepsilon - \varepsilon'),$$

$$h(\varepsilon) = \int d^3 p' \{w_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + w_0(\mathbf{p}', \mathbf{p})\} \delta'(\varepsilon - \varepsilon') \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M}. \quad (1.4.49)$$

Величину  $h(\varepsilon)$ , очевидно, можно представить в виде

$$h(\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int d^3 p' \{w_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + w_0(\mathbf{p}', \mathbf{p})\} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \delta(\varepsilon - \varepsilon') -$$

$$- \int d^3 p' \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left\{ (w_0(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + w_0(\mathbf{p}', \mathbf{p})) \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2}{2M} \right\},$$

откуда, используя формулу для  $g(\varepsilon)$  и замечая, что  $d^3 p' = (2m)^{3/2} \sqrt{\varepsilon'} d\varepsilon' dO_{p'}$ , нетрудно показать, что

$$h(\varepsilon) = g'(\varepsilon) + (2\varepsilon)^{-1} g(\varepsilon).$$

Поэтому величина  $L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n)$  приобретает вид

$$L^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{p}; n) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{ \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) n(\varepsilon) \}.$$

В результате получаем следующее кинетическое уравнение для функции распределения нейтронов по энергии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \mathcal{D}(\varepsilon) \Delta n = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \{ \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) n \}. \quad (1.4.50)$$

Используя (1.4.47), (1.4.49), легко связать между собой величины  $g(\varepsilon)$  и  $\tau_e(\varepsilon)$ :

$$g(\varepsilon) = \frac{2m\varepsilon}{M} \tau_e^{-1}(\varepsilon). \quad (1.4.51)$$

Вводя вместо  $n(\varepsilon)$  функцию  $v(\varepsilon)$ :

$$v(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} g(\varepsilon) n(\varepsilon), \quad (1.4.52)$$

представим уравнение (1.4.50) в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \mathcal{D}(\varepsilon) \Delta v = g(\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}.$$

Если ввести еще вместо  $\varepsilon$  новую независимую переменную  $\tau$ :

$$\tau \equiv \tau(\varepsilon) = - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{\mathcal{D}(\varepsilon')}{g(\varepsilon')}, \quad (1.4.53)$$

где  $\varepsilon_0$  — произвольная постоянная, то окончательно получим следующее уравнение для функции  $v = v(\mathbf{x}, \tau; t)$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{D}(\tau) \left\{ \Delta v - \frac{\partial v}{\partial \tau} \right\}. \quad (1.4.54)$$

Входящую сюда переменную  $\tau$  можно, согласно (1.4.53), (1.4.48), представить в виде

$$\tau(\varepsilon) = - \frac{1}{3} \frac{M}{m^2} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \tau_e^2(\varepsilon') d\varepsilon',$$

или, если ввести длину свободного пробега нейтронов  $l(\varepsilon) = v\tau_e(\varepsilon)$ , в виде

$$\tau(\varepsilon) = - \frac{1}{6} \frac{M}{m} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} d\varepsilon' \frac{l^2(\varepsilon')}{\varepsilon'}. \quad (1.4.55)$$

При не зависящей от энергии длине свободного пробега

$$\tau(\varepsilon) = \frac{1}{6} \frac{M}{m} l^2 \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

Уравнение (1.4.54) описывает процесс замедления нейтронов в случае тяжелого замедлителя. Оно является, как мы видим, уравнением типа уравнения Фоккера — Планка.

В кинетическом уравнении (1.4.40) не выписано слагаемое, учитывающее количество нейтронов, доставляемых источником нейтронов в замедлитель. Именно, если  $qd^3x d^3p$  представляет собой число нейтронов, испускаемых ежесекундно источником в элемент фазового пространства  $d^3x d^3p$ , то в правую часть (1.4.50) должно быть добавлено слагаемое  $q$ . Соответственно в уравнении (1.4.54) появляется слагаемое, учитывающее наличие источников

$$\mathcal{D}^{-1}(\tau) \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \frac{\partial v}{\partial \tau} + S(\tau, \mathbf{x}), \quad (1.4.56)$$

где

$$S(\tau, \mathbf{x}) = - \sqrt{\varepsilon} \left( \frac{\partial \tau(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \int \frac{dO_p}{4\pi} q = \frac{6m\varepsilon^{3/2}}{Ml^2(\varepsilon)} \int \frac{dO_p}{4\pi} q.$$

В стационарном случае, когда  $S$  не зависит от  $t$ , это уравнение принимает вид

$$\Delta v + S(\tau, \mathbf{x}) = \partial v / \partial \tau. \quad (1.4.57)$$

Рассмотрим простейший случай, когда в начале координат находится точечный источник нейтронов, испускающий еже-

секундно  $q_0$  нейтронов с энергией  $\varepsilon_0$ :

$$q = q_0 \delta(\mathbf{x}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_0) (4\pi (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2})^{-1}.$$

Тогда  $S(\tau, \mathbf{x}) = 3\varepsilon q_0 (4\pi M (2m)^{1/2} l^2(\varepsilon))^{-1} \delta(\mathbf{x}) \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$ . В этом случае решение уравнения (1.4.57) имеет вид

$$v = \frac{q_0}{2\pi} (8\pi m \tau)^{-3/2} \theta(\tau) \exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau}\right\}$$

(мы выбрали  $\tau$  так, что  $\tau = 0$  соответствует энергии  $\varepsilon_0$ , с которой нейтрон покидает источник). Вспоминая, что функция распределения нейтронов  $n(\varepsilon)$  связана с  $v$  соотношением (1.4.57), имеем

$$n(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{q_0}{4\pi} \frac{M}{m} \frac{l(\varepsilon)}{v\varepsilon^{3/2}} (8\pi m \tau(\varepsilon))^{-3/2} \theta(\varepsilon_0 - \varepsilon) \exp\left\{-\frac{x^2}{4\tau(\varepsilon)}\right\}. \quad (1.4.58)$$

Интегрируя это выражение по  $\mathbf{x}$ , получим энергетическое распределение нейтронов  $N(\varepsilon)$ :

$$N(\varepsilon) = 4\pi m (2m\varepsilon)^{1/2} \int d^3x n = q_0 \frac{M}{2m} \frac{l(\varepsilon)}{v\varepsilon} \theta(\varepsilon_0 - \varepsilon)$$

( $N(\varepsilon)d\varepsilon$  представляет собой число нейтронов в энергетическом интервале  $d\varepsilon$ ).

Формула (1.4.58) показывает, что вероятность того, что нейтрон с энергией  $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$  окажется на расстоянии  $r$  от источника, определяется гауссовым распределением. Из (1.4.58) следует, что среднее квадратичное расстояние ( $\langle x^2 \rangle$ )<sup>1/2</sup>, которое должен пройти нейтрон, чтобы замедлиться от энергии  $\varepsilon_0$  до энергии  $\varepsilon$ , равняется ( $\langle x^2 \rangle$ )<sup>1/2</sup> =  $(6\tau(\varepsilon))^{-1/2}$ . Таким образом, величина  $\tau$  определяет средний квадрат длины замедления нейтрона. Эту величину называют «возрастом» нейтрона.

Остановимся теперь на условии применимости рассмотренного нами приближения, которое называется диффузионным. Оно справедливо, очевидно, в том случае, когда функция распределения  $n(\mathbf{x}, \varepsilon)$  медленно меняется на расстояниях порядка длины свободного пробега  $l$  и в течение времени масштаба времени свободного пробега  $\tau_\varepsilon$ :

$$ln^{-1} |\nabla n| \ll 1, \quad \tau_\varepsilon n^{-1} |\partial n / \partial t| \ll 1.$$

Применив первый из этих критериев к решению (1.4.58), мы придем к условию  $|\mathbf{x}| \ll \tau/l$ . Это условие означает, что диффузионное приближение неприменимо на больших расстояниях от источника. Расстояние, согласно (1.4.55), не должно превосходить  $M/m l \cdot \ln \varepsilon_0/\varepsilon$ . Это условие связано с тем, что на больших расстояниях гауссово распределение заменяется экспоненциальным распределением вида  $\exp\{-|\mathbf{x}|/l\}$ . Действительно, в области  $|\mathbf{x}| > \tau l^{-1}$  выражение (1.4.58) приводит к очень малой плотности нейтронов, и поэтому плотность нейтронов в этой области

будет определяться теми нейтронами, которые попадают сюда, испытав малое число столкновений, количество же таких нейтронов пропорционально  $\exp\{-|x|/l\}$ . Ясно, что диффузионным приближением нельзя пользоваться и в непосредственной близости от источника, так как для того, чтобы было справедливо сокращенное описание, нейтрон должен испытать несколько столкновений.

## § 1.5. Статистическая механика системы заряженных частиц

**1.5.1. Кинетическое уравнение для электронов плазмы.** Полученные в разделе 1.3.1 результаты находят важное применение в случае плазмы, которая представляет собой полностью или частично ионизованный, но в среднем электрически нейтральный газ. Для полностью ионизованной нерелятивистской плазмы основную роль играет электростатическое взаимодействие между частицами. Оно, однако, определяется не обычным законом Кулона, а законом Кулона с учетом эффекта экранирования, обусловленного наличием зарядов обоих знаков. Согласно этому закону потенциальная энергия двух частиц, обладающих зарядом  $e$  и находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, равна

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \exp\left\{-\frac{r}{r_D}\right\},$$

где  $r_D = (T/8\pi n e^2)^{1/2}$  — радиус экранирования или дебаевский радиус ( $T$  — температура и  $n$  — плотность частиц плазмы).

Если средняя энергия взаимодействия между двумя частицами плазмы  $V \sim e^2 n^{1/2}$  мала по сравнению с кинетической энергией, т. е. если  $e^2 n^{1/2} \ll T$ , то для описания кинетических свойств плазмы может быть использовано уравнение (1.3.9). Чтобы разъяснить, какой конкретный вид приобретает это уравнение в случае плазмы, мы не будем учитывать движение ионов, считая для простоты, что роль тяжелой компоненты плазмы сводится только к созданию компенсирующего положительного заряженного фона. Таким образом, мы будем рассматривать только легкую компоненту плазмы — электроны, функция распределения которых  $f(x, p, t)$  удовлетворяет уравнению (1.3.9) с самосогласованным полем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = L^{(2)}(x; f), \quad (1.5.1)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле, действующее на электроны, и  $L^{(2)}$  — интеграл столкновений, определяемый формулой (1.3.8). Поле  $\mathbf{E}(x, t) = -\nabla\phi(x, t)$  является самосогласованным. Потенциал  $\phi \equiv e^{-1}U$  определяется, согласно (1.3.6), самой функцией

распределения электронов

$$\Delta\varphi = 4\pi e \left( \int d^3p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - n \right) \quad (1.5.2)$$

(последнее слагаемое в уравнении Пуассона связано с наличием положительно заряженного фона). Кинетическое уравнение (1.5.1) без интеграла столкновений  $L^{(2)}$  называется *кинетическим уравнением Власова* [40]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.5.3)$$

Интеграл столкновений  $L^{(2)}$  в общем случае имеет вид (1.3.8). В случае чисто кулоновского взаимодействия  $V_q = 4\pi e^2/q^2$  и постоянная  $C$ , определяющая  $L^{(2)}$ , расходится, причем расходимость — логарифмическая — возникает как на нижнем, так и на верхнем пределах. Расходимость на верхнем пределе связана с неприменимостью теории возмущений, которой мы пользовались, так как на малых расстояниях (большие  $q$ ) потенциальная энергия взаимодействия частиц не мала по сравнению с кинетической. На нижнем же пределе, т. е. при больших прицельных параметрах (малые  $q$ ), необходим учет экранирования заряда, приводящего к уменьшению энергии взаимодействия между частицами плазмы. Так как при  $q \ll r_D^{-1}$  частицы эффективно не взаимодействуют, то нижний предел  $q_{\min}$  в интеграле, определяющем  $C$ , следует считать порядка  $r_D^{-1}$ ,  $q_{\min} \approx r_D^{-1}$ ; верхний же предел  $q_{\max}$  по порядку величины можно найти из условия равенства средней кинетической и потенциальной энергии,  $T \approx \approx e^2 q_{\max}$ , откуда  $q_{\max} \approx Te^{-2}$ . Поэтому по порядку величины  $C \approx 2\pi m e^4 \ln T^{3/2}/e^3 n^{1/2}$ . Интеграл столкновений  $L^{(2)}$  называется *интегралом столкновений Ландау* [72].

**1.5.2. Теория экранирования.** В предыдущем разделе мы разъяснили идею устранения расходимостей в интеграле столкновений Ландау, основанную на эффекте экранирования. Дадим теперь строгую теорию этого эффекта [20, 13, 77], причем для простоты будем считать, что ионы покоятся и создают лишь фон равномерно распределенного положительного заряда. Среднюю энергию взаимодействия двух электронов будем предполагать малой по сравнению с их тепловой энергией, так что  $e^2 n^{1/3}/T \ll 1$  или  $g \equiv (nr_D^3)^{-1} \ll 1$ . Исходной в нашем рассмотрении будет цепочка интегральных уравнений (1.2.11). Однако непосредственное применение этих уравнений к электронам плазмы приводит к формальным трудностям, связанным с далекодействующим характером кулоновских сил. Для того чтобы разъяснить эти трудности, обратимся к выражению (1.2.8) для ядра  $\mathcal{K}_s(f)$ . Входящий в  $\mathcal{K}_s$   $\int dx_{s+1} \{V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{s+1}); f_{s+1}(f)\}$  расходится, очевидно, в области больших  $x_{s+1}$ , так как  $V(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{s+1}) = e^2/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{s+1}|$ , а  $f_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}; f)$  в силу принципа ослабления корреляций имеет при  $x_{s+1} \rightarrow \infty$  вид

$$f_{s+1}(x_1, \dots, x_{s+1}; f) \xrightarrow{x_{s+1} \rightarrow \infty} f_s(x_1, \dots, x_s; f) f(x_{s+1})$$



( $f(x_{s+1})$  при больших  $x_{s+1}$  не зависит от  $x_{s+1}$ ). Используя последнее соотношение, перепишем выражение для  $\mathcal{H}_s(f)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(f) = & \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} U'(x_i; f), f_s(f) \right\} + \{V^{(s)}, f_s(f)\} + \\ & + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}(f) - f_s(f) f(x_{s+1}) \right\} - \\ & - \int dx' \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x')} L(x'; f), \end{aligned}$$

где

$$L(x_1; f) = \{U'(x_1; f), f(x_1)\} + \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(f) - f(x_1) f(x_2)\},$$

$$U'(x_1; f) = \int d^3 x' V(x_1 - x') \int d^3 p' f(x', p').$$

Последние слагаемые в выражениях для  $\mathcal{H}_s(f)$  и  $L(f)$  сходятся, но расходятся первые слагаемые, так как расходится интеграл, определяющий  $U'(x; f)$ . Однако эта расходимость является чисто формальной и устраняется, если учесть компенсирующий фон положительного заряда. Действительно, благодаря этому фону в правую часть цепочки дифференциальных уравнений (1.1.23) должно быть введено слагаемое

$$-n \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} \int d^3 x V(x - x_i), f_{s+1}(f) \right\}, \quad s = 1, 2, \dots,$$

обусловленное взаимодействием электронов с положительно заряженными ионами (число их обозначено через  $N$  и плотность через  $n = N/V$ ). При этом в цепочке уравнений (1.2.11)  $\mathcal{H}_s(f)$ ,  $L(x; f)$  следует заменить величинами

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(f) = & \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} U(x_i; f), f_{s+1}(f) \right\} + \\ & + \int dx_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}(f) - f_s(f) f(x_{s+1}) \right\} - \\ & - \int dx' \frac{\delta f_s(f)}{\delta f(x')} L(x'; f) + \{V^{(s)}, f_s(f)\}, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

$$L(x_1; f) = \{U(x_1; f), f(x_1)\} + \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2(f) - f(x_1) f(x_2)\},$$

где

$$U(x; f) = \int d^3 x' V(x - x') \left[ \int d^3 p' f(x', p') - n \right], \quad (1.5.5)$$

причем входящий сюда интеграл сходится.

Легко видеть, что последнее слагаемое в выражении для  $\mathcal{H}_s(f)$  пропорционально малому параметру  $g$  и может рассматриваться как возмущение. Действительно, введем вместо  $x \equiv (x, p)$  новые независимые переменные  $\xi \equiv (\xi, \eta)$ ,  $\xi = x/r_D$ ,  $\eta = p/\bar{p}$ , где  $\bar{p}$  — характерное значение импульса электрона,  $\bar{p} \sim (2mT)^{1/2}$ . Так как многочастичные функции  $f_s$  при  $|x| \sim r_D$ ,  $|p| \sim \bar{p}$  по порядку величины равны  $f_s \sim (n/\bar{p}^3)^s$ , то функции

$$\bar{f}_s(\xi_1, \dots, \xi_s; \bar{f}) \equiv (\bar{p}^3/n)^s f_s(x_1, \dots, x_s; f)$$

будут при  $|\xi| \sim |\eta| \sim 1$  порядка единицы. Вводя далее вместо  $\tau$  новую переменную интегрирования  $\bar{\tau} = \tau \bar{p} / m r_D$ , получим следующую цепочку интегральных уравнений для функций  $f_s$ :

$$\begin{aligned} \bar{f}_s(\bar{f}) &= \prod_{1 \leq i \leq s} \bar{f}(\xi_i) + \int_{-\infty}^0 d\bar{\tau} S_0^{(s)}(\bar{\tau}) \bar{\mathcal{H}}_s(S_0^{(1)}(-\bar{\tau})\bar{f}), \\ \bar{\mathcal{H}}_s(\bar{f}) &= \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} \bar{U}(\xi_i; \bar{f}), \bar{f}_s(\bar{f}) \right\} - \int d^3 \xi' \frac{\delta \bar{f}_s(\bar{f})}{\delta \bar{f}(\xi')} \bar{L}(\xi'; \bar{f}) + \\ &+ \int d^3 \xi_{s+1} \left\{ \sum_{1 \leq i \leq s} \bar{V}(\xi_i - \xi_{s+1}), \bar{f}_{s+1}(\bar{f}) - \bar{f}_s(\bar{f}) \bar{f}(\xi_{s+1}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{n r_D^3} \{ \bar{V}^{(s)}, \bar{f}_s(\bar{f}) \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{L}(\xi_1; \bar{f}) &= \{ \bar{U}(\xi_1; \bar{f}), \bar{f}(\xi_1) \} + \int d^3 \xi_2 \{ \bar{V}(\xi_1 - \xi_2), \bar{f}_2(\bar{f}) - \bar{f}(\xi_1) \bar{f}(\xi_2) \}, \\ \bar{U}(\xi; \bar{f}) &= \int d^3 \xi' \bar{V}(\xi - \xi') \left( \int d^3 \eta' \bar{f}(\xi', \eta') - 1 \right) \end{aligned}$$

и  $\bar{V}(\xi) = |\xi|^{-1}$  (скобки Пуассона вычисляются по переменным  $\xi, \eta$ ).

Наличие в последнем слагаемом для  $\bar{\mathcal{H}}_s$  множителя  $g$  позволяет развить теорию возмущений, считая скобку Пуассона  $\{V^{(s)}, f_s\}$  в (1.5.4) малой. Разложение многочастичных функций распределения по степеням  $g$

$$f_s(f) = f_s^{(0)}(f) + f_s^{(1)}(f) + \dots$$

приводит к разложению функционала  $L(x; f)$  по степеням  $g$

$$L(x; f) = L^{(0)}(x; f) + L^{(1)}(x; f) + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} L^{(0)}(x_1; f) &= \{U(x_1; f), f(x_1)\} + \\ &+ \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2^{(0)}(x_1, x_2; f) - f(x_1) f(x_2)\}, \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

$$L^{(k)}(x_1; f) = \int dx_2 \{V(x_1 - x_2), f_2^{(k)}(f)\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

В нулевом приближении

$$f_s^{(0)}(f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) \quad (1.5.7)$$

и, следовательно,

$$L^{(0)}(x; f) = \{U(x; f), f(x)\} = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p}, \quad (1.5.8)$$

где  $U(x; f)$  — самосогласованный потенциал (1.5.5), учитывающий действие положительно заряженного фона. Легко видеть, что полученное в этом приближении кинетическое уравнение совпадает с уравнением Власова.

Рассмотрим далее первое приближение для функции  $f_s$ . Для простоты ограничимся пространственно-однородным случаем, когда  $L^{(0)}(x; f) = 0$ . Заме-

тим, что в силу (1.5.6), (1.5.7)

$$\int dx' \frac{\delta f_s^{(0)}(f)}{\delta f(x')} L^{(1)}(x'; f) = \\ = \sum_{1 \leq i \leq s} \int dx_{s+1} \left\{ V(x_i - x_{s+1}), f_2^{(1)}(x_i, x_{s+1}; f) \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} f(x_j) \right\}$$

и, следовательно, согласно (1.2.11), (1.5.4),

$$f_s^{(1)}(f) = \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(s)}(\tau) \mathcal{X}_s^{(1)}(f),$$

$$\mathcal{X}_s^{(1)}(f) = \sum_{1 \leq i \leq s} \int dx_{s+1} \left\{ V(x_i - x_{s+1}), f_{s+1}^{(1)}(f) - f_s^{(1)}(f) f(x_{s+1}) - \right. \\ \left. - f_2^{(1)}(x_i, x_{s+1}; f) \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ j \neq i}} f(x_j) \right\} + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \{V(x_i - x_j), f(x_i) f(x_j)\} \prod_{\substack{1 \leq r \leq s \\ r \neq i, j}} f(x_r).$$

Эта бесконечная цепочка зацепляющихся интегральных уравнений для функций  $f_s^{(1)}$  допускает, как можно непосредственно проверить, точное решение вида

$$f_s^{(1)}(f) = \sum_{1 \leq i < j \leq s} g(x_i, x_j) \prod_{\substack{1 \leq r \leq s \\ r \neq i, j}} f(x_r), \quad (1.5.9)$$

где  $g(x_1, x_2)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^0 d\tau S_0^{(2)}(\tau) \left( \int dx_3 \{V(x_1 - x_3), f(x_1) g(x_2, x_3)\} + \right. \\ \left. + \int dx_3 \{V(x_2 - x_3), f(x_2) g(x_1, x_3)\} + \{V(x_1 - x_2), f(x_1) f(x_2)\} \right). \quad (1.5.10)$$

(Так как  $f_2^{(1)} = g(x_1, x_2)$ , то  $g(x_1, x_2)$  совпадает с определенной, согласно (1.1.11), парной корреляционной функцией.) Из уравнения (1.5.10) следует, что функция  $g(x_1, x_2)$  зависит только от разности пространственных аргументов  $g(x_1, x_2) = g(x_1 - x_2, p_1, p_2)$ .

Вводя обозначение

$$G(x_1 - x_2, p_1, p_2) = \int dx_3 (\{V(x_1 - x_3), f(x_1)\} g(x_2, x_3) + \\ + \{V(x_2 - x_3), f(x_2)\} g(x_1, x_3) + \{V(x_1 - x_2), f(x_1) f(x_2)\}),$$

перепишем уравнение (1.5.10) в виде

$$g(x, p_1, p_2) = \int_{-\infty}^0 d\tau G(x + \tau(v_1 - v_2), p_1, p_2), \quad v_i = \frac{p_i}{m}. \quad (1.5.11)$$

Замечая далее, что

$$G(x, p_1, p_2) = \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x} \int d^3 x' V(x-x') h(-x', p_2) - \\ - \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2} \frac{\partial}{\partial x} \int d^3 x' V(x-x') h(x', p_1) + \\ + \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left( \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} f(p_2) - \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2} f(p_1) \right), \quad (1.5.12)$$

где

$$h(x, p) = \int d^3 p' g(x, p, p'),$$

и интегрируя (1.5.11) по  $p_2$ , получим следующее интегральное уравнение для функции  $h(x, p)$ :

$$h(x, p_1) = \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial x} \int d^3 x' \int d^3 p_2 \int_{-\infty}^0 d\tau V(x-x'+v_{12}\tau) h(-x', p_2) - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \int d^3 x' \int d^3 p_2 \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2} V(x-x'+v_{12}\tau) h(x', p_1) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int d^3 p_2 \int_{-\infty}^0 d\tau V(x+v_{12}\tau) \left( \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} f(p_2) - \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2} f(p_1) \right), \quad (1.5.13)$$

где  $v_{12} = v_1 - v_2$ . Ясно, что, найдя  $h$ , можно по формулам (1.5.11) и (1.5.12) восстановить функцию  $g$ . Поэтому задача сводится к нахождению функции  $h$  из интегрального уравнения (1.5.13). С этой целью, введя фурье-компоненты функций  $h(x, p)$  и  $V(x)$

$$h_k(p) = \int d^3 x e^{-ikx} h(x, p), \quad V_k = \int d^3 x e^{-ikx} V(x)$$

получим следующее интегральное уравнение для определения  $h_k(p)$ :

$$h_k(p_1) = -\pi i \int d^3 p_2 V_k \delta_+(xv_{12}) \left\{ \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1\kappa}} h_k^*(p_2) - \right. \\ \left. - \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_{2\kappa}} h_k(p_1) + \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1\kappa}} f(p_2) - \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_{2\kappa}} f(p_1) \right\}, \quad (1.5.14)$$

где

$$\delta_+(x) = -\frac{1}{\pi i} \frac{1}{x+i0} = \delta(x) + \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{x}, \quad \kappa = \frac{k}{|k|}, \quad p_\kappa = p\kappa.$$

Согласно (1.5.6), (1.5.9) интеграл столкновений  $L^{(1)}(x; f)$  может быть записан в виде

$$L^{(1)}(x; f) = -\frac{\partial}{\partial p} \int d^3 k V_k k \operatorname{Im} h_k(p). \quad (1.5.15)$$

В случае чисто кулоновского взаимодействия, когда  $V_k = 4\pi e^2/k^2$ , это выражение принимает вид

$$L^{(1)}(x; f) = -4\pi e^2 \frac{\partial}{\partial p} \int d^3 k \frac{k}{k^2} \operatorname{Im} h_k(p). \quad (1.5.16)$$

Заметим теперь, что в уравнение (1.5.14) фактически входит не сама функция  $h$ , а интеграл от нее по поперечным относительно вектора  $\mathbf{x}$  составляющим импульса  $\rho_{\perp}$ :

$$\tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{\mathbf{x}}) = \int d^2\rho_{\perp} h_{\mathbf{k}}(\rho).$$

Поэтому уравнение (1.5.14) может быть переписано в виде

$$\varepsilon(\mathbf{k}, k v_1) h_{\mathbf{k}}(\rho_1) = -\pi i V_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial f(\rho_1)}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \tilde{h}_{\mathbf{k}}^*(\rho_{2\mathbf{x}}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f(\rho_1)}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{2\mathbf{x}}) - \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{2\mathbf{x}})}{\partial \rho_{2\mathbf{x}}} f(\rho_1) \right\} \delta_+(\mathbf{x} v_{12}), \quad (1.5.17)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \pi i V_{\mathbf{k}} \int d^3\rho_2 \delta_+(\omega - k v_2) \mathbf{k} \frac{\partial f(\rho_2)}{\partial \rho_2}, \quad (1.5.18) \\ \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{\mathbf{x}}) = \int d^2\rho_{\perp} f(\rho).$$

Интегрируя это уравнение по  $\rho_{1\perp}$ , получим следующее интегральное уравнение для  $\tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{\mathbf{x}})$ :

$$\varepsilon(\mathbf{k}, k v_1) \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{1\mathbf{x}}) = -\pi i V_{\mathbf{k}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \left\{ \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}})}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \tilde{h}_{\mathbf{k}}^*(\rho_{2\mathbf{x}}) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}})}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{2\mathbf{x}}) - \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{2\mathbf{x}})}{\partial \rho_{2\mathbf{x}}} \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}}) \right\} \delta_+(\mathbf{x} v_{12}). \quad (1.5.19)$$

Легко показать, используя определение  $\delta_+(x)$ , что не содержащий функции  $\tilde{h}$  член в уравнении (1.5.19) является чисто вещественным. Поэтому

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, k v_1) \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{1\mathbf{x}}) = -\pi V_{\mathbf{k}} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}})}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \delta_+(\mathbf{x} v_{12}) \tilde{h}_{\mathbf{k}}^*(\rho_{2\mathbf{x}}),$$

а так как

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k}, k v_1) \operatorname{Re} \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{1\mathbf{x}}) = -\pi V_{\mathbf{k}} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}})}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \operatorname{Re} \delta_+(\mathbf{x} v_{12}) \cdot \operatorname{Re} \tilde{h}_{\mathbf{k}}^*(\rho_{2\mathbf{x}}),$$

то последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\mathbf{k}, k v_1) \operatorname{Im} \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{1\mathbf{x}}) = m V_{\mathbf{k}} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}; \rho_{1\mathbf{x}})}{\partial \rho_{1\mathbf{x}}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \frac{\operatorname{Im} \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{2\mathbf{x}})}{\rho_{2\mathbf{x}} - \rho_{1\mathbf{x}}}.$$

Это однородное уравнение имеет только тривиальное решение

$$\operatorname{Im} \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{1\mathbf{x}}) = 0.$$

Таким образом, функция  $\tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{\mathbf{x}})$  является чисто вещественной. Исключая из уравнений (1.5.17), (1.5.19) величину  $\int_{-\infty}^{\infty} d\rho_{2\mathbf{x}} \delta_+(\mathbf{x} v_{12}) \tilde{h}_{\mathbf{k}}(\rho_{2\mathbf{x}})$ , получим

следующее соотношение между функциями  $h_k$  и  $\tilde{h}_k$ :

$$h_k(p_1) \frac{\partial \tilde{f}(x; p_{1x})}{\partial p_{1x}} - \tilde{h}_k(p_{1x}) \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1x}} = \frac{\pi i V_k}{\varepsilon(k, kv_1)} \times \\ \times \left\{ f(p_1) \frac{\partial \tilde{f}(x; p_{1x})}{\partial p_{1x}} - \tilde{f}(x; p_{1x}) \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1x}} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dp_{2x} \delta_+(\kappa v_{12}) \frac{\partial \tilde{f}(x; p_{2x})}{\partial p_{2x}} = \\ = \frac{1 - \varepsilon(k, kv_1)}{\varepsilon(k, kv_1)} \left\{ f(p_1) \frac{\partial \tilde{f}(x; p_{1x})}{\partial p_{1x}} - \tilde{f}(x; p_{1x}) \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1x}} \right\}. \quad (1.5.20)$$

Замечая теперь, что

$$\text{Im } \varepsilon(k, kv_1) = -\pi m V_k \frac{\partial \tilde{f}(x; p_{1x})}{\partial p_{1x}},$$

и учитывая вещественность функции  $\tilde{h}_k$ , получим из (1.5.20)

$$\text{Im } h_k(p_1) = \frac{\pi V_k}{|\varepsilon(k, kv_1)|^2} \int d^3 p_2 \delta(\kappa v_{12}) \kappa \left\{ f(p_1) \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_2} - f(p_2) \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_1} \right\}.$$

Подстановка этого выражения в (1.5.15) приводит окончательно к следующему выражению для интеграла столкновений с учетом эффекта экранирования:

$$L^{(1)}(x; f) = -\partial \mathcal{I}_i / \partial p_i, \quad (1.5.21)$$

где

$$\mathcal{I}_i(p_1) = \pi \int d^3 p_2 Q_{ij}(p_1, p_2) \left( \frac{\partial f(p_2)}{\partial p_{2j}} f(p_1) - \frac{\partial f(p_1)}{\partial p_{1j}} f(p_2) \right), \\ Q_{ij}(p_1, p_2) = \int d^3 k \delta(kv_1 - kv_2) \frac{k_i k_j |V_k|^2}{|\varepsilon(k, kv_1)|^2}.$$

Положив в этой формуле  $\varepsilon = 1$  (что соответствует обычной теории возмущений, развитой в 1.3.1), мы приходим к интегралу столкновений Ландау. Выражением (1.5.21) должен быть заменен интеграл столкновений Ландау в кинетическом уравнении (1.5.1) с самосогласованным полем.

Таким образом, учет экранирования сводится к замене компоненты Фурье кулоновского взаимодействия  $V_k$  величиной  $\tilde{V}_k = V_k / \varepsilon(k, kv)$ , где  $\varepsilon(k, \omega)$  определяется формулой (1.5.18). Как мы увидим в следующем разделе, величина  $\varepsilon(k, \omega)$  представляет собой электрическую проницаемость плазмы с учетом пространственной и временной дисперсии.

Интеграл столкновений (1.5.21), как легко убедиться, в отличие от интеграла столкновений (1.3.8), не расходится в области малых переданных импульсов. Именно этим и оправдывается процедура обрезания при больших прицельных расстояниях, которая была использована в 1.3.2. Заметим, однако, что интеграл (1.5.21) продолжает расходиться в области больших  $|k|$ , и для устранения этой расходимости мы должны по-прежнему пользоваться процедурой, примененной в 1.3.2. Эта расходимость связана с неприменимостью теории возмущений, развитой в настоящем параграфе, в области малых прицельных параметров. Как показано в разделе 1.2.2 этой расходимости не возникает при разложении по степеням плотности.

Заметим, что выражение (1.5.21) для интеграла столкновений справедливо не только для однородной, но и для неоднородной плазмы, если только достаточно малы градиенты функции распределения (в нашем выводе мы пренебрегли в интеграле столкновений членами, содержащими пространственные производные от функции распределения).

Подчеркнем, что кинетическим уравнением (1.5.1) с самосогласованным полем и обобщенным интегралом столкновений (1.5.21) можно пользоваться, если плазменный параметр  $g = (nr_D^3)^{-1}$  мал, и невелики высшие корреляционные эффекты в начальном состоянии плазмы (такая плазма называется спокойной).

**1.5.3. Дисперсионное уравнение для волн в плазме.** Наличие самосогласованного поля приводит к существованию в плазме специфических электромагнитных волн. Чтобы убедиться в этом, обратимся к уравнению Власова (1.5.3) и предположим, что функция распределения электронов  $f$  мало отличается от равновесной функции распределения  $f_0$ ,  $f = f_0 + \delta f$ . Тогда после линеаризации по  $\delta f$  уравнение Власова примет вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{x}} + e\mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

где  $\mathbf{E}$  — самосогласованное электрическое поле. Формальное решение этого уравнения с начальным условием  $\delta f|_{t=-\infty} = 0$  имеет следующий вид [11, 104, 65]:

$$\delta f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -e \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \int_{-\infty}^t d\tau \mathbf{E}(\mathbf{x} - (t - \tau)\mathbf{v}, \tau). \quad (1.5.22)$$

Зная  $\delta f$ , можно определить микроскопическую плотность электрического тока:

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{x}, t) &= e \int d^3 p v_i \delta f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \\ &= \int_{-\infty}^t dt' \int d^3 x' \sigma_{ii}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') E_i(\mathbf{x}', t'), \end{aligned}$$

где  $\sigma_{ii}(\mathbf{x}, t) = -e^2 \int d^3 p v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ . Переходя к фурье-компонентам электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и плотности электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int d\omega d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \int d\omega d^3 k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega),$$

найдем

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_{ii}(\mathbf{k}, \omega) E_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.5.23)$$

где  $\sigma_{ii}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор проводимости, определяемый формулой

$$\sigma_{ii}(\mathbf{k}, \omega) = -\pi e^2 \int d^3 p v_i \frac{\partial f_0}{\partial p_i} \delta_+(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad \delta_+(x) = \frac{i}{\pi} \frac{1}{x + i0}.$$

Так как в нашем распоряжении имеется только один вектор  $\mathbf{k}$ , то удобно выделить в тензоре  $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  продольную  $\sigma^l$  и

поперечную  $\sigma^t$  части:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{k_i k_j}{k^2} \sigma^l(\mathbf{k}, \omega) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \sigma^t(\mathbf{k}, \omega), \\ \sigma^l(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{\pi e^2}{k^2} \int d^3 p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\mathbf{k} \mathbf{v})^l \delta_+(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}), \\ \sigma^t(\mathbf{k}, \omega) &= -\frac{\pi e^2}{2k^2} \int d^3 p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\mathbf{k} \mathbf{v}]^2 \delta_+(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}), \quad \varepsilon = \frac{p^2}{2m}.\end{aligned}\tag{1.5.24}$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла — Лоренца для фурье-компонент электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\begin{aligned}i[\mathbf{kB}(\mathbf{k}, \omega)] &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega), \\ i[\mathbf{kE}(\mathbf{k}, \omega)] &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega).\end{aligned}\tag{1.5.25}$$

Подставляя сюда выражение (1.5.23) для плотности тока, найдем

$$\begin{aligned}i[\mathbf{kB}] &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} (\sigma^l \mathbf{E}^l + \sigma^t \mathbf{E}^t) = \\ &= -\frac{i\omega}{c} \left( 1 + \frac{4\pi i \sigma^l}{\omega} \right) \mathbf{E} - \frac{4\pi}{c} (\sigma^t - \sigma^l) \frac{1}{k^2} [\mathbf{k} [\mathbf{kE}]],\end{aligned}\tag{1.5.26}$$

где  $\mathbf{E}^l$  и  $\mathbf{E}^t$  — продольная и поперечная части электрического поля:

$$\mathbf{E}^l = \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{kE}), \quad \mathbf{E}^t = -\frac{1}{k^2} [\mathbf{k} [\mathbf{kE}]].$$

С другой стороны, уравнения Максвелла для среды в компонентах фурье имеют вид

$$i[\mathbf{kH}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{D}, \quad i[\mathbf{kE}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B},\tag{1.5.27}$$

где  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля и  $\mathbf{D}$  электрическая индукция. Для изотропной среды

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \mu(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),\tag{1.5.28}$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  — электрическая и магнитная проницаемости. Сравнение (1.5.26) с (1.5.27) показывает, что

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) &= 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^l(\mathbf{k}, \omega), \\ \mu^{-1}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 - \frac{4\pi i \omega}{c^2 k^2} (\sigma^t(\mathbf{k}, \omega) - \sigma^l(\mathbf{k}, \omega)).\end{aligned}\tag{1.5.29}$$

Используя формулу (1.5.24) для  $\sigma^l(\mathbf{k}, \omega)$ , найдем электрическую проницаемость плазмы:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi^2 i e^2}{\omega k^2} \int d^3 p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (\mathbf{k} \mathbf{v})^2 \delta_+(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})\tag{1.5.30}$$



или

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi^2 i e^2}{k^2} \int d^3 p \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}(\mathbf{k}v) \delta_+(\omega - \mathbf{k}v).$$

Что касается магнитной проницаемости, то она практически не отличается для плазмы от единицы (второе слагаемое в выражении для  $\mu^{-1}$  содержит в знаменателе большую величину  $c^2$ ).

Формулы (1.5.24), (1.5.30) относятся к тому случаю, когда подвижной считается только одна компонента плазмы — электронная. Но эти формулы можно легко обобщить и учесть движение ионных компонент плазмы. При этом  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1$ , так же как  $\sigma^l(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\sigma^t(\mathbf{k}, \omega)$ , представится в виде суммы величин типа (1.5.24), относящихся к различным сортам частиц.

Чтобы однородная система (1.5.27) при связях (1.5.28) имела нетривиальное решение, необходимо, очевидно, выполнение условия

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad (1.5.31)$$

либо условия

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2 \mu(\mathbf{k}, \omega)} = 0. \quad (1.5.32)$$

Мы получили уравнения, связывающие частоты  $\omega$  с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  волн, могущих распространяться в плазме. Эти уравнения носят название *дисперсионных уравнений*. Легко видеть, что дисперсионное уравнение (1.5.31) соответствует продольным электромагнитным колебаниям плазмы, а уравнение (1.5.32) — поперечным.

Предполагая, что равновесная функция распределения является максвелловской:

$$f_0 = \frac{n}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\varepsilon}{T}\right\},$$

где  $n$  — плотность частиц, легко показать, что в предельном случае длинных волн, когда  $\mathbf{k}r_D \ll 1$ ,  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулой

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + 3(kr_D)^2) + i \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\omega}{\omega_0} (kr_D)^{-3} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \frac{1}{k^2 r_D^2}\right\},$$

где  $\omega_0$  — ленгмюровская частота,  $\omega_0 = (4\pi n e^2 / m)^{1/2}$ .

Приравнивая это выражение нулю, получим

$$\omega = \omega_0 (1 + 3/2 (kr_D)^2) - i\gamma_{\mathbf{k}}, \quad (1.5.33)$$

где

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \omega_0 \operatorname{Im} \varepsilon = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{\omega_0}{(kr_D)^3} \exp\left\{-\frac{1}{2k^2 r_D^2} - \frac{3}{2}\right\}.$$

Комплексность  $\omega$  с  $\text{Im } \omega < 0$  означает, что продольные плазменные колебания затухают, причем коэффициент затухания их равен  $\gamma_p$ , а частота равна  $\omega_l = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_D^2\right)$ . Мы видим, что продольные плазменные волны затухают даже в пренебрежении столкновениями между частицами. Это затухание носит название *затухания Ландау*. Оно связано с резонансным взаимодействием частиц с волнами, при котором выполняется условие  $\omega = kv$ , и тем обстоятельством, что функция распределения частиц уменьшается с ростом энергии [75].

Для поперечных волн дисперсионное уравнение (1.5.32) приводит к следующей зависимости частоты  $\omega_i$  от волнового вектора  $k$ :

$$\omega_i^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2. \quad (1.5.34)$$

В уравнении (1.5.1) мы пренебрегли интегралом столкновений, что возможно только в том случае, если выполняется условие  $\omega \tau_r \gg 1$ , где  $\tau_r$  — время релаксации функции распределения частиц.

## § 1.6. Необратимость макроскопических процессов и эргодическая гипотеза

**1.6.1. Обратимость механических движений и необратимость макроскопических процессов.** Уравнения классической механики инвариантны относительно обращения времени. Отсюда следует, что если  $X(t, x)$  — решение уравнений Гамильтона (как и в § 1.1,  $x_i = (x_i, p_i)$ ,  $X_i = (X_i, \mathcal{P}_i)$ ,  $X(0, x) = x$ ), то  $\tilde{X}(-t, \tilde{x})$  также будет их решением, где  $\tilde{x}_i = (x_i, -p_i)$ ,  $\tilde{X}_i = (X_i, -\mathcal{P}_i)$ , причем

$$\tilde{X}(-t, \tilde{x}) = X(t, x). \quad (1.6.1)$$

Это соотношение показывает, что фазовая траектория, отвечающая обращенному во времени движению системы ( $\tilde{X}(-t, \tilde{x})$ ), совпадает с фазовой траекторией прямого движения. (Отметим, что (1.6.1) имеет место благодаря тому, что  $\mathcal{H}(x, p) = \mathcal{H}(x, -p)$ .)

Несмотря, однако, на обратимость механических движений, реальные макроскопические процессы необратимы, т. е. оба направления времени для них неэквивалентны, хотя в основе всех этих процессов лежит движение отдельных атомов и молекул. Поэтому, казалось бы, возникает противоречие между механикой и статистической механикой. Но это противоречие лишь кажущееся, и устраняется, если учесть, что макроскопические системы состоят из большого числа частиц. Чтобы понять, что происходит при возрастании числа частиц системы, разъясним сначала характер фазовой траектории системы, совершающей финитное движение.

Если механическое движение является ограниченным, то почти для всех точек  $x_0$  фазовая траектория  $X(t, x_0)$  по прошествии некоторого времени  $T(x_0, \varepsilon)$  попадет в сколь угодно малую фазовую окрестность исходной точки  $x_0$ , радиуса  $\varepsilon$ , а затем покинет эту окрестность, причем  $T(x_0, \varepsilon) \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . (Время  $T(x_0, \varepsilon)$  называется периодом цикла Пуанкаре.) Из этой так называемой *возвратной теоремы Пуанкаре*, которую мы не будем здесь доказывать\*), следует, что финитное движение сколь угодно сложной механической системы является квазипериодическим. При этом период цикла Пуанкаре  $T(x_0, \varepsilon)$  существенно зависит от числа частиц  $N$  в системе и быстро растет с увеличением  $N$  [118]. Зависимость  $T(x_0, \varepsilon) = T_N(x_0, \varepsilon)$  от  $N$  при  $N \rightarrow \infty$  может быть прослежена на некоторых простейших динамических системах, например для системы связанных осцилляторов. При этом оказывается, что  $T_N(x_0, \varepsilon)$  растет экспоненциально с  $N$  [81].

То, что при  $N \rightarrow \infty$  период цикла  $T_N(x_0, \varepsilon)$  стремится к бесконечности, и разъясняет упомянутое выше противоречие между механикой и статистической механикой. Действительно, после термодинамического предельного перехода ( $N \rightarrow \infty$ ,  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ,  $N/\mathcal{V} = \text{const}$ ) в многочастичных функциях распределения (1.1.7) и в уравнениях движения для них (1.1.23) периоды циклов Пуанкаре будут бесконечными. Поэтому для таких предельных макроскопических систем возвратная теорема Пуанкаре не противоречит их переходу в состояние статистического равновесия, ибо этот переход происходит за время, значительно меньшее  $T_N(x_0, \varepsilon)$ , даже если и считать число частиц в системе конечным, но очень большим.

Подчеркнем однако, что уравнения (1.1.23) для предельных ( $N \rightarrow \infty$ ) многочастичных функций распределения по-прежнему будут инвариантны относительно преобразования  $t \rightarrow -t$ . Рассматривая многочастичные функции распределения как функционалы начальных многочастичных функций распределения  $\hat{f}_s(x_1, \dots, x_s, t) = \hat{f}_s(x_1, \dots, x_s, t; \hat{f}_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0))$ , имеем по этому

$$\hat{f}_s(x_1, \dots, x_s, t; \hat{f}_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)) = \hat{f}_s(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s, -t; \hat{f}_{s'}(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_{s'}, 0)). \quad (1.6.2)$$

В этой связи возникает вопрос, каким образом становятся неинвариантными относительно обращения времени уравнения, служащие для описания макроскопических процессов, например уравнения диффузии и теплопроводности, уравнения гидродинамики и, наконец, само кинетическое уравнение Больцмана. Ответ на этот вопрос гласит, что неинвариантность уравнений, опи-

\*) Доказательство теоремы основывается только на теореме Лиувилля о сохранении фазового объема при преобразовании  $x \rightarrow X(t, x)$  [110, 118].

связующих макроскопические процессы относительно обращения времени, вносится в теорию в тот момент, когда мы переходим от полного описания с помощью многочастичных функций распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  к приближенному с помощью функционалов  $f_s(x_1, \dots, x_s; f(x', t)) \equiv f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f^{(+)}(x', t))$ , введенных в разделе 1.2.1:

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)) \xrightarrow{t \gg \tau_0} f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f^{(+)}(x', t)), \quad (1.6.3)$$

где «память» о начальном состоянии  $f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)$  в предельных многочастичных функциях распределения  $f_s^{(+)}$  сохраняется только через посредство одночастичной функции распределения

$$f^{(+)}(x, t) \equiv f^{(+)}(x, t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)).$$

Дело в том, что эти функционалы, соответствующие сокращенному описанию состояния системы в терминах одночастичной функции распределения, хорошо аппроксимируют точные функции  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  при  $t \gg \tau_0$ . Однако эти функционалы совершенно непригодны для описания состояния системы при  $t \ll -\tau_0$ . Действительно, предполагая, что функционалы  $f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f^{(+)})$  могут служить для описания состояния системы при  $t \gg \tau_0$ , мы установили уравнение для одночастичной функции распределения, которое в простейшем случае представляет собой уравнение Больцмана. Однако, как уже подчеркивалось в разделе 1.1.1, это уравнение непригодно при  $t \ll -\tau_0$ , так как при этом его решение может даже стать отрицательным.

С другой стороны, ясно, что при  $t \ll -\tau_0$  также возникает упущение в описании состояния системы, в результате которого для описания состояния могут быть использованы функционалы  $f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)}(x', t))$ , хорошо аппроксимирующие многочастичные функции распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  при  $t \ll -\tau_0$ :

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)) \xrightarrow{t \ll -\tau_0} f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)}(x', t)) \quad (1.6.4)$$

При этом «память» о состоянии системы при  $t = 0$  сохраняется только через посредство одночастичной функции распределения  $f^{(-)}(x, t)$ , которая является функционалом всех  $f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)$ :

$$f^{(-)}(x, t) \equiv f^{(-)}(x, t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)).$$

Функция распределения  $f^{(-)}(x, t)$ , как можно показать, также удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана, в котором, однако, изменен знак перед интегралом столкновений. Поэтому естественно, что функционалы  $f_s^{(-)}$ , хорошо аппроксимирующие точные функции  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  при  $t \gg \tau_0$ , оказываются не-

пригодными при  $t \ll -\tau_0$  и, наоборот, функционалы  $f_s^{(-)}$ , хорошо аппроксимирующие функции  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  при  $t \ll -\tau_0$ , оказываются непригодными при  $t \gg \tau_0$ . Это обстоятельство иллюстрирует рис. 1, на котором схематически изображена точная функция  $f_s(t)$ , а также функционалы  $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$ ,  $f_s^{(-)}(f^{(-)}(t))$ . Пунктирные части кривых изображают формальные продолжения этих функционалов на временные интервалы  $t < \tau_0$  и  $t > -\tau_0$ , в которых они физически бессмысленны. Функции  $f_s^{(\pm)}$  мы будем называть огрубленными многочастичными функциями распределения.

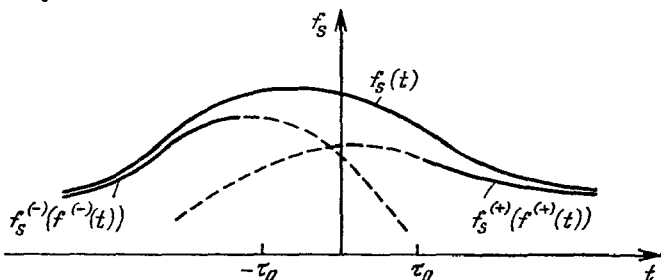


Рис. 1.

Не следует думать, что функционалы  $f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f^{(+)})$  и  $f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)})$  никак не связаны между собой. Напротив, благодаря обратимости механических движений, т. е. инвариантности механических движений по отношению к преобразованию  $t \rightarrow -t$ , нетрудно связать их между собой. Действительно, из (1.6.2), (1.6.3) и (1.6.4) следует, что

$$\begin{aligned} f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)}(x', t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0))) &= \\ &= f_s^{(+)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s; f^{(+)}(x', -t; f_{s'}(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_{s'}, 0))). \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Отсюда, полагая  $s = 1$ , получим

$$f_1^{(-)}(x, t; f_{s'}(x'_1, \dots, x'_{s'}, 0)) = f_1^{(+)}(\bar{x}, -t; f_{s'}(\bar{x}'_1, \dots, \bar{x}'_{s'}, 0))$$

и, следовательно,

$$f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f(x)) = f_s^{(+)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s; f(\bar{x})). \quad (1.6.6)$$

Функционалы  $f_s^{(+)}(f)$  удовлетворяют цепочке интегральных уравнений (1.2.11), (1.2.8). Используя граничное условие

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} S_0^{(s)}(-\tau) f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; S_0^{(1)}(\tau) f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i), \quad (1.6.7)$$

легко показать, что функционалы  $f_s^{(-)}(f)$  удовлетворяют той же цепочке интегральных уравнений, что и функционалы  $f_s^{(+)}(f)$ ,

только с заменой в уравнении (1.2.11)  $\int_{-\infty}^0 d\tau$  на  $(-1) \int_0^{\infty} d\tau$ :

$$f_s^{(-)}(f) = \prod_{1 \leq i \leq s} f(x_i) - \int_0^{\infty} d\tau S_0^{(s)}(\tau) \mathcal{K}_s(S_0^{(1)}(-\tau)f), \quad (1.6.8)$$

где  $\mathcal{K}_s(f)$  по-прежнему определяется формулой (1.2.8). Отсюда нетрудно заключить, как уже упоминалось, что функция  $f^{(-)}(x, t)$  удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана, в котором изменен лишь знак у интеграла столкновений. Из сравнения уравнений (1.2.11), (1.6.8) нетрудно снова прийти к формуле (1.6.6). Заметим, наконец, что для точной функции распределения  $f_s(x_1, \dots, x_s, t)$  справедливы соотношения (1.2.3), (1.6.7):

$$S_0^{(s)}(-\tau) f_s(x_1, \dots, x_s, t) \xrightarrow{\tau \rightarrow \pm \infty} \prod_{1 \leq i \leq s} S_0^{(1)}(-\tau) f(x_i, t),$$

$$s = 2, 3, \dots,$$

в то время как для огрубленной функции распределения  $f_s^{(+)}(f)$  справедливо только соотношение (1.2.3), а для огрубленной функции распределения  $f_s^{(-)}(f)$  — только соотношение (1.6.7), так как функции  $f_s^{(\pm)}(x_1, \dots, x_s; f)$  вдоль некоторых направлений, связанных с  $p_1, \dots, p_s$ , удовлетворяют принципу ослабления корреляций\*). Иными словами, «состарившиеся» состояния  $f_s^{(\pm)}(f)$  при эволюции со свободным гамильтонианом стремятся к произведению одночастичных функций распределения только в тех направлениях времени, в которых эти «состарившиеся» состояния возникли.

Кажущееся противоречие между обратимостью механических движений и необратимостью макроскопических процессов приводит к ряду парадоксов. Но все они связаны с тем, что функцию  $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$ , аппроксимирующую состояние системы в будущем, использовали для описания состояния системы в прошлом.

В качестве примера можно привести так называемый *парадокс Лошмидта*, заключающийся в следующем. Рассмотрим некоторое состояние  $A_0$  системы на кинетическом этапе эволюции, и пусть энтропия в этом состоянии будет равна  $s_0$  (на кинетическом этапе энтропия определяется формулой (1.1.5)). По прошествии времени  $t > 0$  система перейдет в состояние  $A_t$  с энтропией  $s_t$ . Согласно  $H$ -теореме Больцмана  $s_t > s_0$ . Обратим теперь в состоянии  $A_t$  направления скоростей всех частиц и обозначим получающееся состояние через  $\bar{A}_t$ . Тогда, согласно формуле (1.1.5), энтропия  $\bar{s}_t$  в состоянии  $\bar{A}_t$  не будет отличаться от

\* Например, функция  $f_2^{(+)}(x_1, x_2; f) \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} f(x_1) f(x_2)$ , а функция  $f_2^{(+)}(x, x_2; f) \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} f(x'_1) f(x'_2)$ , где  $x'_i \equiv (x'_i, p'_i)$ ; см. (1.3.15).

энтропии  $s_t$  в состоянии  $A_t$ ,  $s_t = \bar{s}_t$ . С другой стороны, в силу обратимости механических движений состояние  $\bar{A}_t$  через промежуток времени  $t$  перейдет в состояние  $\bar{A}_0$  (мы учли, что из соотношения  $X(t + t', x) = X(t, X(t', x))$  и формулы (1.6.1) следует соотношение  $X(t, \bar{X}(t, x)) = \bar{x}$ ) и, согласно теореме Больцмана, при этом должно выполняться неравенство  $\bar{s}_t < \bar{s}_0$  или  $s_t < s_0$ , что противоречит неравенству  $s_0 < s_t$ .

Чтобы разъяснить этот парадокс, заметим, что состоянию  $A_t$  соответствуют многочастичные функции  $f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f^{(+)}(x', t))$ , а состоянию  $\bar{A}_t$  — многочастичные функции распределения  $f_s^{(+)}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s; f^{(+)}(x', t))$ , равные  $f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)}(\bar{x}', -t))$ , согласно (1.6.5). Но в состоянии, описываемом функциями  $f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f^{(-)}(\bar{x}', -t))$ , энтропия с ростом времени не

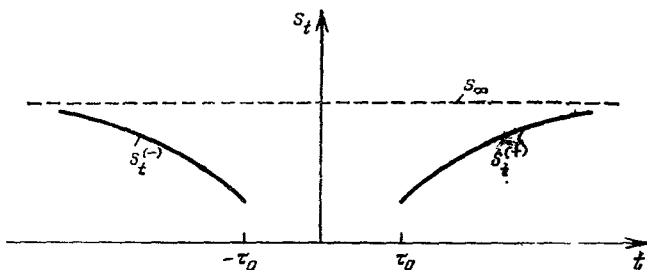


Рис. 2.

возрастает, а убывает в соответствии с противоположным знаком интеграла столкновений (см. рис. 2; на рисунке кривые обрываются в промежутке от  $-\tau_0$  до  $\tau_0$ , в котором понятие больцмановской энтропии (1.1.5) неприменимо).

Как мы знаем, всякая макроскопическая система по прошествии достаточно большого времени (времени релаксации  $\tau_r$ ) приходит в состояние статистического равновесия. С другой стороны, как мы только что видели, состояние системы при  $t \ll -\tau_0$  описывается функциями  $f_s^{(-)}(f^{(-)}(t))$ , которые при  $t \ll -\tau_r$  стремятся к равновесным функциям распределения, так же как функции  $f_s^{(+)}(f^{(+)}(t))$  стремятся к равновесным функциям при  $t \gg \tau_r$ . Поэтому состояние системы является существенно неравновесным в течение конечного промежутка времени порядка  $\tau_r$ .

В этой связи возникает вопрос о так называемой «тепловой смерти» мира как целого. Дело в том, что если Вселенная существует бесконечно долго, то, казалось бы, она уже должна находиться в состоянии теплового равновесия. Между тем мир как целое находится в состоянии, далеком от состояния статистического равновесия, и не видно процессов, которые приводили бы его в равновесное состояние. Поэтому приходится, по-види-

тому, сделать вывод, что статистическая механика неприменима к миру как целому. Возможно, что это связано с фундаментальной ролью в мире как целом гравитационных сил, для которых не может быть даже введено распределение Гиббса, так как свободная энергия на одну частицу при гравитационном взаимодействии расходится [56]. Заметим, что такая же расходимость могла бы в принципе возникать и при кулоновском взаимодействии. Однако благодаря существованию зарядов обоих знаков в нейтральных системах она отсутствует. «Нейтральных» же в гравитационном смысле систем нет, так как масса всегда положительна. Нельзя, однако, быть уверенным в том, что это соображение является решающим. Возможно, что основную роль играют эффекты, связанные с общей теорией относительности, согласно которой Вселенная находится в нестационарном состоянии с зависящей от времени метрикой.

**1.6.2. Эргодическая гипотеза.** В разделе 1.2.1 мы видели, что многочастичные функции распределения, согласно принципу ослабления корреляций, по прошествии времени хаотизации  $\tau_0$  превращаются в функционалы одночастичной функции распределения. Время хаотизации  $\tau_0$  по порядку величины равно  $\tau_0 \sim r_0/\bar{v}$ , где  $\bar{v}$  — некоторая характерная скорость, равная по порядку величины в слабо неравновесном состоянии тепловой скорости частиц, и  $r_0$  — радиус корреляции, равный по порядку величины радиусу действия сил. Что касается одночастичной функции распределения  $f(x, t)$ , то по прошествии времени релаксации  $\tau_r$  она превращается в равновесную максвелловскую функцию распределения  $f_0(p)$ . Время релаксации  $\tau_r$  для пространственно-однородных систем по порядку величины равно  $\tau_r \sim l/\bar{v}$ , где  $l$  — средняя длина свободного пробега частицы (так как  $l \gg r_0$ , то  $\tau_r \gg \tau_0$ ). С другой стороны, по прошествии времени  $\tau_r$  система переходит в состояние статистического равновесия. Поэтому при  $t \gg \tau_r$  многочастичные функции распределения будут соответствовать статистическому равновесию, и их можно найти с помощью равновесного распределения Гиббса (1.1.1) согласно формуле

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) \xrightarrow{t \gg \tau_r} f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s) = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N), \quad (1.6.9)$$

где  $\omega^{(c)}$  — каноническое распределение Гиббса

$$\omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N) = \exp \beta (F - \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)).$$

При этом величина  $F$ , представляющая собой свободную энергию системы, определяется из условия

$$\frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N) = 1,$$



а обратная температура  $\beta$  — из условия равенства энергии, приходящейся на одну частицу, в начальном  $f_s(x_1, \dots, x_s, 0)$  и конечном  $f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s)$  состояниях.

Согласно сказанному выше имеет место соотношение

$$f_s(x_1, \dots, x_s, t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} f_s(x_1, \dots, x_s; f_0(p)),$$

сравнивая которое с (1.6.9), находим

$$f_s(x_1, \dots, x_s; f_0(p)) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s). \quad (1.6.10)$$

Заметим также, что из (1.6.6), (1.6.10) следует, что

$$f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f_0(p)) = f_s^{(-)}(x_1, \dots, x_s; f_0(p))$$

(мы учли, что  $f_s(x_1, \dots, x_s; f) = f_s^{(+)}(x_1, \dots, x_s; f)$  и то, что

$$\omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N) = \omega^{(c)}(\beta; \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)).$$

Соотношение (1.6.9) мы будем называть *эргодическим соотношением*, так как оно тесно связано с так называемой *эргодической гипотезой*, согласно которой среднее по времени от произвольной физической величины равно среднему от этой величины по микроканоническому ансамблю \*).

Среднее по времени от какой-либо функции  $h(x_1, \dots, x_N)$ , зависящей от координат и импульсов системы  $N$ -частиц, определяется как

$$\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt h(X_1(t, x^0), \dots, X_N(t, x^0)), \quad (1.6.11)$$

где  $X_i(t, x^0)$  — координаты и импульсы  $i$ -й частицы в момент времени  $t$  и  $x^0 \equiv (x_1^0, \dots, x_N^0)$  — начальные значения этих величин.

Если механическое движение системы финитно, т. е. координаты и импульсы не принимают сколь угодно больших значений, то, используя теорему Лиувилля, можно показать, что почти для всех значений  $x_1^0, \dots, x_N^0$  предел (1.6.11) существует и не зависит от выбора начальной точки  $x_1^0, \dots, x_N^0$  на фазовой траектории, но может в принципе меняться при переходе от одной траектории в фазовом пространстве к другой.

Заметим, что если бы у функции  $h(X_1(t, x^0), \dots, X_N(t, x^0))$  существовал предел при  $t \rightarrow \infty$ , то  $\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0)$  совпадало бы с этим пределом. Однако для систем с конечным числом частиц такого предела не существует, так как, согласно возвратной теореме Пуанкаре, движение системы носит квазипериодический характер.

\*) Подробно этот вопрос изложен в монографиях [112, 113].

Определим далее среднее по микроканоническому ансамблю. Микроканоническое распределение имеет вид

$$\omega^{(m)}(E_N; x_1, \dots, x_N) = C_N^{-1} \delta(E_N - \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)), \quad E_N = N\varepsilon_N, \quad (1.6.12)$$

где  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)$  — гамильтониан системы,  $E_N$  — ее энергия и  $C_N$  — нормировочная константа:

$$C_N = \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \delta(E_N - \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)).$$

Среднее значение функции  $h(x_1, \dots, x_N)$  по микроканоническому ансамблю определяется формулой

$$h^{(m)}(E_N) = \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N h(x_1, \dots, x_N) \omega^{(m)}(E_N; x_1, \dots, x_N). \quad (1.6.13)$$

Эргодическая гипотеза утверждает, что почти для всех  $x^0$  величины  $\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0)$  и  $h^{(m)}(E_N)$  совпадают при условии, что  $E_N = \mathcal{H}(x_1^0, \dots, x_N^0)$ , т. е.

$$\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0) = h^{(m)}(E_N), \quad E_N = \mathcal{H}(x_1^0, \dots, x_N^0). \quad (1.6.14)$$

Таким образом, временное среднее  $\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0)$  не зависит от выбора точки  $x_1^0, \dots, x_N^0$  на энергетической поверхности  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) = E_N$ , а зависит только от положения этой поверхности в фазовом пространстве.

Эргодическая гипотеза (1.6.14) была доказана Биркгофом (доказательство см. [112]) для так называемых *метрически транзитивных систем*, т. е. систем, для которых никакая энергетическая поверхность  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) = E_N$  не может быть разделена на конечные области, обладающие следующим свойством: если начальная точка какой-либо траектории находится в одной из этих областей, то и вся траектория лежит в этой же области.

Свойство метрической транзитивности в принципе зависит от характера сил, действующих между частицами. В случае сил отталкивания и  $N \geq 3$  система всегда будет метрически транзитивной.

Из инвариантности уравнений механики относительно обращения времени легко заключить, что если эргодическая гипотеза (1.6.14) справедлива при временном усреднении (1.6.11), то она будет справедлива также и при временном усреднении

$$\bar{h}(x_1^0, \dots, x_N^0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt h(X_1(t, x^0), \dots, X_N(t, x^0)). \quad (1.6.15)$$

(Для доказательства достаточно заметить, что  $X_i(t, x^0) = X_i(-t, \bar{x}^0)$  и взять в (1.6.14) в качестве функции  $h(x_1, \dots, x_N)$  функцию  $h(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ .)

Установим связь между эргодическим соотношением (1.6.9) и эргодической гипотезой (1.6.14). Рассмотрим с этой целью произвольную фазовую плотность вероятности  $\mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; 0)$ , отличную от нуля вблизи энергетической поверхности  $\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) = E_N$ :

$$\mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; 0) = g(x_1, \dots, x_N) \delta(E_N - \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N)) \quad (1.6.16)$$

$$\frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N \mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; 0) = 1,$$

где функция  $g(x_1, \dots, x_N)$  характеризует распределение фазовых точек на энергетической поверхности. Из (1.1.20) следует, что если (1.6.16) представляет собой начальную плотность вероятности фазовых точек, то плотность вероятности фазовых точек в момент времени  $t$  будет равна

$$\mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; t) = \mathcal{D}_{E_N}(X_1(-t, x), \dots, X_N(-t, x); 0).$$

Отсюда, используя эргодическую гипотезу (1.6.14) с временным усреднением (1.6.15), получим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; t) &= \\ &= \frac{1}{N!} \int dx'_1 \dots dx'_N \mathcal{D}_{E_N}(x'_1, \dots, x'_N; 0) C_N^{-1} \delta(\mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) - \\ &\quad - \mathcal{H}(x'_1, \dots, x'_N)). \end{aligned}$$

Вспоминая определение функции  $\mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; 0)$ , найдем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; t) = \omega^{(m)}(\epsilon_N; x_1, \dots, x_N). \quad (1.6.17)$$

Эта формула позволяет получить эргодическое соотношение для многочастичных функций распределения (1.6.9). Умножим для этого (1.6.17) на  $(N-s)!$  и проинтегрируем по  $x_{s+1}, \dots, x_N$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt f_s(x_1, \dots, x_s; t) = f_s^{(m)}(\epsilon_N; x_1, \dots, x_s), \quad (1.6.18)$$

где

$$f_s^{(m)}(\epsilon_N; x_1, \dots, x_s) = \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \omega^{(m)}(\epsilon_N; x_1, \dots, x_N)$$

и величина  $\epsilon_N = E_N/N$  связана с  $f_s(x_1, \dots, x_s; 0)$  соотношением

$$\begin{aligned} \epsilon_N \equiv \epsilon_N(f_s(x_1, \dots, x_s; 0)) &= \frac{1}{N!N} \int dx_1 \dots dx_N \mathcal{H}(x_1, \dots, x_N) \times \\ &\quad \times \mathcal{D}_{E_N}(x_1, \dots, x_N; 0). \end{aligned}$$

До сих пор мы считали число частиц  $N$  конечным. Ценность формул (1.6.18), в отличие от формул (1.6.11), (1.6.13), заключается в том, что в них, согласно результатам раздела 1.1.2, может быть произведен термодинамический предельный переход. Так как после такого предельного перехода длительность цикла Пуанкаре будет бесконечной, то, предполагая, что предельные переходы  $\mathcal{U} \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$  переставимы, формулу (1.6.18) можно переписать в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_s(x_1, \dots, x_s; t) = f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \dots, x_s), \quad (1.6.19)$$

где величина  $\varepsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \varepsilon_N(f_s(x_1, \dots, x_s; 0))$  представляет собой энергию, приходящуюся на одну частицу в начальном состоянии. Подчеркнем еще раз, что многочастичные функции распределения в этой формуле относятся к системе с бесконечным числом частиц. Смысл этой формулы состоит в том, что многочастичные функции распределения с течением времени стремятся к универсальным равновесным функциям распределения

$$\begin{aligned} f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \dots, x_s) &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N \omega^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \dots, x_N), \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

в которых память о начальном состоянии содержится только в значении энергии  $\varepsilon$ , приходящейся на одну частицу.

В асимптотическое соотношение (1.6.19) входит  $s$ -частичная функция распределения, вычисленная по микроканоническому ансамблю, в то время как в (1.6.9) фигурирует функция распределения, найденная по каноническому ансамблю. Однако микроканоническое распределение  $\omega^{(m)}(\varepsilon_N; x_1, \dots, x_N)$  эквивалентно в пределе  $N \rightarrow \infty$  каноническому распределению  $\omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N)$ . Это значит, что

$$f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \dots, x_s) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (1.6.21)$$

где  $f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s)$  определяется формулой (1.6.9) и  $\beta$  связано с  $\varepsilon$  соотношением

$$\varepsilon(f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s)) = \varepsilon(f_s^{(m)}(\varepsilon; x_1, \dots, x_s)) = \varepsilon.$$

Поэтому асимптотическое соотношение (1.6.19) может быть переписано в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_s(x_1, \dots, x_s; t) = f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s),$$

где  $\beta$  определяется из условия

$$\varepsilon(f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s)) = \varepsilon(f_s(x_1, \dots, x_s; 0)). \quad (1.6.22)$$

Таким образом, мы показали, что эргодическое соотношение (1.6.9), (1.6.22) вытекает из эргодической гипотезы (1.6.14).

Однако обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо. Это значит, что из эргодического соотношения (1.6.9), справедливого для систем с  $N \rightarrow \infty$ , еще не вытекает справедливость эргодической гипотезы для конечного числа частиц.

Не следует думать, что формулы (1.6.9), (1.6.22) выполняются автоматически при произвольном виде гамильтониана. Ясно, что если бы частицы были свободными, то соотношения (1.6.9), (1.6.22) были бы несправедливы, так как в этом случае система не эволюционировала бы к состоянию статистического равновесия. Поэтому для справедливости эргодических соотношений (1.6.9), (1.6.22) очень важна структура гамильтониана системы. Только в том случае, когда гамильтониан имеет достаточно сложный характер, т. е. учитывает разнообразие взаимодействий между частицами, имеет место эргодическое соотношение (1.6.9). Сложность гамильтониана означает, что система обладает только одним аддитивным интегралом движения — энергией (подробнее об этом см. раздел 2.4.3).

Представим гамильтониан системы в виде  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , где  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан свободных частиц, и  $V$  — энергия взаимодействия между частицами. Под влиянием гамильтониана  $\mathcal{H}$  система приходит в состояние статистического равновесия. Если в гамильтониане отбросить энергию взаимодействия, то многочастичные функции распределения уже не будут переходить при  $t \rightarrow \infty$  в равновесные функции  $f_s^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_s)$  (вычисленные по распределению  $\omega^{(c)}(\beta; x_1, \dots, x_N)$  с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , а будут, согласно (1.2.1), стремиться к произведению одночастичных функций распределения

$$f_s(x_1, \dots, x_s; t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \prod_{1 \leq i \leq s} f\left(x_i - \frac{p_i}{m} t, p_i; 0\right). \quad (1.6.23)$$

Это соотношение мы также будем называть эргодическим соотношением, но связанным не с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ , а с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . (Напомним, что это эргодическое соотношение играло важную роль при построении кинетических уравнений.)

Заметим в заключение, что могут существовать и другие специальные формы эргодических соотношений, аналогичные соотношениям (1.6.9), (1.6.23), в зависимости от конкретного вида гамильтониана системы. К обсуждению этого вопроса мы еще вернемся далее при изучении квантовых систем.

Подчеркнем также, что все замечания, сделанные в этом параграфе о необратимости процессов в классических системах, относятся и к квантовым системам.

## ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

### § 2.1. Принципы квантовой механики

2.1.1. Чистые состояния и смеси. Состояния квантовых систем описываются с помощью *статистического оператора* или *матрицы плотности*. Мы разъясним здесь это понятие, но предварительно напомним основные принципы квантовой механики [53].

Согласно квантовой механике каждой физической величине — наблюдаемой — сопоставляется некоторый оператор в гильбертовом пространстве, представляющем собой совокупность векторов  $\psi$  (называемых *векторами состояния*), для которых определено скалярное произведение  $(\psi_1, \psi_2)$ , обладающее следующими свойствами:

$$(\psi_1, \psi_2)^* = (\psi_2, \psi_1), \quad (\psi, a\psi_1 + b\psi_2) = a(\psi, \psi_1) + b(\psi, \psi_2), \\ (\psi, \psi) > 0$$

( $a$  и  $b$  — произвольные комплексные числа).

В этом пространстве может быть введен (и при том бесчисленным множеством способов) полный ортонормированный счетный базис  $\psi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$$

такой, что любой вектор  $\psi$  гильбертова пространства может быть представлен в виде суперпозиции векторов  $\psi_n$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n, \quad \text{где } C_n = (\psi_n, \psi), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 < \infty.$$

Любой оператор  $R$  в гильбертовом пространстве переводит каждый вектор  $\psi$  этого пространства в некоторый другой вектор  $\psi'$  этого же пространства

$$\psi \xrightarrow{R} \psi' = R\psi.$$

Если при этом  $\psi' = r\psi$ , где  $r$  — некоторое число, то  $\psi$  называется собственным вектором оператора  $R$ , принадлежащим собственному значению  $r$ . Оператор  $R^+$  называется эрмитовски сопряженным по отношению к оператору  $R$ , если для любых двух

векторов  $\psi_1, \psi_2$  гильбертова пространства имеет место равенство

$$(\psi_2, R\psi_1) = (R^+\psi_2, \psi_1).$$

Оператор  $R$  называется эрмитовым или самосопряженным, если  $R^+ = R$ .

Собственные значения любого самосопряженного оператора вещественны, а его собственные векторы образуют полную ортонормируемую систему векторов, и могут быть поэтому использованы в качестве базиса гильбертова пространства. По этой причине физическим величинам всегда сопоставляются эрмитовы операторы.

Собственные значения оператора  $R$  интерпретируются как возможные значения соответствующей наблюдаемой.

Для векторов состояний, скалярных произведений и матричных элементов операторов мы будем часто использовать также следующие дираковские обозначения:

$$\psi \equiv |\psi\rangle, \quad \psi_n \equiv |n\rangle, \quad (\psi, \varphi) \equiv \langle\psi|\varphi\rangle, \quad (\psi, R\varphi) \equiv \langle\psi|R|\varphi\rangle.$$

В поведении микрообъемов наблюдается статистичность, причем статистичность вполне определенного характера. Она проявляется в том, что результаты измерений физических величин, как правило, могут быть предсказаны только статистически, т. е. с помощью понятия вероятности. Если, однако, вслед за первым измерением произвести второе измерение, то оно уже дает результат, согласующийся определенным образом с первым измерением (хотя логически мыслима ситуация, когда статистические распределения результатов обоих измерений никак не связаны между собой).

Такого рода статистичность, лежащая в природе вещей, может быть описана в простейшем случае так называемых чистых состояний с помощью векторов в гильбертовом пространстве. Именно, если система характеризуется вектором  $\psi$  или, как говорят иначе, находится в состоянии  $\psi$ , то среднее значение некоторой физической величины  $R$ , получаемое в результате ее измерения, будет равно

$$\bar{R} = (\psi, R\psi)$$

(предполагается выполненным условие нормировки  $(\psi, \psi) = 1$ ).

Если  $\psi_r$  представляет собой собственный вектор оператора  $R$ ,  $R\psi_r = r\psi_r$ , то при измерении величины  $R$  в состоянии  $\psi_r$  мы будем получать одно-единственное значение  $r$ .

Среднее значение  $\bar{R}$  можно представить также в виде

$$\bar{R} = \text{Sp } P_{|\psi\rangle} R,$$

где  $P_{|\psi\rangle}$  — оператор проектирования на состояние  $\psi$ , определяемый с помощью соотношения

$$P_{|\psi\rangle}\varphi = \psi(\psi, \varphi).$$

( $\psi$  — произвольный вектор в гильбертовом пространстве) и  $\text{Sp} A$  обозначает шпур оператора  $A$ , т. е. сумму его диагональных матричных элементов в произвольном ортонормированном базисе. В соответствии с этим определением обычно используется следующее обозначение для оператора проектирования  $P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ .

С помощью операторов проектирования легко сформулировать условие полноты системы ортонормированных векторов  $\psi_n$

$$\sum_n P_{|\psi_n\rangle} = \sum_n |n\rangle\langle n| = 1. \quad (2.1.1)$$

Наряду с простейшим случаем, когда система может характеризоваться определенным вектором состояния, возможна более общая ситуация, когда точно неизвестно, какой из векторов характеризует состояние системы, а можно лишь указать вероятность того, что система характеризуется тем или иным вектором в гильбертовом пространстве. Если  $w_n$  — вероятность того, что система находится в состоянии  $\psi_n$  (векторы  $\psi_n$  могут не быть взаимно ортогональными;  $w_n \geq 0$ ,  $\sum_n w_n = 1$ ), то среднее значение какой-либо физической величины  $R$  будет определяться формулой

$$\bar{R} = \sum_n w_n \langle \psi_n | R | \psi_n \rangle.$$

Эту формулу можно также представить в виде

$$\bar{R} = \text{Sp } \rho R, \quad (2.1.2)$$

где

$$\rho = \sum_n |\psi_n\rangle w_n \langle \psi_n| = \sum_n w_n P_{|\psi_n\rangle}. \quad (2.1.3)$$

Оператор  $\rho$  носит название статистического оператора или матрицы плотности. Он является положительно определенным эрмитовым оператором, шпур которого равен единице,  $\text{Sp } \rho = 1$ .

Если система находится в чистом состоянии  $|\psi\rangle$ , то ее матрица плотности имеет, очевидно, вид

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.1.4)$$

и, как легко видеть, в этом случае  $\rho^2 = \rho$ . Справедливо и обратное утверждение: если матрица плотности удовлетворяет соотношению  $\rho^2 = \rho$ , то она имеет вид (2.1.4), и состояние является чистым.

Ясно, что если система описывается матрицей плотности, то состояние системы можно интерпретировать как смесь чистых состояний.

Подчеркнем принципиальное различие между смесью и суперпозицией чистых состояний: в случае суперпозиции состояний складываются векторы состояний и в результате снова полу-



чается чистое состояние, в смеси же складываются матрицы плотности чистых состояний.

Легко видеть, что при смешивании смесей всегда получается смесь, а не чистое состояние.

Если система находится в чистом состоянии, т. е. описывается вектором в гильбертовом пространстве, то какая-либо выделенная ее часть, взаимодействующая с остальными частями системы, будет уже описываться не вектором состояния, а матрицей плотности. Пусть, например, система  $\mathcal{E}$ , находящаяся в состоянии  $|c\rangle$ , считается состоящей из двух подсистем  $a$  и  $b$  и нужно построить матрицу плотности  $\rho_a$  подсистемы  $a$ . Заметим для этого, что гильбертово пространство векторов состояния всей системы может быть представлено в виде прямого произведения гильбертовых пространств, соответствующих подсистемам  $a$  и  $b$ . При этом прямые произведения базисных векторов  $|n_a\rangle$ ,  $|n_b\rangle$  этих пространств образуют базис векторов состояния системы  $\mathcal{E}$

$$|n_a n_b\rangle = |n_a\rangle |n_b\rangle$$

Элемент матрицы плотности подсистемы  $a$ ,  $\langle n_a | \rho_a | n'_a \rangle$ , очевидно, равен:

$$\langle n_a | \rho_a | n'_a \rangle = \sum_{n_b} \langle n_a n_b | c \rangle \langle c | n'_a n_b \rangle,$$

откуда

$$\rho_a = \sum_{n_a n_b} |n_a\rangle \langle n_a n_b | c \rangle \langle c | n'_a n_b \rangle \langle n'_a|. \quad (2.1.5)$$

**2.1.2. Динамический закон квантовой механики.** Векторы состояния системы изменяются со временем по вполне определенному закону. Именно, если  $\mathcal{H}(t)$  — гамильтониан системы, то вектор состояния  $\psi(t)$  изменяется со временем согласно *уравнению Шредингера*

$$i \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \mathcal{H}(t) \psi(t). \quad (2.1.6)$$

(Здесь и в дальнейшем считается, что квантовая постоянная  $\hbar$  равна единице.) Решение этого уравнения в случае замкнутой системы можно формально записать в виде

$$\psi(t) = \exp\{-i\mathcal{H}t\} \psi(0).$$

Используя уравнение Шредингера, легко установить уравнение движения для матрицы плотности замкнутой системы, или системы, находящейся в некотором внешнем поле (можем зависеть от времени). В обоих этих случаях величины  $\omega_n$ , входящие в формулу (2.1.3), не будут зависеть от времени и зависимость от времени матрицы плотности  $\rho$  будет определяться только зависимостью от времени векторов состояния  $|\psi_n\rangle$ , даваемой уравнением Шредингера. Поэтому матрица плотности

$\rho(t)$  будет удовлетворять уравнению

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho(t)]. \quad (2.1.7)$$

В случае замкнутой системы формальное решение этого уравнения можно записать в виде

$$\rho(t) = \exp\{-i\mathcal{H}t\} \rho(0) \exp\{i\mathcal{H}t\}.$$

Эволюцию квантовой системы не обязательно описывать с помощью уравнения Шредингера. Наряду с таким методом, или, как говорят, шредингеровским представлением квантовой механики, возможны и другие представления квантовой механики: гейзенберговское представление и представление взаимодействия или дираковское представление. Эти представления вводятся таким образом, чтобы в них совпадали средние значения любого оператора.

В гейзенберговском представлении эволюция системы описывается изменением во времени операторов, векторы же состояния от времени не зависят. Операторы  $R^{(H)}(t)$ , векторы состояния  $\psi^{(H)}$  и статистический оператор  $\rho^{(H)}$  в этом представлении связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении соотношениями

$$R^{(S)} = \exp\{-i\mathcal{H}t\} R^{(H)}(t) \exp\{i\mathcal{H}t\}, \quad \psi^{(S)}(t) = \exp\{-i\mathcal{H}t\} \psi^{(H)}, \\ \rho^{(S)}(t) = \exp\{-i\mathcal{H}t\} \rho^{(H)} \exp\{i\mathcal{H}t\}$$

(мы считаем гамильтониан не зависящим от времени; индекс  $S$  служит для обозначения величин в шредингеровском представлении, предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  оба представления совпадают). Оператор  $R^{(H)}(t)$  изменяется со временем по закону

$$\frac{\partial R^{(H)}(t)}{\partial t} = i[\mathcal{H}, R^{(H)}(t)]. \quad (2.1.8)$$

В представлении взаимодействия изменяются со временем и векторы состояния (матрица плотности), и операторы, причем это изменение связывается с разбиением гамильтониана  $\mathcal{H}$  на два слагаемых  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V,$$

где обычно под  $\mathcal{H}_0$  понимают гамильтониан невзаимодействующих частиц, а под  $V$  — гамильтониан их взаимодействия. Для простоты мы будем предполагать, что  $\mathcal{H}_0$  не зависит явно от времени. Операторы  $R^{(D)}(t)$ , векторы состояния  $\psi^{(D)}(t)$  и статистический оператор  $\rho^{(D)}(t)$  связаны с соответствующими величинами в шредингеровском представлении соотношениями

$$R^{(S)} = \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} R^{(D)}(t) \exp\{i\mathcal{H}_0 t\}, \\ \psi^{(S)}(t) = \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} \psi^{(D)}(t), \\ \rho^{(S)}(t) = \exp\{-i\mathcal{H}_0 t\} \rho^{(D)}(t) \exp\{i\mathcal{H}_0 t\}. \quad (2.1.9)$$

(Предполагается, что оба представления совпадают при  $t = 0$ .)

Легко видеть, что вектор состояния и матрица плотности в представлении взаимодействия изменяются со временем по закону

$$\psi^{(D)}(t) = S(t, 0) \psi^{(D)}(0), \quad \rho^{(D)}(t) = S(t, 0) \rho^{(D)}(0) S^+(t, 0),$$

где

$$S(t, 0) = e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t}. \quad (2.1.10)$$

Этот оператор, называемый оператором преобразования, удовлетворяет уравнениям

$$i \frac{\partial S(t, 0)}{\partial t} = \bar{V}^{(D)}(t) S(t, 0), \quad S(0, 0) = 1, \quad (2.1.11)$$

где

$$\bar{V}^{(D)}(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} V e^{-i\mathcal{H}_0 t}.$$

Соотношения, связывающие матрицы плотности и операторы в различных представлениях, обеспечивают равенство средних во всех трех представлениях

$$\text{Sp } \rho^{(S)}(t) R^{(S)} = \text{Sp } \rho^{(H)} R^{(H)}(t) = \text{Sp } \rho^{(D)}(t) R^{(D)}(t).$$

Покажем, что оператор преобразования  $S(t, 0)$  может быть использован для описания процесса рассеяния частиц [2, 84]. Задача о рассеянии ставится следующим образом: задан вектор состояния системы частиц  $\psi^{(D)}(t)$  в момент времени  $t = -\infty$ , когда частицы могут считаться невзаимодействующими; требуется определить вектор состояния  $\psi^{(D)}(t)$  в момент времени  $t = \infty$ , когда частицы после взаимодействия снова становятся свободными [84].

Из формулы (2.1.10) следует, что

$$\psi^{(D)}(t_2) = S(t_2, t_1) \psi^{(D)}(t_1),$$

где

$$S(t_2, t_1) = S(t_2, 0) S^+(t_1, 0).$$

Полагая  $t_1 = -\infty$ ,  $t_2 = \infty$  и считая, что в эти моменты взаимодействие выключено, найдем матрицу рассеяния  $S$ :

$$S = S(\infty, -\infty) = S(\infty, 0) S^+(-\infty, 0).$$

Вводя волновые операторы

$$\Omega^{(\pm)} \equiv S^+(\mp \infty, 0) = \lim_{\eta \rightarrow +0} \Omega_{\eta}^{(\pm)}, \quad (2.1.12)$$

$$\Omega_{\eta}^{(+)} = \eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau}, \quad \Omega_{\eta}^{(-)} = \eta \int_0^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} e^{i\mathcal{H}_0\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau},$$

можно переписать матрицу рассеяния в виде

$$S = \Omega^{(-)+} \Omega^{(+)} \quad (2.1.13)$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{H} \Omega_{\eta}^{(\pm)} = \Omega_{\eta}^{(\pm)} \mathcal{H}_0 \pm i\eta (\Omega_{\eta}^{(\pm)} - 1).$$

Поэтому операторы  $\Omega^{(\pm)}$  удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{H} \Omega^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)} \mathcal{H}_0 \quad (2.1.14)$$

Отсюда следует, что если  $\psi_{\alpha} \equiv |\alpha\rangle$  представляет собой собственный вектор оператора  $\mathcal{H}_0$ ,  $\mathcal{H}_0 \psi_{\alpha} = \mathcal{E}_{\alpha} \psi_{\alpha}$ , то векторы

$$\psi_{\alpha}^{(\pm)} \equiv |\alpha\rangle^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)} \psi_{\alpha} \quad (2.1.15)$$

будут собственными векторами оператора  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{H} \psi_{\alpha}^{(\pm)} = \mathcal{E}_{\alpha} \psi_{\alpha}^{(\pm)}$ . Можно показать, что если  $\psi_{\alpha}$  нормированы условием  $(\psi_{\alpha}, \psi_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta}$ , то

$$(\psi_{\alpha}^{(\pm)}, \psi_{\beta}^{(\pm)}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.1.16)$$

Векторы  $\psi_{\alpha}$  образуют полную систему векторов гильбертова пространства, векторы же  $\psi_{\alpha}^{(\pm)}$ , вообще говоря, такой системы не образуют. В случае двух частиц, для того чтобы получить полную систему векторов, достаточно векторы  $\psi_{\alpha}^{(+)}$  (либо  $\psi_{\alpha}^{(-)}$ ) дополнить векторами связанных состояний  $\psi_n^{(b)} = |n\rangle^{(b)}$ ,  $(\psi_n^{(b)}, \psi_n^{(b)}) = \delta_{nn}$ . В результате мы получим два полных набора векторов состояний  $\{\psi_{\alpha}^{(+)}\}$ ,  $\{\psi_n^{(b)}\}$ ,  $\{\psi_{\alpha}^{(-)}\}$ ,  $\{\psi_n^{(b)}\}$ :

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle^{(\pm)} \langle \alpha| + \sum_n |n\rangle^{(b)} \langle n| = 1. \quad (2.1.17)$$

Из (2.1.15), (2.1.16) следует, что

$$\Omega^{(\pm)+} \Omega^{(\pm)} = 1. \quad (2.1.18)$$

Покажем далее, что

$$\Omega^{(\pm)} \Omega^{(\pm)+} = 1 - \Lambda, \quad (2.1.19)$$

где  $\Lambda$  — оператор проектирования на подпространство векторов связанных состояний  $\psi_n^{(b)}$ ,  $\Lambda = \sum_n |n\rangle^{(b)} \langle n|$ . Заметим для этого,

что в силу условия полноты системы векторов  $|\alpha\rangle$ ,  $\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1$  имеем, согласно (2.1.15),

$$\Omega^{(\pm)} \Omega^{(\pm)+} = \Omega^{(\pm)} \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| \Omega^{(\pm)+} = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle^{(\pm)} \langle \alpha|,$$

откуда с учетом (2.1.17) и вытекает формула (2.1.19).

Таким образом, при наличии связанных состояний операторы  $\Omega^{(\pm)}$  не являются унитарными, хотя операторы  $S(t, 0)$  и  $S^{+}(t, 0)$  унитарны.

Из (2.1.14) следует, что матрица рассеяния коммутирует с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ ,  $[S, \mathcal{H}_0] = 0$ . В силу (2.1.19) оператор  $S$  является унитарным,  $SS^+ = S^+S = 1$ , хотя, как только что было отмечено, операторы  $\Omega^{(\pm)}$  при наличии связанных состояний не являются унитарными.

Матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S = 1 - 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dE \delta(E - \mathcal{H}_0) T^{(+)}(E) \delta(E - \mathcal{H}_0), \quad (2.1.20)$$

где

$$T^{(\pm)}(E) = \lim_{\eta \rightarrow +0} T(E \pm i\eta), \quad (2.1.21)$$

$$T(z) = V + VR(z)V, \quad R(z) = (z - \mathcal{H})^{-1}.$$

(Оператор  $T^{(\pm)}(E)$  называется оператором рассеяния, а  $R(z)$  — резольвентой оператора  $\mathcal{H}$ .) Действительно, замечая, что

$$\mp \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE R(E \mp i\eta) e^{\pm iE\tau} = \begin{cases} e^{-\eta\tau} \cdot e^{\pm i\tau\mathcal{H}}, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}$$

и

$$T(z) = V + VR_0(z)T(z), \quad R(z)V = R_0(z)T(z), \quad (2.1.22)$$

$$R(z) = R_0(z) + R_0(z)T(z)R_0(z), \quad R_0(z) = (z - \mathcal{H}_0)^{-1},$$

нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\Omega^{(\pm)} = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dE R_0^{(\pm)}(E) T^{(\pm)}(E) \delta(E - \mathcal{H}_0), \quad (2.1.23)$$

$$V\Omega^{(\pm)} = \int_{-\infty}^{\infty} dE T^{(\pm)}(E) \delta(E - \mathcal{H}_0),$$

где

$$R_0^{(\pm)}(E) = \lim_{\eta \rightarrow +0} R_0(E \pm i\eta).$$

Матрицу рассеяния можно, очевидно, представить в виде

$$S = 1 - \Omega^{(-)+} (\Omega^{(+)} - \Omega^{(-)}).$$

Замечая, что

$$R^{(+)}(E) - R^{(-)}(E) = -2\pi i \delta(E - \mathcal{H}),$$

где  $R^{(\pm)}(E) = \lim_{\eta \rightarrow +0} R(E \pm i\eta)$ , имеем, согласно (2.1.23),

$$\Omega^{(+)} - \Omega^{(-)} = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dE \delta(E - \mathcal{H}) V \delta(E - \mathcal{H}_0).$$

Далее в силу (2.1.14)

$$\Omega^{(-)+} \delta(E - \mathcal{H}) = \delta(E - \mathcal{H}_0) \Omega^{(-)+},$$

поэтому, используя (2.1.23), получим окончательно формулу (2.1.20).

Установим теперь связь матрицы рассеяния с вероятностью перехода. Вероятность перехода за время  $t$  из состояния  $|i\rangle$ , являющегося собственным состоянием гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  с энергией  $\mathcal{E}_i$ , в состояние  $|f\rangle$ , являющееся собственным состоянием гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  с энергией  $\mathcal{E}_f$ , определяется формулой

$$W_{fi}(t) = |\langle f | e^{-i\mathcal{H}t} | i \rangle|^2.$$

Величина

$$w_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} W_{fi}(t) \quad (2.1.24)$$

представляет собой при  $f \neq i$  вероятность перехода в единицу времени из состояния  $|i\rangle$  в состояние  $|f\rangle$ . (Подчеркнем, что до предельного перехода  $t \rightarrow \infty$  в этой формуле должен быть сделан предельный переход  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ , так как в противном случае не существовало бы предела (2.1.24).)

Легко видеть, используя (2.1.12), что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} W_{fi}(t) = 2 \operatorname{Im} \langle f | \Omega^{(+)} | i \rangle^* \langle f | V \Omega^{(+)} | i \rangle. \quad (2.1.25)$$

Далее, согласно (2.1.23),

$$\langle f | \Omega^{(+)} | i \rangle = \delta_{if} + (\mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i + i0) T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i), \quad \langle f | V \Omega^{(+)} | i \rangle = T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i),$$

где  $T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i) = \langle f | T^+(\mathcal{E}_i) | i \rangle$ . Подставляя эти выражения в (2.1.25), найдем

$$w_{fi} = 2\delta_{if} \operatorname{Im} T_{fi}^+(\mathcal{E}_i) + 2\pi\delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f) |T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i)|^2. \quad (2.1.26)$$

Таким образом, при  $f \neq i$  вероятность перехода в единицу времени определяется квадратом модуля матричного элемента  $T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i)$  оператора столкновения, связанного с матричным элементом матрицы рассеяния, согласно (2.1.20), соотношением

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i) \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f). \quad (2.1.27)$$

Из определения функции  $w_{fi}$  следует, что  $\sum_f w_{fi} = 0$ , где суммирование распространяется на все состояния  $|f\rangle$ , включая состояние  $|f\rangle = |i\rangle$ . Поэтому, согласно (2.1.26),

$$\operatorname{Im} T_{ii}^{(+)}(\mathcal{E}_i) = -\pi \sum_f |T_{fi}^{(+)}(\mathcal{E}_i)|^2 \delta(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_f). \quad (2.1.28)$$

Так как объем системы, как уже отмечалось, следует устремить к бесконечности до перехода в  $T(E + i\eta)$  к пределу  $\eta \rightarrow +0$ , то в этой формуле суммирование фактически представляет собой интегрирование по конечным состояниям  $f$ . Формула (2.1.28) известна под названием оптической теоремы.

Эта формула является частным случаем более общей формулы

$$T(z') - T(z) = (z - z')T(z')R_0(z')R_0(z)T(z). \quad (2.1.29)$$

Именно, (2.1.28) следует из (2.1.29), если положить  $z' = E + i\eta$ ,  $z = E - i\eta$ , взять от обеих частей формулы (2.1.29) диагональный матричный элемент и перейти к пределу  $\eta \rightarrow +0$ , используя при этом формулу

$$\eta R_0(E + i\eta)R_0(E - i\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} p\delta(E - \mathcal{H}_0).$$

Для доказательства (2.1.29) заметим, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} (R(z') - R_0(z'))(R(z) - R_0(z)) &= \\ &= R_0(z')T(z')R_0(z')R_0(z)T(z)R_0(z), \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

так как, согласно (2.1.22),  $R = R_0 + R_0TR_0$ . С другой стороны, из тождества  $R(z) - R(z') = (z' - z)R(z)R(z')$  (оно называется *тождеством Гильберта*) с учетом (2.1.22) следует, что

$$(R(z') - R_0(z'))(R(z) - R_0(z)) = (z - z')^{-1}R_0(z')(T(z') - T(z))R_0(z).$$

Сравнение этой формулы с (2.1.30) и приводит к соотношению (2.1.29).

**2.1.3. Процесс измерения.** Для полноты квантовой механики необходима еще интерпретация процесса измерения. Измерение представляет собой взаимодействие квантового объекта с прибором, пригодным для измерения соответствующей величины, с последующей регистрацией результата измерения.

В отличие от классической механики, в которой молчаливо предполагается, что взаимодействие между объектом и прибором может быть сделано сколь угодно малым, квантовая механика устанавливает, что взаимодействие между квантовым объектом и прибором в принципе не может быть сведено к нулю. При этом прибор должен быть классической или точнее квазиклассической системой, ибо в противном случае по его показаниям нельзя судить о том состоянии, в котором находится квантовый объект.

Каждое измерение состоит из двух актов. Первый акт состоит в том, что исследуемая система «подвергается внешнему, физически реальному, изменяющему ход событий воздействию» [41]. Этот акт описывается с помощью уравнения Шредингера для всей системы, объединяющей исследуемый квантовый объект и прибор. В результате взаимодействия между прибором и объектом чистое состояние исследуемого объекта переходит, согласно разделу 2.1.1, в смесь чистых состояний этого объекта.

«Второй акт измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное, как действительно реализованное. Этот второй шаг представляет собой

процесс, который сам не воздействует на ход событий, но который только изменяет наше знание реальных соотношений» [41].

Этот второй акт измерения не описывается никаким динамическим законом, ибо, если до измерения некоторой величины система находилась в состоянии  $|\psi\rangle$ , не совпадающем ни с одним из собственных векторов  $|\varphi_n\rangle$  оператора  $R$ , то после констатации того, что величина  $R$  равна какому-либо собственному значению  $r_n$  оператора  $R$ , происходит редукция вектора состояния  $|\psi\rangle$ , т. е. скачкообразный переход системы из состояния  $|\psi\rangle$  в состояние  $|\varphi_n\rangle$ :

$$|\psi\rangle \rightarrow |\varphi_n\rangle. \quad (2.1.31)$$

При этом вероятность обнаружения значения  $r_n$  равна  $|\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2$ . (Мы предполагаем, что происходит полное измерение, т. е. что  $R$  представляет собой полную систему взаимно коммутирующих операторов.)

Если результат измерения не регистрируется, т. е. происходит только взаимодействие квантового объекта с квазиклассическим прибором, то в результате чистое состояние  $|\psi\rangle$  квантового объекта переходит в смесь состояний с матрицей плотности  $\rho$ :

$$|\psi\rangle \rightarrow \rho = \sum_n |\varphi_n\rangle |\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2 \langle\varphi_n|. \quad (2.1.32)$$

Иными словами, в результате взаимодействия квантового объекта с прибором матрица плотности некоторого чистого состояния  $|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$  подвергается преобразованию:

$$|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| \rightarrow \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|.$$

Если до измерения система находилась в смешанном состоянии

$$\rho = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle \omega_\alpha \langle\psi_\alpha|,$$

то в результате взаимодействия с прибором матрица плотности  $\rho$  перейдет в матрицу плотности  $\rho'$ :

$$\rho \rightarrow \rho' = \sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|, \quad (2.1.33)$$

где

$$\langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle = \sum_\alpha \omega_\alpha |\langle\varphi_n|\psi_\alpha\rangle|^2.$$

Таким образом, в результате взаимодействия квантового объекта с прибором возникает смесь состояний  $|\varphi_n\rangle$  с вероятностями  $\langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle$ . Редукция состояния означает, что из этой смеси после регистрации результата измерений выделяется чистое состояние  $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$ .

Если происходят последовательные измерения двух наборов физических величин  $R_1$  и  $R_2$  (сперва  $R_1$ , а затем  $R_2$ ) без регистрации результата измерения, то начальная матрица плотно-



сти  $\rho$  объекта в результате его взаимодействия с приборами, служащими для измерения величин  $R_1$  и  $R_2$ , перейдет, согласно (2.1.33), в матрицу плотности  $\rho'$ :

$$\rho' = \sum_2 |2\rangle \sum_1 \langle 1 | \rho | 1 \rangle |\langle 1 | 2 \rangle|^2 \langle 2 |,$$

где  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  — собственные векторы наборов операторов  $R_1$  и  $R_2$ . Мы видим, что в результате измерений возникает смесь чистых состояний  $|2\rangle$  с вероятностями

$$w_2 = \sum_1 \langle 1 | \rho | 1 \rangle |\langle 1 | 2 \rangle|^2,$$

которые строятся по обычным законам теории вероятностей. Действительно,  $\langle 1 | \rho | 1 \rangle$  представляет собой вероятность того, что система после взаимодействия с прибором, служащим для измерения величины  $R_1$ , находится в состоянии  $|1\rangle$ , а  $|\langle 1 | 2 \rangle|^2$  определяет вероятность перехода системы из состояния  $|1\rangle$  в состояние  $|2\rangle$  в результате взаимодействия с прибором, служащим для измерения величины  $R_2$ .

Процесс измерения без регистрации результата измерения сопровождается ростом энтропии измеряемого объекта, которая определяется, согласно фон Нейману, соотношением [83]

$$s = - \text{Sp } \rho \ln \rho \quad (2.1.34)$$

и, как можно показать [83], удовлетворяет соотношению

$$- \text{Sp } \rho' \ln \rho' > - \text{Sp } \rho \ln \rho, \quad (2.1.35)$$

где  $\rho'$  связано с  $\rho$  соотношением (2.1.33).

Энтропия чистого состояния равна нулю, так как, если  $\rho^2 = \rho$ , то  $\text{Sp } \rho \ln \rho = 0$ . Поэтому, если производится регистрация результата измерения, т. е. редукция состояния, то энтропия уменьшается до нуля.

Если матрица плотности подчиняется динамическому уравнению (2.1.7), то энтропия не изменяется, так как

$$\frac{d}{dt} \text{Sp } \rho(t) \ln \rho(t) = 0. \quad (2.1.36)$$

## § 2.2. Вторичное квантование

**2.2.1. Операторы рождения и уничтожения частиц.** В дальнейшем мы будем изучать системы, состоящие из тождественных частиц. Для квантовомеханического описания таких систем можно исходить из квантовомеханических состояний одной частицы. Именно, если  $i$  обозначает совокупность квантовых чисел, характеризующих индивидуальное состояние одной частицы (это может быть, например, импульс частицы и одна из проекций ее спина, либо полный момент частицы и его проекция на

какую-либо ось), то, задав числа частиц  $n_i$ , обладающих квантовыми числами  $i$ , или, как говорят иначе, число частиц, находящихся в индивидуальном состоянии  $i$ , мы полностью определим некоторое состояние системы тождественных частиц. Такие состояния с определенными числами частиц  $n_i$  в различных индивидуальных состояниях  $i$  (они называются числами заполнения) обозначаются символом  $|\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$ , а метод описания состояний системы, при котором задаются числа заполнения  $n_i$ , носит название метода вторичного квантования.

Если частицы являются бозонами, т. е. подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, то числа заполнения могут принимать любые значения,  $n_i = 0, 1, 2, \dots$ ; если же частицы являются фермионами, т. е. подчиняются статистике Ферми — Дирака, то числа заполнения могут принимать только два значения,  $n_i = 0, 1$ .

Состояния  $|\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$ , которые мы будем предполагать ортонормированными, образуют полную систему векторов в гильбертовом пространстве всей системы, т. е.

$$\dots \sum_{n_i} \dots \sum_{n_j} \dots |\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle \langle \dots n_j, \dots, n_i, \dots| = 1. \quad (2.2.1)$$

Для определения в формализме вторичного квантования операторов, соответствующих различным физическим величинам, введем в рассмотрение операторы рождения  $a_i^+$  и уничтожения  $a_i$  частицы в индивидуальном состоянии  $i$ . Рассмотрим сперва систему тождественных бозонов. Оператор  $a_i^+$  определяется тогда соотношением

$$a_i^+ |\dots n_i, \dots\rangle = (n_i + 1)^{1/2} |\dots n_i + 1, \dots\rangle, \quad (2.2.2)$$

откуда

$$a_i^+ = \dots \sum_{n_i} \dots \sum_{n_j} \dots |\dots n_i + 1, \dots, n_j, \dots\rangle (n_i + 1)^{1/2} \times \\ \times \langle \dots n_j, \dots, n_i, \dots|$$

Оператор уничтожения бозона  $a_i$  определяется как оператор, эрмитовски сопряженный по отношению к оператору  $a_i^+$ :

$$a_i = \dots \sum_{n_i} \dots \sum_{n_j} \dots |\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle (n_i + 1)^{1/2} \times \\ \times \langle \dots n_j, \dots, n_i + 1, \dots|$$

Отсюда легко заключить, что

$$a_i |\dots n_i, \dots\rangle = n_i^{1/2} |\dots n_i - 1, \dots\rangle. \quad (2.2.3)$$

Из формул (2.2.2), (2.2.3) следует, что

$$a_i^+ a_i |\dots n_i, \dots\rangle = n_i |\dots n_i, \dots\rangle,$$

т. е.  $\hat{n}_i = a_i^+ a_i$  представляет собой оператор числа частиц в состоянии  $i$ .

Из определений (2.2.2), (2.2.3) вытекают условия коммутации для операторов  $a_i, a_i^+$ :

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j] = 0. \quad (2.2)$$

С помощью этих соотношений легко убедиться, что собственные значения оператора  $a_i^+ a_i$  равны, как и должно быть,  $n_i = 0, 1, 2, \dots$

Состояние, в котором все числа заполнения равны нулю, носит название состояния вакуума. Это состояние мы будем обозначать через  $|0\rangle \equiv \Phi_0$ . Очевидно,

$$a_i |0\rangle = 0. \quad (2.2.5)$$

Из формулы (2.2.2) следует, что все векторы  $|\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$  могут быть построены с помощью операторов рождения  $a_i^+$  и состояния вакуума:

$$|\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle = (\dots n_i! \dots n_j! \dots)^{-1/2} \dots (a_i^+)^{n_i} \dots (a_j^+)^{n_j} \dots |0\rangle. \quad (2.2.6)$$

Подставляя это выражение в условие полноты (2.2.1), получим

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1} \dots \sum_{i_N} a_{i_1}^+ \dots a_{i_N}^+ |0\rangle \langle 0| a_{i_N} \dots a_{i_1} = 1. \quad (2.2.7)$$

Введем теперь в рассмотрение векторы состояний

$$|i_1, \dots, i_N\rangle = a_{i_1}^+ \dots a_{i_N}^+ |0\rangle, \quad (2.2.8)$$

которые, согласно (2.2.7), образуют полную систему векторов

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} |i_1, \dots, i_N\rangle \langle i_N, \dots, i_1| = 1, \quad (2.2.9)$$

удовлетворяющую в силу (2.2.4); (2.2.5) следующим соотношениям ортогональности и нормировки:

$$\langle i_1, \dots, i_N | i'_N, \dots, i'_1 \rangle = \delta_{NN'} \sum \delta_{i_1 i'_1} \dots \delta_{i_N i'_N}, \quad (2.2.10)$$

где суммирование распространяется на все перестановки штрихованных индексов. Произвольный вектор  $|\psi\rangle$  можно разложить по этой системе векторов:

$$|\psi\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} \psi(i_1, \dots, i_N) |i_1, \dots, i_N\rangle, \quad (2.2.11)$$

где, согласно (2.2.10),

$$\psi(i_1, \dots, i_N) = \langle i_1, \dots, i_N | \psi \rangle, \quad (2.2.12)$$

и

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} |\psi(i_1, \dots, i_N)|^2 = 1.$$

Величины  $\psi(i_1, \dots, i_N)$  представляют собой волновую функцию системы (с неопределенным числом частиц) в  $i$ -представлении, соответствующую состоянию  $|\psi\rangle$ . Эти функции, согласно (2.2.8), симметричны относительно перестановки своих аргументов. Величина  $(N!)^{-1} \sum_{i_1 \dots i_N} |\psi(i_1, \dots, i_N)|^2$  определяет вероятность того, что система содержит  $N$  частиц.

Операторы, коммутирующие с оператором суммарного числа частиц  $\hat{N}$ :

$$\hat{N} = \sum_i a_i^+ a_i, \quad (2.2.13)$$

могут быть представлены в виде суммы операторов типа

$$A^{(1)} = \sum_{i_1 i_2} a_{i_1}^+ A_{i_1; i_2} a_{i_2}, \quad A^{(2)} = \frac{1}{4} \sum_{i_1 i_2 i_3 i_4} a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ A_{i_1 i_2; i_3 i_4} a_{i_3} a_{i_4}, \quad (2.2.14)$$

. . . . .

где  $A_{i_1; i_2}$ ,  $A_{i_1 i_2; i_3 i_4}$ , ... — произвольные функции индексов  $i$ . Используя перестановочные соотношения (2.2.4) и (2.2.8), (2.2.5), легко видеть, что

$$\begin{aligned} A^{(1)} |i_1, \dots, i_N\rangle &= \\ &= \sum_{s=1}^N \sum_{i'_s} A_{i'_s; i_s} |i_1, \dots, i_{s-1}, i'_s, i_{s+1}, \dots, i_N\rangle, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} |i_1, \dots, i_N\rangle &= \\ &= \sum_{1 \leq p < q \leq N} \sum_{i'_p i'_q} A_{i'_p i'_q; i_p i_q} |i_1, \dots, i'_p, \dots, i'_q, \dots, i_N\rangle, \end{aligned}$$

. . . . .

откуда согласно (2.2.10),

$$A_{i_1; i_2} = \langle i_1 | A^{(1)} | i_2 \rangle, \quad A_{i_1 i_2; i_3 i_4} = \langle i_1, i_2 | A^{(2)} | i_3, i_4 \rangle. \quad (2.2.16)$$

Так как действие оператора  $A^{(1)}$  на орт  $|i_1, \dots, i_N\rangle$  определяется одночастичной матрицей  $\langle i_1 | A^{(1)} | i_2 \rangle$ , действие оператора  $A^{(2)}$  — двухчастичной матрицей  $\langle i_1, i_2 | A^{(2)} | i_3, i_4 \rangle$  и т. д., то  $A^{(1)}$  называется унарным оператором,  $A^{(2)}$  — бинарным оператором и т. д.

В дальнейшем важную роль будет играть импульсное и координатное представления. Волновые функции  $\psi(p_1, \dots, p_N)$ .

( $N = 0, 1, 2, \dots$ ) системы с вектором состояния  $|\psi\rangle$  в импульсном представлении имеют, согласно (2.2.12), вид

$$\psi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} \dots a_{\mathbf{p}_N} | \psi \rangle, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

(Чтобы импульс частицы  $\mathbf{p}$  принимал дискретные значения, следует, как известно, считать объем  $\mathcal{V}$  системы конечным.)

Соответствующие волновые функции в координатном представлении определяются формулами

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) &= \mathcal{V}^{N/2} \sum_{\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N} \psi(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) e^{i\mathbf{p}_1 \mathbf{x}_1 + \dots + i\mathbf{p}_N \mathbf{x}_N} = \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N | \psi \rangle, \end{aligned}$$

где

$$|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\rangle = \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi^+(\mathbf{x}_N) | 0 \rangle. \quad (2.2.17)$$

Здесь  $\psi(\mathbf{x})$  и  $\psi^+(\mathbf{x})$  — операторы уничтожения и рождения частицы в точке  $\mathbf{x}$ :

$$\psi(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad \psi^+(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^+ e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (2.2.18)$$

Поэтому  $|\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\rangle$  — представляет собой вектор состояния системы из  $N$  частиц, находящихся в точках  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ .

Используя (2.2.4), легко убедиться, что операторы  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$  удовлетворяют условиям коммутации

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^+(\mathbf{x}')] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')] = 0. \quad (2.2.19)$$

Заметим, что для состояния вакуума  $\psi(\mathbf{x})\Phi_0 = 0$ .

Используя формулы (2.2.14), (2.2.18), легко выразить операторы  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$  через операторы  $\psi(\mathbf{x})$  и  $\psi^+(\mathbf{x})$ :

$$A^{(1)} = \int d^3x_1 d^3x_1' \psi^+(\mathbf{x}_1) A(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_1') \psi(\mathbf{x}_1'), \quad (2.2.20)$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{4} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_1' d^3x_2' \psi^+(\mathbf{x}_1) \psi^+(\mathbf{x}_2) A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') \psi(\mathbf{x}_2') \psi(\mathbf{x}_1'),$$

где

$$A(\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_1') = \langle \mathbf{x}_1 | A^{(1)} | \mathbf{x}_1' \rangle, \quad A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2') = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 | A^{(2)} | \mathbf{x}_1', \mathbf{x}_2' \rangle$$

представляют матричные элементы операторов  $A^{(1)}, A^{(2)}$  в  $x$  представлении.

До сих пор мы рассматривали системы, состоящие из одинаковых бозонов. Аналогичным образом может быть развит формализм вторичного квантования для систем, состоящих из одинаковых фермионов. В этом случае также можно ввести операторы рождения и уничтожения фермионов  $a_i^+$ ,  $a_i$  и пользоваться формулами (2.2.12) для волновых функций в  $i$ -представлении. Так как эти функции должны быть в случае фермионов антисимметричными при перестановке любых двух аргументов, то операторы  $a_i^+$ ,  $a_i$  для фермионов должны антикоммутировать

между собой:

$$\{a_i^+, a_j^+\} = a_i^+ a_j^+ + a_j^+ a_i^+ = 0. \quad (2.2.21)$$

Чтобы определить результат действия операторов  $a_i^+$  на векторы состояния  $|\dots n_i, \dots, n_j, \dots\rangle$  необходимо предварительно упорядочить систему квантовых чисел  $i$  индивидуальных состояний частиц, т. е. приписать каждому состоянию  $i$  целочисленный индекс  $k = 1, 2, \dots$ . Полученную таким образом упорядоченную последовательность  $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$  мы будем для краткости обозначать просто через  $1, 2, \dots, k, \dots$ .

Определим теперь результат действия операторов  $a_j^+$  на вектор состояния  $|n_1, \dots, n_j, \dots\rangle$  с помощью соотношения

$$a_j^+ |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} n_i} \delta_{n_j, 0} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle. \quad (2.2.22)$$

Легко убедиться, что это определение находится в соответствии с формулой (2.2.21).

Поступая так же, как и в случае системы бозонов, получим далее из формулы (2.2.22)

$$a_j |n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = (-1)^{\sum_{i=1}^{j-1} n_i} \delta_{n_j, 1} |n_1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle. \quad (2.2.23)$$

Вводя состояние вакуума  $\Phi_0 = |0\rangle$  как состояние, в котором все числа заполнения равны нулю, можно с помощью (2.2.22) построить все векторы состояний  $|n_1, \dots, n_k, \dots\rangle$

$$|n_1, \dots, n_k, \dots\rangle = (a_1^+)^{n_1} \dots (a_k^+)^{n_k} \dots |0\rangle. \quad (2.2.24)$$

Из соотношений (2.2.22), (2.2.23) вытекают условия коммутации для операторов  $a_i, a_j^+$

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}. \quad (2.2.25)$$

С помощью формулы (2.2.24) легко убедиться, что условие полноты векторов  $|n_1, \dots, n_k, \dots\rangle$  по-прежнему представляется в виде (2.2.7), причем должен соблюдаться указанный в (2.2.7) порядок следования операторов уничтожения и рождения.

Из условия полноты можно заключить, что все формулы (2.2.8) — (2.2.16), полученные выше для бозонов, остаются справедливыми и для фермионов. Заметим, что операторы рождения и уничтожения фермиона  $\psi^+(\mathbf{x})$ ,  $\psi(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}$ , определяемые по-прежнему формулами (2.2.18), удовлетворяют соотношениям коммутации

$$\{\psi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}')\} = 0, \quad \{\psi(\mathbf{x}), \psi^+(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.2.26)$$

До сих пор мы для простоты считали частицы бесспиновыми, однако нетрудно учесть и спин частицы. Именно, если частица обладает спином  $s$ , то можно ввести операторы рождения и уничтожения частицы в точке  $\mathbf{x}$  с данной проекцией спина  $\sigma$  на некоторую ось ( $-s \leq \sigma \leq s$ ):

$$\psi_{\sigma}(\mathbf{x}) = \gamma^{\sigma-1/2} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x}) = \gamma^{\sigma-1/2} \sum_{\mathbf{p}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_{\mathbf{p}\sigma}^{+}.$$

**2.2.2. Операторы физических величин.** Перейдем теперь к построению операторов физических величин в представлении вторичного квантования. Операторы числа частиц  $N$ , импульса  $P_i$  и момента количества движения  $M_i$  определяются формулами

$$N = \int d^3x \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x}) \psi_{\sigma}(\mathbf{x}),$$

$$P_i = -\frac{i}{2} \int d^3x \left( \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_{\sigma}(\mathbf{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x})}{\partial x_i} \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) \right), \quad (2.2.27)$$

$$M_i = \int d^3x \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x}) \left\{ s_i + \frac{i}{2} \epsilon_{ikl} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right\} \psi_{\sigma}(\mathbf{x}),$$

где  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — спиновые матрицы  $(s_i)_{\sigma\sigma'}$ , и  $\epsilon_{ikl}$  — полностью антисимметричный единичный тензор.

Используя перестановочные соотношения (2.2.19), (2.2.26) для операторов  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^{+}(\mathbf{x})$ , а также соотношения

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] = -B\{A, C\} + \{A, B\}C,$$

справедливые для произвольных операторов  $A, B, C$ , легко убедиться, что

$$[N, \psi(\mathbf{x})] = -\psi(\mathbf{x}), \quad [P_k, \psi(\mathbf{x})] = i \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.28)$$

$$[M_i, \psi(\mathbf{x})] = -\left\{ s_i + \frac{i}{2} \epsilon_{ikl} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \right\} \psi(\mathbf{x}).$$

Гамильтониан системы в случае парного взаимодействия между частицами, описываемого энергией взаимодействия  $V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , определяется формулой

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V, \quad \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \int d^3x \nabla \psi_{\sigma}^{+}(\mathbf{x}) \nabla \psi_{\sigma}(\mathbf{x}), \quad (2.2.29)$$

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_{\sigma_1}^{+}(\mathbf{x}_1) \psi_{\sigma_2}^{+}(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi_{\sigma_2}(\mathbf{x}_2) \psi_{\sigma_1}(\mathbf{x}_1),$$

где  $m$  — масса частицы.

Если частицы обладают электрическим зарядом  $e$  и система находится во внешнем электромагнитном поле  $A = (A, \varphi)$  ( $A(\mathbf{x}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  — векторный и скалярный потенциалы), то

под  $\mathcal{H}_0$  в последней формуле следует понимать оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(A) = & \frac{1}{2m} \int d^3x \left( \nabla + \frac{ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi_\sigma^+(\mathbf{x}) \left( \nabla - \frac{ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi_\sigma(\mathbf{x}) + \\ & + e \int d^3x \psi_\sigma^+(\mathbf{x}) \psi_\sigma(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{s} \int d^3x \psi_\sigma^+(\mathbf{x}) s_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}) \mathbf{H}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

где  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  — внешнее магнитное поле,  $\mu$  — магнитный момент и  $s$  — спин частицы. Мы видим, что операторы  $N$ ,  $P_i$ ,  $M_i$ ,  $\mathcal{H}_0$  являются унарными, а оператор  $V$  — бинарным.

Оператор полной энергии частиц в представлении вторичного квантования определяет эволюцию вектора состояния  $\Phi(t)$  со временем

$$i \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \mathcal{H} \Phi(t).$$

Определим теперь операторы плотностей различных физических величин. В соответствии с (2.2.27), (2.2.29) операторы плотностей массы  $\rho^{(m)}(\mathbf{x})$ , импульса  $\pi_i(\mathbf{x})$  и энергии  $\varepsilon(\mathbf{x})$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \rho^{(m)}(\mathbf{x}) &= m \psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}), \\ \pi_i(\mathbf{x}) &= \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \psi^+(\mathbf{x})}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}) - \psi^+(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right), \\ \varepsilon(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^+(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3R V(\mathbf{R}) \psi^+(\mathbf{x} + \mathbf{R}) \psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{R}), \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

так что

$$M \equiv mN = \int d^3x \rho^{(m)}(\mathbf{x}), \quad P_i = \int d^3x \pi_i(\mathbf{x}), \quad \mathcal{H} = \int d^3x \varepsilon(\mathbf{x}).$$

Операторы плотностей электрического заряда  $\rho^{(e)}(\mathbf{x})$  и тока  $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x})$  определяются формулами

$$\rho^{(e)}(\mathbf{x}) = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x}) = -c \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})},$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан системы при наличии внешнего электромагнитного поля  $(\mathbf{A}, \varphi)$ . Согласно (2.2.30) имеем

$$\begin{aligned} \rho^{(e)}(\mathbf{x}) &= e \psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}), \\ \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x}) &= -\frac{ie}{2m} \left\{ \psi^+ \left( \nabla - \frac{ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi - \left( \nabla + \frac{ie}{c} \mathbf{A} \right) \psi^+ \psi \right\} + \\ &+ c \frac{\mu}{s} \text{rot } \psi^+ \mathbf{s} \psi. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$



Введенные нами операторы плотностей физических величин имеют следующую структуру:

$$a(\mathbf{x}) = \sum_{nm} \int d^3x_1 \dots d^3x'_m \psi^+(x'_1) \dots \psi^+(x'_m) \times \\ \times a(\mathbf{x}; x'_1, \dots, x'_m; x_1, \dots, x_n) \psi(x_1) \dots \psi(x_n), \quad (2.2.33)$$

где ядро  $a(\mathbf{x}; x'_1, \dots, x'_m; x_1, \dots, x_n)$  быстро убывает, если хотя бы одна из точек  $x'_1, \dots, x'_m, x_1, \dots, x_n$  удаляется от точки  $\mathbf{x}$ . Такого рода операторы мы будем называть квазилокальными. Если ядро  $a$  пропорционально  $\delta$ -функциям и их производным (конечного порядка), так что оператор  $a(\mathbf{x})$  содержит только операторы  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$  и их производные конечного порядка в точке  $\mathbf{x}$ , то оператор  $a(\mathbf{x})$  называется локальным. Операторы  $\rho^{(m)}(\mathbf{x})$ ,  $\rho^{(e)}(\mathbf{x})$ ,  $\pi_i(\mathbf{x})$  локальны, оператор же  $\varepsilon(\mathbf{x})$  квазилокален.

Если ядро оператора  $a(\mathbf{x})$  зависит только от разностей  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i$ , то в силу (2.2.28)

$$i \frac{\partial a(\mathbf{x})}{\partial x_k} = [P_k, a(\mathbf{x})]. \quad (2.2.34)$$

Операторы, удовлетворяющие этому соотношению, будем называть трансляционно-инвариантными. Операторы  $\rho^{(m)}(\mathbf{x})$ ,  $\pi_i(\mathbf{x})$  — трансляционно-инвариантны, оператор же  $j^{(e)}(\mathbf{x})$  не является трансляционно-инвариантным.

Определим теперь операторы плотностей потоков массы  $j_i^{(m)}(\mathbf{x})$ , импульса  $t_{ki}(\mathbf{x})$  и энергии  $q_i(\mathbf{x})$  [85]. Покажем предварительно, что оператор производной по времени произвольного квазилокального оператора  $a(\mathbf{x})$  в шредингеровском представлении  $\dot{a}(\mathbf{x}) = -i[a(\mathbf{x}), \mathcal{H}]$  может быть представлен в виде

$$i\dot{a}(\mathbf{x}) = [\varepsilon(\mathbf{x}), A] - i \frac{\partial a_k(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.35)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{x})$  — оператор плотности энергии,  $A = \int d^3x a(\mathbf{x})$  и

$$a_k(\mathbf{x}) = i \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [\varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), a(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')]. \quad (2.2.36)$$

Для доказательства убедимся сначала в справедливости соотношений

$$i[A, a(\mathbf{x})] = - \frac{\partial a'_k(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.37)$$

$$i[A, b(\mathbf{x})] = -i[B, a(\mathbf{x})] - \frac{\partial b_k(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.38)$$

где  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  — произвольные квазилокальные операторы,  $B$  связано с  $b(\mathbf{x})$  таким же соотношением, как  $A$  с  $a(\mathbf{x})$ , и

$$a'_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), a(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')],$$

$$b_k(\mathbf{x}) = i \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}', b(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}'))].$$

Представим для этого  $i[A, a(\mathbf{x})]$  в виде

$$i[A, a(\mathbf{x})] = \frac{i}{2} \int d^3x' \{[a(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), a(\mathbf{x})] - [a(\mathbf{x}), a(\mathbf{x} + \mathbf{x}')] \}$$

или

$$i[A, a(\mathbf{x})] = \frac{i}{2} \int d^3x' \int_0^1 d\xi \frac{d}{d\xi} [a(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}'), a(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}')].$$

Замечая, что величина  $\xi$  входит в коммутатор только в комбинации  $\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}'$ , можно переписать эту формулу в виде

$$i[A, a(\mathbf{x})] = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}'), a(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}')],$$

откуда и следует (2.2.37).

Чтобы убедиться в справедливости (2.2.38), заменим в (2.2.37) оператор  $a(\mathbf{x})$  на  $a(\mathbf{x}) + b(\mathbf{x})$  и выделим члены типа  $a \cdot b$ ; в результате получим

$$i[A, b(\mathbf{x})] = -i[B, a(\mathbf{x})] - \frac{\partial b_k(\mathbf{x})}{\partial x_k},$$

где

$$b_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [a(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), b(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')] + \\ + \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [b(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), a(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')].$$

Сделав во втором члене замену переменных  $\xi \rightarrow 1 - \xi$ ,  $\mathbf{x}' \rightarrow -\mathbf{x}'$ , мы получим формулу (2.2.38).

Заметим, что если операторы  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  эрмитовы, то и операторы  $a_k(\mathbf{x})$ ,  $b_k(\mathbf{x})$  будут эрмитовы. Кроме того, они являются квазилокальными, так как в силу перестановочных соотношений (2.2.19), (2.2.26) операторы  $a_k(\mathbf{x})$ ,  $b_k(\mathbf{x})$  содержат операторы  $\psi(\mathbf{x}')$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}')$ , аргументы которых близки к точке  $\mathbf{x}$ . Из (2.2.38) немедленно следует формула (2.2.35).

Формула (2.2.35) вместе с требованиями симметрии гамильтониана позволяет выразить операторы плотностей потоков через операторы плотностей физических величин.

Полагая в формуле (2.2.35)  $a(\mathbf{x}) = \rho^{(m)}(\mathbf{x})$  и замечая, что

$$i [M, \varepsilon(\mathbf{x})] = 0, \quad M = \int d^3x \rho^{(m)}(\mathbf{x}),$$

получим

$$\dot{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}) = - \frac{\partial j_k^{(m)}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.39)$$

где, согласно (2.2.36),

$$j_k^{(m)}(\mathbf{x}) = i \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [\varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), \rho^{(m)}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')].$$

Эта величина представляет собой оператор плотности потока массы.

Полагая далее в (2.2.35)  $a(\mathbf{x}) = \pi_k(\mathbf{x})$  и замечая, что

$$i [\varepsilon(\mathbf{x}), P_k] = \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad P_k = \int d^3x \pi_k(\mathbf{x}),$$

получим

$$\dot{\pi}_k(\mathbf{x}) = - \frac{\partial t_{kl}(\mathbf{x})}{\partial x_l}, \quad (2.2.40)$$

где, согласно (2.2.36),

$$t_{kl}(\mathbf{x}) = - \varepsilon(\mathbf{x}) \delta_{kl} + i \int d^3x' x'_l \int_0^1 d\xi [\varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), \pi_k(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')].$$

Эта величина представляет собой оператор плотности потока импульса (тензор натяжений).

Полагая, наконец, в формуле (2.2.35)  $a(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})$  и замечая, что

$$i [\varepsilon(\mathbf{x}), \mathcal{H}] = - \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}),$$

получим

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{x}) = - \frac{\partial q_k(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (2.2.41)$$

где, согласно (2.2.36),

$$q_k(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \int d^3x' x'_k \int_0^1 d\xi [\varepsilon(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), \varepsilon(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')].$$

Эта величина представляет собой оператор плотности потока энергии.

Заметим, что полученные выражения для операторов потоков, вообще говоря, неоднозначны, так как к ним можно доба-

вить произвольные векторы, дивергенции которых равны нулю. В следующем разделе будет показано, что приведенные выражения для операторов плотностей потоков обладают правильными трансформационными свойствами по отношению к преобразованиям Галилея.

Операторы плотностей потоков нетрудно выразить с помощью формул (2.2.31) через полевые операторы  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$ . Мы приведем здесь только выражение для оператора плотности потока массы

$$j_k^{(m)}(\mathbf{x}) = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \psi^+(\mathbf{x})}{\partial x_k} \psi(\mathbf{x}) - \psi^+(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right) \quad (2.2.42)$$

(мы учли, что  $[\rho^{(m)}(\mathbf{x}), \rho^{(m)}(\mathbf{x}')] = 0$ ). Сравнение этой формулы с (2.2.31) показывает, что  $j_k^{(m)}(\mathbf{x}) = \pi_k(\mathbf{x})$ . Это обстоятельство связано с инвариантностью уравнений квантовой механики по отношению к преобразованиям Галилея.

Операторы аддитивных физических величин — числа частиц, импульса и энергии системы — представляют собой пространственные интегралы от соответствующих плотностей, которые являются квазилокальными операторами. Поэтому пространственный интеграл от произвольного квазилокального оператора (2.2.33) мы будем называть аддитивным оператором. Если аддитивный оператор коммутирует с гамильтонианом системы, то он представляет собой аддитивный интеграл движения. Так, например, операторы  $M$ ,  $P_i$ ,  $\mathcal{H}$  являются аддитивными интегралами движения, в то время как  $M^2$  или  $M\mathcal{H}$ , будучи интегралами движения, не являются аддитивными операторами.

Если операторы  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{y})$  квазилокальны, то оператор  $a_B(\mathbf{x}) = \exp(iB)a(\mathbf{x})\exp(-iB)$ ,  $B = \int d^3y b(\mathbf{y})$  также будет квазилокальным. Действительно, воспользуемся формулой

$$e^{iB}\psi(\mathbf{x})e^{-iB} = \psi(\mathbf{x}) + i[B, \psi(\mathbf{x})] + \frac{i^2}{2}[B, [B, \psi(\mathbf{x})]] + \dots$$

Так как  $b(\mathbf{y})$  — квазилокальный оператор, то в силу канонических перестановочных соотношений (2.2.19), (2.2.26) аргументы операторов  $\psi(\mathbf{x}')$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}')$ , входящих в  $[B, \psi(\mathbf{x})]$ ,  $[B, [B, \psi(\mathbf{x})]]$ , будут лежать вблизи точки  $\mathbf{x}$ , что и требовалось доказать.

Так как гамильтониан является аддитивным оператором, то квазилокальный оператор  $a(\mathbf{x})$  в гейзенберговском представлении  $a(\mathbf{x}, t) = \exp(i\mathcal{H}t)a(\mathbf{x})\exp(-i\mathcal{H}t)$  также будет квазилокальным.

Заметим в заключение этого раздела, что развитая нами схема вторичного квантования легко может быть обобщена на тот случай, когда система состоит из частиц не одного, а нескольких сортов.

## § 2.3. Симметрия уравнений квантовой механики

2.3.1. **Инвариантность уравнений квантовой механики относительно непрерывных преобразований.** Уравнения квантовой механики могут быть инвариантны относительно некоторых преобразований операторов и векторов состояний. Наиболее общие преобразования такого рода связаны со свойствами симметрии пространства и времени. Мы рассмотрим здесь эти преобразования, используя гейзенберговское представление квантовой механики. При этом преобразовываться будут только операторы, векторы же состояний будут оставаться неизменными. Поскольку все операторы можно выразить через операторы  $\psi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющие уравнениям движения (см. (2.1.8))

$$i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [\psi(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}(\psi)], \quad i \frac{\partial \psi^+(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [\psi^+(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}(\psi)] \quad (2.3.1)$$

и одновременным перестановочным соотношениям (см. (2.2.19), (2.2.26))

$$[\psi(\mathbf{x}, t), \psi(\mathbf{x}', t)] = 0, \quad [\psi(\mathbf{x}, t), \psi^+(\mathbf{x}', t)] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.3.2)$$

то достаточно рассмотреть преобразования только этих операторов.  $\mathcal{H}(\psi)$  — гамильтониан системы, выраженный через  $\psi, \psi^+$ . Мы выписали перестановочные соотношения только для бозевских операторов; перестановочные соотношения для фермиевских операторов см. (2.2.26.)

Рассмотрим преобразование операторов  $\psi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = L(\mathbf{x}, t; \psi(\mathbf{x}'', t)), \quad (2.3.3)$$

где  $L(\mathbf{x}, t; \psi(\mathbf{x}'', t))$  — некоторый функционал  $\psi(\mathbf{x}'', t)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}'', t)$ . Будем предполагать, что преобразованные операторы  $\psi'(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi'^+(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют таким же перестановочным соотношениям и таким же уравнениям движения, как и операторы  $\psi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}, t)$ . Так как операторы  $\psi', \psi'^+$  и  $\psi, \psi^+$  должны удовлетворять одинаковым перестановочным соотношениям, то они связаны между собой унитарным преобразованием \*)

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = U_t \psi(\mathbf{x}, t) U_t^\dagger, \quad (2.3.4)$$

где  $U_t \equiv U(t, \psi(\mathbf{x}, t))$  — некоторый унитарный оператор, являющийся функционалом  $\psi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}, t)$ , могущий явно зависеть от времени  $t$ . Если преобразования (2.3.3) не содержат явно  $t$ , то  $U_t$  будет зависеть от времени только через посредство функциональных аргументов  $\psi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}, t)$ . Замечая, что про-

\*) Мы при этом неявно отбрасываем возможность существования унитарно-неэквивалентных представлений для канонических перестановочных соотношений, так как унитарные операторы  $U_t$ , входящие в (2.3.4), будут нами явно построены.

извольный оператор  $A$ , коммутирующий с  $\psi$  и  $\psi^+$ , кратен единичному  $I$ :

$$[A, \psi(x, t)] = [A, \psi^+(x, t)] = 0, \quad A \sim I, \quad (2.3.5)$$

легко заключить, что унитарный оператор  $U_t$  определяется преобразованием (2.3.3) с точностью до произвольного числового множителя, равного по модулю единице.

Из (2.3.4) следует, что

$$\mathcal{H}(\psi') \equiv \mathcal{H}(\psi', \psi'^+) = U_t \mathcal{H}(\psi) U_t^+. \quad (2.3.6)$$

Так как операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$  и  $\psi'$ ,  $\psi'^+$  удовлетворяют одним и тем же перестановочным соотношениям, то требование инвариантности уравнений движения можно сформулировать в виде

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t} = [\psi', \mathcal{H}(\psi')], \quad i \frac{\partial \psi'^+}{\partial t} = [\psi'^+, \mathcal{H}(\psi')].$$

Учитывая (2.3.6), а также уравнения (2.3.1), (2.3.5), получим отсюда  $U_t = U \exp\{i\varphi(t)\}$ , где  $U$  — унитарный оператор, не зависящий от времени, и  $\varphi(t)$  — произвольная вещественная функция времени. Так как оператор  $U_t$  определен с точностью до фазового множителя, то можно считать  $\varphi(t) \equiv 0$ , т. е. считать, что  $U_t \equiv U$  не зависит от времени,  $dU/dt = 0$ . Отсюда следует

$$-i \frac{\partial U}{\partial t} = [U, \mathcal{H}(\psi)], \quad (2.3.7)$$

где  $\partial/\partial t$  — частная производная от оператора  $U(t, \psi(x, t))$  по первому аргументу  $t$ . Замечая, что, согласно (2.3.6),

$$\mathcal{H}(\psi') = \mathcal{H}(\psi) + [U, \mathcal{H}(\psi)] U^+,$$

можно переписать условие инвариантности уравнений движения (2.3.7) в виде

$$\mathcal{H}(\psi') = \mathcal{H}(\psi) - i \frac{\partial U}{\partial t} U^+ \quad (2.3.8)$$

Так как  $dU/dt = 0$ , то каждое преобразование симметрии (2.3.3) определяет интеграл движения  $U$ .

Приведенные соотношения относятся, вообще говоря, к произвольным преобразованиям (2.3.3), которые могут быть как линейными, так и нелинейными по  $\psi$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные по  $\psi$  преобразования (2.3.3), могущие зависеть от ряда непрерывных параметров  $\lambda^a$  ( $a = 1, \dots, n$ ) и образующие некоторую группу  $\mathcal{G}$  [36]. Это значит, что если последовательно совершаются два преобразования (2.3.3), которым соответствуют значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  параметров  $\lambda$ , то результирующему преобразованию соответствуют некоторые значения  $\lambda_3$  параметров  $\lambda$ :

$$\lambda_3 = \lambda(\lambda_2, \lambda_1), \quad (2.3.9)$$

однозначно определяемые величинами  $\lambda_1, \lambda_2$ . При этом введенные нами унитарные операторы  $U \equiv U(\lambda)$  образуют унитарное представление группы  $\mathcal{G}$ , действующее в гильбертовом пространстве векторов состояний системы

$$U(\lambda_2) = U(\lambda_2)U(\lambda_1). \quad (2.3.10)$$

Пусть значениям  $\lambda = \lambda_0$  соответствует тождественное преобразование в группе  $\mathcal{G}$ , так что  $U(\lambda_0) = 1$ . Преобразованиям, бесконечно близким к тождественному, соответствуют значения  $\lambda_0 + \delta\lambda$  параметров  $\lambda$  и унитарный оператор  $U(\lambda_0 + \delta\lambda)$ :

$$U(\lambda_0 + \delta\lambda) = 1 + i \sum_{a=1}^n \delta\lambda^a G_a.$$

Входящие сюда эрмитовы операторы  $G_a$  называются генераторами группы  $\mathcal{G}$ . Они, очевидно, являются интегралами движения. Так как  $U(\lambda_2)U(\lambda_1)U^+(\lambda_2) = U(\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1})))$ , где  $\lambda^{-1}$  — значения параметров  $\lambda$ , соответствующие обратному преобразованию, т. е.  $\lambda(\lambda, \lambda^{-1}) = \lambda_0$ , то при  $\lambda_1 = \lambda_0 + \delta\lambda$  параметры  $\lambda(\lambda_2, \lambda(\lambda_1, \lambda_2^{-1}))$  будут близки к  $\lambda_0$ . Поэтому

$$U(\lambda_2)G_b U^+(\lambda_2) = \sum_c u_{bc}(\lambda_2)G_c,$$

где величины  $u_{bc}(\lambda_2)$  определяются только законом сложения (2.3.9) параметров  $\lambda$  в группе  $\mathcal{G}$ . Отсюда легко заключить, что

$$[G_a, G_b] = \sum_c g_{abc}G_c, \quad (2.3.11)$$

где  $g_{abc} = -i(\partial u_{bc}(\lambda)/\partial\lambda^a)_{\lambda=\lambda_0}$ . Эти величины, называемые *структурными постоянными группы*, не зависят, как видно из вывода, от представления группы, а определяются только групповым законом сложения.

Непрерывными линейными преобразованиями являются пространственные трансляции и вращения, связанные с симметрией пространства, а также преобразования Галилея и фазовые преобразования.

При преобразованиях трансляции

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'_\sigma(\mathbf{x}, t) = \psi_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{d}, t), \quad (2.3.12)$$

образующих непрерывную группу с непрерывным параметром смещения  $\mathbf{d}$ , перестановочные соотношения для операторов  $\psi, \psi^+$  и  $\psi', \psi'^+$  остаются неизменными, поэтому

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{d}, t) = U_{\mathbf{d}}\psi(\mathbf{x}, t)U_{\mathbf{d}}^+, \quad (2.3.13)$$

откуда, учитывая соотношение (2.2.28), получим следующее выражение для унитарного оператора  $U_{\mathbf{d}}$ :

$$U_{\mathbf{d}} = \exp\{i\mathbf{P}\mathbf{d}\}. \quad (2.3.14)$$

Для бесконечно малых трансляций  $U_a = 1 + iPd$ . Поэтому оператор импульса  $P$  является генератором группы трансляций. Легко видеть, что условие инвариантности уравнений движения (2.3.8) выполняется, если гамильтониан системы трансляционно инвариантен (это значит, что для гамильтониана (2.2.29) ядро  $V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  есть функция разности  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ). Заметим, что для трансляции  $\partial' U_a / \partial t = 0$ .

Преобразования пространственных вращений определяются формулами

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'_\sigma(\mathbf{x}, t) = R_{\sigma\sigma'}(a) \psi_{\sigma'}(a^{-1}\mathbf{x}, t), \quad (2.3.15)$$

где  $a$  — ортогональная трехмерная матрица,  $a\bar{a} = 1$  ( $\sim$  служит для обозначения транспонированной матрицы), определяемая тремя независимыми непрерывными параметрами (например, углами Эйлера), и  $R(a)$  — унитарная в спиновом пространстве матрица, которая должна удовлетворять групповому соотношению

$$R(a)R(a') = R(aa').$$

Так как операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$  и  $\psi'$ ,  $\psi'^+$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = R(a)\psi(a^{-1}\mathbf{x}, t) = U_a\psi(\mathbf{x}, t)U_a^\dagger. \quad (2.3.16)$$

Если гамильтониан имеет вид (2.2.29), где  $V(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  зависит только от  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , то условие инвариантности уравнений движения (2.3.8) будет выполняться при любом  $R$ . Если же гамильтониан содержит спиновые матрицы  $s_i$  в инвариантных комбинациях  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')s$ ,  $ss$ , как, например, гамильтониан дипольного магнитного взаимодействия

$$V_d = -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{s} \right)^2 \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^+(\mathbf{x}_1) \psi^+(\mathbf{x}_2) \times \\ \times \frac{(s_1 R)(s_2 R) \cdot 3 - R^2(s_1 s_2)}{R^5} \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1),$$

где  $\mathbf{R} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , то условие (2.3.8) (для вращений  $\partial' U_a / \partial t = 0$ ) будет выполнено, если

$$R^+(a) s_i R(a) = a_{ik} s_k. \quad (2.3.17)$$

Для бесконечно малых вращений

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}, \quad |\varepsilon_{ik}| \ll 1$$

матрицу  $R(a)$  можно представить в виде

$$R(a) = 1 + \frac{i}{2} \varepsilon_{ik} \Sigma_{ik}, \quad \Sigma_{ik} = -\Sigma_{ki}. \quad (2.3.18)$$

Подставляя (2.3.18) в (2.3.17) и ограничиваясь линейными по  $\varepsilon_{ik}$  членами, получим

$$i[\Sigma_{ik}, s_l] = \delta_{kl} s_i - \delta_{il} s_k,$$



откуда, учитывая, что  $[s_i, s_k] = i\epsilon_{ikl}s_l$ , найдем

$$\Sigma_{ik} = \epsilon_{ikl}s_l. \quad (2.3.19)$$

Бесконечно малым вращениям соответствует унитарный оператор

$$U_a = 1 + \frac{i}{2} \epsilon_{ik} M_{ki}, \quad M_{ki} = -M_{ik},$$

где  $M_{ki}$  — генератор группы вращений. Подставляя это выражение в (2.3.16) и ограничиваясь линейными по  $\epsilon_{ik}$  членами, получим

$$[M_{ik}, \psi(\mathbf{x}, t)] = - \left\{ \Sigma_{ik} + i \left( x_k \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} \psi(\mathbf{x}, t).$$

Сравнение этой формулы с (2.2.28) показывает, что

$$M_{ik} = \epsilon_{ikl} M_l, \quad (2.3.20)$$

где  $M_l$  — оператор момента количества движения системы.

Преобразования Галилея определяются формулами

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{u}t, t) \exp \left\{ i\mathbf{m}\mathbf{u}\mathbf{x} - i \frac{m\mathbf{u}^2}{2} t \right\}, \quad (2.3.21)$$

где  $\mathbf{u}$  — непрерывный параметр группы. (Легко проверить, что эти преобразования действительно образуют группу.)

Так как операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$  и  $\psi'$ ,  $\psi'^+$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x} - \mathbf{u}t, t) \exp \left\{ i\mathbf{m}\mathbf{u}\mathbf{x} - i \frac{m\mathbf{u}^2}{2} t \right\} = U_u \psi(\mathbf{x}, t) U_u^+. \quad (2.3.22)$$

Замечая, что

$$\mathbf{u} \left[ \int d^3x' x' \rho^{(m)}(\mathbf{x}', t), \psi(\mathbf{x}, t) \right] = -\mathbf{m}\mathbf{u}\mathbf{x}\psi(\mathbf{x}, t),$$

и используя (2.2.28), нетрудно показать, что

$$U_u = \exp \left\{ -i\mathbf{u} \int d^3x x \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) + i\mathbf{u}\mathbf{P}t \right\}. \quad (2.3.23)$$

Эту формулу можно преобразовать, используя известное соотношение

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) \exp \left( -\frac{1}{2} [A, B] \right),$$

справедливое, если  $[A, B]$  коммутирует с  $A$  и  $B$ . Учитывая, что оператор

$$\left[ \int d^3x x_i \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t), P_k \right] = i\delta_{ik} M$$

коммутирует как с  $P_i$ , так и с  $\int d^3x x_k \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ , получим

$$U_u = \exp \left\{ i\mathbf{u}\mathbf{P}t + i \frac{u^2}{2} Mt \right\} \exp \left\{ -i\mathbf{u} \int d^3x x \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) \right\}.$$

Мы видим, что в случае преобразований Галилея, в отличие от преобразований (2.3.12), (2.3.15),  $\partial'U_u/\partial t \neq 0$ :

$$\frac{\partial'U_u}{\partial t} U_u^+ = i\mathbf{P}u + i\frac{u^2}{2} M.$$

(Это связано с тем, что преобразования (2.3.21) содержат время явно.) Отсюда и из (2.3.21) следует, что условие инвариантности уравнений движения (2.3.8) будет выполняться, если гамильтониан  $\mathcal{H}$  имеет структуру (2.2.29). (Он может содержать также члены типа  $V_d$ .)

Равенство нулю полной производной от оператора  $U_u$  обеспечивается законом равномерности движения центра инерции системы

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int d^3x x_k \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t) - P_{kt} \right\} = 0. \quad (2.3.24)$$

Полагая в формуле (2.3.23)  $t = 0$  и учитывая, что при  $t = 0$  гейзенберговские операторы совпадают со шредингеровскими операторами, можно записать  $U_u$  в виде

$$U_u = \exp \left\{ -iu \int d^3x x \rho^{(m)}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (2.3.25)$$

Найдем теперь законы преобразования плотностей физических величин в шредингеровском представлении при унитарном преобразовании  $U_u$  [85]. Заметим с этой целью, что шредингеровский оператор  $\psi(\mathbf{x})$ , согласно (2.3.22), при унитарном преобразовании  $U_u$  преобразуется по формуле

$$U_u \psi(\mathbf{x}) U_u^+ = \psi(\mathbf{x}) \exp \{ i m u x \}.$$

Используя выражения (2.2.31) для  $\rho^{(m)}$ ,  $\pi_k$ ,  $\varepsilon$ , получим отсюда

$$\begin{aligned} U_u \rho^{(m)}(\mathbf{x}) U_u^+ &= \rho^{(m)}(\mathbf{x}), \\ U_u \pi_k(\mathbf{x}) U_u^+ &= \pi_k(\mathbf{x}) + u_k \rho^{(m)}(\mathbf{x}), \\ U_u \varepsilon(\mathbf{x}) U_u^+ &= \varepsilon(\mathbf{x}) + u_k \pi_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} u^2 \rho^{(m)}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Чтобы установить трансформационные свойства плотностей потоков, воспользуемся формулами

$$\begin{aligned} i \int d^3x' x'_i \int_0^1 d\xi [\pi_i(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), \pi_k(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')] &= \\ &= \delta_{ii} \pi_k(\mathbf{x}) + \delta_{ki} \pi_i(\mathbf{x}), \quad (2.3.27) \\ i \int d^3x' x'_i \int_0^1 d\xi [\pi_i(\mathbf{x} - (1 - \xi)\mathbf{x}'), \rho^{(m)}(\mathbf{x} + \xi\mathbf{x}')] &= \delta_{ii} \rho^{(m)}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

которые непосредственно следуют из определений (2.2.31) операторов  $\pi_i(\mathbf{x})$ ,  $\rho^{(m)}(\mathbf{x})$  и перестановочных соотношений (2.2.19), (2.2.26).

Используя формулы (2.2.39), (2.2.40), (2.2.41) и (2.3.26) и учитывая далее (2.3.27), легко найти, что

$$\begin{aligned}
 U_u j_k^{(m)}(x) U_u^+ &= j_k^{(m)}(x) + u_k \rho^{(m)}(x), \\
 U_u t_{kl}(x) U_u^+ &= t_{kl}(x) + u_k j_l^{(m)}(x) + u_l \pi_k(x) + u_k u_l \rho^{(m)}(x), \quad (2.3.28) \\
 U_u q_k(x) U_u^+ &= q_k(x) + u_l t_{lk}(x) + \\
 &+ u_k \varepsilon(x) + u_k u_l \pi_l(x) + \frac{1}{2} u^2 (j_k^{(m)}(x) + u_k \rho^{(m)}(x)).
 \end{aligned}$$

Эти формулы будут использованы нами при выводе уравнений гидродинамики нормальной и сверхтекучей жидкости.

Формулы (2.3.12), (2.3.15), (2.3.21) имеют непосредственный физический смысл, именно, они определяют трансформационные свойства операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$  при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi'(x', t),$$

где нештрихованные величины относятся к системе  $K$ , а штрихованные к системе  $K'$ . При этом в случае трансляций

$$x \rightarrow x' = x + d \quad (2.3.29)$$

и  $\psi'(x, t)$  определяется формулой (2.3.12). В случае вращений

$$x \rightarrow x' = ax \quad (2.3.30)$$

и  $\psi'(x, t)$  определяются формулой (2.3.15). Наконец, в случае преобразований Галилея

$$x \rightarrow x' = x + ut, \quad (2.3.31)$$

где  $u$  — скорость системы  $K$  относительно  $K'$  и  $\psi'(x, t)$  определяется формулой (2.3.21). (Подчеркнем, что всюду  $x$  и  $x'$  — координаты одной и той же точки в системах  $K$  и  $K'$ .) Преобразования (2.3.12), (2.3.15), (2.3.21) являются линейными и определяют некоторое представление групп (2.3.29), (2.3.30), (2.3.31).

В каждой системе отсчета мы можем построить с помощью операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$  операторы различных физических величин. При этом, если в системе  $K$  некоторой физической величине соответствует оператор  $a(x, t; \psi(x'', t))$ , то в системе  $K'$  ей будет соответствовать оператор  $a(x', t; \psi'(x'', t)) = U a(x', t; \psi(x'', t)) U^+$ . Среднее значение физических величин определяется, согласно (2.1.2), статистическим оператором  $\rho$ , который в гейзенберговском представлении не меняется при переходе от  $K$  к  $K'$ . Поэтому средние значения операторов преобразуются по формуле  $a(x, t) = \text{Sp } \rho a(x, t; \psi) \rightarrow a'(x', t) =$

$$= \text{Sp } \rho a(x', t; \psi') = \text{Sp } \rho U a(x', t; \psi) U^+. \quad (2.3.32)$$

Заметим, что в шредингеровском представлении не преобразуются операторы  $\psi(x)$ ,  $\psi^+(x)$ , что же касается статистического оператора  $\rho(t) = \exp(-i\mathcal{H}t) \rho \exp(i\mathcal{H}t)$ , то он, согласно (2.3.32),

преобразуется по формуле

$$\rho(t) \rightarrow \rho'(t) = e^{-i3ct} U^+ e^{i3ct} \rho(t) e^{-i3ct} U e^{i3ct}. \quad (2.3.33)$$

К числу непрерывных преобразований, оставляющих инвариантными уравнения квантовой механики, относятся еще фазовые преобразования

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = e^{-i\alpha} \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.3.34)$$

где  $\alpha$  — произвольное вещественное число. Операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$  и  $\psi'$ ,  $\psi'^+$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям и одинаковым уравнениям движения, если предположить что гамильтониан содержит одинаковое число операторов  $\psi$  и  $\psi^+$ . Поэтому операторы  $\psi$  и  $\psi'$  должны быть связаны между собой некоторым унитарным преобразованием  $U_\alpha$ , действующим в гильбертовом пространстве и не зависящим от времени:

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{-i\alpha} \psi(\mathbf{x}, t) = U_\alpha \psi(\mathbf{x}, t) U_\alpha^+. \quad (2.3.35)$$

Отсюда, учитывая перестановочные соотношения для операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$ , получим

$$U_\alpha = \exp\{i\alpha N\}. \quad (2.3.36)$$

Для бесконечно малого фазового преобразования  $U_\alpha = 1 + i\alpha N$ . Поэтому оператор числа частиц  $N$  представляет собой генератор группы фазовых преобразований.

Пусть теперь  $\alpha$  в (2.3.34) является функцией координат и времени,  $\alpha = e\chi(\mathbf{x}, t)$ ,  $e$  — заряд частицы. Так как и в этом случае  $\psi'$  и  $\psi$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то можно утверждать, что  $\psi'$  и  $\psi$  снова будут связаны унитарным преобразованием  $U_\chi(t)$

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{-ie\chi(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) = U_\chi(t) \psi(\mathbf{x}, t) U_\chi^+(t), \quad (2.3.37)$$

где унитарный оператор  $U_\chi(t)$  будет теперь функцией времени. Из перестановочных соотношений (2.3.2) следует, что

$$U_\chi(t) = \exp\left\{\frac{ie}{m} \int d^3x \chi(\mathbf{x}, t) \rho^{(m)}(\mathbf{x}, t)\right\}. \quad (2.3.38)$$

Это унитарное преобразование играет важную роль при изучении поведения системы во внешнем электромагнитном поле, когда гамильтониан  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(A; \psi, \psi^+)$  зависит от потенциалов поля  $A \equiv (A, \varphi)$ . Легко видеть, что если гамильтониан системы имеет вид (2.2.30), то операторы  $\psi'(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют уравнению движения

$$i \frac{\partial \psi'(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [\psi'(\mathbf{x}, t), \mathcal{H}(\tilde{A}; \psi', \psi'^+)],$$

где  $\tilde{A} \equiv (A + \partial\chi/\partial\mathbf{x}, \varphi - \partial\chi/\partial t)$ . Преобразования (2.3.37) носят название *калибровочных преобразований*.

Заметим, что статистический оператор в шредингеровском представлении при преобразованиях (2.3.34) преобразуется по

формуле

$$\rho(t) \rightarrow \rho'(t) = U_{\alpha}^+ \rho(t) U_{\alpha}, \quad (2.3.39)$$

причем  $\rho(t)$  и  $\rho'(t)$  удовлетворяют уравнению движения (2.1.7) с одним и тем же гамильтонианом. (В шредингеровском представлении операторы  $\psi(x)$  и  $\psi^+(x)$  не преобразуются.)

При калибровочных преобразованиях в шредингеровском представлении статистический оператор преобразуется по формуле

$$\rho(t) \rightarrow \rho'(t) = U_x^+(t) \rho(t) U_x(t), \quad (2.3.40)$$

причем оператор  $\rho(t)$  удовлетворяет уравнению движения (2.1.7) с гамильтонианом  $\mathcal{H}(A; \psi, \psi^+)$ , а оператор  $\rho'(t)$  — такому же уравнению, но с гамильтонианом  $\mathcal{H}(\bar{A}, \psi, \psi^+)$ .

**2.3.2. Инвариантность уравнений квантовой механики относительно пространственного отражения и обращения времени.** Уравнения квантовой механики инвариантны не только относительно преобразований пространственных трансляций и вращений, но также и относительно пространственных отражений:

$$x_i \rightarrow x'_i = -x_i, \quad t \rightarrow t' = t. \quad (2.3.41)$$

При этом операторы  $\psi(x, t)$  преобразуются согласно формуле

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi'(x', t) = \psi(x, t). \quad (2.3.42)$$

Так как операторы  $\psi(x, t)$  и  $\psi'(x, t)$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям и одинаковым уравнениям движения (предполагается, что функция  $V(x)$ , входящая в гамильтониан (2.2.29) является четной,  $V(x) = V(-x)$ ), то они связаны между собой унитарным преобразованием  $\mathcal{P}$  не зависящим от времени:

$$\psi'(x, t) = \psi(-x, t) = \mathcal{P} \psi(x, t) \mathcal{P}^+. \quad (2.3.43)$$

Отсюда следует, что  $[\mathcal{P}^2, \psi] = 0$ . Учитывая, что  $\mathcal{P}$  определено с точностью до фазового множителя, можно, согласно (2.3.5), считать, что  $\mathcal{P}^2 = 1$  и, следовательно, собственные значения оператора  $\mathcal{P}$  равны  $\pm 1$ . Оператор  $\mathcal{P}$  называется *оператором пространственной четности*.

Рассмотрим теперь другое дискретное преобразование — *обращение времени*

$$x_i \rightarrow x'_i = x_i, \quad t \rightarrow t' = -t. \quad (2.3.44)$$

Будем предполагать, что система находится во внешнем электромагнитном поле  $A(x, t) \equiv (A(x, t), \varphi(x, t))$ , от которого зависит как гамильтониан системы  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(A; \psi)$ , так и гейзенберговские операторы  $\psi(x, t) \equiv \psi^A(x, t)$ . Из классической электродинамики известно, что при обращении времени векторный потенциал меняет знак, а скалярный остается неизменным:

$$A(x, t) \rightarrow A'(x, t) = \bar{A}(x, -t), \quad \bar{A}(x, t) \equiv (-A(x, t), \varphi(x, t)). \quad (2.3.45)$$

Обращению времени соответствует следующее преобразование  $\psi$ :

$$\psi(x, t) \rightarrow \psi'(x', t') = T\psi^{A'}(x, t)^*, \quad (2.3.46)$$

где  $T$  — унитарная матрица,  $TT^+ = 1$ , действующая на спинорные индексы  $\psi$ , и  $*$  служит для обозначения операции комплексного сопряжения. Эта операция зависит от выбора базиса в гильбертовом пространстве. Именно, если выбран определенный базис в гильбертовом пространстве, то в нем операция комплексного сопряжения определяется формулой

$$\langle n | \psi^* | n' \rangle = \langle n | \psi | n' \rangle^*. \quad (2.3.47)$$

Так как операторы  $\psi(x, t)$  и  $\psi'(x, t)$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям, то они связаны унитарным оператором  $U$  (действующим в гильбертовом пространстве):

$$\psi'(x, t) = U\psi(x, t)U^+ = T\psi^{A'}(x, -t)^*. \quad (2.3.48)$$

Оператор  $\psi^{A'}(x, t)$ , согласно определению, удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \psi^{A'}(x, t)}{\partial t} = [\psi^{A'}(x, t), \mathcal{H}(A'; \psi^{A'})],$$

откуда, учитывая (2.3.46), получим

$$i \frac{\partial \psi'(x, t)}{\partial t} = [\psi'(x, t), \mathcal{H}^*(\bar{A}, (T^{-1}\psi'(x, t))^*)].$$

Так как перестановочные соотношения для операторов  $\psi$  и  $\psi'$  совпадают, то для того, чтобы совпадали и уравнения движения для  $\psi$  и  $\psi'$ , необходимо выполнение условия

$$\mathcal{H}^*(\bar{A}, (T^{-1}\psi')^*) = \mathcal{H}(A, \psi').$$

Так как это соотношение должно выполняться при произвольных  $A$  и  $\psi$ , то, заменяя здесь  $A \rightarrow \bar{A}$  и  $\psi' \rightarrow T\psi^*$ , получим

$$\mathcal{H}^*(A, \psi) = \mathcal{H}(\bar{A}, T\psi^*). \quad (2.3.49)$$

Легко видеть, что гамильтониан (2.2.30) (в который можно включить и  $V_d$ ) удовлетворяет условию (2.3.49), если матрица  $T$  удовлетворяет уравнению

$$T^+ s_i T = -s_i^* \quad (2.3.50)$$

( $s_i^*$  — матрица, комплексно сопряженная по отношению к  $s_i$ ).

Если спин частиц равен  $\frac{1}{2}$ , т. е.  $s_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ , где  $\sigma_i$  — матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то  $T = \sigma_2$ .

Используя (2.3.48), можно выяснить, как преобразуются при унитарном преобразовании  $U$ , соответствующем обращению времени, операторы различных физических величин. Рассмотрим, например, операторы плотности заряда и плотности электрического тока (2.2.32). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} U\rho^{(e)}(\mathbf{x}, t)U^+ &= \rho^{(e)*}(\mathbf{x}, -t)|_{A \rightarrow \bar{A}}, \\ U\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x}, t)U^+ &= -\mathbf{j}^{(e)*}(\mathbf{x}, -t)|_{A \rightarrow \bar{A}}. \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Аналогичным образом преобразуются и операторы других физических величин:

$$U\xi(\mathbf{x}, t)U^+ = \varepsilon\xi^*(\mathbf{x}, -t)|_{A \rightarrow \bar{A}}, \quad (2.3.52)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$ . Этот множитель называется *временной сигнатурой* оператора  $\xi$ .

Заметим, что вместо унитарного оператора  $U$  часто используют также антиунитарный оператор  $\bar{U} = UK$  [36], где  $K$  — нелинейный оператор комплексного сопряжения:

$$K|n\rangle = |n\rangle, \quad K(\alpha|\varphi\rangle + \beta|\varphi'\rangle) = \alpha^*K|\varphi\rangle + \beta^*K|\varphi'\rangle$$

и  $|n\rangle$  — базис, в котором определяется операция  $*$  в  $\Psi^*$  (см. (2.3.47));  $\alpha, \beta$  — произвольные комплексные числа и  $|\varphi\rangle, |\varphi'\rangle$  — произвольные векторы гильбертова пространства. Легко видеть, что

$$K^2 = 1, \quad (K\varphi', K\varphi) = (\varphi', \varphi)^*$$

и

$$K\psi(\mathbf{x})K = \psi^*(\mathbf{x}), \quad K\mathcal{H}K = \mathcal{H}^*.$$

Поэтому условие (2.3.49) можно, согласно (2.3.48), переписать в виде

$$\mathcal{H}(A, \psi) = \bar{U}\mathcal{H}(\bar{A}, \psi)\bar{U}^{-1}.$$

Мы видим, что при  $A = 0$   $\bar{U}$  коммутирует с гамильтонианом. Однако оператор  $\bar{U}$  не соответствует какой-либо сохраняющейся величине (типа пространственной четности), так как он нелинеен.

## § 2.4. Принцип ослабления корреляций и эргодические соотношения для квантовых систем

**2.4.1. Принцип ослабления корреляций.** В разделе 1.1.2 был сформулирован принцип ослабления корреляций для классических систем, согласно которому многочастичные функции распределения классической системы распадаются на произведения многочастичных функций распределения с меньшим числом аргументов при безграничном увеличении разностей соответствующих аргументов. Аналогичному принципу удовлетворяют и квантовые системы. Прежде чем сформулировать этот принцип для

квантовых систем, введем квантовые многочастичные функции распределения [18]:

$$\begin{aligned} f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) = \\ = \text{Sp } \rho \psi^+(y_1) \dots \psi^+(y_l) \psi(x_1) \dots \psi(x_k), \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где  $\rho$  — статистический оператор системы. Ясно, что

$$f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) = f_{l,k}^*(y_1, \dots, y_l; x_k, \dots, x_1).$$

В частности, при  $k = l = 1$  мы получим одночастичную функцию распределения,  $f_{1,1}(x; y) = f_{1,1}^*(y; x)$ , являющуюся комплексной функцией двух пространственных аргументов  $x, y$ . С помощью этой функции можно ввести вещественную одночастичную функцию распределения  $f(x, p)$ , зависящую от координат и импульса [37]:

$$f(x, p) = \int d^3\xi e^{i\xi p} f_{1,1}\left(x + \frac{1}{2}\xi, x - \frac{1}{2}\xi\right). \quad (2.4.2)$$

Будучи вещественной, эта функция (она называется *вигнеровской функцией распределения*) не является, однако, положительной.

Если система находится в чистом состоянии

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{N!} \int d^3x_1 \dots d^3x_N \Phi(x_1, \dots, x_N) |x_1, \dots, x_N\rangle,$$

где  $\Phi(x_1, \dots, x_N)$  — волновая функция системы, то статистический оператор системы будет иметь вид  $\rho = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ , и поэтому, согласно (2.4.1), (2.2.17), (2.2.5), одночастичная функция распределения будет определяться формулой

$$\begin{aligned} f_{1,1}(x'; x) = \langle\varphi | \psi^+(x) \psi(x') | \varphi\rangle = \frac{1}{(N-1)!} \int d^3x_2 \dots d^3x_N, \\ \varphi^*(x, x_2, \dots, x_N) \varphi(x', x_2, \dots, x_N). \end{aligned}$$

Эта формула показывает, что  $f_{1,1}(x'; x)$  представляет собой статистический оператор одной частицы для системы, находящейся в чистом состоянии  $|\varphi\rangle$  (см. (2.1.5)).

Если  $N \rightarrow \infty$  и  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ , но  $N/\mathcal{V}$  остается конечным, то многочастичные функции распределения  $f_{k,l}$  имеют конечный и отличный от нуля предел. (Этот предел называется *термодинамическим пределом*.) Заметим, что для состояния с определенным импульсом

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_N) = \\ = (\mathcal{V})^{-1/2} \chi(x_2 - x_1, \dots, x_N - x_1) \exp\{ip(x_1 + \dots + x_N)/N\} \end{aligned}$$

функция  $f_{1,1}(x'; x)$  (так же как и другие многочастичные функции распределения) стремится к нулю при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  и  $N$  конечном. В дальнейшем под многочастичными функциями распреде-



ления мы будем понимать функции (2.4.1), в которых произведен термодинамический предельный переход.

Многочастичные функции распределения (2.4.1) симметричны по переменным  $x_1, \dots, x_k$  и по переменным  $y_1, \dots, y_l$  для систем, состоящих из одинаковых бозонов, и антисимметричны по этим переменным для систем, состоящих из одинаковых фермионов.

Многочастичные функции распределения для пространственно-однородных систем не изменяются при преобразованиях трансляции \*)

$$\begin{aligned} f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) = \\ = f_{k,l}(x_1 + \mathbf{d}, \dots, x_k + \mathbf{d}; y_1 + \mathbf{d}, \dots, y_l + \mathbf{d}), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{d}$  — произвольный вектор. Используя (2.2.28), легко убедиться, что в случае пространственно-однородного состояния системы статистический оператор  $\rho$  коммутирует с оператором импульса

$$[\rho, P_k] = 0.$$

Сформулируем теперь принцип ослабления корреляций для квантовых систем [19]. Пусть точки  $x_1, \dots, x_s$  находятся вблизи точки  $X$ , а точки  $y_1, \dots, y_p$  — вблизи точки  $Y$  и

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho \psi^+(x_1) \dots \psi(x_s) \psi^+(y_1) \dots \psi(y_p) \xrightarrow{X-Y \rightarrow \infty} \\ \xrightarrow{X-Y \rightarrow \infty} \text{Sp } \rho \psi^+(x_1) \dots \psi(x_s) \cdot \text{Sp } \rho \psi^+(y_1) \dots \psi(y_p) \end{aligned}$$

для произвольных  $s$  и  $p$ , причем предельный переход  $X - Y \rightarrow \infty$  осуществляется после термодинамического предельного перехода. В этом случае говорят, что статистический оператор  $\rho$ , а также многочастичные функции распределения удовлетворяют *принципу ослабления корреляций*. При этом, очевидно, высшие многочастичные функции распределения определяют низшие многочастичные функции распределения.

Принцип ослабления корреляций можно сформулировать в более компактном виде, если использовать понятие квазилокального оператора (см. раздел 2.2.2). Именно, легко видеть, что принцип ослабления корреляций будет удовлетворяться, если для любой пары квазилокальных операторов  $a(x)$ ,  $b(y)$

$$\text{Sp } \rho a(x) b(y) \xrightarrow{x-y \rightarrow \infty} \text{Sp } \rho a(x) \cdot \text{Sp } \rho b(y). \quad (2.4.3)$$

Выражаясь более точно, можно сказать, что это соотношение должно выполняться при  $|x - y| \gg r_c$ , где  $r_c$  радиус корреляции в состоянии  $\rho$ .

\*) В ряде случаев для вырожденных систем (см. 3.2.1) условие пространственной однородности формулируется иначе (см. 6.2.2).

В разделе 2.2.2 было показано, что если  $a(x)$  квазилокальный оператор, а  $\mathcal{S}$  — аддитивный оператор, то оператор

$$a_{\mathcal{S}}(x) = e^{i\mathcal{S}} a(x) e^{-i\mathcal{S}}$$

будет также квазилокальным. Отсюда и из (2.4.3) легко убедиться, что оператор  $e^{-i\mathcal{S}} \rho e^{i\mathcal{S}}$  будет удовлетворять принципу ослабления корреляций, если этому принципу удовлетворяет статистический оператор  $\rho$ . В частности, отсюда следует, что статистический оператор в шредингеровском представлении  $\rho(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций для всех времен  $t$ , если он удовлетворяет этому принципу в начальный момент времени.

Пусть  $A$  — некоторый аддитивный эрмитов оператор. Тогда статистический оператор

$$\rho = \exp\{\Omega_A - A\}, \quad \Omega_A = -\beta \operatorname{Sp} \exp(-A) \quad (2.4.4)$$

будет удовлетворять принципу ослабления корреляций, если для соответствующих ему многочастичных функций распределения существует термодинамический предел. (Это утверждение может быть доказано в рамках теории возмущений.) В частности, статистический оператор Гиббса

$$w = \exp\{\Omega - \beta(\mathcal{H} - uP - \mu N)\}, \quad \operatorname{Sp} w = 1 \quad (2.4.4')$$

( $\beta$  — обратная температура,  $u$  — скорость системы и  $\mu$  — химический потенциал) удовлетворяет принципу ослабления корреляций.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, несправедливо: не любой оператор, удовлетворяющий принципу ослабления корреляций, должен иметь структуру (2.4.4). В частности, микроканоническое распределение  $w^{(m)} = C^{-1} \delta(E - \mathcal{H})$  не имеет структуры (2.4.4), хотя удовлетворяет принципу ослабления корреляций и приводит к тем же выражениям для многочастичных функций распределения (2.4.1), что и каноническое распределение. (Это утверждение составляет содержание теоремы об эквивалентности различных термодинамических ансамблей [115].) Интересуясь в дальнейшем только многочастичными функциями распределения, мы будем считать, что статистический оператор, удовлетворяющий принципу ослабления корреляций в пределе  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ , имеет структуру (2.4.4).

Многочастичные функции распределения (2.4.1) могут быть выражены через производящий функционал  $\mathcal{F}(u, u^*)$  [86]

$$\mathcal{F}(u, u^*) = \operatorname{Sp} \rho \exp\left\{ \int d^3x u^*(x) \psi^+(x) \right\} \exp\left\{ \int d^3x u(x) \psi(x) \right\}, \quad (2.4.5)$$

где  $u(x)$  и  $u^*(x)$  — произвольные  $c$ -числовые функции координат в случае систем, состоящих из бозонов\*). Если же система со-

\*) Применение метода производящего функционала в задачах классической статистической механики см. в [20].

стоит из фермионов, то величины  $u(x)$ ,  $u^*(x)$  мы будем считать антикоммутирующими между собой и коммутирующими с  $\psi^+$ ,  $\psi$ :

$$\{u(x), u(x')\} = \{u^*(x), u^*(x')\} = \{u(x), u^*(x')\} = 0. \quad (2.4.6)$$

Для систем, состоящих из бозонов, многочастичные функции распределения представляют собой функциональные производные от производящего функционала  $\mathcal{F}$  по переменным  $u(x)$  и  $u^*(x)$ :

$$\begin{aligned} f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) &= \\ &= \frac{\delta^{k+l} \mathcal{F}(u, u^*)}{\delta u(x_1) \dots \delta u(x_k) \delta u^*(y_1) \dots \delta u^*(y_l)} \Big|_{u=u^*=0}, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

где функциональные производные  $\delta \mathcal{F} / \delta u$ ,  $\delta \mathcal{F} / \delta u^*$  связаны с вариацией функционала  $\mathcal{F}(u, u^*)$  соотношением

$$\delta \mathcal{F}(u, u^*) = \int d^3x \delta u(x) \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} + \int d^3x \delta u^*(x) \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^*(x)}.$$

Для систем, состоящих из фермионов, многочастичные функции распределения также могут быть выражены через функциональные производные. Однако вследствие антикоммутативности величин  $u$ ,  $u^*$  в этом случае следует ввести функциональные производные двух типов — левые  $\delta_l A / \delta u$ ,  $\delta_l A / \delta u^*$  и правые  $\delta_r A / \delta u$ ,  $\delta_r A / \delta u^*$ . Они связаны с вариацией функционала  $A$  соотношениями

$$\begin{aligned} \delta A &= \int d^3x \delta u(x) \frac{\delta_l A}{\delta u(x)} + \int d^3x \delta u^*(x) \frac{\delta_l A}{\delta u^*(x)} = \\ &= \int d^3x \frac{\delta_r A}{\delta u(x)} \delta u(x) + \int d^3x \frac{\delta_r A}{\delta u^*(x)} \delta u^*(x); \end{aligned}$$

при этом учтено, что, согласно (2.4.6),

$$\{u, \delta u\} = \{u^*, \delta u\} = \{u, \delta u^*\} = \{u^*, \delta u^*\} = 0.$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta_l}{\delta u(x)} \exp \int d^3x' u(x') \psi(x') &= \psi(x) \exp \int d^3x' u(x') \psi(x'), \\ \frac{\delta_r}{\delta u(x)} \exp \int d^3x' u(x') \psi(x') &= \exp \left\{ \int d^3x' u(x') \psi(x') \right\} \cdot \psi(x), \end{aligned}$$

легко убедиться в справедливости соотношения

$$\begin{aligned} f_{k,s}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_s) &= \\ &= \frac{\delta_l^s}{\delta u^*(y_1) \dots \delta u^*(y_s)} \frac{\delta_r^k \mathcal{F}(u, u^*)}{\delta u(x_k) \dots \delta u(x_1)} \Big|_{u=u^*=0}. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Таким образом, производящий функционал, так же как и многочастичные функции распределения (или статистический оператор), может служить для описания состояния системы.

Покажем, что с помощью производящего функционала можно также сформулировать принцип ослабления корреляций. С этой целью выберем в качестве функционального аргумента  $u(\mathbf{x})$  сумму двух функций  $u_X(\mathbf{x})$  и  $u_Y(\mathbf{x})$ , из которых первая отлична от нуля только при значениях  $\mathbf{x}$ , близких к  $X$ , а вторая — при значениях  $\mathbf{x}$ , близких к  $Y$ . В этом случае мы, очевидно, имеем, согласно каноническим перестановочным соотношениям для операторов  $\psi, \psi^+$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_X(\mathbf{x}) + u_Y(\mathbf{x})) &= \\ &= \text{Sp} \rho \exp \left\{ \int d^3x u_X^*(\mathbf{x}) \psi^+(\mathbf{x}) \right\} \exp \left\{ \int d^3x u_X(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \int d^3x u_Y^*(\mathbf{x}) \psi^+(\mathbf{x}) \right\} \exp \left\{ \int d^3x u_Y(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right\}, \\ \mathcal{F}(u, u^*) &\equiv \mathcal{F}(u), \end{aligned}$$

и, следовательно, согласно принципу ослабления корреляций (2.4.3),

$$\mathcal{F}(u_X(\mathbf{x}) + u_Y(\mathbf{x})) \xrightarrow{X-Y \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u_X(\mathbf{x})) \mathcal{F}(u_Y(\mathbf{x})). \quad (2.4.9)$$

Введем теперь корреляционные функции  $g_{k,l}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l)$ . Для этого удобно ввести сначала производящий функционал  $G(u, u^*)$ , связанный с функционалом  $\mathcal{F}(u, u^*)$  соотношением

$$\mathcal{F}(u, u^*) = \exp G(u, u^*). \quad (2.4.10)$$

Связь между  $g_{k,l}$  и  $G$  в случае систем, состоящих из бозонов, такова:

$$\begin{aligned} g_{k,l}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) &= \\ &= \frac{\delta^{k+l} G(u, u^*)}{\delta u^*(\mathbf{y}_1) \dots \delta u^*(\mathbf{y}_l) \delta u(\mathbf{x}_1) \dots \delta u(\mathbf{x}_k)} \Big|_{u=u^*=0}. \quad (2.4.11) \end{aligned}$$

Для систем, состоящих из фермионов корреляционные функции  $g_{k,l}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l)$  связаны с функционалом  $G$  соотношением, аналогичным соотношению (2.4.8),

$$\begin{aligned} g_{k,s}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s) &= \\ &= \frac{\delta_i^s}{\delta u^*(\mathbf{y}_1) \dots \delta u^*(\mathbf{y}_s)} \cdot \frac{\delta_r^k G(u, u^*)}{\delta u(\mathbf{x}_k) \dots \delta u(\mathbf{x}_1)} \Big|_{u=u^*=0}. \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

Принцип ослабления корреляций в терминах производящего функционала  $G$  может быть, согласно (2.4.9), записан в виде

$$G(u_X(\mathbf{x}) + u_Y(\mathbf{x})) \xrightarrow{X-Y \rightarrow \infty} G(u_X(\mathbf{x})) + G(u_Y(\mathbf{x})). \quad (2.4.13)$$

Отсюда и из (2.4.11), (2.4.12) вытекает основное свойство корреляционных функций

$$g_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \rightarrow 0 \quad (2.4.14)$$

при любом неограниченном раздвижении аргументов  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ .

Приведем примеры соотношений, связывающих функции распределения  $f_{k,l}$  с корреляционными функциями  $g_{k,l}$ , предполагая для простоты, что средние  $f_{k,l}$  отличны от нуля только при  $k=l$ . В этом случае для систем, состоящих из бозонов, справедливы, согласно (2.4.10), (2.4.11), соотношения

$$\begin{aligned} f_{1,1}(x_1; y_1) &= g_{1,1}(x_1; y_1), \\ f_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2) &= g_{1,1}(x_1; y_1) g_{1,1}(x_2; y_2) + g_{1,1}(x_1; y_2) \times \\ &\quad \times g_{1,1}(x_2; y_1) + g_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2), \quad (2.4.15) \\ &\dots \end{aligned}$$

Для систем, состоящих из фермионов, согласно (2.4.10), (2.4.12), имеют место формулы

$$\begin{aligned} f_{1,1}(x_1; y_1) &= g_{1,1}(x_1; y_1), \\ f_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2) &= g_{1,1}(x_1; y_2) g_{1,1}(x_2; y_1) - g_{1,1}(x_1; y_1) \times \\ &\quad \times g_{1,1}(x_2; y_2) + g_{2,2}(x_1, x_2; y_1, y_2), \quad (2.4.16) \\ &\dots \end{aligned}$$

Наряду с производящим функционалом для средних (2.4.1) можно ввести производящий функционал

$$\mathcal{F}(u_1, u_1^*) = \text{Sp} \rho \exp \left\{ \sum_I u_1^* a_1^+ \right\} \exp \left\{ \sum_I u_1 a_1 \right\} \quad (2.4.17)$$

для средних

$$\begin{aligned} f_{k,l}(1, \dots, k; 1', \dots, l') &= \text{Sp} \rho a_1^+ \dots a_{l'}^+ a_1 \dots a_k = \\ &= \begin{cases} \frac{\partial^{k+l} \mathcal{F}(u_1, u_1^*)}{\partial u_1^* \dots \partial u_{l'}^* \partial u_1 \dots \partial u_k} \Big|_{u=u^*=0} & \text{— для бозонов} \\ \frac{\partial^{l'}}{\partial u_{1'}^* \dots \partial u_{l'}^*} \cdot \frac{\partial^k \mathcal{F}(u_1, u_1^*)}{\partial u_k \dots \partial u_1} \Big|_{u=u^*=0} & \text{— для фермионов,} \end{cases} \end{aligned}$$

где  $a_1, a_1^+$  — операторы уничтожения и рождения частицы в состоянии 1.

В частности, если  $i \equiv (p, \sigma)$ , где  $p$  — импульс,  $\sigma$  — проекция спина, то из соотношений

$$\int d^3x u(x) \psi(x) = \sum_I u_1 a_1, \quad u(x) = (\mathcal{Y}^\sigma)^{-1/2} \sum_I u_1 \exp i p x$$

следует, что

$$\mathcal{F}(u_1, u_1^*) = \mathcal{F}(u(x), u^*(x)).$$

**2.4.2. Уравнения движения.** В предыдущем разделе мы ввели многочастичные функции распределения для квантовых систем и сформулировали для них принцип ослабления корреляций. Выведем теперь уравнения движения, которым подчиняются эти функции.

Будем исходить из уравнения (2.1.7)

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho(t)]$$

для статистического оператора  $\rho(t)$  замкнутой системы в отсутствие внешних полей и установим прежде всего уравнение движения для производящего функционала  $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}(u, u^*; t) = \text{Sp } \rho(t) \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\},$$

где  $\int u \psi \equiv \int d^3x u(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$ . Дифференцируя это выражение по  $t$  и используя (2.1.7), получим

$$i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \text{Sp } \rho(t) \left[ \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\}, \mathcal{H} \right],$$

где  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$  и  $\mathcal{H}_0$  и  $V$  определяются формулами (2.2.29). Будем для простоты рассматривать только системы, состоящие из бозонов. В этом случае величины  $u(\mathbf{x})$  и  $u^*(\mathbf{x})$  будут  $c$ -числами, и мы получим

$$i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \int d^3x (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi^*(\mathbf{x})) - \\ - \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) (\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \varphi^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)),$$

где введены обозначения

$$\varphi(\mathbf{x}) = (2m)^{-1} \text{Sp } \rho(t) \psi^+(\mathbf{x}) \Delta \psi(\mathbf{x}) \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\},$$

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{Sp } \rho(t) \psi^+(\mathbf{x}_1) \psi^+(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_2) \psi(\mathbf{x}_1) \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} \exp \left\{ \int u \psi \right\}.$$

Замечая, что из канонических перестановочных соотношений для  $\psi, \psi^+$  следует формула

$$\psi(\mathbf{x}) \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} = \exp \left\{ \int u^* \psi^+ \right\} (u^*(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x})),$$

найдем

$$\varphi(\mathbf{x}) = (2m)^{-1} \Delta_{\mathbf{x}'} \left( u^*(\mathbf{x}') + \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x}')} \right) \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x})} \mathcal{F} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}'},$$

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \left( u^*(\mathbf{x}_1) + \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x}_1)} \right) \left( u^*(\mathbf{x}_2) + \frac{\delta}{\delta u(\mathbf{x}_2)} \right) \frac{\delta}{\delta u^*(\mathbf{x}_2)} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^*(\mathbf{x}_1)}.$$

Поэтому уравнение движения для производящего функционала системы бозонов будет иметь вид [87]

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = & \frac{i}{2m} \int d^3x \left\{ \nabla u^*(x) \nabla \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u(x)} - \nabla u(x) \nabla \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u^*(x)} \right\} + \\ & + \frac{i}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 V(x_1 - x_2) \left\{ \left( u^*(x_1) + \frac{\delta}{\delta u(x_1)} \right) \left( u^*(x_2) + \frac{\delta}{\delta u(x_2)} \right) \times \right. \\ & \quad \times \frac{\delta}{\delta u^*(x_1)} \frac{\delta}{\delta u^*(x_2)} - \\ & \left. - \left( u(x_1) + \frac{\delta}{\delta u^*(x_1)} \right) \left( u(x_2) + \frac{\delta}{\delta u^*(x_2)} \right) \frac{\delta}{\delta u(x_1)} \frac{\delta}{\delta u(x_2)} \right\} \mathcal{F}. \quad (2.4.18) \end{aligned}$$

Приведем также уравнение движения для производящего функционала в импульсном пространстве, предполагая, что гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_1 \varepsilon_1 a_1^+ a_1 + \frac{1}{4\mathcal{V}^2} \sum_{1234} \Phi(12; 34) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, \quad (2.4.19)$$

где  $\varepsilon_1$  — энергия частицы (или квазичастицы) в состоянии 1 ( $1 = p_1, \sigma_1$  и  $\Phi(12; 34)$  — амплитуда, характеризующая взаимодействия частиц (или квазичастиц)). Это уравнение в случае бозонов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta t} = & i \sum_1 \varepsilon_1 \left( u_1^* \frac{\partial}{\partial u_1^*} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \right) \mathcal{F} + \frac{i}{4\mathcal{V}^2} \sum_{1234} \Phi(12; 34) \times \\ & \times \left\{ \left( u_3^* + \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \left( u_4^* + \frac{\partial}{\partial u_4} \right) \frac{\partial^2}{\partial u_1^* \partial u_2^*} - \left( u_1 + \frac{\partial}{\partial u_1^*} \right) \left( u_2 + \frac{\partial}{\partial u_2^*} \right) \frac{\partial^2}{\partial u_3 \partial u_4} \right\} \mathcal{F}. \quad (2.4.20) \end{aligned}$$

Уравнения движения для производящего функционала могут быть использованы для получения цепочки уравнений для многочастичных функций распределения. Именно, дифференцируя уравнения (2.4.18),  $k$  раз по переменной  $u^*(x_1)$  и  $l$  раз по переменной  $u(x)$  и полагая затем  $u = u^* = 0$ , получим при  $k = l$

$$\begin{aligned} \frac{\delta f_k(x_1, \dots, x_k; x'_1, \dots, x'_k)}{\delta t} = & \left\{ \frac{i}{2m} \sum_{1 \leq r \leq k} (\Delta_{x_r} - \Delta_{x'_r}) - \right. \\ & - i \sum_{1 \leq r_1 \leq r_2 \leq k} (V(x_{r_1} - x_{r_2}) - V(x'_{r_1} - x'_{r_2})) \left. \right\} f_k(x_1, \dots, x_k; x'_1, \dots, x'_k) + \\ & + \int d^3x_{k+1} \sum_{1 \leq r \leq k} (V(x_r - x_{k+1}) - V(x'_r - x'_{k+1})) \times \\ & \quad \times f_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}; x'_1, \dots, x'_{k+1}), \quad (2.4.21) \end{aligned}$$

где  $f_k \equiv f_{k,k}$ . Заметим, что так как  $[\mathcal{H}, N] = 0$ , то если в начальный момент времени при  $k \neq l$ ,  $f_{k,l} = 0$ , то  $f_{k,l}$  ( $k \neq l$ ) будет равно нулю и в последующие моменты времени.

Уравнения (2.4.21) справедливы как в случае бозонов, так и в случае фермионов. При этом в случае бозонов решения уравнений (2.4.21) должны быть симметричными относительно перестановок координат внутри каждой из групп  $x_1, \dots, x_k$  и  $x'_1, \dots, x'_k$ , а в случае фермионов — антисимметричными.

Цепочка уравнений (2.4.21) (она была впервые получена Боголюбовым [18]) является квантовомеханическим обобщением цепочки уравнений (1.1.23) для многочастичных функций распределения в случае классических систем.

В заключение этого раздела заметим, что уравнение движения для статистического оператора (2.1.7) и многочастичных функций распределения (2.4.21) линейны, тогда как принцип ослабления корреляций является нелинейным. Действительно, как видно из формулы (2.4.3), если статистические операторы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций (2.4.3), то их смесь  $\rho = w_1\rho_1 + w_2\rho_2$  ( $w_1 + w_2 = 1$ ,  $w_1 > 0$ ,  $w_2 > 0$ ) уже не будет удовлетворять этому принципу.

**2.4.3. Эргодические соотношения для квантовых систем.** Принцип ослабления корреляций определяет асимптотическое поведение многочастичных функций распределения при пространственном «раздвижении» аргументов. Но кроме этого принципа, одинаково справедливого как для классических, так и для квантовых систем, статистическая механика нуждается для своего построения еще во втором принципе, касающемся асимптотики многочастичных функций распределения в области больших времен. Этот принцип формулируется в виде эргодического соотношения, которое, так же как и принцип ослабления корреляций, справедливо как для классических, так и для квантовых систем.

Мы не будем здесь разбирать вопрос об эргодической гипотезе для квантовых систем, содержащих конечное число частиц [83], а сформулируем только эргодическое соотношение для квантовых систем с очень большим числом степеней свободы. Если  $f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l; t)$  — многочастичные функции распределения в момент времени  $t$ , то эргодическое соотношение для них имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l; t) = f_{k,l}^{(c)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l), \quad (2.4.22)$$

$$f_{k,l}^{(c)}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) =$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega \psi^+(y_1) \dots \psi^+(y_l) \dots \psi(x_k),$$

где  $\omega$  — равновесный статистический оператор Гиббса (2.4.4'). (Предполагается, что в многочастичных функциях распределения произведен термодинамический предельный переход.) Эргодическое соотношение (2.4.22) фактически становится справед-



ливым, когда время  $t$  превосходит некоторое значение  $\tau_r$ . Величину  $\tau_r$  можно назвать временем релаксации. Для пространственно-однородных систем время  $\tau_r$  определяется быстрыми микроскопическими процессами, приводящими к установлению распределения Гиббса. Для пространственно-неоднородных систем оно значительно больше, так как в основном оно определяется медленными макроскопическими процессами переноса.

Параметры  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{u}$ , входящие в распределение Гиббса, могут быть связаны с начальными значениями многочастичных функций распределения. Если, например, система была в начальный момент времени пространственно-однородной, то средние значения плотностей энергии  $\varepsilon$ , импульса  $\pi_i$  и массы  $\rho^{(m)}$  не будут зависеть ни от координат, ни от времени. Поэтому будут справедливы соотношения

$$\varepsilon_0 = \text{Sp } \omega \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \pi_0 = \text{Sp } \omega \pi(\mathbf{x}), \quad \rho_0^{(m)} = \text{Sp } \omega \rho^{(m)}(\mathbf{x}), \quad (2.4.23)$$

где величины  $\varepsilon_0$ ,  $\pi_0$ ,  $\rho_0^{(m)}$  определяются начальными многочастичными функциями распределения. Эти соотношения и устанавливают связь между параметрами  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{u}$  и начальным состоянием системы. Можно сказать, что в них содержится «память» о начальном состоянии системы.

Вспоминая определение многочастичных функций распределения (2.4.1), можно переписать эргодическое соотношение (2.4.22) в виде

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Sp } e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \psi^+(y_1) \dots \psi(x_k) = \\ = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega \psi^+(y_1) \dots \psi(x_k),$$

или сокращенно в виде

$$\rho(t) \equiv e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \omega. \quad (2.4.24)$$

К этому соотношению необходимо добавить соотношения, связывающие параметры  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $\mathbf{u}$  с начальным значением статистического оператора  $\rho(0) = \rho$ . Для пространственно-однородных систем, согласно (2.4.23), они имеют вид

$$\text{Sp } \rho \varepsilon(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega \varepsilon(\mathbf{x}), \quad \text{Sp } \rho \pi(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega \pi(\mathbf{x}), \\ \text{Sp } \rho \rho^{(m)}(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega \rho^{(m)}(\mathbf{x}). \quad (2.4.25)$$

Смысл соотношений (2.4.24), (2.4.25) состоит в том, что при  $t \gg \tau_r$  система переходит в состояние статистического равновесия, описывающегося статистическим оператором Гиббса, независимо от того, каким было начальное состояние. Подчеркнем, однако, что соотношения (2.4.24), (2.4.25) не будут иметь места при произвольном виде гамильтониана  $\mathcal{H}$ . Так же как и в классическом случае, для этого необходимо, чтобы гамильтониан  $\mathcal{H}$  имел достаточно сложную структуру, т. е. чтобы учитывались самые разнообразные взаимодействия в системе. Это

значит, что взаимодействие между частицами должны допускать существование только аддитивных интегралов движения — энергии, импульса и числа частиц. (В принципе в число этих интегралов движения входит и момент количества движения. Однако если начальное состояние является пространственно-однородным, то момент не входит в распределение Гиббса.)

Рассмотрим более подробно ситуацию, которая возникает, если система допускает существование более широкого класса аддитивных интегралов движения.

Разобьем гамильтониан системы  $\mathcal{H}$  на две части,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , где  $V$  учитывает некоторые (не обязательно все) взаимодействия между частицам. Предположим далее, что мы пренебрегли слагаемым  $V$ , т. е. заменили полный гамильтониан  $\mathcal{H}$  первым слагаемым  $\mathcal{H}_0$ , которое можно назвать усеченным гамильтонианом. Возникает вопрос, какой вид будет иметь при такой замене статистический оператор в области больших времен  $t$ . Ясно, что статистический оператор, вообще говоря, не будет в этом случае стремиться к распределению Гиббса с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . Но если предположить, что начальный статистический оператор  $\rho(0)$  удовлетворяет принципу корреляций, то, в соответствии с формулой (2.4.4), можно утверждать, что будет справедливо соотношение

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \exp\{\Omega - Y_\alpha \hat{y}_\alpha\}, \quad \rho = \rho(0). \quad (2.4.25)$$

Здесь  $\hat{y}_\alpha$  — совокупность некоторых линейно независимых операторов, которые определяются видом гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  и не зависят от  $\rho$  и  $Y_\alpha \equiv Y_\alpha(t; \rho)$  — некоторые  $c$ -числовые линейно независимые функции времени  $t$ , определяемые  $\rho$ ; наконец, величина  $\Omega$  определяется из условия нормировки

$$\text{Sp} \exp\{\Omega - Y_\alpha \hat{y}_\alpha\} = 1$$

(по индексу  $\alpha$  предполагается суммирование).

Заметим, что в соответствии с формулой (2.4.4) оператор  $Y_\alpha \hat{y}_\alpha$  должен быть аддитивным. Число операторов  $\hat{y}_\alpha$  в принципе может быть сколь угодно большим, но эти операторы не должны образовывать полной системы, так как в этом случае не произошло бы при  $t \rightarrow \infty$  никакого упрощения в описании состояния системы.

Из (2.4.26) следует, что

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t'} \exp\{\Omega - Y_\alpha(t; \rho) \hat{y}_\alpha\} e^{i\mathcal{H}_0 t'} = \exp\{\Omega - Y_\alpha(t + t'; \rho) \hat{y}_\alpha\},$$

или

$$Y_\alpha(t; \rho) e^{-i\mathcal{H}_0 t'} \hat{y}_\alpha e^{i\mathcal{H}_0 t'} = Y_\alpha(t + t'; \rho) \hat{y}_\alpha,$$

откуда

$$-iY_\alpha(t; \rho) [\mathcal{H}_0, \hat{y}_\alpha] = \dot{Y}_\alpha(t; \rho) \hat{y}_\alpha.$$

Величины  $Y_\alpha(t; \rho)$  для произвольного состояния  $\rho$  линейно не-

зависимы, поэтому должны выполняться соотношения

$$[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta} \hat{\gamma}_\beta, \quad \dot{Y}_\alpha(t; \rho) = -iY_\beta(t; \rho) a_{\beta\alpha}, \quad (2.4.27)$$

где  $a_{\alpha\beta}$  — некоторые  $c$ -числа, которые определяют только гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  и не зависят от времени  $t$  и от  $\rho$ , так как от этих величин не зависит структура операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$ .

Из соотношений (2.4.27) следует, что при любых  $t$  справедливо равенство

$$\text{Sp } e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \hat{\gamma}_\alpha = (e^{iat})_{\alpha\beta} \text{Sp } \rho \hat{\gamma}_\beta = (e^{iat} \text{Sp } \rho \hat{\gamma})_\alpha, \quad (2.4.28)$$

где  $a$  — матрица с матричными элементами  $a_{\alpha\beta}$ .

Введем теперь в рассмотрение статистический оператор

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \exp \{ \Omega(\gamma) - Y_\alpha(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha \}, \quad (2.4.29)$$

где величины  $\Omega(\gamma)$  и  $Y_\alpha(\gamma)$  определяются из условий

$$\text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha, \quad \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) = 1. \quad (2.4.30)$$

Тогда из (2.4.26), (2.4.28) следует [88]

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \rho^{(0)}(e^{iat} \text{Sp } \rho \hat{\gamma}). \quad (2.4.31)$$

Это соотношение, играющее в дальнейшем важную роль, мы будем, так же как и соотношение (2.4.24), называть эргодическим соотношением. Величины  $\gamma_\alpha$  будем называть *обобщенными термодинамическими координатами*, а величины  $Y_\alpha$  — *обобщенными термодинамическими силами*, соответствующими координатам  $\gamma_\alpha$ . Заметим, что в числе операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$  может быть также и гамильтониан  $\mathcal{H}_0$  \*).

Отметим, что статистический оператор  $\rho^{(0)}(\gamma)$  соответствует максимуму энтропии —  $\text{Sp } \rho \ln \rho$  при дополнительных условиях  $\text{Sp } \rho \hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha$ ,  $\text{Sp } \rho = 1$ .

Покажем, что операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$  образуют алгебру Ли, т. е. удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta] = f_{\alpha\beta\rho} \hat{\gamma}_\rho, \quad (2.4.32)$$

где  $f_{\alpha\beta\rho}$  — некоторые постоянные, так называемые структурные константы. Заметим с этой целью, что если операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$  и  $\hat{\gamma}_\beta$  представляют собой аддитивные операторы, то и операторы  $[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$  будут также аддитивными (см. раздел 2.2.2). Поэтому включение  $[\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]$  наряду с операторами  $\hat{\gamma}_\alpha$  в экспоненту в формуле (2.4.29) не приводит к нарушению принципа ослабления корреляции для статистического оператора  $\rho^{(0)}(\gamma)$ . С другой стороны, используя тождество Якоби

$$[\mathcal{H}_0, [\hat{\gamma}_\alpha, \hat{\gamma}_\beta]] + [\hat{\gamma}_\alpha, [\hat{\gamma}_\beta, \mathcal{H}_0]] + [\hat{\gamma}_\beta, [\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha]] = 0$$

\* ) Подчеркнем, что (2.4.31), так же как и (2.4.24), имеет смысл соотношения между многочастичными функциями распределения (при  $V \rightarrow \infty$ ), а не равенства между матричными элементами.

и формулу (2.4.27), легко видеть, что операторы  $[\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta]$  удовлетворяют перестановочным соотношениям с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , аналогичным соотношениям (2.4.27)

$$[\mathcal{H}_0, [\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta]] = a_{\beta\delta} [\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\delta] - a_{\alpha\delta} [\hat{\psi}_\beta, \hat{\psi}_\delta].$$

Поэтому операторы  $[\hat{\psi}_\alpha, \hat{\psi}_\beta]$  должны быть включены в число операторов  $\hat{\psi}_\alpha$  и, следовательно, должны выражаться через операторы  $\hat{\psi}_\alpha$ , на что и указывает формула (2.4.32).

Наличие перестановочных соотношений (2.4.27) показывает, что структура операторов  $\hat{\psi}_\alpha$  тесно связана с симметрией гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ .

Приведем примеры операторов  $\hat{\psi}_\alpha$  для некоторых конкретных видов усеченных гамильтонианов. Если усеченный гамильтониан  $\mathcal{H}_0$  совпадает с полным гамильтонианом  $\mathcal{H}$  системы, то в число операторов  $\hat{\psi}_\alpha$  входит сам гамильтониан  $\mathcal{H}$ , оператор импульса  $P$  и оператор полного числа частиц  $N$ . Матрица  $a_{\alpha\beta}$  в этом случае равна нулю.

Если усеченный гамильтониан совпадает с оператором энергии свободных частиц  $\mathcal{H}_0 = \sum_{p\sigma} \varepsilon_\sigma(p) a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}$ , где  $\varepsilon_\sigma(p)$  — энергия частицы, и  $a_{p\sigma}^+$ ,  $a_{p\sigma}$  — операторы рождения и уничтожения частицы с импульсом  $p$  и проекцией спина  $\sigma$ , то операторами  $\psi_\alpha$  в пространственно-однородном случае будут  $a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma'}$  (см. раздел 5.1.1). Матрица  $a_{\alpha\beta}$  определяется из соотношения

$$[\mathcal{H}_0, a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma'}] = (\varepsilon_\sigma(p) - \varepsilon_{\sigma'}(p)) a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma'}.$$

Для гейзенберговского идеального ферромагнетика, находящегося в магнитном поле  $H$ , операторами  $\psi_\alpha$  будут гамильтониан  $\mathcal{H}$  и оператор полного спина  $S_i$ . Матрица  $a_{\alpha\beta}$  определяется в этом случае соотношениями

$$[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0, \quad [\mathcal{H}, S_i] = -\frac{\mu}{g} \varepsilon_{ikl} S_k H_l.$$

В нашем изложении мы не останавливались на возможной взаимосвязи между принципом ослабления корреляций и существованием термодинамического предела. Эргодические соотношения также тесно связаны с принципом ослабления корреляций, но их нельзя считать независимым постулатом статистической механики, и в каждом конкретном случае (т. е. для заданного гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ ) они в принципе могут быть доказаны.

## ТЕОРИЯ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

### § 3.1. Теория слабо неидеальных квантовых газов

3.1.1. Распределения Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Конечным этапом эволюции реальной динамической системы всегда является состояние статистического равновесия, которое описывается статистическим оператором Гиббса

$$\omega = \exp\{\Omega - \beta(\mathcal{H} - \mu N)\}, \quad (3.1.1)$$

где  $\mathcal{H}$  и  $N$  — гамильтониан и оператор числа частиц системы,  $\beta$  — обратная температура,  $\mu$  — химический потенциал и  $\beta^{-1}\Omega$  — потенциал Гиббса, определяемый из условия нормировки

$$\Omega = -\ln \text{Sp} \exp\{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)\}.$$

В числе аддитивных интегралов движения в операторе Гиббса (3.1.1) мы не выписали оператора импульса  $\mathbf{P}$  и оператора момента импульса  $\mathbf{M}$ , считая для простоты, что система покоится, т. е. ее поступательная скорость  $\mathbf{u}$  и угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  равны нулю. Если  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ , то в экспоненту (3.1.1) будет входить слагаемое  $\beta\boldsymbol{\omega}\mathbf{M}$ . Так как эта величина не коммутирует с оператором импульса, то при  $\boldsymbol{\omega} \neq 0$  система будет пространственно-неоднородной.

Мы видим, что равновесное состояние покоящейся системы характеризуется только двумя независимыми переменными  $\beta$  и  $\mu$ . Распределение Гиббса (3.1.1) является основой термодинамики, которую мы не будем здесь строить, а ограничимся только изучением распределения  $\omega$  для свободных частиц и выяснением, в рамках теории возмущений, роли взаимодействия между частицами.

Для свободных частиц распределение Гиббса (3.1.1) имеет вид

$$\omega_0 = \exp\left\{\Omega_0 - \beta \sum_i (\varepsilon_i - \mu) \hat{n}_i\right\}, \quad (3.1.2)$$

где  $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$  — оператор числа частиц и  $\varepsilon_i$  — энергия частицы в индивидуальном состоянии с квантовыми числами  $i$ . Наша задача заключается в вычислении потенциала  $\Omega_0$ , средних

значений операторов  $\hat{n}_i$  и многочастичных функций распределения. Покажем, как решается эта задача для статистического оператора несколько более общего вида, чем (3.1.2), а именно, для оператора

$$\rho^{(0)} = \exp \left\{ \Omega_0 - \sum_i Y_i \hat{n}_i \right\}, \quad \text{Sp } \rho^{(0)} = 1, \quad (3.1.3)$$

где  $Y_i$  — произвольные функции  $i$ . Замечая, что

$$e^{-\Omega_0} = \text{Sp } e^{-\sum_i Y_i \hat{n}_i} = \dots \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots e^{-Y_1 n_1} e^{-Y_2 n_2} \dots = \prod_i \sum_n e^{-Y_i n},$$

где  $n_i$  и  $n$  пробегает все целочисленные неотрицательные значения в случае статистики Бозе — Эйнштейна (Б — Э) и значения 0,1 в случае статистики Ферми — Дирака (Ф — Д), получим

$$\Omega_0 = \begin{cases} \sum_i \ln(1 - e^{-Y_i}) & (\text{Б — Э}), \\ -\sum_i \ln(1 + e^{-Y_i}) & (\text{Ф — Д}). \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Поэтому числа заполнения, т. е. средние значения чисел частиц в различных состояниях  $i$  определяются формулами

$$f_i = \text{Sp } \rho^{(0)} \hat{n}_i = \frac{\partial \Omega_0}{\partial Y_i} = \begin{cases} (e^{Y_i} - 1)^{-1} & (\text{Б — Э}), \\ (e^{Y_i} + 1)^{-1} & (\text{Ф — Д}), \end{cases} \quad (3.1.5)$$

а потенциал  $\Omega_0$  — формулой

$$\Omega_0 = \begin{cases} -\sum_i \ln(1 + f_i) & (\text{Б — Э}), \\ \sum_i \ln(1 - f_i) & (\text{Ф — Д}). \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Полагая в (3.1.5)  $Y_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$ , найдем числа заполнения

$$n_i = \begin{cases} (e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1)^{-1} & (\text{Б — Э}), \\ (e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1)^{-1} & (\text{Ф — Д}) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

для идеального газа в состоянии статистического равновесия.

Заметим, что энтропия системы в состоянии, описываемом статистическим оператором  $\rho^{(0)}$ , определяемая общей формулой (3.1.3), имеет вид

$$s = -\text{Sp } \rho^{(0)} \ln \rho^{(0)} = \begin{cases} \sum_i \{(1 + f_i) \ln(1 + f_i) - f_i \ln f_i\} & (\text{Б — Э}), \\ -\sum_i \{(1 - f_i) \ln(1 - f_i) + f_i \ln f_i\} & (\text{Ф — Д}). \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Далее будет показано, что статистический оператор (3.1.3) определяет состояние неравновесного идеального газа на кинетическом этапе эволюции, когда состояние газа полностью описывается одночастичной функцией распределения. Поэтому формула (3.1.8) определяет энтропию не только равновесного, но и неравновесного газа.

Входящий в распределения (3.1.7) химический потенциал  $\mu$  может быть выражен через плотность частиц  $\nu$  и обратную температуру  $\beta$

$$\nu = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i n_i = \begin{cases} \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i (e^{\beta(e_i - \mu)} - 1)^{-1} & (\text{Б} - \text{Э}), \\ \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_i (e^{\beta(e_i - \mu)} + 1)^{-1} & (\text{Ф} - \text{Д}). \end{cases} \quad (3.1.9)$$

Для газа фермионов после предельного перехода  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  в качестве независимых переменных, характеризующих состояние идеального газа, можно выбирать любую пару величин: либо  $(\mu, \beta)$ , либо  $(\nu, \beta)$ , для газа же бозонов в области достаточно низких температур независимыми переменными могут служить только  $(\nu, \beta)$ , так как при этом  $\mu = 0$ . Действительно, для идеального газа бозонов химический потенциал  $\mu$  не может быть положительным, так как иначе число бозонов с импульсом  $p < (2m\mu)^{1/2}$  было бы отрицательным ( $i \equiv p, \sigma, p$  — импульс частицы,  $\sigma$  — проекция спина). Предположим поэтому, что  $\mu < 0$ . При этом функция  $n_p$  не имеет особенностей, и условие (3.1.9) для определения  $\mu$  приобретает вид

$$g \int_0^{\infty} dx x^2 (e^{x^2 - \beta\mu} - 1)^{-1} = 2\pi^2 \nu / (2mT)^{3/2}, \quad (3.1.10)$$

где  $T = \beta^{-1}$  и  $g = 2s + 1$  ( $s$  — спин частицы). Правая часть этого равенства при  $\mu < 0$  меньше, чем  $g \int_0^{\infty} dx x^2 (e^{x^2} - 1)^{-1} = \frac{1}{2} g \Gamma(3/2) \zeta(3/2)$  ( $\Gamma(x)$  и  $\zeta(x)$  —  $\Gamma$ -функция и  $\zeta$ -функция Римана,  $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}/2$  и  $\zeta(3/2) = 2,612 \dots$ ). Поэтому из соотношения (3.1.10) можно найти  $\mu$  как функцию  $\nu$  и  $T$  только при условии, что

$$T \geq T_0, \quad T_0 = (2m)^{-1} \left( \frac{4\pi^2 \nu}{\Gamma(3/2) \zeta(3/2) g} \right)^{2/3}. \quad (3.1.11)$$

Если  $T = T_0$ , то  $\mu = 0$ , если же  $T < T_0$ , то из условия (3.1.10) нельзя найти химический потенциал идеального газа бозонов. В этой области температур мы должны считать химический потенциал равным нулю, так как отрицательный химический потенциал недопустим. Если  $\mu = 0$  и  $T < T_0$ , то соотношение

(3.1.10) не удовлетворяется и, более того, является неправильным. Действительно, при  $\mu = 0$  функция распределения бозонов с импульсом  $p \neq 0$  по-прежнему определяется формулой

$$n_p = (e^{\beta \varepsilon_p} - 1)^{-1}, \quad \varepsilon_p = p^2/2m, \quad (3.1.12)$$

и условие (3.1.9) может быть переписано в виде

$$\mathcal{V}^{\rho-1} \sum_{p < \delta} n_p = \nu - \mathcal{V}^{\rho-1} \sum_{p > \delta} n_p,$$

где  $\delta$  — некоторый малый импульс, не зависящий от  $\mathcal{V}$ . Переходя в этой формуле к пределу  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ , получим

$$\lim_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \mathcal{V}^{\rho-1} \sum_{p < \delta} n_p = \nu - (2\pi)^{-3} \int_{p > \delta} d^3 p (e^{\beta \varepsilon_p} - 1)^{-1}.$$

Так как  $\varepsilon_p = p^2/2m$ , то в этой формуле можно сделать предельный переход  $\delta \rightarrow 0$ . В результате мы найдем число бозонов в единичном объеме с импульсом  $p = 0$ :

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} \mathcal{V}^{\rho-1} \sum_{p < \delta} n_p = \nu - (2\pi)^{-3} \int d^3 p (e^{\beta \varepsilon_p} - 1)^{-1} = \\ &= \nu \left( 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Мы видим, что в состоянии с  $p = 0$ , в отличие от состояний с  $p \neq 0$ , находится макроскопическое число бозонов. Это явление носит название явления бозе-конденсации.

Вводя плотность числа бозонов  $\nu_p$  с импульсом  $p$ ,  $\int d^3 p \nu_p = \nu$  можно записать (3.1.12), (3.1.13) в виде единой формулы

$$\nu_p = \nu \left( 1 - \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right) \delta(p) + (2\pi)^{-3} (e^{\beta \varepsilon_p} - 1)^{-1}. \quad (3.1.14)$$

В отличие от бозонов, химический потенциал газа фермионов может быть как положительным, так и отрицательным и может быть всегда выбран в качестве независимой переменной. Если температура фермионного газа значительно меньше температуры вырождения  $T_0$ :

$$T \ll T_0, \quad T_0 = m^{-1} (\nu g^{-1})^{2/3}, \quad (3.1.15)$$

то химический потенциал будет связан с плотностью числа частиц соотношением  $\mu = (6\pi^2 \nu g^{-1})^{2/3} / 2m$ . Заметим, что при  $T \ll T_0$  функция распределения фермионов  $n_p$  будет очень мало отличаться от ступенчатой функции  $n_p \approx \theta(\mu - \varepsilon_p)$ .

Рассмотрим в заключение этого раздела производящий функционал для идеального газа. Статистический оператор



идеального газа определяется формулой (3.1.3), поэтому производящий функционал имеет вид

$$\mathcal{F}(u, u^*) = e^{\Omega_0} \text{Sp} e^{-\sum_i Y_i a_i^+ a_i} \sum_i u_i^* a_i^+ \sum_i u_i a_i}. \quad (3.1.16)$$

Подчеркнем, что это выражение справедливо как для неравновесного так и для равновесного идеального газа (для равновесного газа  $Y_i = \beta(\epsilon_i - \mu)$ ).

Замечая, что независимо от характера статистики величины  $u_i a_i$  и  $u_i^* a_i^+$  при  $i \neq i'$  коммутируют друг с другом и, следовательно,

$$e^{\sum_i u_i^* a_i^+} e^{\sum_i u_i a_i} = \prod_i e^{u_i^* a_i^+} e^{u_i a_i},$$

имеем

$$e^{-\Omega_0} \mathcal{F} = \sum_{n_{i_1}} \sum_{n_{i_2}} \dots e^{-Y_{i_1} n_{i_1}} e^{-Y_{i_2} n_{i_2}} \dots,$$

$$\langle n_{i_1} | e^{u_{i_1}^* a_{i_1}^+} e^{u_{i_1} a_{i_1}} | n_{i_1} \rangle \langle n_{i_2} | e^{u_{i_2}^* a_{i_2}^+} e^{u_{i_2} a_{i_2}} | n_{i_2} \rangle \dots,$$

или

$$\mathcal{F} = e^{\Omega_0} \prod_i g_i, \quad (3.1.17)$$

$$g_i = \sum_n e^{-Y_i n} \langle n | e^{u_i^* a_i^+} e^{u_i a_i} | n \rangle$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  в случае статистики (Б — Э) и  $n = 0, 1$  в случае статистики (Ф — Д); у величин  $n_i, a_i, a_i^+$  опущен индекс  $i$ . Поэтому, согласно (3.1.17),

$$\mathcal{F} = \prod_i \frac{g_i}{\sum_n \exp(-nY_i)}. \quad (3.1.18)$$

Вычислим теперь матричный элемент

$$g_i(n) = \langle n | e^{u_i^* a_i^+} e^{u_i a_i} | n \rangle,$$

определяющий величину  $g_i$ :

$$g_i = \sum_n e^{-Y_i n} g_i(n).$$

Для бозонов

$$g_i(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{u_i^*{}^p u_i^q}{p!q!} \langle n | a_i^+{}^p a_i^q | n \rangle,$$

а так как  $|n\rangle = (n!)^{-1/2} a_i^+{}^n |0\rangle$ , то

$$a_i^q |n\rangle = \begin{cases} \left( \frac{n!}{(n-q)!} \right)^{1/2} |n-q\rangle, & n \geq q, \\ 0, & n < q, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\langle n | a^{+p} a^q | n \rangle = \delta_{pq} \frac{n!}{(n-p)!} \begin{cases} 1, & n \geq q, \\ 0, & n < q. \end{cases}$$

Поэтому

$$g_i(n) = \sum_{p=0}^n \frac{(u_i^* u_i)^p}{p!} C_n^p, \quad C_n^p = -\frac{n!}{p!(n-p)!},$$

и

$$g_i = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nY_i} \sum_{p=0}^n \frac{(u_i^* u_i)^p}{p!} C_n^p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(u_i^* u_i)^p}{p!} \sum_{n=p}^{\infty} e^{-nY_i} C_n^p.$$

Замечая далее, что

$$\sum_{n=p}^{\infty} y^n C_n^p = \frac{y^p}{(1-y)^{p+1}},$$

имеем

$$g_i = (1 - e^{-Y_i})^{-1} \exp \{u_i^* u_i f_i\},$$

где  $f_i = (e^{Y_i} - 1)^{-1}$ . Для фермионов

$$g_i = g_i(0) + g_i(1) e^{-Y_i}, \quad g_i(0) = 1, \quad g_i(1) = 1 + u_i^* u_i.$$

Поэтому

$$g_i = (1 + e^{-Y_i})(1 + u_i^* u_i f_i),$$

где  $f_i = (e^{Y_i} + 1)^{-1}$ . В результате, согласно (3.1.18), производящий функционал может быть представлен в виде

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \exp \sum_i u_i^* u_i f_i & (\text{Б} - \text{Э}), \\ \prod_i (1 + u_i^* u_i f_i) & (\text{Ф} - \text{Д}). \end{cases}$$

Так как для фермионов  $u_i u_i = 0$ , то независимо от характера статистики производящий функционал может быть записан единым образом:

$$\mathcal{F}(u, u^*) = \exp \sum_i u_i^* u_i f_i. \quad (3.1.19)$$

Заметим, что для статистического оператора

$$\rho^{(0)} = \exp \left\{ \Omega_0 - \sum_{i,i'} Y_{ii'} a_i^+ a_{i'} \right\} \quad (3.1.20)$$

производящий функционал имеет вид

$$\mathcal{F}(u, u^*) = \exp \sum_{i,i'} u_i^* u_{i'} f_{ii'}, \quad (3.1.21)$$

где  $f_{ii'} = \text{Sp} \rho^{(0)} a_i^+ a_{i'}$ .

Дифференцируя поризводящий функционал по  $u_i$  и  $u_i^*$ , можно, согласно (2.4.17), (2.4.17'), найти многочастичные функции распределения идеального газа.

**3.1.2. Термодинамическая теория возмущений.** Рассмотрим идеальные газы, мы покажем теперь, как находить поправки к статистическому оператору и функциям распределения, обусловленные взаимодействием между частицами газа, если оно невелико [80].

Записав гамильтониан системы  $\mathcal{H}$  в виде  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , где  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан свободных частиц и  $V$  — гамильтониан взаимодействия между частицами, разложим экспоненту  $\exp(-\beta\mathcal{H} + \beta\mu N)$  в ряд по степеням  $V$ . Введем для этого оператор

$$S(\lambda) = \exp\{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\} \cdot \exp\{-\lambda(\mathcal{H} - \mu N)\}.$$

Дифференцируя его по  $\lambda$ , найдем

$$\dot{S}(\lambda) = -V(\lambda)S(\lambda),$$

где  $V(\lambda) = \exp\{\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\} V \exp\{-\lambda(\mathcal{H}_0 - \mu N)\}$ . Замечая, что  $S(0) = 1$ , получим интегральное уравнение для  $S(\lambda)$

$$S(\lambda) = 1 - \int_0^\lambda d\lambda' V(\lambda') S(\lambda').$$

Раскладывая далее  $S(\lambda)$  в ряд по  $V$ :

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\lambda), \quad S_0(\lambda) = 1,$$

легко получить с помощью этого интегрального уравнения следующее выражение для  $S_n(\lambda)$ :

$$S_n(\lambda) = (-1)^n \int_0^\lambda d\lambda_1 \int_0^{\lambda_1} d\lambda_2 \dots \int_0^{\lambda_{n-1}} d\lambda V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n).$$

Поступая аналогично тому, как это делается в квантовой электродинамике [2] при разложении матрицы рассеяния, можно представить  $S_n(\lambda)$  в виде

$$S_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\lambda d\lambda_1 \dots \int_0^\lambda d\lambda_n T\{V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n)\},$$

где  $T$  — оператор упорядочения по переменной  $\lambda$ :

$$T\{V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n)\} = V(\lambda_{i_1}) \dots V(\lambda_{i_n}), \quad \lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_n}.$$

Отсюда следует, что

$$e^{-\beta(\mathcal{E}_0 - \mu N)} = e^{-\beta(\mathcal{E}_0 - \mu N)} S(\beta), \quad (3.1.22)$$

$$S(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\beta} d\lambda_1 \dots \int_0^{\beta} d\lambda_n T \{V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n)\}.$$

Термодинамический потенциал  $\Omega$  определяется формулой

$$e^{-\Omega} = \text{Sp} e^{-\beta(\mathcal{E}_0 - \mu N)} = e^{-\Omega_0} \text{Sp} \omega_0 S(\beta),$$

поэтому

$$\Omega = \Omega_0 - \ln \langle S(\beta) \rangle_0, \quad (3.1.23)$$

где  $\Omega_0$  и  $\omega_0$  — термодинамический потенциал и статистический оператор идеального газа, определяемые формулами (3.1.4), (3.1.2) и  $\langle S(\beta) \rangle_0 = \text{Sp} \omega_0 S(\beta)$ .

Из формул (3.1.22), (3.1.23) следует, что

$$\omega = e^{\Omega - \beta(\mathcal{E}_0 - \mu N)} = \frac{\omega_0 S(\beta)}{\langle S(\beta) \rangle_0}. \quad (3.1.24)$$

Поэтому среднее значение произвольного оператора  $a$  в состоянии, описываемом статистическим оператором  $\omega$ , равно

$$\text{Sp} \omega a = \frac{1}{\langle S(\beta) \rangle_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\beta} d\lambda_1 \dots \int_0^{\beta} d\lambda_n \langle T \{V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n)\} a \rangle_0, \quad (3.1.25)$$

где  $\langle \dots \rangle_0 = \text{Sp} \omega \dots$ .

Формулы (3.1.25), (3.1.23) в принципе решают поставленную задачу о нахождении поправок к статистическому оператору и термодинамическому потенциалу, обусловленных взаимодействием между частицами. Так как гамильтониан взаимодействия строится из операторов  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$ , то задача сводится к вычислению величин вида  $\text{Sp} \omega_0 T \psi^+(\mathbf{x}_1, \lambda_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n, \lambda_n)$ , где

$$\psi(\mathbf{x}, \lambda) = e^{\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)} \psi(\mathbf{x}) e^{-\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)},$$

$$\psi^+(\mathbf{x}, \lambda) = e^{\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)} \psi^+(\mathbf{x}) e^{-\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)},$$

$$T \{ \psi^+(\mathbf{x}_1, \lambda_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n, \lambda_n) \} = \delta_{\mathcal{F}} \psi(\mathbf{x}_1, \lambda_1) \dots \psi^+(\mathbf{x}_n, \lambda_n),$$

$$\lambda_{i_1} > \dots > \lambda_{i_n}$$

и  $\delta_{\mathcal{F}} = 1$  в случае бозонов и  $\delta_{\mathcal{F}} = \pm 1$  в случае фермионов ( $\delta_{\mathcal{F}} = 1$ , если перестановка  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$  четная и  $\delta_{\mathcal{F}} = -1$ , если перестановка  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \rightarrow \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$  нечетная). (Заметим, что операторы  $\psi(\mathbf{x}, \lambda)$ ,  $\psi^+(\mathbf{x}, \lambda)$  не являются эрмитово сопряженными, так как  $\lambda$  — действительная величина.)

Используя разложение  $\psi(x)$ ,  $\psi^+(x)$  по плоским волнам (2.2.18) и замечая, что

$$e^{\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)} a_p e^{-\lambda(\mathcal{E}_0 - \mu N)} = e^{-\lambda(\varepsilon_p - \mu)} a_p,$$

представим операторы  $\psi(x, \lambda)$ ,  $\psi^+(x, \lambda)$  в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \gamma^{-1/2} \sum_p a_p e^{ipx - \lambda(\varepsilon_p - \mu)}, \\ \psi^+(x, \lambda) &= \gamma^{-1/2} \sum_p a_p^\dagger e^{-ipx + \lambda(\varepsilon_p - \mu)}. \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

Введем далее связи между операторами:

$$\underline{\varphi(x_1, \lambda_1)} \chi(x_2, \lambda_2) = \text{Sp } \omega_0 T \{ \varphi(x_1, \lambda_1) \chi(x_2, \lambda_2) \},$$

где каждый из операторов  $\varphi$  и  $\chi$  может быть либо оператором рождения  $\psi^+$ , либо оператором уничтожения  $\psi$ . Замечая, что  $\text{Sp } \omega_0 a_p^\dagger a_p = n_p$ ,  $\text{Sp } \omega_0 a_p a_p = 0$  и используя разложения (3.1.26), получим

$$\begin{aligned} \underline{\psi^+(x_1, \lambda_1)} \psi(x_2, \lambda_2) &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p n_p \exp \{ ip(x_2 - x_1) - (\varepsilon_p - \mu)(\lambda_2 - \lambda_1) \}, & \lambda_1 > \lambda_2, \\ \pm \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p (1 \pm n_p) \exp \{ ip(x_2 - x_1) - (\varepsilon_p - \mu)(\lambda_2 - \lambda_1) \}, & \lambda_1 < \lambda_2, \end{cases} \\ \underline{\psi(x_1, \lambda_1)} \psi(x_2, \lambda_2) &= \underline{\psi^+(x_1, \lambda_1)} \psi^+(x_2, \lambda_2) = 0; \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

верхние знаки во второй из этих формул относятся к бозонам (предполагается, что  $T > T_0$ ), а нижние — к фермионам. Легко далее убедиться, что [1, 34]

$$\begin{aligned} \text{Sp } \omega_0 T \{ \varphi_1 \dots \varphi_{2n} \} &= \sum \delta_{\mathcal{F}} \underline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} \dots \underline{\varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}}, \\ \text{Sp } \omega_0 T \{ \varphi_1 \dots \varphi_{2n+1} \} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

где  $\varphi_i \equiv \psi(x_i, \lambda_i)$ ,  $\psi^+(x_i, \lambda_i)$  и суммирование производится по всем возможным расстановкам связей между  $2n$  операторами  $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ . (В случае бозонов  $\delta_{\mathcal{F}} = 1$ , а в случае фермионов  $\delta_{\mathcal{F}} = 1$ , если перестановка  $1, \dots, 2n \rightarrow i_1, \dots, i_{2n}$  четная и  $\delta_{\mathcal{F}} = -1$ , если перестановка  $1, \dots, 2n \rightarrow i_1, \dots, i_{2n}$  нечетная). Эти формулы аналогичны известным правилам Вика в квантовой электродинамике.

Заметим, что формулы (3.1.23), (3.1.25) могут быть преобразованы к виду [1]

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 - \langle S(\beta) \rangle_0^c = \\ &= \Omega_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\lambda_1 \dots \int_0^\beta d\lambda_n \langle T \{ V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n) \} \rangle_0^c, \\ \text{Sp } \omega a &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\beta d\lambda_1 \dots \int_0^\beta d\lambda_n \langle T \{ V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n) \} a \rangle_0^c, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

где индекс  $c$  означает, что при использовании формул (3.1.28) должны быть опущены те варианты расстановки связей в выражениях  $\langle T \{ V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n) \} \rangle_0$  и  $\langle T \{ V(\lambda_1) \dots V(\lambda_n) \} a \rangle_0$ , при которых все операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$ , содержащиеся в какой-либо группе множителей  $V(\lambda_{i_1}) \dots V(\lambda_{i_k})$ , связаны только между собой. Формулы (3.1.29) и решают задачу о нахождении поправок к термодинамическому потенциалу  $\Omega$  и многочастичным функциям распределения, обусловленных взаимодействием между частицами.

Разложения (3.1.29) допускают графическое представление (см. [1]), аналогичное диаграммному представлению в квантовой электродинамике (см. [2, 21]), но мы не будем здесь его рассматривать.

Заметим в заключение этого раздела, что формулы (3.1.28) остаются в силе, если заменить  $\omega_0$  более общим статистическим оператором (3.1.20)  $\rho^{(0)} = \exp \left\{ \Omega_0 - \sum_{i,i'} Y_{ii'} a_i^+ a_{i'} \right\}$  и понимать под связью между двумя операторами величину  $\underline{\varphi}_1 \varphi_2 = \text{Sp } \rho^{(0)} T \{ \varphi_1 \varphi_2 \}$ . Кроме того, легко видеть, что справедливы соотношения

$$\text{Sp } \rho^{(0)} \varphi_1 \dots \varphi_{2n} = \sum \delta_{\mathcal{S}} \underline{\varphi}_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}, \quad \text{Sp } \rho^{(0)} \varphi_1 \dots \varphi_{2n+1} = 0, \quad (3.1.30)$$

где  $\underline{\varphi}_1 \varphi_2 = \text{Sp } \rho^{(0)} \varphi_1 \varphi_2$  и соблюдается правило: если оператор  $\varphi_{i_1}$  стоит в левой части равенства (3.1.30) слева от оператора  $\varphi_{i_2}$ , то в связи  $\underline{\varphi}_{i_1} \varphi_{i_2}$  он также должен стоять слева.

Формулы (3.1.28), (3.1.30) можно получить также, используя явный вид производящего функционала идеального газа (3.1.21) и выражения (2.4.7), (2.4.8) для многочастичных функций распределения через производящий функционал.

**3.1.3. Квантовые вириальные разложения.** В предыдущем разделе было показано, как находить поправки к термодинамическому потенциалу и многочастичным функциям распределения, обусловленные взаимодействием, в том случае, когда взаимодействие мало.

Покажем теперь, как находить эти же величины для квантовых систем в тех случаях, когда мал радиус взаимодействия или мала плотность частиц. Напомним с этой целью, что среднее значение произвольной физической величины  $b$  в состоянии статистического равновесия определяется, согласно (3.1.24), (3.1.22), формулой

$$\langle b \rangle \equiv \text{Sp } \omega b = \langle S(\beta) b \rangle_0 / \langle S(\beta) \rangle_0, \quad S(\beta) = e^{\beta \mathcal{H}_0} e^{-\beta \mathcal{H}} \quad (3.1.31)$$

и индекс 0 служит для обозначения усреднения по состоянию равновесного идеального газа:

$$\langle \dots \rangle_0 = \text{Sp } \omega_0 \dots, \quad \omega_0 = \exp \left\{ \Omega_0 - \beta \sum_i (\varepsilon_i - \mu) a_i^+ a_i \right\}.$$

Предположим сперва, что плотность частиц является самым малым параметром. Тогда будет мал параметр  $\exp \beta \mu$  (см. (3.1.9)) и разложение термодинамических величин по степеням плотности будет эквивалентно разложению по степеням  $\exp \beta \mu$ , что в свою очередь соответствует функциональному разложению в ряд по степеням равновесной функции распределения идеального газа  $n_i$  (при  $\exp \beta \mu \ll 1$  будет справедливо неравенство  $n_i \ll 1$ ). Подчеркнем, что это разложение связано только с разложением статистического оператора идеального газа  $\omega_0$  в ряд по степеням плотности частиц или, что то же самое, функции распределения.

Имея в виду дальнейшие приложения в теории кинетических уравнений, мы произведем сейчас разложение более общего статистического оператора, а именно, оператора  $\rho^{(0)}(f)$ , соответствующего идеальному неравновесному газу (см. (3.1.3)), в ряд по степеням неравновесной функции распределения  $f(p_i) \equiv f_i$ . Для определенности мы рассмотрим случай бозонов. В этом случае, согласно формулам (3.1.3), (3.1.5), оператор  $\rho^{(0)}(f)$  имеет вид

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ - \sum_i \ln(1 + f_i) - \sum_i a_i^+ a_i \ln \frac{1 + f_i}{f_i} \right\} \quad (3.1.32)$$

или

$$\rho^{(0)}(f) = \prod_i \frac{1}{1 + f_i} \left( \frac{f_i}{1 + f_i} \right)^{a_i^+ a_i}$$

( $\rho^{(0)}(f)$  переходит в  $\omega_0$ , если  $f_i = (e^{\beta \varepsilon_i - \mu} - 1)^{-1}$ ). Используя условие полноты (2.2.9) векторов состояния  $a_1^+ \dots a_n^+ |0\rangle = |1, \dots, n\rangle$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{1 \dots n} |1, \dots, n\rangle \langle 1, \dots, n| = 1,$$

можно представить  $\rho^{(0)}(f)$  в виде

$$\rho^{(0)}(f) = \prod_i (1 + f_i)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{1 \dots n} |1, \dots, n\rangle \frac{f_1 \dots f_n}{(1+f_1) \dots (1+f_n)} \langle 1, \dots, n|.$$

Отсюда легко получить следующее разложение статистического оператора  $\rho^{(0)}(f)$  в ряд по степеням  $f$  [38]:

$$\rho^{(0)}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^{(0)}(f), \quad (3.1.33)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0^{(0)}(f) &= |0\rangle\langle 0|, & \rho_1^{(0)}(f) &= \sum_1 |1\rangle f_1 \langle 1| - \sum_1 |0\rangle f_1 \langle 0|, \\ \rho_2^{(0)}(f) &= \frac{1}{2} \sum_{12} |1, 2\rangle f_1 f_2 \langle 1, 2| - \sum_1 |1\rangle \left( f_1^2 + f_1 \sum_2 f_2 \right) \langle 1| + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left( \sum_1 f_1 \right)^2 + \sum_1 f_1^2 \right\} |0\rangle\langle 0|. \end{aligned}$$

Таким образом, членам разложения  $\rho^{(0)}(f)$  в ряд по степеням  $f$  соответствуют различные проекторы  $|0\rangle\langle 0|$ ,  $|1\rangle\langle 1|$ ,  $|1, 2\rangle\langle 1, 2|$ , ... на вакуумное состояние  $|0\rangle$ , одночастичное состояние  $|1\rangle$ , двухчастичное состояние  $|1, 2\rangle$  и т. д.

Чтобы вычислить среднее значение  $\langle b \rangle$  какого-либо оператора  $b$  в состоянии статистического равновесия  $\omega$ , достаточно в соответствии с (3.1.31) вычислить средние значения в состоянии  $\omega_0$  операторов  $S(\beta)$  и  $S(\beta)b$ . Поэтому мы прежде всего покажем, как вычислять такого рода средние. Начнем с вычисления средних значений операторов  $S(\beta)$  и  $S(\beta)b$  в состоянии  $\omega_0$  в наинизших приближениях по одночастичной функции распределения. Замечая, что

$$\mathcal{H}|0\rangle = 0, \quad \mathcal{H}|1\rangle = \mathcal{H}_0|1\rangle,$$

имеем

$$S(\beta)|0\rangle = |0\rangle, \quad S(\beta)|1\rangle = |1\rangle.$$

Учитывая далее, что для любого оператора  $B$  и любого состояния  $|\varphi\rangle$

$$\text{Sp}|\varphi\rangle\langle\varphi|B = \langle\varphi|B|\varphi\rangle,$$

получим следующее разложение  $\langle S(\beta) \rangle_0$  в ряд по степеням  $n_p$ :

$$\begin{aligned} \langle S(\beta) \rangle_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S(\beta) \rangle_0^{(k)}, & \langle S(\beta) \rangle_0^{(0)} &= 1, & \langle S(\beta) \rangle_0^{(1)} &= 0, \\ \langle S(\beta) \rangle_0^{(2)} &= -\frac{1}{2} \sum_1 n_1^2 - \frac{1}{2} \left( \sum_1 n_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{12} n_1 n_2 \langle 1, 2 | S(\beta) | 1, 2 \rangle, \end{aligned}$$

Так как  $\langle 1, 2 | 1, 2 \rangle = 1 + \delta_{12}$ , то величину  $\langle S(\beta) \rangle_0^{(2)}$  можно представить в виде

$$\langle S(\beta) \rangle_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{12} n_1 n_2 \langle 1, 2 | S(\beta) - 1 | 1, 2 \rangle.$$



Таким образом, мы получим окончательно

$$\langle S(\beta) \rangle_0 = 1 + \frac{1}{2} \sum_{12} n_1 n_2 \langle 1, 2 | S(\beta) - 1 | 1, 2 \rangle + \dots \quad (3.1.34)$$

Вычислим теперь средние значения операторов  $a_1^+ a_1$  и  $a_1^+ a_2^+ a_3 a_4$ . Согласно (3.1.31), (3.1.33) нетрудно убедиться, что средние  $\langle a_1^+ a_1 \rangle$ ,  $\langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle$  с точностью до членов, квадратичных по функции распределения  $n_p$ , определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle a_1^+ a_1 \rangle &= n_1 + n_1 \sum_2 n_2 \langle 1, 2 | S(\beta) - 1 | 1, 2 \rangle + \dots, \\ \langle a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 \rangle &= n_1 n_2 (\delta_{31} \delta_{42} + \delta_{32} \delta_{41}) + n_3 n_4 \langle 3, 4 | S(\beta) - 1 | 1, 2 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Второй член в последней формуле представляет собой с точностью до членов квадратичных по функции распределения  $n_p$  бинарную корреляционную функцию  $g_{34; 12}$

$$g_{34; 12} = n_3 n_4 \langle 3, 4 | S(\beta) - 1 | 1, 2 \rangle. \quad (3.1.36)$$

Функция распределения  $n_1$  мала в силу малости параметра  $\exp \beta \mu$ . Поэтому в главном приближении по параметру  $\exp \beta \mu$  бинарная функция распределения будет иметь вид

$$g_{34; 12} = e^{2\beta \mu} \langle 3, 4 | e^{-\beta \mathcal{H}} - e^{-\beta \mathcal{H}_0} | 1, 2 \rangle, \quad (3.1.37)$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан двух частиц с учетом их взаимодействия,  $\mathcal{H}_0$  — свободный гамильтониан двух частиц и матричный элемент берется между состояниями  $|1, 2\rangle = a_1^+ a_2^+ |0\rangle$  и  $|3, 4\rangle = a_3^+ a_4^+ |0\rangle$ . (При получении последней формулы мы учли, что  $\langle 3, 4 | \exp \beta \mathcal{H}_0 = \exp \beta (\epsilon_3 + \epsilon_4) \langle 3, 4 |$ .)

Согласно (3.1.35) одночастичная функция распределения в приближении, квадратичном по  $n_1$ , имеет вид

$$\langle a_1^+ a_1 \rangle = n_1 + \sum_2 g_{12; 12} + \dots$$

Чтобы найти термодинамический потенциал  $\Omega$ , обратимся к формуле (3.1.34). Из нее и из (3.1.23) следует, что с точностью до членов, квадратичных по  $n_1$ ,

$$\Omega = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} - \frac{1}{2} \sum_{12} g_{12; 12} + \dots$$

или

$$\Omega = \Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} - \text{Sp } g. \quad (3.1.38)$$

Здесь  $\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$  — термодинамический потенциал идеального бозе-газа  $\Omega_0 = - \sum_1 \ln(1 + n_1)$  в приближении, квадратичном по  $n_1$ :

$$\Omega_0^{(1)} = - \sum_1 n_1, \quad \Omega_0^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_1 n_1^2$$

и  $g$  — двухчастичный оператор с матричными элементами  $g_{12;34} \equiv \langle 1, 2 | g | 3, 4 \rangle$ . (При разложении по степеням  $\exp \beta \mu$  в  $\Omega_0$  должны быть удержаны только слагаемые, пропорциональные  $\exp \beta \mu$  и  $\exp 2\beta \mu$ .) Величина  $\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)}$  представляет собой термодинамический потенциал классического идеального газа с учетом первой квантовой поправки, связанной с тождественностью частиц. Величина  $\text{Sp } g$  определяет поправку к  $\Omega_0^{(1)}$ , обусловленную взаимодействием между частицами.

Заметим, что  $k$ -й член разложения  $\langle S(\beta) \rangle_0$  по степеням  $n_1$  содержит слагаемые, пропорциональные  $\mathcal{V}^k, \dots, \mathcal{V}^k$  ( $\mathcal{V}$  — объем газа). Однако члены разложения  $\ln \langle S(\beta) \rangle_0$  по степеням  $n_1$  будут пропорциональны только объему. Для нахождения потенциала  $\Omega$  необходимо вычислить  $\text{Sp } g$ . Мы вычислим эту величину, разлагая  $\text{Sp } g$  в ряд по степеням  $\exp \beta \mu$  и предполагая для простоты, что спин бозона равен нулю.

Двухчастичные состояния  $|1, 2\rangle$  можно полностью описать суммарным импульсом  $P$  частиц, относительным их моментом  $l$ , проекцией его  $m_z$  на некоторую ось и энергией относительного движения  $\varepsilon$ . Для непрерывного спектра  $\varepsilon = p^2/m$ , где  $p$  — импульс относительного движения частиц с приведенной массой  $m/2$ ; в случае дискретного спектра  $\varepsilon$  будет некоторой функцией квантовых чисел  $n$ , характеризующих связанное состояние,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ . Таким образом, спектр  $\mathcal{E}$  гамильтониана  $\mathcal{H}$  имеет вид

$$\mathcal{E} = P^2/4m + \varepsilon.$$

Для вычисления  $\text{Sp } g$  нужно знать, кроме спектра гамильтониана, плотность двухчастичных состояний непрерывного спектра. Чтобы найти ее, заметим, что радиальная волновая функция относительного движения с моментом  $l$  при большом расстоянии между частицами определяется в случае непрерывного спектра формулой

$$\psi_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sin \left( pr - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l(\varepsilon) \right),$$

где  $\delta_l(\varepsilon)$  — фаза на бесконечности. Предполагая, что частицы заключены в большой ящик шарообразной формы радиуса  $R$ , можно записать следующие условия квантования относительного импульса  $p$  (или энергии  $\varepsilon = p^2/m$ ):

$$pR - \frac{1}{2} l\pi + \delta_l(\varepsilon) = \pi s_l,$$

где  $s_l$  — произвольное целое число. Отсюда следует, что число состояний относительного движения с моментом  $l$  в интервале относительного импульса  $dp$  равно

$$ds_l = \frac{dp}{\pi} \left( R + \frac{d\delta_l(\varepsilon)}{dp} \right). \quad (3.1.39)$$

Спектр  $\mathcal{E}_0$  гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  — сплошной и определяется формулой

$$\mathcal{E}_0 = P^2/4m + p^2/m,$$

а число состояний с моментом  $l$  в интервале  $dp$  равно

$$ds_l = \frac{R}{\pi} dp. \quad (3.1.40)$$

Поэтому, согласно (3.1.37), (3.1.39), (3.1.40),

$$\begin{aligned} \text{Sp } g = e^{2\beta\mu} \sum_P \exp \left\{ -\frac{\beta P^2}{4m} \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} + \sum_l (2l+1) \int_0^\infty \frac{dp}{\pi} l^{-\frac{\beta p^2}{m}} \frac{d\delta_l(\epsilon)}{dp} \right\}, \end{aligned}$$

где  $l$  принимает только четные значения, так как волновая функция относительного движения симметрична по отношению к перестановке частиц (частицы являются бесспиновыми бозонами). Замечая, что

$$\sum_P \exp \left\{ -\frac{\beta P^2}{4m} \right\} = \mathcal{Y} \left( \frac{m}{\pi\beta} \right)^{3/2},$$

имеем

$$\text{Sp } g = \mathcal{Y} \left( \frac{m}{\pi\beta} \right)^{3/2} e^{2\beta\mu} \left\{ \sum_n e^{-\beta \epsilon_n} + \frac{1}{\pi} \sum_l (2l+1) \int_0^\infty d\epsilon e^{-\beta \epsilon} \frac{d\delta_l(\epsilon)}{d\epsilon} \right\}. \quad (3.1.41)$$

Подставляя это выражение в (3.1.38), мы и найдем термодинамический потенциал газа бозонов в случае малой плотности.

Если бы мы рассматривали газ фермионов, то, как легко убедиться, формулы (3.1.34), (3.1.35), (3.1.38) остались бы без изменения, если под  $n_i$  понимать равновесную фермиевскую функцию распределения (3.1.7), а под  $\Omega_0$  термодинамический потенциал идеального ферми-газа (3.1.6) малой плотности, т. е.

$$\Omega_0^{(1)} + \Omega_0^{(2)} = - \sum_i n_i - \frac{1}{2} \sum_i n_i^2;$$

матричные элементы от двухчастичного оператора  $g$  следует при этом брать между двухчастичными антисимметричными состояниями.

Полученные нами формулы справедливы, если среднее расстояние между частицами  $a$  велико как по сравнению с радиусом взаимодействия частиц  $r_0$ , так и по сравнению с их средней деброевской длиной волны  $\lambda$ .

Рассмотрим теперь тот случай, когда самым малым параметром является радиус взаимодействия, так что  $r_0 \ll a$ ,  $r_0 \ll \lambda$ , что же касается соотношения между  $a$  и  $\lambda$ , то оно может быть любым. В этом случае функция распределения частиц идеального газа  $n_p$  не будет мала по сравнению с единицей.

Можно показать, что в этом случае формально будут справедливы соотношения (3.1.35), (3.1.38), в которых, однако, под  $n_p$  следует понимать не максвелловскую функцию распределения, а бозевскую или фермиевскую функцию распределения; кроме того, вместо  $\Omega_i^{(1)} + \Omega_i^{(2)}$  в формулу (3.1.38) будет входить термодинамический потенциал идеального квантового газа  $\Omega_0$  [51, 39].

## § 3.2. Сверхтекучесть газа бозонов и фермионов

**3.2.1. Квазисредние.** В предыдущих разделах была развита теория возмущений для слабо неидеальных квантовых газов. Эта теория, однако, неприменима в тех случаях, когда взаимодействие между частицами приводит к существенной перестройке основного состояния или состояния статистического равновесия, в результате которой меняется симметрия состояния. Важно подчеркнуть, что такое положение может иметь место даже при сколь угодно слабом взаимодействии. В этом параграфе мы рассмотрим два примера, разъясняющих эту ситуацию. Но предвзрительно мы введем, следуя Боголюбову, понятие *квазисредних* [19].

Мы определяли средние в состоянии статистического равновесия согласно формуле

$$\langle a \rangle = \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega a, \quad \omega = \exp(\Omega - \beta(\mathcal{H} - \mu N)).$$

Однако такие средние могут оказаться неустойчивыми по отношению к бесконечно малому изменению гамильтониана. Именно, если заменить  $\mathcal{H} - \mu N \equiv H$  на  $H_\nu = \mathcal{H} - \mu N + \nu \mathcal{H}_1$  и вычислить величину

$$\{a\} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega_\nu a, \quad \omega_\nu = \exp(\Omega_\nu - \beta H_\nu), \quad (3.2.1)$$

то эта величина (она называется квазисредним значением  $a$ ) может оказаться не совпадающей с величиной  $\langle a \rangle$ , так как операции предельного перехода  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  и  $\nu \rightarrow 0$  могут быть непереставимыми в некоторой области изменения параметров  $\mu$  и  $\beta$ . Ясно, что при конечном объеме  $\omega_\nu$  является аналитической функцией  $\nu$ , так что без предельного перехода  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  квазисредние не отличались бы от средних.

Значение величины  $\{a\}$  может зависеть от структуры добавочного гамильтониана  $\nu \mathcal{H}_1$ . Чтобы разъяснить это, рассмотрим некоторую непрерывную группу симметрии «гамильтониана»  $H$ . Этой группе соответствуют генераторы  $\Gamma_i$ , коммутирующие с «гамильтонианом»  $H$ ,  $[H, \Gamma_i] = 0$ . Пусть далее некоторый оператор  $B$  инвариантен относительно преобразований этой группы, так что  $A_i \equiv [B, \Gamma_i] \neq 0$ . Тогда ясно, что среднее от оператора  $A_i$  будет равно нулю:

$$\langle A_i \rangle = 0 \quad (3.2.2)$$

С другой стороны, так как коммутатор  $[\mathcal{H}_1, \Gamma_i]$ , вообще говоря, отличен от нуля, то  $\langle A_i \rangle_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega_\nu[B, \Gamma_i] \neq 0$ . Поэтому в принципе возможно, что величина  $\langle A_i \rangle_\nu$  не будет стремиться к нулю при  $\nu \rightarrow 0$  и, вообще говоря, будет зависеть от структуры  $\mathcal{H}_1$ .

Как выше уже указывалось, различие между квазисредними и средними может иметь место в некоторой области изменения параметров  $\beta$  и  $\mu$ . Оно связано с возможностью фазовых переходов, при которых происходит изменение симметрии состояния статистического равновесия.

Рассмотрим прежде всего в качестве примера идеальный гейзенберговский ферромагнетик с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{lm} \mathcal{J}_{lm} s_l s_m,$$

где  $s_l$  — оператор спина атома, находящегося в  $l$ -м узле кристаллической решетки и  $\mathcal{J}_{lm}$  — обменный интеграл между  $l$ -м и  $m$ -м атомами. Этот гамильтониан инвариантен по отношению к группе пространственных вращений, генераторы которой совпадают с вектором суммарного спина  $\Gamma = \sum_l s_l = \mathbf{S}$ . Ясно, что  $[\mathcal{H}, \Gamma] = 0$ .

Поэтому, если в качестве оператора  $B$  взять оператор суммарного спина  $\mathbf{S}$ , то, согласно формуле (3.2.2), мы получим  $\langle [S_i, S_k] \rangle = 0$ , а так как  $[S_i, S_k] = i\epsilon_{ikh} S_l$ , то  $\langle S_i \rangle = 0$ . Это соотношение связано, очевидно, с отсутствием избранного направления в пространстве и, как видно из его вывода, справедливо при любых температурах.

Между тем хорошо известно, что ниже точки Кюри ферромагнетик обладает спонтанным намагничиванием и, следовательно, при этом все компоненты  $\langle S_i \rangle$  не могут обращаться в нуль. Это значит, что, используя обычные средние, мы не получим правильного описания состояния ферромагнетика ниже точки Кюри. С другой стороны, из физических соображений ясно, что если учесть взаимодействие ферромагнетика со сколь угодно слабым внешним магнитным полем  $H$ , то мы должны получить ниже точки Кюри отличной от нуля суммарный спин. Это значит, что

$$\lim_{H \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Sp } \mathbf{S} \exp \left\{ \Omega - \beta \left( \mathcal{H} - \frac{\mu H}{s} \mathbf{nS} \right) \right\} = \frac{s}{\mu} \mathcal{M},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный вдоль внешнего магнитного поля,  $\mathcal{M}$  — спонтанный магнитный момент. Величина  $\mathcal{M}$  представляет собой квазисреднее суммарного спина (роль параметра  $\nu$  играет абсолютная величина магнитного поля  $H$ ).

Мы видим, что, используя понятие квазисредних, можно получить правильное описание состояния ферромагнетика. Обратим внимание на то, что квазисреднее  $\langle \mathbf{S} \rangle$  зависит от  $\mathbf{n}$ , т. е. от

структуры добавочного гамильтониана  $\mathcal{H}_1$ , что уже подчеркивалось выше.

Заметим, что если бы операции  $\lim_{\nu \rightarrow \infty}$  и  $\lim_{\nu \rightarrow 0}$  были переставимы, то величина  $\mathcal{M}$  равнялась бы нулю. Именно такая ситуация имеет место выше точки Кюри.

Понятие квазисредних позволяет уточнить принцип ослабления корреляций. Дело в том, что, согласно данной нами формулировке этого принципа, среднее от произведения операторов в двух достаточно удаленных друг от друга точках пространства равно произведению средних от самих этих операторов. Между тем легко видеть, что в такой формулировке это положение может быть и неправильным. Рассмотрим, например, среднее значение произведения спинов  $\langle s_{l, i} s_{m, k} \rangle$ . Тогда при  $l - m \rightarrow \infty$  ниже точки Кюри эта величина отлична от нуля. Между тем, если бы принцип ослабления корреляций был справедлив для средних, то при  $l - m \rightarrow \infty$  эта величина равнялась бы нулю, так как  $\langle s_{l, i} \rangle = 0$ . Если, однако, заменить средние квазисредними, то справедливость принципа ослабления корреляций будет восстановлена:

$$\langle s_{l, i} s_{m, k} \rangle \xrightarrow{l-m \rightarrow \infty} \langle s_{l, i} \rangle \cdot \langle s_{m, k} \rangle.$$

В качестве второго примера рассмотрим явление бозе-конденсации. Напомним (см. раздел (3.1.1)), что это явление заключается в том, что при достаточно низких температурах число бозонов в состоянии с импульсом, равным нулю, в отличие от состояний с импульсом, не равным нулю, будет макроскопической величиной, т. е. будет пропорционально объему. Такая ситуация имеет место не только для идеального бозе-газа, но и для системы взаимодействующих друг с другом бозонов. О частицах с импульсом, равным нулю, говорят, что они образуют *бозе-конденсат*. Таким образом,  $n_0 \equiv \langle a_0^+ a_0 \rangle \sim \mathcal{V}$ . Если ввести операторы  $\alpha_0 = a_0 / \sqrt{\mathcal{V}}$ ,  $\alpha_0^+ = a_0^+ / \sqrt{\mathcal{V}}$  так, что  $\langle \alpha_0^+ \alpha_0 \rangle \sim 1$ , то они будут удовлетворять перестановочным соотношениям

$$[\alpha_0, \alpha_0^+] = 1/\mathcal{V}, \quad [\alpha_0, \alpha_p^+] = 0 \quad (p \neq 0).$$

Поэтому при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  величины  $\alpha_0$ ,  $\alpha_0^+$ , а следовательно, и  $a_0$  и  $a_0^+$ , будут вести себя как *c*-числа, которые следует считать отличными от нуля.

Между тем среднее значение оператора  $a_0$  равно нулю. Действительно, гамильтониан  $\mathcal{H}$  системы бозонов градиентно инвариантен и, следовательно, коммутирует с оператором числа частиц  $N$ . Усредняя соотношение  $[a_0, N] = a_0$  по распределению Гиббса, мы и получим равенство  $\langle a_0 \rangle = 0$ . Но, как мы только что указывали, при наличии бозе-конденсации величина  $\alpha_0$  отлична от нуля. Это противоречие устраняется, если состояние

статистического равновесия описывать с помощью квазисредних, а не средних. Действительно, определим  $\alpha_0$  как

$$\alpha_0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{V} \rightarrow \infty} (\mathcal{V})^{-1/2} \text{Sp } w_\nu a_0$$

и выберем в качестве возмущающего гамильтониана  $\nu \mathcal{H}_1 = \nu (\mathcal{V})^{1/2} (a_0 e^{i\varphi} + a_0^\dagger e^{-i\varphi})$ , где  $\varphi$  — произвольная фаза. Тогда в силу того, что возмущение  $\nu \mathcal{H}_1$  не коммутирует с оператором полного числа частиц, величина  $\alpha_0$  может быть отличной от нуля. Такая ситуация, естественно, требует непрерывности предельных переходов  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ,  $\nu \rightarrow 0$ .

Покажем теперь, что для газа бозонов при наличии конденсата, так же как и в случае ферромагнетика, принцип ослабления корреляции будет справедливым, если пользоваться понятием квазисредних, а не средних. Представим для этого среднее значение произведения операторов  $\psi^+(x_1)\psi(x_2)$  в виде

$$\begin{aligned} \langle \psi^+(x_1)\psi(x_2) \rangle &= \\ &= (\mathcal{V})^{-1} \sum_p \langle a_p^\dagger a_p \rangle e^{-ip(x_1-x_2)} = \frac{n_0}{\mathcal{V}} + \int d^3 p \nu_p e^{-ip(x_1-x_2)}, \end{aligned}$$

где  $\nu_p$  — функция распределения надконденсатных частиц,  $\nu_p = (2\pi)^{-3} \langle a_p^\dagger a_p \rangle$ ,  $p \neq 0$ . Из этой формулы видно, что

$$\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2) \rangle \xrightarrow{x_1-x_2 \rightarrow \infty} n_0/\mathcal{V}. \quad (3.2.3)$$

С другой стороны, согласно принципу ослабления корреляций при использовании средних  $\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2) \rangle \xrightarrow{x_1-x_2 \rightarrow \infty} \langle \psi^+(x_1) \rangle \times \langle \psi(x_2) \rangle$ , а так как  $\langle \psi(x) \rangle = 0$ , то величина  $\langle \psi^+(x_1)\psi(x_2) \rangle$  будет стремиться к нулю при  $x_1 - x_2 \rightarrow \infty$ , что находится в противоречии с (3.2.3). Однако если использовать вместо средних квазисредние, то никакого противоречия не возникает, так как

$$\langle \psi \rangle = (n_0/\mathcal{V})^{1/2} \exp i\varphi, \quad \langle \psi^+ \rangle = (n_0/\mathcal{V})^{1/2} \exp(-i\varphi).$$

Аналогичная ситуация имеет место и при других фазовых переходах. Например, при переходе металла из нормального состояния в сверхпроводящее средние оказываются неустойчивыми по отношению к возмущению гамильтониана, нарушающему градиентную инвариантность. Поэтому использование понятия квазисредних позволяет правильно описать также и состояние сверхпроводников ниже точки перехода.

При переходе из жидкой фазы в кристаллическую средние также оказываются неустойчивыми по отношению к возмущению гамильтониана, нарушающему трансляционную инвариантность. Поэтому и здесь следует пользоваться понятием квазисредних.

Резюмируя, можно сказать, что отличие квазисредних от средних возникает при фазовых переходах, при которых проис-

ходит уменьшение симметрии состояния статистического равновесия по сравнению с симметрией исходного гамильтониана. При этом квазисредние, вообще говоря, существенно зависят от структуры возмущающего гамильтониана, нарушающего симметрию гамильтониана системы  $\mathcal{H}$ . Если, однако, усредняемая величина имеет симметрию, совпадающую с симметрией, которая нарушается в состоянии статистического равновесия, то для нее квазисреднее не зависит от структуры возмущающего гамильтониана. В частности, термодинамический потенциал, отнесенный к единице объема, не должен зависеть от структуры возмущающего гамильтониана.

При использовании квазисредних мы будем, исходя из рассмотренных примеров, предполагать, во-первых, что предельное  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \Omega_\nu / \mathcal{V}^r$  существует и не зависит от структуры члена  $\nu \mathcal{H}_1$ , нарушающего симметрию; во-вторых, что многочастичные функции распределения (квазисредние)  $\{\psi^+(\mathbf{x}) \dots \psi(\mathbf{x}_n)\} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp } w_\nu \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n)$  существуют, причем формы, имеющие симметрию, совпадающую с симметрией, которая нарушается в состоянии статистического равновесия, не зависят от структуры члена  $\nu \mathcal{H}_1$ , нарушающего симметрию, и в-третьих, что квазисредние  $\{\psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n)\}$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций. Средние

$$\langle \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n) \rangle_\nu \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \text{Sp } w_\nu \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n)$$

при  $\nu \neq 0$  также удовлетворяют принципу ослабления корреляции, но при  $\nu = 0$  они могут ему не удовлетворять. Заметим, что ситуация, когда средние зависят от структуры бесконечно малого возмущения, имеет место и в квантовой механике. Именно, при решении стационарной задачи

$$(\mathcal{H} + \nu \mathcal{H}_1) \psi_\nu = \mathcal{E}(\nu) \psi_\nu$$

вектор состояния  $\psi_\nu$  существенно зависит от структуры  $\mathcal{H}_1$  при  $\nu \rightarrow 0$ , если уровень энергии  $\mathcal{E}(0)$  вырожден. По этой причине, если квазисредние отличаются от средних, то говорят о *вырождении состояния статистического равновесия*. Если же различие между средними и квазисредними отсутствует, то говорят, что состояние статистического равновесия *нормально* или *невырождено*.

Подчеркнем еще раз, что необходимость введения квазисредних вместо обычных средних связана с тем, что состояние статистического равновесия системы может обладать более низкой симметрией чем симметрия гамильтониана системы. На этом основании говорят о *спонтанном нарушении симметрии*. Например, кристаллическое состояние является состоянием со спонтанно нарушенной симметрией трансляций и вращений, которой обладает взаимодействие частиц.



**3.2.2. Теория сверхтекучести бозе-газа.** Развитая в разделе 3.1.2 термодинамическая теория возмущений непригодна для изучения свойств неидеального бозе-газа ниже точки конденсации даже в случае слабого взаимодействия между частицами. Это связано с тем, что в рядах теории возмущений возникают расходящиеся в области малых импульсов члены. В свою очередь эта расходимость связана с тем, что бозевская функция распределения с химическим потенциалом, равным нулю, ведет себя в области малых импульсов как  $n_p \sim 2mT/p^2$ . По этой причине изучение слабо неидеального бозе-газа требует применения специальной теории возмущений. Такая теория была разработана Боголюбовым [22].

Переходя к рассмотрению этого вопроса, напомним предварительно, что, как было уже разъяснено в разделе 2.3.4, операторы рождения и уничтожения частиц с импульсом  $\mathbf{p} = 0$  могут рассматриваться при температурах ниже точки перехода как числа. Поэтому в гамильтониане и в распределении Гиббса операторы  $a_0^+$  и  $a_0$  могут быть заменены на  $n_0^{1/2}$  ( $n_0$  — число бозонов с импульсом  $\mathbf{p} = 0$  \*). В результате гамильтониан взаимодействия между частицами

$$V = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1234} v(1-3) \delta_{1+2, 3+4} a_1^+ a_2^+ a_3 a_4,$$

где  $v(\mathbf{p})$  — преобразование Фурье энергии взаимодействия двух частиц,

$$v(\mathbf{p}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x}),$$

может быть представлен в виде

$$V \rightarrow V(n_0) = f(n_0) + \frac{df(n_0)}{dn_0} N' + n_0 V_2 + n_0^{1/2} V_3 + V_4, \quad (3.2.4)$$

где  $f(n_0) = n_0^2 v(0)/2\mathcal{V}$ ,  $N' = \sum_{1 \neq 0} a_1^+ a_1$  и

$$V_2 = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1 \neq 0} v(1) (a_1^+ a_1 + a_1^+ a_{-1}^+) + \text{э. с.},$$

$$V_3 = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{123 \neq 0} v(2) \delta_{1+2, 3} a_1^+ a_2^+ a_3 + \text{э. с.},$$

$$V_4 = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{1234 \neq 0} v(1-3) \delta_{1+2, 3+4} a_1^+ a_2^+ a_3 a_4.$$

(Гамильтониан  $V$  получается из (2.2.29) путем перехода от операторов  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$  к операторам  $a_p$ ,  $a_p^+$ .)

Операторы кинетической энергии  $\mathcal{H}_0$  и импульса  $\mathbf{P}$  частиц при замене  $a_0 \rightarrow n_0^{1/2}$ ,  $a_0^+ \rightarrow n_0^{1/2}$  не изменяются, а оператор числа

\*) Строгое доказательство этого факта дано в [19].

частиц заменяется оператором  $N(n_0) = n_0 + N'$ . В результате распределение Гиббса  $\omega$  принимает вид

$$\omega \rightarrow \omega(n_0) = \exp \{ \Omega - \beta (\mathcal{H}(n_0) - \mathbf{uP} - \mu n_0 - \mu N') \}, \quad (3.2.5)$$

где  $\mathcal{H}(n_0) = \mathcal{H}_0 + V(n_0)$  и  $\Omega$  как функция  $\beta, \mu, \mathbf{u}, n_0$  определяется из условия нормировки  $\text{Sp } \omega(n_0) = 1$  (шпур берется в пространстве чисел заполнения с импульсом  $\mathbf{p} \neq 0$ ). Мы видим, что в термодинамический потенциал  $\Omega$  величина  $n_0$  входит как произвольный параметр. Между тем ясно, что  $n_0$  — число частиц в конденсате — должно быть вполне определенной функцией  $\beta, \mu, \mathbf{u}$ . Покажем, что  $n_0$  можно найти из условия минимума потенциала  $\Omega$  [19]

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_0} = 0. \quad (3.2.6)$$

Воспользуемся для этого методом квазисредних. Согласно этому методу необходимо к гамильтониану  $\mathcal{H}$  добавить член  $\nu \mathcal{Y}^{1/2} (a_0 + a_0^+)$ , нарушающий симметрию гамильтониана относительно градиентных преобразований, и устремить  $\nu$  к нулю после термодинамического предельного перехода. Воспользовавшись тождеством

$$\text{Sp } \omega_\nu [\mathcal{H} - \mathbf{uP} - \mu N + \nu \mathcal{Y}^{1/2} (a_0 + a_0^+), a_0 - a_0^+] = 0,$$

найдем

$$2\mu n_0^{1/2} = 2\nu \mathcal{Y}^{1/2} - \text{Sp } \omega_\nu [V, a_0 - a_0^+]. \quad (3.2.7)$$

Замечая далее, что  $[a_0, a_0^+] = 1$ , получим после вычисления коммутатора  $[V, a_0 - a_0^+]$  с последующей заменой  $a_0 \rightarrow n_0^{1/2}$  и переходом к пределу  $\nu \rightarrow 0$ :

$$- \text{Sp } \omega_\nu [V, a_0 - a_0^+] \rightarrow 2n_0^{1/2} \text{Sp } \omega(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0}. \quad (3.2.8)$$

Так как, согласно (3.2.5),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n_0} = -\beta \left\{ \mu - \text{Sp } \omega(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0} \right\},$$

то из (3.2.7), (3.2.8) следует условие (3.2.6), а также то, что

$$\mu = \text{Sp } \omega(n_0) \frac{\partial V(n_0)}{\partial n_0}. \quad (3.2.6')$$

Полученные до сих пор соотношения являются точными.

Предположим теперь, что взаимодействие между частицами является слабым, а температура достаточно низкой. В этом случае  $n_0/\mathcal{Y}$  будет большим параметром, так как при  $T \rightarrow 0$  и  $\nu(\mathbf{p}) \rightarrow 0$  все частицы принадлежат конденсату. Поэтому наибольшим слагаемым в выражении (3.2.4) будет  $f(n_0)$ , а следующими по величине будут  $N' \partial f / \partial n_0$  и  $n_0 V_2$ . Слагаемые же  $n_0^{1/2} V_3, V_4$  мы опустим, так как их следует учитывать только при рассмот-

рени взаимодействия между квазичастицами, которые будут сейчас введены.

Считая  $n_0$  независимой переменной и заменяя в формуле (3.2.6')  $V(n_0)$  на  $f(n_0)$ , найдем химический потенциал как функцию  $n_0$  в главном приближении (при низких температурах и слабом взаимодействии между частицами):

$$\mu(n_0) \approx \frac{\partial f(n_0)}{\partial n_0} = \frac{n_0}{\mathcal{V}} \nu(0). \quad (3.2.9)$$

Используя это выражение и пренебрегая в  $V(n_0)$  слагаемым  $n_0^{1/2}V_3 + V_4$ , получим

$$\omega(n_0) \approx \omega_0(n_0) = \exp\{\Omega_0 - \beta(\mathcal{H}_q(n_0) - \mu P)\},$$

где

$$\mathcal{H}_q(n_0) = \mathcal{H}_0 + n_0 V_2 - f(n_0) \quad (3.2.10)$$

и  $\Omega_0$  определяется из условия нормировки  $\text{Sp } \omega_0(n_0) = 1$ . Заметим, что потенциал  $\Omega$  в формуле (3.2.5) в рассматриваемом приближении совпадает с потенциалом  $\Omega_0$ .

Используя далее явное выражение (3.2.4) для  $V_2$ , представим  $\mathcal{H}_q(n_0)$  в виде

$$\mathcal{H}_q(n_0) = \sum_{l \neq 0} \left\{ \alpha_l a_l^+ a_l + \frac{1}{2} \beta_l (a_l^+ a_{-l}^+ + a_l a_{-l}) \right\} - f(n_0), \quad (3.2.11)$$

где  $\alpha_l = \varepsilon_l + \beta_l$ ,  $\varepsilon_l = p_l^2/2m$ ,  $\beta_l = \nu(1) n_0/\mathcal{V}$ .

Найдем теперь такое унитарное преобразование  $U(UU^+ = 1)$ , которое диагонализует этот оператор

$$U \mathcal{H}_q(n_0) U^+ = \sum_{l \neq 0} \omega_l a_l^+ a_l + E_0, \quad (3.2.12)$$

где  $E_0$  — энергия основного состояния для  $\mathcal{H}_q(n_0)$  и  $\omega_l$  — спектр энергии квазичастиц. Легко видеть, что для диагонализации  $\mathcal{H}_q(n_0)$  достаточно ограничиться унитарными операторами  $U$ , перепутывающими операторы  $a_l$  и  $a_{-l}^+$  [22]:

$$\begin{aligned} U a_l U^+ &= a_l \text{ch } \varphi_l + a_{-l}^+ \text{sh } \varphi_l, \\ U a_l^+ U^+ &= a_l^+ \text{ch } \varphi_l + a_{-l} \text{sh } \varphi_l, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где  $\varphi_l$  — некоторая подлежащая определению величина. Ясно, что такой унитарный оператор существует, так как операторы  $a_l \text{ch } \varphi_l + a_{-l}^+ \text{sh } \varphi_l$  и  $a_l^+ \text{ch } \varphi_l + a_{-l} \text{sh } \varphi_l$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы  $a_l$  и  $a_l^+$ . Замечая, что

$$[U a_l U^+, a_l] = -\delta_{l, -l'} \text{sh } \varphi_l, \quad [U a_l^+ U^+, a_l] = -\delta_{l, l'} \text{ch } \varphi_l$$

и, следовательно, согласно (3.2.11), (3.2.13),

$$[U\mathcal{H}_q(n_0)U^+, a_1] = -(\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1) a_{-1}^+ - \\ - (\alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \varphi_1) a_1 = \omega_1 a_1,$$

получим

$$\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1 = 0, \quad \alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{sh} \varphi_1 = \omega_1,$$

откуда

$$\omega_1 = (\alpha_1^2 - \beta_1^2)^{1/2}, \quad \operatorname{th} \varphi_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1}. \quad (3.2.14)$$

Из формул (3.2.13) следует также, что

$$UPU^+ = P$$

(мы учли, что  $\varphi_1 = \varphi_{-1}$ ), и поэтому

$$U\omega_0(n_0)U^+ = \exp \left\{ \tilde{\Omega}_0 - \beta \sum_1 (\omega_1 - p_1 u) a_1^+ a_1, \right. \\ \left. \tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 - \beta E_0. \right. \quad (3.2.15)$$

Чтобы определить энергию основного состояния  $E_0$ , рассмотрим вектор состояния  $|0\rangle$ , в котором отсутствуют надконденсатные частицы:

$$a_1 |0\rangle = 0. \quad (3.2.16)$$

Усредняя соотношение (3.2.12) по этому состоянию и используя формулы (3.2.13), найдем

$$E_0 = -f(n_0) + \sum_1 (\alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + \beta_1 \operatorname{ch} \varphi_1) \operatorname{sh} \varphi_1.$$

Определим теперь унитарный оператор  $U$ . Дифференцируя соотношения (3.2.13) по  $\varphi_1$ , получим

$$\left[ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} U^+, U a_1 U^+ \right] = a_1 \operatorname{sh} \varphi_1 + a_{-1}^+ \operatorname{ch} \varphi_1, \\ \left[ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} U^+, U a_1^+ U^+ \right] = a_1^+ \operatorname{sh} \varphi_1 + a_{-1} \operatorname{ch} \varphi_1.$$

Используя снова соотношения (3.2.13), найдем

$$\left[ U^+ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}, a_1 \right] = a_{-1}^+, \quad \left[ U^+ \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}, a_1^+ \right] = a_{-1},$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = -U (a_1^+ a_{-1}^+ - a_1 a_{-1})$$

и, следовательно,

$$U = \exp \frac{1}{2} \sum_1 \varphi_1 (a_1 a_{-1} - a_1^+ a_{-1}^+), \quad \varphi_1 = \varphi_{-1}. \quad (3.2.17)$$

Имея выражение для  $U$ , можно построить вектор основного состояния системы. Этот вектор, который будем обозначать

через  $|0\rangle$ , удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}_q(n_0)|0\rangle = E_0|0\rangle$$

и, следовательно, согласно (3.2.12), имеет вид

$$|0\rangle = U^+|0\rangle, \quad (3.2.18)$$

где  $|0\rangle$  — вектор состояния (3.2.16).

Так как собственные значения оператора  $a_1^+a_1$  равны 0, 1, 2, ..., то величина  $\omega_1$ , входящая в формулу (3.2.12), определяет, как уже упоминалось, спектр элементарных бозе-возбуждений. Учитывая формулы (3.2.11), величину  $\omega_1 = \omega_p$ , можно представить в виде

$$\omega_p = \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{n_0}{\mathcal{V}} \frac{v(p)}{m} p^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.2.19)$$

Мы видим, что в области больших  $p$  спектр элементарных возбуждений совпадает с энергией свободной частицы. В области же малых  $p$  спектр совпадает с фононным спектром:

$$\omega_p = cp, \quad c = \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \frac{v(0)}{m} \right)^{1/2}.$$

Величина  $c$ , как нетрудно показать [18], совпадает со скоростью звука при абсолютном нуле в слабонеидеальном бозе-газе.

Заметим, что величина  $\omega_p$  должна быть вещественной при всех  $p$ . Поэтому должно выполняться условие  $v(0) > 0$ , которое является условием устойчивости основного состояния рассматриваемой системы и означает, что силы отталкивания в среднем доминируют над силами притяжения.

Определим число частиц  $n_1$  с импульсом  $p_1$  в состоянии статистического равновесия, которому соответствует статистический оператор  $w_0(n_0)$ . Это число определяется, очевидно, формулой

$$n_1 = \text{Sp } w_0(n_0) a_1^+ a_1 = \text{Sp } U w_0(n_0) U^+ U a_1^+ a_1 U^+.$$

Используя соотношения (3.2.13), (3.2.15), получим

$$n_1 = \bar{n}_1 + (1 + \bar{n}_1 + \bar{n}_{-1}) \text{sh}^2 \varphi_1, \quad (3.2.20)$$

где

$$\bar{n}_1 = (\exp \beta (\omega_1 - p_1 u) - 1)^{-1}. \quad (3.2.21)$$

Величина  $\bar{n}_1$  представляет собой функцию распределения квазичастиц. Поскольку система отсчета у нас фиксирована (в ней покоится конденсат), то величину  $u \equiv u_n$  следует интерпретировать как скорость газа квазичастиц относительно конденсата. Эта скорость называется *скоростью нормальной компоненты бозе-газа*.

Импульс бозе-газа  $P$  равен, очевидно,

$$P = \text{Sp } w_0(n_0) P = \sum_p p n_p, \quad (3.2.22)$$

т. е., согласно (3.2.20),

$$P = \sum_p p \tilde{n}_p. \quad (3.2.23)$$

Таким образом, импульс бозе-газа равен импульсу газа квазичастиц.

Подставляя в (3.2.23) распределение (3.2.21), получим

$$P = \mathcal{V} \rho_n^{(m)} u_n, \quad \rho_n^{(m)} = (2\pi)^{-3} u_n^{-2} \int d^3 p p u_n \tilde{n}_p.$$

Величину  $\rho_n^{(m)}$  можно интерпретировать как *плотность нормальной компоненты* неидеального бозе-газа, т. е. как плотность газа квазичастиц. Величина же  $\rho_s^{(m)} = \rho^{(m)} - \rho_n^{(m)}$ , где  $\rho^{(m)}$  — плотность газа, интерпретируется как *плотность сверхтекучей компоненты* бозе-газа. (В системе отсчета, где конденсат покоится, скорость сверхтекучей  $u_s$  составляющей равна нулю.)

Отметим, что для того, чтобы распределение Гиббса (3.2.15) имело смысл и в, частности, чтобы величина  $\tilde{n}_p$  была больше нуля, необходимо выполнение при любом  $p$  неравенства

$$\omega_p - pu > 0.$$

Отсюда следует, что

$$u < u_0, \quad u_0 = \min_p \frac{\omega_p}{p}. \quad (3.2.24)$$

Только при таких значениях скорости нормальной составляющей (в системе покоя сверхтекучей компоненты) будет существовать явление *сверхтекучести*. Феноменологическая теория этого явления была развита Ландау [71].

Выясним теперь характер основного состояния  $|0\rangle$ . Определим с этой целью величину

$$L = \langle 0 | \exp \sum_1 \xi_1 a_1^+ | 0 \rangle = \langle 0 | U \exp \sum_1 \xi_1 a_1^+ | 0 \rangle. \quad (3.2.25)$$

Дифференцирование  $L$  по  $\xi$  позволит найти величины  $\langle 0 | a_1^+, \dots, a_n^+ | 0 \rangle$ , которые представляют собой амплитуды вероятности нахождения в основном состоянии заданного набора надконденсатных частиц. Дифференцируя  $L$  по  $\varphi_1$  (от  $\varphi_1$  зависит оператор  $U$ ) и используя формулу (3.2.17), получим

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = - \langle 0 | U (a_1^+ a_{-1}^+ - a_1 a_{-1}) \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle,$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \langle 0 | a_1 a_{-1} U \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle. \quad (3.2.26)$$

Учитывая далее соотношения (3.2.13) и (3.2.25), (3.2.26), имеем

$$\langle 0 | U a_1 a_{-1} \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle = \xi_1 \xi_{-1} L,$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | U a_1^+ a_{-1}^+ \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle = \\ = \text{sh}^2 \varphi_1 \langle 0 | a_{-1} a_1 U \exp \sum_2 \xi_2 a_2^+ | 0 \rangle + \text{sh} \varphi_1 \text{ch} \varphi_1 = \\ = \text{sh}^2 \varphi_1 \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} + \text{sh} \varphi_1 \text{ch} \varphi_1 L. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \left( \frac{\xi_1 \xi_{-1}}{\text{ch}^2 \varphi_1} - \text{th} \varphi_1 \right) L.$$

Интегрируя это уравнение и замечая, что  $L|_{\varphi_1=0} = 1$ , найдем окончательно

$$L = L_0 \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_1 \xi_1 \xi_{-1} \text{th} \varphi_1 \right\}, \quad L_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_1 \ln \text{ch} \varphi_1 \right\}. \quad (3.2.27)$$

Величина  $L_0^2$  представляет собой, очевидно, вероятность того, что в основном состоянии нет надконденсатных частиц. Эта величина равна

$$L_0^2 = \rho^N, \quad \rho = \exp \left\{ -\frac{v_0}{(2\pi)^3} \int d^3 p_1 \ln \text{ch} \varphi_1 \right\},$$

где  $v_0$  — объем, приходящийся на одну частицу, и  $N$  — суммарное число частиц. Мы видим, что при  $N \rightarrow \infty$  эта вероятность стремится, как и должно быть, к нулю\*).

Из формулы (3.2.27) видно, что вероятность нахождения в основном состоянии совокупности надконденсатных частиц с импульсами  $p_1, \dots, p_n$  отлична от нуля только в том случае, если  $n$  — четное число, и частицы могут быть разбиты на пары с разными, но противоположно направленными импульсами. В частности, вероятность нахождения в основном состоянии пары надконденсатных частиц с импульсами  $p$  и  $-p$  равна  $L_0^2 \text{th}^2 \varphi_p$ . Таким образом,  $\text{th}^2 \varphi_p$  представляет собой относительную вероятность нахождения в основном состоянии пары частиц с импульсами  $p$  и  $-p$ .

Введенные нами квазичастицы не являются идеальным газом, а взаимодействуют между собой\*\*). Это взаимодействие

\*) С этим обстоятельством тесно связан тот факт, что унитарный оператор  $U$  существует только до вычисления термодинамического предела  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ , так как при  $N \rightarrow \infty$   $\langle 0 | a_1^+ \dots a_n^+ | 0 \rangle = 0$

\*\*\*) Подробное исследование физических процессов, связанных с этим взаимодействием дано в монографии [114].

можно исследовать, если учесть члены  $n_0^{1/2}V_3$ ,  $V_4$  в гамильтониане  $\mathcal{H}(n_0)$ . Мы не будем однако здесь этим заниматься \*)

**3.2.3. Теория сверхтекучести ферми-газа и явление сверхпроводимости.** Как известно, между электронами проводимости в металле существует своеобразное взаимодействие, связанное с обменом фононами. Это взаимодействие приводит к корреляции между электронами, обладающими противоположно направленными импульсами и спинами. В результате такой корреляции между основным состоянием системы электронов и ее возбужденными состояниями может возникать энергетическая щель, существование которой объясняет явление сверхпроводимости.

Основная физическая идея, разъясняющая явление сверхпроводимости — образование «пар» электронов с противоположно ориентированными спинами и импульсами, — была впервые высказана Купером [69]. На основании этой идеи Бардиным, Купером и Шриффером была развита теория сверхпроводимости [15]. Почти одновременно Боголюбовым был развит другой метод исследования сверхпроводимости, основанный на глубокой физической и математической аналогии явления сверхпроводимости с явлением сверхтекучести. В частности Боголюбовым были получены так называемые *уравнения Боголюбова* [23, 24, 52], в которых обобщается метод самосогласованного поля Хартри — Фока на случай систем со спонтанно нарушенной симметрией. Эти уравнения позволяют исследовать пространственно-неоднородные состояния сверхпроводников.

Обращаясь к исследованию взаимодействия между электронами, обусловленному обменом фононами, заметим, что оно не может быть описано с помощью понятия потенциальной энергии взаимодействия электронов, так как в действительности электроны и фононы надо рассматривать как единую динамическую систему. Мы, однако, не будем здесь заниматься этой задачей, а ограничимся рассмотрением некоторой модели, в которой фермионы со спином  $1/2$  взаимодействуют друг с другом, причем это взаимодействие может быть описано потенциальной энергией  $V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ , зависящей только от разностей пространственных координат частиц и не зависящей от их спинов. В этой модели гамильтониан взаимодействия частиц имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_{\sigma_1}^+(\mathbf{x}_1) \psi_{\sigma_1}^+(\mathbf{x}_2) V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \psi_{\sigma_2}(\mathbf{x}_2) \psi_{\sigma_1}(\mathbf{x}_1) \quad (3.2.28)$$

(по повторяющимся спиновым индексам предполагается суммирование).

Вводя обозначение

$$\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \int d^3X \psi_{\sigma_2}\left(\mathbf{X} - \frac{\mathbf{x}}{2}\right) \psi_{\sigma_1}\left(\mathbf{X} + \frac{\mathbf{x}}{2}\right) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{x}} \quad (3.2.29)$$

\*) Математическое рассмотрение этого вопроса можно найти в монографии [108].



и замечая, что

$$\psi_{\sigma_2} \left( \mathbf{X} - \frac{\mathbf{x}}{2} \right) \psi_{\sigma_1} \left( \mathbf{X} + \frac{\mathbf{x}}{2} \right) = \sum_q \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \exp i\mathbf{q}\mathbf{X},$$

перепишем  $V$  в виде

$$V = \frac{1}{2} \mathcal{V} \int d^3x \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+(0, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(0, \mathbf{x}) + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (3.2.30)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \mathcal{V} \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \int d^3x \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+(\mathbf{q}, \mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}(\mathbf{q}, \mathbf{x}). \quad (3.2.31)$$

Наша задача заключается в исследовании состояния статистического равновесия системы фермионов с гамильтонианом  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ . ( $\mathcal{H}_0$  — оператор кинетической энергии, определяемый формулой (2.2.29).) При решении этой задачи надо учитывать тот факт, что при фазовых переходах симметрия состояния статистического равновесия может стать ниже, чем симметрия гамильтониана  $\mathcal{H}$ . Для учета этого обстоятельства следует, согласно методу квазисредних, нарушить симметрию исходного гамильтониана  $\mathcal{H}$ , добавив к нему слагаемое  $\delta\mathcal{H} = \nu\mathcal{H}_1$ , где  $\mathcal{H}_1$  обладает только теми элементами симметрии, которые не нарушаются при фазовом переходе. После термодинамического предельного перехода в средних значениях операторов физических величин следует устремить параметр  $\nu$  к нулю. Исходный гамильтониан, очевидно, инвариантен по отношению к преобразованиям трансляции, поворотов спинов, а также к градиентным преобразованиям  $\psi(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \exp i\alpha$ . Мы будем считать, что при переходе из нормального в сверхпроводящее (сверхтекучее) состояние происходит нарушение только градиентной инвариантности, хотя в действительности могут быть сверхпроводящие состояния, в которых нарушается также трансляционная инвариантность (сверхпроводимость при наличии кристаллической решетки) и инвариантность по отношению к поворотам спинов (сверхпроводимость при наличии магнитного упорядочения). Чтобы учесть нарушение градиентной инвариантности, выберем  $\mathcal{H}_1$  в виде

$$\mathcal{H}_1 = \int d^3x_1 d^3x_2 \psi_{\sigma_1}^+(\mathbf{x}_1) \psi_{\sigma_2}^+(\mathbf{x}_2) \chi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \text{э. с.},$$

где  $\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  — некоторая функция разности  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , зависящая от спиновых индексов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Ясно, что  $\mathcal{H}_1$  нарушает симметрию по отношению к градиентным преобразованиям, но не нарушает трансляционной инвариантности. Для того чтобы не нарушалась также инвариантность и по отношению к вращениям спинов, необходимо выбрать  $\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$  в виде

$$\chi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \chi_{\sigma_1, \sigma_2}, \quad (3.2.32)$$

где  $f(\mathbf{x})$  — некоторая функция  $\mathbf{x}$ , не зависящая от спиновых индексов и  $\chi_{\sigma_1, \sigma_2} = -\chi_{\sigma_2, \sigma_1}$ ,  $\chi_{-1/2, 1/2} = 1$ . Действительно, произвольное вращение спинов может быть описано с помощью унитарного преобразования  $U$ :

$$\psi_{\sigma}(\mathbf{x}) \rightarrow \psi'_{\sigma}(\mathbf{x}) = R_{\sigma, \sigma'} \psi_{\sigma'}(\mathbf{x}) = U \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) U^+, \quad (3.2.33)$$

где  $R_{\sigma, \sigma'}$  — произвольная унитарная двухрядная матрица с детерминантом, равным единице. Легко видеть, что это преобразование оставляет инвариантным гамильтониан  $\mathcal{H}$ ,  $U \mathcal{H} U^+ = \mathcal{H}$ . Для того чтобы оператор  $\mathcal{H}_1$  был также инвариантен относительно этого преобразования, должно выполняться соотношение

$$R_{\sigma_1, \sigma'_1} R_{\sigma_2, \sigma'_2} \chi_{\sigma'_1, \sigma'_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \chi_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

откуда и следует формула (3.2.32).

Таким образом, состояние статистического равновесия, согласно методу квазисредних, следует описывать статистическим оператором

$$w_{\nu} = \exp \{ \Omega - \beta (\mathcal{H} + \nu \mathcal{H}_1 - \mathbf{uP} - \mu N) \}. \quad (3.2.34)$$

Предполагая, что этот оператор в термодинамическом пределе удовлетворяет принципу ослабления корреляций, можно считать  $A_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x})$   $c$ -числом, равным

$$A_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x}) = \text{Sp } w_{\nu} \hat{A}_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x}). \quad (3.2.35)$$

Действительно, в интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{-1} \int_{\mathcal{X}} d^3 X \text{Sp } w_{\nu} \psi_{\sigma} \left( \mathbf{X} - \frac{\mathbf{x}}{2} \right) \psi_{\sigma'} \left( \mathbf{X} + \frac{\mathbf{x}}{2} \right) \psi^+ (\mathbf{x}_1) \dots \psi (\mathbf{x}_n) = \\ = \text{Sp } w_{\nu} \hat{A}_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x}) \psi^+ (\mathbf{x}_1) \dots \psi (\mathbf{x}_n) \end{aligned}$$

в пределе  $\mathcal{Y} \rightarrow \infty$  вносят вклад только бесконечно удаленные точки  $\mathbf{X}$ . Поэтому, согласно принципу ослабления корреляций,

$$\begin{aligned} \text{Sp } w_{\nu} \hat{A}_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x}) \psi^+ (\mathbf{x}_1) \dots \psi (\mathbf{x}_n) \xrightarrow{\mathcal{Y} \rightarrow \infty} \\ \xrightarrow{\mathcal{Y} \rightarrow \infty} A_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x}) \text{Sp } w_{\nu} \psi^+ (\mathbf{x}_1) \dots \psi (\mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

где  $A_{\sigma, \sigma'}(0, \mathbf{x})$  определяется формулой (3.2.35). Представим теперь первое слагаемое в формуле (3.2.30) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{Y} \int d^3 x V(\mathbf{x}) (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+ (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x})) (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x})) + \\ + \frac{1}{2} \mathcal{Y} \int d^3 x V(\mathbf{x}) \{ \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+ (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) + \\ + \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x}) \} - \\ - \frac{1}{2} \mathcal{Y} \int d^3 x V(\mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Замечая, что, согласно принципу ослабления корреляций и определению (3.2.29),

$$\text{Sp } \omega_{\nu} (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+ (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x})) (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x})) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0,$$

заменяем в выражении для  $\omega_{\nu}$  гамильтониан  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{V} \int d^3 x V(\mathbf{x}) \{ \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+ (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) + \\ + \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x}) \} + \mathcal{H}_{\text{int}} + E_0,$$

где  $E_0 = -1/2 \mathcal{V} \int d^3 x V(\mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x}) A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x})$ . Этот эффективный «гамильтониан», очевидно, не является градиентно-инвариантным, и поэтому, заменяя в статистическом операторе Гиббса  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , можно положить  $\nu = 0$ .

Замену в термодинамическом пределе гамильтониана  $\mathcal{H}$  в распределении Гиббса на  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  можно более строго обосновать, подобно тому как это сделано для бозе-систем в работе [19], рассматривая уравнения движения для функций Грина (4.1.16) (см. § 4.1). При этом оказывается, что слагаемое

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \mathcal{V} \int d^3 x V(\mathbf{x}) (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1}^+ (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1}^* (0, \mathbf{x})) \times \\ \times (\hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) - A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}))$$

не дает вклада в уравнения движения для функций Грина в термодинамическом пределе  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ .

Учитывая, что оператор  $\omega_{\nu}$ , определяемый формулой (3.2.34), коммутирует с оператором  $U$ , получим, согласно (3.2.29), (3.2.33),

$$A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) = \text{Sp } \omega_{\nu} U \hat{A}_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) U^+ = R_{\sigma_2 \sigma_2'} R_{\sigma_1 \sigma_1'} A_{\sigma_2' \sigma_1'} (0, \mathbf{x}),$$

откуда следует, что

$$A_{\sigma_2, \sigma_1} (0, \mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \chi_{\sigma_2, \sigma_1},$$

где  $C(\mathbf{x})$  — некоторая функция  $\mathbf{x}$ . Считая, что функция  $C(\mathbf{x})$  вещественна, перепишем  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  в виде

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \mathcal{H}_q(\Delta) + \mathcal{H}_{\text{int}},$$

где

$$\mathcal{H}_q(\Delta) = \frac{1}{2m} \int d^3 x \nabla \psi_{\sigma}^+ (\mathbf{x}) \nabla \psi_{\sigma} (\mathbf{x}) - \\ - \int d^3 x_1 d^3 x_2 \Delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \left\{ \psi_{-\frac{1}{2}}^+ (\mathbf{x}_1) \psi_{\frac{1}{2}}^+ (\mathbf{x}_2) + \psi_{\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_2) \psi_{-\frac{1}{2}} (\mathbf{x}_1) \right\} + E_0$$

и

$$\Delta(\mathbf{x}) = -V(\mathbf{x}) C(\mathbf{x}). \quad (3.2.36)$$

Функция  $C(x)$ , согласно (3.2.35), определяется из уравнения

$$C(x) = \text{Sp } \omega(\Delta) \psi_{-\frac{1}{2}}(0) \psi_{\frac{1}{2}}(x), \quad (3.2.37)$$

в котором  $\omega(\Delta)$  — представляет собой статистический оператор, соответствующий гамильтониану  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ :

$$\omega(\Delta) = \exp\{\Omega - \beta(\mathcal{H}_{\text{eff}} - u\mathbf{P} - \mu N)\}. \quad (3.2.38)$$

Рассматривая  $\Delta(x)$  как свободный параметр, легко видеть, используя формулу (3.2.36), а также соотношение

$$\Omega \equiv \Omega(\Delta, \beta, \mu) = -\text{Ln Sp } \exp\{-\beta(\mathcal{H}_{\text{eff}} - u\mathbf{P} - \mu N)\},$$

что выражение (3.2.37) для  $C(x)$  минимизирует термодинамический потенциал

$$\delta_{\Delta} \Omega(\Delta, \beta, \mu) = 0.$$

Это соотношение аналогично уравнению (3.2.6) в теории вырожденного бозе-газа.

Переходя от операторов  $\psi_{\sigma}(x)$  к операторам  $a_{p, \frac{1}{2}} \equiv a_p$ ,  $a_{p, -\frac{1}{2}} \equiv b_p$ :

$$\psi_{\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{Y}^{-1/2} \sum_p a_p e^{ipx}, \quad \psi_{-\frac{1}{2}}(x) = \mathcal{Y}^{-1/2} \sum_p b_p e^{-ipx},$$

перепишем выражение для  $\mathcal{H}_q(\Delta)$  в виде

$$\mathcal{H}_q(\Delta) = \sum_p \frac{p^2}{2m} (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p) - \sum_p \Delta(p) (a_p^+ b_{-p}^+ + b_{-p} a_p) + E_0,$$

где

$$\Delta(p) = \int d^3x \Delta(x) e^{-ipx} = - \int d^3x V(x) C(x) e^{-ipx}.$$

(Отметим, что, согласно (3.2.37), (3.2.38),  $\Delta(p) = \Delta(-p)$ .)

Вопрос теперь заключается в том, чтобы выяснить структуру спектра оператора  $\mathcal{H}_{\text{eff}} - u\mathbf{P} - \mu N$ , входящего в распределение Гиббса (3.2.38). Однако эта задача является очень сложной, и мы ограничимся только рассмотрением случая слабого взаимодействия, когда в эффективном гамильтониане можно не учитывать слагаемое  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ . Таким образом, мы будем изучать структуру спектра оператора  $\mathcal{H}_q(\Delta) - u\mathbf{P} - \mu N$ . Со спектром этого оператора будут связаны определенные фермиевские возбуждения, представляющие собой идеальный ферми-газ квазичастиц. Наличие  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  приводит к различным процессам взаимодействия между этими квазичастицами, которое мы не будем здесь рассматривать.

Для диагонализации оператора

$$\mathcal{H}_q(\Delta) - u\mathbf{P} - \mu N = \sum_p \{ \xi_p (a_p^+ a_p + b_{-p}^+ b_{-p}) - \Delta(p) (a_p^+ b_{-p}^+ + b_{-p} a_p) \} - u\mathbf{P} + E_0, \quad (3.2.39)$$

где  $\xi_p = p^2/2m - \mu$ , введем унитарный оператор  $U$ :

$$\begin{aligned} U a_p U^+ &= a_p \cos \varphi_p + b_{-p}^+ \sin \varphi_p \equiv a'_p, \\ U b_{-p} U^+ &= -a_p^+ \sin \varphi_p + b_{-p} \cos \varphi_p \equiv b'_{-p}, \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

где фаза  $\varphi_p = \varphi_{-p}$  определяется из требования диагональности оператора  $U (\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N) U^+$  [24]:

$$U (\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N) U^+ = \sum_p \omega_p (a_p^+ a_p + b_{-p}^+ b_{-p}) + \mathcal{E}_0. \quad (3.2.41)$$

Здесь величина  $\omega_p$ , являющаяся некоторой функцией  $p$ , представляет собой энергию квазичастицы, а  $\mathcal{E}_0$  — энергию основного состояния рассматриваемой системы, отсчитываемую от значения  $\mu N$ .

Оператор импульса  $P$ , как нетрудно убедиться, удовлетворяет соотношению  $U P U^+ = P$ , и поэтому слагаемое  $uP$  в формуле (3.2.39) будет оставаться при унитарном преобразовании  $U$  без изменения. (Существование оператора  $U$  следует из того, что операторы  $a'_p, b'_p$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы  $a_p, b_p$ .)

Замечая, что

$$\begin{aligned} \{U a_p U^+, b_{-p}\} &= -\{U b_{-p} U^+, a_p\} = \delta_{pp'} \sin \varphi_p, \\ \{U a_p U^+, a_p^+\} &= \delta_{pp'} \cos \varphi_p, \quad \{U a_p U^+, a_p\} = \{U b_{-p} U^+, b_{-p}\} = 0, \end{aligned}$$

и учитывая, что для произвольных операторов  $A, B, C$

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B,$$

имеем

$$\begin{aligned} [U (\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N) U^+, a_p] &= -\xi_p \cos \varphi_p U a_p U^+ - \xi_p \sin \varphi_p U b_{-p}^+ U^+ + \\ &+ \Delta(p) \cos \varphi_p U b_{-p}^+ U^+ - \Delta(p) \sin \varphi_p U a_p U^+ = -\omega_p a_p, \end{aligned}$$

откуда, используя (3.2.40), получим

$$\Delta(p) \cos 2\varphi_p = \xi_p \sin 2\varphi_p, \quad \xi_p \cos 2\varphi_p = \omega_p - \Delta(p) \sin 2\varphi_p$$

или

$$\sin 2\varphi_p = \frac{\Delta(p)}{\omega_p}, \quad \cos 2\varphi_p = \frac{\xi_p}{\omega_p}, \quad \omega_p = (\xi_p^2 + \Delta^2(p))^{1/2}. \quad (3.2.42)$$

Из этих формул следует, что при  $\Delta(p) = 0$  фаза  $\varphi_p = 0$ , если  $p > p_F$  и  $\varphi_p = \pi/2$ , если  $p < p_F$  ( $p_F$  — граничный фермиевский импульс  $p_F = (2m\mu)^{1/2}$ ). Таким образом, мы будем считать, что и при  $\Delta = 0$  унитарное преобразование (3.2.40) отличается от

единичного и имеет вид

$$U a_p U^+ |_{\Delta=0} \equiv a'_p = \begin{cases} a_p, & p > p_F, \\ b_{-p}^+, & p < p_F, \end{cases}$$

$$U b_p U^+ |_{\Delta=0} \equiv b'_p = \begin{cases} b_p, & p > p_F, \\ -a_{-p}^+, & p < p_F. \end{cases}$$

Это преобразование соответствует переходу от операторов рождения и уничтожения частиц  $a_p^+$ ,  $a_p$  к операторам рождения и уничтожения «частиц» и «дырок»,  $a_p'^+$ ,  $a_p'$ ; именно,  $a_p'$  при  $p > p_F$  представляет собой оператор уничтожения «частицы», а при  $p < p_F$  — оператор уничтожения «дырки».

Определим теперь энергию основного состояния  $\mathcal{E}_0$ . Усредняя формулу (3.2.41) по состоянию вакуума  $|0\rangle$  операторов  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $a_p|0\rangle = b_p|0\rangle = 0$  и используя соотношения (3.2.40), а также определение  $\mathcal{H}_q(\Delta)$ , получим

$$\mathcal{E}_0 = \sum_p (\xi_p - \omega_p). \quad (3.2.43)$$

Как уже указывалось,  $UPU^+ = P$ , поэтому, согласно (3.2.41), статистический оператор  $\omega(\Delta)$  после пренебрежения в нем  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  (обозначим его через  $\omega_0(\Delta)$ ) следующим образом преобразуется при унитарном преобразовании  $U$ :

$$\omega_0(\Delta) \rightarrow U \omega_0(\Delta) U^+ = \exp \left\{ \Omega_0 - \beta \sum_p (\omega_p - \mu p) (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p) \right\}, \quad (3.2.44)$$

где  $\Omega_0$  определяется из соотношения  $\text{Sp } \omega_0(\Delta) = 1$ . Заметим, что  $U \omega_0(\Delta) U^+$  можно рассматривать как статистический оператор газа квазичастиц.

Перейдем к определению функции  $\Delta(\mathbf{x})$ , которая связана с функцией  $C(\mathbf{x})$  соотношением (3.2.36), причем  $C(\mathbf{x})$ , согласно (3.2.37), определяется уравнением

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_p e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \text{Sp } \omega_0(\Delta) a_p b_{-p}.$$

Замечая, что

$$\text{Sp } \omega_0(\Delta) a_p b_{-p} = \text{Sp } U \omega_0(\Delta) U^+ U a_p U^+ U b_{-p} U^+,$$

получим, согласно (3.2.40), (3.2.44),

$$\text{Sp } \omega_0(\Delta) a_p b_{-p} = (1 - \tilde{n}_p - \tilde{n}_{-p}) \cos \varphi_p \sin \varphi_p,$$

где  $\tilde{n}_p$  — функция распределения квазичастиц:

$$\tilde{n}_p = \text{Sp } U \omega_0(\Delta) U^+ a_p^+ a_p = \{1 + \exp \beta(\omega_p - \mu p)\}^{-1}, \quad (3.2.45)$$

и, следовательно, с учетом (3.2.42)

$$C(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2} \frac{\Delta(\mathbf{p})}{\omega_{\mathbf{p}}} (1 - \bar{n}_{\mathbf{p}} - \bar{n}_{-\mathbf{p}}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \quad (3.2.46)$$

Подставляя (3.2.46) в (3.2.36), получим следующее нелинейное интегральное уравнение для определения функции  $\Delta(\mathbf{p})$ :

$$\Delta(\mathbf{p}) = -\frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{\mathbf{p}'} v(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (1 - \bar{n}_{\mathbf{p}} - \bar{n}_{-\mathbf{p}'}) \frac{\Delta(\mathbf{p}')}{\omega_{\mathbf{p}'}} \quad (3.2.47)$$

где  $\omega_{\mathbf{p}} = (\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta^2(\mathbf{p}))^{1/2}$  и  $v(\mathbf{p}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) \exp i\mathbf{p}\mathbf{x}$ .

Это уравнение, помимо тривиального решения  $\Delta(\mathbf{p}) = 0$ , может иметь и отличное от нуля вещественное решение. Такая ситуация возникает в случае сколь угодно слабого взаимодействия, если только между частицами действуют силы притяжения.

Найдем собственное состояние оператора  $\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N$ , соответствующее его наименьшему собственному значению  $\mathcal{E}_0$ . Согласно (2.3.85) это состояние имеет вид

$$|0\rangle = U^+ |0\rangle, \quad (3.2.48)$$

причем

$$(\mathcal{H}_q(\Delta) - \mu N)|0\rangle = \mathcal{E}_0|0\rangle.$$

Если  $\Delta = 0$ , то  $\mathcal{E}_0|_{\Delta=0} = 2 \sum_{\mathbf{p} < \mathbf{p}_F} \xi_{\mathbf{p}}$ . Таким образом, при  $\Delta(\mathbf{p}) \neq 0$   $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_0|_{\Delta=0}$ , и, следовательно, нетривиальное решение уравнения (3.2.47) (если оно существует) соответствует более низколежащему энергетическому состоянию.

Величина  $\Delta(\mathbf{p}_F)$  имеет простой физический смысл: она представляет собой энергетическую щель между основным состоянием и первым возбужденным состоянием газа квазичастиц.

Легко найти и явный вид оператора  $U$ . Действительно, из (3.2.40) следует, что при бесконечно малом  $\varphi_{\mathbf{p}} = \delta\varphi_{\mathbf{p}}$

$$U = 1 + i \sum_{\mathbf{p}} T_{\mathbf{p}} \delta\varphi_{\mathbf{p}}, \quad T_{\mathbf{p}} = T_{-\mathbf{p}},$$

где эрмитов оператор  $T_{\mathbf{p}}$  удовлетворяет уравнениям

$$i [T_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}] = \frac{1}{2} b_{-\mathbf{p}}^+, \quad i [T_{\mathbf{p}}, b_{-\mathbf{p}}] = -\frac{1}{2} a_{\mathbf{p}}^+$$

и, следовательно,

$$T_{\mathbf{p}} = \frac{i}{2} \{ a_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ - b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + a_{-\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}^+ - b_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} \}.$$

Учитывая, что  $\varphi_{\mathbf{p}}$  представляет собой аддитивный параметр группы преобразований (3.2.40), имеем

$$U = \exp \sum_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}} (b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+). \quad (3.2.49)$$

Используя перестановочные соотношения для операторов  $a_p$ ,  $b_p$ , легко показать, что

$$|0\rangle = \prod_p (\cos \varphi_p + \sin \varphi_p a_p^+ b_{-p}^+) |0\rangle.$$

В отсутствие взаимодействия  $\Delta = 0$  и, как указывалось,  $\varphi_p = 0$  при  $p > p_F$  и  $\varphi_p = \pi/2$  при  $p < p_F$ . Поэтому вектор состояния  $|0\rangle$  при  $\Delta = 0$  имеет вид

$$|0\rangle_{\Delta=0} = \prod_{p < p_F} a_p^+ b_{-p}^+ |0\rangle$$

и соответствует невзаимодействующим частицам, заполняющим ферми-сферу радиуса  $p_F$ . При наличии взаимодействия, т. е. при  $\Delta \neq 0$ , вектор основного состояния  $|0\rangle$  представляет собой суперпозицию состояний, соответствующих невзаимодействующим парам частиц с противоположно направленными спинами и импульсами. При этом амплитуда нахождения  $N$  пар с импульсами  $(p_1, -p_1), \dots, (p_N, -p_N)$  в состоянии  $|0\rangle$  равна

$$\langle \mathcal{N} | 0 \rangle = \prod_{p_i \in \mathcal{N}} \sin \varphi_{p_i} \prod_{p_i \notin \mathcal{N}} \cos \varphi_{p_i},$$

где  $|\mathcal{N}\rangle = \prod_{p_i \in \mathcal{N}} a_{p_i}^+ b_{-p_i}^+ |0\rangle$  и  $\mathcal{N}$  служит для обозначения совокупности импульсных переменных  $p_1, \dots, p_N$ . Так как  $\sin \varphi_p \approx 0$  при  $p > p_F$  и  $\cos \varphi_p \approx 0$  при  $p < p_F$ , то амплитуда  $\langle \mathcal{N} | 0 \rangle$  отлична от нуля только в том случае, если вектор  $|\mathcal{N}\rangle$  отличается от вектора  $|0\rangle_{\Delta=0}$  перераспределением пар операторов  $a_p^+ b_{-p}^+$  вблизи поверхности Ферми.

Таким образом, основное состояние при  $\Delta \neq 0$  можно считать как бы состоящим из пар частиц, находящихся в сильной корреляции только вблизи поверхности Ферми, и обладающих суммарным импульсом и суммарным спином, равными нулю. Этот газ спаренных частиц аналогичен покоящемуся бозе-конденсату и, так же как бозе-конденсат, обладает свойством сверхтекучести. Легко видеть, что это свойство имеет место, если параметр  $u$ , входящий в распределение Гиббса, не превосходит некоторого критического значения  $u_0$ . Действительно, из формулы (3.2.44) следует, что для устойчивости состояния статистического равновесия необходимо выполнение условия  $\omega_p - pu > 0$  при любых  $p$ . Отсюда вытекает, что

$$u < u_0, \quad u_0 = \min_p \frac{\omega_p}{p} \approx \frac{\Delta(p_F)}{p_F}. \quad (3.2.50)$$

Так как величина  $\Delta(p_F)$  зависит от  $u$  и  $T$ , то и  $u_0$  будет функцией  $u$ ,  $T$ .

Величина  $u \equiv u_n$  может интерпретироваться как скорость газа квазичастиц, т. е. скорость нормальной компоненты относительно конденсата пар, который предполагается покоящимся.



Так же как и в случае неидеального бозе-газа, средний импульс рассматриваемого нами ферми-газа равен  $\mathbf{P} = \sum_p \mathbf{p} \tilde{n}_p$ . Этот импульс можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \mathcal{V} \rho_n^{(m)} \mathbf{u}_n,$$

где  $\rho_n^{(m)}$  интерпретируется как плотность нормальной составляющей ферми-газа. Для слабо неидеального ферми-газа

$$\rho_n^{(m)} = \frac{2}{(2\pi)^3} u_n^{-2} \int d^3 p \mathbf{p} u_n \tilde{n}_p.$$

Величина  $\rho_s^{(m)} = \rho^{(m)} - \rho_n^{(m)}$  ( $\rho^{(m)}$  — плотность ферми-газа) представляет собой плотность сверхтекучей составляющей. (В выбранной нами системе отсчета скорость сверхтекучей составляющей равна нулю.) Таким образом, не только газ бозонов, но и газ фермионов обладает свойством сверхтекучести.

Для заряженных фермионов сверхтекучесть эквивалентна сверхпроводимости. Зная величину критической скорости  $u_0$  при  $u_n = 0$ , можно оценить плотность сверхпроводящего тока  $j_s = 2eu_0 m^{-1} \rho_s^{(m)}$ , где  $\rho_s^{(m)}$  — плотность сверхтекучей составляющей электронного газа.

До сих пор мы повсюду пренебрегали частью  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  полного гамильтониана, что справедливо только в случае слабого взаимодействия и вдали от температуры сверхпроводящего перехода. Можно, однако, построить такой модельный гамильтониан, в котором вообще будет отсутствовать член  $\mathcal{H}_{\text{int}}$ , соответствующий взаимодействию между квазичастицами. Этот гамильтониан в импульсном представлении имеет следующий вид:

$$V = -\mathcal{V}^{-1} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} I(\mathbf{p}, \mathbf{p}') a_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'}, \quad (3.2.51)$$

где  $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  — некоторая функция импульсов, описывающая взаимодействие между частицами. В этом гамильтониане (он называется *гамильтонианом Бардина*) учитывается только взаимодействие между фермионами с противоположно направленными импульсами и спинами. В координатном представлении гамильтониан (3.2.51) имеет вид

$$V = -\frac{1}{\mathcal{V}} \int d^3 x_1 d^3 x_2 d^3 x'_1 d^3 x'_2 \psi_{\frac{1}{2}}^+(x_1) \psi_{-\frac{1}{2}}^+(x_2) \times \\ \times I(x_1 - x_2, x'_1 - x'_2) \psi_{-\frac{1}{2}}(x'_2) \psi_{\frac{1}{2}}(x'_1), \quad (3.2.52)$$

$$I(x, x') = (2\pi)^{-6} \int d^3 p d^3 p' I(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \exp(i\mathbf{x}\mathbf{p} - i\mathbf{x}'\mathbf{p}').$$

Отметим особенности модельного гамильтониана (3.2.52). Во-первых, в отличие от обычного потенциального взаимодействия

(3.2.28), взаимодействие (3.2.52) не локализовано в пространстве, так как ядро  $I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)$  не убывает при  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1 \rightarrow \infty$  и  $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 \sim \mathbf{x}'_2$ . Во-вторых, для систем многих частиц в пределе  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  гамильтониан (3.2.52) не приводит в рамках теории возмущений ни к каким изменениям многочастичных функций распределения. Иными словами, в рамках теории возмущений газ фермионов остается идеальным, несмотря на наличие гамильтониана взаимодействия  $V$ . Действительно, так как в рамках теории возмущений отличны от нуля только нормальные связи (см. раздел 3.1.2)  $\psi^+\psi$  и равны нулю аномальные связи  $\psi^+\psi^+, \psi\psi$ , то поправки к многочастичным функциям распределения, связанные с гамильтонианом  $V$ , согласно (3.1.29), будут пропорциональны  $\mathcal{V}^{-1}$  и исчезают при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ .

Вклад  $V$  в энергию системы, потенциал  $\Omega$  и другие термодинамические функции также будет исчезающе мал. Например, в первом порядке теории возмущений поправка к энергии системы будет равна

$$-\mathcal{V}^{-1} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x'_1 d^3x'_2 I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \times \\ \times \underbrace{\psi_{\frac{1}{2}}^+(\mathbf{x}_1)\psi_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}'_1)}_{\text{нормальная}} \underbrace{\psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_2)\psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}'_2)}_{\text{нормальная}}.$$

Поскольку выписанные связи убывают при  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1 \rightarrow \infty, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'_2 \rightarrow \infty$ , то эта величина не содержит объема  $\mathcal{V}$ , в то время как энергия системы должна быть пропорциональна объему  $\mathcal{V}$ . Заметим однако, что если бы были отличны от нуля аномальные связи, то ситуация бы изменилась и поправки к многочастичным функциям распределения были бы конечны, а поправка к энергии была бы пропорциональна  $\mathcal{V}$ . Например, поправка первого порядка к энергии равнялась бы

$$-\mathcal{V}^{-1} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x'_1 d^3x'_2 \underbrace{\psi_{\frac{1}{2}}^+(\mathbf{x}_1)\psi_{-\frac{1}{2}}^+(\mathbf{x}_2)}_{\text{аномальная}} \times \\ \times I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \underbrace{\psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}'_2)\psi_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}'_1)}_{\text{нормальная}},$$

и была бы пропорциональна  $\mathcal{V}$ , так как интеграл в этом случае пропорционален  $\mathcal{V}^2$ . Отсюда можно заключить, что гамильтониан (3.2.52) не приводит к эффектам, связанным с неидеальностью ферми-систем для нормальных состояний, к которым применимы методы теории возмущений. Напротив, этот гамильтониан приводит к реальным эффектам для вырожденных систем, для которых отличны от нуля аномальные средние  $\{\psi\psi\}$ . Методическая ценность гамильтониана (3.2.52) заключается

в том, что он допускает в пределе  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  точное решение задачи многих фермионов при любых температурах \*).

Поступая так же, как и при выводе формул (3.2.30), (3.2.38), можно перейти от гамильтониана (3.2.52) к эффективному гамильтониану  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ , в котором операторы  $\hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(0, \mathbf{x})$  заменены на  $c$ -числа. При этом, так как ядро  $I(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2)$  не зависит от  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1$ , то гамильтониан не будет содержать операторов  $\hat{A}_{\sigma_1, \sigma_2}(\mathbf{q}, \mathbf{x})$  при  $\mathbf{q} \neq 0$ . Иными словами, эффективный гамильтониан  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  не будет содержать слагаемого  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  и будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} &= \mathcal{H}_0 - \\ &- \int d^3x_1 d^3x_2 \Delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \left\{ \psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_2) \psi_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}_1) + \psi_{\frac{1}{2}}^+(\mathbf{x}_1) \psi_{-\frac{1}{2}}^+(\mathbf{x}_2) \right\} + E_0, \\ \mathcal{H}_0 &= \sum_p \varepsilon_p (a_p^+ a_p + b_p^+ b_p), \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

где  $\varepsilon_p$  — энергия электрона с квазимпульсом  $p$  и функция  $\Delta(\mathbf{x})$  определяется из уравнения

$$\Delta(\mathbf{x}) = \int d^3x' I(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \text{Sp } w(\Delta) \psi_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}) \psi_{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}').$$

Оператор  $w(\Delta)$  определяется формулой (3.2.38), в которой в качестве гамильтониана входит гамильтониан (3.2.53).

Поступая так же как и при выводе формулы (3.2.47), нетрудно получить следующее интегральное уравнение для функции  $\Delta(\mathbf{p})$ :

$$\Delta(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\mathcal{V}} \sum_{p'} I(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\Delta(\mathbf{p}')}{\omega_{p'}} (1 - \tilde{n}_{p'} - \tilde{n}_{-p'}), \quad (3.2.54)$$

где по-прежнему  $\omega_p = \{\xi_p^2 + \Delta^2(\mathbf{p})\}^{1/2}$ ,  $\xi_p = \varepsilon_p - \mu$  и  $\tilde{n}_p$  определяется формулой (3.2.45).

Чтобы выяснить характер решений этого уравнения, мы будем предполагать, что функция  $I(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  отлична от нуля и равна постоянной  $I$ , если  $|\xi_p| < \Theta$ ,  $|\xi_{p'}| < \Theta$ , где  $\Theta$  — некоторая константа (в фоновом механизме сверхпроводимости постоянная  $\Theta$  по порядку величины совпадает с дебаевской температурой). При этом

$$\Delta(\mathbf{p}) = \begin{cases} 0, & |\xi_p| > \Theta, \\ \Delta, & |\xi_p| < \Theta, \end{cases}$$

---

\* ) Строгое математическое рассмотрение модельных гамильтонианов более общего вида, чем гамильтониан (3.2.52), и допускающих точное решение задачи многих частиц в термодинамическом пределе, дано в [31].

где постоянная  $\Delta$  определяется из уравнения

$$\frac{I}{2\mathcal{Y}} \sum_{|\xi_p| < \Theta} \frac{1 - \bar{n}_p - \bar{n}_{-p}}{(\xi_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} = 1 \quad (3.2.55)$$

и суммирование производится по импульсам, удовлетворяющим условию  $-|\xi_p| < \Theta$ . Это уравнение имеет решение только в том случае, если  $I > 0$  и определяет  $\Delta$  как функцию температуры  $T$  и скорости  $u_n$ ,  $\Delta = \Delta(T, u_n)$ .

При  $T = 0$  и  $u_n = 0$  это уравнение принимает вид

$$1 = \frac{I}{2\mathcal{Y}} \sum_{|\xi_p| < \Theta} (\xi_p^2 + \Delta_0^2)^{-1/2} = \frac{mI p_F}{2\pi^2} \ln \frac{\Theta + (\Theta^2 + \Delta_0^2)^{1/2}}{\Delta_0}, \quad (3.2.56)$$

где  $\Delta_0 = \Delta(0, 0)$ . Предполагая, что  $\Delta_0 \ll \Theta$ , получим отсюда

$$\Delta_0 = 2\Theta \exp\left(-\frac{2\pi^2}{mI p_F}\right).$$

Эта формула показывает, что в отсутствие взаимодействия ( $I = 0$ ) величина щели  $\Delta_0$  обращается в нуль.

Используя далее формулу (3.2.56) и предполагая, что  $\Delta \ll \Theta$ , можно переписать уравнение (3.2.55) в виде

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{4\pi m p_F} \int_{|\xi_p| < \Theta} d^3p \bar{n}_p (\xi_p^2 + \Delta^2)^{-1/2},$$

откуда, выполняя интегрирование по углам между векторами  $p$  и  $u_n$ , получим

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{2m p_F} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\omega_p} \left\{ 2 + \frac{1}{\beta u_n p} \ln \frac{1 + \exp \beta (\omega_p - p u_n)}{1 + \exp \beta (\omega_p + p u_n)} \right\}. \quad (3.2.57)$$

Это уравнение определяет  $\Delta$  как функцию  $T = \beta^{-1}$  и  $u_n$ . При  $T = 0$  оно приобретает вид

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{2m p_F} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\omega_p} \left( 1 - \frac{\omega_p}{p u_n} \right) \theta(p u_n - \omega_p).$$

Отсюда видно, что при  $u_n < u_0$ , где  $u_0 = \Delta_0/p_F$  интеграл обращается в нуль и, следовательно, величина щели  $\Delta$  совпадает с  $\Delta_0$ , т. е. не зависит от скорости. При  $u_n > u_0$  величина  $\Delta$  начинает зависеть от скорости  $u_n$  и обращается в нуль при  $u_n = u_c$ , где  $u_c$  определяется из уравнения

$$\ln \frac{\Delta_0}{2p_F u_c} = p_F^{-1} (p_F^2 + m u_c^2)^{1/2} - 2 + \ln \frac{p_F + (p_F^2 + m^2 u_c^2)^{1/2}}{2p_F}. \quad (3.2.58)$$

Решение этого уравнения при  $\Delta_0 \ll p_F^2/2m = \mu$  имеет вид

$$u_c = \frac{e}{2} \Delta_0 \rho_F^{-1} = \frac{e}{2} u_0 \approx 1,36 u_0.$$

Выше отмечалось, что состояние сверхтекучести неустойчиво при  $u_n > u_0(u_n, T)$ . Мы видим теперь, что при  $T = 0$  величина  $\Delta(u_n, 0)$  обращается в нуль не при  $u_n = u_0$ , а при  $u_n = 1,36 u_0$ . Это значит, что в интервале  $u_0 < u_n < u_c$  (при  $T = 0$ ) состояние сверхтекучести будет метастабильно и будет сохраняться вплоть до скоростей  $u_c$ , если приближаться к  $u_c$  со стороны малых скоростей; если же к  $u_c$  приближаться со стороны больших скоростей, то состояние сверхтекучести будет наступать при  $u_n = u_0$ . Полагая в (3.2.57)  $\Delta = 0$ , мы получим уравнение

$$\ln \frac{\Delta_0}{\mu} = -3 \ln 2 +$$

$$+ \frac{1}{2mp_F} \int_0^{\infty} dp |\xi_p|^{-1} \left\{ p^2 \left( 2 + \frac{1}{\beta u_n p} \ln \frac{1 + \exp \beta (|\xi_p| - pu_n)}{1 + \exp \beta (|\xi_p| + pu_n)} \right) - p_F^2 \right\},$$

определяющее линию фазового равновесия сверхпроводящего и нормального состояний.

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕРАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

### § 4.1. Реакция системы на внешнее возмущение

4.1.1. Статистический оператор системы, находящейся в слабом внешнем поле. Как мы видели в гл. 2, наиболее полным, микроскопическим описанием состояний квантовой системы является описание с помощью статистического оператора  $\rho(t) \equiv \rho$ , удовлетворяющего уравнению движения (2.1.7):

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho], \quad (4.1.1)$$

где  $\mathcal{H}$  — полный гамильтониан системы, которая не обязательно должна быть замкнутой, а может находиться и в заданном внешнем переменном поле (в этом случае гамильтониан будет заданной функцией времени  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$ ). Решение уравнения (4.1.1) с начальным условием  $\rho(0) = \rho_0$ , где  $\rho_0$  — заданный оператор, позволяет в принципе решить основную задачу макроскопической физики, заключающуюся в нахождении среднего значения любой физической величины  $a$ : если этой величине соответствует оператор  $\hat{a}$ , то среднее значение  $a(t)$  будет определяться формулой

$$a(t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{a}.$$

Если система находится в состоянии статистического равновесия, то  $\rho = \omega$ , где  $\omega$  — статистический оператор Гиббса (3.1.1). Если же состояние системы не является равновесным, то можно дать лишь формальное общее решение уравнения (4.1.1)

$$\rho(t) = U(t) \rho_0 U(t)^{-1},$$

где унитарный оператор  $U(t)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial U(t)}{\partial t} = \mathcal{H}(t) U(t)$$

и начальному условию  $U(0) = 1$ . Для получения конкретных результатов в этом случае должны быть использованы добавочные физические предположения.

Простейшим является тот случай, когда система находилась сначала в состоянии статистического равновесия, а затем была

выведена из него внешним переменным полем, включенным в некоторый момент времени. Если интенсивность поля достаточно мала, то состояние системы будет мало отличаться от равновесного, т. е. статистический оператор системы будет мало отличаться от статистического оператора Гиббса, и отклонение  $\rho$  от  $\omega$  может быть найдено путем решения уравнения (4.1.1) методом теории возмущений.

Более сложным является круг задач, в которых внешнее поле отсутствует, но взаимодействия между частицами могут быть физически четко разделены на две группы — сильные и сравнительно слабые. При учете только сильных взаимодействий полное статистическое равновесие не устанавливается и состояние системы описывается статистическим оператором, отличающимся от  $\omega$ . Однако структура этого оператора известна — он определяется формулой вида (2.4.29), в которую входят интегралы движения, соответствующие только сильным взаимодействиям. При учете слабых взаимодействий эти величины уже не будут строгими интегралами движения, и будут меняться со временем, но изменение это будет медленным, и для его описания могут быть получены уравнения, исследование которых значительно проще, чем исследование исходного уравнения (4.1.1). Иными словами, в этом случае мы исходим из определенной структуры статистического оператора и изучаем изменение во времени тех параметров, которые определяют эту структуру.

Начнем с первой задачи, точная формулировка которой такова [70]. Система с гамильтонианом  $\mathcal{H}$  находится в состоянии статистического равновесия, которое описывается статистическим оператором Гиббса

$$\omega = \exp \{ \Omega - \beta (\mathcal{H} - \mu N) \}. \quad (4.1.2)$$

В некоторый момент времени  $t_0$  включается внешнее поле, так что гамильтонианом системы становится оператор

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H} + V(t), \quad (4.1.3)$$

где  $V(t)$  — гамильтониан взаимодействия системы с полем. Требуется найти статистический оператор системы  $\rho(t)$  при  $t > t_0$ . Вводя вместо  $\rho(t)$  оператор

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i\mathcal{H}t} \rho(t) e^{-i\mathcal{H}t},$$

получим для него, согласно (4.1.1), уравнение

$$i \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} = [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad \text{где} \quad \tilde{V}(t) = e^{i\mathcal{H}t} V(t) e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (4.1.4)$$

Так как при  $t \rightarrow -\infty$  внешнее поле отсутствовало и система находилась в состоянии статистического равновесия, то  $\rho(-\infty) = \omega$ . Поскольку  $[\omega, \mathcal{H}] = 0$ , то  $\tilde{\rho}(-\infty) = \omega$ . Это соотношение следует рассматривать как начальное условие при решении уравнения (4.1.4). Из (4.1.4) вытекает поэтому

интегральное уравнение для  $\bar{\rho}(t)$

$$\bar{\rho}(t) = \omega - i \int_{-\infty}^t dt' [\tilde{V}(t'), \bar{\rho}(t')].$$

Заметим, что оператор  $\bar{\rho}(t)$  можно рассматривать как статистический оператор в представлении взаимодействия, связанном с разбиением (4.1.3) полного гамильтониана  $\mathcal{H}(t)$ . Оператор некоторой физической величины  $a(\mathbf{x})$  в этом представлении  $\tilde{a}(\mathbf{x}, t)$  связан с соответствующим шредингеровским оператором  $a(\mathbf{x})$  соотношением:

$$\tilde{a}(\mathbf{x}, t) = e^{i\mathcal{H}t} a(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{H}t}.$$

Этот оператор совпадает с гейзенберговским оператором для системы, описываемой гамильтонианом  $\mathcal{H}$ .

Считая взаимодействие системы с внешним полем слабым, можно разложить  $\bar{\rho}(t)$  в ряд по степеням  $\tilde{V}(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\rho}_n(t), \quad \bar{\rho}_0(t) = \omega, \\ \bar{\rho}_n(t) &= (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [\tilde{V}(t_1), [\dots [\tilde{V}(t_n), \omega] \dots]], \\ & \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Мы будем интересоваться только первой поправкой  $\bar{\rho}_1$  к  $\omega$  и поэтому будем предполагать, что гамильтониан взаимодействия  $V(t)$  линеен по внешнему полю, т. е.

$$V(t) = \int d^3x F_i(\mathbf{x}, t) \xi_i(\mathbf{x}), \quad (4.1.6)$$

где  $F_i(\mathbf{x}, t)$  — величины, определяющие внешнее поле, а  $\xi_i(\mathbf{x})$  — квазилокальные операторы, относящиеся к рассматриваемой системе и не зависящие от внешнего поля (по индексу  $i$  предполагается суммирование). Их можно называть *обобщенными «токами»*, соответствующими полям  $F_i(\mathbf{x}, t)$ . Подставляя (4.1.6) в (4.1.5), получим

$$\bar{\rho}_1(t) = -i \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x' F_i(\mathbf{x}', t') [\tilde{\xi}_i(\mathbf{x}', t'), \omega].$$

Поэтому среднее значение оператора  $a(\mathbf{x})$  с точностью до членов, линейных по полю  $F_i$ , определяется формулой

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho(t) a(\mathbf{x}) &= \text{Sp } \omega a(\mathbf{x}) + \\ &+ i \int_{-\infty}^t dt' \int d^3x' F_i(\mathbf{x}', t') \text{Sp } \omega [\tilde{\xi}_i(\mathbf{x}', t'), \tilde{a}(\mathbf{x}, t)] + \dots \end{aligned} \quad (4.1.7)$$



Введем для квазилокальных операторов  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  двухвременную запаздывающую функцию Грина:

$$G_{ab}^{(+)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -i\theta(t - t') \text{Sp } \omega [\bar{a}(\mathbf{x}, t), \bar{b}(\mathbf{x}', t')],$$

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Если квазилокальные операторы  $a(\mathbf{x})$ ,  $b(\mathbf{x})$  трансляционно-инвариантны, то функция Грина  $G_{ab}^{(+)}$  будет зависеть только от разностей  $t - t'$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ :

$$G_{ab}^{(+)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = G_{ab}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t').$$

Таким образом, если  $a$  и  $\xi_i$  трансляционно-инвариантны, то формула (4.1.7) приобретает вид

$$\text{Sp } \rho(t) a(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega a(0) + a^F(\mathbf{x}, t) + \dots, \quad (4.1.8)$$

$$a^F(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' G_{a\xi_i}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') F_i(\mathbf{x}', t').$$

Переходя к фурье-компонентам величин  $a^F$ ,  $F_i$ :

$$a^F(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} a^F(\mathbf{k}, \omega), \quad F_i(\mathbf{x}, t) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} F_i(\mathbf{k}, \omega),$$

получим

$$a^F(\mathbf{k}, \omega) = G_{a\xi_i}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) F_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.1.9)$$

$$G_{a\xi_i}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k d\omega e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})} G_{a\xi_i}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Определив оператор  $\bar{\rho}_1$ , можно найти энергию, которую система получает от внешнего поля. Отнесенная к единице времени эта энергия равна, очевидно,

$$\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial t} \text{Sp } \rho(t) \mathcal{H}(t)$$

или, согласно (4.1.1),

$$\dot{Q} = \text{Sp } \bar{\rho}(t) e^{i\mathcal{H}t} \frac{\partial V(t)}{\partial t} e^{-i\mathcal{H}t}.$$

Подставляя сюда разложение  $\bar{\rho}(t) = \omega + \bar{\rho}_1(t) + \dots$ , найдем с точностью до членов, квадратичных по полю  $F_i(\mathbf{x}, t)$ :

$$\dot{Q} = \int d^3x \frac{\partial F_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \text{Sp } \omega \xi_i(\mathbf{x}) -$$

$$- \frac{i}{(2\pi)^5} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \omega' e^{-it(\omega + \omega')} F_i(-\mathbf{k}, \omega') \xi_i^F(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.1.10)$$

$$\xi_i^F(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) F_j(\mathbf{k}, \omega), \quad G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = G_{\xi_i \xi_j}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Входящие сюда величины  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , связывающие компоненты Фурье обобщенных «токов» с компонентами Фурье внешних полей, могут быть названы *обобщенными восприимчивостями* системы.

Проинтегрировав  $Q$  по времени, найдем полное количество энергии  $Q$ , поглощаемое системой. Если поле действует только в течение конечного времени, то интеграл от первого слагаемого в (4.1.10) обращается в нуль, и мы получим

$$Q = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^3k \omega F_i(-\mathbf{k}, -\omega) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) F_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.1.11)$$

Так как внешнее поле  $F_i(\mathbf{x}, t)$  вещественно, то операторы  $\xi_i$  эрмитовы. Поэтому функции Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$  должны быть вещественными. Отсюда следует, что

$$F_i^*(\mathbf{k}, \omega) = F_i(-\mathbf{k}, -\omega), \quad G_{ij}^{(+)*}(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^{(+)}(-\mathbf{k}, -\omega). \quad (4.1.12)$$

Поэтому формулу (4.1.11) можно представить окончательно в следующем виде:

$$Q = \int_0^{\infty} d\omega \int d^3k Q_{\omega\mathbf{k}}, \quad (4.1.13)$$

$$Q_{\omega\mathbf{k}} = \frac{i\omega}{(2\pi)^4} F_i^*(\mathbf{k}, \omega) \{G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) - G_{ji}^{(+)*}(\mathbf{k}, \omega)\} F_j(\mathbf{k}, \omega).$$

Величина  $Q_{\omega\mathbf{k}} d\omega d^3k$  представляет собой энергию, поглощаемую системой в интервале частот  $\omega, \omega + d\omega$  и в интервале волновых векторов  $\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k}$ . Она определяется, как мы видим, антиэрмитовой частью матрицы  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ .

**4.1.2. Свойства функций Грина.** Наряду с запаздывающими функциями Грина

$$G_{ab}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = -i\theta(t) \text{Sp } \omega [a(\mathbf{x}, t), b(0)] \equiv \langle\langle a(\mathbf{x}, t); b(0) \rangle\rangle^+, \quad (4.1.14)$$

могут быть введены опережающие функции Грина

$$G_{ab}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = i\theta(-t) \text{Sp } \omega [a(\mathbf{x}, t), b(0)] \equiv \langle\langle a(\mathbf{x}, t); b(0) \rangle\rangle^-, \quad (4.1.15)$$

где  $b(0) = b(0, 0)$ ,  $a(\mathbf{x}, t) \equiv \bar{a}(\mathbf{x}, t)$ .

В отличие от запаздывающих функций Грина, которые определяют состояние системы в некоторый момент времени  $t$ , если задано внешнее поле в предшествующие моменты времени (при  $t = -\infty$  система находится в состоянии статистического равновесия), опережающие функции Грина определяют состояние системы в момент времени  $t$ , если внешнее поле задано во все последующие моменты времени (при  $t = \infty$  система находится в состоянии статистического равновесия).

Легко получить уравнения движения для функций Грина. Продифференцируем для этого по времени функции  $G_{ab}^{(\pm)}(x, t)$  учитывая, что

$$i \frac{\partial}{\partial t} a(x, t) = -[\mathcal{H}, a(x, t)],$$

и используя формулу  $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \delta(t)$ , имеем [34]

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle\langle a(x, t); b(0) \rangle\rangle^{\pm} = \delta(t) \text{Sp } \varpi [a(x), b(0)] - \langle\langle [\mathcal{H}, a(x, t)]; b(0) \rangle\rangle^{\pm}. \quad (4.1.16)$$

Так как  $[\mathcal{H}, a(x, t)]$  является квазилокальным оператором (так же, как и оператор  $a(x, t)$ ), то в правой части формулы (4.1.16) стоит новая функция Грина, отличная от исходной. Таким образом, уравнение (4.1.16) приводит к бесконечной цепочке уравнений для функций Грина типа

$$\langle\langle [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \dots [\mathcal{H}, a(x, t)] \dots]]; b(0) \rangle\rangle^{\pm}.$$

Мы видим, что уравнения для запаздывающих и опережающих функций Грина имеют одинаковый вид. Для нахождения запаздывающих функций Грина должно быть взято то решение уравнений (4.1.16), которое обращается в нуль при  $t < 0$ , а для нахождения опережающих функций Грина — решение, которое обращается в нуль при  $t > 0$ .

Уравнения (4.1.16) могут быть переписаны для фурье-компонент функций Грина. Вводя в соответствии с предыдущим разделом обозначение

$$\langle\langle a; b \rangle\rangle_{k\omega}^{\pm} = \int d^3x dt e^{-i(kx - \omega t)} \langle\langle a(x, t); b(0) \rangle\rangle^{\pm},$$

имеем

$$\begin{aligned} \omega \langle\langle a; b \rangle\rangle_{k\omega}^{\pm} &= \langle[a, b]\rangle_k - \langle\langle [\mathcal{H}, a]; b \rangle\rangle_{k\omega}^{\pm}, \\ \langle[a, b]\rangle_k &= \int d^3x e^{-ikx} \text{Sp } \varpi [a(x), b(0)]. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Так как второе слагаемое в правой части (4.1.17) представляет собой фурье-компоненту некоторой функции Грина, а первое слагаемое не зависит от  $\omega$ , то из (4.1.17) вытекает следующая асимптотика функций Грина в области больших частот:

$$\langle\langle a; b \rangle\rangle_{k\omega}^{\pm} = \frac{1}{\omega} \langle[a, b]\rangle_k - \frac{1}{\omega^2} \langle\langle [\mathcal{H}, a], b \rangle\rangle_k + \dots \quad (4.1.18)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что асимптотика запаздывающих и опережающих функций Грина в области больших частот одна и та же.

Запаздывающие и опережающие функции Грина обладают важными аналитическими свойствами. Чтобы установить их,

введем в рассмотрение корреляционную функцию

$$\mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t) = \langle b(0) a(\mathbf{x}, t) \rangle, \quad (4.1.19)$$

где  $\langle \dots \rangle = \text{Sp } \omega \dots$ . Мы предполагаем, что операторы  $a$  и  $b$  трансляционно-инвариантны, и поэтому функция  $\langle b(\mathbf{x}', t') a(\mathbf{x}, t) \rangle$  зависит только от разностей аргументов  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $t - t'$ . Покажем, что функция  $\mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t)$  может быть аналитически продолжена в область комплексной переменной  $t$ , определяемую неравенствами

$$0 < \text{Im } t < \beta.$$

Представим с этой целью  $\mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t)$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t) &= \text{Sp } \omega b(0) a(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \exp\{-\beta E + it(E' - E)\}, \\ &\text{Sp } e^{\alpha + \beta \mu N} b(0) \delta(E' - \mathcal{H}) a(\mathbf{x}, 0) \delta(E - \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Спектр гамильтониана  $\mathcal{H}$  можно, очевидно, считать положительным. (Если бы он начинался с отрицательной величины  $-Nc$ , то можно было бы эту величину отнести к  $\mu N$ .) Поэтому благодаря  $\delta$ -функциям интегрирование в последней формуле реально происходит от 0 до  $\infty$ . Отсюда следует, что функция

$$\chi(t) = \exp\{-\beta E + it(E' - E)\}, \quad t = \xi + i\eta,$$

убывает при  $E \rightarrow \infty$ ,  $E' \rightarrow \infty$ , если только  $0 < \eta < \beta$ , что и доказывает наше утверждение.

Заметим, что функция

$$\mathcal{I}_{ab}(-\mathbf{x}, -t) = \text{Sp } \omega a(\mathbf{x}, t) b(0)$$

аналитична в полосе  $-\beta < \text{Im } t < 0$ .

Покажем далее, что функцию  $\mathcal{I}_{ab}(\mathbf{x}, t)$  можно выразить через функцию  $\mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathcal{I}_{ab}(-\mathbf{x}, -t) = e^{-\beta \mu (n-m)} \mathcal{I}_{ba}(\mathbf{x}, t + i\beta), \quad (4.1.20)$$

где  $n$  и  $m$  — целые числа, показывающие сколько раз операторы типов  $\psi^+$  и  $\psi$  входят в оператор  $a$ :

$$a \sim \underbrace{\psi^+ \dots \psi^+}_n \underbrace{\psi \dots \psi}_m.$$

Для доказательства заметим, что

$$\langle b(0) a(\mathbf{x}, t) \rangle = \text{Sp } \omega b(0) a(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \omega \omega^{-1} a(\mathbf{x}, t) \omega b(0).$$

Так как, согласно (2.3.35),  $e^{\lambda N} \psi(\mathbf{x}) e^{-\lambda N} = e^{\lambda} \psi(\mathbf{x})$  и, кроме того,  $e^{\beta \mathcal{H}} a(\mathbf{x}, t) e^{-\beta \mathcal{H}} = a(\mathbf{x}, t - i\beta)$  ( $\lambda$  — произвольный параметр), то

$$\begin{aligned} \omega^{-1} a(\mathbf{x}, t) \omega &= e^{\beta(\mathcal{H} - \mu N)} a(\mathbf{x}, t) e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} = \\ &= a(\mathbf{x}, t - i\beta) \exp\{\beta \mu (m - n)\}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает соотношение (4.1.20).

Фурье-компоненты корреляционных функций  $\mathcal{J}_{ab}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\mathcal{J}_{ab}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3x dt e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \mathcal{J}_{ab}(\mathbf{x}, t)$$

связаны между собой, согласно (4.1.20), соотношением

$$\mathcal{J}_{ab}(-\mathbf{k}, -\omega) = \mathcal{J}_{ba}(\mathbf{k}, \omega) \exp\{\beta(\omega + \mu(m-n))\}. \quad (4.1.21)$$

Замечая, что

$$G_{ab}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = \mp i\theta(\pm t) (\mathcal{J}_{ab}(-\mathbf{x}, -t) - \mathcal{J}_{ba}(\mathbf{x}, t))$$

и

$$-i \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} = \frac{1}{\omega - \omega' + i0}, \quad i \int_{-\infty}^0 dt e^{i(\omega - \omega')t} = \frac{1}{\omega - \omega' - i0}$$

получим следующее выражение для фурье-компонент функций Грина  $G_{ab}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G_{ab}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathcal{J}_{ba}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega' \pm i0} (e^{\beta(\omega' + \mu(m-n))} - 1). \quad (4.1.22)$$

Эти формулы показывают, что  $G_{ab}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  представляет собой аналитическую функцию комплексной переменной  $\omega$  в ее верхней полуплоскости, а  $G_{ab}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega)$  — аналитическую функцию комплексной переменной  $\omega$  в ее нижней полуплоскости.

Если ввести функцию комплексной переменной  $z$

$$G_{ab}(\mathbf{k}, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\mathcal{J}_{ba}(\mathbf{k}, \omega')}{z - \omega'} (e^{\beta(\omega' + \mu(m-n))} - 1), \quad (4.1.23)$$

то запаздывающую и опережающую функцию Грина можно рассматривать как предельные значения функции  $G_{ab}(\mathbf{k}, z)$  при  $z \rightarrow \omega + i0$  и  $z \rightarrow \omega - i0$ :

$$G_{ab}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega) = G_{ab}(\mathbf{k}, \omega \pm i0). \quad (4.1.24)$$

Замечая, что

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp \pi i \delta(x) \equiv \mp \pi i \delta_{\pm}(x), \quad (4.1.25)$$

имеем

$$G_{ab}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) - G_{ab}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \mathcal{J}_{ba}(\mathbf{k}, \omega) (e^{\beta(\omega + \mu(m-n))} - 1).$$

Поэтому

$$G_{ab}(\mathbf{k}, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G_{ab}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega') - G_{ab}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega')}{z - \omega'}. \quad (4.1.26)$$

Полученные соотношения могут быть использованы для установления некоторых свойств обобщенных восприимчивостей  $G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega)$ . Так как операторы  $\xi_i(\mathbf{x})$  являются эрмитовыми, то,

очевидно

$$G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t) = G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{x}, t)^*, \quad G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega)^* = G_{ij}^{(\pm)}(-\mathbf{k}, -\omega).$$

Кроме того, для произвольных операторов  $a$  и  $b$  в силу определения запаздывающих и опережающих функций Грина

$$G_{ab}^{(+)}(-\mathbf{x}, -t) = G_{ba}^{(-)}(\mathbf{x}, t),$$

и, следовательно,

$$G_{ab}^{(+)}(-\mathbf{k}, -\omega) = G_{ba}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Поэтому

$$G_{ij}^{(-)}(\mathbf{k}, \omega) = G_{ji}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)^*.$$

Учитывая это соотношение и используя (4.1.26), (4.1.24), получим

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega') - G_{ji}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega')^*}{\omega - \omega' + i0}. \quad (4.1.27)$$

Рассматривая совокупность функций  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  как некоторую матрицу  $G(\mathbf{k}, \omega)$ , перепишем последнее соотношение в виде

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G(\mathbf{k}, \omega') - G(\mathbf{k}, \omega')^+}{\omega - \omega' + i0},$$

где  $G(\mathbf{k}, \omega)^+$  — матрица, эрмитово-сопряженная по отношению к  $G(\mathbf{k}, \omega)$ . Используя (4.1.25), получим из (4.1.27) следующее соотношение, связывающее эрмитову и антиэрмитову части матрицы обобщенных восприимчивостей  $G(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G'(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G''(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'}, \quad (4.1.28)$$

где

$$G'(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \{G(\mathbf{k}, \omega) + G(\mathbf{k}, \omega)^+\},$$

$$G''(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{2} \{G(\mathbf{k}, \omega) - G(\mathbf{k}, \omega)^+\}.$$

Можно показать, что справедливо также соотношение

$$G''(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{G'(\mathbf{k}, \omega')}{\omega - \omega'}. \quad (4.1.29)$$

(Оба эти соотношения называются *дисперсионными соотношениями Крамерса — Кронига*.)

Выше мы получили уравнения (4.1.17) для фурье-компонент функций Грина. Эти уравнения имеют одинаковый вид как для запаздывающих, так и для опережающих функций Грина. Ис-

пользуя сформулированные теперь аналитические свойства функций Грина, можно сказать, что для нахождения запаздывающих (опережающих) функций Грина из уравнений (4.1.17) нужно наложить требование аналитичности решений в верхней (нижней) полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ . Это требование обычно называется *условием спектральности* [25].

Функции Грина обладают рядом свойств симметрии, связанных с инвариантностью уравнений квантовой механики относительно различных преобразований. Рассмотрим, например, симметрию функций Грина, связанную с инвариантностью уравнений квантовой механики относительно обращения времени. Так как операторы  $\xi_i, \xi_j$  эрмитовы, то

$$i \operatorname{Sp} \omega [\xi_i(\mathbf{x}, t), \xi_j(0)] = -i \operatorname{Sp} \omega^* [\xi_i^*(\mathbf{x}, t), \xi_j^*(0)].$$

Вспомогая далее, что для унитарного оператора  $U$ , соответствующего обращению времени (см. 2.3.2), справедливы соотношения (2.3.52), (2.3.53), получим

$$\begin{aligned} -i \operatorname{Sp} \omega^* [\xi_i^*(\mathbf{x}, t), \xi_j^*(0)] &= -i \operatorname{Sp} U^+ \omega^* U [U^+ \xi_i^*(\mathbf{x}, t) U, \\ U^+ \xi_j^*(0) U] &= -i \operatorname{Sp} \omega [\xi_i(\mathbf{x}, -t), \xi_j(0)] \varepsilon_i \varepsilon_j = \\ &= \varepsilon_i \varepsilon_j i \operatorname{Sp} \omega [\xi_j(-\mathbf{x}, t), \xi_i(0)], \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_i$  — временная сигнатура оператора  $\xi_i$ .

Из этих формул вытекает следующее соотношение для фурье-компонент функций Грина  $G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G_{ij}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon_i \varepsilon_j G_{ji}^{(\pm)}(-\mathbf{k}, \omega), \quad (4.1.30)$$

которое и выражает свойство симметрии функций Грина (или обобщенных восприимчивостей) при обращении времени.

## § 4.2. Общая теория релаксационных процессов

**4.2.1. Интегральное уравнение для статистического оператора в случае слабого взаимодействия.** Перейдем теперь к исследованию кинетических процессов в тех случаях, когда гамильтониан системы можно разбить на два слагаемых  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ , где  $\mathcal{H}_0$  включает в себя основные взаимодействия, а  $V$  описывает относительно слабые взаимодействия. Например, в случае газа под  $\mathcal{H}_0$  можно понимать гамильтониан свободных частиц, а под  $V$  — гамильтониан взаимодействия между ними. Но разбиение  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_0$  и  $V$  возможно не только в случае газа. Например, при исследовании кинетических процессов в ферромагнетиках под  $\mathcal{H}_0$  следует понимать гамильтониан обменного взаимодействия, а под  $V$  — гамильтониан релятивистских взаимодействий.

Начнем с изучения пространственно-однородных систем. Если исходить из гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  (мы называли его усеченным

гамильтонианом), то по прошествии достаточно большого времени статистический оператор системы не будет, вообще говоря, стремиться к равновесному распределению Гиббса с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . Однако, согласно эргодическому соотношению (2.4.31), можно утверждать, что при достаточно больших временах ( $t \gg \tau_0$ ,  $\tau_0$  будем называть временем хаотизации) также возникает некоторое универсальное состояние, отличающееся от равновесного и характеризуемое не пятью интегралами движения  $\mathcal{H}$ ,  $P$ ,  $N$ , а, вообще говоря, большим числом некоторых операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ), которые определяются структурой гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  и свойствами его симметрии. Именно, при  $t \gg \tau_0$  будет справедливо соотношение

$$e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \rho^{(0)}(e^{iat} \text{Sp } \rho \hat{\gamma}), \quad (4.2.1)$$

где  $\rho$  — начальное значение статистического оператора системы,

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \exp \{ \Omega(\gamma) - Y_\alpha(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha \}$$

и величины  $\Omega(\gamma)$  и  $Y_\alpha(\gamma)$  определяются с помощью уравнений

$$\text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) = 1, \quad \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha$$

( $\gamma$  в аргументах различных величин обозначает совокупность  $c$ -чисел  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ ; по повторяющемуся индексу подразумевается суммирование). Как мы только что упоминали, операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$  зависят от свойств симметрии гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ . Это находит свое отражение в соотношениях (2.4.27),  $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta} \hat{\gamma}_\beta$ , где матрица  $a \equiv \|a_{\alpha\beta}\|$  также определяется структурой гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ .

Мы будем считать, что совокупность операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$  нам известна, хотя нахождение их и представляет сложную задачу, которая должна специально решаться в каждом конкретном случае. Считая ее решенной, мы поставим вопрос, как будет вести себя статистический оператор системы  $\rho(t)$  при достаточно больших временах  $t \gg \tau_0$  в том случае, если учесть относительно слабые взаимодействия, описываемые гамильтонианом  $V$ .

Подобно тому, как в классическом случае при учете слабого взаимодействия сохраняется возможность описания состояния системы с помощью одночастичной функции распределения (в соответствии с этим многочастичные функции распределения были функционалами одночастичной функции распределения), так и в квантовом случае при учете слабых взаимодействий сохраняется возможность описания состояния системы с помощью величин  $\gamma_\alpha(t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{\gamma}_\alpha$ . Это значит, что статистический оператор  $\rho(t)$  с учетом всех взаимодействий при  $t \gg \tau_0$  будет зависеть от времени и от начального состояния системы только через посредство параметров  $\gamma_\alpha(t; \rho)$ :

$$\rho(t) \equiv e^{-i\mathcal{H}t} \rho e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma(\gamma(t; \rho)), \quad (4.2.2)$$



где  $\rho = \rho(0)$  — начальное значение статистического оператора  $\rho(t)$  \*). Это соотношение аналогично классическому соотношению (1.2.2), а формула (4.2.1) — классической формуле (1.2.1) (в классической теории под  $\mathcal{H}_0$  понимается гамильтониан системы свободных частиц). Более подробно вопрос об асимптотическом представлении (4.2.2) мы рассмотрим в § 4.3.

При учете только гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  величины  $\gamma_\alpha$ , вообще говоря, не остаются постоянными, а изменяются со временем в соответствии с законом  $\gamma(t) = \exp(iat)\gamma(0)$ . Если учитывать теперь слабые взаимодействия, то величины  $\gamma_\alpha(t)$  будут испытывать дополнительное изменение, которое будет, однако, медленным по сравнению с изменением, вызываемым гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  и приводящим к установлению универсального распределения  $\rho^{(0)}(\gamma)$ . Иными словами, можно сказать, что система будет успевать «подстраиваться» к мгновенным неравновесным значениям параметров  $\gamma_\alpha$  \*\*). Такая ситуация имеет место благодаря тому, что время релаксации  $\tau_r$  параметров  $\gamma_\alpha$  к своим равновесным значениям значительно больше времени хаотизации  $\tau_0$ ,  $\tau_r \gg \tau_0$ . Это неравенство всегда выполняется при достаточно слабом взаимодействии, так как время хаотизации  $\tau_0$  не зависит от интенсивности взаимодействия  $V$ , а  $\tau_r \rightarrow \infty$  при  $V \rightarrow 0$ .

Оператор  $\sigma(\gamma)$  мы будем называть *огрубленным* статистическим оператором \*\*\*). Наша задача будет заключаться теперь в том, чтобы, не рассматривая переходных процессов, приводящих к установлению огрубленного статистического оператора  $\sigma(\gamma)$ , найти структуру этого оператора и зависимость величин  $\gamma(t; \rho)$  от времени и от начального значения статистического оператора  $\rho$  \*\*\*\*). При этом ясно, что так как  $\sigma(\gamma(t))$  ( $\gamma(t) = \gamma(t; \rho)$ ) представляет собой статистический оператор в момент времени  $t$ , когда параметры  $\gamma$  имеют значения  $\gamma(t; \rho)$ , то должны быть справедливы соотношения

$$\text{Sp } \sigma(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha. \quad (4.2.3)$$

\*) Впервые идея о сокращенном описании состояния системы была высказана Гильбертом, Энскогом и Чепменом при выводе уравнений газодинамики из кинетического уравнения Больцмана. Идея о том, что многочастичные функции распределения становятся при больших временах функционалами одночастичной функции распределения или функционалами гидродинамических переменных принадлежит Боголюбову.

\*\*\*) Первые работы, в которых при исследовании кинетических процессов развивалась идея о сокращенном описании состояний, связанном с иерархией времен релаксаций были: работа Ландау о выравнивании температур в плазме [72]; работы Гуревича [45] и Ахiezера и Алексина [3] о намагниченности газов; работа Ахiezера, Барьяхтара, Пелетминского [4] о кинетических процессах в ферромагнетиках.

\*\*\*\*) Понятие огрубленного статистического оператора было впервые введено фон Нейманом [83]. Огрубление при этом связывалось с построением взаимно коммутирующих операторов, соответствующих макроскопическим величинам. Мы здесь и далее, так же как и в первой главе, под огрублением понимаем упрощенное состояние системы в процессе ее естественной эволюции.

\*\*\*\*\*) Мы следуем ниже работам [88].

Статистический оператор  $\sigma(\gamma(t))$  должен удовлетворять уравнению движения

$$i \frac{\partial \sigma}{\partial t} = [\mathcal{H}, \sigma],$$

а так как  $\sigma$  зависит от времени только через посредство параметров  $\gamma(t)$ , то

$$i \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \dot{\gamma}_\alpha = [\mathcal{H}, \sigma(\gamma)].$$

Умножая это уравнение на  $\hat{\gamma}_\beta$  и используя соотношение (4.2.3), получим после вычисления шпура

$$\dot{\gamma}_\alpha(t) = i \text{Sp } \sigma(\gamma(t)) [\mathcal{H}, \hat{\gamma}_\alpha] \equiv \mathcal{L}_\alpha(\gamma(t)) \quad (4.2.4)$$

и, следовательно,

$$i \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \mathcal{L}_\alpha(\gamma) = [\mathcal{H}, \sigma(\gamma)]. \quad (4.2.5)$$

Это уравнение и должно служить для нахождения статистического оператора  $\sigma(\gamma)$ , определив который можно согласно уравнению (4.2.4) найти закон изменения величин  $\gamma_\alpha$  со временем.

Само по себе уравнение (4.2.5) не позволяет еще однозначно найти статистический оператор  $\sigma(\gamma)$ : для этого необходимо знать, так же как и в классическом случае, «граничное условие» для оператора  $\sigma(\gamma)$ . Чтобы установить это условие, обратимся к эргодическому соотношению (4.2.1) и возьмем в нем в качестве  $\rho$  оператор  $\sigma(\gamma)$  \*). Используя соотношение (4.2.3), получим

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma(\gamma) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \rho^{(0)}(e^{i\alpha\tau}\gamma),$$

или

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma(e^{-i\alpha\tau}\gamma) e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \rho^{(0)}(\gamma) \quad (4.2.6)$$

(здесь предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$  должен производиться после термодинамического предельного перехода в средних значениях физических величин, см. § 2.4). Это соотношение и является искомым «граничным условием», которым должно быть дополнено уравнение (4.2.5). Заметим, что условие (4.2.6) аналогично «граничному условию» (1.2.3) для классических систем.

Дифференциальное уравнение (4.2.5) может быть, так же как и в классическом случае, преобразовано в интегральное уравнение для статистического оператора  $\sigma(\gamma)$ , которое автоматически учитывает «граничное условие» (4.2.6). Положим

---

\*) Статистический оператор  $\rho$  в (4.2.2) должен в пределе  $Z^p \rightarrow \infty$  удовлетворять принципу ослабления корреляций. Этому принципу удовлетворяет оператор  $\sigma(\gamma)$ .

с этой целью

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha(\gamma) &= \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) + L_\alpha(\gamma), \\ \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) &= i \operatorname{Sp} \sigma(\gamma) [\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha], \\ L_\alpha(\gamma) &= i \operatorname{Sp} \sigma(\gamma) [V, \hat{\gamma}_\alpha].\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

Величину  $\mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma)$  можно, очевидно, согласно (2.4.27), (4.2.3) представить в виде

$$\mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) = i a_{\alpha\beta} \gamma_\beta. \quad (4.2.8)$$

Подставляя (4.2.7) в (4.2.5), получим

$$\begin{aligned}i \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) - [\mathcal{H}_0, \sigma(\gamma)] &= f(\gamma), \\ f(\gamma) &= [V, \sigma(\gamma)] - i \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} L_\alpha(\gamma).\end{aligned}\quad (4.2.9)$$

Левая часть этого уравнения не содержит явно гамильтониана взаимодействия  $V$ , правая же часть линейна по  $V$ . Сделав в уравнении (4.2.9) подстановку  $\gamma \rightarrow \exp(i a \tau) \gamma$  и замечая, что, согласно (4.2.8),

$$\mathcal{L}^{(0)}(e^{i a \tau} \gamma) = e^{i a \tau} \mathcal{L}^{(0)}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial \tau} e^{i a \tau} \gamma$$

и, следовательно,

$$\left. \frac{\partial \sigma(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) \right|_{\gamma \rightarrow e^{i a \tau} \gamma} = \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(e^{i a \tau} \gamma),$$

получим

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(e^{i a \tau} \gamma) - [\mathcal{H}_0, \sigma(e^{i a \tau} \gamma)] = f(e^{i a \tau} \gamma).$$

Вводя обозначения

$$\sigma_\tau = e^{i \mathcal{H}_0 \tau} \sigma(e^{i a \tau} \gamma) e^{-i \mathcal{H}_0 \tau}, \quad (4.2.10)$$

перепишем это уравнение в виде

$$i \frac{\partial \sigma_\tau}{\partial \tau} = e^{i \mathcal{H}_0 \tau} f(e^{i a \tau} \gamma) e^{-i \mathcal{H}_0 \tau}.$$

Замечая, что, согласно (4.2.6), (4.2.10),

$$\sigma_{-\infty} = \rho^{(0)}(\gamma), \quad \sigma_0 = \sigma(\gamma),$$

получим, интегрируя последнее уравнение в пределах  $\tau = -\infty$   $\tau = 0$ :

$$\sigma(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i \mathcal{H}_0 \tau} f(e^{i a \tau} \gamma) e^{-i \mathcal{H}_0 \tau}.$$

Как мы уже не раз отмечали, несобственный интеграл по  $\tau$  должен вычисляться после термодинамического предельного перехода. Поэтому удобно ввести под знак интеграла множитель

ехр  $\eta\tau$  ( $\eta > 0$ ) и после вычисления с помощью  $\sigma(\gamma)$  многочастичных функций распределения и перехода к термодинамическому пределу устремить  $\eta$  к нулю ( $\eta \rightarrow +0$ ). Таким образом,

$$\sigma(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) + i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{L}\sigma\tau} \left\{ [\sigma(\gamma), V] + \right. \\ \left. + i \frac{\partial\sigma(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha} L_\alpha(\gamma) \right\}_{\gamma \rightarrow e^{i\alpha\tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{L}\sigma\tau}, \quad (4.2.11)$$

где

$$L_\alpha(\gamma) = i \text{Sp } \sigma(\gamma) [V, \hat{\gamma}_\alpha].$$

Это и есть интегральное уравнение для огрубленного статистического оператора  $\sigma(\gamma)$ . Умножив его на произведение операторов рождения и уничтожения частиц  $\psi^+(x_1) \dots \psi(x_n)$  и вычислив шпур, мы получим цепочку зацепляющихся интегральных уравнений для многочастичных функций распределения, которая аналогична цепочке интегральных уравнений (1.2.11) для многочастичных функций распределения в классическом случае.

Интегральный член в правой части этого уравнения явно пропорционален гамильтониану взаимодействия  $V$ , который мы предполагаем малым. Поэтому решение уравнения (4.2.11) можно искать в виде ряда по степеням  $V$ :

$$\sigma(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(\gamma).$$

Подставляя это разложение в (4.2.11), получим рекуррентное соотношение

$$\sigma^{(n)}(\gamma) = i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{L}\sigma\tau} \left\{ [\sigma^{(n-1)}(\gamma), V] + \right. \\ \left. + i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\partial\sigma^{(l)}(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha} L_\alpha^{(n-l)}(\gamma) \right\}_{\gamma \rightarrow e^{i\alpha\tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{L}\sigma\tau}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.2.12)$$

где

$$\sigma^{(0)}(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma) \quad \text{и} \quad L_\alpha^{(l)}(\gamma) = i \text{Sp } \sigma^{(l-1)}(\gamma) [V, \hat{\gamma}_\alpha].$$

В частности, отсюда следует, что

$$\sigma^{(1)}(\gamma) = \\ = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\mathcal{L}\sigma\tau} \left\{ i [\rho^{(0)}(\gamma), V] - L_\alpha^{(1)}(\gamma) \frac{\partial\rho^{(0)}(\gamma)}{\partial\gamma_\alpha} \right\}_{\gamma \rightarrow e^{i\alpha\tau}\gamma} \cdot e^{-i\mathcal{L}\sigma\tau}, \\ L_\alpha^{(1)}(\gamma) = i \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V, \hat{\gamma}_\alpha].$$

Согласно (4.2.1)

$$e^{i\mathcal{L}_0\tau}\rho^{(0)}(e^{i\alpha\tau}\gamma)e^{-i\mathcal{L}_0\tau} = \rho^{(0)}(\gamma), \quad (4.2.13)$$

поэтому

$$e^{i\mathcal{L}_0\tau} \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \Big|_{\gamma \rightarrow e^{i\alpha\tau}\gamma} e^{-i\mathcal{L}_0\tau} = \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\beta} (e^{-i\alpha\tau})_{\beta\alpha},$$

$$L_\alpha^{(1)}(e^{i\alpha\tau}\gamma) = i \operatorname{Sp} e^{-i\mathcal{L}_0\tau} \rho^{(0)}(\gamma) e^{i\mathcal{L}_0\tau} [V, \hat{\gamma}_\alpha] =$$

$$= (e^{i\alpha\tau})_{\alpha\beta} i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), \hat{\gamma}_\beta],$$

где  $V(\tau)$  — оператор взаимодействия  $V$  в представлении взаимодействия

$$V(\tau) = e^{i\mathcal{L}_0\tau} V e^{-i\mathcal{L}_0\tau}$$

(мы учли, что, согласно (2.4.27),  $e^{i\mathcal{L}_0\tau} \hat{\gamma} e^{-i\mathcal{L}_0\tau} = e^{i\alpha\tau} \hat{\gamma}$ ). Используя эти формулы, можно представить оператор  $\sigma^{(1)}(\gamma)$  в виде

$$\sigma^{(1)}(\gamma) = i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \left\{ [\rho^{(0)}(\gamma), V(\tau)] - \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), \hat{\gamma}_\alpha] \right\}. \quad (4.2.14)$$

Параметры  $\gamma_\alpha$ , согласно (4.2.4), должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\dot{\gamma}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) + L_\alpha^{(1)}(\gamma) + L_\alpha^{(2)}(\gamma) + \dots, \quad (4.2.15)$$

где

$$\mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\gamma) = i a_{\alpha\beta} \dot{\gamma}_\beta, \quad L_\alpha^{(1)}(\gamma) = i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V, \hat{\gamma}_\alpha],$$

$$L_\alpha^{(2)}(\gamma) = - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) \left[ V(\tau), [V, \hat{\gamma}_\alpha] + i \dot{\gamma}_\beta \frac{\partial L_\alpha^{(1)}(\gamma)}{\partial \gamma_\beta} \right]$$

и  $\rho^{(0)}(\gamma)$  определяется формулой (2.4.29).

Уравнения (4.2.15) можно рассматривать как обобщенные кинетические уравнения для величин  $\gamma_\alpha$ . В частности, если  $\mathcal{H}_0$  представляет собой гамильтониан свободных частиц, то в качестве параметров  $\gamma_\alpha$  следует выбрать одночастичную функцию распределения, причем индекс  $\alpha$  нумерует в этом случае импульсную переменную (см. § 5.1). Мы получим таким образом квантовые кинетические уравнения, описывающие эволюцию системы при  $t \gg \tau_0$ . Этот этап эволюции мы будем называть *кинетическим*. Подробному изучению квантовых кинетических уравнений посвящена следующая глава.

Заметим, что каждое из слагаемых, входящих в  $\sigma^{(n)}(\gamma)$  в формуле (4.2.12), расходится при интегрировании по  $\tau$ , и только их общая сумма является конечной (подробнее об этом см. § 4.3). Покажем теперь, как найти зависимость параметров  $\gamma$

от начального значения статистического оператора  $\rho$  [89]. С этой целью заметим, что так как  $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = a_{\alpha\beta} \hat{\gamma}_\beta$ , то

$$e^{-i\alpha\tau} \text{Sp } \rho(\tau) \hat{\gamma} = \text{Sp } \rho \hat{\gamma} - i \int_0^\tau d\tau' e^{-i\alpha\tau'} \text{Sp} [V, \rho(\tau')] \hat{\gamma}, \quad (4.2.16)$$

где  $\rho(\tau) = \exp(-i\mathcal{H}\tau) \rho \exp(i\mathcal{H}\tau)$ . Мы должны перейти здесь в асимптотическую область  $\tau \gg \tau_0$ , в которой  $\rho(\tau) \xrightarrow{\tau \gg \tau_0} \sigma(\gamma(\tau; \rho))$ .

Однако в правой части (4.2.16) при применении теории возмущений по  $V$  отдельные члены ряда при  $\tau \rightarrow \infty$  будут расходиться (эти так называемые секулярные члены будут рассмотрены в § 4.3). Поэтому мы заменим  $\rho(\tau')$  под знаком интеграла на  $\rho(\tau') - \sigma(\gamma(\tau'; \rho)) + \sigma(\gamma(\tau'; \rho))$ . Тогда в интеграле по  $\tau'$  от первых двух слагаемых  $\rho(\tau') - \sigma(\gamma(\tau'; \rho))$  можно, согласно (4.2.2), заменить верхний предел интегрирования по  $\tau'$  на  $\infty$ . Замечая далее, что, так как в силу (4.2.9),

$$-ie^{-i\alpha\tau} \text{Sp } \sigma(\gamma(\tau; \rho)) [\hat{\gamma}, V] = \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\alpha\tau} \gamma(\tau; \rho),$$

то вклад в интеграл по  $\tau'$  от последнего слагаемого  $\sigma(\gamma(\tau'; \rho))$  равен

$$-i \int_0^\tau d\tau' e^{-i\alpha\tau'} \text{Sp} [\hat{\gamma}, V] \sigma(\gamma(\tau'; \rho)) = e^{-i\alpha\tau} \{\gamma(\tau; \rho) - \gamma(0; \rho)\}.$$

Поэтому

$$\gamma(0; \rho) = \text{Sp } \rho \hat{\gamma} - i \int_0^\infty d\tau e^{-i\alpha\tau} \text{Sp} \{\rho - \sigma(\gamma(0; \rho))\} e^{-i\mathcal{H}\tau} [\hat{\gamma}, V] e^{i\mathcal{H}\tau}. \quad (4.2.17)$$

Эта формула позволяет при известном  $\sigma(\gamma)$  найти по методу теории возмущений (разлагая  $\exp(\pm i\mathcal{H}\tau)$  и  $\sigma(\gamma)$  в ряды по  $V$ ) величины  $\gamma(0; \rho)$  в любом приближении по  $V$ . Используя  $\gamma(0; \rho)$  в качестве начального условия при решении уравнений (4.2.4), можно найти  $\gamma(\tau; \rho)$ .

Обратим внимание на то, что величины  $\gamma(0; \rho)$  не совпадают с истинными начальными значениями параметров  $\gamma$ , равными  $\text{Sp } \rho \hat{\gamma}$ . В общем случае, как мы видели, истинные значения параметров  $\gamma$  совпадают с  $\gamma(\tau; \rho)$  только при  $\tau \gg \tau_0$ , величины же  $\gamma(0; \rho)$  необходимы для восстановления зависимости огрубленного статистического оператора от начального состояния  $\rho$ .

**4.2.2. Интегральное уравнение для статистического оператора в случае малых неоднородностей.** В предыдущем разделе мы предположали, что состояние системы является пространственно-однородным. Теперь мы перейдем к изучению релаксационных процессов для пространственно-неоднородных состояний. Что ка-

сается гамильтониана  $\mathcal{H}$ , то в принципе следует различать два случая: во-первых, когда  $\mathcal{H}$  может быть представлен, так же как и в предыдущем разделе, в виде суммы  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ , где  $\mathcal{H}_0$  описывает сильные, а  $V$  относительно слабые взаимодействия, и, во-вторых, когда такое разбиение невозможно (последняя ситуация встречается, например, в случае жидкости).

Для пространственно-однородных состояний возможность разбиения  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_0$  и  $V$  приводила к иерархии времен релаксации  $\tau_0 \ll \tau_r$ , где  $\tau_0$  — время хаотизации, определяемое гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  и  $\tau_r$  — время релаксации, определяемое относительно слабыми взаимодействиями  $V$ . В случае пространственно-неоднородных состояний релаксационные процессы возникают не только благодаря возможному разбиению  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_0$  и  $V$ , но также и благодаря самому факту существования пространственных неоднородностей. Особенно важна такая ситуация в том случае, когда разбиение  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}_0$  и  $V$  практически не имеет смысла, как, например, в случае жидкостей, для которых в отсутствие пространственных неоднородностей не возникает иерархии времен релаксации, так как время хаотизации сравнимо с временем релаксации. Действительно,  $\tau_0 \sim r_0/\bar{v}$ , а  $\tau_r \sim l/\bar{v}$ , где  $r_0$  — радиус действия сил,  $l$  — длина свободного пробега частиц и  $\bar{v}$  — их тепловая скорость. Так как  $l \sim (n\sigma)^{-1}$  ( $n$  — плотность частиц,  $\sigma \sim r_0^2$  — сечение рассеяния частиц), то  $\tau_0/\tau_r \sim (r_0/a)^3$ , где  $a$  — среднее расстояние между частицами. Поэтому величина  $\tau_0/\tau_r$  значительно меньше единицы для газов, когда  $r_0 \ll a$  и порядка единицы для жидкостей, когда  $r_0 \sim a$ . По этой причине для жидкости выпадает кинетический этап эволюции и остается лишь *гидродинамический этап эволюции*, который характеризуется тем, что в каждой точке пространства быстро, за время  $\tau_r$ , устанавливается локальное распределение Гиббса с медленно изменяющимися от точки к точке термодинамическими параметрами. Характерное время изменения этих параметров  $\tau_m$  растет с ростом характерных размеров неоднородностей  $a_m$  и при больших  $a_m$  значительно превосходит время  $\tau_r$ , которое не зависит от  $a_m$ . Характерные размеры пространственных неоднородностей на гидродинамическом этапе эволюции велики по сравнению с микроскопическими расстояниями, т. е. по сравнению с межатомными расстояниями для жидкости и длиной свободного пробега частиц  $l$  для газа. (Подчеркнем, что для газов, в отличие от жидкостей, кинетический этап эволюции существует, причем он предшествует гидродинамическому этапу эволюции.) Легко видеть, что условие  $a_m \gg r_0$  (или  $l$ ) приводит к условию  $\tau_m \gg \tau_r$ . Иерархия времен релаксации  $\tau_m \gg \tau_r$  позволяет упростить описание состояния системы на гидродинамическом этапе эволюции, наступающем при  $t \gg \tau_r$ . Именно, при  $t \gg \tau_r$  статистический оператор будет зависеть от времени только через посредство плотностей гидродинамических величин — массы, импульса и энергии.

Переходя к изучению эволюции пространственно-неоднородных состояний, мы начнем с рассмотрения эволюции, обусловленной гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , который может быть либо частью полного гамильтониана  $\mathcal{H}$ , либо совпадать с  $\mathcal{H}$  (как, например, в случае жидкости). Влияние гамильтониана слабого взаимодействия  $V$  на эволюцию пространственно-неоднородных состояний мы исследуем в следующем разделе.

Как мы видели, для пространственно-однородных начальных состояний эволюция, связанная с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , завершается при  $t \gg \tau_0$  формированием статистического оператора  $\rho^{(0)}(\gamma)$  (см. формулу (4.2.1)). Если же начальное состояние не является пространственно-однородным, то при  $t \gg \tau_0$  (но  $t \leq \tau_m$ ) такая асимптотика уже не будет справедлива. Однако, так же как и в случае гидродинамики, при  $t \gg \tau_0$  возникает упрощение в описании системы. Именно, при  $t \gg \tau_0$  состояние системы можно описывать плотностями  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  величин  $\gamma_\alpha$ , от которых функциональным образом будет зависеть статистический оператор, т. е. будет справедливо асимптотическое равенство

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma_0(\zeta_\alpha(\mathbf{x}', t; \rho)), \quad (4.2.18)$$

где оператор  $\sigma_0$ , являющийся операторным функционалом  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , зависит от времени и от начального значения статистического оператора  $\rho$  только через посредство средних значений плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t; \rho)$ . Этот оператор мы будем называть *огрубленным статистическим оператором*.

Плотностям физических величин соответствуют операторы плотностей  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , связанные с операторами  $\hat{\gamma}_\alpha$  соотношениями

$$\hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.2.19)$$

В этом и в следующем разделе мы будем предполагать для простоты, что операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$  являются интегралами движения по отношению к гамильтониану  $\mathcal{H}_0$ , т. е.  $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$  и, следовательно, согласно (2.4.27),  $a_{\alpha\beta} = 0$ . В соответствии с этим мы будем считать, что операторы плотностей  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$  в шредингеровском представлении удовлетворяют дифференциальным законам сохранения

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = -\frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad (4.2.20)$$

где  $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$  — операторы плотностей потоков величин  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ .

Огрубленный статистический оператор по определению величин  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t; \rho)$  удовлетворяет соотношению

$$\text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}), \quad (4.2.21)$$



аналогичному соотношению (4.2.3). Согласно (4.2.18) справедливы также соотношения

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t + \tau; \rho)),$$

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\rho e^{i\mathcal{H}_0\tau})).$$
(4.2.22)

Отсюда и из (4.2.21) следует, что

$$\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t + \tau; \rho) = \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t; e^{-i\mathcal{H}_0\tau}\rho e^{i\mathcal{H}_0\tau}).$$

Дифференцируя первую из формул (4.2.22) по  $\tau$  и полагая затем  $\tau = 0$ , получим

$$-i[\mathcal{H}_0, \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))] = \frac{\partial}{\partial t} \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)),$$

или

$$-i[\mathcal{H}_0, \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}'))] = \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})} L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')),$$
(4.2.23)

$$L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) = i \text{Sp} \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) [\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})],$$

причем

$$\dot{\hat{\zeta}}_\alpha(\mathbf{x}, t) = L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}', t)), \quad \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t; \rho).$$
(4.2.24)

Величину  $L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}'))$  можно, согласно (4.2.20), представить в виде

$$L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp} \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}).$$
(4.2.25)

Получим теперь интегральное уравнение для огрубленного статистического оператора  $\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}'))$ , которое позволит развить теорию возмущений по пространственным градиентам плотностей  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ . Представим с этой целью оператор, входящий в левую часть (4.2.18), в виде

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} = \rho - i \int_0^t d\tau e^{-i\mathcal{H}_0\tau} [\mathcal{H}_0, \rho] e^{i\mathcal{H}_0\tau},$$

или

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t}\rho e^{i\mathcal{H}_0 t} = \rho + \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)) - \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) -$$

$$-i \int_0^t d\tau \left\{ e^{-i\mathcal{H}_0\tau} [\mathcal{H}_0, \rho] e^{i\mathcal{H}_0\tau} - i \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', \tau; \rho)) \right\}.$$
(4.2.26)

Заметим теперь, что в соответствии с (4.2.18) подынтегральное выражение стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \infty$ . Поэтому, переходя в уравнении (4.2.26) к пределу  $t \rightarrow \infty$  и используя (4.2.18),

(4.2.22), (4.2.23), получим

$$\begin{aligned} \sigma_0(\zeta(x')) &= \\ &= \rho - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ i[\mathcal{H}_0, \rho] + \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta(x')) \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \\ \zeta_\alpha(x) &\equiv \zeta_\alpha(x, 0; \rho). \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

Это уравнение по существу эквивалентно асимптотическому соотношению (4.2.18), но пользоваться им удобнее, чем (4.2.18), так как оно имеет вид точного равенства.

Формула (4.2.27), так же как и (4.2.18), справедлива, вообще говоря, для любого статистического оператора  $\rho$ , удовлетворяющего принципу ослабления корреляций. Мы выберем в качестве  $\rho$  локально-равновесный (по отношению к  $\rho^{(0)}$ ) статистический оператор  $w(Y(x'))$ :

$$w(Y(x')) = \exp \left\{ \Omega - \int d^3x' Y_\alpha(x') \hat{\zeta}_\alpha(x') \right\}, \quad (4.2.28)$$

где  $Y_\alpha(x)$  — произвольные  $c$ -числовые функции и величина  $\Omega$  определяется из условия нормировки  $\text{Sp } w(Y(x')) = 1$ . Такой выбор статистического оператора  $\rho$  делается по следующим соображениям. Во-первых, оператор  $w(Y(x'))$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций; во-вторых, оператор  $w(Y(x'))$  содержит достаточно много произвольных функций  $Y_\alpha(x)$ , благодаря чему возникает возможность определить оператор  $\sigma_0(\zeta(x'))$  как функционал произвольных функций  $\zeta_\alpha(x)$ ; наконец, при таком выборе  $\rho$  коммутатор  $[\mathcal{H}_0, \rho] = [\mathcal{H}_0, w(Y(x'))]$  будет обращаться в нуль вместе с пространственными производными  $Y_\alpha(x)$ , благодаря чему возникает возможность в случае малых градиентов  $\zeta_\alpha(x)$  (или  $Y_\alpha(x)$ ) применить теорию возмущений, считая интегральный член в уравнении (4.2.27) малым.

Подстановка  $w(Y(x'))$  вместо  $\rho$  в уравнение (4.2.27) дает [89, 90]

$$\begin{aligned} \sigma_0(\zeta(x')) &= w(Y(x')) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ i[\mathcal{H}_0, w(Y(x'))] - \right. \\ &\quad \left. - \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(\zeta(x'))}{\delta\zeta_\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp } \sigma_0(\zeta(x')) \hat{\zeta}_{\alpha k}(x) \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \end{aligned} \quad (4.2.29)$$

Величины  $\zeta_\alpha(x) \equiv \zeta_\alpha(x, 0; w(Y(x')))$  должны быть вполне определенными функционалами термодинамических сил  $Y_\alpha(x)$ ,  $\zeta_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x; Y(x'))$ . Эти функционалы могут быть определены из условия совместности (4.2.29) с (4.2.21):

$$\text{Sp } \sigma_0(\zeta(x')) \hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x).$$

Установим теперь, как зависят величины  $\zeta_\alpha(x, 0; \rho)$  от  $\rho$ . Заметим с этой целью, что, согласно (4.2.21),  $\zeta_\alpha(x, 0; \rho) =$

$= \text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}))$ . Подставляя сюда вместо  $\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho))$  выражение (4.2.27) и используя (4.2.23), получим

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho) = \text{Sp } \rho \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) - \\ - i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{i\mathcal{H}_0\tau} [\mathcal{H}_0, \rho - \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho))] e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}).$$

Учитывая, что  $i[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] = -\frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})}{\partial x_k}$ , найдем отсюда

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho) = \text{Sp } \rho \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^0 d\tau \cdot \text{Sp } e^{i\mathcal{H}_0\tau} (\rho - \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho))) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}). \quad (4.2.30)$$

Это уравнение и будет служить нам для определения зависимости  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho)$  (в теории возмущений по пространственным градиентам) от  $\rho$ . Полагая в (4.2.30)  $\rho = \omega(Y(\mathbf{x}'))$ , получим

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}')) = \text{Sp } \omega(Y(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \{\omega(Y(\mathbf{x}')) - \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}'; Y(\mathbf{x}')))\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}). \quad (4.2.31)$$

Ясно, что это уравнение эквивалентно соотношению (4.2.21).

Покажем теперь, как строить теорию возмущений по градиентам плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Заметим с этой целью, что

$$e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}} \omega(Y(\mathbf{x}')) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} = \omega(Y(\mathbf{x} + \mathbf{x}')), \quad (4.2.32)$$

где  $\mathbf{P}$  — оператор импульса системы. Поэтому, используя (4.2.32), (2.2.34), имеем, согласно (4.2.29),

$$e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}} \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} = \sigma_0(\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{x}')). \quad (4.2.33)$$

Пусть требуется вычислить среднее значение некоторого трансляционно-инвариантного квазилокального оператора  $a(\mathbf{x})$ , т. е. величину  $\text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) a(\mathbf{x})$ . Согласно формуле (4.2.33) ее можно представить в виде

$$\text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) a(\mathbf{x}) = \text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}' + \mathbf{x})) a(0).$$

В последнее выражение входит оператор  $a(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x} = 0$ , поэтому при вычислении шпура будут существенны только значения  $\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$  при  $\mathbf{x}' \approx 0$ , так что можно пользоваться разложением

$$\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \zeta(\mathbf{x}) + x'_k \frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \dots,$$

которому соответствует разложение огрубленного статистического оператора в ряд по градиентам плотностей

$$\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}' + \mathbf{x})) = \sigma_0^{(0)}(\mathbf{x}) + \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots,$$

$$\sigma_0^{(0)}(\mathbf{x}) = \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}')) \Big|_{\zeta(\mathbf{x}') \rightarrow \zeta(\mathbf{x})}, \quad (4.2.34)$$

$$\sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \zeta_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} \int d^3x' x'_k \frac{\delta \sigma_0(\zeta(\mathbf{x}''))}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x}')} \Big|_{\zeta(\mathbf{x}'') \rightarrow \zeta(\mathbf{x})},$$

.....

Так как  $\text{Sp } \sigma_0(\zeta(\mathbf{x} + \mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , то члены разложения  $\sigma_0^{(k)}(\mathbf{x})$  удовлетворяют соотношениям

$$\text{Sp } \sigma_0^{(k)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) = \delta_{k0} \zeta_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.2.35)$$

Чтобы найти операторы  $\sigma_0^{(0)}(\mathbf{x})$ ,  $\sigma_0^{(1)}(\mathbf{x})$ , ... из интегрального уравнения (4.2.29) разложим оператор  $w(Y(\mathbf{x} + \mathbf{x}'))$  в ряд по степеням градиентов  $Y_\alpha(\mathbf{x})$

$$w(Y(\mathbf{x} + \mathbf{x}')) = w^{(0)}(\mathbf{x}) + w^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.2.36)$$

Учитывая операторное разложение  $\exp(A + B)$  по степеням  $B$ :

$$\exp(A + B) = e^A \left\{ 1 + \int_0^1 d\lambda e^{-\lambda A} B e^{\lambda A} + \dots \right\},$$

найдем

$$w^{(0)}(\mathbf{x}) = \exp \{ \Omega^{(0)}(\mathbf{x}) - Y_\alpha(\mathbf{x}) \hat{v}_\alpha \}, \quad (4.2.37)$$

$$w^{(1)}(\mathbf{x}) = - \frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_j (\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}', \lambda) - \langle \zeta_\alpha \rangle),$$

.....

где использованы обозначения  $a(\mathbf{x}', \lambda) = w^{(0)-\lambda} a(\mathbf{x}') w^{(0)\lambda}$ ,  $\langle a \rangle = \text{Sp } w^{(0)} a$ . Заметим, что  $w^{(0)}(\mathbf{x})$  совпадает с  $\rho^{(0)}(\gamma)$ , если в выражении для  $\rho^{(0)}(\gamma)$  в качестве  $Y_\alpha$  взять  $Y_\alpha(\mathbf{x})$ .

Используя теперь интегральное уравнение (4.2.29) и соотношения (4.2.35), нетрудно найти члены разложения  $\sigma_0^{(k)}(\mathbf{x})$  огрубленного статистического оператора в ряд по градиентам плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Первый член разложения имеет, очевидно, вид

$$\sigma_0^{(0)}(\mathbf{x}) = w^{(0)}(\mathbf{x}), \quad (4.2.38)$$

где  $\Omega^{(0)}(\mathbf{x})$  и  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  находятся из уравнений

$$\text{Sp } w^{(0)}(\mathbf{x}) = 1, \quad \text{Sp } w^{(0)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.2.39)$$

Заметим, что  $[\mathcal{H}_0, w^{(0)}] = 0$  и что, согласно (4.2.37),

$$[\mathcal{H}_0, w^{(1)}(\mathbf{x})] = -i \frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x' x'_k \frac{\partial}{\partial x'_i} \hat{\zeta}_{\alpha i}(\mathbf{x}', \lambda)$$

и, следовательно,

$$[\mathcal{H}_0, w^{(1)}(\mathbf{x})] = i \frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_k} w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x' (\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}', \lambda) - \langle \zeta_{\alpha k} \rangle)$$

(мы использовали при интегрировании по частям принцип ослабления корреляций). Используя эти формулы и соотношения (4.2.36), (4.2.37), найдем из уравнения (4.2.29) [93]

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) = & w^{(1)}(\mathbf{x}) - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) + \\ & + \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left\{ \frac{\partial Y_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x_j} w^{(0)}(\mathbf{x}) e^{i\mathcal{E}\tau} (\hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}', \lambda) - \langle \zeta_{\alpha j} \rangle) e^{-i\mathcal{E}\tau} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \langle \zeta_{\alpha j} \rangle}{\partial x_j} \right\}, \quad (4.2.40) \end{aligned}$$

где  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  по-прежнему связаны с  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  формулами (4.2.39). (Заметим, что слагаемое  $\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \text{Sp } w^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha$  в (4.2.40) возникло в результате переопределения величин  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  в соответствии с формулой (4.2.35),  $\text{Sp } \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) = 0$ .) Этому выражению можно придать более простую форму, если воспользоваться соотношением

$$\frac{\partial \langle \zeta_{\alpha k} \rangle}{\partial Y_\beta} = \frac{\partial \langle \zeta_{\beta k} \rangle}{\partial Y_\alpha}, \quad (4.2.41)$$

которое мы докажем несколько позже. Замечая, что  $\partial Y_\alpha / \partial \zeta_\beta = \partial Y_\beta / \partial \zeta_\alpha$  и используя (4.2.41), получим

$$\frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \langle \zeta_{\alpha j} \rangle}{\partial x_j} = \frac{\partial Y_\delta}{\partial x_j} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \zeta_{\delta j} \rangle}{\partial \zeta_\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) = & w^{(1)}(\mathbf{x}) - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta_\alpha} \text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) + \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} w^{(0)}, \quad (4.2.42) \\ & \int_{-\infty}^0 d\tau \int d^3x \int_0^1 d\lambda e^{i\mathcal{E}\tau} (\hat{\zeta}'_{\alpha j}(\mathbf{x}', \lambda) - \langle \zeta'_{\alpha j} \rangle) e^{-i\mathcal{E}\tau}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{\zeta}'_{\alpha j}(\mathbf{x}) = \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \langle \zeta_{\alpha j} \rangle}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(\mathbf{x}).$$

Уравнения движения для плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  с точностью до членов квадратичных по градиентам, имеют, согласно (4.2.24), следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = & - \frac{\partial}{\partial x_k} \zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}), \\ \zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}) = & \text{Sp } \sigma_0^{(0)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) + \text{Sp } \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) + \dots \quad (4.2.43) \end{aligned}$$

Этими уравнениями мы воспользуемся в главе 6 для вывода уравнений гидродинамики.

Мы показали, как найти разложение  $\sigma_0(\zeta)$  в ряд по степеням градиентов плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Чтобы полностью определить огрубленный статистический оператор  $\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))$ , необходимо еще найти зависимость величин  $\zeta_\alpha$  от начального статистического оператора  $\rho$ . Мы будем предполагать, что этот оператор имеет следующую структуру:

$$\rho = \exp \left\{ \Omega - \int d^3x C_\alpha(\mathbf{x}) \hat{a}_\alpha(\mathbf{x}) \right\}, \quad (4.2.44)$$

где  $\hat{a}_\alpha(\mathbf{x})$  — произвольные квазилокальные операторы и  $c_\alpha(\mathbf{x})$  — медленно меняющиеся  $c$ -числовые функции. (Такая структура, как мы видели в 2.4.1, соответствует тому, что  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций.) Используя уравнение (4.2.30), а также разложение (4.2.34), можно с помощью этой формулы получить разложение плотностей  $\zeta(\mathbf{x}, 0; \rho)$  в ряд по градиентам функций  $C_\alpha(\mathbf{x})$ . Уравнения движения (4.2.43) позволяют после этого найти  $\zeta(\mathbf{x}, t; \rho)$ , а тем самым и огрубленный статистический оператор. Мы вернемся к задаче нахождения  $\zeta(\mathbf{x}, 0; \rho)$  в § 4.4 при исследовании низкочастотной асимптотики функций Грина.

Отметим, что, так же как и в однородном случае (см. конец раздела 4.2.1), величины  $\zeta(\mathbf{x}, t; \rho)$  совпадают с истинными значениями плотностей  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  только при  $t \gg \tau_0$ , величины же  $\zeta(\mathbf{x}, 0; \rho)$  необходимы для восстановления зависимости огрубленного статистического оператора от начального состояния.

Докажем в заключение этого раздела соотношение (4.2.41). Замечая, что

$$\frac{\partial \omega^{(0)}}{\partial Y_\alpha} = -\omega^{(0)} \int d^3x \int_0^1 d\lambda (\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \hat{\zeta}_\alpha \rangle),$$

имеем

$$\frac{\partial \langle \zeta_{\beta k} \rangle}{\partial Y_\alpha} = -\text{Sp } \omega^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\hat{\zeta}_\alpha(0, \lambda) - \langle \hat{\zeta}_\alpha \rangle) \hat{\zeta}_{\beta k}(-\mathbf{x}).$$

Так как (см. (4.2.20))  $\zeta_{\beta k}(-\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_s} x_k \hat{\zeta}_{\beta s}(-\mathbf{x}) - i x_k [\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\beta(-\mathbf{x})]$ , то с учетом принципа ослабления корреляций мы получим

$$\frac{\partial \langle \zeta_{\beta k} \rangle}{\partial Y_\alpha} = \text{Sp } \omega^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \hat{\zeta}_\alpha \rangle) i [\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\beta(0)] x_k.$$

Совершая перестановку операторов под знаком шпура и снова используя соотношение (4.2.20), перепишем это выражение в

виде

$$\frac{\partial \langle \xi_{\beta k} \rangle}{\partial Y_{\alpha}} = \text{Sp } w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x \frac{\partial \hat{\xi}_{\alpha i}(x, \lambda)}{\partial Y_i} x_k \hat{\xi}_{\beta}^{(0)}.$$

Интегрируя по частям и учитывая при этом принцип ослабления корреляций, найдем

$$\frac{\partial \langle \xi_{\beta k} \rangle}{\partial Y_{\alpha}} = - \text{Sp } w^{(0)} \int_0^1 d\lambda \int d^3x \hat{\xi}_{\alpha k}(x, \lambda) (\hat{\xi}_{\beta}^{(0)}(0) - \langle \hat{\xi}_{\beta} \rangle),$$

откуда и следует соотношение (4.2.41),

Формула (4.2.41) показывает, что величины  $\langle \xi_{\alpha k} \rangle$  можно представить в виде

$$\langle \xi_{\alpha k} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Y}} \frac{\partial \Omega_k}{\partial Y_{\alpha}}, \quad (4.2.45)$$

где  $\Omega_k$  — некоторая функция термодинамических сил. Эта формула аналогична формуле

$$\langle \xi_{\alpha} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Y}} \frac{\partial \Omega}{\partial Y_{\alpha}}.$$

Поэтому величину  $\mathcal{Y}^{-1} \Omega_k$  можно назвать *плотностью потока термодинамического потенциала*  $\mathcal{Y}^{-1} \Omega$ . Наряду с  $\mathcal{Y}^{-1} \Omega_k$  можно ввести плотность потока энтропии

$$s_k = - \mathcal{Y}^{-1} \Omega_k + Y_{\alpha} \langle \xi_{\alpha k} \rangle. \quad (4.2.46)$$

Эта формула аналогична формуле для плотности энтропии

$$s = - \mathcal{Y}^{-1} \Omega + Y_{\alpha} \langle \xi_{\alpha} \rangle.$$

С учетом только линейных по градиентам членов в уравнениях движения (4.2.43)

$$\frac{\partial \xi_{\alpha}}{\partial t} = - \frac{\partial \xi_{\alpha k}^{(0)}}{\partial x_k}, \quad \xi_{\alpha k}^{(0)} = \langle \hat{\xi}_{\alpha k} \rangle = \text{Sp } w^{(0)} \hat{\xi}_{\alpha k}^{(0)},$$

справедливо соотношение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0, \quad (4.2.47)$$

представляющее собой условие адиабатичности процессов, протекающих в системе.

**4.2.3. Интегральное уравнение для статистического оператора неоднородных систем с учетом слабых взаимодействий.** В предыдущем разделе мы рассматривали релаксационные процессы в слабонеоднородных системах и видели, что конечным этапом эволюции неоднородного состояния будет пространственно-однородное состояние, описываемое статистическим оператором  $\rho^{(0)}(\mathcal{Y})$ . Этот оператор, вообще говоря, не совпадает с равновесным статистическим оператором Гиббса, который характери-

зается только энергией, импульсом и числом частиц системы, в то время как в числе параметров  $\gamma$ , определяющих оператор  $\rho^{(0)}(\gamma)$ , могут быть и другие аддитивные интегралы движения, связанные с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . Для того чтобы в системе могло установиться полное статистическое равновесие, необходим учет добавочных взаимодействий, не включенных в гамильтониан  $\mathcal{H}_0$ . При учете этих взаимодействий система не будет иметь никаких дополнительных аддитивных интегралов движения, кроме энергии, импульса и числа частиц, и состояние статистического равновесия, описываемое распределением Гиббса будет достигаться.

Таким образом, возникает задача нахождения статистического оператора слабонеоднородной системы при наличии дополнительных, слабых, не входящих в  $\mathcal{H}_0$  взаимодействий, описываемых гамильтонианом  $V$ . Исследованием этого вопроса мы и будем заниматься в этом разделе.

Состояние системы при достаточно больших временах будет по-прежнему описываться статистическим оператором, который зависит от времени и от начального состояния только через посредство плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Мы будем обозначать этот оператор через  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$ . Ясно, что изменение плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  со временем будет определяться не только градиентами плотностей, но и слабым гамильтонианом  $V$ . В соответствии с этим будет справедливо асимптотическое соотношение

$$e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)), \quad (4.2.48)$$

где  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$  и величина  $\tau_0$  по-прежнему определяется гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ . Задача заключается в том, чтобы найти операторный функционал  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  и зависимость плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t; \rho)$  от  $t$  и  $\rho$ .

Так же как и в предыдущем разделе, огрубленный статистический оператор  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  удовлетворяет соотношению

$$\text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}) \quad (4.2.49)$$

и уравнению

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)) e^{i\mathcal{H}\tau} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t + \tau; \rho)), \quad (4.2.50)$$

причем по-прежнему

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t + \tau; \rho) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t; e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}). \quad (4.2.51)$$

Дифференцируя (4.2.50) по  $\tau$  и полагая затем  $\tau = 0$ , получим функциональное уравнение для  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$

$$-i[\mathcal{H}, \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))] = \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')), \quad (4.2.52)$$

где

$$L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) = i \text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) [\mathcal{H}, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})], \quad \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')). \quad (4.2.53)$$



(так же как и в предыдущем разделе, используется сокращенное обозначение  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t; \rho)$ ). Величину  $L_\alpha$  можно, согласно (3.2.19), представить в виде

$$L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) + i \text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) [V, \zeta_\alpha(\mathbf{x})]. \quad (4.2.54)$$

Разложение статистического оператора  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  по градиентам плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  производится по формулам (4.2.34), в которые вместо  $\sigma_0(\zeta(\mathbf{x}'))$  должен быть подставлен оператор  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  (при этом необходимо иметь в виду, что гамильтониан взаимодействия  $V$  коммутирует с оператором импульса  $P$ ).

Выведем теперь интегральное уравнение для  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$ , которое позволит получать члены разложения  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  по степеням взаимодействия  $V$  и градиентов плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Согласно (4.2.18) имеют место соотношения:

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sigma_0(\zeta^0(\mathbf{x}', \tau; \sigma)),$$

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} w(Y(\mathbf{x}')) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sigma_0(\zeta^0(\mathbf{x}', \tau; w)),$$

где  $\zeta^0(\mathbf{x}, t; \rho)$  совпадают с функциями  $\zeta(\mathbf{x}, t; \rho)$ , введенными в предыдущем разделе. Выберем функции  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$\zeta_\alpha^0(\mathbf{x}, 0; \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))) = \zeta_\alpha^0(\mathbf{x}, 0; w(Y(\mathbf{x}'))).$$

Тогда будет иметь место асимптотическое равенство

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \{\sigma(\zeta(\mathbf{x}')) - w(Y(\mathbf{x}'))\} e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0.$$

С другой стороны, левая часть этого равенства может быть представлена в виде

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \{\sigma(\zeta(\mathbf{x}')) - w(Y(\mathbf{x}'))\} e^{i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) - w(Y(\mathbf{x}')) - i \int_0^\tau d\tau' e^{-i\mathcal{H}_0\tau'} [\mathcal{H}_0, \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) - w(Y(\mathbf{x}'))] e^{i\mathcal{H}_0\tau'}.$$

Поэтому

$$\sigma(\zeta(\mathbf{x}')) = w(Y(\mathbf{x}')) + i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} [\mathcal{H}_0, \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) - w(Y(\mathbf{x}'))] e^{-i\mathcal{H}_0\tau}.$$

Используя (4.2.52), получим окончательно следующее уравнение для определения  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  [90, 98]:

$$\sigma(\zeta(\mathbf{x}')) = w(Y(\mathbf{x}')) - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ i [\mathcal{H}_0, w(Y(\mathbf{x}'))] + i [V, \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))] + \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta(\mathbf{x}'))}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}')) \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \quad (4.2.55)$$

где  $L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta(\mathbf{x}'))$  определяется формулой (4.2.54) и связь функционального аргумента  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  с функциональным аргументом  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  определяется формулой

$$\text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}')) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}). \quad (4.2.56)$$

Интегральный член в (4.2.55) мал, так как он содержит члены, пропорциональные либо  $V$ , либо градиентам плотностей  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Поэтому уравнение (4.2.55) позволяет легко развить теорию возмущений для нахождения  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$ .

Выясним теперь, как найти зависимость параметров  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho)$  от начального значения статистического оператора  $\rho$ . Для этого заметим, что, согласно асимптотическому соотношению (4.2.48),

$$\sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) = \rho + i \int_0^\infty d\tau [\mathcal{H}, e^{-i\mathcal{H}\tau} \{ \sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) - \rho \} e^{i\mathcal{H}\tau}],$$

откуда, замечая, что  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho) = \text{Sp } \sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , имеем

$$\begin{aligned} \zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho) = & \text{Sp } \rho \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) + \int_{-\infty}^0 d\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp } e^{i\mathcal{H}\tau} (\sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) - \rho) e^{-i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x}) - \right. \\ & \left. - i \text{Sp } e^{i\mathcal{H}\tau} (\sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho)) - \rho) e^{-i\mathcal{H}\tau} [V, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] \right\}. \quad (4.2.57) \end{aligned}$$

Это уравнение содержит «память» о начальном значении статистического оператора  $\rho$  и позволяет, зная ряд теории возмущений для  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))$  (определяемый уравнением (4.2.55)) и разложение  $\rho$  по градиентам, найти ряд теории возмущений для  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho)$ .

Уравнения (4.2.55), (4.2.57) переходят, очевидно, в уравнения (4.2.29), (4.2.30) при  $V = 0$ . Если же в уравнениях (4.2.55), (4.2.57) положить градиенты плотностей равными нулю, то мы получим уравнения (4.2.11), (4.2.17) для статистического оператора пространственно-однородной системы (при  $a_{\alpha\beta} = 0$ )\*).

В следующих главах мы применим уравнения (4.2.55), (4.2.29) для описания кинетического и гидродинамического этапов эволюции неоднородной системы. При этом мы убедимся, что уравнения (4.2.55), (4.2.53) для кинетического этапа эволюции неоднородной системы формально могут быть сведены к уравнениям (4.2.29), в которых коэффициенты  $a_{\alpha\beta}$  будут отличны от нуля благодаря наличию пространственной неоднородности системы.

\*) Несколько иная схема исследования релаксационных процессов, основанная на аналогии между теорией рассеяния и асимптотическими решениями уравнения Лиувилля, развивалась в работах Зубарева [59] и Зубарева и Калашникова [60]. Применение статистического оператора всей системы при исследовании релаксационных процессов в магнетиках рассмотрено в работах Провоторова [100].

Мы видели, что огрубленный статистический оператор  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))$  зависит от начального значения статистического оператора  $\rho$  только через посредство плотностей  $\zeta_{\alpha}(\mathbf{x}, t; \rho)$ . Вводя обозначение

$$\sigma\{\rho\} \equiv \sigma(\zeta(\mathbf{x}', 0; \rho))$$

и используя (4.2.50), (4.2.51), можно  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))$  представить в виде

$$\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)) = \sigma\{e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t}\}. \quad (4.2.58)$$

Это соотношение можно интерпретировать следующим образом. Если  $\rho$  представляет собой статистический оператор в начальный момент времени, то  $e^{-i\mathcal{H}t}\rho e^{i\mathcal{H}t}$  будет точным статистическим оператором в момент времени  $t$ . Поэтому соотношение (4.2.58) показывает, что символ  $\sigma$  можно рассматривать как некоторый оператор — «оператор огрубления», действующий в пространстве статистических операторов (а не в гильбертовом пространстве векторов состояний) и переводящий точные статистические операторы в огрубленные статистические операторы.

Покажем, что справедливо соотношение

$$\sigma\{\sigma\{\rho\}\} = \sigma\{\rho\} \quad (4.2.59)$$

или сокращенно

$$\sigma^2 = \sigma.$$

Иными словами, «оператор огрубления» обладает свойствами оператора проектирования\*). Для получения этого соотношения заметим, что, согласно (4.2.48),

$$e^{-i\mathcal{H}t}\sigma\{\rho\}e^{i\mathcal{H}t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \sigma\{\rho\})).$$

С другой стороны, при любых  $t$  имеет место соотношение

$$e^{-i\mathcal{H}t}\sigma\{\rho\}e^{i\mathcal{H}t} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)),$$

а так как  $\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho))$  уже представляет собой асимптотический статистический оператор, то при всех  $t$  справедливо соотношение

$$\sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \sigma\{\rho\})) = \sigma(\zeta(\mathbf{x}', t; \rho)).$$

Из этой формулы и определения  $\sigma\{\rho\}$  и следует формула (4.2.59).

Отметим в заключение этого параграфа, что полученные здесь уравнения движения для величин  $\zeta_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$  являются локальными по времени, так же как локальными являются кинетические уравнения в классическом случае (см. §§ 1.2, 1.3). Следует, однако, иметь в виду, что локальная по времени их форма

\*) Соотношение типа (4.2.59) было получено Балеску [14] в связи с выводом так называемого «master equation».

отнюдь не означает какого-либо упрощения, так как она полностью учитывает эффекты памяти в виде разложения по малому параметру, который всегда имеется в схеме сокращенного описания.

### § 4.3. Суммирование секулярных членов

**4.3.1. Асимптотические операторы.** В предыдущих разделах мы предполагали, что по прошествии достаточно большого времени происходит упрощение в описании состояния системы, в результате которого статистической оператор становится функционалом некоторых вполне определенных параметров, которые определяются гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$  и охватывают широкий круг величин; именно, в зависимости от структуры гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  такими величинами могут быть: одночастичная функция распределения, гидродинамические величины и т. д.

Теперь мы разъясним на примере пространственно-однородной системы (которая рассматривалась в 4.2.1), как возникает такого рода функциональная зависимость. Иными словами, мы разъясним, каким образом устанавливается в результате эволюции системы с полным гамильтонианом  $\mathcal{H}$  асимптотическое соотношение (4.2.2)

$$\rho(\tau) \equiv e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow[\tau \gg \tau_0]{} \sigma(\gamma(\tau; \rho)).$$

При этом мы будем предполагать для простоты, что  $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$ .

Полагая, как и раньше,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , разложим оператор  $\rho(\tau)$  в ряд по степеням  $V$ :

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n, \quad (4.3.1)$$

где  $n$ -й член ряда определяется формулой

$$\begin{aligned} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n &= \\ &= (-i)^n e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \int_0^\tau d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-1}} d\tau_n [V(\tau_1), \dots [V(\tau_n), \rho] \dots] e^{i\mathcal{H}_0\tau} \end{aligned}$$

и  $V(\tau) = \exp(i\mathcal{H}_0\tau) V \exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$  — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия. (В выражении вида  $\{e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n$  индекс  $n$  обозначает порядок теории возмущений, связанной с разложением по степеням  $V$  только экспонент  $\exp(\pm i\mathcal{H}\tau)$ , а не оператора  $A$ .)

Наша главная задача будет заключаться в том, чтобы найти временную асимптотику при  $\tau \rightarrow \infty$  оператора  $\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n$  (\*). Из формулы (4.3.1) ясно, что в области больших  $\tau$  могут возникать секулярные члены, растущие с  $\tau$  не быстрее чем  $\tau^n$ . Иными словами,

$$\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \sum_{l=0}^n \tau^l \sigma_l^{(n)}(\rho), \quad (4.3.2)$$

где  $\sigma_l^{(n)}(\rho)$  — некоторые операторы, функциональным образом зависящие от  $\rho$ . Операторы  $\sigma_l^{(n)}(\rho)$ , которые мы будем называть *асимптотическими операторами*, пропорциональны  $n$ -й степени взаимодействия. (Если  $a_{\alpha\beta} \neq 0$ , то асимптотические операторы  $\sigma_l^{(n)}$  будут осциллирующими функциями  $\tau$  [89].)

\*) При решении этой задачи мы будем следовать работам [89].

Будем считать, что соотношение (4.3.2) определяет асимптотические операторы не только для статистических операторов  $\rho$ , удовлетворяющих принципу ослабления корреляций, но и для суперпозиции таких операторов. При этом из (4.3.2) будет следовать соотношение

$$\sigma_l^{(n)} \{ \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 \} = \alpha_1 \sigma_l^{(n)} \{ \rho_1 \} + \alpha_2 \sigma_l^{(n)} \{ \rho_2 \},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — произвольные числа. (Заметим, что в силу нелинейности принципа ослабления корреляций суперпозиция статистических операторов, удовлетворяющих принципу ослабления корреляций этому принципу не удовлетворяет.) Такое расширение области определения асимптотических операторов позволит нам производить операции над аргументом  $\rho$ , при которых может нарушаться принцип ослабления корреляций.

Заметим теперь, что, согласно эргодическому соотношению (4.2.1) и определению (4.3.2), если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то оператор  $\sigma_0^{(0)} \{ \rho \}$  имеет вид

$$\sigma_0^{(0)} \{ \rho \} = \rho^{(0)} (\text{Sp } \rho \hat{\gamma}), \quad (4.3.3)$$

где  $\rho^{(0)}(\gamma)$  определяется формулой (2.4.29).

Выясним некоторые свойства асимптотических операторов. Замечая, что

$$\{ e^{-i\mathcal{E}\tau} (\tau + \tau') \rho e^{i\mathcal{E}\tau} (\tau + \tau') \}_n = \sum_{m=0}^n \{ e^{-i\mathcal{E}\tau'} \{ e^{-i\mathcal{E}\tau} \rho e^{i\mathcal{E}\tau} \}_m e^{i\mathcal{E}\tau'} \}_{n-m},$$

имеем, согласно (4.3.2),

$$A^{(n)} (\tau + \tau') = \sum_{m=0}^n \{ e^{-i\mathcal{E}\tau'} A^{(m)} (\tau) e^{i\mathcal{E}\tau'} \}_{n-m},$$

где

$$A^{(n)} (\tau) = \sum_{l=0}^n \tau^l \sigma_l^{(n)} \{ \rho \}.$$

Приравнивая в этой формуле, справедливой, очевидно, при любых  $\tau$  и  $\tau'$  (так как  $A^{(n)}(\tau)$  представляет собой полином от  $\tau$ ), коэффициенты при  $\tau^l$ , найдем:

$$\sum_{m=0}^{n-l} \tau'^m C_{m+l}^l \sigma_{m+l}^{(n)} \{ \rho \} = \sum_{m=l}^n \{ e^{-i\mathcal{E}\tau'} \sigma_l^{(m)} \{ \rho \} e^{i\mathcal{E}\tau'} \}_{n-m}. \quad (4.3.4)$$

Если  $l = 0$ , то

$$\sum_{m=0}^n \tau'^m \sigma_m^{(n)} \{ \rho \} = \sum_{m=0}^n \{ e^{-i\mathcal{E}\tau'} \sigma_0^{(m)} \{ \rho \} e^{i\mathcal{E}\tau'} \}_{n-m}. \quad (4.3.5)$$

Дифференцируя (4.3.4) по  $\tau'$  и полагая  $\tau' = \tau$ , получим

$$(l+1) \sigma_{l+1}^{(n)} \{ \rho \} = -i [\mathcal{H}_0, \sigma_l^{(n)} \{ \rho \}] - i [V, \sigma_l^{(n-1)} \{ \rho \}]. \quad (4.3.6)$$

Эта формула показывает, что для определения  $\sigma_l^{(n)} \{ \rho \}$  достаточно знать  $\sigma_0^{(n)} \{ \rho \}$ .

Введем производящий оператор (по индексу  $n$ )  $\sigma_l \{ \rho \} = \sum_{n=l}^{\infty} \lambda^n \sigma_l^{(n)} \{ \rho \}$  для системы асимптотических операторов  $\sigma_l^{(n)} \{ \rho \}$  ( $n = l, l+1, \dots$ ). Так как  $\sigma_l^{(n)} \{ \rho \}$  пропорционально  $V^n$ , то можно считать параметр  $\lambda$  включенным в  $V$ , и положить в дальнейшем  $\lambda = 1$

$$\sigma_l \{ \rho \} = \sum_{n=l}^{\infty} \sigma_l^{(n)} \{ \rho \}. \quad (4.3.7)$$

В терминах производящих операторов  $\sigma_l \{\rho\}$  формулу (4.3.6) можно переписать в виде

$$\sigma_{l+1} \{\rho\} = -\frac{l}{l+1} [\mathcal{H} \sigma_l \{\rho\}]. \quad (4.3.8)$$

Так как  $\mathcal{H} \exp(-i\mathcal{H}\tau) \rho \exp(i\mathcal{H}\tau) = e^{-i\mathcal{H}\tau} \mathcal{H} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}$ , то

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_0 \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n] + [V. \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1}] = \\ = \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \mathcal{H}_0 \rho e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n + \{e^{-i\mathcal{H}\tau} [V. \rho] e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$[\mathcal{H}_0, \sigma_l^{(n)} \{\rho\}] + [V, \sigma_l^{(n-1)} \{\rho\}] = \sigma_l^{(n)} \{[\mathcal{H}_0, \rho]\} + \sigma_l^{(n-1)} \{[V, \rho]\}.$$

Используя определение производящего оператора  $\sigma_l \{\rho\}$ , имеем отсюда

$$[\mathcal{H}, \sigma_l \{\rho\}] = \sigma_l \{[\mathcal{H}, \rho]\}. \quad (4.3.9)$$

В дальнейшем мы покажем, что нахождение асимптотических операторов  $\sigma_l^{(n)} \{\rho\}$  при любом  $\rho$  сводится к нахождению их при специальном выборе  $\rho$ , а именно, при  $\rho = \rho^{(0)}(\gamma)$ . Введем поэтому обозначение

$$\sigma_l^{(n)}(\gamma) = \sigma_l^{(n)} \{\rho^{(0)}(\gamma)\}, \quad \sigma_l(\gamma) = \sigma_l \{\rho^{(0)}(\gamma)\}. \quad (4.3.10)$$

Из (4.3.3) следует, что

$$\sigma_0^{(0)}(\gamma) = \rho^{(0)}(\gamma). \quad (4.3.11)$$

Покажем, что  $\sigma_0(\gamma)$  связано с  $\rho^{(0)}(\gamma)$  и  $\sigma_0 \{\rho\}$  соотношением

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}\tau} ([V, \sigma_0(\gamma)] - \sigma_0 \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}) e^{-i\mathcal{H}\tau}. \quad (4.3.12)$$

Заметим для этого, что справедливо тождество

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \sigma_0^{(0)}(\gamma) e^{i\mathcal{H}\tau} = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i \int_0^\tau d\tau' e^{-i\mathcal{H}\tau'} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau'},$$

откуда

$$\begin{aligned} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho^{(0)}(\gamma) e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n = \\ = \sigma_0^{(0)}(\gamma) \delta_{n0} - i \int_0^\tau d\tau' \left( \{e^{-i\mathcal{H}\tau'} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau'}\}_{n-1} - \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{n-1} \tau'^l \sigma_l^{(n-1)} \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\} \right) + i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\tau'^{l+1}}{l+1} \sigma_l^{(n-1)} \{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}. \quad (4.3.13) \end{aligned}$$

Согласно (4.3.2) интеграл, входящий в эту формулу, сходится при  $\tau \rightarrow \infty$ . Поэтому, замечая, что

$$\{e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho^{(0)}(\gamma) e^{i\mathcal{H}\tau}\}_n \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \tau^l \sigma_l^{(n)}(\gamma),$$

получим, приравнявая в (4.3.13) коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ ,

$$\sigma_0^{n'}(\gamma) = -i \int_0^\infty d\tau \left( \{e^{-i\mathcal{H}\tau} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \right. \\ \left. - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)} \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.3.14)$$

$$\sigma_l^{(n)}(\gamma) = -\frac{i}{l} \sigma_{l-1}^{(n-1)} \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \}, \quad n = l, l+1, \dots \quad (4.3.15)$$

(Заметим, что формула (4.3.15) является следствием (4.3.8), (4.3.9).) Используя (4.3.5), формулу (4.3.14) можно переписать в виде

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma) = -i \int_0^\infty d\tau \left( \{e^{-i\mathcal{H}\tau} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1} - \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{n-1} \{e^{-i\mathcal{H}\tau} \sigma_0^{(m)} \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} e^{i\mathcal{H}\tau}\}_{n-1-m} \right)$$

или

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i \int_0^\infty d\tau e^{-i\mathcal{H}\tau} \left( [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] - \sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} \right) e^{i\mathcal{H}\tau}. \quad (4.3.16)$$

Это уравнение можно привести к виду (4.3.12), если воспользоваться тем, что для оператора  $B$ , имеющего структуру

$$B = \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V \quad (4.3.17)$$

( $A$  — произвольный оператор,  $\eta > 0$ ), справедливо интегральное уравнение

$$B = \int_0^\infty d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \{ A - i [V, B] \} e^{i\mathcal{H}_0\tau}. \quad (4.3.18)$$

Для доказательства этой формулы введем обозначение

$$\mathcal{A}(\tau) = e^{i\mathcal{H}_0\tau} e^{-i\mathcal{H}\tau} A e^{i\mathcal{H}\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}.$$

Тогда, как легко видеть, оператор  $\mathcal{A}(\tau)$  будет удовлетворять интегральному уравнению

$$\mathcal{A}(\tau) = A - i \int_0^\tau d\tau' [V(\tau'), \mathcal{A}(\tau')].$$

Оператор  $B$ , определяемый формулой (4.3.17), может быть поэтому представлен в виде

$$B = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} \left\{ e^{-i\mathcal{E}\tau} A e^{i\mathcal{E}_0\tau} - i \int_{-\tau}^0 d\tau' [V(\tau'), e^{-i\mathcal{E}\tau} \mathcal{A}(\tau + \tau') e^{i\mathcal{E}_0\tau}] \right\}.$$

Изменяя здесь порядок интегрирования по  $\tau$  и  $\tau'$ ,

$$B = \int_0^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{E}\tau} A e^{i\mathcal{E}_0\tau} - i \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{\eta\tau'} \left[ V(\tau'), \int_0^{\infty} d\tau e^{-\eta\tau} e^{-i\mathcal{E}\cdot(\tau-\tau')} \mathcal{A}(\tau) e^{i\mathcal{E}_0(\tau-\tau')} \right],$$

и используя определение (4.3.17) оператора  $B$ , мы и приходим к формуле (4.3.18).

Используя (4.3.18), уравнение (4.3.16) можно представить в виде

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) + \int_0^{\infty} d\tau e^{-i\mathcal{E}\tau} \left\{ -i[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] + i\sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} - i[V, B] \right\} e^{i\mathcal{E}_0\tau}, \quad (4.3.19)$$

где

$$B = -i \int_0^{\infty} d\tau e^{-i\mathcal{E}\tau} ([V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] - \sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \}) e^{i\mathcal{E}_0\tau} = \sigma_0(\gamma) - \sigma_0^{(0)}(\gamma).$$

Подставляя это выражение для  $B$  в (4.3.19), мы и приходим к формуле (4.3.12), из которой следует, что

$$\sigma_0^{(n)}(\gamma) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}_0\tau} ([V, \sigma_0^{(n-1)}(\gamma)] - \sigma_0^{(n-1)} \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \}) e^{-i\mathcal{E}\tau}. \quad (4.3.20)$$

Заметим, что уравнение (4.3.12) (или 4.3.20) не представляет собой замкнутого интегрального уравнения для определения  $\sigma_0(\gamma)$ , так как в это уравнение входит неизвестный оператор  $\sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \}$ . Однако, как мы покажем в следующих разделах, величину  $\sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \}$  можно выразить через  $\sigma_0(\gamma)$ .

Для определения асимптотических операторов  $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$  нам понадобится следующая формула:

$$\text{Sp } \sigma_0\{\rho\} \hat{\psi} = \text{Sp } \rho \hat{\psi} - i \int_0^{\infty} d\tau \text{Sp } e^{-i\mathcal{E}\tau} (\rho - \sigma_0\{\rho\}) e^{i\mathcal{E}_0\tau} [\hat{\psi}, V]. \quad (4.3.21)$$

Для доказательства этой формулы заметим, что при любых  $\tau$  справедливо соотношение

$$\text{Sp } \rho(\tau) \hat{\psi} = \text{Sp } \rho \hat{\psi} - i \int_0^{\tau} d\tau' \text{Sp } \rho(\tau') [\hat{\psi}, V],$$



где  $\rho(\tau) = e^{-i\mathcal{E}\tau} \rho e^{i\mathcal{E}\tau}$ . Используя формулу (4.3.2) и производя регуляризацию интеграла так же, как при выводе формулы (4.3.16), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \tau^i \text{Sp} \sigma_i^{(n)} \{\rho\} \hat{\gamma} &= \delta_{n0} \text{Sp} \rho \hat{\gamma} - \\ &- i \int_0^{\infty} d\tau \text{Sp} [\hat{\gamma}, V] \left( \{e^{-i\mathcal{E}\tau} \rho e^{i\mathcal{E}\tau}\}_{n-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)} \{\rho\} \right) - \\ &- i \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\tau^{l+1}}{l+1} \text{Sp} [\hat{\gamma}, V] \sigma_l^{(n-1)} \{\rho\}. \end{aligned}$$

Приравнявая здесь коэффициенты при одинаковых степенях  $\tau$ , найдем

$$\text{Sp} \sigma_0^{(n)} \{\rho\} \hat{\gamma} = \text{Sp} \rho \hat{\gamma} - i \int_0^{\infty} d\tau \text{Sp} [\hat{\gamma}, V] \left( \{e^{-i\mathcal{E}\tau} \rho e^{i\mathcal{E}\tau}\}_{n-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \tau^l \sigma_l^{(n-1)} \{\rho\} \right),$$

откуда, используя (4.3.5), (4.3.7), мы и приходим к формуле (4.3.21).

**4.3.2. Функциональное уравнение для асимптотических операторов.** Покажем теперь, что асимптотические операторы  $\sigma_0^{(n)} \{\rho\}$  удовлетворяют следующему функциональному уравнению:

$$\sum_{n=0}^m \sigma_0^{(m-n)} \{\sigma_0^{(n)} \{\rho\}\} = \sigma_0^{(m)} \{\rho\}. \quad (4.3.22)$$

Это уравнение вместе с принципом ослабления корреляций для  $\rho$  позволит нам выразить  $\sigma_0^{(n)} \{\rho\}$  через  $\sigma_0^{(n)} (\gamma)$ .

Для доказательства (4.3.22) обратимся к уравнению (4.3.5). Переходя в правой части (4.3.5) в асимптотическую область  $\tau \rightarrow \infty$  и используя (4.3.2), получим

$$\sum_{m=0}^n \tau^m \sigma_m^{(n)} \{\rho\} = \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^{n-m} \tau^l \sigma_l^{(n-m)} \{\sigma_0^{(m)} \{\rho\}\},$$

откуда

$$\sigma_m^{(n)} \{\rho\} = \sum_{l=0}^{n-m} \sigma_m^{(n-l)} \{\sigma_0^{(l)} \{\rho\}\}.$$

Полагая здесь  $m=0$ , мы и приходим к формуле (4.3.22).

В терминах производящего оператора  $\sigma_0 \{\rho\}$  формулу (4.3.22) можно переписать в виде

$$\sigma_0 \{\sigma_0 \{\rho\}\} = \sigma_0 \{\rho\}. \quad (4.3.23)$$

Если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то, согласно (4.3.10), (4.3.7), имеем

$$\sigma_0 \{\rho\} = \sigma_0 (\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0 \{\sigma_0^{(n)} \{\rho\}\}, \quad \gamma = \text{Sp} \rho \hat{\gamma}. \quad (4.3.24)$$

Покажем, что из (4.3.24) вытекает соотношение

$$\sigma_0 \{\rho\} = \sigma_0 (\gamma(\rho)). \quad (4.3.25)$$

где  $\gamma(\rho) = \text{Sp} \sigma_0 \{\rho\} \hat{\gamma}$  и  $\sigma_0(\gamma)$  — определяется формулой (4.3.10).

Подчеркнем, что соотношение (4.3.25) справедливо только в том случае, если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций.

Убедимся прежде всего в справедливости формулы (4.3.25) в первом приближении теории возмущений по  $V$ . Согласно (4.3.24) имеем

$$\sigma_0^{(1)}\{\rho\} = \sigma_0^{(1)}(\gamma) + \sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}.$$

Покажем, что второй член в правой части этой формулы равен

$$\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\} = \frac{\partial \sigma_0^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp } \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}. \quad (4.3.26)$$

Формула (4.3.3) определяет асимптотический оператор  $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}$  только для операторов  $\rho$ , удовлетворяющих принципу ослабления корреляций. Между тем,  $\sigma_0^{(1)}\{\rho\}$  не удовлетворяет этому принципу. Поэтому мы не можем непосредственно воспользоваться формулой (4.3.3) для определения  $\sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}$ . Однако асимптотические операторы  $\sigma_0^{(n)}\{\rho\}$  удовлетворяют соотношениям

$$\text{Sp } \sigma_0^{(n)}\{\rho\} a(x) b(y) \xrightarrow{x-y \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \text{Sp } \sigma_0^{(k)}\{\rho\} a(x) \text{Sp } \sigma_0^{(n-k)}\{\rho\} b(y), \quad (4.3.27)$$

где  $a(x)$  и  $b(y)$  — произвольные квазилокальные операторы. В связи с этим мы будем говорить, что система операторов  $\{\rho_0, \dots, \rho_n\}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций  $n$ -го порядка, если выполняются асимптотические соотношения

$$\text{Sp } \rho_l a(x) b(y) \xrightarrow{x-y \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^l \text{Sp } \rho_m a(x) \cdot \text{Sp } \rho_{l-m} b(y), \quad l = 0, 1, \dots, n.$$

Заметим, что такая ситуация возникает всякий раз, когда мы раскладываем статистический оператор  $\rho = \rho(\lambda)$ , зависящий от параметра  $\lambda$  и удовлетворяющий принципу ослабления корреляций, в ряд по степеням  $\lambda$ .

$$\rho(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \rho_n, \quad \rho_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \rho(\lambda)}{\partial \lambda^n} \right|_{\lambda=0}.$$

Совокупность первых  $n$  членов этого разложения  $\{\rho_0, \dots, \rho_n\}$  удовлетворяет тогда принципу ослабления корреляций  $n$ -го порядка.

Чтобы убедиться в справедливости (4.3.27), заметим, что так как оператор  $e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то, согласно

(4.3.2), совокупность операторов  $\sum_{l=0}^m \tau^l \sigma_l^{(m)}\{\rho\}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) удовлетворяет принципу ослабления корреляций  $n$ -го порядка при произвольном  $\tau$ . Отсюда следует, что и совокупность операторов  $\sigma_0^{(m)}\{\rho\}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) также удовлетворяет принципу ослабления корреляций  $n$ -го порядка, в соответствии с формулой (4.3.27).

Считая в (4.3.3) оператор  $\rho$  зависящим от некоторого параметра  $\lambda$ ,

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho(\lambda)\} = \rho^{(0)}(\text{Sp } \rho(\lambda) \hat{\gamma}),$$

получим, дифференцируя это соотношение по  $\lambda$  и полагая затем  $\lambda = 0$ ,

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho_1\} = \left. \frac{\partial \rho^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \right|_{\gamma = \text{Sp } \rho_0 \hat{\gamma}} \text{Sp } \rho_1 \hat{\gamma}_\alpha.$$

Эта формула справедлива в том случае, если совокупность операторов  $\{\rho_0, \rho_1\}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций первого порядка. Используя

эту формулу и замечая, что, согласно (4.3.27), совокупность операторов  $\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций первого порядка, мы и приходим к формуле (4.3.26) (учтено при этом, что  $\text{Sp } \sigma_0^{(0)}\{\rho\} \hat{\gamma} = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}$ ). Поэтому

$$\sigma_0^{(1)}\{\rho\} = \sigma_0^{(1)}(\gamma) + \frac{\partial \sigma_0^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp } \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}$$

Таким образом, с точностью до членов, квадратичных по  $V$ ,

$$\sigma_0^{(0)}\{\rho\} + \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \approx \sigma_0^{(0)}(\gamma + \text{Sp } \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}) + \sigma_0^{(1)}(\gamma),$$

где  $\gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}$ . Это соотношение с точностью до членов, квадратичных по  $V$ , совпадает с соотношением (4.3.25), которое мы хотим доказать (при этом  $\gamma(\rho) = \text{Sp } \sigma_0^{(0)}\{\rho\} \hat{\gamma} + \text{Sp } \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}$ ).

Прежде чем переходить к общему доказательству соотношения (4.3.25), покажем, что

$$\text{Sp } \sigma_0^{(n)}(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha = 0, \quad \text{Sp } \sigma_0^{(0)}\{\sigma_0^{(m)}\{\rho\}\} \hat{\gamma}_\alpha = \underline{\text{Sp}} \sigma_0^{(m)}\{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha. \quad (4.3.28)$$

Первая из этих формул следует из соотношения

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_0^{(n)}(\gamma) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

которое в свою очередь вытекает из (4.3.20). Действительно, так как  $[\mathcal{H}_0, \hat{\gamma}_\alpha] = 0$ , то  $\text{Sp } e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_0^{(n)}(\gamma) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{\gamma}_\alpha = \text{Sp } \sigma_0^{(n)}(\gamma) \hat{\gamma}_\alpha$ , и мы приходим к первой из формул (4.3.28). Вторая формула следует из первой, если учесть, что операторы  $\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \dots, \sigma_0^{(m)}\{\rho\}\}$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций  $m$ -го порядка. Из (4.3.23) и (4.3.28) вытекает соотношение

$$\sum_{n=1}^{m-1} \text{Sp } \sigma_0^{(m-n)}\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\} \hat{\gamma}_\alpha = 0, \quad m = 2, 3, \dots \quad (4.3.29)$$

Докажем теперь общее соотношение (4.3.25). Введем обозначение

$$\kappa_0\{\rho\} = \sigma_0\{\sigma_0^{(0)}\{\rho\}\}.$$

Тогда формулу (4.3.23) можно переписать в виде

$$\sigma_0\{\rho\} = \kappa_0\{\rho\} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_0\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}. \quad (4.3.30)$$

Ясно, что если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то

$$\kappa_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma) \quad \gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma} \quad (4.3.31)$$

(мы учли формулу (4.3.3)). Считая оператор  $\kappa_0(\rho)$  заданным, будем искать решение функционального уравнения (4.3.30) в виде

$$\sigma_0\{\rho\} = \kappa_0\{\rho\} + \kappa_1\{\rho\} + \kappa_2\{\rho\} + \dots, \quad (4.3.32)$$

где  $\kappa_n \sim V^n$  (при заданном  $\kappa_0\{\rho\}$ ). Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \kappa_1\{\rho\} &= \kappa_0\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\}, \\ &\dots \dots \dots \\ \kappa_n\{\rho\} &= \kappa_{n-1}\{\sigma_0^{(1)}\{\rho\}\} + \dots + \kappa_0\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

Таким образом, все  $\kappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) выражаются через  $\kappa_0\{\rho\}$ .

Покажем, что

$$\sum_{s=1}^n \kappa_s \{ \sigma_0^{(n+1-s)} \{ \rho \} \} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.3.34)$$

и, следовательно,

$$\kappa_n \{ \rho \} = \kappa_0 \{ \sigma_0^{(n)} \{ \rho \} \}. \quad (4.3.35)$$

Убедимся сперва в справедливости формулы  $\kappa_1 \{ \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \} = 0$ .

Замечая, что  $\kappa_1 \{ \rho \} = \kappa_0 \{ \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \}$  и учитывая, что операторы  $\sigma_0^{(0)} \{ \rho \}$ ,  $\sigma_0^{(1)} \{ \rho \}$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций первого порядка (если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций), имеем, согласно (4.3.31),

$$\kappa_1 \{ \rho \} = \frac{\partial \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp } \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}.$$

Поступая аналогичным образом, легко показать, что

$$\kappa_1 \{ \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \} = \frac{\partial^2 \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha \partial \gamma_\beta} \text{Sp } \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \hat{\gamma}_\alpha \cdot \text{Sp } \sigma_0^{(1)}(\gamma) \hat{\gamma}_\beta + \frac{\partial \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp } \sigma_0^{(1)} \{ \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \} \hat{\gamma}_\alpha.$$

Используя, наконец, (4.3.28) и (4.3.29) при  $m=2$ , мы и приходим к формуле  $\kappa_1 \{ \sigma_0^{(1)} \{ \rho \} \} = 0$ .

Общее соотношение (4.3.34) при любом  $n$  может быть доказано методом математической индукции. Предположим, что соотношение (4.3.34) справедливо при  $n = 1, 2, \dots, k$ . Тогда, согласно (4.3.33),

$$\kappa_n \{ \rho \} = \kappa_0 \{ \sigma_0^{(n)} \{ \rho \} \}, \quad n = 1, 2, \dots, k+1. \quad (4.3.36)$$

Нам необходимо убедиться, что

$$\sum_{s=1}^{k+1} \kappa_s \{ \sigma_0^{(k+2-s)} \{ \rho \} \} = 0.$$

Согласно (4.3.36) имеем

$$\sum_{s=1}^{k+1} \kappa_s \{ \sigma_0^{(k+2-s)} \{ \rho \} \} = \kappa_0 \left\{ \sum_{s=1}^{k+1} \sigma_0^{(s)} \{ \sigma_0^{(k+2-s)} \{ \rho \} \} \right\}.$$

Если  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то, согласно (4.3.24),

$$\sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} = \sigma_0^{(k+2)}(\gamma) + \sum_{s=1}^{k+1} \sigma_0^{(s)} \{ \sigma_0^{(k+2-s)} \{ \rho \} \} + \sigma_0^{(0)} \{ \sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} \},$$

$$\gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}.$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^{k+1} \kappa_s \{ \sigma_0^{(k+2-s)} \{ \rho \} \} = \kappa_0 \{ \sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} - \sigma_0^{(0)} \{ \sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} \} \} - \kappa_0 \{ \sigma_0^{(k+2)}(\gamma) \},$$

$$\gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma}.$$

Заметим теперь, что  $\kappa_0 \{ \sigma_0^{(k+2)}(\gamma) \} = 0$ . (Это следует из (4.3.31), (4.3.28) и того, что операторы  $\sigma_0^{(0)}(\gamma), \dots, \sigma_0^{(k+2)}(\gamma)$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций  $(k+2)$ -го порядка). Кроме того,  $\kappa_0 \{ \sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} \} = \kappa_0 \{ \sigma_0^{(0)} \{ \sigma_0^{(k+2)} \{ \rho \} \} \}$ . (Это следует из (4.3.31), (4.3.28) и того, что опера-

торы  $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \dots, \sigma_0^{(k+2)}\{\rho\}$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций ( $k+2$ )-го порядка). Таким образом, формула (4.3.34) доказана.

Учитывая (4.3.35), формулу (4.3.32) можно переписать в виде

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma) + \sum_{s=1}^{\infty} \kappa_0\{\sigma_0^{(s)}\{\rho\}\}, \quad \gamma = \text{Sp } \rho \hat{\gamma} \quad (4.3.37)$$

(здесь  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций). Величины  $\kappa_0\{\sigma_0^{(s)}\{\rho\}\}$ , согласно формуле (4.3.31), можно выразить через  $\sigma_0(\gamma)$ . Действительно, пусть оператор  $\rho(\lambda)$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций. Тогда, согласно (4.3.31),

$$\kappa_0\{\rho(\lambda)\} = \sigma_0(\gamma(\lambda)), \quad \gamma(\lambda) = \text{Sp } \rho(\lambda) \hat{\gamma}.$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \sigma_0(\gamma)}{\partial \lambda^n} &= \sum_{n_1+2n_2+\dots=n} \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots} \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma \dots \partial \gamma} \left( \frac{1}{1!} \text{Sp } \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} \hat{\gamma} \right)^{n_1} \dots \\ &\dots \left( \frac{1}{k!} \text{Sp } \frac{\partial^k \rho}{\partial \lambda^k} \hat{\gamma} \right)^{n_k} \dots \frac{1}{n_1! \dots n_k! \dots}, \end{aligned}$$

где суммирование распространяется по всем возможным  $n_i$ , удовлетворяющим соотношению  $n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = n$ . Так как операторы  $\sigma_0^{(0)}\{\rho\}, \dots, \sigma_0^{(n)}\{\rho\}$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций  $n$ -го порядка, то

$$\begin{aligned} \kappa_0\{\sigma_0^{(n)}\{\rho\}\} &= \\ &= \sum_{n_1+2n_2+\dots=n} \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots} \sigma_0(\gamma)}{\sigma \gamma \dots \partial \gamma} (\gamma^1)^{n_1} \dots (\gamma^k)^{n_k} \dots (n_1! \dots n_k! \dots)^{-1}, \\ &\gamma^k = \text{Sp } \sigma_0^{(k)}\{\rho\} \hat{\gamma}. \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Поэтому согласно (4.3.37),

$$\begin{aligned} \sigma_0\{\rho\} &= \sigma_0(\gamma) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1+2n_2+\dots=n} \frac{1}{(n_1+n_2+\dots)!} \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots} \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma \dots \partial \gamma} \times \\ &\times (\gamma^1)^{n_1} \dots (\gamma^k)^{n_k} \dots \frac{(n_1+n_2+\dots)!}{n_1! \dots n_k! \dots}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sigma_0\{\rho\} = \sigma_0(\gamma + \gamma^1 + \gamma^2 + \dots) = \sigma_0(\text{Sp } \sigma_0\{\rho\} \hat{\gamma})$$

(мы учли формулу (4.3.38)).

Итак, мы показали, что если статистический оператор  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций, то  $\sigma_0\{\rho\}$  можно выразить через  $\sigma_0(\gamma)$ , где  $\gamma \equiv \gamma(\rho)$  представляют собой некоторые функционалы  $\rho$ .

**4.3.3. Суммирование секулярных членов и огрубленный статистический оператор.** Уравнение (4.3.12), как мы уже отметили, не является замкнутым уравнением для определения  $\sigma_0(\gamma)$ , так как в него входит оператор  $\sigma_0\{[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]\}$ . Однако этот оператор можно выразить через  $\sigma_0(\gamma)$  и тем самым получить замкнутое интегральное уравнение для определения оператора  $\sigma_0(\gamma)$ . Заметим с этой целью, что операторы  $\sigma_0^{(0)}(\gamma)$ ,  $i[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]$  удовлетворяют принципу ослабления корреляций первого порядка (это следует из того, что  $i[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] = \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{i\lambda V} \sigma_0^{(0)}(\gamma) e^{-i\lambda V} \Big|_{\lambda=0}$ ). Поэтому, согласно

основному результату предыдущего раздела (4.3.25), имеем

$$\sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} = \frac{\partial \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp} \sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} \hat{\gamma}_\alpha.$$

Но, согласно (4.3.9),

$$\text{Sp} \sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} \hat{\gamma}_\alpha = \text{Sp} [V, \sigma_0 \{ \sigma_0^{(0)}(\gamma) \}] \hat{\gamma}_\alpha$$

(мы учли, что  $[V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] = [\mathcal{H}, \sigma_0^{(0)}(\gamma)]$  и  $[\hat{\gamma}_\alpha, V] = [\hat{\gamma}_\alpha, \mathcal{H}]$ ) и, следовательно,

$$\sigma_0 \{ [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] \} = \frac{\partial \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp} \sigma_0(\gamma) [\hat{\gamma}_\alpha, V]$$

Таким образом, мы приходим к следующему замкнутому интегральному уравнению для определения  $\sigma_0(\gamma)$ :

$$\sigma_0(\gamma) = \sigma_0^{(0)}(\gamma) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}\tau} \left( [V, \sigma_0(\gamma)] - \frac{\partial \sigma_0(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp} \sigma_0(\gamma) [\hat{\gamma}_\alpha, V] \right) e^{-i\mathcal{H}\tau} \quad (4.3.39)$$

Решая это уравнение методом итераций, мы найдем асимптотические операторы  $\sigma_0^{(n)}(\gamma)$ . Используя далее основной результат предыдущего раздела (4.3.25), мы найдем тем самым и асимптотические операторы  $\sigma_0^{(n)}\{\rho\} = (\sigma_0(\gamma(\rho)))^{(n)}$ . При этом зависимость  $\gamma$  от  $\rho$  может быть определена в теории возмущений по  $V$  из уравнения (4.3.21). Приведем в качестве примера выражение для оператора  $\sigma_0^{(1)}\{\rho\}$

$$\sigma_0^{(1)}\{\rho\} = \sigma_0^{(1)}(\gamma) + \frac{\partial \sigma_0^{(0)}(\gamma)}{\partial \gamma_\alpha} \text{Sp} \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha, \quad \gamma = \text{Sp} \rho \hat{\gamma},$$

где

$$\sigma_0^{(1)}(\gamma) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}\tau} [V, \sigma_0^{(0)}(\gamma)] e^{-i\mathcal{H}\tau},$$

$$\text{Sp} \sigma_0^{(1)}\{\rho\} \hat{\gamma}_\alpha = -i \int_0^\infty d\tau \text{Sp} \rho [\hat{\gamma}_\alpha, V]$$

(предполагается, что в этих формулах оператор  $\rho$  удовлетворяет принципу ослабления корреляций).

Мы можем выяснить теперь, как происходит эволюция состояния системы при  $\tau \gg \tau_0$ . В этой асимптотической области статистический оператор определяется главными членами (4.3.2) в разложении  $e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau}$  в ряд по степеням  $V$

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow{\tau \gg \tau_0} \sigma_\tau \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \tau^n \sigma_n^{(m)}\{\rho\},$$

и задача, таким образом, сводится к суммированию секулярных членов  $\tau^n \sigma_n^{(m)}\{\rho\}$ , возникающих при применении теории возмущений\*).

\* Метод суммирования секулярных членов был впервые применен Ван-Хофом [116] и Пригожиным [97] при выводе так называемого «master equation».

Используя (4.3.5), имеем

$$\sigma_{\tau} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \{e^{-i\mathcal{L}\tau} \sigma_0^{(n)} \{\rho\} e^{i\mathcal{L}\tau}\}_{m-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\mathcal{L}\tau} \sigma_0^{(n)} \{\rho\} e^{i\mathcal{L}\tau},$$

или

$$\sigma_{\tau} = \sigma_0 \{e^{-i\mathcal{L}\tau} \rho e^{i\mathcal{L}\tau}\}$$

(мы использовали определение производящего оператора  $\sigma_0 \{\rho\}$  (4.3.7) и формулу (4.3.9)). Согласно (4.3.25)

$$\sigma_{\tau} = \sigma_0 (\gamma (\tau; \rho)), \quad (4.3.40)$$

где  $\gamma (\tau; \rho) = \text{Sp} \sigma_0 \{e^{-i\mathcal{L}\tau} \rho e^{i\mathcal{L}\tau}\} \hat{\psi}$ . Величины  $\gamma (\tau; \rho)$  определяются формулой (4.3.21)

$$\gamma (\tau; \rho) = \text{Sp} e^{-i\mathcal{L}\tau} \rho e^{i\mathcal{L}\tau} - i \int_{\tau}^{\infty} d\tau' \text{Sp} e^{-i\mathcal{L}\tau'} (\rho - \sigma_0 \{\rho\}) e^{i\mathcal{L}\tau'} [\hat{\psi}, V].$$

Дифференцируя это выражение по  $\tau$ , получим уравнение для параметров  $\gamma (\tau; \rho) \equiv \gamma (\tau)$

$$\dot{\gamma} (\tau) = \mathcal{L} (\gamma (\tau)) = -i \text{Sp} \sigma_0 (\gamma (\tau)) [\hat{\psi}, V]. \quad (4.3.41)$$

Сравнение полученных здесь результатов с результатами § 4.2 показывает, что производящий оператор  $\sigma_0 (\gamma)$  совпадает с огрубленным статистическим оператором. Изменение параметров  $\gamma$  со временем, как и следовало ожидать, определяется уравнением (4.2.4).

Мы показали, как возникает функциональная зависимость огрубленного статистического оператора от параметров  $\gamma$  в случае пространственно-однородных систем. Аналогичным образом может быть рассмотрен и случай пространственно-неоднородных систем [90, 89], когда секулярные члены возникают при построении теории возмущений по пространственным градиентам. Наконец, можно рассмотреть общий случай, когда секулярные члены возникают при применении теории возмущений как по малому взаимодействию, так и по пространственным градиентам [98]. В результате мы приходим к основным соотношениям (4.2.18), (4.2.48) и попутно получим уравнения (4.2.29), (4.2.30), (4.2.55), (4.2.57), описывающие релаксационные процессы.

Заметим в заключение этого раздела, что расходимости (секулярные члены), которые мы устранили, были связаны с принципом ослабления корреляций, а не с конкретной структурой гамильтониана взаимодействия. Поэтому следует иметь в виду, что при применении методов теории возмущений к уравнениям (4.2.11), (4.2.55) могут возникнуть дополнительные расходимости, связанные с конкретной структурой гамильтониана взаимодействия (например, как это имело место при кулоновском взаимодействии в системе заряженных частиц, см раздел 1.5.2) Такого рода расходимости должны устраняться с помощью той или иной модификации теории возмущений при исследовании уравнений (4.2.11), (4.2.55).

## § 4.4. Низкочастотная асимптотика функций Грина

### 4.4.1. Линеаризация уравнений для огрубленного статистического оператора.

В 4.2.2 мы получили уравнения для огрубленного статистического оператора слабонеоднородной системы. Эта система может в принципе, несмотря на малость неоднородностей, находиться как вблизи, так и вдали от состояния статистического равновесия. В этом разделе мы рассмотрим тот случай, когда отклонения от равновесия невелики. Для простоты будем предполагать, что добавочное взаимодействие  $V$  отсут-

стует, так что система описывается уравнениями (4.2.29), (4.2.30).

Выбирая в качестве независимых функций вместо плотностей  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$  функции  $Y_\alpha(\mathbf{x})$  и вводя обозначение  $\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) \equiv \equiv \sigma_0(\xi(\mathbf{x}'))$ , перепишем уравнение (4.2.29) в виде

$$\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) = \omega(Y(\mathbf{x}')) - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}_0\tau} \left\{ i [\mathcal{H}_0, \omega(Y(\mathbf{x}'))] - \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta Y_\alpha(\mathbf{x})} S_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}')) \right\} e^{-i\mathcal{E}_0\tau}, \quad (4.4.1)$$

где функционал  $S_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}'))$  определяется из уравнения

$$\int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta Y_\alpha(\mathbf{x})} S_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}')) = \int d^3x \frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp} \sigma_0(Y(\mathbf{x}')) \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}).$$

Замечая, что

$$\frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta Y_\alpha(\mathbf{x})} = \int d^3x'' \frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta \xi_\beta(\mathbf{x}'')} \frac{\delta \text{Sp} \sigma_0(Y(\mathbf{x}')) \hat{\xi}_\beta(\mathbf{x}'')}{\delta Y_\alpha(\mathbf{x})},$$

получим

$$\int d^3x'' \frac{\delta \text{Sp} \sigma_0(Y(\mathbf{x}')) \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})}{\delta Y_\beta(\mathbf{x}'')} S_\beta(\mathbf{x}''; Y(\mathbf{x}')) = \frac{\partial}{\partial x_k} \text{Sp} \sigma_0(Y(\mathbf{x}')) \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}). \quad (4.4.2)$$

Полагая  $Y_\alpha(\mathbf{x}) = Y'_\alpha + \delta Y_\alpha(\mathbf{x})$ , где  $Y'_\alpha$  — не зависящие от координат термодинамические силы и  $\delta Y_\alpha(\mathbf{x})$  — малые добавки к ним (медленно меняющиеся с  $\mathbf{x}$ ), разложим  $\omega(Y(\mathbf{x}'))$  в ряд по степеням  $\delta Y_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$\omega(Y(\mathbf{x}')) = \omega + \delta\omega + \dots, \quad \omega = \omega(Y), \quad \delta\omega = \int d^3k \delta Y_\alpha(\mathbf{k}) \omega_\alpha(\mathbf{k}), \quad (4.4.3)$$

где  $\delta Y_\alpha(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x \delta Y_\alpha(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$  — компоненты Фурье  $\delta Y_\alpha(\mathbf{x})$  и

$$\omega_\alpha(\mathbf{k}) = -\omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\xi_\alpha(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_\alpha \rangle)$$

(здесь использованы обозначения  $a(\mathbf{x}, \lambda) = \omega^{-\lambda} a(\mathbf{x}) \omega^\lambda$ ,  $\langle a \rangle = \text{Sp} \omega a(\mathbf{x})$ ).

Разложению  $\omega(Y(\mathbf{x}'))$  соответствует, согласно (4.4.1), разложение  $\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))$ :

$$\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) = \omega + \delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) + \dots, \quad \delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) = \int d^3k \delta Y_\alpha(\mathbf{k}) \sigma_\alpha(\mathbf{k}) \quad (4.4.4)$$



( $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$  — некоторые неизвестные операторы). Для определения их мы должны воспользоваться интегральным уравнением (4.4.1). Найдем с этой целью функциональную производную  $\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))/\delta Y_\alpha(\mathbf{x})$ . Замечая, что

$$\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) = (2\pi)^{-3} \int d^3x \delta Y_\alpha(\mathbf{x}) \int d^3k \sigma_\alpha(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}},$$

имеем

$$\frac{\delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}'))}{\delta Y_\alpha(\mathbf{x})} = (2\pi)^{-3} \int d^3k e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sigma_\alpha(\mathbf{k}).$$

Подставляя это выражение в (4.4.2) и вводя компоненты Фурье функций  $S_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}'))$

$$(2\pi)^{-3} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} S_\alpha(\mathbf{x}; Y(\mathbf{x}')) = i \delta Y_\beta(\mathbf{k}) T_{\beta\alpha}(\mathbf{k}), \quad (4.4.5)$$

получим следующее соотношение, связывающее матрицу  $T_{\beta\alpha}(\mathbf{k})$  и операторы  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$ :

$$iT_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) \text{Sp } \sigma_\alpha(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\nu(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_l} \text{Sp } \sigma_\beta(\mathbf{k}) \hat{\xi}_{\nu l}(\mathbf{x}). \quad (4.4.6)$$

Покажем, что это соотношение может быть преобразовано к виду

$$T_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) \text{Sp } \sigma_\alpha(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\nu(0) = k_l \text{Sp } \sigma_\beta(\mathbf{k}) \hat{\xi}_{\nu l}(0). \quad (4.4.7)$$

Заметим для этого, что

$$e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}} \sigma_\alpha(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sigma_\alpha(\mathbf{k}), \quad (4.4.8)$$

где  $\mathbf{P}$  — оператор импульса системы. Действительно, это уравнение немедленно следует из (4.4.4), если учесть что, согласно (4.2.33),

$$e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}} \delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}')) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} = \delta\sigma_0(Y(\mathbf{x}' + \mathbf{x})).$$

Замечая, что

$$\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} \hat{\xi}_\alpha(0) e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}}, \quad \hat{\xi}_{\alpha l}(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{P}\mathbf{x}} \hat{\xi}_{\alpha l}(0) e^{i\mathbf{P}\mathbf{x}}$$

и используя (4.4.8), мы и получим, согласно (4.4.6), соотношение (4.4.7).

Подставляя (4.4.3), (4.4.4), (4.4.5) в интегральное уравнение (4.4.1), найдем следующие интегральные уравнения для определения операторов  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$  [89]:

$$\sigma_\alpha(\mathbf{k}) = \omega_\alpha(\mathbf{k}) -$$

$$- \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \{ i [\mathcal{H}_0, \omega_\alpha(\mathbf{k})] - iT_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \sigma_\beta(\mathbf{k}) \} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \quad (4.4.9)$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (4.4.7) позволяют определить оператор  $\delta\sigma_0$  в линейном приближении по  $\delta Y_\alpha$ .

До сих пор мы рассматривали  $\delta Y_\alpha$  как независимые функции. Однако если начальное значение статистического оператора  $\rho$  фиксировано, то величины  $\xi_\alpha(\mathbf{x}, 0; \rho)$  согласно (4.2.30), а следовательно и величины  $\delta Y_\alpha$ , будут определенными функциями от  $\rho$ . Мы покажем теперь, как найти зависимость вариаций термодинамических сил  $\delta Y_\alpha$  от  $\rho$ ,  $\delta Y_\alpha(\mathbf{x}) = \delta Y_\alpha(\mathbf{x}; \rho)$ .

Так как оператор  $\rho$  должен удовлетворять принципу ослабления корреляций, то, согласно (4.2.44), его можно выбрать в виде

$$\rho = \exp \left\{ \Omega - Y_\alpha \int d^3x \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) - \int d^3x b(\mathbf{x}) a(\mathbf{x}) \right\},$$

где  $a(\mathbf{x})$  — произвольный трансляционно-инвариантный квазилокальный оператор и  $b(\mathbf{x})$  — произвольная  $c$ -числовая функция. При  $b(\mathbf{x}) = 0$  это выражение переходит в  $w(Y)$ . Нас интересуют состояния, близкие к состоянию, описываемому статистическим оператором  $w$ , поэтому мы будем считать функцию  $b(\mathbf{x})$  малой и представим  $\rho$  в виде

$$\rho = w + \delta\rho + \dots,$$

$$\delta\rho = \int d^3k b(\mathbf{k}) \rho(\mathbf{k}), \quad b(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} b(\mathbf{x}), \quad (4.4.10)$$

$$\rho(\mathbf{k}) = -w \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (a(\mathbf{x}, \lambda) - \langle a \rangle).$$

Так как  $\delta Y_\alpha(\mathbf{k})$  обращается в нуль вместе с  $b(\mathbf{k})$ , то  $\delta Y_\alpha(\mathbf{k})$  можно представить в виде

$$\delta Y_\alpha(\mathbf{k}; \rho) = b(\mathbf{k}) T_\alpha(\mathbf{k}; a),$$

где величины  $T_\alpha(\mathbf{k}; a)$  не зависят от  $b(\mathbf{k})$  определяются оператором  $a(\mathbf{x})$ . Подставляя это выражение в (4.4.4), получим

$$\sigma_0\{\rho\} \equiv \sigma_0(Y(\mathbf{x}'; \rho)) = w + \int d^3k b(\mathbf{k}) T_\alpha(\mathbf{k}; a) \sigma_\alpha(\mathbf{k}) + \dots \quad (4.4.11)$$

Чтобы найти зависимость величин  $T_\alpha(\mathbf{k}; a)$  от оператора  $a$ , обратимся к уравнению «памяти» (4.2.30):

$$\begin{aligned} \text{Sp } \sigma_0\{\rho\} \hat{\xi}_\alpha(0) &= \\ &= \text{Sp } \rho \hat{\xi}_\alpha(0) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{i\mathcal{L}_0\tau} [P_k, \rho - \sigma_0\{\rho\}] e^{-i\mathcal{L}_0\tau} \hat{\xi}_{\alpha k}(0). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (4.4.10), (4.4.11), найдем

$$\begin{aligned} T_\beta(\mathbf{k}; a) \text{Sp } \sigma_\beta(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\alpha(0) &= \text{Sp } \rho(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\alpha(0) - \\ &- i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{i\mathcal{L}_0\tau} [P_k, \rho(\mathbf{k}) - T_\beta(\mathbf{k}; a) \sigma_\beta(\mathbf{k})] e^{-i\mathcal{L}_0\tau} \hat{\xi}_{\alpha k}(0), \end{aligned}$$

откуда, используя (4.4.8), получим окончательно

$$T_{\beta}(\mathbf{k}; a) \text{Sp } \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) \hat{\zeta}_{\alpha}(0) = \text{Sp } \rho(\mathbf{k}) \hat{\zeta}_{\alpha}(0) - \\ - i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{i\mathcal{H}_0\tau} (\rho(\mathbf{k}) - T_{\beta}(\mathbf{k}; a) \sigma_{\beta}(\mathbf{k})) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \hat{\zeta}_{\alpha}(0) k_l. \quad (4.4.12)$$

Зная операторы  $\sigma_{\alpha}(\mathbf{k})$ , можно с помощью этого уравнения найти величины  $T_{\alpha}(\mathbf{k}; a)$ , а следовательно, и  $\delta\sigma_0\{\rho\}$  в линейном по  $b(\mathbf{k})$  приближении.

Функция  $b(\mathbf{x})$  должна медленно меняться с  $\mathbf{x}$ . Поэтому величины  $k_l$  в уравнениях (4.4.9), (4.4.12) будут малыми, и решение уравнений (4.4.9), (4.4.12) можно искать в виде разложения в ряд по степеням  $k_l$  (такое разложение легко провести, поскольку интегральные члены в (4.4.9), (4.4.12) содержат  $\mathbf{k}$ ).

Из уравнения (4.4.9) для операторов  $\sigma_{\alpha}(\mathbf{k})$  следует, что

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau} = e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \omega_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau} - \\ - \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' e^{i\mathcal{H}_0\tau'} \{i[\mathcal{H}_0, \omega_{\alpha}(\mathbf{k})] - iT_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \sigma_{\beta}(\mathbf{k})\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau'},$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau} = iT_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau}$$

и, следовательно,

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \sigma_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau} = (e^{-i\tau T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \sigma_{\beta}(\mathbf{k}). \quad (4.4.13)$$

Отметим, что, согласно (4.4.8), имеет место также соотношение

$$e^{iP\mathbf{x}} \sigma_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-iP\mathbf{x}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \sigma_{\alpha}(\mathbf{k}).$$

Как будет показано далее, собственные значения матрицы  $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  определяют «гидродинамический» спектр колебаний физической системы, т. е. частоты и затухания колебаний в области малых волновых векторов  $\mathbf{k}$ .

Заметим, наконец, что из формул (4.2.18), (4.4.11), (4.4.13) вытекает соотношение [89]

$$e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \rho(\mathbf{k}) e^{i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} T_{\alpha}(\mathbf{k}; a) (e^{-i\tau T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \sigma_{\beta}(\mathbf{k}), \quad (4.4.14)$$

где

$$\rho(\mathbf{k}) = -w \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (a(\mathbf{x}, \lambda) - \langle a \rangle).$$

В этой асимптотической формуле, как видно из вывода, величина  $\tau$  должна быть значительно больше времени хаотизации  $\tau_0$ , т. е. времени установления локального распределения  $w(Y(\mathbf{x}'))$ . Кроме того, волновой вектор  $\mathbf{k}$ , равный по порядку величины  $a_m^{-1}$  ( $a_m$  — характерные размеры, на которых меняется функция  $b(\mathbf{x})$ ), должен быть мал по сравнению с  $l^{-1}$ , где

$l$  — средняя длина свободного пробега частиц системы,  $k \ll l^{-1}$  (для газа  $l \sim \bar{v}\tau_0$ ,  $\bar{v}$  — средняя скорость частиц; для жидкостей  $l \sim a$ , где  $a$  — среднее межатомное расстояние).

Отметим, что соотношение (4.4.14), так же как и общие формулы (4.2.29), (4.2.30), относится к невырожденным системам, т. е. системам, состояние равновесия которых описывается обычными средними, а не квазисредними.

**4.4.2. Асимптотика функций Грина в области малых частот и малых волновых векторов.** В этом разделе мы покажем, как, используя (4.4.14), получить асимптотику функций Грина в области малых частот и малых волновых векторов [89].

Запаздывающая функция Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$  величин  $\xi_i(\mathbf{x}, t)$  и  $\xi_j(0)$  определяется, согласно (4.1.12), формулой

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = -i\theta(t) \text{Sp} [\omega, \xi_i(\mathbf{x}, t)] \xi_j(0),$$

где  $\omega$  — обобщенный статистический оператор Гиббса:

$$\omega = \exp \{ \Omega - Y_\alpha \hat{\gamma}_\alpha \}, \quad \hat{\gamma}_\alpha = \int d^3x \hat{x}_\alpha(\mathbf{x}),$$

и операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$  соответствуют всевозможным аддитивным интегралам движения. Первые три из операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$  мы будем отождествлять с гамильтонианом системы  $\mathcal{H}_0$ , оператором импульса  $\mathbf{P}$  и оператором числа частиц  $N$ ,  $\gamma_0 \equiv \mathcal{H}_0$ ,  $\gamma_{1,2,3} \equiv P_{1,2,3}$ ,  $\gamma_4 \equiv N$ . Величины  $Y_0, Y, Y_4$  мы будем записывать в виде  $Y_0 = \beta$ ,  $Y = -\beta\mathbf{u}$ ,  $Y_4 = -\beta\mu$ , где  $\beta$  — обратная температура,  $\mu$  — химический потенциал и  $\mathbf{u}$  — скорость системы как целого. Мы считаем, что гамильтониан  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ , определяющий гейзенберговские операторы  $\xi_i(\mathbf{x}, t)$ , переводит в результате эволюции системы произвольное начальное состояние  $\rho$  в равновесное состояние  $\omega$ .

Заметим теперь, что

$$[\omega, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = -\omega \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} \omega^{-\lambda} \xi_i(\mathbf{x}, t) \omega^\lambda$$

и, следовательно,

$$[\omega, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = -\omega \int_0^1 d\lambda Y_\alpha [\hat{\gamma}_\alpha, \xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda)].$$

Учитывая, что

$$[\mathbf{P}, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = i\nabla \xi_i(\mathbf{x}, t), \quad [\mathcal{H}, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = -i \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

и предполагая для простоты, что  $\xi_i(\mathbf{x})$  коммутирует со всеми остальными операторами  $\gamma_\alpha$ , получим

$$[\omega, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = i\beta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \right) \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle).$$

Отсюда следует, что

$$-i\theta(t)[\omega, \xi_i(\mathbf{x}, t)] = \beta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \right) \theta(t) \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle) + \\ + \beta \delta(t) \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}; \lambda) - \langle \xi_i \rangle).$$

Поэтому, согласно определению функций Грина,

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \beta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla \right) \theta(t) \text{Sp} \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0) - \\ - \beta \delta(t) \text{Sp} \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0).$$

Переходя к фурье-компонентам функций Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , получим

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \\ = -i\beta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Sp} \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0) - \\ - \beta \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Sp} \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0). \quad (4.4.15)$$

Чтобы найти асимптотику  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$ , необходимо исследовать поведение подинтегрального выражения в первом слагаемом при больших  $t$ . Воспользуемся для этого формулой (4.4.10) для  $\rho(\mathbf{k})$  (где вместо операторов  $a(\mathbf{x})$  стоят операторы  $\xi_j(\mathbf{x})$ ) и асимптотическим соотношением (4.4.14). Из этих формул видно, что

$$- \omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\xi_j(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_j \rangle) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_\alpha(\mathbf{k}; \xi_j) (e^{-i\mathbf{t}T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \sigma_\beta(\mathbf{k}),$$

где  $\sigma_\beta(\mathbf{k})$ ,  $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ ,  $T_\alpha(\mathbf{k}; \xi_j)$  определяются из уравнений (4.4.9), (4.4.7), (4.4.12). Поэтому имеем

$$- \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Sp} \omega \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \\ \xrightarrow{t \rightarrow \infty} T_\alpha(\mathbf{k}; \xi_j) (e^{-i\mathbf{t}T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \text{Sp} \sigma_\beta(\mathbf{k}) \xi_i(0). \quad (4.4.16)$$

Член в формуле (4.4.15), содержащий интеграл по времени, может быть, очевидно, представлен в виде

$$\begin{aligned}
 & -i\beta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\{ \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Sp } w \int_0^1 d\lambda (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \langle \xi_i \rangle) \xi_i(0) - \right. \\
 & \quad \left. - T_{\alpha}(\mathbf{k}; \xi_j) (e^{-i\mathbf{t}T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \text{Sp } \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) \xi_i(0) \right\} - \\
 & -i\beta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} T_{\alpha}(\mathbf{k}; \xi_j) (e^{-i\mathbf{t}T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \text{Sp } \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) \xi_i(0).
 \end{aligned}$$

Согласно (4.4.16) первое слагаемое здесь регулярно в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Выполнив во втором слагаемом интегрирование по  $t$ , представим окончательно функцию Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  в виде

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^0(\mathbf{k}) + G_{ij}^{\omega}(\mathbf{k}, \omega) + G'_{ij}(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.4.17)$$

где

$$G_{ij}^0(\mathbf{k}) = -\beta \text{Sp} \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\xi_j(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_j \rangle) \xi_i(0),$$

$$G_{ij}^{\omega}(\mathbf{k}, \omega) = -\beta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) T_{\alpha}(\mathbf{k}; \xi_j) (\omega - T(\mathbf{k}) + i0)_{\alpha\beta}^{-1} \text{Sp } \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) \xi_i(0),$$

$$\begin{aligned}
 G'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = & -i\beta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \left\{ \text{Sp } w \int_0^1 d\lambda \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (\xi_i(\mathbf{x}, t; \lambda) - \right. \\
 & \left. - \langle \xi_i \rangle) \xi_j(0) - T_{\alpha}(\mathbf{k}; \xi_j) (e^{-i\mathbf{t}T(\mathbf{k})})_{\alpha\beta} \text{Sp } \sigma_{\beta}(\mathbf{k}) \xi_i(0) \right\}.
 \end{aligned}$$

Слагаемое  $G_{ij}^{\omega}(\mathbf{k}, \omega)$  содержит полюсы функции Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ ; слагаемое  $G'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — регулярно в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  и, наконец, слагаемое  $G_{ij}^0(\mathbf{k})$  является функцией только  $\mathbf{k}$  и не зависит от  $\omega$ .

Покажем, что предельные значения функции Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  зависят от порядка предельных переходов  $\omega \rightarrow 0$  и  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  (для определенности положим  $\mathbf{u} = 0$ ), т. е.

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, 0) \neq \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega).$$

Легко видеть из общей формулы (4.4.17), что

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, 0) = G_{ij}^0(0) = -\beta \text{Sp} \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\xi_j(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_j \rangle) \xi_i(0). \quad (4.4.18)$$

Найдем теперь предельное при  $\omega \rightarrow 0$  значение функций  $G_{ij}^{(+)}(0, \omega)$ . Из формул (4.4.3), (4.4.7), (4.4.9), (4.4.12) следует, что

$$\sigma_{\alpha}(0) = \omega_{\alpha}(0) = -\omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\zeta_{\alpha}(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \zeta_{\alpha} \rangle) = \frac{\partial \omega}{\partial Y_{\alpha}}, \quad (4.4.19)$$

$$T_{\alpha\beta}(0) = 0, \quad T_{\alpha}(0; \xi_j) = \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_{\alpha}}.$$

Мы учли при этом, что

$$\frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_{\beta}} = -\text{Sp } \omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\xi_j(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \xi_j \rangle) \hat{\zeta}_{\beta}(0), \quad \frac{\partial \zeta_{\alpha}}{\partial Y_{\beta}} = \frac{\partial \zeta_{\beta}}{\partial Y_{\alpha}}.$$

Подставляя (4.4.19) в (4.4.17), получим при  $\omega \rightarrow 0$  следующую асимптотическую формулу:

$$G_{ij}^{(+)}(0, \omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^0(0) - \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_{\alpha}} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_{\alpha}} - i\omega (\xi_i; \xi_j), \quad (4.4.20)$$

где

$$(\xi_i; \xi_j) = \beta \int_0^{\infty} d\tau \int d^3x \int_0^1 d\lambda \text{Sp } \omega (\xi'_i(\mathbf{x}, \tau; \lambda) - \langle \xi'_i \rangle) \xi_j(0),$$

$$\xi'_i(\mathbf{x}) = \xi_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial \zeta_{\alpha}} \hat{\zeta}_{\alpha}(\mathbf{x}),$$

откуда

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = G_{ij}^0(0) - \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_{\alpha}} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_{\alpha}}. \quad (4.4.21)$$

(Эту формулу легко также получить непосредственно, исходя из эргодических соотношений (4.2.1).)

Таким образом, мы видим, что предельные значения функции Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  (4.4.18) и (4.4.21) не совпадают, причем

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, 0) - \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_{\alpha}} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_{\alpha}}. \quad (4.4.22)$$

Величины  $(\xi_i; \xi_j)$  играют в дальнейшем важную роль, так как через них выражаются различные кинетические коэффициенты. Эти величины можно, согласно (4.4.20), (4.4.21), выразить через запаздывающую функцию Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$

$$(\xi_i; \xi_j) = i \frac{\partial G_{ij}^{(+)}(0, \omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0}. \quad (4.4.23)$$

Разности предельных значений функций Грина, определяемой формулой (4.4.22), можно придать симметричный вид:

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, 0) - \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_{\alpha}} \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta_{\alpha} \partial \zeta_{\beta}} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_{\beta}}, \quad (4.4.24)$$

где  $s = s(\zeta)$  — плотность энтропии в состоянии статистического равновесия,

$$s(\zeta) = -\mathcal{Y}^{-1} \text{Sp } \omega \ln \omega = -\Omega/\mathcal{Y} + Y_\alpha \zeta_\alpha,$$

рассматриваемая как функция параметров  $\zeta_\alpha$ . Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\Omega}{\mathcal{Y}} = \zeta_\alpha.$$

Поэтому

$$\partial s / \partial \zeta_\alpha = Y_\alpha,$$

откуда и следует формула (4.4.24).

Согласно (4.1.7) величина  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega)$  определяет отклик системы на однородное медленно изменяющееся поле  $F_j(\mathbf{x}, t) \equiv F_j(t)$  (гамильтониан взаимодействия системы с полем имеет вид  $\int d^3x F_j(t) \xi_j(\mathbf{x})$ ):

$$\xi_i(t) - \langle \xi_i \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) F_j(t). \quad (4.4.25)$$

Поэтому величину  $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega)$  можно назвать *адиабатической обобщенной восприимчивостью* системы.

Используя (4.4.24), перепишем формулу (4.4.21) в виде

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = G_{ij}^0(0) - \beta \frac{\partial \langle \xi_i \rangle}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial^2 s}{\partial \zeta_\alpha \partial \zeta_\beta} \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_\beta}. \quad (4.4.26)$$

Чтобы выяснить физический смысл этого соотношения, заметим, что при медленном изменении однородного внешнего поля система может считаться находящейся в состоянии равновесия, соответствующего мгновенному значению поля  $F_j(t)$ . Статистический оператор этого состояния определяется выражением

$$\omega_F = \exp \left\{ \Omega_F - Y_\alpha(F) \hat{v}_\alpha - Y_0(F) F_j(t) \int d^3x \xi_j(\mathbf{x}) \right\}, \quad (4.4.27)$$

где термодинамические силы  $Y_\alpha(F)$  также зависят от мгновенного значения внешнего поля и определяются из условия независимости от времени энтропии системы

$$s_F = -\text{Sp } \omega_F \ln \omega_F$$

и условия независимости от времени средних значений всех операторов  $\gamma_\alpha$ , за исключением оператора энергии. Последнее условие является следствием того обстоятельства, что эти операторы коммутируют с полным гамильтонианом системы, включающим гамильтониан взаимодействия  $F_j(t) \int d^3x \xi_j(\mathbf{x})$  системы с внешним полем.



Итак, мы имеем следующие условия для определения зависимости термодинамических сил от поля:

$$\frac{\partial s_F}{\partial t} = \frac{\partial s_F}{\partial F_j} \frac{\partial F_j}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \text{Sp } \omega_F \hat{\zeta}_\alpha = \frac{\partial F_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial F_j} \text{Sp } \omega_F \hat{\zeta}_\alpha = 0, \quad \alpha \neq 0,$$

или

$$\frac{\partial s_F}{\partial F_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial F_j} \text{Sp } \omega_F \hat{\zeta}_\alpha = 0, \quad \alpha \neq 0. \quad (4.4.28)$$

Определим теперь с помощью статистического оператора  $\omega_F$  величины  $\xi_i(t) \equiv \text{Sp } \omega_F \xi_i$  в линейном по  $F_j$  приближении

$$\xi_i(t) = \text{Sp } \omega \xi_i + \left( \frac{\partial}{\partial F_j} \text{Sp } \omega_F \hat{\xi}_i \right)_{F=0} F_j(t),$$

где  $\omega$  — статистический оператор (4.4.27) при  $F_j = 0$ . При медленном изменении однородного поля имеет место формула (4.4.25). Поэтому должно выполняться равенство

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{ij}^{(+)}(0, \omega) = \left( \frac{\partial}{\partial F_j} \text{Sp } \omega_F \hat{\xi}_i \right)_{F=0}. \quad (4.4.29)$$

Убедимся, что это соотношение в точности совпадает с формулой (4.4.26). Вычислим для этого производные  $(\partial Y_\alpha / \partial F_j)_{F=0}$ . Замечая, что

$$s_F = -\mathcal{Y}^{-1} \Omega_F + Y_\alpha(F) \zeta_\alpha(F) + Y_0(F) F_j \langle \xi_j \rangle_F,$$

и используя формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha(F)} \frac{\Omega_F}{\mathcal{Y}} &= \zeta_\alpha(F), \quad \alpha \neq 0, & \frac{\partial}{\partial Y_0(F)} \frac{\Omega_F}{\mathcal{Y}} &= \zeta_0(F) + F_j \langle \xi_j \rangle_F, \\ \frac{\partial}{\partial F_j} \frac{\Omega_F}{\mathcal{Y}} &= Y_0(F) \langle \xi_j \rangle_F, \end{aligned}$$

где

$$\langle \xi_j \rangle_F = \text{Sp } \omega_F \hat{\xi}_j, \quad \zeta_\alpha(F) = \text{Sp } \omega_F \hat{\zeta}_\alpha,$$

перепишем условия (4.4.28) в виде

$$Y_\alpha(F) \frac{\partial \zeta_\alpha(F)}{\partial F_j} + Y_0(F) F_j \frac{\partial \langle \xi_j \rangle_F}{\partial F_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial F_j} \frac{\partial}{\partial Y_\alpha(F)} \frac{\Omega_F}{\mathcal{Y}} = 0, \quad \alpha \neq 0.$$

Полагая здесь  $F_j = 0$ , найдем

$$\begin{aligned} Y_\alpha \left\{ \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\beta} \left( \frac{\partial Y_\beta}{\partial F_j} \right)_{F=0} + Y_0 \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_\alpha} \right\} &= 0, \\ \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\beta} \left( \frac{\partial Y_\beta}{\partial F_j} \right)_{F=0} + Y_0 \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial Y_\alpha} &= 0, \quad \alpha \neq 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left( \frac{\partial Y_\alpha}{\partial F_j} \right)_{F=0} = -\beta \frac{\partial \langle \xi_j \rangle}{\partial \zeta_\alpha}.$$

Используя это соотношение, имеем

$$\left(\frac{\partial \omega_F}{\partial F_I}\right)_{F=0} = -\beta \omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\xi_I(x, \lambda) - \langle \xi_I \rangle) - \beta \frac{\partial \omega}{\partial Y_\alpha} \frac{\partial \langle \xi_I \rangle}{\partial \xi_\alpha}. \quad (4.4.30)$$

Подстановка этой формулы в (4.4.29) и приводит к соотношению (4.4.26).

Заметим, что слагаемому  $G_{ij}^0(0)$  в формуле (4.4.26) соответствует первое слагаемое в формуле (4.4.30) и, следовательно, величина  $G_{ij}^0(0)$  имеет смысл обобщенной восприимчивости при постоянных термодинамических силах. С другой стороны, величина  $G_{ij}^0(0)$  представляет собой, согласно (4.4.18), предельное значение функции  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, 0)$  при  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ . Поэтому поведение функций Грина при малых  $\mathbf{k}$  (и  $\omega = 0$ ) определяется обобщенными восприимчивостями при постоянных термодинамических силах. Это связано с тем, что рассматриваемый случай соответствует возмущениям  $F_i(\mathbf{x}, t) \equiv F_i(\mathbf{x})$ , локализованным в ограниченной области пространства, т. е.  $F_i(\mathbf{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ . При этом фурье-компонента  $F_i(\mathbf{k})\delta(\omega)$  не будет содержать  $\delta$ -образной особенности по  $\mathbf{k}$  и, следовательно, возмущения не смогут изменить термодинамических сил, в отличие от ситуации при  $\mathbf{k} = 0$  и  $\omega \rightarrow 0$ .

Рассмотрим, наконец, поведение функции Грина вблизи полюсов, определяемых уравнением

$$\det(\omega - T(\mathbf{k})) = 0 \quad (4.4.31)$$

(волновой вектор  $\mathbf{k}$ , как мы уже говорили, предполагается малым,  $kl \ll 1$ , где  $l$  — длина свободного пробега частиц). Формулы (4.4.17) значительно упрощаются, если в качестве операторов  $\xi_i$  взять операторы плотностей  $\xi_\alpha$ , соответствующие аддитивным интегралам движения  $\gamma_\alpha$ . В этом случае функция Грина для этих операторов  $G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  обращается в нуль при  $\mathbf{k} = 0$ ,  $G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^{(+)}(0, \omega) = 0$ . Действительно, положим в общей формуле (4.4.17)  $\mathbf{k} = 0$  и подставим вместо операторов  $\xi_i(\mathbf{x})$  операторы  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$ . Используя формулы (4.4.19), имеем

$$G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^0(0) = -G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^p(0, \omega) = \beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial Y_\rho}, \quad G'_{\xi_\alpha \xi_\rho}(0, \omega) = 0,$$

откуда и следует равенство  $G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^{(+)}(0, \omega) = 0$ .

При малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  вблизи полюсов функций Грина основной вклад в нее дает сумма членов  $G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^0 + G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^p$ . Удерживая в этой сумме главные члены, получим

$$G_{\xi_\alpha \xi_\rho}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \approx -\beta \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial Y_\delta} \left( \frac{T(\mathbf{k})}{\omega - T(\mathbf{k}) + i0} \right)_{\delta\rho}. \quad (4.4.32)$$

(В этой асимптотической формуле отброшены члены, исчезающие при  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ .)

Полюсам (4.4.31) функций Грина соответствуют одна или несколько зависимостей частот от волнового вектора  $k$ . Эти зависимости определяют частоты и декременты затухания слабозатухающих колебаний, могущих распространяться в рассматриваемой системе. С существованием этих колебаний и связана непрерывность предельных переходов  $\omega \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  (4.4.22).

Заметим, что полученные нами асимптотические формулы справедливы только для нормальных систем, т. е. для систем, в которых нет спонтанного нарушения симметрии. Если же спонтанное нарушение симметрии имеет место, то возникают дополнительно новые ветви низкочастотных колебаний, которые связаны со спонтанным нарушением симметрии (см. § 5.4).

## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

### § 5.1. Кинетические уравнения в случае слабого взаимодействия

**5.1.1. Кинетический этап эволюции.** В § 4.2 мы показали, что если в неравновесной системе протекают как быстрые, так и медленные процессы, которым соответствуют сильно отличающиеся друг от друга времена релаксации, то возникает возможность сокращенного описания неравновесных состояний. Именно, в этом случае возможно ввести для описания неравновесного состояния совокупность некоторых параметров (мы обозначали их через  $\gamma_\alpha$  для однородных систем и через  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  для неоднородных систем), которые медленно изменяются со временем. Скорость изменения этих параметров определяется либо слабым взаимодействием, либо малыми градиентами, либо обоими этими факторами. При этом структура операторов  $\hat{\gamma}_\alpha$  и  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , соответствующих параметрам  $\gamma_\alpha$  и  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , определяется только основным гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ .

Если разбиение гамильтониана системы на  $\mathcal{H}_0$  и  $V$  не приводит к иерархии времен релаксации в пространственно-однородной системе, то сокращенного описания не возникает. В этих условиях речь может идти только об установлении равновесного распределения Гиббса без промежуточных этапов, причем описать этот процесс можно только с помощью уравнения движения для точного статистического оператора  $\rho(t)$ .

В этой главе мы будем предполагать, что основной гамильтониан  $\mathcal{H}_0$  совпадает с гамильтонианом кинетической энергии частиц

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2m} \int d^3x \nabla \psi^\dagger(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x}) = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p,$$

либо с гамильтонианом свободных квазичастиц

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i \quad (5.1.1)$$

( $a_i, a_i^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения квазичастицы с квантовыми числами  $i$  и энергией  $\varepsilon_i$ ; операторы  $\psi(\mathbf{x}), a_p$  имеют тот же смысл, что и в главе 2).

Полный гамильтониан системы  $\mathcal{H}$  складывается из гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  и гамильтониана взаимодействия  $V$ , который мы будем предполагать имеющим структуру

$$V = \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^\dagger(x_1) \psi^\dagger(x_2) V(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1)$$

в случае частиц и структуру

$$V = \frac{1}{4\mathcal{V}} \sum_{1234} \Phi(12; 34) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \quad (5.1.2)$$

в случае квазичастиц, где  $\Phi(12; 34)$  — амплитуда взаимодействия квазичастиц в состояниях  $1 \equiv i_1$ ,  $2 \equiv i_2$  и т. д. (в выражении для гамильтониана взаимодействия квазичастиц мы для простоты не выписываем членов, описывающих тройное, четверное и т. д. взаимодействия квазичастиц).

При достаточно слабом взаимодействии  $V$  (или достаточно малой плотности частиц) возникает кинетический этап эволюции, на котором состояние системы можно описывать одночастичной функцией распределения, которая играет роль параметров  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , введенных в 4.2.2. Чтобы убедиться в этом, мы должны рассмотреть, согласно 4.2.1, 4.2.3, асимптотику в области больших времен статистического оператора  $\exp(-i\mathcal{H}_0 t) \rho \times \times \exp(i\mathcal{H}_0 t)$  ( $\rho$  — начальное значение статистического оператора, соответствующего пространственно-однородному состоянию).

Мы охватим всю совокупность многочастичных функций распределения и простым образом учтем принцип ослабления корреляций, если введем производящий функционал  $\mathcal{F}_t(u, u^*)$  для статистического оператора  $\exp(-i\mathcal{H}_0 t) \rho \exp(i\mathcal{H}_0 t)$

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) = \text{Sp} e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{\sum_1 u_1^* a_1^\dagger} e^{\sum_1 u_1 a_1}.$$

Замечая, что

$$e^{i\mathcal{H}_0 t} a_1 e^{-i\mathcal{H}_0 t} = e^{-ie_1 t} a_1,$$

и производя циклическую перестановку операторов под знаком шпура, имеем

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) = \text{Sp} \rho \exp\left(\sum_1 u_1^* e^{ie_1 t} a_1^\dagger\right) \exp\left(\sum_1 u_1 e^{-ie_1 t} a_1\right),$$

откуда

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) = \mathcal{F}_0(ue^{-ie_1 t}, u^* e^{ie_1 t}),$$

где  $\mathcal{F}_0(u, u^*)$  — начальное значение функционала  $\mathcal{F}_t(u, u^*)$ .

Напомним, что корреляционный функционал  $G_t(u, u^*)$  связан с функционалом  $\mathcal{F}_t(u, u^*)$  соотношением (2.4.10)

$$G_t(u, u^*) = \ln \mathcal{F}_t(u, u^*).$$

Поэтому

$$G_t(u, u^*) = G_0(ue^{-ie_1 t}, u^* e^{ie_1 t}).$$

С другой стороны, корреляционный функционал  $G_0(u, u^*)$  может быть выражен через начальные корреляционные функции

$$G_0(u, u^*) = \sum_{\Pi'} \hat{f}_{1, 1'} u_1^* u_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1 \dots n} \sum_{1' \dots n'} g_{1, \dots, n; 1', \dots, n'} u_{1'}^* \dots u_n^* u_1 \dots u_n,$$

где  $\hat{f}_{1, 1'}$  — начальная одночастичная матрица плотности

$$\hat{f}_{1, 1'} = \text{Sp } \rho a_1^\dagger a_1$$

и  $g_{1, \dots, n; 1', \dots, n'}$  — начальные корреляционные функции. Корреляционный функционал  $G_t(u, u^*)$  определяется поэтому формулой

$$G_t(u, u^*) = \sum_{\Pi'} \hat{f}_{1, 1'} u_1^* u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{1 \dots n} \sum_{1' \dots n'} g_{1, \dots, n; 1', \dots, n'} u_{1'}^* \dots u_n^* u_1 \dots \dots u_n \exp it(\varepsilon_{1'} + \dots + \varepsilon_{n'} - \varepsilon_1 - \dots - \varepsilon_n). \quad (5.1.3)$$

Покажем, что при  $t \rightarrow \infty$  второе слагаемое в этой формуле стремится к нулю, и поэтому

$$G_t(u, u^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_{\Pi'} \hat{f}_{1, 1'} u_1^* u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)}. \quad (5.1.4)$$

С этой целью заметим, что в рассматриваемом случае, когда начальное состояние пространственно-однородно,  $\hat{f}_{1, 1'}$  пропорционально  $\delta_{p_1, p_1'}$ , т. е.

$$\hat{f}_{1, 1'} = \delta_{p_1, p_1'} \hat{f}_{\sigma_1, \sigma_1'}(p_1),$$

где  $\sigma$  — совокупность квантовых чисел, не содержащих импульса (например, это могут быть спиновые переменные, дискретные квантовые числа, характеризующие поперечное движение электронов в магнитном поле и т. д.), что же касается корреляционных функций, то они, согласно принципу ослабления корреляций в форме (2.4.14), содержат лишь одну  $\delta$ -образную особенность вида  $\delta_{p_1 + \dots + p_n, p_1' + \dots + p_n'}$ . Благодаря этому интегралы, возникающие при переходе к термодинамическому пределу от второго слагаемого в (5.1.3), стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , в то время как величины

$$\mathcal{J}_t \equiv \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3p \hat{f}_{\sigma, \sigma'}(p) u_{\sigma'p}^* u_{\sigma p} \exp it(\varepsilon_{\sigma'}(p) - \varepsilon_{\sigma}(p)),$$

вообще говоря, отличны от нуля при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, если, например,  $\varepsilon_{\sigma}(p)$  представляет собой сумму двух слагаемых, одно из которых зависит только от  $p$ , а другое только от

$\sigma$ ,  $\varepsilon_\sigma(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon_\sigma$ , то интеграл будет, вообще говоря, некоторой осциллирующей функцией времени. Если же  $\varepsilon_\sigma(\mathbf{p})$  не распадается на сумму таких слагаемых, то интеграл  $\mathcal{I}_t$  при  $t \rightarrow \infty$  будет стремиться к значению

$$\mathcal{I} = \sum_{\sigma} \int d^3 p f_{\sigma, \sigma}(\mathbf{p}) u_{\sigma p}^* u_{\sigma p}.$$

Формула (5.1.4) охватывает, очевидно, обе эти возможности, если считать, что во втором случае величина  $f_{1, 1'}$  содержит только диагональные члены, т. е.  $f_{1, 1'} = f_1 \delta_{1, 1'}$ .

Таким образом,

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ \sum_{11'} f_{1, 1'} u_1^* u_1 e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} \right\}. \quad (5.1.5)$$

Вспоминая (см. (3.1.21)), что производящий функционал  $\exp \sum_{11'} f_{1, 1'} u_1^* u_1$  соответствует статистическому оператору неравновесного идеального газа (3.1.3), мы можем переписать формулу (5.1.5) в виде

$$\mathcal{F}_t(u, u^*) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \text{Sp} \rho^{(0)} \left( e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} f_{1, 1'} \right) e^{\sum_1 u_1^* a_1^+} e^{\sum_1 u_1 a_1},$$

откуда следует [86, 87]

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho^{(0)} \left( e^{it(\varepsilon_{1'} - \varepsilon_1)} f_{1, 1'} \right), \quad (5.1.6)$$

где  $f_{1, 1'} = \text{Sp} \rho a_{1'}^+ a_1$  и

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ \Omega - \sum_{11'} Y_{1, 1'} a_1^+ a_{1'} \right\},$$

$$\text{Sp} \rho^{(0)}(f) a_{1'}^+ a_1 = f_{1, 1'}, \quad \text{Sp} \rho^{(0)}(f) = 1.$$

Это соотношение, представляющее собой эргодическое соотношение для гамильтониана  $\mathcal{H}_0$ , справедливо асимптотически при  $t \gg \tau_0$ , где  $\tau_0$  — время хаотизации, равное по порядку величины  $\tau_0 \sim r_c / \bar{v}$  ( $\bar{v}$  — средняя скорость частиц и  $r_c$  — радиус корреляции, определяющий расстояния, на которых исчезают корреляционные функции).

Таким образом, мы видим, что если  $\mathcal{H}_0$  представляет собой оператор кинетической энергии, то операторы  $\hat{y}_\alpha$  будут совпадать с операторами  $a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}$ . Роль операторов  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$  (представляющих собой операторы плотностей величин  $\hat{y}_\alpha$ ) будут играть при этом операторы  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$ ,

$$\hat{f}_p(\mathbf{x}) = \int d^3 x' e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}'} \psi^+ \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}'}{2} \right) \psi \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{x}'}{2} \right), \quad (5.1.7)$$

которые соответствуют вигнеровской функции распределения. Действительно, замечая, что

$$\psi(x) = \gamma^{\sigma-1/2} \sum_p a_p e^{ipx},$$

имеем

$$a_p^+ a_p = \int d^3x f_p^\dagger(x).$$

(Здесь и далее в этом разделе мы будем опускать дискретный индекс  $\sigma$ .)

Найдем теперь операторы плотностей потоков, соответствующие оператору  $\hat{f}_p(x)$ . Вычислим с этой целью коммутатор  $[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)]$ . Так как

$$i[\mathcal{H}_0, \psi(x)] = \frac{i}{2m} \Delta \psi(x),$$

то

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] = \frac{i}{m} \int d^3x' e^{-ipx'} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x'_k} \psi^+\left(x - \frac{x'}{2}\right) \psi\left(x + \frac{x'}{2}\right).$$

Интегрируя по частям, имеем

$$i[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] = -\frac{p_k}{m} \frac{\partial \hat{f}_p(x)}{\partial x_k}. \quad (5.1.8)$$

Принимая во внимание соотношение (4.2.20) мы видим, что роль операторов плотностей потоков  $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x)$  играют теперь операторы

$$\hat{f}_{p,k}(x) = \frac{p_k}{m} \hat{f}_p(x). \quad (5.1.9)$$

Заметим, что из (5.1.8) вытекает соотношение \*)

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{f}_p(x) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \hat{f}_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right). \quad (5.1.10)$$

Мы видим, что операторы потоков  $\hat{f}_{p,k}(x)$  с точностью до  $c$ -числового множителя  $p_k/m$  совпадают с операторами плотностей  $\hat{f}_p(x)$ . Это обстоятельство позволяет упростить интегральное уравнение (4.2.55), которое при сделанном выборе  $\mathcal{H}_0$  описывает кинетический этап эволюции.

\*) Для того чтобы убедиться в справедливости (5.1.10), следует учесть, что

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \hat{f}_p(x) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \hat{f}_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} [\mathcal{H}_0, [\dots, [\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(x)] \dots]] \tau^n.$$



В уравнение (4.2.55) входит локально-равновесный статистический оператор  $\omega$ , имеющий в рассматриваемом случае вид

$$\omega(Y_{p'}(\mathbf{x}')) = \exp \left\{ \Omega - \sum_{p'} \int d^3x' Y_{p'}(\mathbf{x}') \hat{f}_{p'}(\mathbf{x}') \right\}. \quad (5.1.11)$$

Используя формулу (5.1.10), имеем отсюда

$$e^{i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} \omega(Y_{p'}(\mathbf{x}')) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} = \omega \left( Y_{p'} \left( \mathbf{x}' + \frac{\mathbf{p}'}{m} \tau \right) \right). \quad (5.1.12)$$

Покажем теперь, что соотношение (4.2.49), связывающее термодинамические силы  $Y_p(\mathbf{x})$  и вигнеровскую функцию распределения  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$ ,

$$\text{Sp } \sigma(f) \hat{f}_p(\mathbf{x}) = f_p(\mathbf{x}), \quad (5.1.13)$$

может быть преобразовано в рассматриваемом случае к виду

$$\text{Sp } \omega(Y_{p'}(\mathbf{x}')) \hat{f}_p(\mathbf{x}) = f_p(\mathbf{x}). \quad (5.1.14)$$

Выпишем для этого интегральное уравнение (4.2.55) для огрубленного статистического оператора  $\sigma(f(\mathbf{x}'))$ :

$$\begin{aligned} \sigma(f) = \omega(Y) - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} \{ i [\mathcal{H}_0, \omega(Y)] + \\ + i [V, \sigma(f)] + \sum_p \int d^3x \frac{\delta \sigma(f)}{\delta \hat{f}_p(\mathbf{x})} L_p(\mathbf{x}; f) \} e^{-i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau}, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

где

$$L_p(\mathbf{x}, f) = - \frac{p_k}{m} \frac{\partial \hat{f}_p(\mathbf{x})}{\partial x_k} + i \text{Sp } \sigma(f) [V, \hat{f}_p(\mathbf{x})].$$

Умножая это уравнение на  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$  и беря шпур, получим, используя (5.1.8), (5.1.13),

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(\mathbf{x}) - \text{Sp } \omega(Y) \hat{f}_p(\mathbf{x}) = \\ = \frac{p_k}{m} \int_{-\infty}^0 d\tau \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \hat{f}_p \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m} \tau \right) - \text{Sp } \omega(Y) \hat{f}_p \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{p}}{m} \tau \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Отсюда, приравнявая члены одного порядка по градиентам в обеих частях этого равенства, мы и приходим к формуле (5.1.14). (Эта формула гарантирует отсутствие секулярных членов в теории возмущений по градиентам в (5.1.16).) Формула (5.1.14) определяет  $Y_p(\mathbf{x})$ , а тем самым и  $\omega(Y)$  как функционал  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$ ,

$w(Y(\mathbf{x}')) \equiv w(\hat{f}_{p'}(\mathbf{x}')) = \rho^{(0)}(\hat{f}_{p'}(\mathbf{x}'))$ . Покажем теперь, что интегральное уравнение (5.1.15) может быть преобразовано к виду

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [V, \sigma(f)] + \right. \\ \left. + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta\hat{f}_p(\mathbf{x})} \text{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(\mathbf{x})] \right\}_{\hat{f}_p(\mathbf{x}) \rightarrow \hat{f}_p(\mathbf{x} - \frac{p'}{m}\tau)} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \quad (5.1.17)$$

Заметим для этого, что из (5.1.12), (5.1.14) следует соотношение

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} w(\hat{f}_{p'}(\mathbf{x}')) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = w\left(\hat{f}_{p'}\left(\mathbf{x}' + \frac{p'}{m}\tau\right)\right).$$

Дифференцируя это соотношение по  $\tau$  и полагая  $\tau = 0$ , найдем

$$i[\mathcal{H}_0, w(f)] = i[\mathcal{D}, w(f)],$$

где  $\mathcal{D}$  — функциональный оператор, определяемый формулой

$$\mathcal{D} = -i \sum_p \int d^3x \frac{p_k}{m} \frac{\partial \hat{f}_p(\mathbf{x})}{\partial x_k} \frac{\delta}{\partial \hat{f}_p(\mathbf{x})}.$$

Используя эту формулу, перепишем интегральное уравнение (5.1.15) в виде

$$\sigma(f) = w(f) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [V, \sigma(f)] - [\mathcal{D}, \sigma(f) - w(f)] + \right. \\ \left. + \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta\hat{f}_p(\mathbf{x})} \text{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(\mathbf{x})] \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau}. \quad (5.1.18)$$

Заметим теперь, что если некоторый оператор  $B$  имеет структуру

$$B = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau(H+U)} A e^{-i\tau(H+U)}, \quad (5.1.18')$$

где  $H$ ,  $U$  и  $A$  — некоторые операторы, то, согласно (4.3.18),

$$B = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau H} \{A - i[U, B]\} e^{-i\tau H}. \quad (5.1.18'')$$

Полагая здесь

$$H = \mathcal{H}_0 - \mathcal{D}, \quad U = \mathcal{D},$$

$$A = [V, \sigma(f)] - [\mathcal{D}, \sigma(f) - w(f)] +$$

$$+ \sum_p \int d^3x \frac{\delta\sigma(f)}{\delta\hat{f}_p(\mathbf{x})} \text{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(\mathbf{x})],$$

получим, используя уравнение (5.1.18),

$$\sigma(f) = \omega(f) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau(\mathcal{H}_0 - \mathcal{D})} \left\{ [V, \sigma(f)] + \right. \\ \left. + \sum_p \int d^3x \frac{\delta \sigma(f)}{\delta f_p(x)} \text{Sp} \sigma(f) [V, \hat{f}_p(x)] \right\} e^{-i\tau(\mathcal{H}_0 - \mathcal{D})}.$$

Учитывая далее, что

$$e^{-i\tau\mathcal{D}} Q(f) e^{i\tau\mathcal{D}} = Q(f) \Big|_{\hat{f}_p(x) \rightarrow \hat{f}_p(x - \frac{p}{m}\tau)}, \quad \omega(f) = \rho^{(0)}(f),$$

где  $Q(f)$  — произвольный функционал  $\hat{f}_p(x)$ , мы и получим уравнение (5.1.17).

Обратим внимание на то, что это уравнение, относящееся к неоднородным состояниям, формально совпадает с уравнением (4.2.11) для однородного случая; при этом следует лишь учесть, что

$$\hat{f}_p\left(x - \frac{p}{m}\tau\right) = e^{ia\tau} \hat{f}_p(x),$$

где

$$a = i \frac{p_k}{m} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Иными словами, и в неоднородном случае можно пользоваться интегральным уравнением (4.2.11), если в качестве параметров  $\gamma_\alpha$  выбрать вигнеровскую функцию распределения или однозначно связанную с ней одночастичную матрицу плотности  $\hat{f}_{p,p'} = \text{Sp} \rho_{p,p'}^+$  (в последнем случае роль  $a_{\alpha\beta}$  играет величина  $i(\varepsilon_p - \varepsilon_{p'})$ ).

**5.1.2. Кинетические уравнения для газов бозонов и фермионов во втором приближении теории возмущений.** В предыдущем разделе мы показали, что роль параметров  $\gamma_\alpha$ , описывающих неравновесное состояние системы слабо взаимодействующих частиц, играет одночастичная матрица плотности, которой соответствуют операторы  $\hat{f}_{i,i'} = a_{i,i'}^+ a_i$ , где  $i$  — совокупность квантовых чисел, характеризующих индивидуальное состояние частицы. Такое описание, как мы видели, возникает при временах  $t \gg \tau_0$ .

Наша задача заключается теперь в установлении закона, по которому меняется со временем одночастичная матрица плотности  $\hat{f}_{i,i'}$  [16]. Обратимся с этой целью к уравнению (4.2.15), определяющему в случае слабого взаимодействия изменение со времени параметров  $\gamma_\alpha$ . На кинетическом этапе эволюции это уравнение, согласно (4.2.15), может быть записано в виде

$$\frac{\partial \hat{f}_{i,i'}}{\partial t} = \mathcal{L}_{i,i'}^{(0)}(\hat{f}) + L_{i,i'}^{(1)}(\hat{f}) + L_{i,i'}^{(2)}(\hat{f}) + \dots,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{i, i'}^{(0)}(f) &= i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) [\mathcal{H}_0, a_i^+ a_i], & L_{i, i'}^{(1)}(f) &= i \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) [V, a_i^+ a_i], \\ L_{i, i'}^{(2)}(f) &= - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) \left[ V(\tau), [V, a_i^+ a_i] + \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{i_1 i_1'} a_{i_1}^+ a_{i_1} \frac{\partial L_{i, i'}^{(1)}(f)}{\partial f_{i_1, i_1'}} \right], & \eta &\rightarrow +0, \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

$\rho^{(0)}(f)$  — статистический оператор идеального неравновесного газа, определяющий величины  $L_{i, i'}^{(k)}(f)$ :

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ \Omega(f) - \sum_{i i'} Y_{i, i'}(f) a_i^+ a_{i'} \right\} \quad (5.1.20)$$

и  $\Omega$  и  $Y_{i, i'}$  как функционалы  $f$  определяются формулами

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) = 1, \quad \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) a_i^+ a_i = f_{i, i'}$$

Как мы видели в § 3.1, при вычислении средних от произведений операторов  $a_i^+$ ,  $a_i$  (усреднение производится со статистическим оператором  $\rho^{(0)}(f)$ ) можно пользоваться правилами Вика, согласно которым в случае бозонов

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) a_1^+ \dots a_m^+ a_{l'} \dots a_{m'} = \sum f_{l', r_1} \dots f_{m', r_m},$$

и в случае фермионов

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(f) a_1^+ \dots a_m^+ a_{l'} \dots a_{m'} = \sum (-1)^{\mathcal{P}} f_{l', r_1} \dots f_{m', r_m},$$

где суммирование производится по всем перестановкам индексов  $1, \dots, m$  и  $\mathcal{P}$  (в случае фермионов) представляет собой число перестановок, необходимых для перехода от распределения чисел  $(1, \dots, m)$  к распределению  $(r_1, \dots, r_m)$ .

В величины  $L^{(1)}$ ,  $L^{(2)}$ , ... входят средние от многократных коммутаторов операторов  $V(\tau)$  и оператора  $a_i^+ a_{i'}$ . Для вычисления таких средних удобно расставлять связи между операторами непосредственно под знаком коммутаторов, так как при этом достигается существенное упрощение в выкладках: во-первых, некоторые связи не дают вклада в  $L^{(k)}$ , и, во-вторых, что самое главное, сразу возникают нужные комбинации одночастичных матриц плотности, характерные для интегралов столкновений. Так, например, справедливы соотношения

$$A \left[ \underbrace{a_1^+ a_2}_{\quad}, B \right] C = 0, \quad A \left[ a_1^+ \underbrace{a_2^+ a_3 a_4}_{\quad}, B \right] C = 0$$

независимо от того, как расставлены связи между операторами  $A, B, C$ . Для двойного коммутатора  $[A, [B, C]]$  имеем

$$\left[ \underbrace{A}_{\quad}, \underbrace{[B, C]}_{\quad} \right] = \left[ \underbrace{A}_{\quad}, \underbrace{[B, C]}_{\quad} \right] = \left[ \underbrace{A}_{\quad}, \underbrace{[B, C]}_{\quad} \right] = 0,$$

где  $[A, [B, C]]$  означает, что все операторы  $a^+$  и  $a$  из  $A$  и  $B$  связаны только между собой и ни один оператор  $a^+$  или  $a$  из  $A$  и  $B$  не связан с операторами из  $C$ .

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho^{(0)}(f) a_1^+ a_2 &\equiv \underbrace{a_1^+ a_2}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} = f_{2,1}, \\ \text{Sp } \rho^{(0)}(f) a_2 a_1^+ &\equiv \underbrace{a_2 a_1^+}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} = \delta_{1,2} + f_{2,1}, \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

справедливые для бозонов, легко видеть, что имеют место формулы

$$\begin{aligned} [\underbrace{a_1, Aa_2^+ B}] &= \{(\delta_{1,2} + f_{1,2}) - f_{1,2}\} AB = \delta_{1,2} AB, \\ [\underbrace{a_2^+ a_1, Aa_1^+ Ba_2'}] &= \{f_{2,2}(\delta_{1,1} + f_{1,1}) - f_{1,1}(\delta_{2,2} + f_{2,2})\} AB, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

$$\begin{aligned} [\underbrace{a_1^+ a_2 a_3, Aa_1^+ Ba_2^+ Ca_3' D}] &= \\ &= \{f_{3,1}(\delta_{1,2} + f_{2,1})(\delta_{2,3} + f_{3,2}) - (\delta_{1,3} + f_{3,1}) f_{2,1} f_{3,2}\} ABCD, \\ [\underbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, Aa_1^+ Ba_2^+ Ca_3' Da_4' E}] &= \{f_{3,1} f_{4,2}(\delta_{3,1} + f_{3,1})(\delta_{4,2} + f_{4,2}) - \\ &\quad - (\delta_{3,1} + f_{3,1})(\delta_{4,2} + f_{4,2}) f_{3,1} f_{4,2}\} ABCDE, \end{aligned}$$

где  $A, B, C, D, E$  — произвольные операторы. В случае фермионов в этих формулах следует заменить  $\delta_{1,2} + f_{1,2}$  на  $\delta_{1,2} - f_{1,2}$ , так как связи для фермионов определяются соотношениями

$$\text{Sp } \rho^{(0)}(f) a_1^+ a_2 \equiv \underbrace{a_1^+ a_2}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} = f_{2,1}, \quad \text{Sp } \rho^{(0)}(f) a_2 a_1^+ \equiv \underbrace{a_2 a_1^+}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} = \delta_{2,1} - f_{2,1}.$$

Перейдем к вычислению величин  $\mathcal{L}^{(0)}, L^{(1)}, L^{(2)}$ . Величина  $\mathcal{L}_{i_1, i_2}^{(0)}(f) \equiv \mathcal{L}_{1,2}^{(0)}(f)$  определяется, согласно (5.1.1), формулой

$$\mathcal{L}_{1,2}^{(0)}(f) = i \text{Sp } \rho^{(0)}(f) \sum_3 \epsilon_3 [a_3^+ a_3, a_2^+ a_1],$$

откуда, вычисляя коммутатор, имеем

$$\mathcal{L}_{1,2}^{(0)}(f) = i(\epsilon_2 - \epsilon_1) f_{1,2}. \quad (5.1.23)$$

Найдем далее величину  $L_{1,2}^{(1)}$ . Согласно (5.1.2) и (5.1.19)

$$L_{1,2}^{(1)}(f) = \frac{i}{4\gamma^2} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') [a_1^+ a_2^+ a_3' a_4', a_2^+ a_1].$$

В случае бозонов  $\Phi(1, 2; 3, 4) = \Phi(1, 2; 4, 3) = \Phi(2, 1; 3, 4)$ . Учитывая это свойство симметрии и замечая, что  $[V, \overline{a_2^+ a_1}] = 0$ , получим

$$L_{1,2}^{(1)}(f) = \frac{i}{4\mathcal{Y}} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') \cdot 4 [\overline{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}, \overline{a_2^+ a_1}],$$

откуда, согласно (5.1.21),

$$L_{1,2}^{(1)}(f) = \frac{i}{\mathcal{Y}} \sum_{1'2'3'4'} \Phi(1', 2'; 3', 4') f_{3', 1'} (f_{1, 2} \delta_{2, 4'} - f_{4', 2} \delta_{1, 2'}). \quad (5.1.24)$$

Вводя обозначения

$$\varepsilon_{1,2}^{(0)} = \varepsilon_1 \delta_{1,2}, \quad \varepsilon_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{\mathcal{Y}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 1'; 2', 2) f_{2', 1'} \quad (5.1.25)$$

и рассматривая  $\mathcal{L}_{1,2}^{(0)}$ ,  $L_{1,2}^{(1)}$ ,  $\varepsilon_{1,2}^{(0)}$ ,  $\varepsilon_{1,2}^{(1)}$  как матричные элементы одночастичных матриц  $\mathcal{L}^{(0)}$ ,  $L^{(1)}$ ,  $\varepsilon^{(0)}$ ,  $\varepsilon^{(1)}$ , можно переписать формулы (5.1.23), (5.1.24) в виде

$$\mathcal{L}^{(0)} = -i[\varepsilon^{(0)}, f], \quad L^{(1)} = -i[\varepsilon^{(1)}, f]. \quad (5.1.26)$$

Такие же формулы справедливы и для фермионов.

Найдем далее  $L_{1,2}^{(2)}$ . Замечая, что  $e^{i\mathcal{E}_0 \tau} a_1 e^{-i\mathcal{E}_0 \tau} = a_1 e^{-i\varepsilon_1 \tau}$ , можно, согласно (5.1.2), представить  $V(\tau)$  в виде

$$V(\tau) = \frac{1}{4\mathcal{Y}} \sum_{1234} \Phi_\tau(1, 2; 3, 4) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, \quad (5.1.27)$$

$$\Phi_\tau(1, 2; 3, 4) = \Phi(1, 2; 3, 4) \exp i\tau (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Учитывая при расстановке связей под знаком двойного коммутатора свойства симметрии амплитуды  $\Phi(1, 2; 3, 4)$  и используя формулы (5.1.2), (5.1.27), получим

$$\text{Sp} \rho^{(0)}(f) [V(\tau), [V, \overline{a_2^+ a_1}]] = A_{2,1} + A_{1,2}^*$$

где

$$\begin{aligned} A_{2,1} = & \frac{1}{16\mathcal{Y}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_\tau(1'', 2''; 3'', 4'') \Phi(1', 2'; 3', 4') \times \\ & \times \{ 16 [\overline{a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''}}, \overline{[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_3 a_{4'}], \overline{a_2^+ a_1}}] + \\ & + 8 [\overline{a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''}}, \overline{[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_3 a_{4'}], \overline{a_2^+ a_1}}] + \\ & + 8 [\overline{a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''}}, \overline{[a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_3 a_{4'}], \overline{a_2^+ a_1}}] \} \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 A_{2,1} = & \frac{1}{2\mathcal{Y}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_{\tau}(1'', 2''; 3'', 4'') \Phi(1', 2'; 3', 4') \times \\
 & \times \{2\hat{f}_{3'', 1''}\hat{f}_{3', 1'}\delta_{2', 1}(\hat{f}_{4'', 2}\delta_{4', 2''} - \hat{f}_{4', 2''}\delta_{4'', 2}) + \\
 & + \hat{f}_{3'', 1''}(\hat{f}_{3', 2''}\delta_{4'', 1'} - \hat{f}_{4'', 1'}\delta_{3', 2''})(\hat{f}_{1, 2'}\delta_{2, 4'} - \hat{f}_{4', 2}\delta_{1, 2'}) + \\
 & + \delta_{4', 2}[\hat{f}_{3', 1''}\hat{f}_{1, 2''}(\delta_{1', 3''} + \hat{f}_{3'', 1''})(\delta_{4'', 2'} + \hat{f}_{4'', 2'}) - \\
 & - \hat{f}_{4'', 2'}\hat{f}_{3'', 1'}(\delta_{3', 1''} + \hat{f}_{3', 1''})(\delta_{1, 2''} + \hat{f}_{1, 2''})]\}. \quad (5.1.28)
 \end{aligned}$$

Для нахождения  $L_{1,2}^{(2)}$  необходимо вычислить еще

$$-i \sum_{34} \frac{\partial L_{1,2}^{(1)}}{\partial f_{4,3}} \text{Sp } \rho^{(0)}(f) [V(\tau), a_3^+ a_4].$$

Используя (5.1.24) и замечая, что

$$\begin{aligned}
 \text{Sp } \rho^{(0)}(f) [V(\tau), a_3^+ a_4] = \\
 = \frac{1}{\mathcal{Y}^2} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_{\tau}(1'', 2''; 3'', 4'') \hat{f}_{3'', 1''} (\hat{f}_{4, 2''}\delta_{3, 4''} - \hat{f}_{4'', 3}\delta_{4, 2''}),
 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}
 -i \sum_{34} \frac{\partial L_{1,2}^{(1)}}{\partial f_{4,3}} \text{Sp } \rho^{(0)}(f) [V(\tau), a_3^+ a_4] = & \frac{1}{\mathcal{Y}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi(1', 2'; 3', 4') \times \\
 & \times \Phi_{\tau}(1'', 2''; 3'', 4'') \{ \delta_{2, 4'} \hat{f}_{3', 1'} \hat{f}_{3'', 1''} (\hat{f}_{1, 2''} \delta_{2', 4''} - \hat{f}_{4'', 2'} \delta_{1, 2''}) + \\
 & + \delta_{2, 4'} \hat{f}_{1, 2'} \hat{f}_{3'', 1''} (\hat{f}_{3', 2''} \delta_{1', 4''} - \hat{f}_{4'', 1'} \delta_{3', 2''}) - \\
 & - \delta_{1, 2'} \hat{f}_{3', 1'} \hat{f}_{3'', 1''} (\hat{f}_{4', 2''} \delta_{2, 4''} - \hat{f}_{4'', 2} \delta_{4', 2''}) - \\
 & - \delta_{1, 2'} \hat{f}_{4', 2'} \hat{f}_{3'', 1''} (\hat{f}_{3', 2''} \delta_{1', 4''} - \hat{f}_{4'', 1'} \delta_{3', 2''}) \}.
 \end{aligned}$$

Подставляя это выражение и (5.1.28) в выражение (5.1.19) для  $L_{1,2}^{(2)}(f)$  и замечая, что

$$\int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau x + \eta\tau} = (ix + \eta)^{-1} \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} \pi \delta_-(x),$$

получим [16]

$$\begin{aligned}
 L_{1,2}^{(2)}(f) = & \frac{\pi}{2\mathcal{Y}^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi(1'', 2''; 3'', 4'') \Phi(1', 2'; 3', 4') \times \\
 & \times \delta_-(\varepsilon_{1''} + \varepsilon_{2''} - \varepsilon_{3''} - \varepsilon_{4''}) \{ \hat{f}_{4'', 2'} \hat{f}_{3'', 1'} (\delta_{3', 1''} + \hat{f}_{3', 1''})(\delta_{1, 2''} + \hat{f}_{1, 2''}) - \\
 & - \hat{f}_{3', 1''} \hat{f}_{1, 2''} (\delta_{1', 3''} + \hat{f}_{3'', 1''})(\delta_{4'', 2'} + \hat{f}_{4'', 2'}) \} \delta_{4', 2} + \text{э. с.} \quad (5.1.29)
 \end{aligned}$$

В случае фермионов величина  $L_{1,2}^{(2)}(f)$  определяется аналогичной формулой: необходимо лишь в (5.1.29) сделать замену  $\delta_{1,2} + f_{1,2}$  на  $\delta_{1,2} - f_{1,2}$ .

Таким образом, кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности с точностью до членов, пропорциональных  $V^2$ , может быть записано в виде

$$\frac{\partial j}{\partial t} + i[e, f] = L^{(2)}(f), \quad (5.1.30)$$

где

$$\varepsilon_{1,2} = \varepsilon_1 \delta_{1,2} + \mathcal{V}^{-1} \sum_{1'2'} \Phi(1, 1'; 2', 2) f_{2', 1'}$$

и  $L_{1,2}^{(2)}$  определяется формулой (5.1.29).

Подчеркнем, что в левую часть этого уравнения (или, как говорят, в кинематическую часть) входит не энергия квазичастицы  $\varepsilon_i$ , а величина  $\varepsilon_{1,2}$ , которая зависит как от взаимодействия, так и от функции распределения. Эта величина, представляющая собой модифицированную энергию квазичастицы, учитывает эффекты самосогласованного поля.

Уравнение (5.1.30) является общим и справедливо как в однородном, так и в неоднородном случае, причем частицы могут находиться во внешнем статическом поле. (Оно определяет совокупность квантовых чисел  $i$ , характеризующих индивидуальное состояние частицы и ее энергию  $\varepsilon_i$ ; например, в случае однородного магнитного поля состояние заряженной частицы можно характеризовать проекцией импульса вдоль поля, неотрицательным целым числом  $n$ , определяющим энергию поперечного движения частицы и одним непрерывным параметром, определяющим положение центра так называемой ларморовой орбиты.)

Рассмотрим подробнее тот случай, когда индивидуальное состояние частицы характеризуется только импульсом  $p$ . В этом случае удобно перейти от одночастичной матрицы плотности  $f_{p, p'}$  к вингеровской функции распределения  $f_p(x)$ . Согласно (5.1.7)

$$f_p(x) = \sum_k e^{-ikx} f_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ikx} f_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}}.$$

В однородном случае величина  $f_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}}$  будет равна  $f_p \delta_{k,0}$ .

Поэтому эта величина в случае малой неоднородности будет иметь резкий максимум при  $k=0$ .

Подчеркнем, что так как величина  $f_p(x)$  имеет смысл при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ , то произведение  $\mathcal{V} f_{p, p'}$  также будет конечным при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  (в однородном случае  $\mathcal{V} (2\pi)^{-3} f_{p, p'} \rightarrow f_p \delta(p-p')$ ).



Вводя обозначение

$$\varepsilon_p(\mathbf{x}) = \sum_k e^{-ikx} \varepsilon_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}} = \frac{\gamma^0}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ikx} \varepsilon_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}}, \quad (5.1.31)$$

легко видеть, что будет справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{i\gamma^0}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ikx} [\varepsilon, f]_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}} &= \\ &= \frac{i}{(2\pi)^6} \int d^3k d^3p' d^3x' d^3x'' e^{-ikx} \left\{ \varepsilon_{\frac{1}{2}(p+p'-\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}') \times \right. \\ &\times f_{\frac{1}{2}(p+p'+\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}'') \exp\left(-ix' \left(p - \frac{k}{2} - p'\right) + ix'' \left(p + \frac{k}{2} - p'\right)\right) - \\ &- \varepsilon_{\frac{1}{2}(p+p'+\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}') f_{\frac{1}{2}(p+p'-\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}'') \times \\ &\left. \times \exp\left(-ix' \left(p' - \frac{k}{2} - p\right) + ix'' \left(p' + \frac{k}{2} - p\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

В случае малой неоднородности можно разложить  $\varepsilon_{\frac{1}{2}(p+p'\pm\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}')$  в ряд по степеням  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ , а  $f_{\frac{1}{2}(p+p'\pm\frac{1}{2}k)}(\mathbf{x}'')$  — в ряд по степеням  $\mathbf{x}'' - \mathbf{x}$ . С точностью до квадратичных членов по градиентам вигнеровской функции распределения  $f_p(\mathbf{x})$  получим

$$\frac{i\gamma^0}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ikx} [\varepsilon, f]_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}} = \frac{\partial \varepsilon_p(\mathbf{x})}{\partial p} \frac{\partial f_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_p(\mathbf{x})}{\partial p}.$$

Поэтому уравнение (5.1.30) можно представить в виде

$$\frac{\partial f_p(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p(\mathbf{x})}{\partial p} \frac{\partial f_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_p(\mathbf{x})}{\partial p} = L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f),$$

$$L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f) = \frac{\gamma^0}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{-ikx} L_{p-\frac{k}{2}, p+\frac{k}{2}}^{(2)}(f).$$

Легко видеть, что в однородном случае, когда  $f_{p, p'} = f_p \delta_{p, p'}$ , величина  $L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f) &\equiv L_p^{(2)}(f) = \frac{\pi}{\gamma^2} \sum_{1234} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \times \\ &\times \delta_{p, 4} \{f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2)\} \quad (5.1.32) \end{aligned}$$

(мы учли, что  $\text{Re } \delta_-(x) = \delta(x)$ ). Аналогичная формула справедлива для фермионов, при этом следует лишь величину  $1 + f$  заменить на  $1 - f$ .

В случае слабо неоднородных состояний величину  $L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f)$  также можно разложить по градиентам  $f_p(\mathbf{x})$ . Член нулевого порядка в этом разложении определяется формулой (5.1.32), в

которой следует лишь заменить  $f_p$  на  $f_p(\mathbf{x})$ :

$$L_p^{(2)}(\mathbf{x}; f) = L_p^{(2)}(f(\mathbf{x})) + \dots$$

Таким образом, в случае малой неоднородности и слабого взаимодействия вигнеровская функция распределения удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} = L_p^{(2)}(f). \quad (5.1.33)$$

Кинематическая часть этого уравнения имеет формально такой же вид, как и кинематическая часть классического кинетического уравнения, если под  $\varepsilon_p(\mathbf{x})$  понимать гамильтониан частицы (или квазичастицы). Интеграл же столкновений  $L_p^{(2)}(f)$  существенно отличается от классического интеграла столкновений, так как в квантовых переходах, учитываемых  $L^{(2)}$ , отражается характер статистики, которой подчиняются частицы.

Подчеркнем, что уравнением (5.1.33) можно пользоваться только в том случае, если характерные размеры пространственных неоднородностей велики как по сравнению с радиусом взаимодействия  $r_0$ , так и по сравнению с де-Бройлевской длиной волны частицы  $\lambda = \hbar/m\bar{v}$ .

В заключение этого раздела сформулируем  $H$ -теорему Больцмана. Рассмотрим для определенности случай бозонов. Плотность энтропии идеального газа бозонов определяется формулой (3.1.8)

$$s(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^{-1} \sum_p \{ (1 + f_p(\mathbf{x})) \ln(1 + f_p(\mathbf{x})) - f_p(\mathbf{x}) \ln f_p(\mathbf{x}) \}.$$

Дифференцируя это выражение по времени и используя кинетическое уравнение (5.1.33), получим

$$\dot{s}(\mathbf{x}) + \operatorname{div} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}), \quad (5.1.34)$$

где  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  — плотность потока энтропии

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^{-1} \sum_p \frac{\partial \varepsilon_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{p}} \{ (1 + f_p) \ln(1 + f_p) - f_p \ln f_p \} \quad (5.1.35)$$

и  $q(\mathbf{x})$  — плотность источников энтропии

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \mathcal{V}^{-1} \sum_1 L_1^{(2)}(f) \frac{\partial s(\mathbf{x})}{\partial f_1} = \\ &= \frac{\pi}{4\mathcal{V}^2} \sum_{1234} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \{ f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) - \\ &\quad - f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2) \} \ln \frac{(1 + f_3)(1 + f_4) f_1 f_2}{f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2)}. \quad (5.1.36) \end{aligned}$$

Замечая, что  $(\dot{x} - y) \ln \frac{x}{y} \geq 0$  при  $x > 0, y > 0$ , имеем  $q(\mathbf{x}) \geq 0$ , т. е.  $\int d^3x \dot{s}(\mathbf{x}) \geq 0$ . Это соотношение и представляет собой *H*-теорему Больцмана.

**5.1.3. Нулевой звук.** Покажем, используя кинетическое уравнение (5.1.33), что в вырожденном газе фермионов могут распространяться своеобразные колебания — *нулевой звук*. Замечая, что интеграл столкновений  $L^{(2)}$  обращается в нуль для равновесного фермиевского распределения  $n_p$ , рассмотрим распределение частиц, мало отличающееся от  $n_p$ ,  $f_p = n_p + \delta f_p$ , где  $|\delta f_p| \ll n_p$ . В этом случае уравнение (5.1.33) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \delta f_p}{\partial t} + v \frac{\partial \delta f_p}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial n_p}{\partial p} \sum_{p'} \left( \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial f_{p'}} \right)_0 \frac{\partial \delta f_{p'}}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{p'} \left( \frac{\partial L_p^{(2)}}{\partial f_{p'}} \right)_0 \delta f_{p'}, \quad (5.1.37)$$

где  $v = \left( \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p} \right)_0$  (индекс 0 служит для обозначения равновесного распределения). Будем искать поправку к функции распределения  $\delta f_p$  в виде

$$\delta f_p = \frac{\partial n_p}{\partial \varepsilon_p} g_p e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}.$$

Температуру газа будем считать достаточно низкой, так что  $\partial n_p / \partial \varepsilon_p = -\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F) / (\varepsilon_F - \text{границная фермиевская энергия})$ . Так как интеграл столкновений равен по порядку величины  $-\tau^{-1} \delta f_p$ , где  $\tau$  — время релаксации функции распределения, то при выполнении неравенства  $\omega \tau \gg 1$  мы можем пренебречь интегралом столкновений в уравнении (5.1.37)

$$(\mathbf{k}v - \omega) g_p + kv \sum_{p'} \left( \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial f_{p'}} \right)_0 \delta(\varepsilon_{p'} - \varepsilon_F) g_{p'} = 0. \quad (5.1.38)$$

Здесь абсолютное значение скорости  $v$  совпадает с граничной фермиевской скоростью  $v_F$ ,  $|v| = v_F$ , так как величина  $\delta f_p$  пропорциональна  $\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_F)$ .

Будем для простоты предполагать, что  $\left( \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial f_{p'}} \right)_0 = \Phi(p, p'; p, p') \equiv \Phi(p)$  не зависит от угла между  $p$  и  $p'$ . Тогда решение этого уравнения будет иметь вид

$$g_p = \frac{kv}{kv - \omega} a,$$

где  $a$  — некоторая константа. Подставляя это выражение в (5.1.38), получим уравнение

$$\frac{\omega}{2} \ln \frac{\omega + 1}{\omega - 1} - 1 = \Phi_0^{-1}, \quad \Phi_0 = \frac{\Phi(p_F) p_F^2}{2\pi^2 v_F}, \quad (5.1.39)$$

определяющее величину  $\omega = \frac{\omega}{kv_F}$ . Это уравнение, связывающее частоту  $\omega$  и волновой вектор  $k$ , имеет решение только в том случае, если  $\Phi_0 > 0$ . При  $\Phi_0 \rightarrow 0$  закон дисперсии имеет вид  $\omega = kv_F$ .

Таким образом, мы получили незатухающие колебания с линейным законом дисперсии, причем скорость распространения колебаний равна  $v_F$ . Эти колебания носят название нулевого звука.

Согласно гипотезе Ландау в ферми-жидкости, т. е. системе фермионов с сильным взаимодействием, спектр квазичастиц будет такого же типа, как и в идеальном газе. Поэтому можно предполагать, что дисперсионное уравнение (5.1.39) для нулевого звука, полученное нами для слабонеидеального газа фермионов будет справедливо также и для ферми-жидкости\*).

Заметим, что в области частот  $\omega t \ll 1$  в газе фермионов распространяется обычный звук, скорость которого равна  $c = (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$ , где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность массы (см. главу 6). Для идеального вырожденного газа

$$\text{фермионов } p = \frac{m^4 v_F^5}{15\pi^2}, \quad \rho = \frac{m^4 v_F^3}{3\pi^2} \quad \text{и следовательно } c = v_F / \sqrt{3}.$$

**5.1.4. Интеграл столкновений в третьем приближении теории возмущений.** В разделе 5.1.2 мы получили интеграл столкновений для газа бозонов и фермионов во втором приближении теории возмущений. В этот интеграл столкновений входит квантовомеханическая вероятность  $2\pi |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)$  и некоторая комбинация функций распределения, учитывающая прямые и обратные процессы. Приравняв интеграл столкновений нулю, мы получим в качестве стационарного решения кинетического уравнения функцию распределения свободных бозонов

$$n_p^{(0)} = (e^{\beta(\epsilon_p - p\mu)} - 1)^{-1},$$

или свободных фермионов

$$n_p^{(0)} = (e^{\beta(\epsilon_p - p\mu)} + 1)^{-1},$$

где  $\epsilon_p$  — энергия свободной частицы с импульсом  $p$ .

Между тем, как мы видели в 3.1.2, эти формулы определяют равновесные функции распределения только в нулевом приближении теории возмущений, взаимодействие же модифицирует эти распределения. Чтобы описать релаксацию неравновесной функции распределения к модифицированной равновесной функции распределения, необходимо учесть следующие члены разложения интеграла столкновений в ряд по степеням гамма-функции взаимодействия. В этом разделе мы вычислим вклад третьего порядка  $L_p^{(3)}(f)$  в интеграл столкновений  $L_p(f)$ , причем будем рассматривать пространственно-однородный случай и считать, что индивидуальное состояние частицы характеризуется только импульсом. Ограничимся вычислением  $L_p^{(3)}$  для бозонов. Интегральное уравнение (5.1.17) при этом упрощается и приобретает вид

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau} e^{i\mathcal{L}_0\tau} \left\{ [V, \sigma(f)] - \right. \\ \left. - i \sum_{p'} \frac{\partial \sigma(f)}{\partial l_{p'}} L_{p'}(f) \right\} e^{-i\mathcal{L}_0\tau}, \quad \eta \rightarrow +0. \quad (5.1.40)$$

где

$$L_p(f) = i \text{Sp } \sigma(f) [V, a_p^+ a_p]$$

\*) Вопрос о колебаниях ферми-газа был рассмотрен Гольдманом [49] в применении к электронному газу с кулоновским взаимодействием между частицами. Задача о газе незаряженных частиц рассматривалась в работе Климонтовича и Силна [67] и в работе Слина [105]. Общая теория колебаний ферми-жидкости в области низких температур была разработана Ландау [73, 74].

(мы учли, что  $[\mathcal{H}_0, a_p^+ a_p] = 0$  и, следовательно,  $a_{\alpha\beta} = 0$ ). Эта величина определяет эволюцию одночастичной функции распределения

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p(f)$$

и представляет собой интеграл столкновений с учетом высших приближений теории возмущений.

Из интегрального уравнения (5.1.40) следует, что разложение статистического оператора  $\sigma(f)$  в ряд по взаимодействию имеет следующий вид:

$$\sigma(f) = \sigma^{(0)}(f) + \sigma^{(1)}(f) + \sigma^{(2)}(f) + \dots,$$

где

$$\sigma^{(0)}(f) = \rho^{(0)}(f),$$

$$\sigma^{(1)}(f) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} [V(\tau), \rho^{(0)}(f)], \quad (5.1.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)}(f) = & - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} \left\{ \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{n\tau'} [[\rho^{(0)}(f), V(\tau + \tau')], V(\tau)] + \right. \\ & \left. + \sum_{p'} L_{p'}^{(2)}(f) \frac{\partial \rho^{(0)}(f)}{\partial f_{p'}} \right\}. \end{aligned}$$

Величина  $L_p^{(2)}(f) = i \text{Sp} \sigma^{(1)}(f) [V, a_p^+ a_p]$ , представляющая собой интеграл столкновений во втором приближении теории возмущений, была вычислена в 5.1.2. (Заметим, что  $L_p^{(1)}(f) = \mathcal{L}_p^{(0)}(f) = 0$ ). Зная  $\sigma^{(2)}$ , можно найти интеграл столкновений в третьем приближении теории возмущений:

$$L_p^{(3)}(f) = i \text{Sp} \sigma^{(2)}(f) [V, a_p^+ a_p].$$

Так как  $[a_p^+ a_p, \partial \rho^{(0)}(f) / \partial f_{p'}] = 0$ , то  $\text{Sp} [V, a_p^+ a_p] \partial \rho^{(0)}(f) / \partial f_{p'} = 0$  и, следовательно, согласно (5.1.41), имеем

$$\begin{aligned} L_p^{(3)}(f) = & -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{n\tau'} \text{Sp} \rho^{(0)}(f) [V(\tau + \tau'), \\ & [V(\tau), [V, a_p^+ a_p]]]. \end{aligned} \quad (5.1.42)$$

Усреднение в этой формуле происходит со статистическим оператором  $\rho^{(0)}(f)$  неравновесного идеального газа. Поэтому при вычислении шпура можно воспользоваться правилами Вика. При этом в рассматриваемом нами однородном случае возникают упрощения, связанные с тем, что связи между операторами в  $V(\tau + \tau')$  и в

$$[V, a_p^+ a_p] = \frac{1}{4\mathcal{V}} \sum_{1234} \Phi(1, 2; 3, 4) a_1^+ a_2^+ a_3 a_4 (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \equiv V_p$$

не дают вклада в  $L_p^{(3)}(f)$ . Действительно, учет связи между операторами  $a^+$  и  $a$  внутри блока  $V(\tau + \tau')$  приводит к выражению вида

$$\sum_{1234} \Phi_{\tau+\tau'}(1, 2; 3, 4) \text{Sp} \rho^{(0)}(f) [a_1^+ a_2^+ a_3 a_4, [V(\tau), V_p]] \equiv Q. \quad (5.1.43)$$

Так как  $\overline{a_1^+ a_3} = f_1 \delta_{1,3}$  и  $\Phi(1, 2; 3, 4) \sim \delta_{p_1 + p_2, p_3 + p_4}$ , то  $p_2 = p_4$ . Учитывая, что  $[\rho^{(0)}(f), a_2^+ a_2] = 0$ , получим  $Q = 0$ . Таким образом, все операторы  $a^+$  и  $a$  из  $V(\tau + \tau')$  в выражении (5.1.43) должны связываться только с операторами  $a^+$  и  $a$  из  $[V(\tau), V_p]$ .

Рассмотрим далее величину  $V_p$ . Учет связи между операторами  $a_1^+ a_2^+ a_3 a_4$  внутри  $V_p$  приводит к возникновению произведений символов Кронекера типа  $\delta_{1,3} \delta_{2,4}$ , благодаря чему величина  $\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}$  обращается в нуль. Учитывая эти упрощения и используя свойства симметрии амплитуды  $\Phi(1, 2; 3, 4)$ , мы придем к следующему выражению для шпура, входящего в  $L_p^{(3)}(f)$ :

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho^{(0)}(f) [V(\tau + \tau'), [V(\tau), V_p]] &= \frac{1}{64} \frac{1}{\mathcal{Y}^3} \sum \Phi_{\tau + \tau'}(1'', 2''; 3'', 4'') \times \\ &\times \Phi_{\tau}(1', 2'; 3', 4') \Phi(1, 2; 3, 4) (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \times \\ &\times \left\{ 8 \left[ \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}''', \overbrace{[a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]}'', \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}'' \right] + \right. \\ &+ 8 \left[ \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}''', \overbrace{[a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]}'', \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}'' \right] + \\ &+ 64 \left[ \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}''', \overbrace{[a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]}'', \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}'' \right] + \\ &+ 32 \left[ \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}''', \overbrace{[a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]}'', \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}'' \right] + \\ &\left. + 32 \left[ \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}''', \overbrace{[a_1^+ a_2^+ a_3 a_4]}'', \overbrace{a_1^+ a_2^+ a_3 a_4}'' \right] \right\} \quad (5.1.44) \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (5.1.42) и используя (5.1.21), получим, интегрируя по  $\tau$  и  $\tau'$ ,

$$L_p^{(3)}(f) = L_{ap}^{(3)}(f) + L_{bp}^{(3)}(f) + L_{cp}^{(3)}(f),$$

где

$$\begin{aligned} L_{ap}^{(3)}(f) &= \frac{\pi^2 i}{8 \mathcal{Y}^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(3, 4; 1', 2') \Phi(1', 2'; 1, 2) \times \\ &\times (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \delta_{-(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'})} \delta_{-(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \times \\ &\times (1 + f_1 + f_2) \{ f_1' f_2' (1 + f_3) (1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1') (1 + f_2') \} + \text{к. с.} \quad (5.1.45) \end{aligned}$$

$$L_{bp}^{(3)}(f) = \frac{\pi^2 i}{\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(3, 1'; 2, 2') \Phi(2', 4; 1, 1') \times \\ \times (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_3 - \varepsilon_{2'} - \varepsilon_2) \delta_{-}(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \times \\ \times (f_1 - f_4) \{f_3 f_{1'}(1 + f_2)(1 + f_{2'}) - f_2 f_{2'}(1 + f_3)(1 + f_{1'})\},$$

$$L_{cp}^{(3)}(f) = \frac{\pi^2 i}{2\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \Phi(1', 2; 1', 2) f_{1'} \times \\ \times (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \{ \delta_{-}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) - \delta_{-}^2(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \} \times \\ \times \{ f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) \}$$

(первые две строки в (5.1.44) соответствуют  $L_{ap}^{(3)}$ , третья строка соответствует  $L_{bp}^{(3)}$  и четвертая и пятая строки соответствуют  $L_{cp}^{(3)}$ ).

Выражения  $L_{ap}^{(3)}$  и  $L_{bp}^{(3)}$  могут быть преобразованы таким образом, что в них кинетическая скобка  $f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2)$  будет проводиться не функцией  $\delta_{-}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ , а функцией  $\delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$ . Начнем с  $L_{ap}^{(3)}$ . При множителе  $(\delta_{p,1} + \delta_{p,2})$  кинетическую скобку представим в виде

$$(1 + f_1 + f_2) \{ f_{1'} f_{2'} (1 + f_3)(1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_{1'}) (1 + f_{2'}) \} = \\ = (1 + f_3 + f_4) \{ f_{1'} f_{2'} (1 + f_1)(1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_{1'}) (1 + f_{2'}) \} + \\ + (1 + f_{1'} + f_{2'}) \{ f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2) \},$$

а при  $(\delta_{p,3} + \delta_{p,4})$  оставим ее без изменения. Тогда  $L_{ap}^{(3)}$  разобьется на сумму трех слагаемых (и им комплексно сопряженных). После замены индексов суммирования получим

$$L_{ap}^{(3)} = \frac{\pi^2 i}{8\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(3, 4; 1', 2') \Phi(1', 2'; 1, 2) (\delta_{4,p} + \delta_{3,p}) \times \\ \times (1 + f_{1'} + f_{2'}) \{ f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) \} \times \\ \times \{ \delta_{-}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) + \\ + \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) + \\ + \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \delta_{-}(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \} + \text{к. с.}$$

Замечая далее, что

$$\delta_{-}(x + y) [\delta_{-}(x) + \delta_{-}(y)] = \delta_{-}(x) \delta_{-}(y), \quad \delta_{-}(x) + \delta_{-}(-x) = 2\delta_{-}(x),$$

(5.1.46)

имеем

$$L_{ap}^{(3)} = \frac{\pi^2 i}{4\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(3, 4; 1', 2') \Phi(1', 2'; 1, 2) (\delta_{4,p} + \delta_{3,p}) \times \\ \times (1 + f_{1'} + f_{2'}) \{ f_3 f_4 (1 + f_1)(1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_3)(1 + f_4) \} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \delta_{-}(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) + \text{к. с.}$$

Преобразуем теперь  $L_{bp}^{(3)}$ . Разобьем кинетическую скобку при  $\delta_{1,p}$  и  $-\delta_{4,p}$  на два слагаемых следующим образом:

$$\begin{aligned} & (f_1 - f_4) \{f_1' f_3 (1 + f_2) (1 + f_2') - f_2 f_2' (1 + f_1') (1 + f_3)\} = \\ & = (f_1' - f_2') \{f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2)\} + \\ & \quad + (f_2 - f_3) \{f_4 f_2' (1 + f_1) (1 + f_1') - f_1 f_1' (1 + f_4) (1 + f_2')\}. \end{aligned}$$

При множителях  $\delta_{2,p}$  и  $-\delta_{3,p}$  кинетическую скобку оставим без изменения. Разбив таким образом  $L_{bp}^{(3)}$  на сумму шести слагаемых с множителями  $\delta_{1,p}$ ,  $\delta_{2,p}$ ,  $\delta_{3,p}$ ,  $\delta_{4,p}$  и переобозначая затем индексы суммирования, получим

$$\begin{aligned} L_{bp}^{(3)} = & \frac{\pi^2 i}{\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(2', 3; 1, 1') \Phi(4, 1'; 2, 2') \delta_{4,p} (f_2' - f_1') \times \\ & \times \{f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2)\} \times \\ & \times \{\delta_-(e_2' + e_3 - e_1' - e_1) \delta_-(e_3 + e_4 - e_1 - e_2) + \\ & + \delta_-(e_3 + e_2' - e_1 - e_1') \delta_-(e_2 + e_2' - e_4 - e_1') + \\ & + \delta_-(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) \delta_-(e_2 + e_2' - e_1' - e_4)\} + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Используя далее формулы (5.1.46), найдем

$$\begin{aligned} L_{bp}^{(3)} = & \frac{2\pi^2 i}{\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 3, 4) \Phi(2', 3; 1, 1') \Phi(4, 1'; 2, 2') \delta_{4,p} (f_2' - f_1') \times \\ & \times \{f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4) - f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2)\} \times \\ & \times \delta(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) \delta_-(e_3 + e_2' - e_1 - e_1') + \text{к. с.} \end{aligned}$$

Перейдем, наконец, к преобразованию  $L_{cp}^{(3)}$ . Замечая, что

$$\delta_-^2(x) = \frac{i}{\pi} \delta'_-(x)$$

и, следовательно,

$$\delta_-^2(x) - \delta_-^2(-x) = \frac{2i}{\pi} \delta'(x),$$

имеем, согласно (5.1.45),

$$\begin{aligned} L_{cp}^{(3)} = & \frac{\pi}{\gamma^3} \sum_{1234} \sum_{1'} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \Phi(1', 2; 1', 2) f_1' (\delta_{4,p} + \delta_{3,p} - \delta_{2,p} - \delta_{1,p}) \times \\ & \times \{f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4)\} \delta'(e_3 + e_4 - e_1 - e_2) \end{aligned}$$

Полученные выражения для  $L_{ap}^{(3)}$ ,  $L_{bp}^{(3)}$ ,  $L_{cp}^{(3)}$  и  $L_p^{(2)}$  позволяют представить интеграл столкновений  $L_p$  с точностью до членов третьего приближения включительно в виде \*)

$$\begin{aligned} L_p(f) = & \frac{\pi}{\gamma^2} \sum_{1234} |\tilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)|^2 \delta_{4,p} \{f_1 f_2 (1 + f_3) (1 + f_4) - \\ & - f_3 f_4 (1 + f_1) (1 + f_2)\} \delta(\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3 - \bar{e}_4), \quad (5.1.47) \end{aligned}$$

\*) Формула (5.1.47) была получена в работе [26] Боголюбова и Гурова. Четвертое приближение, в котором впервые проявляются эффекты, связанные с тройными столкновениями, было исследовано в работе [16].



где

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(1, 2; 3, 4) &= \Phi(1, 2; 3, 4) - \\ &- \frac{\pi i}{2\mathcal{Y}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 2; 1', 2') \Phi(1', 2'; 3, 4) (1 + f_{1'} + f_{2'}) \delta_-(\varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) - \\ &- \frac{2\pi i}{\mathcal{Y}} \sum_{1'2'} \Phi(1, 1'; 3, 2') \Phi(2, 2'; 4, 1') (f_{1'} - f_{2'}) \delta_-(\varepsilon_1 + \varepsilon_{1'} - \varepsilon_3 - \varepsilon_{2'}), \\ \bar{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1 + \mathcal{Y}^{-1} \sum_2 \Phi(1, 2; 1, 2) f_2. \end{aligned}$$

При разложении произведения  $|\tilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\bar{\varepsilon}_1 + \bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_3 - \bar{\varepsilon}_4)$  в ряд по взаимодействию должны быть удержаны только члены второго и третьего приближения, члены же более высокого порядка должны быть отброшены.)

Формула (5.1.47) допускает простую физическую интерпретацию. Мы видим, что в (5.1.47) входит та же кинетическая скобка, что и в формулу (5.1.32) для  $L_p^{(2)}$ . Учет же взаимодействия приводит к тому, что амплитуда  $\Phi(1, 2; 3, 4)$  заменяется на модифицированную амплитуду  $\tilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)$  и энергия свободной частицы  $\varepsilon_1$  заменяется на модифицированную энергию  $\bar{\varepsilon}_1$ . Эта энергия, как мы уже отмечали, учитывает эффекты самосогласованного поля, благодаря которым она зависит от самой функции распределения  $f_p$ . Модифицированная амплитуда  $\tilde{\Phi}(1, 2; 3, 4)$  также зависит от функции распределения  $f_p$ , и при  $f_p = 0$  обращается в известную квантовомеханическую формулу для амплитуды рассеяния во втором приближении теории возмущений.

Приравняв интеграл столкновений  $L_p^{(2)} + L_p^{(3)}$  нулю, мы найдем равновесную функцию распределения  $n_p$  с учетом членов пропорциональных  $V$

$$n_p = n_p^{(0)} - \beta n_p^{(0)} (1 + n_p^{(0)}) \sum_{p'} \Phi(p, p'; p, p') n_{p'}^{(0)}. \quad (5.1.48)$$

Аналогичным образом может быть рассмотрен газ фермионов.

**5.1.5. Энтропия слабонеидеального газа.** В разделе 3.1.1 было дано определение энтропии неравновесного идеального газа:

$$s^{(0)}(f) = - \text{Sp } \rho^{(0)}(f) \ln \rho^{(0)}(f), \quad (5.1.49)$$

где  $\rho^{(0)}(f)$  — статистический оператор неравновесного идеального газа, определяемый в случае бозонов формулой (2.4.29)

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ - \sum_1 \ln(1 + f_1) - \sum_1 a_1^+ a_1 \ln \frac{1 + f_1}{f_1} \right\}. \quad (5.1.50)$$

Отсюда непосредственно следует известное «комбинаторное» определение энтропии.

Если газ неидеален, то формула (5.1.49) не определяет энтропии газа. В частности, это видно из того, что если взять общее определение равновесной энтропии неидеальной системы

$$s_{\text{eq}} = - \text{Sp } \omega \ln \omega$$

и равновесной одночастичной функции распределения

$$n_1 = \text{Sp } \omega a_1^+ a_1$$

( $\omega$  — распределение Гиббса (3.1.1), учитывающее взаимодействие между частицами), то величина  $s^{(0)}(\text{Sp } \omega a^+ a)$  не будет совпадать с величиной  $S_{\text{eq}}$ , причем различие между этими величинами будет начинаться с членов второго порядка по взаимодействию  $V$ . Поэтому возникает вопрос, как следует определить энтропию неидеального и неравновесного газа.

Казалось бы, что после того, как мы с помощью интегрального уравнения (5.1.40) нашли разложение огрубленного статистического оператора в ряд по взаимодействию, достаточно воспользоваться определением энтропии фон Неймана (2.1.34), подставив в него вместо  $\rho$  огрубленный статистический оператор  $\sigma(f)$ . Однако такое определение энтропии неидеального неравновесного газа будет неправильным, так как отдельные члены разложения энтропии фон Неймана для огрубленного статистического оператора будут содержать расходящиеся интегралы. Поэтому это определение должно быть модифицировано. Чтобы понять, в чем должна состоять эта модификация, следует сперва выяснить характер упомянутых расходимостей в выражении для энтропии фон Неймана  $\bar{s}(f)$ , соответствующей огрубленному статистическому оператору  $\sigma(f)$ ,

$$\bar{s}(f) = - \text{Sp } \sigma(f) \ln \sigma(f).$$

Разложение огрубленного статистического оператора с точностью до членов порядка  $V^2$  имеет вид

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + \sigma^{(1)}(f) + \dots,$$

где, согласно (5.1.41),

$$\sigma^{(1)}(f) = i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} [\rho^{(0)}(f), V(\tau)], \quad \eta \rightarrow +0.$$

Так как в определении энтропии фон Неймана входит  $\ln \sigma(f)$ , то следует найти разложение  $\ln \sigma(f)$  в ряд по степеням гамильтониана взаимодействия  $V$ . Заметим для этого, что справедлива формула

$$\ln \rho = \int_{-\infty}^0 dz \left\{ \frac{1}{z - \rho} - \frac{1}{z - 1} \right\}$$

(так как собственные значения оператора  $\rho$  положительны). Теорию возмущений для резольвенты  $(z - \sigma)^{-1}$  оператора  $\sigma$  удобно строить, используя соотношение

$$(z - \sigma)^{-1} = (z - \rho^{(0)})^{-1} + (z - \rho^{(0)})^{-1} (\sigma - \rho^{(0)}) (z - \sigma)^{-1}.$$

Из этих формул следует, что

$$\ln \sigma = \ln \rho^{(0)} + (\ln \sigma)^{(1)} + \dots,$$

где

$$(\ln \sigma)^{(1)} = \int_{-\infty}^0 dz (z - \rho^{(0)})^{-1} \sigma^{(1)} (z - \rho^{(0)})^{-1}.$$

Подставляя сюда выражение (5.1.41) для  $\sigma^{(1)}$  и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^0 dz (z - \rho^{(0)})^{-1} [\rho^{(0)}, V(\tau)] (z - \rho^{(0)})^{-1} = [\ln \rho^{(0)}, V(\tau)],$$

найдем

$$(\ln \sigma)^{(1)} = i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} [\ln \rho^{(0)}(f), V(\tau)].$$

Замечая, что  $\ln((1 + f_1)/f_1) = \partial s^{(0)}(f)/\partial f_1$ , и используя выражение (5.1.50) для статистического оператора  $\rho^{(0)}(f)$ , получим

$$(\ln \sigma)^{(1)} = -i \sum_1 \frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} [a_1^+ a_1, V(\tau)]. \quad (5.1.51)$$

Перейдем теперь к вычислению энтропии фон Неймана для статистического оператора  $\sigma(f)$  с учетом членов первого и второго порядков.

Казалось бы, что для этого необходимо знать  $\sigma$  и  $\ln \sigma$  с точностью до членов второго порядка. Покажем, однако, что достаточно знать только величины  $\sigma^{(1)}$  и  $(\ln \sigma)^{(1)}$ . Заметим с этой целью, что если  $\lambda$  характеризует интенсивность взаимодействия, то из формул

$$\text{Sp } \sigma(f) = 1, \quad \text{Sp } \sigma(f) \ln \rho^{(0)}(f) = -s^{(0)}(f)$$

(мы учли, что  $\text{Sp } \sigma(f) a_1^+ a_1 = f_1$ ) следует соотношение

$$\frac{\partial \tilde{s}(f)}{\partial \lambda} = -\text{Sp } \frac{\partial \sigma(f)}{\partial \lambda} \{ \ln \sigma(f) - \ln \rho^{(0)}(f) \}.$$

Поэтому, подставляя сюда разложение  $\tilde{s}(f)$  в ряд по степеням взаимодействия

$$\tilde{s}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}^{(k)}(f),$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(0)}(f) &= s^{(0)}(f), & \tilde{s}^{(1)}(f) &= 0, \\ \tilde{s}^{(k)}(f) &= - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k} \text{Sp } \sigma^{(l)} (\ln \sigma)^{(k-l)}, & k &= 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{s}^{(2)}(f) = -\frac{1}{2} \text{Sp } \sigma^{(1)} (\ln \sigma)^{(1)}. \quad (5.1.52)$$

Таким образом, в  $\tilde{s}^{(2)}$  входят члены разложения  $\sigma$  и  $\ln \sigma$  только первого порядка по взаимодействию.

Используя выражения (5.1.41), (5.1.51) для  $\sigma^{(1)}$  и  $(\ln \sigma)^{(1)}$ , получим

$$\tilde{s}^{(2)}(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_{-\infty}^0 d\tau_2 e^{\eta(\tau_1 + \tau_2)} \varphi(\tau_1 - \tau_2; f), \quad (5.1.53)$$

где

$$\varphi(\tau; f) = \sum_1 \frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1} \varphi_1(\tau; f),$$

$$\varphi_1(\tau; f) = \text{Sp} \rho^{(0)}(f) [V(\tau), [V, a_1^+ a_1]].$$

При вычислении входящего сюда шпура, так же как и при нахождении интегралов столкновений, можно воспользоваться правилами Вика (см. раздел 5.1.2). Учитывая свойства симметрии амплитуды  $\Phi(1,2; 3,4)$ , имеем, согласно (5.1.2), (5.1.27),

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau; f) = & \frac{1}{16\gamma^2} \sum_{1'2'3'4'} \sum_{1''2''3''4''} \Phi_{\tau}(1', 2'; 3', 4) \Phi(1'', 2''; 3'', 4'') \times \\ & \times (\delta_{3', 1} + \delta_{4', 1} - \delta_{1', 1} - \delta_{2', 1}) 4 \left[ \overbrace{a_{1'}^+ a_{2'}^+ a_{3'} a_{4'}} + \overbrace{a_{1''}^+ a_{2''}^+ a_{3''} a_{4''}} \right]; \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau; f) = & \frac{1}{4\gamma^2} \sum_{1'2'3'4'} |\Phi(1', 2'; 3', 4)|^2 \exp i\tau(\varepsilon_{1'} + \varepsilon_{2'} - \varepsilon_{3'} - \varepsilon_{4'}) \times \\ & \times (\delta_{1, 1'} + \delta_{1, 2'} - \delta_{1, 3'} - \delta_{1, 4'}) \{f_{1'} f_{2'} (1 + f_{3'}) (1 + f_{4'}) - \\ & - f_{3'} f_{4'} (1 + f_{1'}) (1 + f_{2'})\}. \quad (5.1.54) \end{aligned}$$

Вводя фурье-компоненту функции  $\varphi(\tau; f)$

$$\varphi(\omega; f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \varphi(\tau; f),$$

перепишем выражение для  $\tilde{s}^{(2)}(f)$  в виде

$$\tilde{s}^{(2)}(f) = \frac{\pi^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_{-}^{\eta}(\omega) \delta_{-}^{\eta}(-\omega) \varphi(\omega; f), \quad (5.1.55)$$

где

$$\delta_{-}^{\eta}(\omega) = \pi^{-1} (\eta + i\omega)^{-1}.$$

Так как функция  $\varphi(\tau; f)$  (после перехода к термодинамическому пределу) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ , то ее фурье-компонента  $\varphi(\omega; f)$  не будет содержать  $\delta$ -образной особенности по  $\omega$ .

Подынтегральное выражение в (5.1.55), содержащее множитель  $\delta_{-}^{\eta}(\omega) \delta_{-}^{\eta}(-\omega) = \pi^{-2}(\eta^2 + \omega^2)^{-1}$ , будет приводить к расходимости  $\tilde{s}^{(2)}(f)$  при  $\eta \rightarrow 0$ . Расходимость возникает благодаря перемножению обобщенных функций  $\delta_{-}(\omega)$ ,  $\delta_{-}(-\omega)$ , содержащих положительные и отрицательные частоты.

Таким образом, возникает вопрос о регуляризации выражения для  $\tilde{s}^{(2)}(f)$ . Аналогичная ситуация возникает в квантовой теории поля при регуляризации элементов  $S$ -матрицы, в которую входят произведения пропагаторов, содержащих как положительно-, так и отрицательно-частотные части [28]. (Это имеет место в релятивистской теории поля благодаря существованию античастиц.)

Рецепт регуляризации выражений, содержащих произведения типа  $\delta_{-}^{\eta}(\omega) \delta_{-}^{\eta}(-\omega)$ , согласно [28] заключается в замене

$$\delta_{-}^{\eta}(\omega) \delta_{-}^{\eta}(-\omega) \rightarrow \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \delta_{-}'(\omega) + A \delta(\omega) + B \delta'(\omega), \quad (5.1.56)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Чтобы разъяснить этот рецепт, напомним, что функция  $\delta_{-}(\omega)$  представляет собой обобщенную функцию в том смысле, что имеет место соотношение

$$\lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_{-}^{\eta}(\omega) \varphi(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{-}(\omega) \varphi(\omega) d\omega,$$

где  $\varphi(\omega)$  — бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при  $\omega \rightarrow \pm \infty$ . (Это соотношение определяет функционал, стоящий в правой части равенства.) Однако для таких функций, вообще говоря, не существует предел

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow +0, \eta_2 \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_{-}^{\eta_1}(\omega) \delta_{-}^{\eta_2}(-\omega) \varphi(\omega), \quad (5.1.57)$$

хотя предел

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow +0, \eta_2 \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_{-}^{\eta_1}(\omega) \delta_{-}^{\eta_2}(\omega) \varphi(\omega)$$

существует и определяет обобщенную функцию  $\delta_{-}^2(\omega) \equiv \frac{i}{\pi} \delta_{-}'(\omega)$ .

Сузим теперь класс функций  $\varphi(\omega)$  таким образом, чтобы выполнялись условия  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ . На таком классе функций предел (5.1.57) будет существовать. Под произведением обобщенных функций  $\delta_{-}(\omega) \delta_{-}(-\omega)$  мы будем тогда понимать произвольное непрерывное расширение функционала (5.1.57), определенного на этом классе функций, на все бесконечно дифференцируемые функции  $\varphi(\omega)$ . (Такое определение было дано в работах Боголюбова и Парасюка [27].)

Чтобы найти определенное таким образом произведение  $\delta_-(\omega)\delta_-(-\omega)$ , заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\rho\omega} \delta_-^{\eta_1}(\omega) \delta_-^{\eta_2}(-\omega) = \frac{2}{\pi} e^{\eta_1\rho} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} - \\ - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 dq \theta(p+q) e^{(\eta_1 + \eta_2)q + \eta_1\rho}.$$

Асимптотика этого выражения при  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$  имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\rho\omega} \delta_-^{\eta_1}(\omega) \delta_-^{\eta_2}(\omega) = \\ = \frac{2}{\pi} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} + \frac{2}{\pi} \eta_1 (\eta_1 + \eta_2)^{-1} \rho - \frac{2}{\pi} \rho \theta(\rho) + 0(\eta),$$

откуда после обратного фурье-преобразования найдем

$$\delta_-^{\eta_1}(\omega) \delta_-^{\eta_2}(-\omega) = -\frac{i}{\pi} \delta'_-(-\omega) + \frac{2}{\pi} (\eta_1 + \eta_2)^{-1} \delta(\omega) - \\ - \frac{2i}{\pi} \eta_1 (\eta_1 + \eta_2)^{-1} \delta'(\omega) + 0(\eta). \quad (5.1.57')$$

Из этой формулы видно, что для функций  $\varphi(\omega)$ , обращающихся вместе со своей первой производной в нуль при  $\omega = 0$ , имеет место соотношение

$$\lim_{\eta_1 \rightarrow +0, \eta_2 \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_-^{\eta_1}(\omega) \delta_-^{\eta_2}(-\omega) \varphi(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta'_-(-\omega) \varphi(\omega).$$

Произвольное непрерывное расширение этого функционала (заданного на функциях, для которых  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ ) на весь класс бесконечно дифференцируемых функций имеет, очевидно, вид

$$\delta_-(\omega) \delta_-(-\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \delta'_-(\omega) + A\delta(\omega) + B\delta'(\omega),$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные. Отсюда согласно (5.1.56), вытекает следующее выражение для регуляризованной поправки второго порядка в энтропии фон Неймана, отвечающей огрубленному статистическому оператору  $\sigma(f)$  [91]

$$\text{Reg} \tilde{s}^{(2)}(f) = -\frac{\pi}{2} A s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f), \quad (5.1.58)$$

где, согласно (5.1.56), (5.1.54),

$$s^{(2)}(f) = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varphi(\omega; f) \operatorname{Im} \delta'_-(\omega) = \frac{\pi}{8\gamma^2} \operatorname{Im} \sum_{1234} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \times \\ \times \delta'_-(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \ln \frac{(1+f_1)(1+f_2)f_3f_4}{f_1f_2(1+f_3)(1+f_4)} \times \\ \times \{f_1f_2(1+f_3)(1+f_4) - f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)\} \quad (5.1.59)$$

и  $\dot{S}^{(0)}(f)$  — производство «комбинаторной» энтропии, вычисленное с помощью кинетического уравнения с интегралом столкновений во втором приближении теории возмущений (см. формулу (5.1.36))

$$\dot{S}^{(0)}(f) = -\pi\varphi(\omega; f)|_{\omega=0} = \\ = \frac{\pi}{4\gamma^2} \sum_{1234} |\Phi(1, 2; 3, 4)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) \{f_1f_2(1+f_3)(1+f_4) - \\ - f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)\} \ln \frac{(1+f_3)(1+f_4)f_1f_2}{f_3f_4(1+f_1)(1+f_2)}. \quad (5.1.60)$$

(член  $B\delta'(\omega)$  не дает вклада в  $\tilde{s}^{(2)}$  благодаря симметрии функции  $\varphi(\omega; f) = \varphi(-\omega; f)$ ).

Заметим теперь, что если бы мы вычисляли асимптотику выражения (5.1.55) при  $\eta \rightarrow +0$ , то, согласно (5.1.57'), постоянная  $A$  равнялась бы  $A = (\pi\eta)^{-1}$ . Таким образом, величина  $A$  и содержит расходимость, о которой говорилось выше.

В использованном нами методе регуляризации величина  $A$  считается конечной произвольной постоянной и имеет размерность времени. Константы же такой размерности наша теория не содержит, поэтому следует положить  $A = 0$ . Иными словами, поправка второго порядка к «комбинаторной» энтропии  $s^{(0)}(f)$  определяется величиной  $s^{(2)}(f)$ , и, следовательно, энтропия неравновесного состояния определяется формулой [91]

$$s(f) = s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f) + \dots, \quad s^{(2)}(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 d\tau \tau\varphi(\tau; f). \quad (5.1.61)$$

Разъясним теперь физический смысл возникновения расходящихся членов в выражении для  $\tilde{s}(f)$  [91]. Если бы мы вычисляли энтропию фон Неймана с точным статистическим оператором (не переходя сразу к кинетическому этапу эволюции) и строили при этом теорию возмущений при фиксированных текущих значениях одночастичной функции распределения, то для асимптотики энтропии в области больших времен ( $t \gg \tau_0$ ) мы получили бы выражение [91]

$$s(f; t) = s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f) - t\dot{s}^{(0)}(f) + \dots \quad (5.1.62)$$

Мы видим, таким образом, что это выражение формально совпадает с (5.1.58), если считать  $A = 2t/\pi$ . Это означает, что возникновение расходимостей связано с «огрублением» статистического оператора на кинетическом этапе эволюции. Наличие в (5.1.62) члена, пропорционального  $t$ , приводит к тому, что энтропия фон Неймана, соответствующая точному статистическому оператору, не меняется с течением времени. Между тем энтропия, определяемая как  $s^{(0)}(f) + s^{(2)}(f)$ , будет возрастать с течением времени.

Покажем теперь, что введенная нами энтропия (5.1.61) с точностью до членов порядка  $V^2$  в состоянии равновесия совпадает с равновесной термодинамической энтропией, определяемой как  $-\text{Sp } \omega \ln \omega$ . Кроме того, мы убедимся сейчас, что в этом же приближении энтропия (5.1.61) достигает максимума для равновесного распределения частиц при заданных энергии и числе частиц [91].

Так как на кинетическом этапе эволюции энтропия должна быть функционалом одночастичной функции распределения  $f_p$  то эти свойства можно сформулировать в виде следующих двух соотношений:

$$s(n) = -\text{Sp } \omega \ln \omega \equiv s_{eq}, \quad (5.1.63)$$

$$\left( \frac{\partial s(f)}{\partial f_1} - \beta \frac{\partial \mathcal{H}(f)}{\partial f_1} + \beta \mu \right)_{f=n} = 0, \quad n_1 = \text{Sp } \omega a_1^+ a_1, \quad (5.1.64)$$

где средняя энергия  $\mathcal{H}(f)$  как функционал  $f$  определяется формулой

$$\mathcal{H}(f) = \text{Sp } \sigma(f) \mathcal{H}. \quad (5.1.65)$$

Второе из этих соотношений можно рассматривать как вариационный принцип для нахождения одночастичной функции распределения при известной неравновесной энтропии. Сформулируем его в другом, более удобном для нас виде. Считая выполненным соотношение (6.1.63), можно написать равенство

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \varepsilon_1} = \left( \frac{\partial s(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n} + \sum_2 \left( \frac{\partial s(f)}{\partial f_2} \right)_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1}, \quad (5.1.66)$$

где

$$s_{eq} = \beta \left\{ \mathcal{H}(n) - \mu \sum_1 n_1 \right\} - \Omega.$$

(Эта формула вытекает из определения (5.1.63) и того, что  $\mathcal{H}(n) = \text{Sp } \omega \mathcal{H}$  (см. формулу (5.1.69)).) Поэтому

$$\frac{\partial s_{eq}}{\partial \varepsilon_1} = \beta \left( \frac{\partial \mathcal{H}(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n} + \beta \sum_2 \left( \frac{\partial \mathcal{H}(f)}{\partial f_2} \right)_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} - \beta \mu \sum_2 \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} - \beta n_1$$

и, следовательно, формула (5.1.66) принимает вид

$$\sum_2 \left\{ \frac{\partial s(f)}{\partial f_2} - \beta \frac{\partial \mathcal{H}(f)}{\partial f_2} + \beta \mu \right\}_{f=n} \frac{\partial n_2}{\partial \varepsilon_1} = \beta \left( \frac{\partial V(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n} - \left( \frac{\partial s(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n},$$



где  $V(f) = \text{Sp } \sigma(f) V$ . Мы видим, что для выполнения вариационного принципа (5.1.64) необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\left( \frac{\partial s(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n} = \beta \left( \frac{\partial V(f)}{\partial \varepsilon_1} \right)_{f=n}. \quad (5.1.67)$$

(При этом достаточность (5.1.67) легко доказать в теории возмущений, учитывая, что  $\partial n_2^{(0)} / \partial \varepsilon_1 \sim \delta_{1,2}$ .) Итак, для проверки вариационного принципа (5.1.64) следует убедиться в справедливости (5.1.67), предварительно убедившись в справедливости (5.1.63).

Чтобы убедиться в справедливости (5.1.63), (5.1.67), найдем сначала  $n_1 = \text{Sp } \omega a_1^+ a_1$  и  $s_{eq} = -\text{Sp } \omega \ln \omega$  в рассматриваемом нами приближении. Для этого можно было бы воспользоваться стандартной термодинамической теорией возмущений. Удобнее, однако, термодинамическую теорию возмущений строить несколько иначе, исходя из того, что стационарное решение кинетического уравнения  $f_p = n_p$ , обращающее интеграл столкновений  $L_p$  в нуль:

$$L_p(n) = 0, \quad (5.1.68)$$

приводит к статистическому оператору  $\sigma(n)$ , эквивалентному распределению Гиббса [86]

$$\text{Sp } \sigma(n) \psi^+(x_1) \dots \psi(x_n) = \text{Sp } \omega \psi^+(x_1) \dots \psi(x_n). \quad (5.1.69)$$

При этом функция распределения  $n_1$  совпадает с равновесной функцией распределения  $n_1 = \text{Sp } \omega a_1^+ a_1$ . Из (5.1.68) и (5.1.40) следует, что  $\sigma(n)$  и, следовательно,  $\omega$  удовлетворяют интегральному уравнению

$$\omega = \rho^{(0)}(n) + i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} [\omega, V] e^{-i\mathcal{H}_0\tau}, \quad (5.1.70)$$

причем соотношение  $L_p(n) = 0$  является условием разрешимости этого интегрального уравнения. (Оно получается, если умножить уравнение (5.1.70) на  $a_1^+ a_1$  и вычислить затем шпур.)

Подчеркнем, что в уравнении (5.1.70) не содержится никаких макроскопических характеристик типа температуры или химического потенциала. Равновесная функция распределения  $n_1$ , входящая в  $\rho^{(0)}(n)$ , а вместе с ней и эти макроскопические характеристики появляются в теории возмущений по взаимодействию при решении уравнения  $L_p(n) = 0$ .

Перейдем теперь к вычислению равновесной функции распределения  $n_1 = \text{Sp } \omega a_1^+ a_1$ , которая связана с  $\Omega$  соотношением

$$n_1 = \beta^{-1} \partial \Omega / \partial \varepsilon_1. \quad (5.1.71)$$

Для нахождения  $\Omega$  продифференцируем условие нормировки  $w$  по константе взаимодействия  $\lambda$ . В результате получим

$$\beta^{-1} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \text{Sp } \tilde{w} V + \frac{1}{2\mathcal{Y}} \sum_{12} \Phi(1, 2; 1, 2) n_1 n_2, \quad (5.1.72)$$

где введено обозначение  $\tilde{w} = w - \rho^{(0)}(n)$  и использовано явное выражение (5.1.2) для  $V$ . Раскладывая  $\tilde{w}$  и  $n_1$  в ряды теории возмущений

$$\tilde{w} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{w}^{(k)}, \quad n_1 = \sum_{k=1}^{\infty} n_1^{(k)}$$

(разложение для  $\tilde{w}$  возникает как за счет разложения  $w$  в ряд по  $V$ , так и за счет разложения функции распределения  $n_1$ , входящей в  $\rho^{(0)}(n)$ ), получим из уравнений (5.1.71), (5.1.72) соотношения

$$\begin{aligned} n_1^{(0)} &= (e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} - 1)^{-1}, \\ n_1^{(k+1)} &= \frac{1}{k+1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \text{Sp } \tilde{w}^{(k)} V + \\ &+ \frac{1}{k+1} \frac{1}{\mathcal{Y}} \sum_{1'2'} \Phi(1', 2'; 1', 2') \sum_{l=0}^k \frac{\partial n_1^{(l)}}{\partial \varepsilon_1} n_2^{(k-l)}, \quad (5.1.73) \\ &k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

позволяющие выразить  $k$ -й член разложения равновесной функции распределения через  $n_1^{(0)}$  и  $\text{Sp } \tilde{w}^{(l)} V$  ( $l = 1, \dots, k-1$ ). Отсюда находим

$$n_1^{(1)} = -\beta n_1^{(0)} (1 + n_1^{(0)}) \varepsilon_1^{(1)}, \quad (5.1.74)$$

где  $\varepsilon_1^{(1)} = \mathcal{Y}^{-1} \sum_2 \Phi(1, 2; 1, 2) n_2^{(0)}$  (см. формулу (5.1.48)).

Перейдем теперь к вычислению равновесной энтропии  $s_{eq} = -\text{Sp } w \ln w$ . Дифференцируя это выражение по константе взаимодействия и замечая, что  $\beta(\varepsilon_1 - \mu) = (\partial s^{(0)}(f) / \partial f_1)_{f=n^{(0)}}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{eq}}{\partial \lambda} &= \sum_1 \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1} \right)_{f=n^{(0)}} + \beta \text{Sp } \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \lambda} V + \\ &+ \beta \mathcal{Y}^{-1} \sum_{12} \Phi(1, 2; 1, 2) \frac{\partial n_1}{\partial \lambda} n_2. \end{aligned}$$

Отсюда, разлагая равновесную энтропию  $s_{eq}$  в ряд теории возмущений

$$s_{eq} = \sum_{k=0}^{\infty} s_{eq}^{(k)},$$

находим для  $k + 1$ -го члена разложения следующее выражение;

$$s_{\text{eq}}^{(k+1)} = \sum_1 \left( \frac{\partial s^{(0)}(f)}{\partial f_1} \right)_{f=n^{(0)}} n_1^{(k+1)} + \frac{k}{k+1} \beta \text{Sp } \tilde{w}^{(k)} V + \\ + \beta \mathcal{Y}^{k-1} \sum_{12} \Phi(1, 2; 1, 2) \sum_{i=1}^k \frac{1}{k+1} n_1^{(i)} n_2^{(k-i)},$$

которое в силу (5.1.74) дает

$$s_{\text{eq}}^{(0)} = s^{(0)}(n^{(0)}), \quad s_{\text{eq}}^{(1)} = (s^{(0)}(n))^{(1)}, \\ s_{\text{eq}}^{(2)} = (s^{(0)}(n))^{(2)} + \frac{1}{2} \beta \text{Sp } \tilde{w}_1 V. \quad (5.1.75)$$

В этих соотношениях величины  $(s^{(0)}(n))^{(1)}$ ,  $(s^{(0)}(n))^{(2)}$  представляют собой члены разложения  $s^{(0)}(n)$ , связанные с разложением равновесной функции распределения

$$s^{(0)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (s^{(0)}(n))^{(k)}.$$

Проверим сначала равенство  $s(n) = s_{\text{eq}}$ . Его справедливость в нулевом и первом порядках по взаимодействию, согласно (5.1.75), очевидна. Для выполнения же этого равенства во втором порядке, в силу этих же формул, должно иметь место соотношение

$$s^{(2)}(n^{(0)}) = \frac{1}{2} \beta \text{Sp } \tilde{w}_1 V. \quad (1.5.76)$$

Для его проверки заметим, что из (5.1.70) следует формула

$$\text{Sp } \tilde{w}_1 V = i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } [\omega_0, V(\tau)] V,$$

где  $\omega_0 = \rho^{(0)}(n^{(0)})$ . Справедливость (5.1.76) становится теперь очевидной, если учесть вытекающую из определения  $\varphi(\tau; f)$  (5.1.53) формулу

$$\varphi(\tau; n^{(0)}) = i\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Sp } \omega_0 [V, V(\tau)].$$

Перейдем теперь к проверке выполнения вариационного принципа (5.1.64) или эквивалентного ему соотношения (5.1.67). Для этого заметим, что разложение  $V(f)$  по взаимодействию имеет, согласно (5.1.41), вид

$$V(f) = V_1(f) + V_2(f) + \dots,$$

где

$$V_1(f) = \text{Sp } \rho^{(0)}(f) V, \quad V_2(f) = i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } [\rho^{(0)}(f), V(\tau)] V. \quad (5.1.77)$$

Отсюда видно, учитывая (5.1.61), что в нулевом и первом порядках соотношение (5.1.67) выполняется. Во втором же порядке для этого должно иметь место соотношение

$$\left(\frac{\partial s^{(2)}(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}} = \beta \left(\frac{\partial V_2(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}}, \quad (5.1.78)$$

которое тоже выполняется. Действительно, согласно (5.1.61), (5.1.53), имеем

$$\left(\frac{\partial s^{(2)}(f)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{f=n^{(0)}} = -\beta \int_{-\infty}^0 d\tau \tau \text{Sp } \omega_0[V, [V(\tau), a_1^+ a_1]],$$

откуда и следует (5.1.78), если учесть выражение (5.1.77) для  $V_2(f)$ .

Итак, определенная нами энтропия (5.1.61) обладает в рассматриваемом приближении общими свойствами (5.1.63), (5.1.64), которыми должна обладать неравновесная энтропия.

Заметим в заключение этого раздела, что подобным же образом можно построить энтропию слабонеидеального неравновесного газа и в следующих приближениях теории возмущений [91].

## § 5.2. Кинетические уравнения с учетом только парных столкновений

**5.2.1. Статистический оператор на кинетическом этапе эволюции.** В предыдущем параграфе мы получили интегральное уравнение для статистического оператора  $\sigma(f)$  на кинетическом этапе эволюции, предполагая, что взаимодействие между частицами является слабым. В случае пространственно-однородных состояний это уравнение имеет вид

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\mathcal{H}_0} e^{i\varepsilon\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [V, \sigma(f)] - i \sum_p \frac{\partial \sigma(f)}{\partial f_p} L_p(f) \right\} e^{-i\varepsilon\mathcal{H}_0\tau},$$

где  $L_p(f)$  — интеграл столкновений

$$L_p(f) = i \text{Sp } \sigma(f) [V, a_p^+ a_p] \quad (5.2.1)$$

(для простоты здесь не учитываются спиновые переменные).

Однако, так же как и в классическом случае, слабость взаимодействия не является здесь необходимой. Действительно, существенно лишь, чтобы при достаточно больших временах состояние системы можно было описывать с помощью одночастичной функции распределения. Для этого необходимо, в свою очередь, чтобы одночастичная функция менялась медленнее, чем многочастичные функции распределения, благодаря чему многочас-

точные функции будут успевать «подстраиваться» к мгновенным значениям одночастичной функции распределения. Такая ситуация имеет место не только в случае слабого взаимодействия, но и в случае малой плотности частиц. При этом в первом случае столкновения могут быть частыми, хотя вероятность отдельного акта рассеяния будет невелика. Во втором же случае вероятность отдельного акта рассеяния может быть большой, но столкновения будут происходить редко благодаря малой плотности частиц.

В этом параграфе мы получим кинетические уравнения для квантовых систем в случае малой плотности частиц. При этом можно исходить, как только что было разъяснено, из интегрального уравнения (5.1.40) для статистического оператора  $\sigma(f)$ . Однако решение этого уравнения следует теперь искать не в виде разложения по степеням взаимодействия, а в виде разложения по степеням плотности. Такому разложению формально соответствует разложение статистического оператора  $\sigma(f)$  в функциональный ряд по степеням функции распределения  $f$ .

Покажем, что оператор  $\sigma(f)$  может быть просто выражен через  $\rho^{(0)}(f)$ . Перепишем для этого уравнение (5.1.40) в виде

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} e^{i\mathcal{H}\tau} [W, \sigma(f)] e^{-i\mathcal{H}\tau}, \quad (5.2.2)$$

где

$$W = -V + i \sum_p L_p(f) \frac{\partial}{\partial f_p}$$

(оператор  $W$  действует в гильбертовом пространстве и в пространстве функционалов функции распределения).

Используем теперь формулы (5.1.18'), (5.1.18''). Полагая в них

$$A = i[W, \sigma(f)], \quad U = W, \quad H = \mathcal{H} - i \sum_p L_p(f) \frac{\partial}{\partial f_p} = \mathcal{H}_0 - W,$$

получим, согласно (5.2.1),

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} e^{iH\tau} \{i[W, \sigma(f)] - i[W, B]\} e^{-iH\tau}.$$

Замечая, что  $B = \sigma(f) - \rho^{(0)}(f)$ , имеем

$$\sigma(f) = \rho^{(0)}(f) + i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{n\tau} e^{iH\tau} [\rho^{(0)}(f), H] e^{-iH\tau}$$

(мы учли, что  $[\rho^{(0)}(f), \mathcal{H}_0] = 0$ ). Так как

$$e^{iH\tau} i [\rho^{(0)}(f), H] e^{-iH\tau} = -\frac{\partial}{\partial \tau} e^{iH\tau} \rho^{(0)}(f) e^{-iH\tau},$$

то интегрирование по частям дает

$$\sigma(f) = \eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\pi\tau} e^{iH\tau} \rho^{(0)}(f) e^{-iH\tau}$$

или

$$\sigma(f) = \eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\pi\tau} e^{\tau \sum_p L_p(f)} \frac{\partial}{\partial f_p} e^{i\mathcal{E}\tau} \rho^{(0)}(f) e^{-i\mathcal{E}\tau}. \quad (5.2.3)$$

Подставив это выражение в (5.2.1), получим следующее уравнение для определения интеграла столкновений  $L_p(f)$  [38]:

$$L_p(f) = i\eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\pi\tau} e^{\tau \sum_{p'} L_{p'}(f)} \frac{\partial}{\partial f_{p'}} \cdot \text{Sp} \rho^{(0)}(f) e^{-i\mathcal{E}\tau} [V, a_p^+ a_p] e^{i\mathcal{E}\tau}. \quad (5.2.4)$$

Формулы (5.2.3), (5.2.4) позволяют в принципе получить разложения  $\sigma(f)$  и  $L_p(f)$  в функциональные ряды по степеням  $f$ , так как нам известно разложение  $\rho^{(0)}(f)$  по степеням  $f$  (см. (3.1.33)). Этой задачей мы и займемся в следующем разделе.

**5.2.2. Разложение интеграла столкновений в ряд по степеням одночастичной функции распределения.** Как мы уже говорили, для разложения  $\sigma(f)$  и  $L_p(f)$  в ряд по степеням  $f$  достаточно воспользоваться разложением (3.1.33) статистического оператора идеального неравновесного газа  $\rho^{(0)}(f)$  в ряд по степеням  $f$ :

$$\rho^{(0)}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^{(0)}(f),$$

где операторы  $\rho_n^{(0)}(f)$  определяются формулами (3.1.33).

Разложение  $L_p(f)$  в ряд по степеням  $f$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} L_p(f) &= \sum_{n=2}^{\infty} L_p^{(n)}(f), \\ L_p^{(2)}(f) &= M_0^{(2)}(\mathbf{p}; f), \\ L_p^{(3)}(f) &= M_0^{(3)}(\mathbf{p}; f) + \sum_{p'} M_0^{(2)}(\mathbf{p}'; f) \frac{\partial}{\partial f_{p'}} M_1^{(2)}(\mathbf{p}; f). \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M_l^{(n)}(\mathbf{p}; f) &= i\eta \int_{-\infty}^0 d\tau \tau^l \mathcal{F}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) e^{\pi\tau} = \eta \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \frac{1}{\eta} M_0^{(n)}(\mathbf{p}; f), \\ \mathcal{F}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) &= \text{Sp} \rho_n^{(0)}(f) e^{-i\mathcal{E}\tau} [V, a_p^+ a_p] e^{i\mathcal{E}\tau}. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Оператор  $\rho_n^{(0)}(f)$  можно представить в виде

$$\rho_n^{(0)}(f) = \bar{\rho}_n^{(0)}(f) + \bar{\bar{\rho}}_n^{(0)}(f).$$

Здесь  $\bar{\rho}_n^{(0)}(f)$  выражается через проектор  $|1, \dots, n\rangle\langle 1, \dots, n|$  на  $n$ -частичное состояние:

$$\bar{\rho}_n^{(0)}(f) = \frac{1}{n!} \sum_{1 \dots n} |1, \dots, n\rangle f_1 \dots f_n \langle 1, \dots, n|, \quad (5.2.7)$$

а  $\bar{\rho}_n^{(0)}(f)$  — через проекторы  $|1, \dots, n-1\rangle\langle 1, \dots, n-1|, \dots, |0\rangle\langle 0|$  на  $n-1, n-2, \dots$  частичные состояния, которые умножаются на некоторые формы, содержащие произведения  $n$  функций распределения, причем в этих формах содержатся либо функции распределения с совпадающими импульсами (как, например,  $f_1 \cdot f_1$ ), либо функции распределения под знаком сумм (как, например,  $\sum_1 f_1, \sum_1 f_1^2$ , см. (3.1.33)). Легко убедиться, используя правила Вика при построении теории возмущений по взаимодействию для величин  $\mathcal{P}_\tau(\mathbf{p}; f) = \sum_n \bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f)$ , что таких слагаемых не возникает в  $\mathcal{P}_\tau(\mathbf{p}; f)$ . Поэтому их нет и в  $\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f)$ . Отсюда следует, что они должны, появившись в величине  $\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f)$ :

$$\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) = \text{Sp } \bar{\rho}_n^{(0)}(f) e^{-i\mathcal{E}\tau} [V, a_p^+ a_p] e^{i\mathcal{E}\tau}, \quad (5.2.8)$$

полностью сократиться с величиной  $\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f)$ :

$$\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) = \text{Sp } \bar{\rho}_n^{(0)}(f) e^{-i\mathcal{E}\tau} [V, a_p^+ a_p] e^{i\mathcal{E}\tau}$$

в сумме  $\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) + \bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) \equiv \bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}$ . Поэтому, если обозначить через [...] операцию отбрасывания членов типа  $f_1 \cdot f_1, \sum_1 f_1, \dots$ , то мы придем к следующей формуле для  $\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}$ :

$$\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)} = [\bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}].$$

Таким образом, величину  $M_i^{(n)}$  можно представить в виде

$$M_i^{(n)} = [\bar{M}_i^{(n)}], \quad (5.2.9)$$

$$\bar{M}_i^{(n)}(\mathbf{p}; f) = i\eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\eta\tau} \bar{\mathcal{P}}_\tau^{(n)}(\mathbf{p}; f) \tau^i.$$

Покажем, что  $\bar{M}_i^{(n)}$  можно выразить в терминах величин, характерных для квантовомеханической теории рассеяния:

$$\begin{aligned} \bar{M}_i^{(n)}(\mathbf{p}; f) &= \frac{i\eta(-i)^i}{2\pi(n!)} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta^{(i)}(E - E') (E - E' + i\eta) \times \\ &\times \sum_{1 \dots n} \sum_{1' \dots n'} R_{0,1 \dots n}^{(-)}(E') R_{0,1' \dots n'}^{(+)}(E) R_{0,1' \dots n'}^{(-)}(E') R_{0,1 \dots n}^{(+)}(E) \times \\ &\times (\delta_{p,1} + \dots + \delta_{p,n}) (f_1 \dots f_n - f_{1'} \dots f_{n'}) T_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E) \times \\ &\times T_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E')^*, \quad (5.2.10) \end{aligned}$$

где

$$R_{0,1\dots n}^{(\pm)}(E) = R_{0,1\dots n}\left(E \pm \frac{1}{2}i\eta\right)$$

— собственные значения резольвенты  $R_0(z) = (z - \mathcal{H}_0)^{-1}$  гамильтониана  $\mathcal{H}_0$  при  $z = E \pm \frac{1}{2}i\eta$  и  $T(z)$  — оператор рассеяния  $T(z) = V + VR_0(z)T(z)$ , причем (см. раздел 2.1.2)  $T_{1\dots n; 1' \dots n'}^{(\pm)} = \langle 1, \dots, n | T\left(E \pm \frac{1}{2}i\eta\right) | 1', \dots, n' \rangle$ .

Для доказательства (5.2.10) используем формулы

$$e^{\mp i\mathcal{H}\tau} e^{\frac{1}{2}\eta\tau} \theta(-\tau) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{\mp iE\tau} R^{(\mp)}(E),$$

где  $R^{(\pm)}(E) = R\left(E \pm \frac{1}{2}i\eta\right)$  и  $R(z) = (z - \mathcal{H})^{-1}$  — резольвента полного гамильтониана  $\mathcal{H}$ . С помощью этих формул нетрудно представить  $\bar{M}_i^{(n)}$  в виде

$$\bar{M}_i^{(n)} = \frac{i\eta(-i)^l}{2\pi n!} \int_{-\infty}^{\infty} dE \int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta^{(l)}(E - E') \sum_{1\dots n} f_1 \dots f_n \times \\ \times \{A_{1\dots n}(E, E') - A_{1\dots n}^*(E', E)\}, \quad (5.2.11)$$

где

$$A_{1\dots n}(E, E') = \langle 1, \dots, n | R^{(-)}(E') V a_p^+ a_p R^{(+)}(E) | 1, \dots, n \rangle.$$

Величину  $A_{1\dots n}(E, E')$  запишем в виде

$$A_{1\dots n}(E, E') = A_{1\dots n}^{(1)}(E, E') + A_{1\dots n}^{(2)}(E, E'), \\ A_{1\dots n}^{(1)}(E, E') = \langle 1, \dots, n | R^{(-)}(E') V a_p^+ a_p (R^{(+)}(E) - R_0^{(+)}(E)) | 1, \dots, n \rangle, \\ A_{1\dots n}^{(2)}(E, E') = \langle 1, \dots, n | R^{(-)}(E') V a_p^+ a_p R_0^{(+)}(E) | 1, \dots, n \rangle.$$

Легко видеть, используя условие полноты (2.2.9) и соотношения

$$R^{(-)}(E') V = R_0^{(-)}(E') T^{(-)}(E'), \quad R^{(+)}(E) - R_0^{(+)}(E) = \\ = R_0^{(+)}(E) T^{(+)}(E) R_0^{(+)}(E),$$

что

$$A_{1\dots n}^{(1)}(E, E') = R_{0,1\dots n}^{(-)}(E') R_{0,1\dots n}^{(+)}(E) \frac{1}{n!} \sum_{1' \dots n'} T_{1\dots n; 1' \dots n'}^{(-)}(E') \times \\ \times T_{1' \dots n'; 1\dots n}^{(+)}(E) (\delta_{p,1'} + \dots + \delta_{p,n'}) R_{0,1' \dots n'}^{(+)}(E), \quad (5.2.12) \\ A_{1\dots n}^{(2)}(E, E') = R_{0,1\dots n}^{(-)}(E') R_{0,1\dots n}^{(+)}(E) T_{1\dots n; 1\dots n}^{(-)}(E') \times \\ \times (\delta_{p,1} + \dots + \delta_{p,n}).$$



Для нахождения вклада  $A_{1' \dots n}^{(2)}(E, E')$  в  $\bar{M}_i^{(n)}$  воспользуемся формулой (2.1.29)

$$T^{(-)}(E') - T^{(+)}(E) = (E - E' + i\eta) T^{(+)}(E) R_0^{(+)}(E) R_0^{(-)}(E') T^{(-)}(E').$$

Замечая, что  $T^{(+)}(E) = T^{(-)}(E)^+$ , мы и получим из (5.2.11), (5.2.12) формулу (5.2.10).

Отметим, что

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^{(n)}(\mathbf{p}; f) = & - \frac{\eta^2}{4\pi(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{1 \dots n} \sum_{1' \dots n'} |R_{0,1}^{(+)} \dots n(E)|^2 \times \\ & \times |R_{0,1'}^{(+)} \dots n'(E)|^2 |T_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E)|^2 (\delta_{p,1} + \dots + \delta_{p,n} - \delta_{p,1'} - \delta_{p,n'}) \times \\ & \times (f_1 \dots f_n - f_{1'} \dots f_{n'}). \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Обращаясь к разложению (5.2.5) и используя (5.2.9), можно представить величины  $L_p^{(n)}(f)$  в виде

$$\begin{aligned} L_p^{(2)}(f) &= [\bar{M}_0^{(2)}(\mathbf{p}, f)], \\ L_p^{(3)}(f) &= [\bar{M}_0^{(3)}(\mathbf{p}; f)] + \sum_{p'} [\bar{M}_0^{(2)}(\mathbf{p}', f)] \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}'} [\bar{M}_1^{(2)}(\mathbf{p}; f)], \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

. . . . .

где  $\bar{M}_i^{(n)}(\mathbf{p}; f)$  определяется формулой (5.2.10).

Найдем явный вид величины  $L_p^{(2)}(f)$ , представляющей собой интеграл столкновений в главном приближении по плотности частиц. Согласно (5.2.13) величина  $\bar{M}_0^{(2)}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^{(2)}(\mathbf{p}; f) = & - \frac{\eta^2}{16\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{12} \sum_{1'2'} |R_{0,12}^{(+)}(E)|^2 |R_{0,1'2'}^{(+)}(E)|^2 \times \\ & \times |T_{12; 1'2'}^{(+)}(E)|^2 (\delta_{p,1} + \delta_{p,2} - \delta_{p,1'} - \delta_{p,2'}) (f_1 f_2 - f_{1'} f_{2'}). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что  $[\bar{M}_0^{(2)}] = \bar{M}_0^{(2)}$ . Поэтому, замечая, что

$$\eta |R_{0,12}^{(+)}(E)|^2 \xrightarrow{\eta \rightarrow +0} 2\pi\delta(E - \varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

получим окончательно [87]

$$\begin{aligned} L_p^{(2)}(f) = & \pi \sum_{121'2'} |T_{12; 1'2'}^{(+)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|^2 \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \times \\ & \times \delta_{p,2} (f_{1'} f_{2'} - f_1 f_2). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Входящая сюда величина  $T_{12; 1'2'}^{(+)}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  представляет собой амплитуду перехода из состояния  $|1', 2'\rangle$  в состояние  $|1, 2\rangle$ . Таким образом,  $L_p^{(2)}(f)$  имеет структуру больцмановского интеграла столкновений, но вероятность перехода определяется здесь не классической, а квантовой механикой. (Напомним, что урав-

нениями типа кинетического уравнения Больцмана с квантово-механической, а не классической вероятностью мы уже пользовались в § 1.4.)

**5.2.3. Квантовое вириальное разложение интеграла столкновений.** В предыдущем разделе мы установили вид интеграла столкновений в том случае, когда плотность частиц является самым малым параметром, т. е. когда расстояние между частицами  $a$  велико как по сравнению с радиусом действия сил  $r_0$ , так и по сравнению со средней де-бройлевской длиной волны частиц  $\lambda$ . В этом разделе мы получим интеграл столкновений в том случае, когда самым малым параметром является  $r_0$  ( $r_0 \ll a, \lambda$ ), что же касается соотношения между  $a$  и  $\lambda$ , то оно может быть произвольным. (Разложение по параметру  $r_0/\lambda$  будем называть квантовым вириальным разложением.) В этом случае одночастичная функция распределения  $f_p$  не обязательно мала по сравнению с единицей: если  $p \leq \lambda^{-1}$ , то  $f_p$  может быть порядка единицы, если же  $p \gg \lambda^{-1}$ , то  $f_p \ll 1$ . Мы покажем, что в этом приближении интеграл столкновений для бозонов будет иметь следующий вид [38]:

$$L_p(f) = \pi \sum_{12|1'2'} |T_{12; 1'2'}^{(+)}(\epsilon_2 + \epsilon_2)|^2 \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_{1'} - \epsilon_{2'}) \times \\ \times \delta_{p, 2} \{f_{1'} f_{2'} (1 + f_1) (1 + f_2) - f_1 f_2 (1 + f_{1'}) (1 + f_{2'})\}. \quad (5.2.16)$$

В случае фермионов в этом выражении должна быть произведена замена  $1 + f \rightarrow 1 - f$ .

Для доказательства этой формулы мы выделим в величине  $L_p^{(n)}(f)$  главный член по параметру  $r_0/\lambda$  и затем просуммируем все эти главные члены. Чтобы разъяснить, как выделяется в  $L_p^{(n)}(f)$  главный член по параметру  $r_0/\lambda$ , рассмотрим два интеграла

$$A = \int d^3p f_p \varphi(r_0 p), \quad B = \int d^3p \varphi(r_0 p),$$

где  $\varphi(x)$  — некоторая функция, отличная от нуля только при  $x \leq 1$ . Учитывая, что  $f_p \sim 1$  при  $p \leq \lambda^{-1}$  и  $f_p \ll 1$  при  $p \gg \lambda^{-1}$ , имеем

$$A \approx r_0^{-3} \int_0^{r_0/\lambda} dx \varphi(x) x^2, \quad B \approx r_0^{-3} \int_0^1 dx \varphi(x) x^2,$$

откуда следует, что  $|A| \ll |B|$ , так как  $r_0 \ll \lambda$ .

Таким образом, для получения главных членов в квантовом вириальном разложении интеграла столкновений, необходимо учесть в  $\bar{M}_i^{(n)}$  только те слагаемые, в которых встречается минимальное количество интегрирований функций распределения  $f_p$  с функциями типа  $\varphi(r_0 p)$ , отличными от нуля только при  $p \leq r_0^{-1}$ . Функции такого типа возникают от квантовомеханических амплитуд  $T_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E)$  (см. (5.2.10)). Однако необхо-

димом иметь в виду, что эти  $n$ -частичные амплитуды содержат, наряду со связанным  $n$ -частичным комплексом, также и несвязанные комплексы, которые можно выразить через амплитуды более низкого порядка. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 3 (прямые линии соответствуют частицам; замкнутые линии объединяют в комплексы взаимодействовавшие частицы). Так как

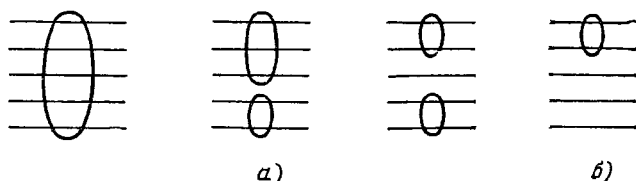


Рис. 3.

связанные комплексы по всем импульсным переменным обращаются в нуль при  $p \gg r_0^{-1}$ , то главный вклад в  $\bar{M}_1^{(n)}$  дадут только те диаграммы рис. 3, которые содержат один связанный двухчастичный комплекс (см. рис. 3, б).

Если обозначить через  $\tilde{T}_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E)$  вклад в  $T_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E)$  от диаграмм двухчастичного распространения (см. рис. 3, б), то, как нетрудно убедиться, с помощью правил Вика,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1 \dots n; 1' \dots n'}^{(+)}(E) &= \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_{i'_1 \neq i'_2} T_{i_1 i_2; i'_1 i'_2}^{(+)}(E - \varepsilon_{i_3} - \dots - \varepsilon_{i_n}) \sum_{i'_3, i'_4} \delta_{i_3, i'_3} \dots \delta_{i_n, i'_n}, \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

где  $\sum_{i_1 \neq i_2}$  служит для обозначения суммирования по парам несовпадающих между собой индексов 1, 2; 2, 1; ...;  $n-1, n$ , а  $\sum_{i'_i}$  для обозначения суммирования по всем перестановкам штрихованных индексов ( $i_1 \dots i_n$  и  $i'_1 \dots i'_n$  представляют собой некоторые перестановки индексов 1 ...  $n$  и 1' ...  $n'$ ).

Замечая теперь, что сам интеграл столкновений мал при  $\lambda \gg r_0$ , найдем, согласно (5.2.14), (5.2.4), что главный член в  $L_p^{(n)}(f)$  по параметру  $r_0/\lambda$  будет равен  $[\tilde{M}_0^{(n)}(p; f)]$ , где

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0^{(n)}(p; f) &= -\frac{\eta^2}{16\pi} \frac{1}{(n-2)!} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{1 \dots n} \sum_{1' 2'} |R_{0, i_2}^{(+)}(E)|^2 |R_{0, i'_2}^{(+)}(E)|^2 \times \\ &\times (f_1 f_2 - f_1 f_2') f_3 \dots f_n (\delta_{p, 1} + \delta_{p, 2} - \delta_{p, 1'} - \delta_{p, 2'}) T_{12; 1' 2'}^{(+)}(E)^* \times \\ &\times \tilde{T}_{12 \dots n; 1' 2' \dots n}^{(+)}(E + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Главный член в квантовом вириальном разложении интеграла столкновений, который мы будем обозначать просто через  $L_p(f)$ , будет поэтому равен

$$L_p(f) = \sum_{n=2}^{\infty} [\tilde{M}_0^{(n)}(p; f)].$$

Покажем, что

$$[\tilde{M}_0^{(n)}(p; f)] = 0, \quad n > 3, \quad (5.2.19)$$

и, следовательно,

$$L_p(f) = [\tilde{M}_0^{(2)}(p; f)] + [\tilde{M}_0^{(3)}(p; f)]. \quad (5.2.20)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что слагаемые из  $\tilde{T}^{(+)}$  типа  $T_{kl; k'l'}^{(+)}$ ,  $T_{al; k'l'}^{(+)}$ ,  $T_{kl; a'l'}^{(+)}$ ,  $T_{al; a'l'}^{(+)}$ , (здесь  $a = 1, 2, k, l = 3, \dots, n$  и  $a' = 1', 2', k', l' = 3', \dots, n'$ ) не дают вклада в  $[\tilde{M}_0^{(n)}]$ , так как, сопровождаются произведением символов Кронекера  $\delta_{a, s'} \delta_{a', s}$ , где  $s' = 3', \dots, n'$ ,  $s = 3, \dots, n$ . (Мы учли, что слагаемые в  $\tilde{T}^{(+)}$ , содержащие множители  $\delta_{a, a'}$ , не дают вклада в  $\tilde{M}_0^{(n)}$ , так как при этом благодаря символу Кронекера  $\delta_{1+2, 1'+2'}$ , содержащемуся в  $T_{12; 1'2'}^{(+)}(E)$ , обращается в нуль выражение  $f_1 f_2 - f_{1'} f_{2'}$ .) Замечая далее, что слагаемое из  $\tilde{T}^{(+)}$  типа  $T_{12; 1'2'}^{(+)}(E) \sum_{i'} \delta_{3, i'_3} \dots \delta_{n, i'_n}$  также не дает вклада в  $[\tilde{M}_0^{(n)}]$ , мы можем при вычислении  $[\tilde{M}_0^{(n)}]$  заменить  $\tilde{T}^{(+)}$  на

$$\begin{aligned} & \tilde{T}_{12 \dots n; 1'2' \dots n'}^{(+)}(E + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{\substack{i'_1 i'_2 \neq 1'2' \\ (i'_1 \neq i'_2)}} T_{12; i'_1 i'_2}^{(+)}(E) \sum_{i'} \delta_{3, i'_3} \dots \delta_{n, i'_n} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i_1 i_2 \neq 1, 2 \\ (i_1 \neq i_2)}} T_{i_1 i_2; 1'2'}^{(+)}(E + \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{i'} \delta_{3, i'_3} \dots \delta_{n', i'_n}. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Рассмотрим теперь слагаемые в правой части этого соотношения, для которых  $i'_1, i'_2 = k', l', i_1, i_2 = k, l$ , где  $k', l' = 3', \dots, n$ , и  $k, l = 3, \dots, n$  (они могут появиться только при  $n \geq 4$ ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{k' \neq l'} T_{12; k'l'}^{(+)}(E) (\delta_{k, 1'} \delta_{l, 2'} + \delta_{k, 2'} \delta_{l, 1'}) \delta_{k, k'} \delta_{l, l'} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} T_{kl; 1'2'}^{(+)}(E) (\delta_{1, k'} \delta_{2, l'} + \delta_{2, k'} \delta_{1, l'}) \delta_{k, k'} \delta_{l, l'}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что они приводят к появлению в  $\tilde{M}_0^{(n)}$  множителя  $(f_1 f_2 - f_{1'} f_{2'}) (f_1 f_2 + f_{1'} f_{2'}) = f_1^2 f_2^2 - f_{1'}^2 f_{2'}^2$ , и, следовательно, не дают вклада в  $[\tilde{M}_0^{(n)}]$ .

Наконец, слагаемые в правой части (5.2.21), для которых  $i_1, i_2 = a', l'$ ,  $i_1, i_2 = a, l$ , где  $a' = 1', 2', l' = 3', \dots, n'$  и  $a = 1, 2, l = 3, \dots, n$  (они могут появиться только при  $n \geq 3$ ) имеют структуру

$$T_{12; 1'2'}^{(+)}(E) \left\{ \sum_{l' > 2'} S_{l'} S_{l'} \underbrace{\delta_{3, 2'} \dots \delta_{n, i'}_n}_{\text{нет } l', l'} + \sum_{l > 2} S_l S_l \underbrace{\delta_{3, 2} \dots \delta_{n', i} _n}_{\text{нет } l, l'} \right\}$$

и не дают, как легко видеть, вклада в  $[\tilde{M}_0^{(n)}]$  при  $n \geq 4$ . Таким образом, формула (5.2.19) доказана.

Перейдем теперь к нахождению  $[\tilde{M}_0^{(2)}]$ ,  $[\tilde{M}_0^{(3)}]$ . Величина  $[\tilde{M}_0^{(2)}]$  совпадает, как легко видеть, с  $\bar{M}_0^{(2)}$ , и поэтому

$$[\tilde{M}_0^{(2)}(p; f)] = L_p^{(2)}(f) \quad (5.2.22)$$

(см. формулу (5.2.15)). Для величины  $\tilde{M}_0^{(3)}(p; f)$  имеем, согласно (5.2.18), в случае бозонов

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0^{(3)}(p; f) = & -\frac{\pi^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sum_{123} \sum_{2'3'} |R_{0, 23}^{(+)}(E)|^2 |R_{0, 2'3'}^{(+)}(E)|^2 \times \\ & \times (\delta_{p, 1} + \delta_{p, 2} + \delta_{p, 3}) f_1 (f_2 f_3 - f_{2'} f_{3'}) (1 + 2\delta_{1, 2} + 2\delta_{1, 2'}) |T_{23; 2'3'}^{(+)}(E)|^2 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} [\tilde{M}_0^{(3)}(p; f)] = & \pi \sum_{121'2'} |T_{12; 1'2'}^{(+)}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)|^2 \delta(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_{1'} - \mathbf{e}_{2'}) \delta_{p, 2} \times \\ & \times \{f_{1'} f_{2'} (f_1 + f_2) - f_1 f_2 (f_{1'} + f_{2'})\}. \quad (5.2.23) \end{aligned}$$

Подставляя выражения (5.2.22), (5.2.23) в (5.2.20), мы и получим интеграл столкновений (5.2.16). Подчеркнем еще раз, что выражение (5.2.16) для интеграла столкновений справедливо при  $r_0 \ll \lambda$ .

Заметим, что результаты этого параграфа получены в предположении отсутствия связанных состояний частиц. Если возможно образование связанных состояний, то на кинетическом этапе эволюции состояние будет характеризоваться не только одночастичной функцией распределения, но двухчастичной корреляционной функцией в подространстве связанных состояний двух частиц [66, 92].

### § 5. 3. Кинетические уравнения для частиц и излучения, взаимодействующих с внешней средой

5.3.1. Кинетическое уравнение для частиц, взаимодействующих со средой. В § 1.4 мы изучали кинетические уравнения для частиц, слабо взаимодействующих со средой. При этом предполагалось, что плотность частиц достаточно мала, так что можно пользоваться классической статистикой, взаимодействием же между частицами среды пренебрегалось. Теперь мы покажем, как получать кинетические уравнения для частиц, взаимодействующих со средой в том случае, когда плотность частиц не мала, так что должны проявляться квантовые эффекты, связанные со статистикой частиц. Что же касается среды, то мы будем считать взаимодействие между ее частицами сильным, благодаря чему среду можно считать находящейся в состоянии равновесия с медленно меняющимися макроскопическими параметрами — температурой и гидродинамической скоростью [88].

Гамильтониан всей системы — среда и взаимодействующие с ней частицы — запишем в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V,$$

где  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан невзаимодействующих подсистем

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_p,$$

$\mathcal{H}_m$  — гамильтониан среды,  $\mathcal{H}_p$  — гамильтониан свободных невзаимодействующих частиц

$$\mathcal{H}_p = \sum_p \varepsilon_p a_p^+ a_p$$

( $\varepsilon_p$  — энергия частицы или квазичастицы с импульсом  $p$ ) и  $V$  — гамильтониан взаимодействия частиц со средой. Мы будем считать, что он имеет вид

$$V = \sum_{12} \hat{\mathcal{T}}(1, 2) a_1^+ a_2, \quad (5.3.1)$$

где  $\hat{\mathcal{T}}(1, 2)$  — некоторый оператор, зависящий от динамических переменных среды. Взаимодействие между частицами, не входящими в состав среды (в дальнейшем мы будем называть их просто частицами), учитывать не будем. Для простоты ограничимся рассмотрением только пространственно-однородного случая \*).

Так как взаимодействие между частицами среды велико, а взаимодействие между частицами и средой мало, то по прошествии некоторого времени  $\tau_0$  состояние системы можно характеризовать средними значениями операторов  $\mathcal{H}_m$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $N$ ,  $f_p = a_p^+ a_p$ , где  $\mathbf{P}$  и  $N$  — операторы импульса и числа частиц среды ( $\tau_0$  — представляет собой максимальное из времен  $\tau_r$  и  $r_0/\bar{v}$ , где  $\tau_r$  — время релаксации среды,  $r_0$  — радиус взаимодействия частиц с

\*) Обобщение на пространственно неоднородный случай см. [99].

атомами среды и  $\bar{v}$  — характерная средняя скорость частиц). Эти операторы в рассматриваемом случае и будут представлять собой операторы  $\hat{\gamma}_\alpha$ , фигурирующие в общих уравнениях (4.2.11). В соответствии с этим статистический оператор  $\rho^{(0)}(\gamma)$  будет теперь иметь вид

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \rho_m^{(0)} \rho^{(0)}(f),$$

где  $\rho_m^{(0)}$  — распределение Гиббса для среды

$$\rho_m^{(0)} = \exp \{ \Omega_m - \beta (\mathcal{H}_m - \mathbf{u} \mathbf{P} - \mu N) \} \equiv w$$

и  $\rho^{(0)}(f)$  — статистический оператор идеального неравновесного газа частиц

$$\rho^{(0)}(f) = \exp \left\{ - \sum_1 \ln (1 + f_1) - \sum_1 a_1^+ a_1 \ln \frac{1 + f_1}{f_1} \right\}$$

(частицы для определенности считаются бозонами). Обратная температура  $\beta$ , скорость среды  $\mathbf{u}$ , химический потенциал  $\mu$  и термодинамический потенциал среды  $\Omega_m$  определяются из условий

$$\text{Sp } \rho_m^{(0)} \mathcal{H}_m = \bar{\mathcal{H}}_m, \quad \text{Sp } \rho_m^{(0)} \mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}, \quad \text{Sp } \rho_m^{(0)} N = \bar{N}, \quad \text{Sp } \rho_m^{(0)} = 1.$$

Так как операторы  $\bar{\mathcal{H}}_m$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $N$ ,  $f_p$  коммутируют с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , то величины  $a_{\alpha\beta}$ , входящие в (4.2.11), равны нулю. Согласно (4.2.15) кинетическое уравнение для функции распределения частиц  $f_p$  имеет во втором приближении теории возмущений вид

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p^{(2)}(f) \equiv - \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), [V, a_p^+ a_p]],$$

где  $V(\tau) = \exp(i\mathcal{H}_0\tau) V \exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$ . Используя тождество Якоби

$$[V(\tau), [V, a_p^+ a_p]] = -[V, [a_p^+ a_p, V(\tau)]] - [a_p^+ a_p, [V(\tau), V]],$$

можно представить  $L_p^{(2)}(f)$  в виде

$$L_p^{(2)}(f) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), [V, a_p^+ a_p]]. \quad (5.3.2)$$

Замечая, что

$$e^{i\mathcal{E}_p\tau} a_1 e^{-i\mathcal{E}_p\tau} = a_1 e^{-i\mathcal{E}_1\tau},$$

имеем

$$V(\tau) = \sum_{12} \hat{\mathcal{J}}_\tau(1, 2) a_1^+ a_2 e^{i\tau(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)}, \quad \hat{\mathcal{J}}_\tau(1, 2) = e^{i\mathcal{E}_m\tau} \hat{\mathcal{J}}(1, 2) e^{-i\mathcal{E}_m\tau}.$$

Учитывая далее, что

$$\text{Sp } \rho^{(0)}(f) a_1^+ a_2 a_1^+ a_2 = \delta_{1,2} \delta_{1',2'} f_1 f_{1'} + \delta_{1,2} \delta_{2,1'} f_1 (1 + f_2),$$

можно представить интеграл столкновений  $L_p^{(2)}$  в виде

$$L_p^{(2)} = \sum_{12} (\delta_{1,p} - \delta_{2,p}) f_2 (1 + f_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\tau(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \langle \hat{\mathcal{G}}_{\tau}(2, 1) \hat{\mathcal{G}}(1, 2) \rangle,$$

где скобка  $\langle \dots \rangle$  означает усреднение со статистическим оператором среды  $\rho_m^{(0)}$ :

$$\langle \hat{\mathcal{G}}_{\tau}(2, 1) \hat{\mathcal{G}}(1, 2) \rangle = \text{Sp } \rho_m^{(0)} \hat{\mathcal{G}}_{\tau}(2, 1) \hat{\mathcal{G}}(1, 2) \equiv I_{1,2}(\tau). \quad (5.3.3)$$

Введем теперь спектральную функцию  $I_{1,2}(\omega)$  корреляционной функции  $I_{1,2}(\tau)$ :

$$I_{1,2}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau I_{1,2}(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (5.3.4)$$

Тогда кинетическое уравнение запишется в виде

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = 2\pi \sum_{12} \delta_{2,p} \{f_1(1 + f_2) I_{2,1}(\omega_{21}) - f_2(1 + f_1) I_{1,2}(\omega_{12})\},$$

где  $\omega_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ . Заметим, что в силу эрмитовости  $V$  имеет место соотношение  $\hat{\mathcal{G}}(1, 2) = \hat{\mathcal{G}}^+(2, 1)$ .

Так как, согласно (5.3.3),

$$\langle \hat{\mathcal{G}}_{\tau}(2, 1) \hat{\mathcal{G}}(1, 2) \rangle = \sum_{nm} |\hat{\mathcal{G}}_{n,m}(1, 2)|^2 e^{i\tau(\varepsilon_m - \varepsilon_n)} \omega_m, \quad (5.3.5)$$

где суммирование производится по полной системе собственных функций коммутирующих операторов  $\mathcal{H}_m, P, N$  с собственными значениями  $\varepsilon_n, P_n, N_n$ , то легко видеть, используя (5.3.4), (5.3.5), что  $I_{1,2}(\omega) > 0$ .

Учтем теперь, что гамильтониан взаимодействия  $V$  коммутирует с оператором полного импульса системы

$$[V, P + \sum_p p a_p^+ a_p] = 0. \quad (5.3.6)$$

Отсюда следует, что  $(P_n + p_1 - P_m - p_2) \hat{\mathcal{G}}_{m,n}(1, 2) = 0$ , т. е. матричные элементы  $\hat{\mathcal{G}}_{m,n}(1, 2)$  оператора  $\hat{\mathcal{G}}(1, 2)$ , характеризующего взаимодействие частиц со средой, отличны от нуля только в том случае, если  $P_n + p_1 - P_m - p_2 = 0$ . Отсюда и из (5.3.5) нетрудно получить соотношение

$$I_{2,1}(-\omega) = I_{1,2}(\omega) \exp\{-\beta(\omega - u(p_2 - p_1))\}$$

(аналогичные соотношения мы получали в разделе 4.1.2). С учетом этого соотношения кинетическое уравнение для функции распределения частиц  $f_p$  можно представить в виде

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = L_p^{(2)} \equiv 2\pi \sum_{12} \delta_{2,p} I_{1,2}(\omega_{12}) \{f_1(1 + f_2) e^{\beta(\omega_{12} - u p_{12})} - f_2(1 + f_1)\},$$

$$p_{12} = p_2 - p_1. \quad (5.3.7)$$



Это уравнение справедливо для бозонов, взаимодействующих со средой. В случае фермионов кинетическое уравнение имеет аналогичный вид с тем лишь различием, что  $1 + \bar{f}$  заменяется на  $1 - \bar{f}$ .

Легко видеть, что интеграл столкновений  $L_p^{(2)}$  обращается в нуль для бозевского распределения:

$$\bar{f}_p = \{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu - u p)} - 1\}^{-1},$$

где  $\beta^{-1}$  и  $u$  — температура и скорость среды. В случае фермионов интеграл столкновений обращается в нуль для фермиевского распределения:

$$\bar{f}_p = \{e^{\beta(\varepsilon_p - \mu - u p)} + 1\}^{-1}.$$

Установим теперь уравнения, определяющие изменение параметров среды  $\beta$ ,  $u$ ,  $\mu$  со временем. Используя соотношение (5.3.6), а также уравнение (4.2.15) для параметра  $\gamma_\alpha = \bar{P}$ , имеем

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial t} = - \sum_p p L_p^{(2)}. \quad (5.3.8)$$

Это соотношение представляет собой закон сохранения импульса системы. Замечая далее, что

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), [V, \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_p]] &= \\ = \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V, [V(-\tau), \mathcal{H}_0]] &= -i \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) \left[ V, \frac{\partial V(-\tau)}{\partial \tau} \right], \end{aligned}$$

получим, согласно уравнению (4.2.15), для  $\hat{\gamma}_\alpha = \mathcal{H}_m$

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_m}{\partial t} = - \sum_p \varepsilon_p L_p^{(2)}. \quad (5.3.9)$$

Это соотношение представляет собой закон сохранения энергии системы. Наконец, очевидно, что

$$\partial \bar{N} / \partial t = 0. \quad (5.3.10)$$

В силу инвариантности уравнений квантовой механики по отношению к преобразованиям Галилея (см. раздел 2.3.1, в этом случае  $\varepsilon_p = p^2/2m$ ) существует унитарный оператор  $U_u$ , обладающий свойствами

$$U_u N U_u^\dagger = N, \quad U_u P U_u^\dagger = P + m u N,$$

$$U_u \mathcal{H}_m U_u^\dagger = \mathcal{H}_m + u P + \frac{1}{2} m u^2 N,$$

и, следовательно,

$$U_u \rho_m^{(0)} U_u^\dagger = \exp \{ \Omega_m - \beta (\mathcal{H}_m - \mu_0 N) \}, \quad \mu_0 = \mu + \frac{1}{2} m u^2.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{\mathcal{H}}_m = \text{Sp } \rho_m^{(0)} \mathcal{H}_m = \frac{1}{2} Mu^2 + \bar{\mathcal{H}}_m |_{u=0}, \quad \bar{P} = Mu$$

( $M$  — масса среды). Используя эти формулы, можно представить уравнения (5.3.8), (5.3.9) в виде

$$\begin{aligned} M \frac{\partial u}{\partial t} &= 2\pi \sum_{12} p_{12} I_{1,2}(\omega_{12}) f_2(1+f_1), \\ \beta^{-2} C \frac{\partial \beta}{\partial t} &= -2\pi \sum_{12} (\omega_{12} - u p_{12}) I_{1,2}(\omega_{12}) f_2(1+f_1), \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

где  $C = -\beta^{-2} (\partial \bar{\mathcal{H}}_m / \partial \beta)_{u=0}$  — теплоемкость среды.

В заключение докажем  $H$ -теорему для рассматриваемой системы. Энтропия среды определяется формулой

$$s_m = -\text{Sp } \rho_m^{(0)} \ln \rho_m^{(0)} = -\Omega_m + \beta \bar{\mathcal{H}}_m - \beta u \bar{P} - \beta \mu \bar{N}$$

и энтропия газа частиц — формулой

$$s_p = -\text{Sp } \rho^{(0)}(f) \ln \rho^{(0)}(f) = -\sum_1 \{f_1 \ln f_1 - (1+f_1) \ln(1+f_1)\}.$$

Энтропия всей системы равна  $s = s_m + s_p$ .

Замечая, что

$$\frac{\partial \Omega_m}{\partial t} = \bar{\mathcal{H}}_m \frac{\partial \beta}{\partial t} - \bar{P} \frac{\partial \beta u}{\partial t} - \bar{N} \frac{\partial \beta \mu}{\partial t},$$

получим, согласно (5.3.8) — (5.3.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_m}{\partial t} &= \beta \sum_p (\varepsilon_p - u p) \frac{\partial f_p}{\partial t}, \\ \frac{\partial s_p}{\partial t} &= \sum_p \frac{\partial f_p}{\partial t} \ln \frac{f_p}{1+f_p}. \end{aligned}$$

Используя кинетическое уравнение (5.3.7), получим окончательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \sum_{12} I_{1,2}(\omega_{12}) \ln \frac{f_1(1+f_2) \exp \beta (u p_{12} - \omega_{12})}{f_2(1+f_1)} \times \\ &\quad \times \{f_2(1+f_1) - f_1(1+f_2) e^{-\beta(\omega_{12} - u p_{12})}\}, \end{aligned}$$

откуда в силу положительности спектральной функции  $I_{1,2}(\omega)$  и вытекает  $H$ -теорема  $\partial s / \partial t \geq 0$ .

Кинетическое уравнение (5.3.7) может быть использовано, например, для изучения кинетики нейтронов в конденсированных средах.

**5.3.2. Кинетическое уравнение для фотонов в среде.** В предыдущем разделе мы получили кинетическое уравнение для частиц, взаимодействующих с равновесной средой. Гамильтониан

взаимодействия частиц со средой предполагался коммутирующим с оператором числа частиц. Между тем в ряде физических задач возможны процессы, при которых могут рождаться или поглощаться частицы (либо квазичастицы), т. е. число их не будет постоянным.

В этом разделе мы получим кинетическое уравнение для фотонов, распространяющихся в среде, которое учитывает процессы испускания и поглощения фотонов атомами среды [6].

Будем исходить из нерелятивистского гамильтониана системы, состоящей из среды и газа фотонов  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$ , где  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан невзаимодействующих подсистем — среды и газа фотонов  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_f$ ,  $\mathcal{H}_m$  — гамильтониан среды,  $\mathcal{H}_f$  — гамильтониан невзаимодействующих фотонов:

$$\mathcal{H}_f = \sum_{\mathbf{k}\lambda=1}^2 \omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda}$$

( $c_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $c_{\mathbf{k}\lambda}^+$  — операторы поглощения и испускания фотона с частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$ , волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\lambda = 1, 2$ ) и, наконец,  $V$  — гамильтониан взаимодействия излучения со средой. Этот гамильтониан в нерелятивистском случае определяется формулой

$$V = V_1 + V_2, \quad (5.3.12)$$

$$V_1 = -\frac{1}{c} \int d^3x A(\mathbf{x}) \mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x}), \quad V_2 = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c^2} \int d^3x A^2(\mathbf{x}) \rho_a^{(e)}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x})$  — оператор плотности тока (в отсутствие поля излучения),  $\rho_a^{(e)}(\mathbf{x})$  — оператор плотности заряда частиц сорта  $a$  с зарядом  $e_a$  и массой  $m_a$  и  $A(\mathbf{x})$  — оператор векторного потенциала:

$$A(\mathbf{x}) = \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} c \sum_{\mathbf{k}\lambda=1}^2 \omega_{\mathbf{k}}^{-1/2} \{c_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + c_{\mathbf{k}\lambda}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\} e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \quad (5.3.13)$$

( $e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$  — вектор поляризации фотона в состоянии  $\mathbf{k}$ ,  $\lambda$ ;  $\mathcal{V}$  — объем системы; формальное определение операторов  $\mathbf{j}^{(e)}(\mathbf{x})$  и  $\rho_a^{(e)}(\mathbf{x})$  дано в 2.2.2.).

Ограничимся рассмотрением пространственно-однородного случая. Кроме того, будем считать, что среда находится в состоянии статистического равновесия и является прозрачной для фотонов. При этом в качестве операторов  $\hat{\psi}$ , фигурирующих в общих уравнениях (4.2.15), мы должны взять операторы одночастичной матрицы плотности  $\hat{n}_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) = c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda}$ . Что же касается среды, то мы не будем учитывать воздействия фотонов на среду (связанного, например, с нагревом среды) и не будем поэтому

вводить, в противоположность предыдущему разделу, операторов  $\hat{\psi}$ , связанных со средой. В соответствии с этим статистический оператор  $\rho^{(0)}(\gamma)$  будет теперь иметь вид

$$\rho^{(0)}(\gamma) = \omega \rho_f^{(0)}(n),$$

где  $\omega$  — распределение Гиббса для среды

$$\omega = \exp \{ \Omega_m - \beta (\mathcal{H}_m - \mu N) \}$$

и  $\rho_f^{(0)}(n)$  — матрица плотности идеального неравновесного газа фотонов:

$$\rho_f^{(0)}(n) = \exp \left\{ \Omega_f - \sum_{k\lambda\lambda'} Y_{\lambda\lambda'}(k) c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'} \right\},$$

где  $\Omega_f$  и  $Y_{\lambda\lambda'}(k)$  определяются однофотонной матрицей плотности  $n_{\lambda\lambda'}(k)$

$$\text{Sp} \rho_f^{(0)}(n) = 1, \quad \text{Sp} \rho_f^{(0)}(n) c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'} = n_{\lambda'\lambda}(k).$$

Так как операторы  $c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'}$  коммутируют с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ , то величины  $a_{\alpha\beta}$ , входящие в (4.2.15), равны нулю. Поэтому кинетическое уравнение для однофотонной матрицы плотности имеет во втором приближении теории возмущений вид

$$\frac{\partial n_{\lambda\lambda'}}{\partial t} = L_{\lambda\lambda'}^{(1)}(n) + L_{\lambda\lambda'}^{(2)}(n),$$

где  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$  определяются формулами (4.2.15), в которых под операторами  $\hat{\psi}$  следует понимать операторы  $c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'}$ .

Легко видеть, что величина

$$L_{\lambda\lambda'}^{(1)}(n) = i \text{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1 + V_2, c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'}]$$

обращается в нуль. Действительно,  $\text{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1, c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'}] = 0$ , так как под знаком шпура содержится нечетное число операторов  $c_{k\lambda}^+$ ,  $c_{k\lambda'}$ . Чтобы убедиться, что второе слагаемое также обращается в нуль, заметим, что в силу пространственной однородности системы величина  $\text{Sp} \omega \rho_a^{(e)}(x) \equiv \rho_a^{(e)}$  не будет зависеть от  $x$ . Поэтому

$$L_{\lambda\lambda'}^{(1)} = i \sum_a \frac{e_a \rho_a^{(e)}}{2m_a c^2} \text{Sp} \rho_f^{(0)}(n) \left[ \int d^3x A^2(x), c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda'} \right].$$

Легко видеть, что входящий сюда коммутатор содержит операторы  $c_{k\lambda}$  и  $c_{k\lambda}^+$  только в комбинациях  $c^+ c^+$ ,  $cc$ , а так как  $\text{Sp} \rho_f^{(0)}(n) c^+ c^+ = \text{Sp} \rho_f^{(0)}(n) cc = 0$ , то  $L_{\lambda\lambda'}^{(1)} = 0$ .

Таким образом, согласно (4.2.15), кинетическое уравнение для однофотонной матрицы плотности имеет вид

$$\frac{\partial n_{\lambda\lambda'}}{\partial t} = L_{\lambda\lambda'}^{(2)}(n) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V(\tau), [V, c_{k\lambda}^+, c_{k\lambda}]], \quad (5.3.14)$$

где  $V(\tau) = e^{i\mathcal{E}_0\tau} V e^{-i\mathcal{E}_0\tau}$ . Замечая, что

$$e^{i\mathcal{E}_0\tau} c_{k\lambda} e^{-i\mathcal{E}_0\tau} = c_{k\lambda} e^{-i\omega_k\tau},$$

имеем

$$V(\tau) = -\frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{j}(\mathbf{x}, \tau) + \sum_a \frac{e_a}{2\pi a c^2} \int d^3x \mathbf{A}^2(\mathbf{x}, \tau) \rho_a^{(e)}(\mathbf{x}, \tau),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)$  — векторный потенциал в представлении взаимодействия:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{2\pi}{\mathcal{V}}\right)^{1/2} c \sum_{k\lambda=1}^2 \omega_k^{-1/2} \{c_{k\lambda} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_k\tau)} + c_{k\lambda}^+ e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_k\tau)}\} e_k^{(\lambda)} \quad (5.3.15)$$

и  $j^{(e)}(\mathbf{x}, \tau) \equiv \mathbf{j}(\mathbf{x}, \tau)$  и  $\rho_a^{(e)}(\mathbf{x}, \tau)$  — операторы плотности тока и заряда в гейзенберговском представлении:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, \tau) = e^{i\mathcal{E}_0\tau} \mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{E}_0\tau}, \quad \rho_a^{(e)}(\mathbf{x}, \tau) = e^{i\mathcal{E}_0\tau} \rho_a^{(e)}(\mathbf{x}) e^{-i\mathcal{E}_0\tau}.$$

Интересуясь первым неисчезающим приближением по постоянной тонкой структуре  $e^2/\hbar c$ , можно в выражении для  $L_{\lambda\lambda}^{(2)}$  заменить  $V$  на  $V_1$ . При этом мы точно учтем процессы испускания и поглощения фотонов, но не учтем процессов рассеяния фотонов атомами. Гамильтониан  $V_2$  в интеграле столкновений  $L_{\lambda\lambda}^{(2)}$  учитывает процессы рассеяния фотонов, но такой же вклад в интеграл столкновений фотонов вносят высшие приближения по  $V_1^*$ .

Таким образом, мы будем исходить из следующего выражения для  $L_{\lambda\lambda}^{(2)}$ :

$$L_{\lambda\lambda}^{(2)}(n) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp} \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c_{k\lambda}^+, c_{k\lambda}]]. \quad (5.3.16)$$

Оператор  $V_1(\tau)$  можно, согласно (5.3.15), представить в виде

$$V_1(\tau) = -\sum_{k\lambda=1}^2 \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} \{c_{k\lambda} j_\lambda(\mathbf{k}, \tau) e^{-i\omega_k\tau} + c_{k\lambda}^+ j_\lambda^+(\mathbf{k}, \tau) e^{i\omega_k\tau}\}, \quad (5.3.17)$$

$$j_\lambda(\mathbf{k}, \tau) = \mathcal{V}^{-1/2} e_k^{(\lambda)} \int d^3x e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \mathbf{j}(\mathbf{x}, \tau).$$

Используя перестановочные соотношения для операторов  $c_{k\lambda}^+$  и  $c_{k\lambda}$ , имеем

$$[V_1, c_{k\lambda}^+, c_{k\lambda}] = \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} j_\lambda^+(\mathbf{k}) c_{k\lambda}^+ - \left(\frac{2\pi}{\omega_k}\right)^{1/2} j_\lambda(\mathbf{k}) c_{k\lambda}, \quad (5.3.18)$$

\*) Исследованию кинетики черного излучения, связанного с комптоновским рассеянием, посвящена работа Компанейца [68].

где  $j_\lambda(\mathbf{k}) \equiv j_\lambda(\mathbf{k}, 0)$ . Учитывая (5.3.17), (5.3.18), найдем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c_{\mathbf{k}\lambda}^+, c_{\mathbf{k}\lambda}]] = \\ = \frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}\tau} \left\{ \sum_{\lambda''} n_{\lambda\lambda''}(\mathbf{k}) \langle [j_{\lambda''}^+(\mathbf{k}, \tau), j_{\lambda'}(\mathbf{k})] \rangle - \langle j_{\lambda'}(\mathbf{k}) j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau) \rangle \right\} + \\ + \frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}\tau} \left\{ \sum_{\lambda''} \langle [j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, -\tau), j_{\lambda''}(\mathbf{k})] \rangle n_{\lambda''\lambda'}(\mathbf{k}) - \right. \\ \left. - \langle j_{\lambda'}(\mathbf{k}) j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, -\tau) \rangle \right\} \end{aligned}$$

или, предполагая, что среда является изотропной,

$$\begin{aligned} \text{Sp } \rho^{(0)}(\gamma) [V_1(\tau), [V_1, c_{\mathbf{k}\lambda}^+, c_{\mathbf{k}\lambda}]] = \\ = \frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}}} e^{i\omega_{\mathbf{k}}\tau} \left\{ \frac{1}{2} n_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}) \sum_{\lambda''} \langle [j_{\lambda''}^+(\mathbf{k}, \tau), j_{\lambda''}(\mathbf{k})] \rangle - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{\lambda''} \langle j_{\lambda''}(\mathbf{k}) j_{\lambda''}^+(\mathbf{k}, \tau) \rangle \right\} + (\tau \rightarrow -\tau), \quad (5.3.19) \end{aligned}$$

где введено обозначение  $\langle \dots \rangle = \text{Sp } \omega \dots$ .

Поступая так же, как и в предыдущем разделе, можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau) j_{\lambda}(\mathbf{k}) \rangle = e^{\beta\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j_{\lambda}(\mathbf{k}) j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau) \rangle,$$

и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle j_{\lambda}(\mathbf{k}) j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau) \rangle = n^{(0)}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} \langle [j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau), j_{\lambda}(\mathbf{k})] \rangle, \quad (5.3.20)$$

где  $n^{(0)}(\omega)$  — планковская функция распределения фотонов

$$n^{(0)}(\omega) = (e^{\beta\omega} - 1)^{-1}.$$

Поэтому кинетическое уравнение для фотонов, взаимодействующих со средой, согласно (5.3.19), (5.3.20), можно представить в виде

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} (n - n^{(0)}(\omega_{\mathbf{k}})), \quad (5.3.21)$$

где  $n$  и  $n^{(0)}$  — двухрядные матрицы с элементами  $n_{\lambda\lambda'}$  и  $n_{\lambda\lambda'}^{(0)} = n^{(0)}\delta_{\lambda, \lambda'}$  и

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1} = \frac{2\pi}{\omega_{\mathbf{k}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_{\mathbf{k}}\tau} \langle [j_{\lambda}^+(\mathbf{k}, \tau), j_{\lambda}(\mathbf{k})] \rangle. \quad (5.3.22)$$

Так же как и в предыдущем разделе, используя формулу (5.3.20), нетрудно показать, что  $\tau_{\mathbf{k}}^{-1} > 0$ . Величина  $\tau_{\mathbf{k}}$  представляет собой время релаксации фотонов с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

В разделе 6.3.1 мы покажем, что если среда находится во внешнем переменном электромагнитном поле, то компонента Фурье плотности тока, возникающего в среде, определяется формулой

$$\tilde{\mathcal{J}}_i(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\sigma}_{il}(\mathbf{k}, \omega) E_l^{(e)}(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $E_l^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье внешнего электрического поля и

$$\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\sigma}^i(\mathbf{k}, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2} + \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \left\{ \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a^{(e)} + \frac{k_i k_j}{k^2} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \right\}, \\ \bar{\sigma}^i(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \left\{ \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a^{(e)} + \frac{1}{2} \left( \delta_{i,j} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \right\}, \end{aligned} \quad (5.3.23)$$

$$G_{is}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \int d^3x \int_0^{\infty} dt e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega t} \langle [j_i(\mathbf{x}, t), j_s(0)] \rangle. \quad (5.3.24)$$

Эти формулы относятся к изотропному случаю и определяют отклик электрического тока в среде на внешнее электрическое поле (величины  $\bar{\sigma}_{ij}$  не следует смешивать с тензором проводимости  $\sigma_{ij}$  среды, входящим в уравнения Максвелла, см. § 6.3).

Сравнивая формулы (5.3.22), (5.3.23), получим, используя (5.3.24),

$$\tau_{\mathbf{k}}^{-1} = 1/2 \operatorname{Re} \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}). \quad (5.3.25)$$

Таким образом, время релаксации  $\tau_{\mathbf{k}}$  определяется поперечной частью тензора  $\bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ . Этот тензор, как мы увидим в § 6.3, полностью описывает электромагнитные свойства среды.

Заметим, что если в теле имеется полость, то распределение фотонов будет неоднородным и вместо уравнения (5.3.21) следует исходить из кинетического уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{c_{\mathbf{k}}}{k} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}} (n - n^0) f(\mathbf{x}),$$

где  $f(\mathbf{x}) = 1$ , если  $\mathbf{x}$  лежит внутри среды, и  $f(\mathbf{x}) = 0$ , если  $\mathbf{x}$  лежит в полости. Исследование этого уравнения показывает, что время установления планковского распределения в полости определяется большим из времен  $\tau_{\mathbf{k}}$  и  $L/c$ , где  $L$  — линейные размеры полости.

## § 5.4. Кинетические уравнения для частиц во внешнем поле и функции Грина в кинетическом приближении

**5.4.1. Интегральное уравнение для статистического оператора.** В предыдущих параграфах мы получили кинетические уравнения для частиц, взаимодействующих друг с другом. Эти уравнения позволяют в принципе выяснить, как происходит установление статистического равновесия, т. е. процесс релаксации к гиббсовскому распределению. В частности, они позволяют описать, так же как и в классическом случае, гидродинамический этап эволюции. Однако остается еще задача о влиянии внешних полей на эволюцию системы частиц. В этом разделе мы займемся ее решением [93, 94]. С этой целью обратимся снова к уравнению движения для статистического оператора системы  $\rho(t)$ :

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho(t)], \quad (5.4.1)$$

где  $\mathcal{H}(t)$  — гамильтониан системы при наличии переменного внешнего поля,  $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + V(t)$ ,  $V(t) = V + \mathcal{H}_F(t)$ . Здесь  $\mathcal{H}_0$  — гамильтониан свободных частиц,  $V$  — гамильтониан взаимодействия частиц друг с другом и  $\mathcal{H}_F(t)$  — гамильтониан взаимодействия частиц с внешним полем. Гамильтониан  $\mathcal{H}_F(t)$ , так же как и в разделе 4.1.1, мы представим в виде

$$\mathcal{H}_F(t) = \int d^3x \hat{\xi}(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}, t) + \text{э. с.}, \quad (5.4.2)$$

где  $F(\mathbf{x}, t)$  — заданное внешнее поле в точке  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$  и  $\hat{\xi}(\mathbf{x})$  — оператор обобщенного тока системы.

Будем считать, что в отсутствие внешнего поля, по прошествии времени  $t \gg \tau_0$  ( $\tau_0$  — время хаотизации) система может описываться сокращенным набором параметров  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$ , которым соответствуют операторы  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv \{ \hat{f}_\rho(\mathbf{x}), \hat{w}_\rho(\mathbf{x}), \hat{w}_\rho^+(\mathbf{x}), \hat{\psi}(\mathbf{x}), \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) \}, \quad (5.4.3)$$

где  $\hat{f}_\rho(\mathbf{x})$  — оператор вignerовской функции распределения.  $\hat{\psi}(\mathbf{x})$  — оператор уничтожения частицы в точке  $\mathbf{x}$  и

$$\hat{w}_\rho(\mathbf{x}) = \int d^3y e^{i\rho y} \hat{\psi}\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2}\right) \hat{\psi}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2}\right). \quad (5.4.4)$$

(Система предполагается состоящей из бозонов; в случае фермионов  $\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle = 0$ , и поэтому в число операторов  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$  входят только  $\hat{f}_\rho(\mathbf{x}), \hat{w}_\rho(\mathbf{x}), \hat{w}_\rho^+(\mathbf{x}).$ )

Напомним, что при выводе кинетических уравнений в том случае, когда гамильтониан  $V$  коммутирует с оператором числа частиц, в качестве операторов  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$  мы брали только оператор



вигнеровской функции распределения. Это было связано с тем, что в этом случае, если средние значения  $\psi(\mathbf{x})$  и  $\omega_p(\mathbf{x})$  равнялись нулю в начальный момент времени, то они будут равны нулю и во все последующие моменты времени. Если же  $V$  или  $\mathcal{H}_p$  не сохраняет числа частиц, то кроме операторов  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$  необходимо учитывать также и операторы  $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\omega}_p(\mathbf{x})$ .

Заметим, что пространственные интегралы от  $\hat{f}_p(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\psi}(\mathbf{x})$  представляются собой аддитивные интегралы движения по отношению к гамильтониану  $\mathcal{H}_0$ , пространственный же интеграл от  $\omega_p(\mathbf{x})$  является приближенным интегралом движения в области малых  $p$ . Поэтому параметры  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  при слабом взаимодействии между частицами будут медленно меняться со временем.

Легко видеть, что операторы  $\exp(i\mathcal{H}_0\tau)\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})\exp(-i\mathcal{H}_0\tau)$  выражаются линейно через операторы  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ :

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau}\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \equiv \hat{\zeta}_\alpha^\tau(\mathbf{x}) = \int d^3x' \mathcal{H}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau) \hat{\zeta}_{\alpha'}(\mathbf{x}'),$$

где  $\mathcal{H}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau)$  — некоторые  $c$ -числовые функции. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} i[\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})] &= \int d^3x' \dot{\mathcal{H}}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \zeta_{\alpha'}(\mathbf{x}'), \\ \dot{\mathcal{H}}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{H}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau) \Big|_{\tau=0}. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Это соотношение находится в соответствии с общими соотношениями (2.4.27). Функция  $\mathcal{H}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \tau)$ , рассматриваемая как матрица по переменным  $\alpha$  и  $\mathbf{x}$ , связана с матрицей  $\mathcal{H}_{\alpha\alpha'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  соотношением

$$\mathcal{H}(\tau) = \exp \tau \dot{\mathcal{H}}. \quad (5.4.6)$$

Мы ввели параметры  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , характеризующие неравновесное состояние системы, предполагая, что внешнее поле отсутствует. Однако и при наличии внешнего поля, если только частота его мала по сравнению с  $\tau_0^{-1}$ , состояние системы можно по-прежнему описывать параметрами  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Но в этом случае статистический оператор  $\rho(t)$  при  $t \gg \tau_0$  будет зависеть от времени не только через посредство  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ , но и через посредство внешнего поля  $F(\mathbf{x}, t)$  и всех его временных производных  $\dot{F}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\ddot{F}(\mathbf{x}, t)$ , ...

$$\rho(t) \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \sigma(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t), \dots) \equiv \sigma(\zeta(t); t), \quad (5.4.7)$$

причем

$$\text{Sp } \sigma(\zeta(t); t) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (5.4.8)$$

Замечая, что

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \xrightarrow[t \gg \tau_0]{} \frac{\partial \sigma(\zeta; t)}{\partial t} + \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)} \dot{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t),$$

получим, согласно (5.4.1),

$$i \cdot \frac{\partial \sigma(\zeta; t)}{\partial t} + i \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(x, t)} \hat{\zeta}_\alpha(x, t) = \\ = [\mathcal{H}_0, \sigma(\zeta; t)] + [V(t), \sigma(\zeta; t)]. \quad (5.4.9)$$

Из этой формулы и формулы (5.4.8) следует, что

$$\dot{\zeta}_\alpha(x, t) = \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta(t)) + L_\alpha(x; \zeta(t); t) \equiv \mathcal{L}_\alpha, \quad (5.4.10)$$

$$\mathcal{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta(t)) = i \operatorname{Sp} \sigma(\zeta; t) [\mathcal{H}_0, \hat{\zeta}_\alpha(x)] = \int d^3x' \mathcal{K}'_{\alpha\alpha'}(x - x') \zeta_{\alpha'}(x', t),$$

$$L_\alpha(x; \zeta; t) = i \operatorname{Sp} \sigma(\zeta; t) [V(t), \hat{\zeta}_\alpha(x)].$$

Наша задача заключается в том, чтобы получить интегральное уравнение для статистического оператора  $\sigma(\zeta; t)$ , которое позволило бы однозначно его определить. С этой целью заметим прежде всего, что величина

$$\zeta_\alpha^\tau(x) \equiv \int d^3x' \mathcal{K}'_{\alpha\alpha'}(x - x', \tau) \zeta_{\alpha'}(x') \quad (5.4.11)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \zeta_\alpha^\tau(x)}{\partial \tau} = \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(x; \zeta^\tau).$$

Поэтому уравнение (5.4.9) можно переписать в виде

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \sigma(\zeta^\tau; t) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} = \sigma(\zeta; t) - i \int_0^\tau d\tau' e^{i\mathcal{H}_0\tau'} \left\{ -i \frac{\partial \sigma(\zeta; t)}{\partial t} + \right. \\ \left. + [V(t), \sigma(\zeta; t)] - i \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta; t) \right\}_{\zeta \rightarrow \zeta^\tau} e^{-i\mathcal{H}_0\tau'}. \quad (5.4.12)$$

Воспользуемся далее эргодическим соотношением (5.1.6):

$$e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho e^{i\mathcal{H}_0 t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho^{(0)}(\zeta^t) = e^{-i\mathcal{H}_0 t} \rho^{(0)}(\zeta) e^{i\mathcal{H}_0 t}, \quad (5.4.13)$$

где  $\zeta^t = \mathcal{K}(t) \operatorname{Sp} \rho \hat{\zeta}$ ,

$$\rho^{(0)}(\zeta) = \exp \left\{ \Omega(\zeta) - \int d^3x Y_\alpha(x; \zeta) \hat{\zeta}_\alpha(x) \right\}$$

и  $\Omega(\zeta)$  и  $Y_\alpha(x; \zeta)$  находятся из уравнений

$$\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\zeta) = 1, \quad \operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\zeta) \hat{\zeta}_\alpha(x) = \zeta_\alpha(x).$$

Из этого эргодического соотношения и из (5.4.8) следует граничное условие для статистического оператора  $\sigma(\zeta; t)$

$$e^{i\mathcal{H}_0\tau} \sigma(\zeta^\tau; t) e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \rho^{(0)}(\zeta). \quad (5.4.14)$$

Переходя в уравнении (5.4.12) к пределу  $\tau \rightarrow -\infty$  и используя это граничное условие, получим окончательно следующее интегральное уравнение для статистического оператора  $\sigma(\zeta; t)$ :

$$\sigma(\zeta; t) = \rho^{(0)}(\zeta) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\tau} \left\{ [V(t), \sigma(\zeta; t)] - i \frac{\partial \sigma(\zeta; t)}{\partial t} - i \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_a(x)} L_a(x; \zeta; t) \right\}_{\zeta \rightarrow \mathcal{X}(\tau) \zeta} e^{-i\mathcal{E}\tau}. \quad (5.4.15)$$

Так как частота внешнего поля мала, то решение этого уравнения следует искать в виде

$$\sigma(\zeta; t) = \sigma_0(\zeta(t); F(t)) + \sigma_1(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t)) + \sigma_2(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t), F(t)) + \dots \quad (5.4.16)$$

где  $\sigma_1$  — функционал, линейный по  $\dot{F}$ ,  $\sigma_2$  — функционал, линейный по  $\ddot{F}$  и квадратичный по  $\dot{F}$  и т. д. Подставляя это разложение в (5.4.15), легко получить интегральные уравнения для  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$

$$\sigma_0(\zeta; F) = \rho^{(0)}(\zeta) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\mathcal{E}_0} \left\{ [V(t), \sigma_0(\zeta; F)] - i \int d^3x \frac{\delta \sigma_0(\zeta; F)}{\delta \zeta_a(x)} L_a^{(0)}(x; \zeta; F) \right\}_{\zeta \rightarrow \mathcal{X}(\tau) \zeta} e^{-i\tau\mathcal{E}_0}, \quad (5.4.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(\zeta; F, \dot{F}) = & -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tau\mathcal{E}_0} \left\{ [V(t), \sigma_1(\zeta; F, \dot{F})] - \right. \\ & - i \int d^3x \left( \dot{F}(x, t) \frac{\delta \sigma_0(\zeta; F)}{\delta F(x, t)} + \text{э. с.} \right) - \\ & - i \int d^3x \left( L_a^{(0)}(x; \zeta; F) \frac{\delta \sigma_1(\zeta; F, \dot{F})}{\delta \zeta_a(x)} + \right. \\ & \left. \left. + L_a^{(1)}(x; \zeta; F, \dot{F}) \frac{\delta \sigma_0(\zeta; F)}{\delta \zeta_a(x)} \right) \right\}_{\zeta \rightarrow \mathcal{X}(\tau) \zeta} e^{-i\tau\mathcal{E}_0}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_a^{(0)}(x; \zeta; F) &= i \text{Sp } \sigma_0(\zeta; F) [V(t), \hat{\zeta}_a(x)], \\ L_a^{(1)}(x; \zeta; F, \dot{F}) &= i \text{Sp } \sigma_1(\zeta; F, \dot{F}) [V(t), \hat{\zeta}_a(x)]. \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

Обратим внимание на то, что интегральное уравнение для  $\sigma_0$  совпадает с интегральным уравнением (4.2.11) для огрубленного статистического оператора, если в последнем под  $\dot{V}$  понимать сумму гамильтонианов, описывающих взаимодействие частиц друг с другом и их взаимодействие с внешним полем. Этот

результат довольно очевиден, так как при медленном изменении поля статистический оператор в нулевом приближении (по частоте внешнего поля) успевает подстраиваться к мгновенному значению огрубленного статистического оператора, соответствующего мгновенному значению гамильтониана взаимодействия частиц с полем.

Найдя из этих уравнений операторы  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$  в каком-либо приближении по взаимодействию между частицами или по их плотности, можно по формулам (5.4.18) найти в соответствующем приближении величины  $L_a^{(0)}$ ,  $L_a^{(1)}$ , а тем самым получить и уравнения движения для величин  $\zeta_a(\mathbf{x}, t)$  при наличии медленно меняющегося во времени внешнего поля

$$\dot{\zeta}_a(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}_a^{(0)}(\mathbf{x}; \zeta(t)) + L_a^{(0)}(\mathbf{x}; \zeta; F) + L_a^{(1)}(\mathbf{x}; \zeta; F, \dot{F}) + \dots \quad (5.4.19)$$

Если операторы  $V$  и  $\mathcal{H}_F(t)$  коммутируют с оператором числа частиц, то величины  $\psi$ ,  $\omega_p$  для нормальных состояний системы должны считаться равными нулю, поскольку в состоянии равновесия (при  $t = -\infty$ ) они были равны нулю. В этом случае уравнения (5.4.19) вырождаются в кинетическое уравнение для вигнеровской функции распределения при наличии внешнего поля. Уравнение это будет в равной мере справедливо как для бозонов, так и для фермионов.

До сих пор мы предполагали, что с помощью статистического оператора  $\sigma(\zeta(t); t)$  можно описывать состояние системы при  $t \gg \tau_0$ . Это было связано с тем, что неравновесность системы считалась обусловленной не только наличием внешнего поля, но и отличием начального статистического оператора от равновесного статистического оператора  $\omega$ . Поэтому должно было пройти время  $t \gg \tau_0$  для того, чтобы сгладилась память о начальном состоянии. Если, однако, при  $t \rightarrow -\infty$  внешнее поле отсутствовало и система находилась в состоянии статистического равновесия, то статистический оператор  $\sigma(\zeta; t)$  дает правильное описание неравновесного состояния при всех временах  $t$ . Действительно, статистический оператор  $\sigma(\zeta; t)$ , как видно из вывода удовлетворяет уравнению (5.4.1). Кроме того, в достаточно удаленном прошлом, когда внешнее поле отсутствовало, параметры  $\zeta$  равнялись  $\zeta(-\infty) = \text{Sp } \omega \zeta$ , а так как в отсутствие внешнего поля оператор  $\sigma(\zeta; t)$  совпадает с огрубленным статистическим оператором  $\sigma(\zeta)$ ,  $\sigma(\zeta; t) = \sigma(\zeta)$ , для которого  $\sigma(\text{Sp } \omega \zeta) = \omega$ , то  $\sigma(\zeta; t) |_{t \rightarrow -\infty} = \omega$ , что и требовалось доказать.

Заметим, что если частота внешнего поля велика ( $\omega \tau_0 \gg 1$ ), то разложение (5.4.16) по частоте внешнего поля будет несправедливым, так как в этом случае будет проявляться немарковский характер кинетических процессов. Можно показать, что в этом случае статистический оператор  $\rho(t)$  подчиняющийся уравнению движения (5.4.1) и начальному условию  $\rho(-\infty) = \omega$ ,

будет удовлетворять интегральному уравнению [93]

$$\rho(t) = \rho^{(0)}(\zeta(t)) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{H}_0\tau} \left\{ [V(t+\tau), \rho(t+\tau)] - \right. \\ \left. - i \int d^3x \frac{\delta \rho^{(0)}(\zeta(t+\tau))}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t+\tau)} L_\alpha(\mathbf{x}, t+\tau) \right\} e^{-i\mathcal{H}_0\tau} \\ L_\alpha(\mathbf{x}, t) = i \text{Sp } \rho(t) [V(t), \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})]. \quad (5.4.15')$$

Параметры  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют при этом нелокальным по времени уравнениям движения \*)

$$\dot{\zeta}_\alpha = L_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (5.4.10')$$

Отметим, что в случае больших частот внешнего поля, когда явно проявляется немарковский характер кинетических процессов, физически разумной является только такая постановка задачи, в которой начальное условие для статистического оператора  $\rho(t)$  будет универсальным. Таким условием является условие статистического равновесия при  $t = -\infty$ .

Если внешнее поле  $F(\mathbf{x}, t)$  меняется медленно, а взаимодействие между частицами является слабым, то процесс фактически будет марковским. В этом случае можно разложить величины

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t + \tau) \text{ в ряды по степеням } \tau, \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t + \tau) = \sum_n \frac{\tau^n}{n!} \zeta_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}, t).$$

Величины  $\zeta_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}, t)$ , входящие в это разложение, можно найти, дифференцируя уравнение (5.4.10') по  $t$ . В результате можно выразить  $\dot{\zeta}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\ddot{\zeta}(\mathbf{x}, t)$ , ... через  $\zeta(\mathbf{x}, t)$  и  $F(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{F}(\mathbf{x}, t)$ , ... и представить статистический оператор  $\rho(t)$  в виде функционала функций  $\zeta(\mathbf{x}, t)$ ,  $F(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{F}(\mathbf{x}, t)$ , ...

$$\rho(t) = \sigma(\zeta(t); F(t), \dot{F}(t), \dots) \equiv \sigma(\zeta(t); t).$$

Можно показать [101], что статистический оператор  $\sigma(\zeta; t)$ , определенный таким образом, удовлетворяет уравнению (5.4.15'), и, следовательно, уравнение (5.4.15) формально эквивалентно уравнению (5.4.15) \*\*).

**5.4.2. Кинетические уравнения для заряженных частиц в электромагнитном поле.** В предыдущем разделе мы привели общую схему построения кинетических уравнений при наличии внешнего поля. Рассмотрим теперь более подробно тот случай, когда внешнее поле является электромагнитным, а частицы обладают электрическим зарядом.

\*) Соответствующие кинетические уравнения рассматривались в работах [106, 107, 93].

\*\*\*) Уравнение (5.4.15') в отсутствие внешнего поля использовалось в работе Зубарева и Калашникова [60] для описания релаксационных процессов.

Чтобы система была электронеutralной, в нее должны входить частицы с зарядами разных знаков. Однако для простоты мы выпишем гамильтониан только для частиц одного сорта:

$$\mathcal{H}(\mathbf{A}, \varphi) = \mathcal{H}_0(\mathbf{A}, \varphi) + V,$$

где  $V$  — гамильтониан взаимодействия частиц друг с другом и  $\mathcal{H}_0(\mathbf{A}, \varphi)$  определяется формулой (2.2.30).

Будем предполагать, что гамильтониан  $V$  коммутирует с оператором числа частиц. Тогда как мы указывали в конце предыдущего раздела, в качестве величин  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$  можно взять только вигнеровскую функцию распределения или соответствующую ей одночастичную матрицу плотности.

Для нахождения величины  $\mathcal{L}^{(0)} + L$ , определяющей скорость изменения одночастичной матрицы плотности, необходимо вычислить коммутатор  $[\mathcal{H}(\mathbf{A}, \varphi), a_1^\dagger a_1]$ , содержащий оператор одночастичной матрицы плотности  $a_1^\dagger a_1$ , в импульсном представлении. Этому оператору соответствует в координатном представлении оператор  $\psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)$ . Поэтому следует вычислить коммутатор  $[\mathcal{H}(\mathbf{A}, \varphi), \psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)]$ .

Используя канонические перестановочные соотношения, найдем

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_0(\mathbf{A}, \varphi), \psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)] = & - \left\{ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} + i \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_2, t) \right)^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} - i \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, t) \right)^2 + e\varphi(\mathbf{x}_1, t) - e\varphi(\mathbf{x}_2, t) \right\} \psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

Поэтому, согласно (5.4.4), кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности в координатном представлении  $\tilde{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) \equiv \text{Sp } \rho(t) \psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)}{\partial t} + i \left\{ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_2, t) \right)^2 - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} - \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}_1, t) \right)^2 + \right. \\ \left. + e\varphi(\mathbf{x}_1, t) - e\varphi(\mathbf{x}_2, t) \right\} \tilde{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t) = i \text{Sp } \rho(\tilde{f}; A) [V, \psi^\dagger(\mathbf{x}_2)\psi(\mathbf{x}_1)], \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

где  $\rho(\tilde{f}; A) \equiv \rho(\tilde{f}; A, \dot{A}, \dots)$  — статистический оператор (5.4.13), удовлетворяющий уравнению (5.4.15) и  $A = (A, \varphi)$ . Отсюда, вспомнив определение вигнеровской функции распределения (2.4.2),

$$\tilde{f}_p(\mathbf{x}) = \int d^3 y e^{i p y} \tilde{f} \left( \mathbf{x} - \frac{y}{2}, \mathbf{x} + \frac{y}{2} \right),$$

легко получить кинетическое уравнение для  $\tilde{f}_p(\mathbf{x})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}_p(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \tilde{f}_p(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \int d^3 p' \hat{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{f}_{p'}(\mathbf{x}) = \\ = i \text{Sp } \rho(\tilde{f}; A) [V, \tilde{f}_p(\mathbf{x})], \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

где  $\hat{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  — дифференциальный оператор:

$$\begin{aligned} \hat{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 y e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')y} \left\{ e\varphi(\mathbf{x}_1) - e\varphi(\mathbf{x}_2) + \right. \\ \left. + \frac{e}{mc} \mathbf{p}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)) - \frac{e^2}{2mc^2} (\mathbf{x}^2(\mathbf{x}_2) - \mathbf{A}^2(\mathbf{x}_1)) + \right. \\ \left. + \frac{ie}{2mc} (\mathbf{A}(\mathbf{x}_2) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\} \end{aligned}$$

$x_1 = x - \frac{1}{2}y$ ,  $x_2 = x + \frac{1}{2}y$  и  $\hat{f}_p(x)$  — оператор, соответствующий вигнеровской функции распределения  $\bar{f}_p(x)$ . Электромагнитные потенциалы входят в это уравнение нелокально. Однако если электромагнитное поле мало изменяется на расстояниях порядка де-бройлевской длины волны частицы, то это уравнение становится локальным и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}_p(x)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial \bar{f}_p(x)}{\partial x} + \frac{e}{mc} \left\{ \left( p_k \frac{\partial A_k(x)}{\partial x_j} - mc \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_j} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial \bar{f}_p(x)}{\partial p_j} - A_k(x) \frac{\partial \bar{f}_p(x)}{\partial x_k} - \frac{e}{2c} \frac{\partial A^2(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{f}_p(x)}{\partial p_k} \right\} = \\ = i \text{Sp } \rho(\bar{f}; A) [V, \hat{f}_p(x)]. \quad (5.4.22) \end{aligned}$$

Мы видим, что в это уравнение потенциалы  $A$  и  $\phi$  не входят в виде комбинаций, соответствующих напряженностям полей. Это связано с тем, что вигнеровская функция распределения  $\hat{f}_p(x)$  не является калибровочно-инвариантной: действительно, в классическом пределе она определяет распределение частиц по координатам и проекциям обобщенного импульса, которые калибровочно-инвариантны. Поэтому функция распределения сама по себе не имеет непосредственного физического смысла.

Можно, однако, ввести калибровочно-инвариантную функцию распределения, которая в координатном представлении определяется формулой [111]

$$f(x_1, x_2) = e^{z(x_1, x_2)} \bar{f}(x_1, x_2), \quad (5.4.23)$$

где

$$z(x_1, x_2) = \frac{ie}{c} (x_2 - x_1) \int_0^1 d\xi A(x_2 + \xi(x_1 - x_2)). \quad (5.4.24)$$

Соответствующая вигнеровская функция распределения определяется формулой

$$f_p(x) = \int d^3y e^{i p y} f\left(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y\right). \quad (5.4.25)$$

В классическом пределе, когда поля мало меняются на расстояниях порядка де-бройлевской длины волны частицы, функции  $f_p(x)$  и  $\bar{f}_p(x)$  связаны между собой соотношением

$$f_p(x) = \bar{f}_{p+e/cA}(x)$$

(если  $p$  — кинематический импульс, то величина  $p + \frac{e}{c}A(x)$  будет обобщенным импульсом).

Покажем теперь, что функция  $f(x_1, x_2)$  или  $f_p(x)$  удовлетворяет кинематическому уравнению, в которое входят только напряженности полей. С этой целью предварительно выясним, как преобразуется статистический оператор  $\rho(\bar{f}; A)$  при калибровочных преобразованиях. Как мы видели в 2.3.1, калибровочному преобразованию соответствует унитарное преобразование  $U_\chi$  в гильбертовом пространстве:

$$U_\chi = \exp \left\{ \frac{ie}{c} \int d^3x \chi(x, t) \psi^\dagger(x) \psi(x) \right\},$$

при котором операторы  $\psi$ ,  $\psi^+$  и гамильтониан системы  $\mathcal{H}(A, \varphi)$  испытывают преобразования

$$U_x \psi(x) U_x^+ = e^{-\frac{ie}{c} \chi(x, t)} \psi(x), \quad U_x \psi^+(x) U_x^+ = e^{\frac{ie}{c} \chi(x, t)} \psi^+(x), \quad (5.4.26)$$

$$U_x^+ \mathcal{H}(A, \varphi) U_x = -i \frac{\partial U_x^+}{\partial t} U_x + \mathcal{H} \left( A - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right).$$

Используя эти формулы и интегральное уравнение (5.4.15), можно показать, что статистический оператор  $\rho(\tilde{f}; A)$ , где  $\tilde{f} \equiv \tilde{f}(x_1, x_2)$ , удовлетворяет соотношению

$$U_x^+ \rho(\tilde{f}; A) U_x = \rho(e^{z-z'} \tilde{f}; A'),$$

или, согласно (5.4.23), соотношению

$$U_x^+ \rho(e^{-z}; A) U_x = \rho(e^{-z'}; A'), \quad A' \equiv \left\{ A - \frac{\partial \chi}{\partial x}, \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right\}, \quad (5.4.27)$$

где  $z$  определяется формулой (5.4.24), а  $z'$  получается из  $z$  заменой  $A$  на  $A'$ . Из (5.4.24) вытекает следующий закон калибровочного преобразования величины  $z$ :

$$z - z' = \frac{ie}{c} \{ \chi(x_2, t) - \chi(x_1, t) \} \quad (5.4.28)$$

Убедимся теперь, используя формулу (5.4.27), что в кинетическое уравнение для калибровочно-инвариантной одностичной матрицы плотности будет входить только электромагнитное поле, а не потенциалы  $A, \varphi$ . Кинетическое уравнение для одностичной матрицы плотности  $\tilde{f}(x_1, x_2)$ , согласно (5.4.4), имеет вид

$$\dot{\tilde{f}}(x_1, x_2) = i \text{Sp} \rho(\tilde{f}; A) [\mathcal{H}(A), \psi^+(x_2) \psi(x_1)]$$

Отсюда для калибровочно-инвариантной одностичной матрицы плотности  $f = e^{z\tilde{f}}$  вытекает уравнение

$$\dot{f}(x_1, x_2) = \dot{z}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + e^{-z(x_1, x_2)} i \text{Sp} \rho(e^{-z} \tilde{f}; A) [\mathcal{H}(A), \psi^+(x_2) \psi(x_1)] \equiv S(x_1, x_2; f, A). \quad (5.4.29)$$

Согласно (5.4.26), (5.4.27) имеем

$$S(x_1, x_2; f, A) = \dot{z}(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + ie^{z'(x_1, x_2)} \text{Sp} \rho(e^{-z'} \tilde{f}; A') \times \\ \times \left[ \mathcal{H}(A') - \frac{e}{c} \int d^3 x' \frac{\partial \chi(x', t)}{\partial t} \psi^+(x') \psi(x'), \psi^+(x_2) \psi(x_1) \right].$$

Замечая, что

$$[\psi^+(x') \psi(x'), \psi^+(x_2) \psi(x_1)] = \psi^+(x_2) \psi(x_1) \{ \delta(x' - x_2) - \delta(x' - x_1) \},$$

и используя снова закон преобразования величины  $z$ , найдем

$$S(x_1, x_2; f, A) = \dot{z}'(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + \\ + ie^{z'(x_1, x_2)} \text{Sp} \rho(e^{-z'} \tilde{f}; A') [\mathcal{H}(A'), \psi^+(x_2) \psi(x_1)].$$

Сравнение этой формулы с формулой (5.4.29) показывает, что величина  $S$  содержит потенциалы  $A$  и  $\varphi$  не непосредственно, а только в виде компонент электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей,  $S(x_1, x_2; f, A) = S(x_1, x_2; f, E, H)$ .



Покажем, что оператор плотности тока при наличии внешнего электромагнитного поля

$$j(x) = \frac{ie}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{ie}{c} A \right) \psi^+(x) \cdot \psi(x) - \psi^+(x) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{ie}{c} A \right) \psi(x) \right\} \quad (5.4.30)$$

может быть выражен через одночастичный калибровочно-инвариантный нигнеровский оператор  $\hat{f}_p(x)$ :

$$j(x) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p}{m} \hat{f}_p(x), \quad (5.4.31)$$

где

$$\hat{f}_p(x) = \int d^3y e^{i p y} e^{z(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y)} \psi^+(x + \frac{1}{2}y) \psi(x - \frac{1}{2}y).$$

Заметим для этого, что оператор (5.4.30) можно представить, согласно (5.4.24), в виде

$$j(x) = \frac{ie}{m} \frac{\partial}{\partial y} e^{z(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y)} \psi^+(x + \frac{1}{2}y) \psi(x - \frac{1}{2}y) \Big|_{y=0},$$

откуда и следует формула (5.4.31).

Вернемся теперь к кинетическому уравнению для калибровочно-инвариантной одночастичной матрицы плотности  $f(x_1, x_2)$ . Согласно (5.4.20), (5.4.23) имеем

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial t} + Q(x_1, x_2) f(x_1, x_2) + \frac{i}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - Q_2(x_1, x_2) \right)^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - Q_1(x_1, x_2) \right)^2 \right\} f(x_1, x_2) = I(x_1, x_2; f), \quad (5.4.32)$$

где

$$Q(x_1, x_2) = ie(\varphi(x_1) - \varphi(x_2)) - z(x_1, x_2),$$

$$Q_1(x_1, x_2) = \frac{ie}{c} A(x_1) + \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1},$$

$$Q_2(x_1, x_2) = -\frac{ie}{c} A(x_2) + \frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

и

$$I(x_1, x_2; f) = ie^{z(x_1, x_2)} \text{Sp } \rho(e^{-zj}; A) [V, \psi^+(x_2) \psi(x_1)]$$

Заметим, что величины  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ , согласно (5.4.28), калибровочно-инвариантны и, следовательно, зависят только от полей  $E$  и  $H$ . Полагая  $x_1 = x - \frac{1}{2}y$ ,  $x_2 = x + \frac{1}{2}y$  и вводя обозначение

$$f\left(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y\right) \equiv f_y(x),$$

перепишем уравнение (5.4.32) в виде

$$\frac{\partial f_y(x)}{\partial t} + \frac{i}{m} \frac{\partial^2 f_y(x)}{\partial y \partial x} + Q_y(x) f_y(x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathcal{H}_y(x) f_y(x)) + \\ + C_y(x) \left\{ \frac{\partial f_y(x)}{\partial x} - im \mathcal{H}_y(x) f_y(x) \right\} = I_y(x, f), \quad (5.4.33)$$

где  $I_y(x; f) = I\left(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y; f\right)$  и

$$Q_y(x) = Q\left(x - \frac{1}{2}y, x + \frac{1}{2}y\right) = ie y \int_0^1 d\xi E\left(x + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)y\right),$$

$$\mathcal{H}_y(x) = -\frac{i}{m}(Q_1 + Q_2) = \frac{e}{mc} \int_0^1 d\xi \left[ y, H\left(x + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)y\right) \right],$$

$$C_y(x) = \frac{i}{2m}(Q_1 - Q_2) = \frac{e}{mc} \int_0^1 d\xi \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \left[ y, H\left(x + \left(\frac{1}{2} - \xi\right)y\right) \right].$$

Уравнение (5.4.32) (или (5.4.33)) представляет собой кинетическое уравнение для одночастичной матрицы плотности и координатном представлении. Величину  $I_y(x; f)$ , входящую в это уравнение, можно назвать обобщенным интегралом столкновений. Она учитывает эффекты, связанные с самосогласованным полем и с столкновениями частиц и зависит, вообще говоря, от электромагнитного поля.

Вигнеровская калибровочно-инвариантная функция распределения  $f_p(x)$  связана с функцией  $f_y(x)$ , согласно (5.4.25), соотношением

$$f_p(x) = \int d^3y e^{ipy} f_y(x).$$

Отсюда видно, что величина  $y$  будет порядка де-бройлевской длины волны частицы  $\lambda \sim \bar{p}^{-1}$ .

Если поля мало меняются на протяжении де-бройлевской длины волны, то выражения для  $Q_y(x)$ ,  $\mathcal{H}_y(x)$ ,  $C_y(x)$  сильно упрощаются:

$$Q_y(x) \approx ie y E(x) \quad \mathcal{H}_y(x) \approx \frac{e}{mc} [y, H(x)], \quad C_y(x) \approx 0.$$

В этом случае уравнение для вигнеровской функции распределения  $f_p(x)$  приобретает, согласно (5.4.33) следующий вид:

$$\frac{\partial f_p(x)}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f_p(x)}{\partial x} + e \left\{ E(x) + \frac{1}{mc} [p, H(x)] \right\} \frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = I_p(x; f), \quad (5.4.34)$$

где

$$I_p(x; f) = \int d^3y e^{ipy} I_y(x; f).$$

Входящий сюда обобщенный интеграл столкновений  $I_p(x; f)$ , как мы уже говорили, зависит от внешних полей  $E$  и  $H$ ; кроме того, он в принципе зависит от градиентов функции распределения.

В случае слабого электромагнитного поля и малых неоднородностей функции распределения можно пренебречь влиянием поля и неоднородностей на акт столкновения. При этом кинетическое уравнение, в соответствии с (5.4.34) и (5.1.33) будет иметь вид

$$\frac{\partial f_p(x)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial p} \frac{\partial f_p(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_p(x)}{\partial x} \frac{\partial f_p(x)}{\partial p} + e \left\{ E(x) + \frac{1}{mc} [p, H(x)] \right\} \frac{\partial f_p(x)}{\partial p} = L_p^{(2)}(f(x)), \quad (5.4.35)$$

где  $L_p^{(2)}(f(x))$  и  $\varepsilon_p(x)$  определяются формулами (5.1.32), (5.1.31).

Кинетическое уравнение (5.4.34) содержит только калибровочно-инвариантные величины. Однако при конкретных вычислениях часто бывает удобно пользоваться кинетическим уравнением (5.4.22), в которое входит калибровочно-неинвариантная матрица плотности. При этом, если вычисляется плотность тока, то для оператора тока следует пользоваться формулой (5.4.30).

**5.4.3. Связь между низкочастотной асимптотикой функций Грина и кинетическими уравнениями.** В разделе 4.4.2 мы изучали асимптотику функций Грина в гидродинамическом пределе, т. е. в том случае, когда частота мала по сравнению с обратным временем релаксации  $\tau_r^{-1}$ , а волновой вектор мал по сравнению с обратной длиной свободного пробега частиц  $l^{-1}$ . Решение этой задачи тесно связано с гидродинамическим описанием состояния системы. Однако если мы хотим продвинуться в область больших частот и больших волновых векторов, то гидродинамического описания недостаточно, и необходимо кинетическое описание.

В этом разделе мы покажем, как, исходя из кинетического уравнения, найти асимптотику функций Грина в области частот  $\omega$ , малых только по сравнению с  $\tau_0^{-1}$ , где  $\tau_0$  — время хаотизации, а не по сравнению с  $\tau_r^{-1}$ , и в области волновых векторов, малых только по сравнению с  $r_0^{-1}$ , а не по сравнению с  $l^{-1}$  [94] ( $\tau_0 \approx r_0/\bar{v}$ ,  $\bar{v}$  — средняя скорость частиц и  $r_0$  — большая из величин: радиуса действия сил и де-Бройлевской длины волны  $1/m\bar{v}$  \*).

Запаздывающая функция Грина

$$G_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = -i\theta(t - t') \text{Sp } \omega[\xi'(\mathbf{x}, t), \xi(\mathbf{x}', t')],$$

как следует из (4.1.7), может быть выражена через статистический оператор  $\rho(t)$ , удовлетворяющий уравнению (5.4.1) и начальному условию  $\rho(-\infty) = \omega$ :

$$G_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \left. \frac{\delta \text{Sp } \rho(t) \xi'(\mathbf{x})}{\delta F(\mathbf{x}', t')} \right|_{F=0}, \quad (5.4.36)$$

где внешнее поле  $F(\mathbf{x}, t)$  связано с гамильтонианом взаимодействия  $\mathcal{H}_F$  соотношением (5.4.2) и вариационная производная определяется с помощью формулы

$$\delta\rho(t) = \int d^3x' dt' \delta F(\mathbf{x}', t') \frac{\delta\rho(t)}{\delta F(\mathbf{x}', t')}. \quad (5.4.37)$$

Интересуясь низкочастотной асимптотикой функций Грина, когда  $\omega \ll \tau_0^{-1}$ , мы будем пользоваться статистическим оператором  $\sigma(\xi; t)$ ,  $\rho(t) \equiv \sigma(\xi; t)$ , для которого справедливо разложение (5.4.16) по степеням  $\omega$ . Так как  $\sigma(\xi; t)$  зависит от  $F$  как не-

\* В классическом случае, в другом подходе эта задача решалась в работах [32, 102].

посредственно, так и через посредство  $\zeta_\alpha$  (последняя зависимость определяется уравнениями движения (5.4.19)), то

$$\frac{\delta \rho(t)}{\delta F(x', t')} \Big|_{F=0} = \int d^3x \sigma_\alpha(x) h_\alpha(x - x', t - t') + \rho(x', t - t'), \quad (5.4.38)$$

где

$$\sigma_\alpha(x) = \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(x)} \Big|_{F=0}, \quad \rho(x', t - t') = \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta F(x', t')} \Big|_{F=0}. \quad (5.4.39)$$

$$h_\alpha(x - x', t - t') = \frac{\delta \zeta_\alpha(x, t)}{\delta F(x', t')} \Big|_{F=0}.$$

Вариационная производная, определяющая  $\rho(x', t - t') h_\alpha$ , понимается здесь в смысле (5.4.37), т. е. аргументом функционалов  $\zeta_\alpha(x, t)$ ,  $\sigma(\zeta; t)$  считаются функции четырех переменных  $x, t$ . Вариационные же производные, определяющие операторы  $\sigma_\alpha$ , понимаются в смысле

$$\delta \sigma(\zeta; t) = \int d^3x \delta \zeta_\alpha(x) \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(x)}. \quad (5.4.40)$$

т. е. аргументами функционала  $\sigma$  являются функции  $\zeta_\alpha(x)$ , зависящие только от трех переменных  $x$  ( $t$  фиксировано). Несмотря на различие в смысле встречающихся вариационных производных, мы используем для них единое обозначение. Это не приводит к путанице, так как в вариационных производных типа (5.4.40) аргумент функционала и вариация аргумента относятся к одному и тому же моменту времени.

Определим теперь фурье-компоненты функций Грина  $G_{\xi' \xi}^{(+)}(x, t)$ . Используя (5.4.36), получим, согласно (5.4.38),

$$G_{\xi' \xi}^{(+)}(k, \omega) = h_\alpha(k, \omega) \text{Sp } \sigma_\alpha(-k) \xi'(0) + \text{Sp } \rho(-k, \omega) \xi'(0) \quad (5.4.41)$$

(фурье-компоненты  $a(k, \omega)$ ,  $a(k)$  функций  $a(x, t)$ ,  $a(x)$  определяются соотношениями  $a(k, \omega) = \int d^3x dt a(x, t) \exp i(\omega t - kx)$ ,

$$a(k) = \int d^3x a(x) \exp(-ikx).$$

В формулу (5.4.41) входят фурье-компоненты  $\sigma_\alpha(k)$ ,  $\rho(k, \omega)$  неизвестных операторов  $\sigma_\alpha(x)$ ,  $\rho(x, t)$  и фурье-компонента  $h_\alpha(k, \omega)$  неизвестной функции  $h_\alpha(x, t)$ . Что касается оператора  $\sigma_\alpha(x)$ , то он может быть выражен через огрубленный статистический оператор  $\sigma(\zeta)$ , удовлетворяющий уравнению (5.1.17):

$$\sigma(\zeta) = \rho^{(0)}(\zeta) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\zeta\tau} \left\{ [V, \sigma(\zeta)] - \right. \\ \left. - i \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta)}{\delta \zeta_\alpha(x)} L_\alpha(x; \zeta) \right\}_{\zeta \rightarrow \zeta + \tau} \cdot e^{-i\mathcal{E}\zeta\tau}, \quad (5.4.42)$$

$$L_\alpha(x; \zeta) = i \text{Sp } \sigma(\zeta) [V, \hat{\zeta}_\alpha(x)].$$

Действительно, отсюда и из (5.4.15) следует, что  $\sigma(\zeta; t)_{F=0} = \sigma(\zeta)$ . Поэтому, согласно первой из формул (5.4.39),

$$\sigma_\alpha(\mathbf{x}) = \left( \frac{\delta \sigma(\zeta)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} \right)_0, \quad (5.4.43)$$

где индекс 0 обозначает, что вариационная производная берется для равновесных значений  $\zeta_\alpha$  (мы учли, что  $\zeta_\alpha$  принимает равновесные значения при  $F=0$ ).

Так как  $e^{iPx}\sigma(\zeta(\mathbf{x}'))e^{-iPx} = \sigma(\zeta(\mathbf{x}' + \mathbf{x}))$ , где  $P$  — оператор импульса системы (см. (4.2.33)), то

$$e^{iPx}\sigma_\alpha(\mathbf{x}')e^{-iPx} = \sigma_\alpha(\mathbf{x}' + \mathbf{x}). \quad (5.4.44)$$

Получим теперь интегральное уравнение для операторов  $\sigma_\alpha(\mathbf{x})$ . Заметим с этой целью, что статистический оператор  $\sigma(\zeta; t)$  удовлетворяет, согласно (5.4.9), (5.4.10), уравнению

$$\begin{aligned} i \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta t} + i \int d^3x \frac{\delta \sigma(\zeta; t)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} \mathcal{L}_\alpha(\mathbf{x}; \zeta; t) = \\ = [\mathcal{H}_0, \sigma(\zeta; t)] + [V(t), \sigma(\zeta; t)]. \end{aligned} \quad (5.4.45)$$

Принимая во внимание определение (5.4.39) операторов  $\sigma_\alpha(\mathbf{x})$  и учитывая, что  $(\mathcal{L}_\alpha)_0 = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \sigma}{\delta \zeta} \right)_0 = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} i \int d^3x' \sigma_\beta(\mathbf{x}') \{ \dot{\mathcal{K}}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + N_{\beta\alpha}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \} = \\ = [\mathcal{H}_0, \sigma_\alpha(\mathbf{x})] + [V, \sigma_\alpha(\mathbf{x})], \end{aligned} \quad (5.4.46)$$

$$N_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left( \frac{\delta L_\alpha(\mathbf{x}; \zeta)}{\delta \zeta_\beta(\mathbf{x}')} \right)_0 = i \text{Sp } \sigma_\beta(\mathbf{x}') [V, \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})].$$

$\dot{\mathcal{K}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  определяется формулой (5.4.5); величина  $N_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  в силу (5.4.44) является функцией разности аргументов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ . В фурье-компонентах это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\beta(\mathbf{k}) \{ \dot{\mathcal{K}}_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}) + N_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}) \} = \\ = -i [\mathcal{H}_0, \sigma_\alpha(\mathbf{k})] - i [V, \sigma_\alpha(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (5.4.46')$$

Так как

$$i \int d^3x \frac{\delta \rho^{(0)}(\zeta)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} \mathcal{L}_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}; \zeta) = [\mathcal{H}_0, \rho^{(0)}(\zeta)] \quad (5.4.47)$$

( $\rho^{(0)}(\zeta)$  определяется формулой (5.4.13)), то фурье-компоненты операторов

$$\sigma_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}) = \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(\zeta)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x})} \right)_0 \quad (5.4.48)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} i [\sigma_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}), \mathcal{H}_0] - \sigma_\beta^{(0)}(\mathbf{k}) \dot{\mathcal{K}}_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}) = \mathcal{L}_\beta^{(0)}(\zeta^0) \sigma_{\beta\alpha}^{(0)}(0; \mathbf{k}), \\ \sigma_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\mathbf{x}'} \left( \frac{\delta^2 \rho^{(0)}(\zeta)}{\delta \zeta_\alpha(\mathbf{x}) \delta \zeta_\beta(\mathbf{x}')} \right)_0, \end{aligned} \quad (5.4.49)$$

где  $\mathcal{L}_\beta^{(0)}(\zeta^0) \equiv \mathcal{L}_\beta^{(0)}(\mathbf{x}; \zeta^0) = -L_\beta(\zeta^0) -$  значение  $\mathcal{L}_\beta^{(0)}(\mathbf{x}; \zeta)$  для равновесных значений параметров  $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha^0$  (мы учли, что  $\mathcal{L}_\beta(\zeta^0) \equiv \mathcal{L}_\beta^{(0)}(\zeta^0) + L_\beta(\zeta^0) = 0$ ).

Используя эту формулу, можно представить уравнение (5.4.46') в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} (\sigma_\beta(\mathbf{k}) - \sigma_\beta^{(0)}(\mathbf{k})) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} (e^{\tau\hat{\mathcal{X}}(-\mathbf{k})})_{\beta\alpha} = e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \{ -i[V, \sigma_\beta(\mathbf{k})] - \sigma_\gamma(\mathbf{k}) N_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - L_\gamma(\zeta^0) \sigma_{\gamma\beta}^{(0)}(0; \mathbf{k}) \} e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} (e^{\tau\hat{\mathcal{X}}(\mathbf{k})})_{\beta\alpha}.$$

Учитывая далее, что из (5.4.13), (5.4.14) следует асимптотическое соотношение

$$e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \sigma_\beta(\mathbf{k}) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \sigma_\beta^{(0)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau},$$

получим окончательно следующее интегральное уравнение для  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$ :

$$\sigma_\alpha(\mathbf{k}) = \sigma_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \{ [V, \sigma_\beta(\mathbf{k})] - i\sigma_\gamma(\mathbf{k}) N_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - iL_\gamma(\zeta^0) \sigma_{\gamma\beta}^{(0)}(0; \mathbf{k}) \} e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} (e^{\tau\hat{\mathcal{X}}(-\mathbf{k})})_{\beta\alpha}, \quad (5.4.50)$$

$$N_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \sigma_\beta(-\mathbf{k}) [V, \hat{\zeta}_\alpha(0)], \quad \hat{\zeta}_\alpha(0) \equiv \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0}.$$

Заметим, что так как  $\text{Sp } \sigma(\zeta) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , то, согласно (5.4.43),

$$\text{Sp } \sigma_\beta(\mathbf{x}') \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (5.4.51)$$

Покажем теперь, как найти фурье-компоненты  $\rho(\mathbf{k}; \omega)$  оператора  $\rho(\mathbf{x}, t)$  (см. (5.3.39)). Проинтегрируем для этого уравнение (5.4.45) по  $F(\mathbf{x}', t')$  при фиксированных  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . Учитывая, что  $\sigma(\zeta; t)$  при равновесных значениях  $\zeta_\alpha$  и  $F=0$  совпадает с равновесным статистическим оператором Гиббса  $\omega$ , получим, согласно (5.4.39), следующее уравнение для фурье-компонент  $\rho(\mathbf{k}; \omega)$ :

$$-i\omega\rho(\mathbf{k}; \omega) + \sigma_\alpha(\mathbf{k}) Q_\alpha(-\mathbf{k}; \omega) = i[\rho(\mathbf{k}; \omega), \mathcal{H}_0] + i[\rho(\mathbf{k}; \omega), V] + i[\omega, \xi'(\mathbf{k})],$$

где

$$Q_\alpha(\mathbf{k}; \omega) = \int d^3x dt e^{i\omega(t-t') - i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{k}')} \left( \frac{\delta L_\alpha(\mathbf{x}; \xi; t)}{\delta F(\mathbf{x}', t')} \right)_0 = i \text{Sp } \omega [\hat{\xi}(-\mathbf{k}), \hat{\zeta}_\alpha(0)] + i \text{Sp } \rho(-\mathbf{k}, \omega) [V, \hat{\zeta}_\alpha(0)] \quad (5.4.52)$$

(мы учли при этом определение (5.4.10) величины  $L$ ). Замечая, что из соотношения (5.4.14)

$$e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \sigma(\zeta; t) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} \rho^{(0)}(\mathcal{H}(-\tau)\zeta)$$

следует асимптотическое соотношение

$$e^{i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \rho(\mathbf{k}, \omega) e^{-i\mathcal{E}\mathcal{L}_\beta\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} 0,$$

получим окончательно следующее интегральное уравнение для  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -i \int_{-\infty}^0 dt e^{i\mathcal{E}_\alpha t} \{ [V, \rho(\mathbf{k}, \omega)] + [\xi(\mathbf{k}), \omega] - \omega \rho(\mathbf{k}, \omega) - i\sigma_\alpha(\mathbf{k}) Q_\alpha(-\mathbf{k}, \omega) \} e^{-i\mathcal{E}_\alpha t}. \quad (5.4.53)$$

Уравнения (5.4.50), (5.4.53) образуют замкнутую систему уравнений для определения операторов  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$  и  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ .

Отметим, что из (5.4.8), (5.4.39) следует, что

$$\text{Sp } \rho(\mathbf{k}, \omega) \hat{\xi}(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.4.54)$$

Кроме того, согласно (5.4.53), (5.4.44),

$$e^{iP\mathbf{x}'} \rho(\mathbf{x}, t) e^{-iP\mathbf{x}'} = \rho(\mathbf{x} + \mathbf{x}', t) \quad (5.4.55)$$

(Это соотношение использовалось при получении (5.4.52) — мы предполагали, что величина  $(\delta L_\alpha(\mathbf{x}; \xi; t) / \delta F(\mathbf{x}', t'))_0$  является функцией разности  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ .)

Нам остается установить уравнения для определения  $h_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ . Обратимся для этого к уравнениям движения (5.4.10) для  $\xi_\alpha(\mathbf{x}, t)$ . Варьируя их по внешнему полю и используя определение (5.4.39) функций  $h_\alpha(\mathbf{x}, t)$ , получим, учитывая (5.4.46), (5.4.52),

$$\frac{\partial}{\partial t} h_\alpha(\mathbf{x}, t) - \int d^3x' \{ \mathcal{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + N_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} h_\beta(\mathbf{x}', t) = Q_\alpha(\mathbf{x}, t).$$

Третье слагаемое в левой части этого уравнения представляет собой линеаризованный около состояния равновесия «интеграл столкновений»  $L_\alpha(\mathbf{x}; \xi)$ . В фурье-компонентах это уравнение имеет вид

$$\{-i\omega - \mathcal{H}(\mathbf{k}) - N(\mathbf{k})\}_{\alpha\beta} h_\beta(\mathbf{k}, \omega) = Q_\alpha(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.4.56)$$

Уравнения (5.4.50), (5.4.53), (5.4.56) представляют собой систему уравнений для определения низкочастотной асимптотики функций Грина  $G_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  в том случае, когда мало взаимодействие между частицами или мала плотность частиц.

Покажем, что уравнения (5.4.56) для функций  $h_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  значительно упрощаются, если гамильтониан взаимодействия между частицами коммутирует с оператором полного числа частиц  $\hat{N}$ . Заметим с этой целью, что, согласно определению (5.4.13),  $\rho^{(0)}(\xi) \equiv \rho^{(0)}(f, \omega, \psi)$  имеет место соотношение

$$U_x \rho^{(0)}(f, \omega, \psi) U_x^+ = \rho^{(0)}(f, \omega e^{2ix}, \psi e^{ix}),$$

где  $U_x$  — унитарный оператор,  $U_x = \exp i\chi \hat{N}$ , соответствующий градиентным преобразованиям  $U_x \hat{\psi}(\mathbf{x}) U_x^+ = \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-ix}$  (\*). Учитывая

\* Здесь и далее во избежание путаницы между оператором  $\hat{\psi}$  и его средним значением  $\psi$  над оператором  $\hat{\psi}$  ставится знак  $\wedge$ .

также то, что  $[V, \hat{N}] = 0$ , получим, используя (5.4.50), следующее соотношение для огрубленного статистического оператора  $\sigma(\xi) \equiv \equiv \sigma(f, \omega, \psi)$ :

$$U_x \sigma(f, \omega, \psi) U_x^+ = \sigma(f, \omega e^{2ix}, \psi e^{ix}).$$

Дифференцируя это соотношение по  $x$  и полагая затем  $x=0$ , найдем

$$[\hat{N}, \sigma(\xi)] = \int d^3x \frac{\delta \sigma(\xi)}{\delta \psi(x)} \psi(x) + \sum_p \int d^3x \frac{\delta \sigma(\xi)}{\delta \omega_p(x)} \omega_p(x) - \text{э. с.} \quad (5.4.57)$$

Замечая, что в состоянии статистического равновесия  $\psi = \omega = 0$ , нетрудно получить, учитывая определение операторов  $\sigma_\alpha(k)$ , формулы

$$[\hat{N}, \sigma_{f_p}(k)] = 0, \quad [\hat{N}, \sigma_\psi(k)] = \sigma_\psi(k), \quad [\hat{N}, \sigma_{\omega_p}(k)] = 2\sigma_{\omega_p}(k), \quad (5.4.58)$$

где  $\sigma_\psi(k) = \sigma_{\psi^*}^+(-k)$ ,  $\sigma_{\omega_p}(k) = \sigma_{\omega_p^*}^+(-k)$ ,  $\sigma_{f_p}(k)$  — операторы  $\sigma_\alpha(k)$ , соответствующие величинам  $\xi_\alpha$ , равным  $\psi$ ,  $\omega_p$ ,  $f_p$ .

Из (5.4.58) следует, что из всех величин  $N_{\alpha\beta}$  отличны от нуля только  $N_{\psi\psi}(k) = N_{\psi^*\psi^*}^*(-k)$ ,  $N_{\omega_p\omega_p}(k) = N_{\omega_p^*\omega_p^*}^*(-k)$ ,  $N_{f_p f_p}(k)$ . Рассмотрим, например, величину  $N_{\psi^*\psi}(k) = i \text{Sp} \sigma_\psi(-k) [V, \hat{\psi}^+(0)]$ . Согласно (5.4.58)  $N_{\psi^*\psi}(k) = i \text{Sp} \sigma_\psi(-k) [V, [\hat{\psi}^+(0), N]]$ . Замечая, что  $[\hat{\psi}^+(0), N] = -\hat{\psi}^+(0)$ , имеем  $N_{\psi^*\psi}(k) = -i \text{Sp} \sigma_\psi(-k) \times \times [V, \hat{\psi}^+(0)] = -N_{\psi^*\psi}(k)$ , т. е.  $N_{\psi^*\psi}(k) = 0$ .

Таким образом, уравнения (5.4.56) для компонент Фурье  $h_\alpha(k, \omega)$  ( $\alpha = f_p, \omega_p, \psi$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} -i(\omega - kv) h_{f_p}(k, \omega) - \sum_{p'} N_{f_p f_{p'}}(k) h_{f_{p'}}(k, \omega) &= Q_{f_p}(k, \omega), \\ -i(\omega - \varepsilon_k) h_\psi(k, \omega) - N_{\psi\psi}(k) h_\psi(k, \omega) &= Q_\psi(k, \omega), \quad (5.4.59) \\ -i(\omega - \varepsilon_{p+k/2} - \varepsilon_{p-k/2}) h_{\omega_p}(k, \omega) - \sum_{p'} N_{\omega_p \omega_{p'}}(k) h_{\omega_{p'}}(k, \omega) &= Q_{\omega_p}(k, \omega), \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_k = k^2/2m$ ,  $v = p/m$  (мы использовали формулы (5.4.5), определяющие  $\mathcal{H}'_{\alpha\beta}(k)$ ).

Мы видим, что если гамильтониан взаимодействия  $V$  коммутирует с оператором числа частиц, то система уравнений для  $h_\alpha$  распадается на несвязанные уравнения для  $h_{f_p}$ ,  $h_\psi$  и  $h_{\omega_p}$ . Заметим, что уравнения для  $h_f$  и  $h_\omega$  представляют собой интегральные уравнения, а уравнение для  $h_\psi$  — алгебраическое уравнение. Решение последнего имеет вид

$$h_\psi(k, \omega) = \frac{iQ_\psi(k, \omega)}{\omega - \varepsilon_k - iN_{\psi\psi}(k)}. \quad (5.4.60)$$



Уравнение для функции  $h_j$  в координатном представлении может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}\right) h_{j_p}(\mathbf{x}, t) - \int d^3x' \sum_{p'} N_{j_p j_{p'}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') h_{j_{p'}}(\mathbf{x}', t) = Q_{j_p}(\mathbf{x}, t).$$

Входящий сюда интеграл представляет собой, согласно (5.4.46), линейризованный вблизи состояния статистического равновесия интеграл столкновений  $L_p(\mathbf{x}; f)$ . Поэтому это уравнение можно интерпретировать как линейризованное кинетическое уравнение для вигнеровской функции распределения с источниками  $Q_{j_p}(\mathbf{x}, t)$ , описывающими влияние внешнего возмущения на систему.

Вернемся теперь к формулам (5.4.41) для функции Грина  $G_{\xi\xi'}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ . Если каждый из операторов  $\xi$  и  $\xi'$  содержит одинаковое число полевых операторов  $\psi$  и  $\psi^+$ , то

$$G_{\xi\xi'}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_p h_{j_p}(\mathbf{k}, \omega) \text{Sp} \sigma_{j_p}(-\mathbf{k}) \xi'(0) + \text{Sp} \rho(-\mathbf{k}, \omega) \xi'(0). \quad (5.4.61)$$

Подставляя сюда решение уравнения (5.4.59) для  $h_{j_p}(\mathbf{k}, \omega)$ , мы и найдем асимптотику функции Грина в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .

Покажем еще, как найти асимптотику функции Грина  $G_{\psi\psi^+}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ . Заметим с этой целью, что, согласно (5.4.51),

$$\text{Sp} \sigma_{\psi}(\mathbf{k}) \hat{\psi}^+(0) = \text{Sp} \sigma_{j_p}(\mathbf{k}) \hat{\psi}^+(0) = \text{Sp} \sigma_{\omega_p}(\mathbf{k}) \hat{\psi}^+(0) = 0.$$

Поэтому, учитывая (5.4.52), найдем

$$G_{\psi\psi^+}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = h_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) \text{Sp} \sigma_{\psi}(-\mathbf{k}) \hat{\psi}(0) + \text{Sp} \rho(-\mathbf{k}, \omega) \hat{\psi}(0).$$

Из (5.4.51), (5.4.54) следует, что  $\text{Sp} \sigma_{\psi}(-\mathbf{k}) \hat{\psi}(0) = 1$ ,  $\text{Sp} \rho(-\mathbf{k}, \omega) \hat{\psi}(0) = 0$ . Поэтому, согласно (5.4.60),

$$G_{\psi\psi^+}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{iQ_{\psi}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} - iN_{\psi\psi}(\mathbf{k})}.$$

Мы видим, что одночастичная функция Грина  $G_{\psi\psi^+}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  имеет полюс при  $\omega = \varepsilon_{\mathbf{k}} + iN_{\psi\psi}(\mathbf{k})$ . Вещественная часть этого полюса определяет энергию элементарного возбуждения (или квазичастицы), возникающего из энергии частицы  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  идеального газа. Мнимая же часть полюса  $\text{Im} iN_{\psi\psi}(\mathbf{k})$  определяет время жизни этой квазичастицы.

Входящие в (5.4.59) функции  $N_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ ,  $Q_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$  могут быть найдены из интегральных уравнений (5.4.50), (5.4.53) для  $\sigma_{\alpha}(\mathbf{k})$ ,  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  с помощью тех же методов, которыми мы пользовались при выводе кинетических уравнений в разделах 5.1.2, 5.2.2.

Заметим, что результаты этого раздела можно получить и другим путем, исходя из интегрального уравнения для огрубленного статистического оператора (4.2.11) и уравнения «памяти» (4.2.17) [30].

Если мы хотим найти асимптотику функций Грина в области частот,  $\omega \sim \tau_0^{-1}$ , то необходимо пользоваться интегральным уравнением (5.4.15'), учитывающим немарковский характер быстрых кинетических процессов.

Подчеркнем, что уравнения (5.4.59), (5.4.60) относятся к случаю нормальных (т. е. не сверхтекучих) бозе-систем, когда  $\psi$  и  $\omega_p$  в состоянии равновесия равны нулю. Однако формула (5.4.61) может быть использована также и для нахождения асимптотики функций Грина нормальных (т. е. несверхтекучих) ферми-систем. Для нахождения же асимптотики функции Грина типа  $G_{\psi\psi^+}^{(+)}$  даже для нормальной ферми-системы необходимо вводить взаимодействие системы с внешними антикоммутирующими полями. На рассмотрении этого вопроса мы не будем здесь останавливаться.

**5.4.4. Интегральные уравнения для определения низкочастотной асимптотики функций Грина вырожденных бозе-систем.** В предыдущем разделе мы получили интегральные уравнения для операторов  $\sigma_\alpha(x)$ , которые позволяют находить низкочастотную асимптотику функций Грина нормальных бозе-систем.

Эти уравнения легко модифицировать таким образом, чтобы можно было находить низкочастотную асимптотику функций Грина и вырожденных бозе-систем, т. е. систем, обладающих свойством сверхтекучести [94]. Для таких систем среднее значение оператора  $\hat{\psi}$  не равно нулю. Именно, если в соответствии с методом квазисредних в качестве статистического оператора Гиббса взять статистический оператор

$$\omega_\nu = \exp \left\{ \Omega - \beta \left( \mathcal{H} - \mu N + \nu \int d^3x (\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}^+(x)) \right) \right\},$$

то квазисреднее значение оператора  $\hat{\psi}$  будет равно

$$\langle \hat{\psi} \rangle \equiv \lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Sp } \omega_\nu \hat{\psi}(x) = \left( \frac{n_0}{V} \right)^{1/2},$$

где  $n_0/V$  — плотность частиц бозе-конденсата (чтобы величина  $\langle \hat{\psi} \rangle$  была положительной, необходимо  $\nu$  стремиться к нулю со стороны отрицательных значений, см. 6.2.3).

Подчеркнем, что оператор  $\omega_\nu$  не коммутирует в смысле квазисредних ни с гамильтонианом системы  $\mathcal{H}$ , ни с оператором числа частиц  $N$ , т. е.  $\{\mathcal{H}, \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n)\} \neq 0$ ,  $\{N, \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n)\} \neq 0$ . Однако оператор  $\omega_\nu$  коммутирует в смысле квазисредних с оператором  $\mathcal{H} - \mu N \equiv \tilde{\mathcal{H}}$ ,

$$\{\tilde{\mathcal{H}} - \mu N, \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n)\} = 0, \quad (5.4.62)$$

так как

$$\nu \int d^3x \{[\hat{\psi}^+(x) + \hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x_1) \dots \hat{\psi}(x_n)]\} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 0.$$

В предыдущем разделе функции Грина нормальных систем определялись формулой (5.4.36), в которой статистический оператор  $\rho(t)$  удовлетворял уравнению (5.4.1). При этом было существенно, что распределение Гиббса  $\omega$

коммутирует с гамильтонианом  $\mathcal{H}$ . Для вырожденных бозе-систем функции Грина удобнее определять несколько иначе:

$$\mathcal{G}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = -i\theta(t - t') \{ [e^{i\bar{\mathcal{H}}(t-t')} \xi'(\mathbf{x}) e^{-i\bar{\mathcal{H}}(t-t')}, \xi(\mathbf{x}') ] \} \quad (5.4.63)$$

где  $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \mu N$ . При таком определении функций Грина вырожденных бозе-систем результаты предыдущего раздела, в которых не предполагалось, что  $\psi = \psi_p = 0$ , будут справедливы и для вырожденных бозе-систем, нужно лишь предполагать, что статистический оператор  $\rho(t)$  формально удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\bar{\mathcal{H}} + \mathcal{H}_p(t), \rho(t)] \quad (5.4.64)$$

вместо уравнения (5.4.1). В частности, сохранится связь (5.4.36) между функцией Грина и вариационной производной статистического оператора:

$$\mathcal{G}_{\xi\xi'}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \left. \frac{\delta \text{Sp } \rho(t) \xi'(\mathbf{x})}{\delta F(\mathbf{x}', t')} \right|_{F=0}$$

При этом, согласно (5.4.62), «гамильтониан»  $\bar{\mathcal{H}} \equiv \mathcal{H} - \mu N$  коммутирует в смысле квазисредних с равновесным статистическим оператором  $\psi$ .

Из (5.4.64) следует, что под оператором  $V$  в формулах предыдущего раздела необходимо понимать теперь не оператор взаимодействия между частицами, а оператор

$$V = \mathcal{H}_{\text{int}} - \mu N, \quad (5.4.65)$$

где  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  — гамильтониан взаимодействия между частицами. В интегральные уравнения (5.4.50) для операторов  $\sigma_a$  входят операторы  $\sigma_a^{(0)}$ , которые в свою очередь определяются статистическим оператором  $\rho^{(0)}(\xi)$  (5.4.13)

$$\rho^{(0)}(\xi) = \exp(\Omega_0 - \hat{G}),$$

$$\hat{G} = (\hat{\psi}^+, Y\hat{\psi}) + (\hat{\psi}, X) + (\hat{\psi}, X)^+ + (\hat{\psi}, Z\hat{\psi}) + (\hat{\psi}, Z\hat{\psi})^+,$$

где

$$(\hat{\psi}^+, Y\hat{\psi}) = \int d^3x d^3x' \hat{\psi}^+(x) Y(x, x') \hat{\psi}(x'),$$

$$(\hat{\psi}, X) = \int d^3x \hat{\psi}(x) X(x), \quad (\hat{\psi}, Z\hat{\psi}) = \int d^3x d^3x' \hat{\psi}(x) Z(x, x') \hat{\psi}(x').$$

(Функции  $X(x)$ ,  $Y(x, x')$ ,  $Z(x, x')$  в силу соотношений  $\text{Sp } \rho^{(0)}(\xi) \hat{\xi}(x) = \xi(x)$  определяются величинами  $\xi_a(x)$ .) Ясно, что существует унитарный оператор  $U$  такой, что

$$U\hat{\psi}(x)U^+ = \hat{\psi}(x) + C(x), \quad U\hat{\psi}^+(x)U^+ = \hat{\psi}^+(x) + C^*(x), \quad (5.4.66)$$

где  $C(x)$  — произвольная  $c$ -числовая функция  $x$ . Эта функция и определяет оператор  $U$ .

Легко видеть, что выбрав  $C(x)$  таким образом, что

$$X + C^*Y + ZC = 0 \quad X^* + YC + Z^*C^* = 0$$

(второе из этих уравнений является следствием первого, так как ядро  $Y(x, x')$  — эрмитово,  $Y^*(x, x') = Y(x', x)$ ) мы получим

$$U\hat{G}U^+ = -(C^*YC) - (C, ZC) - (C, ZC)^* + (\hat{\psi}^+ Y\hat{\psi}) + (\hat{\psi}, Z\hat{\psi}) + (\hat{\psi}, Z\hat{\psi})^+$$

Поэтому

$$\bar{\rho}^{(0)} \equiv U\rho^{(0)}(\xi)U^+ = \exp\{\Omega_0' - (\hat{\psi}^+ Y\hat{\psi}) - (\hat{\psi}, Z\hat{\psi}) - (\hat{\psi}, Z\hat{\psi})^+\}, \quad (5.4.67)$$

где  $\Omega'_0 = \Omega_0 + (C^*, YC) + 2 \operatorname{Re} (C, ZC)$ . Замечая, что  $\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\xi) \hat{\psi}(x) = \psi(x)$ , имеем

$$\psi(x) = \operatorname{Sp} U \rho^{(0)}(\xi) U^+ U \hat{\psi}(x) U^+ = \operatorname{Sp} \bar{\rho}^{(0)}(\hat{\psi}(x) + C(x)).$$

Поэтому  $C(x) = \psi(x)$ . Найдем далее  $\operatorname{Sp} \bar{\rho}^{(0)} \hat{f}_p(x)$  и  $\operatorname{Sp} \bar{\rho}^{(0)} w_p(x)$ . Введем с этой целью корреляционные функции  $g_p(x)$  и  $\varphi_p(x)$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(x) &= g_p(x) + \int d^3 y e^{i p y} \psi^* \left( x + \frac{y}{2} \right) \psi \left( x - \frac{y}{2} \right), \\ w_p(x) &= \varphi_p(x) + \int d^3 y e^{i p y} \psi \left( x + \frac{y}{2} \right) \psi \left( x - \frac{y}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.4.68)$$

Замечая, что  $\operatorname{Sp} \rho^{(0)}(\xi) \hat{\xi}_\alpha(x) = \xi_\alpha(x)$ , имеем, согласно (5.4.67), (5.4.68),

$$\operatorname{Sp} \bar{\rho}^{(0)} \hat{f}_p(x) = g_p(x), \quad \operatorname{Sp} \bar{\rho}^{(0)} w_p(x) = \varphi_p(x).$$

Из этих формул и (5.4.67) в соответствии с (5.4.13) следует, что  $\bar{\rho}^{(0)} = \rho^{(0)}(g, \varphi)$ , и поэтому

$$\rho^{(0)}(\xi) = U^+ \rho^{(0)}(g, \varphi) U, \quad (5.4.69)$$

где  $U \equiv U(\psi, \psi^*)$  определяется формулами (5.4.66), в которых вместо  $C(x)$  должна быть подставлена функция  $\psi(x)$ .

Таким образом, зависимость статистического оператора  $\rho^{(0)}(\xi)$  от  $\psi$  и  $\psi^*$  выделяется в виде унитарного преобразования  $U$ , оператор же  $\rho^{(0)}(g, \varphi)$  зависит только от корреляционных функций  $g_p(x)$ ,  $\varphi_p(x)$ .

В уравнения (5.4.50) входит вариационная производная от  $\rho^{(0)}(\xi)$  по  $\xi_\alpha(x)$ , т. е. по  $\psi(x)$ ,  $\hat{f}_p(x)$  и  $w_p(x)$ . Поэтому нам необходимо знать вариацию унитарного оператора  $U$  по  $\psi$  и  $\psi^*$ . Замечая, что в силу унитарности оператора  $U$ ,  $\delta U \cdot U^+ = -U \delta U^+$  имеем, согласно (5.4.66),

$$[\delta U \cdot U^+, \hat{\psi}(x)] = \delta \psi(x), \quad [\delta U \cdot U^+, \hat{\psi}^+(x)] = \delta \psi^*(x)$$

Отсюда в силу канонических перестановочных соотношений (2.2.19) следует, что

$$\delta U = \int d^3 x (\delta \psi^*(x) \hat{\psi}(x) - \delta \psi(x) \cdot \hat{\psi}^+(x)) U. \quad (5.4.70)$$

Поэтому, учитывая (5.4.69), имеем

$$\begin{aligned} [\delta \psi \rho^{(0)}(\xi)]_{g, \varphi} &= U^+ [\rho^{(0)}(g, \varphi), \delta U \cdot U^+] U = \\ &= U^+ \int d^3 x \{ \delta \psi(x) [\hat{\psi}^+(x), \rho^{(0)}(g, \varphi)] - \delta \psi^*(x) [\hat{\psi}(x), \rho^{(0)}(g, \varphi)] \} U, \end{aligned}$$

где  $[\delta \psi \rho^{(0)}(\xi)]_{g, \varphi}$  служит для обозначения вариации  $\rho^{(0)}(\xi)$  по  $\psi$  и  $\psi^*$  при постоянных  $g_p(x)$ ,  $\varphi_p(x)$ . Из последней формулы и (5.4.69) следует, что

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(\xi)}{\delta \psi(x)} \right)_{g, \varphi}^0 &\equiv \bar{\sigma}_\psi^{(0)}(x) = U_0^+ [\hat{\psi}^+(x), \rho^{(0)}(g, \varphi)] U_0, \\ \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(\xi)}{\delta \psi^*(x)} \right)_{g, \varphi}^0 &\equiv \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(x) = \bar{\sigma}_\psi^{(0)}(x)^+, \\ \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(\xi)}{\delta \varphi_p(x)} \right)_{g, \varphi}^0 &\equiv \bar{\sigma}_{\varphi_p}^{(0)}(x) = U_0^+ \frac{\delta \rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta \varphi_p(x)} U_0, \\ \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(\xi)}{\delta g_p(x)} \right)_{\psi, \varphi}^0 &\equiv \bar{\sigma}_{g_p}^{(0)}(x) = U_0^+ \frac{\delta \rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta g_p(x)} U_0 \end{aligned} \quad (5.4.71)$$

(индекс 0 при вариационной производной и операторе  $U$  означает, что соответствующие величины берутся для равновесных значений  $g_p$ ,  $\varphi_p$  и  $\psi$ ).

Найдем теперь оператор  $U_0$ . Из формулы (5.4.70) следует, что

$$\frac{\partial U(\lambda\psi, \lambda\psi^*)}{\partial \lambda} = \int d^3x (\psi^*(x) \hat{\psi}(x) - \psi(x) \hat{\psi}^+(x)) U(\lambda\psi, \lambda\psi^*).$$

Замечая, что  $U(0, 0) = 1$ , получим отсюда

$$U(\psi, \psi^*) = \exp \int d^3x (\psi^*(x) \hat{\psi}(x) - \psi(x) \hat{\psi}^+(x)).$$

Так как  $U\hat{\psi}(x)U^+ = \hat{\psi}(x) + \psi(x)$  и  $\hat{\psi}(x)|0\rangle = 0$ , то

$$\hat{\psi}(x)U^+|0\rangle = \psi(x)U^+|0\rangle, \quad (5.4.72)$$

где  $|0\rangle$  — вектор состояния вакуума. Мы видим, что состояние  $U^+|0\rangle$  является собственным состоянием оператора  $\hat{\psi}(x)$ , принадлежащим собственному значению  $\psi(x)$ . Это состояние носит название когерентного состояния.

В состоянии  $\omega$  величина  $\psi$  не зависит от  $x$  и равна  $(n_0/\mathcal{V})^{1/2}$ . Поэтому

$$U_0 = \exp n_0^{1/2} (a_0 - a_0^+), \quad (5.4.73)$$

где  $a_0$  и  $a_0^+$  — операторы уничтожения и рождения конденсатных частиц. Отметим, что, согласно (5.4.72),  $a_0 U_0^+ |0\rangle = a_0^{1/2} U_0^+ |0\rangle$ .

Вернемся к формулам (5.4.71). Они определяют вариационные производные  $\rho^{(0)}(\xi)$  по  $\psi(x)$ ,  $g_p(x)$  и  $\varphi_p(x)$ . В интегральные же уравнения (5.4.50) входят величины  $\sigma_\alpha^{(0)}$ , представляющие собой вариационные производные  $\rho^{(0)}(\xi)$  по  $\psi(x)$ ,  $f_p(x)$  и  $w_p(x)$ . Поэтому следует установить связь между операторами  $\bar{\sigma}_\alpha^{(0)}$  и  $\sigma_\alpha^{(0)}$ . Совокупность функций  $f_p(x)$ ,  $w_p(x)$ ,  $w_p^*(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\psi^*(x)$  мы обозначили через  $\xi_\alpha(x)$ . Обозначим через  $\bar{\xi}_\alpha(x)$  совокупность функций  $g_p(x)$ ,  $\varphi_p(x)$ ,  $\varphi_p^*(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\psi^*(x)$ . Связь между  $f_p(x)$ ,  $w_p(x)$  и  $g_p(x)$ ,  $\varphi_p(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\psi^*(x)$  определяется формулами (5.4.69). Ясно, что

$$\sigma_\alpha^{(0)}(x) = \int d^3x' \bar{\sigma}_\beta^{(0)}(x') R_{\beta\alpha}(x' - x), \quad (5.4.74)$$

$$\bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(x) = \int d^3x' \sigma_\beta^{(0)}(x') R_{\beta\alpha}^{-1}(x' - x),$$

$$R_{\beta\alpha}(x' - x) = \left( \frac{\delta \bar{\xi}_\beta(x')}{\delta \xi_\alpha(x)} \right)_0, \quad R_{\beta\alpha}^{-1}(x' - x) = \left( \frac{\delta \xi_\beta(x')}{\delta \bar{\xi}_\alpha(x)} \right)_0,$$

где индекс 0 при вариационной производной служит по-прежнему для обозначения равновесного значения вариационной производной.

Введем теперь вместо операторов  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$ , фигурирующих в интегральных уравнениях (5.4.50), операторы  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$ :

$$\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = \sigma_\beta(\mathbf{k}) R_{\beta\alpha}^{-1}(-\mathbf{k}), \quad \sigma_\alpha(\mathbf{k}) = \bar{\sigma}_\beta(\mathbf{k}) R_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}), \quad (5.4.75)$$

где  $R_{\beta\alpha}(\mathbf{k})$ ,  $R_{\beta\alpha}^{-1}(\mathbf{k})$  — фурье-компоненты функций  $R_{\beta\alpha}(x)$ ,  $R_{\beta\alpha}^{-1}(x)$ . Эти операторы удовлетворяют в силу (5.4.50) интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\tau} \{ [V \bar{\sigma}_\beta(\mathbf{k})] - i\bar{\sigma}_\gamma(\mathbf{k}) \bar{N}_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - \\ - i\bar{L}_{\gamma\beta}(\xi^0) \bar{\sigma}_{\gamma\beta}^{(0)}(0; \mathbf{k}) \} e^{-i\mathcal{E}\tau} \left( e^{i\mathcal{E}\tau} \bar{\xi}(-\mathbf{k}) \right)_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (5.4.76)$$

где  $V = \mathcal{H}_{\text{int}} - \mu N$ ,

$$\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \int d^3x d^3x' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\mathbf{k}'\mathbf{x}'} \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left( \frac{\delta^2 \rho^{(0)}(\zeta)}{\delta \bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) \delta \xi_\beta(\mathbf{x}')} \right)_0$$

и величины  $\hat{\mathcal{H}}, \bar{N}, \bar{L}$  связаны с величинами  $\mathcal{H}, N, L$  соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) &= R(\mathbf{k}) \mathcal{H}(\mathbf{k}) R^{-1}(\mathbf{k}) & \bar{N}(\mathbf{k}) &= R(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) R^{-1}(\mathbf{k}), \\ \bar{L}(\zeta^0) &= L(\zeta^0) R^{-1}(0). \end{aligned} \quad (5.4.77)$$

Легко видеть, используя (5.4.50), (5.4.75), что

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= i \text{Sp } \bar{\sigma}_\beta(-\mathbf{k}) [V, \bar{\xi}_\alpha(0)], & \bar{L}_\alpha(\zeta^0) &= i \text{Sp } \omega [V, \bar{\xi}_\alpha(0)], \\ \hat{\xi}_\alpha(0) &= \bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0}, & \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) &= \int d^3x' R_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{\xi}_\beta(\mathbf{x}') \end{aligned} \quad (5.4.78)$$

Матрица  $\hat{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ , а следовательно, и матрица  $\mathcal{H}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \tau)$  коммутирует с матрицей  $R_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ ,

$$R\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}R, \quad R\mathcal{H}(\tau) = \mathcal{H}(\tau)R. \quad (5.4.79)$$

Действительно, согласно (5.4.78), фурье-компоненты  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})$  и  $\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{k})$  операторов  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$  и  $\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$  связаны между собой соотношением  $\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{k}) = R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\beta(\mathbf{k})$ . С другой стороны, согласно (5.4.5), для операторов  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})$  справедлива формула  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k}) \equiv i [\mathcal{H}_0, \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})] = \hat{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\beta(\mathbf{k})$ . Поэтому имеем

$$\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k}) \equiv i [\mathcal{H}_0, \bar{\xi}_\alpha(\mathbf{k})] = (R(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) R^{-1}(\mathbf{k}))_{\alpha\beta} \bar{\xi}_\beta(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \bar{\xi}_\beta(\mathbf{k}). \quad (5.4.80)$$

Из явного вида операторов  $\bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$  (см. (5.4.78))

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(\mathbf{x}) &= \hat{f}_p(\mathbf{x}) - \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \int d^3y e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}} \left( \hat{\psi}^+ \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2} \right) + \hat{\psi} \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2} \right) \right), \\ \hat{w}_p(\mathbf{x}) &= \hat{w}_p(\mathbf{x}) - \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \int d^3y e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}} \left( \hat{\psi} \left( \mathbf{x} + \frac{\mathbf{y}}{2} \right) + \hat{\psi} \left( \mathbf{x} - \frac{\mathbf{y}}{2} \right) \right), \\ \hat{\psi}(\mathbf{x}) &= \hat{\psi}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.4.81)$$

непосредственно следует, что

$$\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) \equiv i [\mathcal{H}_0, \bar{\xi}_\alpha(\mathbf{x})] = \int d^3x' \hat{\mathcal{H}}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \bar{\xi}_\beta(\mathbf{x}').$$

Сравнение этой формулы с (5.4.80) приводит к равенству  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ . Это соотношение и доказывает формулы (5.4.79).

Преобразуем теперь уравнения (5.4.56), (5.4.53). Вводя функции

$$\bar{h}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) h_\beta(\mathbf{k}, \omega), \quad \bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) Q_\beta(\mathbf{k}, \omega), \quad (5.4.82)$$

получим в соответствии с (5.4.56)

$$\{-i\omega - \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) - \bar{N}(\mathbf{k})\}_{\alpha\beta} \bar{h}_\beta(\mathbf{k}, \omega) = \bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega). \quad (5.4.83)$$

Величина  $\bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  связана, очевидно, с  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением

$$\bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = i \text{Sp } \omega [\hat{\xi}_\alpha(-\mathbf{k}), \bar{\xi}_\alpha(0)] + i \text{Sp } \rho(-\mathbf{k}, \omega) [V, \bar{\xi}_\alpha(0)], \quad (5.4.84)$$

где оператор  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  определяется интегральным уравнением (5.4.53), которое в силу (5.4.82), (5.4.75) можно переписать в виде

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} \{ [V, \rho(\mathbf{k}, \omega)] + [\xi(\mathbf{k}), \omega] - \omega \rho(\mathbf{k}, \omega) - i\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) \bar{Q}_\alpha(-\mathbf{k}, \omega) \} e^{-i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} \quad (5.4.85)$$

Легко видеть, что формула (5.4.41), определяющая функцию Грина  $\mathcal{G}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , заменится теперь формулой

$$\mathcal{G}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \bar{h}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \text{Sp } \bar{\sigma}_\alpha(-\mathbf{k}) \hat{\xi}'(0) + \text{Sp } \rho(-\mathbf{k}, \omega) \hat{\xi}'(0). \quad (5.4.86)$$

Отметим, что, согласно (5.4.51), справедливы формулы

$$\text{Sp } \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\xi}_\beta^{\pm}(\mathbf{x}') = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \text{Sp } \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{\xi}_\beta^{\pm}(\mathbf{x}') = R_{\beta\alpha}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (5.4.87)$$

**5.4.5. Функции Грина в случае слабого взаимодействия между квазичастицами.** В предыдущем разделе были установлены интегральные уравнения для операторов  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$  и  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ , зная которые можно в принципе найти функции Грина  $\mathcal{G}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ . Эти уравнения можно решать методом теории возмущений, если взаимодействие между частицами является слабым. Однако такая теория возмущений не имеет большого физического смысла для вырожденных бозе-систем, так как ее нулевое приближение соответствует идеальному газу частиц, а не квазичастиц. Представляет собой интерес случай слабого взаимодействия между квазичастицами, а не частицами. Поэтому следует перестроить интегральные уравнения (5.4.76), (5.4.85) таким образом, чтобы они позволили развить простую теорию возмущений, основанную на предположении о малости взаимодействия между квазичастицами.

Из вида гамилтониана (3.2.4) и спектра квазичастиц (3.2.19) следует, что малым параметром теории возмущений нужно считать величину  $\nu(\mathbf{k})$ . При этом плотность частиц конденсата должна быть обратно пропорциональна  $\nu(\mathbf{k})$ ,  $n_0 \sim \nu^{-1}(\mathbf{k})$  (химический потенциал  $\mu$  определяется величиной  $n_0$ ). Таким образом, речь идет о построении теории возмущений, в которой, несмотря на малость  $\nu(\mathbf{k})$ , величина  $n_0\nu(\mathbf{k})$  не мала. Введем с этой целью вместо операторов  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$  операторы  $\sigma'_\alpha(\mathbf{k})$

$$\sigma'_\alpha(\mathbf{k}) = U_0 \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) U_0^\dagger. \quad (5.4.88)$$

Эти операторы, согласно (5.4.76), удовлетворяют уравнению

$$\sigma'_\alpha(\mathbf{k}) = \sigma_\alpha^{(0)'}(\mathbf{k}) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} \{ [V', \sigma'_\beta(\mathbf{k})] - i\sigma'_\nu(\mathbf{k}) \bar{N}_{\nu\beta}(-\mathbf{k}) - - i\bar{L}_\nu(\xi^0) \sigma_{\nu\beta}^{(0)'}(0, \mathbf{k}) \} e^{-i\mathcal{E}\mathcal{C}_0\tau} (e^{\tau\hat{\mathcal{K}}}(-\mathbf{k}))_{\beta\alpha}, \quad (5.4.89)$$

где  $\sigma_\alpha^{(0)'}(\mathbf{k})$  — фурье-компоненты операторов  $\sigma_\alpha^{(0)'}(x)$ ,

$$\sigma_\psi^{(0)'}(x) = \sigma_{\psi^*}^{(0)'}(x)^\dagger = [\hat{\psi}^\dagger(x), \rho^{(0)}(g, \varphi)],$$

$$\sigma_{\varphi_p}^{(0)'}(x) = \sigma_{\varphi_p^*}^{(0)'}(x)^\dagger = \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta \varphi_p(x)} \right)_0, \quad \sigma_{g_p}^{(0)'}(x) = \left( \frac{\delta \rho^{(0)}(g, \varphi)}{\delta g_p(x)} \right)_0,$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(0)'}(k, k') = U_0 \sigma_{\alpha\beta}^0(k, k') U_0^\dagger \quad (5.4.90)$$

и  $V' = U_0 V U_0^+$ . Беря в качестве  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  гамильтониан парного взаимодействия, введенный в 3.2.2, мы разобьем  $V'$  на два слагаемых  $V' = V'_2(n_0) + V'_{\text{eff}}(n_0)$ , где

$$V'_2(n_0) = \frac{n_0}{2\mathcal{Y}} \sum_{l \neq 0} v(l) (a_l^+ a_l + a_l^+ a_{-l}^+) + \text{э. с.} + \frac{n_0^2}{2\mathcal{Y}} v(0), \quad (5.4.91)$$

$$V'_{\text{eff}}(n_0) = - \left( \mu - \frac{n_0}{\mathcal{Y}} \dot{v}(0) \right) \sum_{l \neq 0} a_l^+ a_l + n_0^{1/2} V_3 + V_4$$

и  $V_3, V_4$  определяются формулами (3.2.4) (мы можем выбросить в пределе  $\mathcal{Y} \rightarrow \infty$  модуль  $1 \equiv p_1 = 0$ , так как для статистического оператора  $\rho^{(0)}(g, \varphi)$  справедливо соотношение  $\text{Sp } \rho^{(0)}(g, \varphi) a_0 = 0$ ).

В соответствии с разбиением  $V'$  на два слагаемых, представим величину  $\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \bar{\sigma}_\beta(-\mathbf{k}) [V, \hat{\xi}_\alpha(0)] = i \text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [V', \hat{\xi}'_\alpha(0)]$  также в виде суммы двух слагаемых

$$\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = N_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}) + N'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}),$$

$$N_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [V'_2(n_0), \hat{\xi}'_\alpha(0)], \quad (5.4.92)$$

$$N'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [V'_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}'_\alpha(0)],$$

где  $\hat{\xi}'_\alpha(\mathbf{x}) = U_0 \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) U_0^+$ . Согласно формулам (5.4.81) оператор  $\hat{\xi}'_\alpha$  отличается от оператора  $\hat{\xi}_\alpha$  на некоторое  $c$ -число. Кроме того, так как  $[V'_2(n_0), \hat{\xi}'_\alpha(0)]$  представляет собой квадратичную форму относительно операторов  $a, a^+$ , которая всегда может быть выражена через операторы  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$ , то, согласно (5.4.87),  $\text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [V'_2, \hat{\xi}'_\alpha(0)] = \text{Sp } \sigma^{(0)'}(-\mathbf{k}) [V'_2, \hat{\xi}_\alpha(0)]$ . Поэтому формулы (5.4.92) можно переписать в виде

$$N_{\alpha\beta}^0(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \sigma_\beta^{(0)'}(-\mathbf{k}) [V'_2(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)], \quad (5.4.93)$$

$$N'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i \text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [V'_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)].$$

Нам нужно преобразовать уравнение (5.4.89) таким образом, чтобы в экспоненты  $\exp \pm i\mathcal{H}_0\tau$  вместо гамильтониана свободных частиц  $\mathcal{H}_0$  входил гамильтониан квазичастиц  $\mathcal{H}_q(n_0) = \mathcal{H}_0 + V'_2(n_0)$ . С этой целью, так же как и в разделе 5.2.1, следует воспользоваться формулой типа (5.1.18 $''$ ). Именно, если

$$\hat{B}_\alpha = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\hat{H}\tau} \hat{A}_\beta e^{-i\hat{H}\tau} (e^{\tau M})_{\beta\alpha}$$

или сокращенно

$$\hat{B} = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\hat{H}\tau} \hat{A} e^{-i\hat{H}\tau} e^{\tau M}, \quad (5.4.94)$$

где  $\hat{A}_\alpha$  — некоторая совокупность операторов, действующих в гильбертовом пространстве векторов состояний и  $M$  —  $c$ -числовая матрица, действующая на индекс  $\alpha$ , то совокупность операторов  $\hat{B}_\alpha$  удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\hat{B} = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\hat{H}_0\tau} \{ \hat{A} - i [\hat{W}, \hat{B}] - \hat{B}m \} e^{-iH_0\tau} e^{\tau M_0}, \quad (5.4.95)$$



где  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ ,  $M = M_0 + m$ , причем разбиение  $\hat{H}$  на  $\hat{H}_0$  и  $\hat{W}$  и  $M$  на  $M_0$  и  $m$  произвольно. Доказательство этой формулы проводится совершенно аналогично доказательству формулы (5.1.18''), и мы не будем здесь его приводить.

Полагая в (5.4.94)  $\hat{B} = i(\sigma' - \sigma^{(0)'})$ ,  $\hat{H} = \mathcal{H}_0$ ,  $M = \mathcal{H}(-\mathbf{k})$ ,  $\hat{W} = -V'_2(n_0)$ ,  $m = -N^0(-\mathbf{k})$  и понимая под  $\hat{A}$  оператор в фигурных скобках в выражении для  $\sigma'$ , мы получим, согласно (5.4.95) (5.4.89), соотношение

$$i(\sigma'_\alpha(\mathbf{k}) - \sigma_\alpha^{(0)'(\mathbf{k})}) = \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\mathcal{E}q} \{ [V'_{\text{eff}}(n_0), \sigma'_\beta(\mathbf{k})] - \\ - i\sigma'_\gamma(\mathbf{k}) N'_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) + [V'_2(n_0), \sigma_\beta^{(0)'(\mathbf{k})}] - i\sigma_\gamma^{(0)'(\mathbf{k})} N^0_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - \\ - i\bar{L}'_\gamma(\zeta^0) \sigma_{\gamma\beta}^{(0)'(0, \mathbf{k})} \} (e^{\tau(\mathcal{H}(-\mathbf{k}) + N^0(-\mathbf{k}))}_{\beta\alpha}} \cdot e^{-i\tau\mathcal{E}q}, \quad (5.4.96)$$

где  $\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_0 + V'_2(n_0)$  — гамильтониан свободных квазичастиц (см. 3.2.11).

Заметим теперь что уравнение (5.4.47), где  $\mathcal{L}'_\alpha(x; \zeta) = i \text{Sp } \rho^{(0)}(\zeta) \times \times [\mathcal{H}_0, \hat{\xi}_\alpha(x)]$ , справедливо независимо от конкретной структуры оператора  $\mathcal{H}_0$ , необходимо лишь, чтобы оператор  $\mathcal{H}_0$  представлял собой квадратичную форму относительно операторов  $a$ ,  $a^+$  (при этом оператор  $[\mathcal{H}_0, \hat{\xi}_\alpha(x)]$  выражается линейно через операторы  $\hat{\xi}_\alpha(x)$ ). Понимая под  $\mathcal{H}_0$  в (5.4.47) оператор  $V'_2$ , мы можем поэтому написать соотношение

$$[V'_2(n_0), \rho^{(0)}(\zeta)] = i \int d^3x \frac{\delta \rho^{(0)}(\zeta)}{\delta \hat{\xi}_\alpha(x)} i \text{Sp } \rho^{(0)}(\zeta) [V'_2(n_0), \hat{\xi}_\alpha(x)].$$

Варьируя это соотношение по  $\hat{\xi}_\alpha(x)$  и заменяя затем величины  $\hat{\xi}_\alpha(x)$  их равновесными значениями, получим, согласно (5.4.90),

$$[V'_2(n_0), \sigma_\beta^{(0)'(\mathbf{k})}] = i\sigma_\gamma^{(0)'(\mathbf{k})} N^0_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - \sigma_{\gamma\beta}^{(0)'(0; \mathbf{k})} \cdot \text{Sp } w(n_0) [V'_2, \hat{\xi}_\gamma(0)].$$

Поэтому уравнение (5.4.96) приобретает вид

$$\sigma'_\alpha(\mathbf{k}) = \sigma_\alpha^{(0)'(\mathbf{k})} - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\mathcal{E}q} \{ [V'_{\text{eff}}(n_0), \sigma'_\beta(\mathbf{k})] - \\ - i\sigma'_\gamma(\mathbf{k}) N'_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - iL'_\gamma(\zeta^0) \sigma_{\gamma\beta}^{(0)'(0, \mathbf{k})} \} (e^{\tau\mathcal{H}'(-\mathbf{k})}_{\beta\alpha}} \cdot e^{-i\tau\mathcal{E}q}, \quad (5.4.97) \\ \mathcal{H}'(\mathbf{k}) = \mathcal{H}(\mathbf{k}) + N^0(\mathbf{k}), \quad L'_\alpha(\zeta^0) = i \text{Sp } w(n_0) [V'_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)].$$

В этом уравнении гамильтониан квазичастиц  $\mathcal{H}_q$  не диагонален по операторам  $a$ ,  $a^+$ , а матрица  $\mathcal{H}'(-\mathbf{k})$  «перепутывает» компоненты  $\alpha = \psi, g, \varphi$ . Для того чтобы привести уравнение (5.4.97) к виду, в котором гамильтониан квазичастиц диагонален по операторам  $a$ ,  $a^+$ , а матрица  $\mathcal{H}'$  не «перепутывает» компонент  $\sigma'_\alpha$  ( $\alpha = \psi, g, \varphi$ ), введем вместо  $\sigma'_\alpha(\mathbf{k})$  операторы  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$ ,

$$\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = U\sigma'_\beta(\mathbf{k})U^\dagger \Lambda_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}), \quad (5.4.98)$$

где  $U$  — введенный в разделе 3.2.2 унитарный оператор, диагонализующий гамильтониан квазичастиц (см. формулы (3.2.12), (3.2.13)) и  $\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  — матрица, определяемая соотношением

$$\Lambda_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{k}) = \text{Sp } U\sigma'_\beta(-\mathbf{k})U^\dagger \hat{\xi}_\alpha(0),$$

или, что эквивалентно, соотношением

$$\text{Sp } \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) \hat{\xi}_\beta(0) = \delta_{\alpha\beta}. \quad (5.4.99)$$

Тогда операторы  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$  будут удовлетворять, согласно (5.4.97), уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = & \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\tilde{\mathcal{H}}_q} \{ [\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0), \bar{\sigma}_\beta(\mathbf{k})] - \\ & - i\bar{\sigma}_\gamma(\mathbf{k}) \tilde{N}_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - i\tilde{L}_\gamma(\xi^0) \bar{\sigma}_{\gamma\beta}^{(0)}(0, \mathbf{k}) \} (e^{\tau\tilde{\mathcal{H}}(-\mathbf{k})})_{\beta\alpha} e^{-i\tau\tilde{\mathcal{H}}_q}, \end{aligned} \quad (5.4.100)$$

где  $\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0) = UV'_{\text{eff}}(n_0)U^+$  и

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) = & U\sigma_\beta^{(0)'}(\mathbf{k})U^+ \Lambda_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}), \quad \tilde{L}(\xi^0) = \Lambda^{-1}(0) L'(\xi^0), \\ \tilde{N}(\mathbf{k}) = & \Lambda^{-1}(\mathbf{k}) N'(\mathbf{k}) \Lambda(\mathbf{k}), \quad \tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{k}) \mathcal{H}'(\mathbf{k}) \Lambda(\mathbf{k}), \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = & \sigma_{\alpha'\beta'}^{(0)'}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \Lambda_{\alpha'\alpha}(-\mathbf{k}) \Lambda_{\beta'\beta}(-\mathbf{k}') \end{aligned} \quad (5.4.101)$$

и  $\tilde{\mathcal{H}}_q = U\mathcal{H}_q U^+ = \sum_1 \omega_1 a_1^\dagger a_1 + E_0$  — гамильтониан свободных квазичастиц, диагональный относительно операторов  $a, a^+$  (см. (3.2.12)).

Легко видеть, что матрица  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{k})$  «перепутывает» компонент  $g_p, \varphi_p, \psi$ . Действительно, матрица  $\mathcal{H}'(\mathbf{k})$ , согласно (5.4.97), (5.4.93), может быть представлена в виде \*)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = & i \text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) [\mathcal{H}_q, \hat{\xi}_\alpha(0)] = \\ = & i \text{Sp } U\sigma'_\beta(-\mathbf{k})U^+ [\tilde{\mathcal{H}}_q, U\hat{\xi}_\alpha(0)U^+]. \end{aligned} \quad (5.4.102)$$

Заметим теперь, что оператор  $U\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})U^+$  квадратичен относительно операторов  $a, a^+$  и, следовательно, может быть выражен в виде линейной комбинации операторов  $\hat{\xi}_\beta(\mathbf{k}), U\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})U^+ = \Lambda'_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\hat{\xi}_\beta(\mathbf{k}) + c_\alpha$  ( $c_\alpha$  — некоторые  $c$ -числа). Согласно (5.4.87)  $\text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k})\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ ,  $\text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k}) = 0$ , и поэтому, используя определение (5.4.99) величины  $\Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ , имеем  $\Lambda'_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \Lambda_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ . Отсюда следует, что

$$i[\tilde{\mathcal{H}}_q, U\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})U^+] = (\Lambda(\mathbf{k})\tilde{\mathcal{H}}'(\mathbf{k})\Lambda^{-1}(\mathbf{k}))_{\alpha\beta} \{U\hat{\xi}_\beta(\mathbf{k})U^+ - c_\beta\},$$

где  $\tilde{\mathcal{H}}'(\mathbf{k})$  определяется формулой

$$i[\tilde{\mathcal{H}}_q, \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})] = \tilde{\mathcal{H}}'_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\hat{\xi}_\beta(\mathbf{k}). \quad (5.4.103)$$

Так как  $\tilde{\mathcal{H}}_q = \sum_1 \omega_1 a_1^\dagger a_1 + E_0$ , то матрица  $\tilde{\mathcal{H}}'(\mathbf{k})$  не «перепутывает» компонент  $g_p, \varphi_p, \psi$ . Подставляя выражение для  $i[\tilde{\mathcal{H}}_q, U\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})U^+]$  в (5.4.102) и снова замечая, что  $\text{Sp } \sigma'_\beta(\mathbf{k}) = 0$ ,  $\text{Sp } \sigma'_\beta(-\mathbf{k})\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k}') = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , получим  $\tilde{\mathcal{H}}'(\mathbf{k}) = \Lambda(\mathbf{k})\tilde{\mathcal{H}}'(\mathbf{k})\Lambda^{-1}(\mathbf{k})$ . Сравнение этой формулы с (5.4.101)

\*) В этой и последующих формулах под  $\hat{\xi}(0)$  мы всегда будем понимать  $\hat{\xi}(x)|_{x=0}$ .

показывает, что  $\hat{\mathcal{H}}'(\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k})$  и, следовательно, матрица  $\hat{\mathcal{H}}'(\mathbf{k})$  не «перепутывает» компонент  $g_p$  Ф.р.  $\psi$  как и утверждалось выше.

Из соотношения  $U\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{k})U^+ = \Lambda_{\alpha\beta}\hat{\xi}_\beta(\mathbf{k}) + c_\alpha$  и (5.4.101) следует также, что

$$\begin{aligned}\tilde{L}_\alpha(\xi^0) &= i \operatorname{Sp} \tilde{w}(n_0) [\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)], & \tilde{w}(n_0) &= U w(n_0) U^+, \\ \tilde{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) &= i \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_\beta(-\mathbf{k}) [\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)].\end{aligned}\quad (5.4.104)$$

Мы получили интегральное уравнение для операторов  $\tilde{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$ . Для нахождения функций Грина  $\mathcal{F}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  нам необходимо знать еще оператор  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  или связанный с ним оператор

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = UU_0\rho(\mathbf{k}, \omega)U_0^+U^+.$$

Легко показать, используя (5.4.85) и соотношение (5.4.95) с  $M = M_0 = 0$ , что оператор  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) &= -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\tilde{\mathcal{H}}\tau} e^{i\tilde{\mathcal{H}}_0\tau} \{ [\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0), \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)] - \\ &- \omega \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) + [\tilde{\xi}(\mathbf{k}, n_0), \tilde{w}(n_0)] - i\tilde{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) \tilde{Q}_\alpha(-\mathbf{k}, \omega) \} e^{-i\tilde{\mathcal{H}}_0\tau},\end{aligned}\quad (5.4.105)$$

где  $\tilde{\xi}(\mathbf{k}; n_0) = UU_0\hat{\xi}(\mathbf{k})U_0^+U^+$ , величина  $\tilde{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  определяется формулой

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) &= \Lambda_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{k}) \tilde{Q}_\beta(\mathbf{k}, \omega) = i \operatorname{Sp} \tilde{w}(n_0) [\tilde{\xi}(-\mathbf{k}, n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)] + \\ &+ i \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) [\tilde{V}_{\text{eff}}(n_0), \hat{\xi}_\alpha(0)]\end{aligned}\quad (5.4.106)$$

и  $\tilde{w}(n_0) = UU_0 w U_0^+ U^+$ . Фурье-компоненты функций Грина  $\mathcal{F}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , согласно (5.4.86) равны

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \tilde{h}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_\alpha(-\mathbf{k}) \tilde{\xi}'(0; n_0) + \operatorname{Sp} \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) \tilde{\xi}'(0, n_0), \\ \tilde{\xi}'(\mathbf{x}; n_0) &= UU_0 \xi'(\mathbf{x}) U_0^+ U^+, & \tilde{h}(\mathbf{k}, \omega) &= \Lambda^{-1}(\mathbf{k}) \tilde{h}(\mathbf{k}, \omega).\end{aligned}\quad (5.4.107)$$

Функции  $\tilde{h} = \Lambda^{-1}\tilde{h}$ , как следует из (5.4.83), (5.4.101), удовлетворяют уравнению

$$\{-i\omega - \hat{\mathcal{H}}(\mathbf{k}) - \tilde{N}(\mathbf{k})\}_{\alpha\beta} \tilde{h}_\beta(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega).\quad (5.4.108)$$

Уравнения (5.4.100), (5.4.105), (5.4.108) позволяют развить теорию возмущений для нахождения величин  $\tilde{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\tilde{h}(\mathbf{k}, \omega)$  в том случае, когда взаимодействие между квазичастицами  $\tilde{V}_{\text{eff}}$  мало (т. е. мала величина  $v(\mathbf{k})$ ), но величина  $n_0 v(\mathbf{k})$  не мала. Тем самым можно найти, согласно (5.4.107) и функции Грина  $\mathcal{F}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  в кинетическом приближении для газа квазичастиц.

До сих пор мы рассматривали случай, когда взаимодействие между квазичастицами было мало в силу малости величины  $v(\mathbf{k})$ . Рассмотрим теперь тот случай, когда взаимодействие между квазичастицами также мало, но малость взаимодействия обуславливается малостью не  $v(\mathbf{k})$ , а малостью радиуса действия  $r_0$  по сравнению со средней де-Бройлевской длиной волны квазичастиц  $\lambda$  и по сравнению со средним расстоянием между конденсатными

частицами  $(\mathcal{V}/n_0)^{1/2}$ ,  $r_0 \ll \lambda$ ,  $(\mathcal{V}/n_0)^{1/2}$  Мы будем пользоваться при этом методикой, аналогичной методике, развитой в разделе 5.2.3 при построении квантовых вириальных разложений для кинетических уравнений нормальных систем.

Обратимся снова к уравнению (5.4.76). Используя формулу (5.4.94), получим, согласно (5.4.95),

$$\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) - i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} \{ [V, \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k})] - \\ - i\bar{\sigma}_\gamma^{(0)}(\mathbf{k}) \bar{N}_{\gamma\beta}(-\mathbf{k}) - i\bar{L}_\gamma(\xi^0) \bar{\sigma}_{\gamma\beta}^{(0)}(0; \mathbf{k}) \} (e^\tau (\hat{\mathcal{X}}(-\mathbf{k}) + \bar{N}(-\mathbf{k}))_{\beta\alpha}) e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}, \quad (5.4.109)$$

где  $\bar{\mathcal{H}}$  — полный «гамильтониан» системы. Учтем далее, что

$$[\mathcal{H}_0, \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k})] = i\bar{\sigma}_\beta^{(0)}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{X}}_{\beta\alpha}(-\mathbf{k}) - i\bar{L}_\beta(\xi^0) \bar{\sigma}_{\beta\alpha}^{(0)}(0, \mathbf{k})$$

(см. (5.4.49) и (5.4.74), (5.4.78)). Используя это равенство, можно представить (5.4.109) в виде

$$\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) = \bar{\sigma}_\alpha^{(0)}(\mathbf{k}) - \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \frac{\partial}{\partial\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} \bar{\sigma}_\beta^{(0)}(\mathbf{k}) e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} (e^\tau (\hat{\mathcal{X}}(-\mathbf{k}) + \bar{N}(-\mathbf{k}))_{\beta\alpha})$$

откуда, интегрируя по частям, получим

$$\bar{\sigma}(\mathbf{k}) = \eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} \bar{\sigma}^{(0)}(\mathbf{k}) e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} (\hat{\mathcal{X}}(-\mathbf{k}) + \bar{N}(-\mathbf{k})). \quad (5.4.110)$$

Это уравнение позволяет найти  $\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k})$ , если известно  $\bar{N}(\mathbf{k})$ . В свою очередь, чтобы найти  $\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  обратимся к формуле (5.4.78), из которой, согласно (5.4.110), следует, что

$$\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i\eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \text{Sp} \bar{\sigma}_\gamma^{(0)}(-\mathbf{k}) e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} [V, \hat{\xi}_\alpha(0)] e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} (e^\tau (\hat{\mathcal{X}}(\mathbf{k}) + \bar{N}(\mathbf{k}))_{\gamma\beta}). \quad (5.4.111)$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную величину  $\bar{N}(\mathbf{k})$  и может быть решено методом теории возмущений, если плотность частиц конденсата мала (радиус действия сил должен быть при этом малым не только по сравнению со средним расстоянием между частицами конденсата, но и по сравнению с де-бройлевской длиной волны квазичастиц). К решению этого уравнения мы вернемся в следующем разделе, здесь же получим уравнения для определения  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ .

Используя формулы (5.4.94), (5.4.95) с  $M = M_0 = 0$ , легко преобразовать уравнение (5.4.85) для  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  к виду

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} \{ [\hat{\xi}(\mathbf{k}), \omega] - \omega\rho(\mathbf{k}, \omega) - i\bar{\sigma}_\alpha(\mathbf{k}) \bar{Q}_\alpha(-\mathbf{k}, \omega) \} e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau}, \quad (5.4.112)$$

где величина  $\bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  связана с  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением (5.4.84). Это уравнение позволяет развить теорию возмущений для определения  $\bar{Q}_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\rho(\mathbf{k}, \omega)$  в случае малого радиуса действия сил между частицами.

Знание величин  $\bar{N}$  и  $\bar{Q}$  в свою очередь позволяет найти величину  $\bar{h}$  (см. (5.4.83)), а тем самым и функцию Грина  $\mathcal{G}_{\xi\xi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ .

5.4.6. Одночастичные функции Грина вырожденных бозе-систем в кинетическом приближении. Перейдем теперь к нахождению одночастичных функций Грина  $\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  вырожденных бозе-систем в кинетическом приближении. Эти функции определяются формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= -i\theta(t) \left\{ e^{i\bar{\mathcal{E}}t} \hat{\psi}^+(\mathbf{x}) e^{-i\bar{\mathcal{E}}t} \hat{\psi}(0) \right\}, \\ \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= -i\theta(t) \left\{ e^{i\bar{\mathcal{E}}t} \hat{\psi}(\mathbf{x}) e^{-i\bar{\mathcal{E}}t} \hat{\psi}(0) \right\}.\end{aligned}\quad (5.4.113)$$

Взаимодействие между квазичастицами, так же как и в предыдущем разделе, будем считать малым. Это взаимодействие описывается гамильтонианом  $V_{\text{eff}}$ , содержащим, согласно (5.4.91), члены, пропорциональные  $n_0^{1/2}v(\mathbf{k})$  и  $v(\mathbf{k})$ . Как мы уже говорили, величина  $n_0$  считается обратно пропорциональной  $v(\mathbf{k})$ ; поэтому члены, пропорциональные  $n_0^{1/2}v(\mathbf{k})$  (эти члены образуют гамильтониан  $V_3$ ), содержат в действительности  $v(\mathbf{k})^{1/2}$ . Таким образом, в нашей задаче имеется малый параметр, пропорциональный  $v(\mathbf{k})^{1/2}$ ; мы обозначим его через  $\lambda$ . Тогда гамильтониан  $V_3$  будет пропорционален  $\lambda$ , гамильтониан  $V_4$  (см. (3.2.4)) — пропорционален  $\lambda^2$ .

Покажем, что функции Грина (5.4.113) могут быть выражены через введенные уже нами две функции  $\tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \text{sh } \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) + \text{ch } \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \text{ch } \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) + \text{sh } \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega),\end{aligned}\quad (5.4.114)$$

где  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — величины, определяющие унитарное преобразование (см. (3.2.13), (3.2.14)). Заметим с этой целью, что, согласно (5.4.54), (5.4.99),  $\text{Sp } \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) \hat{\psi} = 0$ ,  $\text{Sp } \tilde{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{k}) \hat{\xi}_{\beta}(0) = \delta_{\alpha\beta}$ . Учитывая далее (5.4.107), мы и получим, используя (3.2.12), формулы (5.4.114).

Функции  $\tilde{h}_{\psi}$ ,  $\tilde{h}_{\psi^*}$  определяются уравнениями (5.4.108) и могут быть найдены в рамках теории возмущений по параметру  $\lambda$ . В нулевом приближении по  $\lambda$  величины  $\tilde{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ , входящие в (5.4.108), равны нулю,  $\tilde{N}_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$ . Поэтому уравнения (5.4.108) для  $\tilde{h}_{\psi}$  и  $\tilde{h}_{\psi^*}$  в нулевом приближении приобретают вид

$$-i(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{Q}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega), \quad -i(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{Q}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega)$$

(мы учли, что, согласно (5.4.104),  $\hat{K}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = -i\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $\hat{K}_{\psi^*\psi^*}(\mathbf{k}) = i\omega_{\mathbf{k}}$ ).

Замечая, что  $\text{Sp } \tilde{\omega}(n_0) \hat{\psi} = 0$ , легко видеть, что, согласно формулам (5.4.106), (5.4.54), источники  $\tilde{Q}_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$  для  $\xi = \hat{\psi}$  определяются формулами

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) &= i \text{Sp } \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) [\tilde{V}_4, \hat{\psi}(0)] - i \text{sh } \varphi_{\mathbf{k}}, \\ \tilde{Q}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) &= i \text{Sp } \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) [\tilde{V}_4, \hat{\psi}^+(0)] + i \text{ch } \varphi_{\mathbf{k}}, \\ \tilde{Q}_{\xi_p}(\mathbf{k}, \omega) &= i \text{Sp } \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) [n_0^{1/2} \tilde{V}_3 + \tilde{V}_4, \hat{f}_p(0)], \\ \tilde{Q}_{\varphi_p}(\mathbf{k}, \omega) &= i \text{Sp } \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, \omega) [n_0^{1/2} \tilde{V}_3 + \tilde{V}_4, \hat{\omega}_p(0)]\end{aligned}$$

и, следовательно, в нулевом приближении по  $\lambda$  отличны от нуля только  $\tilde{Q}_{\psi}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \text{sh } \varphi_{\mathbf{k}}$  и  $\tilde{Q}_{\psi^*}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = i \text{ch } \varphi_{\mathbf{k}}$ . Поэтому функции Грина  $\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}$ ,

$\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}$  в нулевом приближении по  $\lambda$  равны

$$\mathcal{G}_{\psi+\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-\omega + \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mathcal{Y}^{\sigma-1} n_0 v(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}, \quad \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\mathcal{Y}^{\sigma-1} n_0 v(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}. \quad (5.4.115)$$

Полюсы этих функций определяют спектр квазичастиц в вырожденном газе бозонов.

Разъясним теперь, как находить функции Грина  $\mathcal{G}_{\psi+\psi}^{(+)}$ ,  $\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}$  с учетом членов порядка  $\lambda$  и  $\lambda^2$ . Заметим с этой целью, что величины  $\tilde{N}_{\psi\psi}$ ,  $\tilde{N}_{\psi\psi^*}$  в первом порядке по  $\lambda$  равны нулю,  $\tilde{N}_{\psi\psi}^{(1)} = \tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(1)} = 0$ . Действительно, используя формулы (5.4.101), имеем

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\psi\psi}^{(1)}(\mathbf{k}) &= i \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_{\psi}^{(0)}(-\mathbf{k}) [n_0^{1/2} \tilde{V}_3 - \mu^{(1)} \tilde{N}, \hat{\psi}(0)], \\ \tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k}) &= i \operatorname{Sp} \tilde{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(-\mathbf{k}) [n_0^{1/2} \tilde{V}_3 - \mu^{(1)} \tilde{N}, \hat{\psi}(0)], \end{aligned}$$

где  $\tilde{N} = U \sum_{l \neq 0} a_l^+ a_l$  и  $\mu^{(1)}$  — поправка первого порядка по  $\lambda$  к химическому потенциалу (как мы уже говорили, в качестве независимой переменной выбирается  $n_0$ , а не  $\mu$ ). Легко видеть, что члены, содержащие  $V_3$ , согласно (5.4.101), не дают вклада в  $\tilde{N}^{(1)}$ . Поэтому, используя (5.4.99), имеем

$$\tilde{N}_{\psi\psi}^{(1)}(\mathbf{k}) = i\mu^{(1)} (\operatorname{ch}^2 \varphi_{\mathbf{k}} + \operatorname{sh}^2 \varphi_{\mathbf{k}}), \quad \tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k}) = 2i\mu^{(1)} \operatorname{ch} \varphi_{\mathbf{k}} \operatorname{sh} \varphi_{\mathbf{k}}.$$

Напомним теперь, что из уравнения (3.2.6) можно найти химический потенциал как функцию  $n_0$ . Нетрудно показать, что при этом первая поправка к  $\mu$  по параметру  $\lambda$  будет равна нулю,  $\mu^{(1)} = 0$ . (К этому результату можно прийти также, используя соотношение (5.4.57), являющееся следствием инвариантности гамилтониана относительно градиентных преобразований.)

Легко показать, что уравнения (5.4.108) для  $\tilde{h}_{\alpha}$  с точностью до членов, квадратичных по  $\lambda$ , имеют вид

$$\begin{aligned} & -i \left( \omega + \omega_{p-\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{p+\frac{\mathbf{k}}{2}} \right) \tilde{h}_{g_p}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{N}_{g_p\psi}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & \quad - \tilde{N}_{g_p\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \\ & -i \left( \omega - \omega_{p-\frac{\mathbf{k}}{2}} - \omega_{p+\frac{\mathbf{k}}{2}} \right) \tilde{h}_{\varphi_p}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{N}_{\varphi_p\psi}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & \quad - \tilde{N}_{\varphi_p\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \\ & -i \left( \omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\tilde{N}_{\psi\psi}^{(2)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(2)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) - \right. \\ & \quad - \sum_p \tilde{N}_{\psi g_p}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{g_p}(\mathbf{k}, \omega) - \sum_p \tilde{N}_{\psi\varphi_p}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\varphi_p}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & \quad \left. - \sum_p \tilde{N}_{\psi\varphi_p^*}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\varphi_p^*}(\mathbf{k}, \omega) \right) = \operatorname{sh} \varphi_{\mathbf{k}}, \\ & -i \left( \omega + \omega_{\mathbf{k}} - i\tilde{N}_{\psi^*\psi^*}^{(2)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{N}_{\psi^*\psi}^{(2)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) - \right. \\ & \quad - \sum_p \tilde{N}_{\psi^* g_p}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{g_p}(\mathbf{k}, \omega) - \sum_p \tilde{N}_{\psi^*\varphi_p}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\varphi_p}(\mathbf{k}, \omega) - \\ & \quad \left. - \sum_p \tilde{N}_{\psi^*\varphi_p^*}^{(1)}(\mathbf{k}) \tilde{h}_{\varphi_p^*}(\mathbf{k}, \omega) \right) = \operatorname{ch} \varphi_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (5.4.116)$$

Мы видим, что в эти уравнения входят величины  $\tilde{N}_{\alpha\beta}^{(1)}$ , определяемые формулой

$$\tilde{N}_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}) = i \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_{\beta}^{(0)}(-\mathbf{k}) [n_0^{1/2} \tilde{V}_3, \hat{\xi}_{\alpha}(0)],$$

и величина  $\tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(2)}(\mathbf{k})$ , определяемая формулой

$$\tilde{N}_{\psi\psi^*}^{(2)}(\mathbf{k}) = i \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(-\mathbf{k}) [\tilde{V}_4 \psi(0)] - i\mu^{(2)} \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(-\mathbf{k}) [\hat{N}, \psi(0)]$$

(мы учли, что, согласно (5.4.99),  $\operatorname{Sp} \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k}) \hat{\xi}_{\alpha}(0) = 0$ , где  $\bar{\sigma}_{\psi^*}^{(1)}(\mathbf{k})$  — поправка первого порядка по  $\lambda$  к  $\bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(\mathbf{k})$ ). Подчеркнем, что коэффициенты  $\tilde{N}_{\alpha\beta}$  в уравнениях (5.4.116) определяются только оператором  $\bar{\sigma}_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{k})$ , соответствующим нулевому приближению по  $\lambda$  для операторов  $\bar{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{k})$ . Решая первые два уравнения (5.4.116) относительно  $\tilde{h}_{\mathcal{G}}$  и  $\tilde{h}_{\Phi}$  и подставляя решение в третье и четвертое уравнение, получим уравнения для нахождения  $\tilde{h}_{\psi}$ ,  $\tilde{h}_{\psi^*}$ . Вычислив  $\tilde{h}_{\psi}$  и  $\tilde{h}_{\psi^*}$ , можно по формулам (5.4.114) найти функции Грина (5.4.113) с учетом членов, пропорциональных  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \gamma^{0-1} n_0 \nu(\mathbf{k})}{(\omega - \Omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}})(-\omega - \Omega_{\mathbf{k}} - i\gamma_{\mathbf{k}})}, \\ \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\gamma^{0-1} n_0 \nu(\mathbf{k})}{(\omega - \Omega_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}})(-\omega - \Omega_{\mathbf{k}} - i\gamma_{\mathbf{k}})}, \end{aligned} \quad (5.4.117)$$

где  $\Omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^{(2)}$  — энергия квазичастиц с учетом взаимодействия между ними (поправку к энергии квазичастиц  $\omega_{\mathbf{k}}^{(2)}$ , пропорциональную  $\lambda^2$ , мы не будем здесь выписывать) и  $\gamma_{\mathbf{k}}$  — обратное время жизни квазичастицы, определяемое формулой

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}} &= (e^{\beta\omega_{\mathbf{k}}} - 1) \frac{\pi n_0}{\gamma^2} \sum_{12} \{F_I^2(1; 2, \mathbf{k}) \delta(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_2 - \omega_1) n_1 (1 + n_2) + \\ &+ F_I^2(\mathbf{k}; 1, 2) \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_1 - \omega_2) n_1 n_2\}, \quad n_1 = (e^{\beta\omega_1} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $F_I(1; 2, 3)$  — амплитуда процессов взаимодействия трех квазичастиц

$$\begin{aligned} F_I(1; 2, 3) &= \operatorname{ch} \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 \operatorname{ch} \varphi_3 \{(\nu(2) + \nu(3))(1 + \operatorname{th} \varphi_1 \operatorname{th} \varphi_2 \operatorname{th} \varphi_3) + \\ &+ (\nu(1) + \nu(3))(\operatorname{th} \varphi_3 + \operatorname{th} \varphi_1 \operatorname{th} \varphi_2) + (\nu(1) + \nu(2))(\operatorname{th} \varphi_2 + \operatorname{th} \varphi_1 \operatorname{th} \varphi_3)\} \delta_{2+3, 1}, \end{aligned}$$

Перейдем теперь к нахождению функций Грина (5.4.113) в кинетическом приближении в том случае, когда мала не амплитуда взаимодействия между квазичастицами, а мал радиус взаимодействия между частицами. В этом случае при вычислении величин  $\tilde{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  (см. 5.4.111) можно пренебречь в нулевом приближении слагаемыми, содержащими корреляционные функции  $g_p$ ,  $\varphi_p$ , по сравнению со слагаемыми, в которые входит  $n_0$ . Это связано с тем, что при  $r_0 \ll \lambda$  (т. е. в области низких температур) функции  $g_p$ ,  $\varphi_p$  отличны от нуля только в очень небольшой области импульсного пространства, стремящейся к нулю вместе с температурой. Кроме малого параметра  $r_0/\lambda$ , в нашем распоряжении имеется еще один малый параметр  $n_0 r_0^3/\gamma \ll 1$ . Легко видеть, что в пренебрежении этими параметрами величины  $\tilde{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  обращаются в нуль. Поэтому в первом исчезающем приближении по  $n_0$  формулу (5.4.111)

можно записать в виде

$$\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = -i \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \text{Sp}_0 \sigma_V^{(0)}(-\mathbf{k}) e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} [V, \hat{\xi}_\alpha(0)] e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} (e^{\tau\hat{\mathcal{K}}}(\mathbf{k}))_{\gamma\beta} \quad (5.4.118)$$

где  $\text{Sp}_0$  означает, что шпур вычисляется в первом не исчезающем приближении по  $n_0$  в пренебрежении корреляционными функциями  $g_p, \varphi_p$ .

Покажем, что в пренебрежении корреляционными функциями  $g_p, \varphi_p$  величины  $\bar{N}_{g_p\psi^*}, \bar{N}_{g_p\psi^*}$  начинаются с членов более высокого порядка чем  $n_0$ . Так как, согласно (3.1.33), имеет место разложение

$$\rho^{(0)}(g, \varphi) = |0\rangle\langle 0| + \sum_1 |1\rangle g_1 \langle 1| - \sum_1 |0\rangle g_1 \langle 0| + \dots,$$

то в пренебрежении величинами  $g_l, \varphi_l$  статистический оператор  $\rho^{(0)}(g, \varphi)$  можно заменить на вакуумный проектор  $|0\rangle\langle 0|$ , в результате чего формулы (5.4.71) приобретут вид

$$\bar{\sigma}_\psi^{(0)}(-\mathbf{k}) \approx \gamma^{1/2} U_0^+ a_{\mathbf{k}}^+ |0\rangle\langle 0| U_0, \quad \bar{\sigma}_{\psi^*}^{(0)}(-\mathbf{k}) \approx \gamma^{1/2} U_0^+ |0\rangle\langle 0| a_{-\mathbf{k}} U_0. \quad (5.4.119)$$

Используя эти формулы, можно, согласно (5.4.118), представить  $\bar{N}_{g_p\psi^*}$  в виде

$$\bar{N}_{g_p\psi^*}(\mathbf{k}) = -i\eta\gamma^{1/2} \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\varepsilon_{\mathbf{k}}} \langle -\mathbf{k} | U_0 e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} [V, \hat{f}_p(0)] e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} U_0^+ |0\rangle_0$$

(индекс 0 при матричном элементе означает, что он вычисляется в первом не исчезающем приближении по  $n_0$ ). Заменяя под знаком коммутатора  $V$  на  $\bar{\mathcal{H}} - \mathcal{H}_0$  ( $\bar{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \mu N$ ) и замечая, что

$$[\mathcal{H}_0, \hat{f}_p(0)] = - \sum_{\mathbf{k}} k v \hat{f}_p(\mathbf{k}),$$

$$e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} [\bar{\mathcal{H}}, \hat{f}_p(0)] e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} = i \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} \hat{f}_p(0) e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau},$$

получим после интегрирования по частям

$$\bar{N}_{g_p\psi^*}(\mathbf{k}) = -\eta(\eta + i\varepsilon_{\mathbf{k}} + ikv) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\varepsilon_{\mathbf{k}}} \langle -\mathbf{k} | U_0 e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} \hat{f}_p(\mathbf{k}) e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} U_0^+ |0\rangle_0,$$

где  $\hat{f}_p(\mathbf{k}) = a_{p-\frac{k}{2}}^+ a_{p+\frac{k}{2}} - \frac{n^{1/2}\delta}{0} a_{p+\frac{k}{2}}^+ - \frac{n^{1/2}\delta}{0} a_{p-\frac{k}{2}}$ ,  $a$  и  $v = p/m$ . Производя разложение оператора  $U_0$  в ряд по степеням  $n_0$ :

$$U_0 = 1 - n_0^{1/2} (a_0^+ - a_0) + \frac{1}{2} n_0 (a_0^+ - a_0)^2 + \dots \quad (5.4.120)$$

(см (5.4.73)), нетрудно видеть, что с точностью до членов, линейных по  $n_0$  включительно, имеет место равенство

$$\bar{N}_{g_p\psi^*}(\mathbf{k}) = -\eta(\eta + i\varepsilon_{\mathbf{k}} + ikv) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\tau\varepsilon_{\mathbf{k}}} n_0^{1/2} \times \\ \times \left\{ \langle -\mathbf{k} | e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} a_{p-\frac{k}{2}}^+ a_{p+\frac{k}{2}} e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} a_0^+ |0\rangle - \delta_{p+\frac{k}{2}, 0} \langle -\mathbf{k} | e^{-i\bar{\mathcal{E}}\tau} a_{-\mathbf{k}}^+ e^{i\bar{\mathcal{E}}\tau} |0\rangle \right\},$$



откуда следует, что  $\bar{N}_{g_p \psi^*}(\mathbf{k}) = 0$  и, следовательно,

$$\bar{N}_{g_p \psi} = \bar{N}_{g_p \psi^*}^* = 0. \quad (5.4.121)$$

Аналогичным образом можно показать, что в рассматриваемом приближении

$$\bar{N}_{\varphi_p \psi} = \bar{N}_{\varphi_p \psi^*} = 0.$$

Легко убедиться, кроме того, что если пренебречь величинами  $g_p, \varphi_p, n_0$ , то  $\bar{Q}_{g_p} = \bar{Q}_{\varphi_p} = 0$  (см. (5.4.84)). Мы увидим далее, что величины  $\bar{N}_{\psi\psi}, \bar{N}_{\psi\psi^*}$  пропорциональны  $n_0$ . Поэтому из формул (5.4.121), (5.4.83) следует, что в уравнениях для  $\bar{h}_{\psi}, \bar{h}_{\psi^*}$  можно пренебречь слагаемыми, содержащими  $\bar{h}_{g_p}, \bar{h}_{\varphi_p}$ .

Так как, согласно формулам (5.4.84), в пренебрежении величинами  $g_p, \varphi_p, n_0$  имеем  $\bar{Q}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) = i, \bar{Q}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ , то уравнения (5.4.83) приобретают вид

$$\begin{aligned} (-\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\bar{N}_{\psi^*\psi^*}(\mathbf{k}))\bar{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) + i\bar{N}_{\psi^*\psi}(\mathbf{k})\bar{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) &= 1, \\ (\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}))\bar{h}_{\psi}(\mathbf{k}, \omega) - i\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k})\bar{h}_{\psi^*}(\mathbf{k}, \omega) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.122)$$

Перейдем к вычислению величин  $\bar{N}_{\psi\psi} = \bar{N}_{\psi^*\psi^*}$  и  $\bar{N}_{\psi\psi^*} = \bar{N}_{\psi^*\psi}$ , входящих в это уравнение. Из (5.4.118), (5.4.119) следует, что

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = i\eta \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}\tau} \langle 0 | U_0 e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} [\bar{\mathcal{H}} - \mathcal{H}_0, a_{\mathbf{k}}] e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} U_0^+ | \mathbf{k} \rangle_0.$$

Так как  $e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} [\bar{\mathcal{H}}, a_{\mathbf{k}}] e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} = i \frac{\partial}{\partial \tau} e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} a_{\mathbf{k}} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau}$ ,  $[\mathcal{H}_0, a_{\mathbf{k}}] = -\varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$ , то легко видеть, что

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = \eta^2 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}\tau} \langle 0 | U_0 e^{-i\bar{\mathcal{H}}\tau} a_{\mathbf{k}} e^{i\bar{\mathcal{H}}\tau} U_0^+ | \mathbf{k} \rangle.$$

Используя формулу (5.4.120), получим отсюда

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) &= \eta^2 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} (1 - i\mu_1\tau) + \\ &+ \eta^2 n_0 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{-i\varepsilon_{\mathbf{k}}\tau} \langle \mathbf{k}, 0 | e^{i\mathcal{H}\tau} | \mathbf{k}, 0 \rangle - \eta^2 n_0 \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} (\delta_{\mathbf{k}, 0} + 1), \\ &| \mathbf{k}, 0 \rangle = a_{\mathbf{k}}^+ a_0 | 0 \rangle. \end{aligned}$$

(Мы учли здесь, что разложение химического потенциала  $\mu$  в ряд по степеням  $n_0$ ,  $\mu = \mu_1 + \dots$ , начинается с членов, линейных по  $n_0$ , см. (5.4.123).) Отметим, что члены, квадратичные по  $n_0$ , нельзя получить с помощью формулы (5.4.118), так как в выражении (5.4.111) мы отбросили экспоненту  $e^{\tau\bar{N}}$ , которая играет важную роль в сокращении секулярных членов в высших приближениях.

Замечая, что

$$e^{\eta\tau} e^{\mp i\mathcal{H}\tau} \theta(-\tau) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE R_{\mp}(E) e^{\mp iE\tau}, \quad (5.4.123)$$

где  $R_{\mp}(E) = (E - \mathcal{H} \mp i\eta)^{-1}$  — резольвента оператора  $\mathcal{H}$ , получим

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = \eta + i\mu_1 - \eta n_0 - \eta n_0 \delta_{\mathbf{k},0} + i\eta^2 n_0 \langle \mathbf{k}, 0 | R_+(\varepsilon_{\mathbf{k}}) | \mathbf{k}, 0 \rangle.$$

Так как, согласно (2.1.22),  $R_{\pm}(E) = R_{\pm}^0(E) + R_{\pm}^0(E) T_{\pm}(E) R_{\pm}^0(E)$ , то

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = \eta + i\mu_1 - \eta n_0 \delta_{\mathbf{k},0} - i n_0 \langle \mathbf{k}, 0 | T_+(\varepsilon_{\mathbf{k}}) | \mathbf{k}, 0 \rangle.$$

Переходя в этой формуле к термодинамическому пределу  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  (при этом  $n_0 \delta_{\mathbf{k},0} \rightarrow n_0 / \mathcal{V} \cdot (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k})$ ) и устремляя затем  $\eta$  к нулю,  $\eta \rightarrow +0$ , найдем

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = i\mu_1 - i n_0 \langle \mathbf{k}, 0 | T_+(\varepsilon_{\mathbf{k}}) | \mathbf{k}, 0 \rangle. \quad (5.4.124)$$

Поступая аналогичным образом, легко видеть, что

$$\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k}) = \eta(\eta + 2i\varepsilon_{\mathbf{k}}) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} e^{i\varepsilon_{\mathbf{k}}\tau} \langle -\mathbf{k} | U_0 e^{-i\mathcal{H}\tau} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathcal{H}\tau} U_0^+ | 0 \rangle_0,$$

откуда, согласно (5.4.120), имеем

$$\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k}) = \frac{n_0}{2} \eta(\eta + 2i\varepsilon_{\mathbf{k}}) \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\eta\tau} \langle -\mathbf{k}, \mathbf{k} | e^{i\mathcal{H}\tau} | 0, 0 \rangle.$$

Используя формулы (5.4.123), (2.1.22), нетрудно представить это выражение в виде

$$\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} n_0 \langle -\mathbf{k}, \mathbf{k} | T_+(0) | 0, 0 \rangle + \frac{1}{2} \eta n_0 \delta_{\mathbf{k},0},$$

откуда после предельных переходов  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow +0$  найдем

$$\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} n_0 \langle -\mathbf{k}, \mathbf{k} | T_+(0) | 0, 0 \rangle. \quad (5.4.125)$$

Перейдем теперь к определению химического потенциала  $\mu \approx \mu_1$  в области малых значений  $n_0/\mathcal{V}$ . С этой целью обратимся к формуле (5.4.57). Полагая в ней  $f_{\mathbf{p}}(x) = f_{\mathbf{p}}^0$ ,  $w_{\mathbf{p}}(x) = w_{\mathbf{p}}^0$ ,  $\psi(x) = (n_0/\mathcal{V})^{1/2} (f_{\mathbf{p}}^0, w_{\mathbf{p}}^0)$  — равновесные значения функций  $f_{\mathbf{p}}$ ,  $w_{\mathbf{p}}$  и учитывая, что для равновесных значений  $f_{\mathbf{p}}$ ,  $w_{\mathbf{p}}$ ,  $\psi$  статистический оператор  $\sigma(\xi) \equiv \sigma(f, w, \psi)$  совпадает с распределением Гиббса  $w$ , получим

$$[\hat{N}, w] = \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} (\sigma_{\psi}(0) - \sigma_{\psi^*}(0)) + 2 \sum_{\mathbf{p}} \left\{ w_{\mathbf{p}}^0 \sigma_{w_{\mathbf{p}}}(0) - w_{\mathbf{p}}^{0*} \sigma_{w_{\mathbf{p}}^*}(0) \right\},$$

откуда, согласно (5.4.75), (5.4.68),

$$[\hat{N}, w] = \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} (\bar{\sigma}_{\psi}(0) - \bar{\sigma}_{\psi^*}(0)) + 2 \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \varphi_{\mathbf{p}}^0 \bar{\sigma}_{\varphi_{\mathbf{p}}}(0) - \varphi_{\mathbf{p}}^{0*} \bar{\sigma}_{\varphi_{\mathbf{p}}^*}(0) \right\}. \quad (5.4.126)$$

Используя эту формулу и определения (5.4.78) величин  $\bar{N}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ , имеем

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\psi\psi}(0) - \bar{N}_{\psi\psi^*}(0) &= -i \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{-1/2} \text{Sp } w [\hat{N}, [V, \hat{\psi}(0)]] + \\ &+ 2 \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} \left( \varphi_{\mathbf{p}}^{0*} \bar{N}_{\psi\varphi_{\mathbf{p}}}(0) - \varphi_{\mathbf{p}}^0 \bar{N}_{\psi\varphi_{\mathbf{p}}^*}(0) \right). \end{aligned}$$

Так как  $[\hat{N}, [V, a_0]] = [V, a_0] = [\mathcal{H} - \mu\hat{N}, a_0]$ , то, учитывая что  $[\omega \mathcal{H} - \mu\hat{N}] = 0$  (см. (5.4.62)) получим

$$\bar{N}_{\psi\psi}(0) - \bar{N}_{\psi\psi^*}(0) = 2 \left( \frac{n_0}{\mathcal{V}} \right)^{-1/2} \sum_p \left( \varphi_p^{0+} \bar{N}_{\psi\psi_p^*}(0) - \varphi_p^0 \bar{N}_{\psi\psi_p}(0) \right). \quad (5.4.127)$$

Эта формула является точной. Пренебрегая в ней корреляционной функцией  $\varphi_p^0$  и используя приближенные формулы (5.4.124), (5.4.125) для  $\bar{N}_{\psi\psi}$  и  $\bar{N}_{\psi\psi^*}$  найдем

$$\mu_1 = \frac{1}{2} n_0 \langle 0, 0 | T_+(0) | 0, 0 \rangle. \quad (5.4.128)$$

(Как мы уже говорили, аналогичным образом может быть определен и химический потенциал в приближении малого  $\lambda \sim v^{1/2}$ )

Таким образом, мы имеем следующие формулы для величин  $\bar{N}$ :

$$\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k}) = \bar{N}_{\psi^*\psi^*}(-\mathbf{k}) = -in_0 \langle \mathbf{k}, 0 | T_+(\varepsilon_{\mathbf{k}}) | \mathbf{k}, 0 \rangle + i \frac{n_0}{2} \langle 0, 0 | T_+(0) | 0, 0 \rangle. \quad (5.4.129)$$

$$\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k}) = \bar{N}_{\psi^*\psi}(-\mathbf{k}) = -\frac{i}{2} n_0 \langle \mathbf{k} - \mathbf{k} | T_+(0) | 0, 0 \rangle.$$

Из (5.4.122) и (5.4.86) следует, что функция Грина  $\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}$  и  $\mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}$  в кинетическом приближении в случае малого радиуса действия сил определяются формулами

$$\mathcal{G}_{\psi^+\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{-\omega + \varepsilon_{\mathbf{k}} + i\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k})}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}, \quad \mathcal{G}_{\psi\psi}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{\bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k})}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (5.4.130)$$

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = (\omega + \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\bar{N}_{\psi^*\psi^*}(\mathbf{k}))(\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} - i\bar{N}_{\psi\psi}(\mathbf{k})) + \bar{N}_{\psi\psi^*}(\mathbf{k})\bar{N}_{\psi^*\psi}(\mathbf{k})$$

(величины  $\bar{N}$  определяются формулами (5.4.129)).

Спектр колебаний в системе бозонов может быть найден из дисперсионного уравнения

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (5.4.131)$$

В области малых  $\mathbf{k}$  решение этого уравнения имеет вид  $\omega = \omega_{\mathbf{k}}^0 - i\gamma_{\mathbf{k}}$ , где

$$\omega_{\mathbf{k}}^0 = \left\{ \varepsilon_{\mathbf{k}}^2 + n_0 \varepsilon_{\mathbf{k}} \langle 0, 0 | T_+(0) | 0, 0 \rangle \right\}^{1/2},$$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \pi n_0 \sum_p |\langle \mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p} | T_-(\varepsilon_{\mathbf{k}}) | \mathbf{k}, 0 \rangle|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}).$$

Величина  $\omega_{\mathbf{k}}^0$  определяет энергию, а величина  $\gamma_{\mathbf{k}}^{-1}$  — время жизни квазичастицы

Формула для  $\omega_{\mathbf{k}}^0$  имеет ту же структуру, что и формула (3.2.19), с той лишь разницей, что вместо фурье-компоненты потенциала в нее входит точная амплитуда рассеяния бозонов с нулевой энергией.

Коэффициент затухания  $\gamma_{\mathbf{k}}$  определяется вероятностью перехода  $|\mathbf{k}, 0 \rangle \rightarrow |\mathbf{p}, \mathbf{k} - \mathbf{p} \rangle$ , при котором частица с импульсом  $\mathbf{k}$  сталкивается с конденсатной частицей, и в результате возникают частицы с импульсами  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{k} - \mathbf{p}$ . Обратим внимание на то обстоятельство, что в рассматриваемом приближении (когда мы раскладываем  $\bar{N}$  в ряд по степеням  $n_0$ ) затухание определяется столкновениями реальных частиц с энергией  $\varepsilon_{\mathbf{p}} = p^2/2m$ , а не квазичастиц с энергией  $\omega_{\mathbf{p}}^0$ , в отличие от рассмотренного выше случая, когда малым параметром является  $\lambda = v(\mathbf{k})^{1/2}$ .

Так же как и в случае малого  $\lambda$ , в рассматриваемом случае малого радиуса действия сил  $g_0$  дисперсионное уравнение (5.4.131) при  $\hbar = 0$  имеет решение  $\omega = 0$ . Можно показать, что это свойство не связано с применением теории возмущений, а связано с градиентной инвариантностью гамильтониана бозе-системы. (Доказательство основывается на использовании соотношения (5.4.57) [94]; мы не будем, однако, приводить его здесь.)

Подчеркнем еще раз, что указанное свойство спектра квазичастиц связано, во-первых, с градиентной инвариантностью гамильтониана системы, т. е. с коммутативностью гамильтониана  $\mathcal{H}$  с оператором числа частиц, и, во-вторых, со спонтанным нарушением симметрии состояния статистического равновесия по отношению к градиентным преобразованиям, т. е. с тем обстоятельством, что  $\{\psi\} \neq 0$ . При выполнении этих двух условий в системе взаимодействующих бозонов возникает безактивационная ветвь колебаний, т. е. ветвь колебаний  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ , для которой  $\omega(0) = 0$ . Это свойство является частным случаем более общей теоремы, носящей название теоремы *Боголюбова — Голдстоуна* и заключающейся в том, что при спонтанном нарушении симметрии может возникать безактивационная ветвь колебаний [19, 48].

Развитая в последних двух разделах схема нахождения низкочастотной асимптотики функций Грина вырожденных бозе-систем может быть распространена и на вырожденные (сверхтекучие) ферми-системы, при этом однако необходимо вводить антикоммутирующие внешние поля. Мы однако не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

## § 5.5. Интеграл столкновений для фононов и теория теплопроводности диэлектриков

В разделе 5.1.2 мы вывели интегралы столкновений для частиц, считая, что в процессе взаимодействия участвуют две частицы, подчиняющиеся одной и той же статистике (Бозе — Эйнштейна или Ферми — Дирака). Поступая аналогичным образом, можно получить интегралы столкновений, соответствующие другим типам взаимодействий, причем не обязательно предполагать, что все частицы (или квазичастицы), участвующие в процессе взаимодействия, подчиняются одной и той же статистике.

В этом разделе мы выведем интеграл столкновений для фононов, т. е. квазичастиц, соответствующих звуковым волнам, распространяющимся в кристаллах. Напомним предварительно, что благодаря нелинейному взаимодействию между звуковыми волнами возможны различные процессы рассеяния звуковых волн друг на друге, а также процессы рождения новых и уничтожения старых волн. На языке квазичастиц — фононов — это значит, что возможно рассеяние, а также рождение и уничтожение фононов. Простейшими процессами, которые мы будем здесь рассматривать, являются расщепление фонона на два фонона и слияние двух фононов в один фонон. В этих процессах выполняется закон сохранения энергии

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3,$$

связывающий энергии фононов  $\omega_i$ , а также закон

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + 2\pi\boldsymbol{\tau},$$

связывающий квазиимпульсы фононов  $\mathbf{k}_i$  и аналогичный закону сохранения импульса. В него входит, однако, в отличие от

точного закона сохранения, произвольный вектор обратной решетки  $\tau$  [55],

$$\tau = b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3,$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — базисные векторы обратной решетки, связанные с базисными векторами  $a_1, a_2, a_3$  кристаллической решетки соотношениями

$$b_1 = \frac{[a_2, a_3]}{(a_1, [a_2, a_3])}, \quad b_2 = \frac{[a_3, a_1]}{(a_2, [a_3, a_1])}, \quad b_3 = \frac{[a_1, a_2]}{(a_3, [a_1, a_2])}$$

и  $n_1, n_2, n_3$  — произвольные целые числа. Волновой вектор  $k$  считается лежащим в пределах первой зоны Бриллюэна, т. е. удовлетворяет условиям  $|ka_i| \leq \pi$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Чтобы написать интеграл столкновений для фононов, воспользуемся общей формулой (5.1.19) и будем считать, что гамильтониан взаимодействия фононов друг с другом имеет вид

$$V = \gamma \rho^{-1/2} \sum_{123\tau} \Phi^\tau(1, 2; 3) c_1^\dagger c_2^\dagger c_3 + \text{э. с.} \quad (5.5.1)$$

(для простоты мы не учитываем здесь поляризации фононов), где  $\Phi^\tau(12; 3)$  — амплитуда перехода  $3 \rightarrow 2 + 1$ :

$$\Phi^\tau(1, 2; 3) \equiv \Phi(1, 2; 3) \Delta(k_1 + k_2 - k_3 + 2\pi\tau), \quad \Delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

и  $c_i^\dagger, c_i$  — операторы рождения и уничтожения фононов. (При малых  $k_i$  ( $|ka_i| \ll 1$ ) величина  $|\Phi|^2$  пропорциональна произведению частот всех трех участвующих в процессе фононов.) В результате мы получим следующее выражение для интеграла столкновений  $L_k(N)$  фононов друг с другом:

$$L_k(N) = -\frac{2}{\gamma \rho} \text{Re} \sum_{123\tau} \sum_{1'2'3'\tau'} \int_{-\infty}^0 dt e^{Nt} \Phi^\tau(1, 2; 3) \Phi^{\tau'}(1', 2'; 3')^* \times \\ \times e^{it(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)} \text{Sp} \rho^{(0)}(N) [c_1^\dagger c_2^\dagger c_3, [c_3^\dagger c_2 c_1, c_k^\dagger c_k]],$$

где  $N_k$  — функция распределения фононов и  $\rho^{(0)}(N)$  — статистический оператор идеального неравновесного газа фононов.

Замечая, что

$$[c_3^\dagger c_2 c_1, c_k^\dagger c_k] = c_3^\dagger c_2 c_1 (\delta_{k, 1'} + \delta_{k, 2'} - \delta_{k, 3'}),$$

получим, используя правила Вика (см. раздел 5.1.2):

$$L_k(N) = -\frac{2}{\gamma \rho} \text{Re} \sum_{123\tau} \sum_{1'2'3'\tau'} \int_{-\infty}^0 dt e^{Nt} \Phi^\tau(1, 2; 3) \Phi^{\tau'}(1', 2'; 3')^* \times \\ \times e^{it(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)} (\delta_{k, 1'} + \delta_{k, 2'} - \delta_{k, 3'}) \underbrace{2 [c_1^\dagger c_2 c_3, c_3^\dagger c_2 c_1]}_{\text{}}.$$

(Мы использовали при этом симметрию амплитуды  $\Phi(1, 2; 3)$  по отношению к перестановке индексов 1, 2.) Отсюда окончательно найдем

$$L_k(N) = \frac{4\pi}{\mathcal{V}} \sum_{123r} |\Phi^r(1, 2; 3)|^2 \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) (\delta_{k, 1} + \delta_{k, 2} - \delta_{k, 3}) \times \\ \times \{N_1 N_2 (1 + N_3) - N_3 (1 + N_1)(1 + N_2)\}. \quad (5.5.3)$$

Покажем теперь, что, зная интеграл столкновений фононов, можно построить теорию теплопроводности диэлектриков, в которых тепло переносится фононами\*).

Плотность  $q$  потока энергии, переносимой фононами, равняется

$$q = \mathcal{V}^{-1} \sum_{\mathbf{l}} \mathbf{v}_{\mathbf{l}} \omega_{\mathbf{l}} N_{\mathbf{l}}, \quad (5.5.4)$$

где  $\mathbf{v}_{\mathbf{l}} = \partial\omega_{\mathbf{l}}/\partial\mathbf{k}_{\mathbf{l}}$  — групповая скорость фононов. Поэтому, чтобы вычислить  $q$ , нужно найти функцию распределения фононов в том случае, когда в теле имеется температурный градиент. При этом распределение фононов будет пространственно неоднородным и функция распределения фононов будет удовлетворять кинетическому уравнению

$$\frac{\partial N_{\mathbf{l}}}{\partial t} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} \nabla N_{\mathbf{l}} = L_{\mathbf{l}}(N). \quad (5.5.5)$$

В стационарном случае, который мы далее будем рассматривать,  $\partial N_{\mathbf{l}}/\partial t = 0$ .

Переходя к исследованию кинетического уравнения для фононов, рассмотрим сперва уравнение для равновесного распределения

$$L_{\mathbf{l}}(N) = 0. \quad (5.5.6)$$

Легко видеть, что если бы в рассматриваемых процессах расщепления и слияния фононов, кроме закона сохранения энергии, точно выполнялся также закон сохранения квазиимпульса, то общее решение уравнения (5.5.6) имело бы вид

$$N_{\mathbf{l}}^0 = (e^{\beta\omega_{\mathbf{l}} + \mathbf{u}\mathbf{k}_{\mathbf{l}}} - 1)^{-1}, \quad (5.5.7)$$

где  $\beta^{-1}$  — температура фононного газа и  $\mathbf{u}$  — произвольный вектор. (Этот вектор, определяет, очевидно, суммарный импульс фононов.) Ясно, что если бы мы подставили распределение (5.5.7) в выражение для  $q$ , то получили бы отличный от нуля результат. Это значит, что распределение (5.5.7) приводит к конечному тепловому потоку даже в отсутствие градиента температуры, т. е. к бесконечной теплопроводности кристалла. Но для квазиимпульса нет строгого закона сохранения — в амплитуду взаимодействия (5.5.2) входит произвольный вектор обратной

\*) Мы следуем ниже работам [7, 8].

решетки  $\tau$ . По этой причине в равновесное распределение фононов не может входить произвольный вектор  $\mathbf{u}$  и равновесное распределение является чисто планковским:

$$N_1^0 = (e^{\beta\omega_1} - 1)^{-1}, \quad \beta = T^{-1}. \quad (5.5.8)$$

Предположим теперь, что градиент температуры достаточно мал. Тогда функция распределения фононов  $N_1$  будет мало отличаться от равновесной функции распределения,  $N_1 = N_1^0 + \delta N_1$  ( $|\delta N_1| \ll N_1^0$ ) и кинетическое уравнение (5.5.5) может быть линеаризовано по  $\delta N$ . Учитывая, что  $L_1(N^0) = 0$ , мы получим уравнение

$$\mathbf{v}\nabla T \frac{\partial N_1^0}{\partial T} = L_1(\delta N) \equiv \int d^3k' \left( \frac{\delta L_{\mathbf{k}}}{\delta N_{\mathbf{k}'}} \right)_{N=N^0} \delta N_{\mathbf{k}'}, \quad (5.5.9)$$

где  $L_1(\delta N)$  — линеаризованный интеграл столкновений. Добавку к равновесной функции распределения удобно искать в виде

$$\delta N_1 = \beta(N_1^0 + 1) N_1^0 \chi_1,$$

где  $\chi_1$  — некоторая неизвестная функция квазиимпульса фонона  $\mathbf{k}_1$ . Кинетическое уравнение (5.5.9) приобретает тогда вид

$$L_1(\delta N) = \beta^2 N_1^0 (1 + N_1^0) \omega_1 (\mathbf{v}_1, \nabla T),$$

где

$$L_{\mathbf{k}}(\delta N) = \frac{\beta}{\gamma} \sum_{123\tau} \omega_{1;23}^{\tau} \frac{(\chi_2 + \chi_3 - \chi_1) \delta(\omega_2 + \omega_3 - \omega_1)}{(e^{-\beta\omega_1} - 1)(e^{\beta\omega_2} - 1)(e^{\beta\omega_3} - 1)} (\delta_{\mathbf{k},2} + \delta_{\mathbf{k},3} - \delta_{\mathbf{k},1}),$$

$$\omega_{1;23}^{\tau} = 4\pi |\Phi(2, 3; 1)|^2 \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 + 2\pi\tau).$$

Ясно, что если  $\tau \neq 0$ , то все квазиимпульсы  $\mathbf{k}_i$  не могут быть малыми и, следовательно, не могут быть малыми и энергии всех фононов  $\omega_i$ . С другой стороны,  $\omega_i \leq T_D$ , где  $T_D$  — температура Дебая. Поэтому, если  $T \ll T_D$ , то часть интеграла столкновений  $L_{\mathbf{k}}(\delta N)$ , соответствующая  $\tau \neq 0$ , будет, очевидно, содержать множитель  $\exp(-\gamma T_D/T)$ , где  $\gamma$  — некоторая численная величина порядка единицы.

Таким образом, вклад процессов взаимодействия фононов с несохраняющимся квазиимпульсом (такие процессы называются *процессами переброса*) в интеграл столкновений  $L_{\mathbf{k}}(\delta N)$  в области низких температур ( $T \ll T_D$ ) экспоненциально мал. Напротив, при высоких температурах ( $T \gg T_D$ ) вклады процессов с  $\tau = 0$  и  $\tau \neq 0$  по порядку величины одинаковы. Однако не учитывать процессы переброса нельзя, так как при этом в решетке не будет устанавливаться планковское распределение фононов. Имея в виду это обстоятельство, мы запишем интеграл столкновений  $L_{\mathbf{k}}(\delta N)$  в виде суммы двух слагаемых  $L^0$  и  $L^u$ , соответствующих  $\tau = 0$  и  $\tau \neq 0$ :

$$L_{\mathbf{k}}(\delta N) = L_{\mathbf{k}}^0(\chi) + \xi L_{\mathbf{k}}^u(\chi),$$

где явно выделен множитель  $\xi$ , характеризующий вероятность процессов переброса. При низких температурах он экспоненциально мал ( $\xi \approx \exp(-\gamma T_D/T)$ ), а при высоких температурах порядка единицы.

Итак,

$$L_k^0(\chi) + L_k^u(\chi) \cdot \xi = \beta^2 \omega_k \frac{v_k \nabla T}{(e^{\beta \omega_k} - 1)(1 - e^{-\beta \omega_k})}. \quad (5.5.10)$$

Полагая здесь  $\xi = 0$ , мы получим уравнение, которое не имеет решений. Действительно, однородное уравнение  $L_k^0(\chi) = 0$  допускает бесчисленное множество решений вида  $\chi_k = gk$ , где  $g$  — постоянный вектор, которые, очевидно, не ортогональны к правой части (5.5.10).

Решение уравнения (5.5.10) для  $\chi$  (точнее говоря, температурный ход  $\chi$ ) можно найти в двух предельных случаях высоких и низких температур. В первом случае ( $T \gg T_D$ ,  $\xi \sim 1$ ) планковскую функцию можно заменить на  $T/\omega$ . При этом, как легко видеть из (5.5.10), функция  $\chi_k$  будет обратно пропорциональна  $T^2$ , а следовательно, величина  $\delta N$  будет обратно пропорциональна  $T$ . Поэтому будет обратно пропорционален температуре тепловой поток  $q$  и коэффициент теплопроводности  $\kappa$ .

Во втором случае (когда  $T \ll T_D$ ),  $\xi \ll 1$ , и решение интегрального уравнения (5.5.10) следует искать в виде

$$\chi_i = \chi_i^0 + \chi_i',$$

где  $\chi_i^0$  — величина порядка  $\xi^{-1}$ , а  $\chi_i'$  — величина порядка единицы. Для определения  $\chi_i^0$  и  $\chi_i'$  мы получим, очевидно, уравнения

$$L_k^0(\chi^0) = 0, \\ \xi L_k^u(\chi^0) + L_k^0(\chi') = \beta^2 \omega_k (e^{\beta \omega_k} - 1)^{-1} (1 - e^{-\beta \omega_k})^{-1} v_k \nabla T.$$

Из первого уравнения следует, что

$$\chi_k^0 = gk,$$

где  $g$  — постоянный вектор. Этот вектор можно найти из условия разрешимости уравнения для  $\chi_k'$ . Действительно, замечая, что

$$\sum_k k L_k^0(\chi') = 0$$

при произвольном  $\chi'$ , имеем

$$\xi \sum_k k L_k^u(gk) = \beta^2 \sum_k \omega_k \frac{v_k \nabla T}{(e^{\beta \omega_k} - 1)(1 - e^{-\beta \omega_k})}. \quad (5.5.11)$$

Левая часть этого равенства представляет собой изменение квазиимпульса фононов в единицу времени, обусловленное столкно-



вениями фононов, а правая часть — изменение квазимпульса фононов, обусловленное градиентом температуры.

Таким образом, в области низких температур функция  $\chi_k^0 = gk$  с вектором  $g$ , определяемым согласно условию (5.5.11), будет главной частью функции  $\chi_k$ . Поэтому тепловой поток  $q$  при низких температурах можно вычислить, считая, что  $\chi_k \approx \chi_k^0$ . Вычисление это элементарно и приводит к следующему результату для коэффициента теплопроводности  $\kappa$  (т. е. коэффициента в выражении для  $q$  при  $-\nabla T$ ):

$$\kappa \approx \frac{Ms^2}{a} c_l^2 \exp(\gamma T_D/T), \quad (5.5.12)$$

где  $M$  — масса элементарной ячейки,  $a$  — постоянная решетки,  $s$  — скорость звука и  $c_l$  — теплоемкость решетки (если считать, что линейный закон дисперсии справедлив вплоть до  $k_i = \pi/a$ , то величина  $\gamma$  будет равна  $\pi$ ).

### § 6.1. Уравнения гидродинамики нормальной жидкости

**6.1.1. Уравнения гидродинамики идеальной жидкости.** В разделе 1.3.3 мы вывели уравнения газодинамики, исходя из уравнения Больцмана \*). Такого же типа уравнения справедливы не только для газов, но и для жидкостей. Однако метод вывода уравнений, использованный в § 1.3, неприменим в случае жидкостей. Действительно, как было разъяснено в разделе 4.2.2, для жидкостей отсутствует кинетический этап эволюции и имеет смысл только гидродинамический этап эволюции. Поэтому мы займемся в этом параграфе выводом уравнений гидродинамики сразу на гидродинамическом этапе эволюции.

В гамильтониане жидкости нельзя выделить слабое взаимодействие и единственным малым параметром задачи являются пространственные градиенты физических величин. Поэтому мы воспользуемся результатами раздела 4.2.2. В качестве параметров  $\xi_a(\mathbf{x})$ , характеризующих неравновесное состояние жидкости, необходимо взять плотности энергии  $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$  и импульса  $\pi(\mathbf{x}, t)$ , а также плотности массы  $\rho_a^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_a(\mathbf{x}, t)$  различных компонент жидкости (жидкость предполагается многокомпонентной, индекс  $a$  нумерует компоненты). Такой выбор параметров диктуется, согласно разделу 4.2.2, тем, что эргодическое соотношение для произвольного статистического оператора пространственно-однородной системы, удовлетворяющего принципу ослабления корреляций, имеет вид

$$e^{-i\mathcal{H}\tau} \rho e^{i\mathcal{H}\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \exp \left\{ \Omega - Y_0 \int d^3x \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) - Y_k \int d^3x \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) - \sum_a Y_a \int d^3x \hat{\rho}_a(\mathbf{x}) \right\},$$

где  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\rho}_a(\mathbf{x})$  — операторы плотностей энергии, импульса и массы  $a$ -й компоненты;  $Y_0$ ,  $Y_k$ ,  $Y_a$  — соответствующие обобщенные термодинамические силы и  $\Omega$  — термодинамический потенциал.

\*) Вывод уравнений гидродинамики на основе квантовых кинетических уравнений см. [47, 17].

Совокупность операторов  $\hat{e}$ ,  $\hat{\pi}_k$ ,  $\hat{\rho}_\alpha$ , согласно 4.2.2, мы будем обозначать через  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , причем  $\alpha = 0$  соответствует плотности энергии,  $\alpha = 1, 2, 3$  — трем проекциям плотности импульса и  $\alpha = 4, 5, \dots$ , — плотностям массы отдельных компонент жидкости.

Параметры  $\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) \equiv \zeta_\alpha(\mathbf{x})$  подчиняются уравнениям движения

$$\dot{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}), \quad (6.1.1)$$

где  $\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}) \equiv \zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}, t)$  — плотности потоков величин  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ . С точностью до квадратичных по градиентам членов величины  $\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x})$  определяются формулами (см. раздел 4.2.2)

$$\zeta_{\alpha k}(\mathbf{x}) = \zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}) + \zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) + \dots, \quad (6.1.2)$$

$$\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_{\alpha k}(0), \quad \zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) = \text{Sp } \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_{\alpha k}(0).$$

Здесь  $\hat{\zeta}_{\alpha k}(\mathbf{x})$  — операторы потоков,  $\omega(\mathbf{x})$  — локальное распределение Гиббса

$$\omega(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \Omega - Y_\alpha(\mathbf{x}) \int d^3 x' \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}') \right\} \equiv \omega(Y(\mathbf{x})), \quad (6.1.3)$$

$Y_\alpha(\mathbf{x})$  — обобщенные термодинамические силы, соответствующие параметрам  $\zeta_\alpha(\mathbf{x})$ , определяемые из соотношений

$$\text{Sp } \omega(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}) \quad (6.1.4)$$

и, наконец, оператор  $\sigma_0^{(1)}(\mathbf{x})$  определяется формулами (4.2.42), (4.2.37).

Если в (6.1.2) пренебречь членами линейными по градиентам, то мы приходим к уравнениям гидродинамики идеальной жидкости

$$\dot{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) = - \frac{\partial}{\partial x_k} \zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (6.1.5)$$

Для вычисления  $\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x})$  заметим, что справедливо соотношение

$$U_u \omega(Y) U_u^\dagger = \omega(Y'),$$

$$Y'_0 = Y_0, \quad Y'_k = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y'_\alpha = Y_\alpha + Y_k u_k + Y_0 \frac{u^2}{2}, \quad (6.1.6)$$

где  $U_u$  — унитарный оператор, соответствующий преобразованиям Галилея. Он определяется формулой (2.3.25)

$$U_u = \exp \left\{ -iu \int d^3 x x \hat{\rho}(\mathbf{x}) \right\}, \quad (6.1.7)$$

где  $\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \sum_\alpha \hat{\rho}_\alpha(\mathbf{x})$  — оператор плотности массы и  $\mathbf{u}$  — произвольный вектор. Соотношение (6.1.6) непосредственно вытекает

из трансформационных свойств (2.3.26) операторов плотностей при преобразованиях Галилея:

$$U_a \hat{\rho}_a(\mathbf{x}) U_a^+ = \hat{\rho}_a(\mathbf{x}), \quad U_a \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) U_a^+ = \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + u_k \hat{\rho}(\mathbf{x}),$$

$$U_a \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) U_a^+ = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + u_k \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + \frac{u^2}{2} \hat{\rho}(\mathbf{x}). \quad (6.1.8)$$

Заметим, что, как следует из формулы (6.1.6), термодинамический потенциал  $\Omega$  инвариантен относительно преобразований термодинамических сил  $Y_a$ :

$$Y_0 \rightarrow Y'_0 = Y_0, \quad Y_k \rightarrow Y'_k = Y_k + Y_0 u_k, \quad Y_a \rightarrow Y'_a = Y_a + Y_k u_k + Y_0 \frac{u^2}{2},$$

$$(6.1.9)$$

т. е.  $\Omega(Y) = \Omega(Y')$ . Отсюда, в свою очередь, следует, что  $\Omega(Y)$  зависит только от переменных  $Y_0, Y_a - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2$ :

$$\Omega(Y) = \Omega\left(Y_0, Y_a - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2\right). \quad (6.1.10)$$

Так как, согласно (6.1.3), (6.1.4),

$$\partial\Omega/\partial Y_a = \rho_a, \quad \partial\Omega/\partial Y_k = \pi_k,$$

то

$$\pi_k = \sum_a \frac{\partial\Omega}{\partial Y_a} \left(-\frac{Y_k}{Y_0}\right) = -\frac{Y_k}{Y_0} \rho. \quad (6.1.11)$$

Величина  $\pi_k(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})$  представляет собой локальную скорость жидкости  $u_k(\mathbf{x})$ . Таким образом,

$$u_k(\mathbf{x}) = -Y_k(\mathbf{x})/Y_0(\mathbf{x}). \quad (6.1.12)$$

Отсюда следует, что преобразование (6.1.9) эквивалентно замене  $\underline{u} \rightarrow \underline{u}' = \underline{u} - \mathbf{u}$ ,  $\underline{u}_k = -Y_k/Y_0$ .

Полагая в формуле (6.1.6)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , получим

$$U_{u(\mathbf{x})} \omega(\mathbf{x}) U_{u(\mathbf{x})}^+ = \omega(\mathbf{x}) = \exp \left\{ \Omega - \beta(\mathbf{x}) \int d^3x' \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}') + \right.$$

$$\left. + \beta(\mathbf{x}) \sum_a \mathbf{v}_a(\mathbf{x}) \int d^3x' \hat{\rho}_a(\mathbf{x}') \right\}, \quad (6.1.13)$$

где

$$\beta(\mathbf{x}) = Y_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}_a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \frac{Y_k^2(\mathbf{x})}{Y_0^2(\mathbf{x})} - \frac{Y_a(\mathbf{x})}{Y_0(\mathbf{x})}$$

(величина  $\beta^{-1}(\mathbf{x})$  представляет собой локальную температуру, а  $m_a \mathbf{v}_a(\mathbf{x})$  — локальный химический потенциал,  $m_a$  — масса частицы  $a$ -й компоненты). Поэтому  $\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x})$  можно представить в виде

$$\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega_0(\mathbf{x}) U_{u(\mathbf{x}) \circ \alpha k} \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) U_{u(\mathbf{x})}^+$$

Используя трансформационные свойства при преобразованиях Галилея операторов плотностей потоков массы  $a$ -й компоненты  $j_{ak}^{(m)} \equiv j_{ak}$ , импульса  $t_{ik}$  и энергии  $q_k$  (2.3.28):

$$\begin{aligned} U_u \hat{j}_{ak}(\mathbf{x}) U_u^+ &= \hat{j}_{ak}(\mathbf{x}) + u_k \hat{\rho}_a(\mathbf{x}), \\ U_u \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) U_u^+ &= \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) + u_i \hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + u_k \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + u_i u_k \hat{\rho}(\mathbf{x}), \\ U_u \hat{q}_k(\mathbf{x}) U_u^+ &= \\ &= \hat{q}_k(\mathbf{x}) + u_i \hat{t}_{ik}(\mathbf{x}) + u_k \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + u_k u_i \hat{\pi}_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} u^2 (\hat{\pi}_k(\mathbf{x}) + u_k \rho(\mathbf{x})) \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

и замечая, что  $\text{Sp } \omega_0 \hat{q}_k = \text{Sp } \omega_0 \hat{j}_{ak} = 0$ , получим

$$\begin{aligned} j_{ak}^{(0)}(\mathbf{x}) &= \rho_a(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}), \\ t_{ik}^{(0)}(\mathbf{x}) &= p(\mathbf{x}) \delta_{ik} + \rho(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}), \\ q_k^{(0)}(\mathbf{x}) &= p(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) + \varepsilon_0(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

где  $p(\mathbf{x})$  — давление, определяемое формулой

$$\text{Sp } \omega_0(\mathbf{x}) \hat{t}_{ik}(0) = p(\mathbf{x}) \delta_{ik},$$

которое, как мы увидим в следующем параграфе, равно  $p = -\frac{\Omega}{\gamma} \beta^{-1}$  и

$$\varepsilon_0(\mathbf{x}) = \text{Sp } \omega_0(\mathbf{x}) \hat{\varepsilon}(0).$$

Согласно (6.1.8), (6.1.13) плотность энергии  $\varepsilon(\mathbf{x})$  связана с  $\varepsilon_0(\mathbf{x})$  соотношением

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}) u^2(\mathbf{x}).$$

Таким образом,  $\varepsilon_0(\mathbf{x})$  представляет собой плотность энергии элемента жидкости в той системе отсчета, где этот элемент покоится.

Используя формулы (6.1.15) для  $j_{ak}^{(0)}$ ,  $t_{ik}^{(0)}$ ,  $q_k^{(0)}$ , можно переписать уравнения (6.1.5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a u_k}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \rho u_k \left( \gamma + \frac{1}{2} u^2 \right), \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

где  $\gamma$  — энтальпия единицы массы:

$$\gamma = (p + \varepsilon_0)/\rho.$$

Последнее из этих уравнений можно записать также в виде

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_k} = -\gamma \rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (6.1.17)$$

Уравнения (6.1.16) представляют собой *уравнения гидродинамики идеальной жидкости* (первое из них носит название *уравнения Эйлера*).

Третье из уравнений (6.1.16) (или эквивалентное ему уравнение (6.1.17)) можно переписать также в виде (см. раздел 4.2.2)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6.1.18)$$

где  $s$  — энтропия единицы объема жидкости,

$$s = - \gamma^{-1} \text{Sp } w_0 \ln w_0 = \beta \rho \left( \gamma - \sum_a v_a \frac{\rho_a}{\rho} \right).$$

Уравнение (6.1.18) означает, что энтропия единицы массы жидкости при ее движении не меняется: иными словами, движение жидкости происходит без диссипации энергии.

**6.1.2. Уравнения гидродинамики неидеальной жидкости.** Перейдем теперь к вычислению величин  $\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x})$ , входящих в выражение (6.1.2) для  $\xi_{\alpha k}(\mathbf{x})$ :

$$\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) = \text{Sp } \sigma_0^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\xi}_{\alpha k}(0).$$

Эти величины определяют диссипативные процессы, протекающие в жидкости.

Покажем предварительно, что для оператора

$$w^{(1)}(\mathbf{x}) = - \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} w \int_0^1 d\lambda \int d^3 x' x'_j (\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}'; \lambda) - \langle \hat{\xi}_\alpha \rangle),$$

входящего в выражение для  $\sigma_0^{(1)}(\mathbf{x})$ , выполняются соотношения

$$\text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\xi}_\alpha(0) = 0, \quad \text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\xi}_{\alpha k}(0) = 0. \quad (6.1.19)$$

Заметим для этого, что если гамильтониан инвариантен по отношению к отражению пространства и обращению времени, то должны иметь место соотношения (см. раздел 2.3.2)

$$T \mathcal{P} \hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x}) (T \mathcal{P})^{-1} = \hat{\xi}_\alpha^*(-\mathbf{x}), \quad (6.1.20)$$

где  $\mathcal{P}$  и  $T$  — операторы пространственной и временной инверсии (для  $\alpha = 0$  это соотношение эквивалентно инвариантности гамильтониана относительно  $\mathcal{P}$  и  $T$  преобразований; при  $\alpha = 1, 2, \dots$  оно может быть непосредственно проверено, если воспользоваться явным видом операторов  $\hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{x})$ ).

Из формул (2.2.39) — (2.2.41), связывающих операторы  $\hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x})$  с операторами  $\hat{\xi}_\alpha(\mathbf{x})$ , и из (6.1.20) следует, что операторы  $\hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x})$  удовлетворяют соотношениям, аналогичным (6.1.20):

$$T \mathcal{P} \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}) (T \mathcal{P})^{-1} = \hat{\xi}_{\alpha k}^*(-\mathbf{x}). \quad (6.1.21)$$

Поэтому из (4.2.37) и (6.1.20) имеем

$$\text{Sp } w^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha(0) = \text{Sp } T \mathcal{P} w^{(1)} (T \mathcal{P})^{-1} T \mathcal{P} \hat{\zeta}_\alpha(0) (T \mathcal{P})^{-1} = - (\text{Sp } w^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha(0))^*,$$

а так как величина  $\text{Sp } w^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha(0)$  вещественна, то  $\text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_\alpha(0) = 0$ . Аналогичным образом можно показать, что  $\text{Sp } w^{(1)}(\mathbf{x}) \hat{\zeta}_{\alpha k}(0) = 0$ .

Таким образом, согласно (6.1.19), (4.2.42), величину  $\hat{\zeta}_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x})$  можно представить в виде

$$\hat{\zeta}_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^0 d\tau \text{Sp } e^{i\mathcal{H}\tau} \hat{Q}(Y) e^{-i\mathcal{H}\tau} \hat{\zeta}_{\alpha k}(0), \quad (6.1.22)$$

где

$$\hat{Q}(Y) = \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \int_0^1 d\lambda \int d^3 x' w(\mathbf{x}) (\hat{\zeta}'_{\alpha j}(\mathbf{x}'; \lambda) - \langle \hat{\zeta}'_{\alpha j} \rangle).$$

Оператор  $\hat{Q}$  зависит от термодинамических сил  $Y_\alpha$ .

Покажем, что

$$U_\alpha \hat{Q}(Y) U_\alpha^+ = \hat{Q}(Y'), \quad (6.1.23)$$

где  $U_\alpha$  — унитарный оператор, определяемый формулой (6.1.7), и термодинамические силы  $Y'_\alpha$  связаны с  $Y_\alpha$  соотношениями (6.1.6). Заметим с этой целью, что, согласно (4.2.41),

$$\frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha j}^{(0)}}{\partial \zeta_\beta} = - \left( \frac{\partial Y_\beta}{\partial t} \right)^{(1)}, \quad (6.1.24)$$

где величины  $\left( \frac{\partial Y_\beta}{\partial t} \right)^{(1)} \equiv \frac{\partial Y_\beta}{\partial \zeta_\alpha} \left( \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} \right)^{(1)}$  находятся с помощью уравнений гидродинамики идеальной жидкости:

$$\left( \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} \right)^{(1)} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (6.1.25)$$

Используя формулы (6.1.24), (6.1.8), (6.1.6), легко видеть, что

$$U_\alpha \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) U_\alpha^+ = \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) + u_j \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j} \cdot \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}),$$

$$U_\alpha \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \frac{\partial \hat{\zeta}_{\alpha j}^{(0)}}{\partial \zeta_\beta} \hat{\zeta}_\beta(\mathbf{x}) U_\alpha^+ = - \left( \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial t} \right)^{(1)} \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$$

и, следовательно,

$$U_\alpha \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) U_\alpha^+ = \frac{\partial Y'_\alpha}{\partial x_j} \hat{\zeta}_{\alpha j}(\mathbf{x}) - \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}) \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(1)} + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\} Y'_\alpha,$$

где принято сокращенное обозначение  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(1)} A = \left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^{(1)}$ . Так как, согласно уравнениям (6.1.16), (6.1.25),

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(1)} + \mathbf{u}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(1)} \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}'},$$

то

$$U_{\mathbf{u}} \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial x_k} \hat{\zeta}'_{\alpha k}(\mathbf{x}) U_{\mathbf{u}}^+ = \frac{\partial Y_{\alpha}}{\partial x_k} \hat{\zeta}'_{\alpha k}(\mathbf{x}) \Big|_{Y \rightarrow Y'}.$$

откуда и следует формула (6.1.23).

Возьмем теперь в качестве  $\mathbf{u}$  скорость  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Тогда, согласно (6.1.22), (6.1.23),

$$U_{\mathbf{u}(\mathbf{x})} \hat{Q}(Y) U_{\mathbf{u}(\mathbf{x})}^+ = \hat{Q}(Y) \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0} \equiv \hat{Q}_0. \quad (6.1.26)$$

Подчеркнем, что в этой формуле при вычислении  $\hat{Q} \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0}$  мы считаем, что  $\mathbf{u}(\mathbf{x})=0$ , но не имеем права полагать  $\partial \mathbf{u}(\mathbf{x})/\partial x_k$  равным нулю. Для нахождения оператора  $\hat{Q}_0$  необходимо найти величины  $\hat{\zeta}'_{\beta}(\mathbf{x}) (\partial \zeta_{\alpha j}^{(0)}/\partial \zeta_{\beta})_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0}$ , определяющие операторы  $\hat{\zeta}'_{\alpha j}$  при  $\mathbf{u}(\mathbf{x})=0$ . Нетрудно видеть, что, согласно (6.1.15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_k^{(0)}}{\partial \zeta_{\alpha}} \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0} \hat{\zeta}'_{\alpha}(\mathbf{x}) &= \gamma \hat{\pi}_k(\mathbf{x}), & \frac{\partial j'_{\alpha k}^{(0)}}{\partial \zeta_{\beta}} \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0} \hat{\zeta}'_{\beta}(\mathbf{x}) &= \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \\ \frac{\partial t'_{ik}^{(0)}}{\partial \zeta_{\alpha}} \Big|_{\mathbf{u}(\mathbf{x})=0} \hat{\zeta}'_{\alpha}(\mathbf{x}) &= \delta_{ik} \left( \sum_a \frac{\partial p}{\partial \rho_a} \hat{\rho}'_a(\mathbf{x}) + \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) \right), \end{aligned}$$

где  $\gamma$  — энтальпия единицы массы и  $p$  — давление (производные  $\partial p/\partial \zeta_{\alpha}$  вычисляются при фиксированных значениях плотностей  $\zeta_{\alpha}$ ,  $\alpha' \neq \alpha$ ). Поэтому оператор  $\hat{Q}_0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{Q}_0 &= \omega_0 \int_0^1 d\lambda \int d^3x' \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \hat{q}'_k(\mathbf{x}'; \lambda) - \sum_a \frac{\partial \beta v_a}{\partial x_k} \hat{j}'_{\alpha k}(\mathbf{x}'; \lambda) - \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ki} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) (\hat{t}'_{ik}(\mathbf{x}'; \lambda) - \langle \hat{t}'_{ik} \rangle_0) - \\ &\quad \left. - \beta \frac{\partial u_i}{\partial x_i} (\hat{t}'(\mathbf{x}'; \lambda) - \langle \hat{t}' \rangle_0) \right\}, \quad (6.1.27) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{q}'_k(\mathbf{x}) &= \hat{q}_k(\mathbf{x}) - \gamma \hat{\pi}_k(\mathbf{x}), & \hat{j}'_{\alpha k}(\mathbf{x}) &= \hat{j}_{\alpha k}(\mathbf{x}) - \frac{\rho_{\alpha}}{\rho} \hat{\pi}_k(\mathbf{x}), \\ \hat{t}'(\mathbf{x}) &= \frac{1}{3} \hat{t}'_{kk}(\mathbf{x}) - \sum_a \frac{\partial p}{\partial \rho_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}) - \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

и

$$\hat{a}(\mathbf{x}; \lambda) = \omega_0^{-\lambda} \hat{a}(\mathbf{x}) \omega_0^{\lambda}, \quad \langle \hat{a} \rangle_0 = \text{Sp } \omega_0 \hat{a}$$

для любого из операторов  $\hat{a}(\mathbf{x}) = \hat{q}'_k(\mathbf{x})$ ,  $\hat{j}'_{\alpha k}(\mathbf{x})$ ,  $\hat{t}'_{ik}(\mathbf{x})$ .



Вычислим величины  $\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x})$ , которые мы будем называть *плотностями диссипативных потоков*. Согласно (6.1.22), (6.1.26)

$$\zeta_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^0 d\tau \operatorname{Sp} e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{Q}_0 e^{-i\mathcal{E}\tau} U_{\alpha(\mathbf{x})} \hat{\xi}_{\alpha k}(0) U_{\alpha(\mathbf{x})}^+.$$

Используя трансформационные свойства (6.1.14) плотностей потоков при преобразованиях Галилея и выражение (6.1.27), получим, учитывая изотропию жидкости,

$$\begin{aligned} i_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) &= -\eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) - \zeta \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \\ j_{\alpha k}^{(1)}(\mathbf{x}) &= A'_\alpha \frac{\partial \beta}{\partial x_k} - \sum_{\alpha'} A_{\alpha\alpha'} \frac{\partial \beta v_{\alpha'}}{\partial x_k}, \\ q_k^{(1)}(\mathbf{x}) &= u_i i_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) + q'_k, \quad q'_k = \frac{\bar{\kappa}}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x_k} - \sum_{\alpha} A_{\alpha} \frac{\partial \beta v_{\alpha}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

В формулах (6.1.28) величины  $\eta$ ,  $\zeta$ , представляющие собой *коэффициенты первой и второй вязкости*, определяются так:

$$\eta = (\hat{t}_{12}; \hat{t}_{12}), \quad \zeta = (\hat{t}; \hat{t}), \quad (6.1.29)$$

где использовано общее обозначение (см. формулу (4.4.20))

$$\begin{aligned} (\hat{a}; \hat{b}) &= \beta \int_{-\infty}^0 d\tau \int d^3x \int_0^1 \operatorname{Sp} e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{a}'(\mathbf{x}; \lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} \hat{b}(0) \omega_0 d\lambda, \\ \hat{a}'(\mathbf{x}) &= \hat{a}(\mathbf{x}) - \beta \frac{\partial \langle \hat{a} \rangle}{\partial \xi_{\alpha}} \hat{\xi}_{\alpha}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Величины  $A_{\alpha}$ ,  $A'_{\alpha}$ ,  $A_{\alpha\alpha'}$ ,  $\bar{\kappa}$  связаны, как мы увидим далее, с коэффициентами диффузии, термодиффузии и теплопроводности. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{\alpha} &= \beta^{-1} (\hat{j}_{\alpha 1}; \hat{q}_1), & A'_{\alpha} &= \beta^{-1} (\hat{q}_1; \hat{j}_{\alpha 1}), \\ A_{\alpha\alpha'} &= \beta^{-1} (\hat{j}_{\alpha' 1}; \hat{j}_{\alpha 1}), & \bar{\kappa} &= \beta (\hat{q}_1; \hat{q}_1). \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что в кинетические коэффициенты входят корреляционные функции не самих по себе плотностей потоков  $\langle \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}, \tau; \lambda) \hat{\xi}_{\alpha' k'}(0) \rangle$ , а величины  $\langle \hat{\xi}'_{\alpha k}(\mathbf{x}, \tau; \lambda) \hat{\xi}_{\alpha' k'}(0) \rangle$ , где  $\hat{\xi}'_{\alpha k}$  связаны с  $\hat{\xi}_{\alpha k}$  соотношениями (6.1.27) (здесь  $\langle ab \rangle = \operatorname{Sp} \omega(a - \langle a \rangle) b$ ,  $\langle a \rangle = \operatorname{Sp} \omega a$ ). Это связано с тем, что величины

$$K(\tau) \equiv \int d^3x \int_0^1 d\lambda \langle \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}, \tau; \lambda) \hat{\xi}_{\alpha' k'}(0) \rangle,$$

В отличие от величин

$$K'(\tau) \equiv \int d^3x \int_0^1 d\lambda \langle \hat{\xi}'_{\alpha k}(\mathbf{x}, \tau; \lambda) \hat{\xi}_{\alpha' k'}(0) \rangle,$$

не стремятся к нулю при  $\tau \rightarrow -\infty$ . В этом можно убедиться, используя эргодическое соотношение

$$e^{-i\mathcal{E}\tau} \omega \int_0^1 d\lambda \int d^3x (\hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \hat{\xi}_{\alpha k} \rangle) e^{i\mathcal{E}\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} -\frac{\partial \omega}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_{\alpha k}^{(0)}}{\partial Y_\beta}.$$

вытекающее из основного эргодического соотношения (2.4.24) для статистического оператора пространственно-однородной системы [89]. Действительно, отсюда следует, что

$$K(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} -\frac{\partial \xi_{\alpha' k'}^{(0)}}{\partial \xi_\beta} \frac{\partial \xi_{\alpha k}^{(0)}}{\partial Y_\beta} \equiv C \quad (6.1.31)$$

и, следовательно, согласно (6.1.31),

$$K'(\tau) = K(\tau) - C \xrightarrow{\tau \rightarrow -\infty} 0.$$

По этой причине интегралы  $\int_{-\infty}^0 d\tau K'(\tau)$ , определяющие кинетические коэффициенты, не содержат расходящихся величин (секкулярных членов).

Покажем, что

$$A'_\alpha = A_\alpha, \quad A_{\alpha\alpha'} = A_{\alpha'\alpha}. \quad (6.1.32)$$

Замечая, что операторы  $j_{\alpha k}$  и  $q_k$  при отражении пространства — времени преобразуются согласно формулам (6.1.21), имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \omega_0 e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}; \lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\beta l}(0) &= (\text{Sp } \omega_0 \hat{\xi}_{\alpha k}(-\mathbf{x}, \lambda) \times \\ &\times e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\beta l}(0) e^{-i\mathcal{E}\tau})^* = \text{Sp } \omega_0 e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\beta l}(0) e^{-i\mathcal{E}\tau} \omega_0 \hat{\xi}_{\alpha k}(-\mathbf{x}) \omega_0^{-\lambda} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\text{Sp } \omega_0 e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\alpha k}(\mathbf{x}; \lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\beta l}(0) = \text{Sp } \omega_0 e^{i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\beta l}(\mathbf{x}; \lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} \hat{\xi}_{\alpha k}(0),$$

откуда и следуют формулы (6.1.32).

Соотношения (6.1.32) выражают принцип симметрии кинетических коэффициентов Онзагера.

Формулы (6.1.29), (6.1.30) можно упростить, если воспользоваться соотношением

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^1 d\lambda \text{Sp } \omega_0 \{ e^{i\mathcal{E}\tau} A(\lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} B + e^{i\mathcal{E}\tau} B(\lambda) e^{-i\mathcal{E}\tau} A \} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \text{Sp } \omega_0 e^{i\mathcal{E}\tau} A e^{-i\mathcal{E}\tau} B, \quad A(\lambda) = \omega_0^{-\lambda} A \omega_0^\lambda, \quad (6.1.33) \end{aligned}$$

которое легко доказывается, если выписать выражения для шпуров в системе собственных векторов полного гамильтониана  $\mathcal{H}$ .

Вводя обозначение

$$\langle ab \rangle_{x, t} = \text{Sp } \boldsymbol{\omega}_0 (a(x, t) - \langle a \rangle_0) (b(0) - \langle b \rangle_0), \quad (6.1.34)$$

формулы (6.1.29), (6.1.30), согласно (6.1.32), (6.1.33), можно преобразовать к виду\*)

$$\eta = \frac{1}{2} \beta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle t_{12} t_{12} \rangle_{x, \tau}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \beta \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle t t \rangle_{x, \tau},$$

$$A_a = A'_a = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle q'_1 j'_{a1} \rangle_{x, \tau}, \quad (6.1.35)$$

$$A_{aa'} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle j'_{1a} j'_{1a'} \rangle_{x, \tau}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\beta^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^3x \langle q'_1 q'_1 \rangle_{x, \tau}.$$

Из (6.1.31) следует, что фурье-компонента  $K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} K(\tau)$

имеет  $\delta$ -образную особенность при  $\omega = 0$ :

$$K(\omega) \approx C\delta(\omega).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau K'(\tau) = \lim_{\omega \rightarrow \pm 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} K(\tau).$$

Это соотношение позволяет выразить кинетические коэффициенты через корреляционные функции самих потоков  $\hat{\zeta}_{\alpha k}$ . Например:

$$\bar{\kappa} = \frac{\beta^2}{2} \lim_{\omega \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \int d^3x \langle q_1 q_1 \rangle_{x, \tau}.$$

Легко показать, исходя из (6.1.35), что величины  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\bar{\kappa}$  положительны.

Так как операторы плотностей потоков массы равны

$$\hat{j}_{ak}(x) = -\frac{i}{2} \left( \psi_a^+(x) \frac{\partial \psi_a(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_a^+(x)}{\partial x_k} \psi_a(x) \right)$$

( $\psi_a$ ,  $\psi_a^+$  — операторы уничтожения и рождения частиц сорта  $a$ ), то

$$\hat{\pi}_k(x) = \sum_a \hat{j}_{ak}(x).$$

\*) Формулы для кинетических коэффициентов типа (6.1.35) получались в работах [61, 82, 57, 95].

Учитывая, что  $\sum_a \rho_a = \rho$ , имеем

$$\sum_a \hat{j}_{ak}(x) = 0.$$

Поэтому кинетические коэффициенты  $A_a, A_{aa'}$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_a A_a = 0, \quad \sum_{a'} A_{aa'} = 0. \quad (6.1.36)$$

Таким образом, не все коэффициенты  $A_a, A_{aa'}$  являются независимыми.

Используя выражения (6.1.28) для диссипативных плотностей потоков, можно переписать уравнения (6.1.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + u_k \frac{\partial \rho_a}{\partial x_k} = -\rho_a \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( A_a \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{a'} A_{aa'} \frac{\partial \beta_{a'}}{\partial x_k},$$

$$(6.1.37)$$

$$\frac{\partial e_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial e_0}{\partial x_k} = -\rho \gamma \frac{\partial u_k}{\partial x_k} -$$

$$- \frac{\partial u_i}{\partial x_k} t_{ik}^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\bar{\kappa}}{\beta^2} \frac{\partial \beta}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_a A_a \frac{\partial \beta_{a'}}{\partial x_k}.$$

Эти уравнения представляют собой систему уравнений гидродинамики многокомпонентной жидкости. (Первое из этих уравнений носит название *уравнения Навье — Стокса*.) Уравнения учитывают диссипативные процессы, происходящие в жидкости в приближении, квадратичном по градиентам, и, следовательно, они справедливы только в случае малых градиентов.

Мы видим, что коэффициенты переноса  $\eta, \zeta, \bar{\kappa}, A_a, A_{aa'}$  выражаются в общем виде через равновесные временные корреляционные функции (6.1.34). Вычисление этих величин в случае жидкости еще более сложная задача, чем вычисление термодинамического потенциала жидкости. Важно, однако, что существуют общие соотношения, связывающие коэффициенты переноса с корреляционными функциями. Если взаимодействие между частицами мало (либо плотность частиц мала), то для вычисления корреляционных функций можно воспользоваться методом, развитым в разделе 5.4.3. При этом, как мы видели, задача сводится к решению кинетического уравнения. Это находится в соответствии с тем, что для газов вычисление кинетических коэффициентов сводится к решению кинетического уравнения Больцмана.

Для однокомпонентной жидкости уравнения (6.1.37) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u_k \frac{\partial u}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6.1.38) \\ \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_k} &= -\rho \gamma \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k} t_{lk}^{(1)} - \frac{\partial}{\partial x_k} \kappa \frac{\partial \beta}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

где  $\kappa = \bar{\kappa}$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  определяются формулами (6.1.35). (Для однокомпонентной жидкости величина  $\kappa$  представляет собой коэффициент теплопроводности.)

Рассмотрим, наконец, уравнения гидродинамики двухкомпонентной жидкости [76]. Согласно формулам (6.1.36) плотности потоков массы обеих компонент жидкости можно представить в виде

$$j_{1k} = \rho C u_k + i_k, \quad j_{2k} = \rho(1 - C) u_k - i_k, \quad (6.1.39)$$

где  $C = \rho_1/\rho$  — концентрация первой компоненты и  $i_k$  — диссипативный поток массы первой компоненты, который можно представить в виде

$$i_k = -\rho \mathcal{D} \left( \frac{\partial C}{\partial x_k} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x_k} \right), \quad (6.1.40)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\beta}{\rho} A_{11} \left( \frac{\partial v}{\partial C} \right)_{p, T}, \quad k_p = p \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_{C, T} / \left( \frac{\partial v}{\partial C} \right)_{p, T},$$

$$k_T \mathcal{D} = \frac{\beta}{\rho} A_1 - \frac{1}{\rho} A_{11} \left( \beta v - \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p, C} \right), \quad v = v_1 - v_2, \quad \beta = T^{-1}.$$

(Мы учли при этом, что для двухкомпонентной жидкости, согласно (6.1.36),  $A_{11} = -A_{12} = -A_{21} = A_{22}$ ,  $A_1 = -A_2$  и величина  $v$  является функцией трех независимых термодинамических переменных  $C$ ,  $p$ ,  $T$ .) Величина  $\mathcal{D}$  называется коэффициентом диффузии, величина  $k_T \mathcal{D}$  — коэффициентом термодиффузии и  $k_p \mathcal{D}$  — коэффициентом бародиффузии.

Плотность диссипативного потока энергии  $q'_k$ , согласно (6.1.28), определяется формулой

$$q'_k = \left\{ k_T \left( \frac{\partial v}{\partial C} \right)_{p, T} - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p, C} + v \right\} i_k - \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (6.1.41)$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности, равный

$$\kappa = \frac{\bar{\kappa} A_{11} T^2 - A_1^2}{A_{11} T^2}.$$

( $-\kappa \nabla T$  представляет собой плотность диссипативного потока энергии при  $i_k = 0$ .) Нетрудно показать, используя определение  $A_1$ ,  $A_{11}$ , что  $\kappa > 0$ .

Имея выражения для плотностей диссипативных потоков (6.1.39) — (6.1.41), можно, согласно (6.1.37), записать уравнения гидродинамики двухкомпонентной жидкости в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \eta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} &= 0, \quad \frac{\partial C}{\partial t} + u_k \frac{\partial C}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial i_k}{\partial x_k}, \quad (6.1.42) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 + \rho \frac{u^2}{2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \rho u_i \left( \gamma + \frac{u^2}{2} \right) + u_k t_{ki}^{(1)} + q'_i \right\}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение, представляющее собой закон сохранения энергии, можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} &= \frac{\eta}{2T} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{u} \right)^2 + \\ &+ \frac{\zeta}{T} (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \frac{\kappa}{T^2} (\Delta T)^2 + \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial C} \right)_{p, T} (T \rho \mathcal{D})^{-1} i^2, \\ \mathbf{s} &= s \mathbf{u} - \frac{\kappa}{T} \nabla T + \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial T} \right)_{p, C} - \frac{k_T}{T} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial C} \right)_{p, T} \right\} \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Это соотношение выражает закон возрастания энтропии: величина  $s$  представляет собой объемную плотность энтропии,  $\mathbf{s}$  — плотность потока энтропии. Правая часть равенства определяет производство энтропии.

**6.1.3. Низкочастотная асимптотика гидродинамических функций Грина.** В разделе 4.4.2 мы получили общие формулы, позволяющие находить асимптотику функций Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ ,

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^0 dt \int d^3x \operatorname{Sp} \omega [\xi_i(\mathbf{x}, t), \xi_j(0)]$$

в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . В том случае, когда величины  $\xi_i$  совпадают с операторами плотностей  $\hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , соответствующих аддитивным интегралам движения  $\int d^3x \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x})$ , функция Грина  $G_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \equiv G_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  определяется, согласно (4.4.32), в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  формулой

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &\approx -Y_0 \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\rho} \left( \frac{T(\mathbf{k})}{\omega - T(\mathbf{k}) + i0} \right)_{\beta\rho} = \\ &= Y_0 \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\beta} - Y_0 \omega (\omega - T(\mathbf{k}) + i0)_{\beta\rho}^{-1} \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial Y_\rho}, \quad (6.1.43) \end{aligned}$$

где  $\zeta_\alpha = \operatorname{Sp} \omega \hat{\zeta}_\alpha$  и матрица  $T(\mathbf{k})$  определяется в результате совместного решения уравнений (4.4.9), (4.4.7).

Будем рассматривать однокомпонентную жидкость. Тогда величинами  $\xi_\alpha(\mathbf{x})$  будут плотности  $\varepsilon$ ,  $\pi_k$ ,  $\rho$ . Входящие в (6.1.43) величины  $\partial \xi_\alpha / \partial Y_\rho$  могут быть выражены через термодинамический потенциал  $\Omega = \Omega(Y_0, Y_4 - Y_k^2/2Y_0)$  (см. (6.1.10)). Так как  $\xi_\alpha = \partial \frac{\Omega}{\mathcal{V}} / \partial Y_\alpha$ , то

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial Y_\rho} = \frac{\partial^2}{\partial Y_\rho \partial Y_\alpha} \frac{\Omega}{\mathcal{V}}. \quad (6.1.44)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению матрицы  $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  в области малых  $\mathbf{k}$ . С этой целью следует обратиться к уравнениям (4.4.7), (4.4.9) для  $\sigma_\alpha(\mathbf{k})$  и  $T_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  и разложить в них эти величины в ряд по степеням  $\mathbf{k}$ :

$$\sigma_\alpha(\mathbf{k}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_\alpha^{(n)}(\mathbf{k}), \quad T_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\alpha\beta}^{(n)}(\mathbf{k}),$$

где  $\sigma_\alpha^{(n)}$ ,  $T_{\alpha\beta}^{(n)}$  пропорциональны  $k^n$ . Подставляя эти разложения в (4.4.7), (4.4.9), нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k}) &= k_l \frac{\partial \xi_{\alpha l}}{\partial \xi_\beta}, \quad \xi_{\alpha l} = \text{Sp } \omega \hat{\xi}_{\alpha l}(0), \\ T_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k}) &= i k_l k_l Y_0^{-1} \frac{\partial Y_\beta}{\partial \xi_\rho}(\xi_{\alpha i}; \xi_{\rho l}). \end{aligned} \quad (6.1.45)$$

Используя далее формулы (6.1.29), (6.1.30) для кинетических коэффициентов, легко показать, что

$$\begin{aligned} T_{0\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}) &= i k^2 Y_0^{-2} \kappa \frac{\partial Y_\alpha}{\partial \xi_0}, \quad T_{4\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}) = 0, \\ T_{j\alpha}^{(2)}(\mathbf{k}) &= i Y_0^{-1} \frac{\partial Y_\alpha}{\partial \xi_l} \left\{ \eta (k^2 \delta_{jl} - k_j k_l) + \left( \zeta + \frac{4}{3} \eta \right) k_j k_l \right\}. \end{aligned} \quad (6.1.46)$$

Плотности потоков в состоянии статистического равновесия определяются, согласно (6.1.15), формулами

$$\begin{aligned} \xi_{0k} &= \frac{\Omega}{\mathcal{V}} \frac{Y_k}{Y_0^2} - \varepsilon_0 \frac{Y_k}{Y_0} - \frac{1}{2} \rho Y_k Y_0^{-3} Y_l^2, \\ \xi_{ik} &= \frac{\Omega}{\mathcal{V}} Y_0^{-1} \delta_{ik} + \rho Y_k Y_l Y_0^{-2}, \quad \xi_{4k} = -\rho Y_k Y_0^{-1} \end{aligned}$$

или

$$\xi_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\Omega}{\mathcal{V}} \frac{Y_k}{Y_0}. \quad (6.1.47)$$

Таким образом, матрица  $T_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{k})$  определяется только термодинамическим потенциалом  $\Omega$ . Матрица же  $T_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{k})$ , согласно (6.1.46), определяется не только термодинамическим потенциалом  $\Omega$ , но и кинетическими коэффициентами — коэффициентами первой и второй вязкости  $\eta$ ,  $\zeta$  и коэффициентом теплопроводности  $\kappa$ .

Как видно из (6.1.43), полюсы функций Грина (по переменной  $\omega$ ) являются нулями уравнения

$$\det(\omega - T(\mathbf{k})) \equiv \left(\omega - \frac{ik^2\eta}{\rho}\right)^2 \Delta(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \omega^3 - \omega \left\{ S^2 - \frac{i\kappa\omega}{\rho C_V} - \frac{i\omega}{\rho} \left( \frac{4}{3}\eta + \zeta \right) \right\} k^2 -$$

$$- \kappa \left\{ \omega \frac{4}{3} \frac{\eta + \zeta}{\rho^2 C_V} - \frac{iS^2}{\rho C_p} \right\} k^4, \quad (6.1.48)$$

где  $S$  — скорость звука и  $C_V, C_p$  — теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении

$$S = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s/p}, \quad C_V = \left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_p, \quad C_p = \left( \frac{\partial \rho v}{\partial T} \right)_p.$$

Решение уравнения (6.1.48) относительно  $k$  при малых  $\omega$  имеет вид

$$k = \omega/S + ik', \quad k' = \frac{i\omega^2}{2\rho S^3} \left\{ \frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p} \right) \right\}. \quad (6.1.49)$$

Эта величина определяет затухание звука, вызванное вязкостью и теплопроводностью.

Мы видим, что функции Грина в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  имеют полюсы, которые соответствуют слабо затухающим звуковым волнам, распространяющимся в жидкости.

Формулы (6.1.43), (6.1.44), (6.1.45) полностью определяют асимптотику функций Грина  $G_{\alpha\beta}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  в области малых  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Мы выпишем здесь явный вид функций Грина  $G_{\rho\rho}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $G_{\rho e}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  [50]:

$$G_{\rho\rho}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k^2\rho}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} \left( \omega + ik^2 \frac{\kappa}{\rho C_V} \right),$$

$$G_{\rho e}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k^2}{\Delta(\mathbf{k}, \omega)} \left\{ \omega \gamma\rho + \frac{ik^2\kappa}{\rho C_V} \left( \gamma\rho - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \right) \right\}. \quad (6.1.50)$$

Подчеркнем, что асимптотические формулы (6.1.50) справедливы в гидродинамическом пределе, когда  $\omega \ll \tau_r^{-1}$  и  $k \ll l^{-1}$ , где  $\tau_r$  — время установления локального статистического равновесия и  $l$  — средняя длина свободного пробега частиц (равная в случае жидкости среднему расстоянию между частицами).

## § 6.2. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

**6.2.1. Потoki гидродинамических величин.** В предыдущем параграфе, исходя из общей концепции сокращенного описания системы, мы получили уравнения гидродинамики нормальной жидкости. Аналогичным образом мы получим теперь



уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости (микроскопический вывод этих уравнений был впервые дан Боголюбовым [29]).

Сверхтекучая жидкость, в отличие от нормальной жидкости, характеризуется тем, что в ней число частиц с некоторым импульсом (равным нулю, если конденсат покоится) в определенном интервале температур макроскопически велико. По этой причине состояние статистического равновесия сверхтекучей жидкости является состоянием со спонтанно нарушенной симметрией относительно градиентных преобразований (см. 2.3.1). Нарушение симметрии состояния статистического равновесия сверхтекучей жидкости не позволяет использовать для ее описания уравнения гидродинамики нормальной жидкости.

Для нормальной жидкости мы получили уравнения движения, существенно используя трансформационные свойства относительно преобразований Галилея плотностей потоков различных гидродинамических величин, которые были связаны с трансформационными свойствами (6.1.13) равновесного статистического оператора нормальной жидкости. Для сверхтекучей жидкости ситуация существенно усложняется, так как ее статистический оператор такими свойствами не обладает.

Так как состояние статистического равновесия сверхтекучей жидкости является состоянием со спонтанно нарушенной симметрией, то его естественно описывать, используя метод квазисредних. Для этого необходимо, как мы видели в разделе 3.2.1, в гамильтониан, входящий в распределение Гиббса, ввести добавочное слагаемое  $\delta\mathcal{H} = \bar{v} \int d^3x \hat{f}(\mathbf{x})$ , где  $\hat{f}(\mathbf{x})$  — некоторый оператор (см. § 3.2) — такой, что модифицированный гамильтониан  $\mathcal{H}_{\bar{v}} = \mathcal{H} + \delta\mathcal{H}$  не коммутирует с оператором числа частиц  $N$ ,  $[N, \mathcal{H}_{\bar{v}}] \neq 0$ . При этом нарушится также симметрия состояния статистического равновесия относительно преобразований Галилея (гамильтониан  $\mathcal{H}_{\bar{v}}$  не будет обладать трансформационными свойствами (2.3.26) по отношению к преобразованиям Галилея), и именно по этой причине в случае сверхтекучей жидкости нельзя воспользоваться методом предыдущего параграфа для вычисления плотностей потоков, знание которых необходимо для получения уравнений гидродинамики.

Мы будем считать, что  $\mathcal{H}_{\bar{v}}$ , так же как и  $\mathcal{H}$ , коммутирует с оператором импульса  $[P_k, \mathcal{H}_{\bar{v}}] = 0$  (т. е. плотность  $\bar{v}\hat{f}(\mathbf{x})$  величины  $\delta\mathcal{H}$  является трансляционно-инвариантным оператором). При этом  $[P_k, \omega] = 0$ , где  $\omega$  — равновесный статистический оператор, соответствующий гамильтониану  $\mathcal{H}_{\bar{v}}$ :

$$\omega = \exp \{ \Omega - Y_0 \mathcal{H}' - Y_k P_k \}, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{H}_{\bar{v}} - vM, \quad v = \frac{\mu}{m} \quad (6.2.1)$$

( $Y_0, Y_k, -vY_0 = Y_4$  — термодинамические силы, характеризующие состояние статистического равновесия). Легко видеть, что

в состоянии, описываемом этим статистическим оператором. конденсат покоится. Действительно,

$$\text{Sp } \omega [P_k, a_p^+] = p_k \text{ Sp } \omega a_p^+,$$

а так как левая часть равенства равна нулю, то макроскопическое число частиц может находиться только в состоянии с импульсом  $p = 0$  (это число равно  $|\text{Sp } \omega a_p^+|^2$ , см. 3.2.1). Наша задача заключается теперь в определении средних значений операторов плотностей потоков энергии  $q_k$ , импульса  $t_{ik}$  и массы  $j_k$  в состоянии статистического равновесия, точнее говоря, в установлении связи между этими величинами и термодинамическим потенциалом  $\omega = \lim_{\tilde{v} \rightarrow 0} \lim_{V \rightarrow \infty} \Omega/V^{\alpha}$  [85].

Поскольку состояние (6.2.1) трансляционно инвариантно ( $[P_k, \omega] = 0$ ), то средние значения операторов  $\hat{q}_k, \hat{t}_{ik}, \hat{j}_k$  определяются согласно (2.2.39) — (2.2.41) формулами

$$\begin{aligned} q_k &= -\frac{i}{2} \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \hat{\varepsilon}(0)] \rangle, \\ t_{ik} &= -\langle \hat{\varepsilon}(0) \rangle \delta_{ik} - i \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \pi_i(0)] \rangle, \\ j_k &= -i \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}), \hat{\rho}(0)] \rangle, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где  $\langle \dots \rangle = \text{Sp } \omega \dots$ . Удобнее, однако, вначале вычислить величины

$$\begin{aligned} t'_{ik} &= -\langle \hat{\varepsilon}'(0) \rangle \delta_{ik} - i \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \hat{\pi}_i(0)] \rangle, \\ q'_k &= -\frac{i}{2} \int d^3x x_k \langle [\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \hat{\varepsilon}'(0)] \rangle, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

где

$$\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}_{\tilde{v}}(\mathbf{x}) - \frac{\mu}{m} \hat{\rho}(\mathbf{x})$$

и  $\hat{\varepsilon}_{\tilde{v}}(\mathbf{x})$  — оператор плотности «энергии», соответствующий «гамильтониану»  $\mathcal{H}_{\tilde{v}}$ . Найдем сперва  $t'_{ik}$ . Покажем предварительно, что интеграл  $\int d^3x x_k \hat{\pi}_i(\mathbf{x})$ , входящий в формулу для  $t'_{ik}$ , представляет собой генератор группы произвольных линейных преобразований

$$x_i \rightarrow x'_i = a_{ik} x_k. \quad (6.2.4)$$

Заметим для этого, что операторы  $\psi(\mathbf{x})$  и  $\psi'(\mathbf{x}) = \psi(a\mathbf{x}) |\det a|^{1/2}$  удовлетворяют одинаковым перестановочным соотношениям. Поэтому они связаны между собой унитарным преобразованием  $U_a$ , действующим в гильбертовом пространстве,

$$U_a \psi(\mathbf{x}) U_a^+ = \psi'(\mathbf{x}) = |\det a|^{1/2} \psi(a\mathbf{x}). \quad (6.2.5)$$

Это преобразование не связано с свойствами симметрии уравнений движения и поэтому не приводит к каким-либо законам сохранения. Рассматривая бесконечно малые преобразования (6.2.4)

$$a_{ik} = \delta_{ik} + \xi_{ik}, \quad |\xi| \ll 1$$

и полагая

$$U_a = 1 - i\xi_{ki}\Gamma_{ik},$$

(где  $\Gamma_{ik}$  — генератор группы преобразований (6.2.4), найдем из 6.2.5)

$$[\Gamma_{ik}, \psi(\mathbf{x})] = ix_i \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ik} \psi(\mathbf{x}),$$

откуда

$$\Gamma_{ik} = \int d^3x x_i \hat{\pi}_k(\mathbf{x}). \quad (6.2.6)$$

Учитывая (6.2.6), можно представить формулу (6.2.3) для  $t'_{ik}$  в виде

$$t'_{ik} = -\langle \hat{\varepsilon}'(0) \rangle \delta_{ik} - i \langle [\Gamma_{ki}, \hat{\varepsilon}'(0)] \rangle. \quad (6.2.7)$$

Термодинамический потенциал  $\Omega$ , согласно (6.2.1), определяется формулой

$$e^{-\Omega} = \text{Sp} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{Y}} d^3x \hat{h}(\mathbf{x}) \right\}, \quad \hat{h}(\mathbf{x}) = Y_0 \hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}) + Y_k \hat{\pi}_k(\mathbf{x}).$$

Чтобы вычислить  $t'_{ik}$ , рассмотрим унитарное преобразование оператора  $\hat{h}(\mathbf{x})$

$$U_a \hat{h}(\mathbf{x}) U_a^\dagger = \hat{h}_a(a\mathbf{x}) |\det a|. \quad (6.2.8)$$

(Эта формула служит определением оператора  $\hat{h}_a(\mathbf{x})$ .) Ясно, что

$$e^{-\Omega} = \text{Sp} U_a \exp \left\{ - \int_{\mathcal{Y}} d^3x \hat{h}(\mathbf{x}) \right\} U_a^\dagger = \text{Sp} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{Y}_a} d^3x \hat{h}_a(\mathbf{x}) \right\},$$

где  $\mathcal{Y}_a = \mathcal{Y} |\det a|$ . Так как  $\Omega$  пропорционально  $\mathcal{Y}$ , то

$$\exp(-\Omega/|\det a|) = \text{Sp} \exp \left\{ - \int_{\mathcal{Y}} d^3x \hat{h}_a(\mathbf{x}) \right\}.$$

Считая, что  $a_{ki} = \delta_{ki} + \xi_{ki}$ ,  $|\xi_{ki}| \ll 1$ , получим отсюда

$$\left\langle \frac{\partial \hat{h}_a(0)}{\partial \xi_{ki}} \right\rangle_{\xi=0} = \omega_{\mathcal{Y}} \delta_{ki}, \quad \omega_{\mathcal{Y}} = \lim_{\mathcal{Y} \rightarrow \infty} \Omega/\mathcal{Y}.$$

С другой стороны, так как для малых  $\xi_{ki}$ ,  $U_a = 1 - i\xi_{ki}\Gamma_{ik}$ , то, согласно (6.2.8),

$$i[\Gamma_{ik}, \hat{h}(0)] = \left( \frac{\partial \hat{h}_a(0)}{\partial \xi_{ki}} \right)_{\xi=0} - \delta_{ki} \hat{h}(0).$$

Поэтому

$$i \langle [\Gamma_{ik}, \hat{h}(0)] \rangle + \delta_{ki} \langle \hat{h}(0) \rangle = \omega_{\mathcal{Y}} \delta_{ki}.$$

Подставляя сюда приведенное выше выражение для  $\hat{h}(x)$  и учитывая (6.2.7), найдем

$$t'_{ik} = -\frac{\omega_{\nu}}{Y_0} \delta_{ik} + \frac{Y_l}{Y_0} \{ \delta_{ik} \langle \hat{\pi}_l(0) \rangle + i \langle [\Gamma_{ki}, \hat{\pi}_l(0)] \rangle \}.$$

Из соотношений (2.3.27) немедленно следует, что

$$\langle [\Gamma_{ki}, \hat{\pi}_l(0)] \rangle = i \delta_{kl} \langle \hat{\pi}_i(0) \rangle + i \delta_{ik} \langle \hat{\pi}_l(0) \rangle.$$

Замечая далее, что

$$\langle \hat{\pi}_i(0) \rangle = \partial \omega_{\nu} / Y_i,$$

найдем окончательно,

$$t'_{ik} = -\frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\omega_{\nu} Y_k}{Y_0}. \quad (6.2.9)$$

Перейдем теперь к вычислению  $q'_k$ . Воспользуемся для этого формулой

$$[w, a(x)] = -w \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} a(x; \lambda), \quad a(x; \lambda) = w^{-\lambda} a(x) w^{\lambda}$$

или

$$[w, a(x)] = w \int_0^1 d\lambda [\ln w, a(x; \lambda)],$$

откуда

$$[w, \hat{\varepsilon}'(x)] = w \int_0^1 d\lambda \{ -Y_0 [\mathcal{H}', \hat{\varepsilon}'(x; \lambda)] - Y_k [P_k, \hat{\varepsilon}'(x; \lambda)] \}. \quad (6.2.10)$$

Согласно (2.2.37)

$$i [\mathcal{H}', \hat{\varepsilon}'(x)] = -\partial q'_k(x) / \partial x_k,$$

$$q'_k(x) = \frac{i}{2} \int d^3 x' x'_k \int_0^1 d\xi [\hat{\varepsilon}'(x - (1 - \xi)x'), \hat{\varepsilon}'(x + \xi x')].$$

Так как  $[w, P_k] = 0$ , то, согласно (6.2.3),  $q'_k = \text{Sp } w q'_k(x)$ . Учитывая далее, что

$$[P_k, \hat{\varepsilon}'(x)] = i \frac{\partial \hat{\varepsilon}'(x)}{\partial x_k},$$

перепишем формулу (6.2.10) в виде

$$\begin{aligned} [w, \hat{\varepsilon}'(x)] &= \\ &= -i \frac{\partial}{\partial x_k} w \int_0^1 d\lambda \{ Y_0 (q'_k(x; \lambda) - \langle q'_k \rangle) + Y_k (\hat{\varepsilon}'(x; \lambda) - \langle \hat{\varepsilon}' \rangle) \}. \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Заметим теперь, что

$$i \int d^3x x_l \langle [\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \hat{\xi}'_\alpha(0)] \rangle = i \int d^3x x_l \text{Sp} [w, \hat{\varepsilon}'(\mathbf{x})] \hat{\xi}'_\alpha(0), \quad (6.2.12)$$

где  $\hat{\xi}'_0(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}'(\mathbf{x})$ ,  $\hat{\xi}'_k(\mathbf{x}) = \hat{\pi}_k(\mathbf{x})$ .

Подставляя (6.2.11) в (6.2.12) и интегрируя по частям, получим, учитывая принцип ослабления корреляций,

$$\begin{aligned} -i \int d^3x x_l \langle [\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \hat{\xi}'_\alpha(0)] \rangle = \\ = \int_0^1 d\lambda \int d^3x \text{Sp} w(\hat{\xi}'_\alpha(\mathbf{x}; \lambda) - \langle \hat{\xi}'_\alpha \rangle) (Y_0 \hat{q}'_l(0) + Y_l \hat{\varepsilon}'(0)). \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial w}{\partial Y_\alpha} = - \int_0^1 d\lambda w(\hat{\xi}'_\alpha(\mathbf{x}, \lambda) - \langle \hat{\xi}'_\alpha \rangle), \quad \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

то

$$i \int d^3x x_l \langle [\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}), \hat{\xi}'_\alpha(0)] \rangle = Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_\alpha} + Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_\alpha}, \quad \varepsilon' = \langle \hat{\varepsilon}'(0) \rangle.$$

Полагая в этой формуле  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = k$ , получим, используя определения (6.2.3),

$$-Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_0} - Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_0} = 2q'_l, \quad -Y_0 \frac{\partial q'_l}{\partial Y_k} - Y_l \frac{\partial \varepsilon'}{\partial Y_k} = t'_{kl} + \varepsilon' \delta_{kl}. \quad (6.2.13)$$

Первое из этих уравнений можно рассматривать как дифференциальное уравнение для определения  $q'_l$ . Замечая, что  $\varepsilon' = \partial \omega_{\bar{\nu}} / \partial Y_0$ , найдем

$$q'_l = -Y_l \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_{\bar{\nu}}}{Y_0} + \frac{C_l}{Y_0}, \quad (6.2.14)$$

где  $C_l$  — постоянные интегрирования, могущие зависеть от  $Y_k$ . Подставляя (6.2.14) во второе из уравнений (6.2.13) и используя найденное выражение (6.2.9) для  $t'_{kl}$ , получим  $\partial C_l / \partial Y_k = 0$ , т. е.  $C_l$  не зависит не только от  $Y_0$ , но и от  $Y_k$ . Поскольку кроме  $Y_k$  в нашем распоряжении нет другой векторной величины, то следует считать, что  $C_l = 0$ . Таким образом,

$$q'_l = - \left( \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_{\bar{\nu}} Y_l}{Y_0} \right)_\mu. \quad (6.2.15)$$

Потенциал  $\omega_{\bar{\nu}}$  является функцией переменных  $Y_0, Y_k, \nu = \frac{\mu}{m}$ . Считая независимыми переменными  $Y_0, Y_k$  и  $Y_4 = -Y_0 \nu$

$$\omega_{\bar{\nu}} = \omega_{\bar{\nu}}(Y_0, Y_k, Y_4) \equiv \omega_{\bar{\nu}}(Y_0, Y_k, -Y_0 \nu)$$

и замечая, что

$$\partial \omega_{\bar{\nu}} / \partial Y_4 = \rho$$

( $\rho$  — плотность сверхтекучей жидкости), перепишем формулы (6.2.15), (6.2.9) в виде

$$q'_l = - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega_0 Y_l}{Y_0} + \rho \frac{\mu}{m} \frac{Y_l}{Y_0}, \quad t'_{lk} = - \frac{\partial}{\partial Y_l} \frac{\omega_0 Y_k}{Y_0}. \quad (6.2.16)$$

Перейдем теперь к определению величин  $q_k$ ,  $t_{ik}$ ,  $j_k$ . Учитывая (6.2.2), (6.2.3), а также определение оператора  $\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x})$ :

$$\hat{\varepsilon}'(\mathbf{x}) = \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \bar{\nu} \hat{f}(\mathbf{x}) - \frac{\mu}{m} \hat{\rho}(\mathbf{x}),$$

( $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})$  — оператор плотности энергии), получим

$$q'_k = q_k - i \frac{\mu}{m} \langle [\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k] \rangle + \frac{i}{2} \left( \frac{\mu}{m} \right)^2 \langle [\hat{\rho}(0), \Gamma_k] \rangle + \bar{\nu} D_k, \\ t'_{ik} = t_{ik} + \frac{\mu}{m} \rho \delta_{ik} - i \frac{\mu}{m} \langle [\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k] \rangle + \bar{\nu} D_{ik}, \quad (6.2.17)$$

где

$$D_k = i \left\langle \left[ \hat{\varepsilon}(0), \int d^3 x x_k \hat{f}(\mathbf{x}) \right] \right\rangle - i \frac{\mu}{m} \langle [\hat{f}^2(0), \Gamma_k] \rangle + \\ + \frac{1}{2} i \bar{\nu} \left\langle \left[ \hat{f}(0), \int d^3 x x_k \hat{f}(\mathbf{x}) \right] \right\rangle,$$

$$D_{ik} = -\delta_{ik} \langle \hat{f}(0) \rangle + i \langle [\hat{f}^2(0), \Gamma_{ki}] \rangle, \quad \Gamma_k = \int d^3 x x_k \hat{\rho}(\mathbf{x}).$$

(Величина  $\Gamma_k$  представляет собой генератор группы преобразований Галилея, см. (2.3.25).) Коммутаторы, входящие в величины  $D_k$  и  $D_{ik}$ , представляют собой, в силу канонических перестановочных соотношений, квазилокальные операторы. Поэтому средние от них, согласно методу квазисредних, имеют конечный предел при  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  и  $\bar{\nu} \rightarrow 0$  (сначала осуществляется термодинамический предельный переход  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$ ). Отсюда, переходя в (6.2.17) к термодинамическому пределу  $\mathcal{V} \rightarrow \infty$  и устремляя затем  $\bar{\nu}$  к нулю, получим, согласно (6.2.16), следующие выражения для средних значений плотностей потоков энергии и импульса сверхтекучей жидкости в состоянии статистического равновесия:

$$-q_k \equiv \langle \hat{q}_k \rangle = - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \rho \frac{\mu}{m} \frac{Y_k}{Y_0} + i \frac{\mu}{m} \langle [\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k] \rangle - \\ - \frac{i}{2} \left( \frac{\mu}{m} \right)^2 \langle [\hat{\rho}(0), \Gamma_k] \rangle, \\ t_{ik} \equiv \langle \hat{t}_{ik} \rangle = - \frac{\partial}{\partial Y_l} \frac{\omega Y_k}{Y_0} - \rho \frac{\mu}{m} \delta_{ik} + i \frac{\mu}{m} \langle [\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k] \rangle.$$

Так как  $\Gamma_k$  — генератор преобразований Галилея, то

$$i \langle [\hat{\varepsilon}(0), \Gamma_k] \rangle = \hat{\pi}_k(0), \quad i \langle [\hat{\pi}_i(0), \Gamma_k] \rangle = \delta_{ik} \hat{\rho}(0), \quad \langle [\hat{\rho}(0), \Gamma_k] \rangle = 0$$

(см формулы (2.3.26)). Поэтому

$$q_k = - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + \rho \frac{\mu}{m} \frac{Y_k}{Y_0} + \frac{\mu}{m} \pi_k, \quad t_{ik} = - \frac{\partial}{\partial Y_i} \frac{\omega Y_k}{Y_0}, \quad (6.2.18)$$

где  $\pi_k$  — плотность импульса сверхтекучей жидкости.

Оператор плотности потока массы совпадает с оператором плотности импульса. Поэтому

$$j_k = \pi_k = \partial \omega / \partial Y_k. \quad (6.2.19)$$

(Мы учли, что величина  $\pi_k$ , согласно определению термодинамического потенциала, равна  $\partial \omega / \partial Y_k$ .)

Формулы (6.2.18), (6.2.19) решают поставленную задачу: они связывают потоки в состоянии статистического равновесия с термодинамическим потенциалом  $\omega(Y_0, Y_k, Y_4)$ . Заметим, что эти формулы в равной мере справедливы и для нормальной жидкости. Но в то время как для нормальной жидкости  $\omega$  является функцией только от двух переменных  $Y_0, Y_4 - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2$ ,

$\omega = \omega(Y_0, Y_4 - \frac{1}{2} Y_0^{-1} Y_k^2)$ , для сверхтекучей жидкости переменные  $Y_0, Y_4, Y_k^2$  входят в термодинамический потенциал независимым образом, т. е.  $\omega = \omega(Y_0, Y_4, Y_k^2)$ . Поэтому плотность импульса для нормальной жидкости можно согласно (6.2.19) представить в виде

$$\pi_k = - \frac{Y_k}{Y_0} \frac{\partial \omega}{\partial Y_4},$$

а так как  $\partial \omega / \partial Y_4 = \rho$ , то  $\pi_k = -\rho Y_k / Y_0$ . Эта формула показывает, что величина  $-Y_k / Y_0$  представляет собой скорость жидкости  $u_k$ , так что  $\pi_k = \rho u_k$ . При этом плотность потока энергии приобретает вид

$$q_k = - \frac{\partial}{\partial Y_0} \frac{\omega Y_k}{Y_0}.$$

В случае же сверхтекучей жидкости мы можем только написать:

$$\pi_k = - \frac{Y_k}{Y_0} \left( -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y_k^2} \right).$$

Входящую сюда величину  $-Y/Y_0 \equiv u_n$  можно интерпретировать как скорость *нормальной компоненты* жидкости, а величину

$$\rho_n = -2Y_0 \frac{\partial \omega}{\partial Y_k^2} \quad (6.2.20)$$

— как плотность массы *нормальной компоненты* жидкости, так что

$$\pi = \rho_n u_n. \quad (6.2.21)$$

Такая интерпретация, как мы убедимся в разделе 6.2.3, находится в соответствии с трансформационными свойствами плотностей потоков.

Ясно, что величина  $\rho_n$  не совпадает с полной плотностью жидкости  $\rho$ , которая всегда определяется формулой

$$\rho = \partial\omega/\partial Y_4.$$

По этой причине величину

$$\rho_s = \rho - \rho_n \quad (6.2.22)$$

следует интерпретировать как плотность *сверхтекучей составляющей* жидкости. В состоянии, описываемом статистическим оператором (6.2.1), скорость «сверхтекучей составляющей»  $u_s$  равна нулю. Именно поэтому плотность импульса (или плотность потока массы) определяется формулой (6.2.21). Как мы увидим в разделе 6.2.3, в общем случае, когда  $u_s$  отлично от нуля, величина  $\pi$  будет определяться формулой

$$\pi = \rho_n u_n + \rho_s u_s. \quad (6.2.23)$$

Заметим в заключение этого раздела, что плотности потоков энергии  $q_k = \zeta_{0k}$ , импульса  $t_{lk} = \zeta_{lk}$  и массы  $j_k = \zeta_{4k}$  могут быть, согласно (6.2.18), (6.2.19), записаны в виде следующей общей формулы:

$$\zeta_{\alpha k} = -\frac{\partial}{\partial Y_\alpha} \frac{\omega Y_k}{Y_0} + Y_k \rho_s \frac{\partial}{c Y_\alpha} \frac{Y_4}{Y_0}. \quad (6.2.24)$$

Отметим, что полученные формулы для потоков справедливы не только для вырожденных бозе-систем, но также и для вырожденных ферми-систем.

**6.2.2. Уравнение движения для статистического оператора сверхтекучей жидкости.** Чтобы установить уравнения движения сверхтекучей жидкости, нам нужно, во-первых, ввести скорость сверхтекучей компоненты и, во-вторых, иметь возможность описывать пространственно неоднородные состояния жидкости.

Покажем прежде всего, как описывать состояние статистического равновесия с отличной от нуля скоростью сверхтекучей компоненты. Для этого необходимо совершить над статистическим оператором  $\omega$  (6.2.1) унитарное преобразование  $U_{u_s}$ , соответствующее преобразованию Галилея со скоростью  $u_s$ :

$$\omega \rightarrow \omega_{u_s} \equiv U_{u_s}^+ \omega U_{u_s}. \quad (6.2.25)$$

Легко видеть, что в состоянии  $\omega_{u_s}$ , в отличие от состояний  $\omega$ , макроскопическое число частиц обладает не нулевой скоростью, а скоростью  $u_s$ . Действительно,

$$\mathcal{Y}^{-1/2} \text{Sp } \omega_{u_s} a_p^+ = \mathcal{Y}^{-1/2} \text{Sp } \omega U_{u_s} a_p^+ U_{u_s}^+,$$

а так как

$$U_{u_s} a_p^+ U_{u_s}^+ = a_{p-mu_s}^+,$$

то, согласно (6.2.1),

$$\mathcal{Y}^{-1/2} \text{Sp } \omega_{u_s} a_p^+ \sim \delta_{p, mu_s},$$

что и доказывает наше утверждение.



Таким образом, параметр  $u_s$ , входящий в статистический оператор  $w_{u_s}$ , можно интерпретировать как скорость частиц конденсата или как скорость сверхтекучей компоненты жидкости.

Заметим, что новый статистический оператор  $w_{u_s}$  не будет коммутировать не только с оператором массы, но и с оператором импульса системы. Однако он будет коммутировать с оператором  $P - u_s M$ , где  $M$  — оператор массы системы:

$$[P - u_s M, w_{u_s}] = 0. \quad (6.2.26)$$

Действительно,  $[P, w] = 0$ , т. е.  $[U_{u_s}^+ P U_{u_s}, w_{u_s}] = 0$ . Но  $U_{u_s}^+ P U_{u_s} = P - u_s M$  (см. (2.3.26)), и мы приходим к формуле (6.2.26).

Так как

$$U_{u_s} \psi(\mathbf{x}) U_{u_s}^+ = \psi(\mathbf{x}) e^{i m u_s \mathbf{x}}, \quad (6.2.27)$$

то справедливо соотношение

$$u_s = \frac{1}{m} \nabla \varphi(\mathbf{x}), \quad (6.2.28)$$

где  $\varphi(\mathbf{x})$  — фаза величины  $\text{Sp } w_{u_s} \psi(\mathbf{x})$ ,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \text{Im} \ln \text{Sp } w_{u_s} \psi(\mathbf{x}).$$

Перейдем теперь к описанию неоднородных и неравновесных состояний сверхтекучей жидкости. Мы видели, что статистический оператор  $w_{u_s}$  не коммутирует с оператором импульса. По этой причине средние значения градиентно-неинвариантных комбинаций полевых операторов  $\psi(\mathbf{x})$ ,  $\psi^+(\mathbf{x})$  не будут трансляционно-инвариантными. Действительно, рассмотрим величину

$$\text{Sp } w_{u_s} \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi^+(\mathbf{x}_k) \psi(\mathbf{y}_1) \dots \psi(\mathbf{y}_l).$$

Ее можно представить в виде

$$\eta(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \exp i m u_s (\mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_l - \mathbf{x}_1 - \dots - \mathbf{x}_k),$$

где  $\eta$  — трансляционно-инвариантная величина, т. е.

$$\begin{aligned} \eta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{a}; \mathbf{y}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{y}_l + \mathbf{a}) = \\ = \eta(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k; \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l) \end{aligned}$$

( $\mathbf{a}$  — вектор трансляции). Эта формула показывает, что градиентно-неинвариантные величины, возникающие при  $k \neq l$ , при трансляции системы приобретают фазовый множитель вида  $\exp i m u_s \mathbf{a} (l - k)$ . Физические же величины, представляющие собой средние значения градиентно-инвариантных комбинаций полевых операторов, будут трансляционно-инвариантными.

Для того чтобы в дальнейшем можно было строить теорию возмущений по градиентам, необходимо устранить из многочастичных функций распределения быстро меняющиеся фазовые

множители  $\exp i\mu_i x$ . Для этого следует вместо многочастичных функций распределения  $\text{Sp } \rho(t) \psi^+(x_1) \dots \psi(y_l)$  рассматривать величины

$$\eta_t(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) = \exp i(\varphi(x_1, t) + \dots + \varphi(x_k, t) - \varphi(y_1, t) - \dots - \varphi(y_l, t)) \cdot \text{Sp } \rho(t) \psi^+(x_1) \dots \psi^+(x_k) \psi(y_1) \dots \psi(y_l)$$

где  $\rho(t)$  — статистический оператор в момент времени  $t$  и  $\eta_t(x) \equiv \equiv \eta(x, t)$  и  $\varphi(x, t)$  — модуль и фаза  $\text{Sp } \rho(t) \psi(x)$ :

$$\text{Sp } \rho(t) \psi(x) = \eta(x, t) \exp i\varphi(x, t). \quad (6.2.29)$$

Для равновесного состояния величины  $\eta_t(x_1, \dots; \dots, y_l)$  не меняются при трансляции системы, в случае же неравновесных пространственно-неоднородных состояний они испытывают при трансляции изменение, которое будет малым в случае малой пространственной неоднородности.

По аналогии с (6.2.28) величину

$$u_s(x, t) = \frac{1}{m} \nabla \varphi(x, t) \quad (6.2.30)$$

мы будем интерпретировать как локальную скорость сверхтекучей компоненты.

Величину  $\eta_t(x_1 + x, \dots; \dots, y_l + x)$  можно представить в виде среднего от произведения операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$  с некоторым статистическим оператором  $\bar{\rho}$ , отличающимся от  $\rho(t)$ :

$$\eta_t(x_1 + x, \dots; \dots, y_l + x) = \text{Sp } \bar{\rho}(x, t) \psi^+(x_1) \dots \psi(y_l).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(x, t) &= e^{iP_x} U_\varphi(t) \rho(t) U_\varphi^+(t) e^{-iP_x}, \\ U_\varphi(t) &= \exp \left\{ -\frac{i}{m} \int d^3x \varphi(x, t) \hat{\rho}^{(m)}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.31)$$

Так как, согласно нашему предположению,  $\eta_t(x_1 + x, \dots; \dots, y_l + x)$  является медленно меняющейся функцией  $x$ , то этим же свойством будет обладать и статистический оператор  $\bar{\rho}(x, t)$ . Оператор  $\bar{\rho}(x, t)$  удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$-i \frac{\partial \bar{\rho}(x, t)}{\partial x_k} = [P_k, \bar{\rho}(x, t)]. \quad (6.2.32)$$

Получим теперь уравнение движения для  $\bar{\rho}$ . Заметим для этого, что гамильтониан  $\mathcal{H}$  имеет структуру

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \int d^3x \nabla \psi^+(x) \nabla \psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^3x_1 d^3x_2 \psi^+(x_1) \psi^+(x_2) V(x_1 - x_2) \psi(x_2) \psi(x_1). \end{aligned}$$

Поэтому, учитывая, что  $U_\varphi \psi(\mathbf{x}) U_\varphi^\dagger = \psi(\mathbf{x}) \exp i\varphi(\mathbf{x})$ , имеем

$$e^{iPx} U_\varphi \mathcal{H} U_\varphi^\dagger e^{-iPx} = \mathcal{H} + \int d^3x' u_s(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \hat{\pi}(\mathbf{x}') + \\ + \frac{1}{2} \int d^3x' u_s^2(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}').$$

Замечая, что

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}, \rho(t)], \quad \frac{\partial U_\varphi}{\partial t} = -\frac{i}{m} \int d^3x \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}) U_\varphi,$$

получим

$$i \frac{\partial \bar{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = [\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t), \bar{\rho}(\mathbf{x}, t)], \quad (6.2.33)$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H} + \int d^3x' u_s(\mathbf{x} + \mathbf{x}', t) \hat{\pi}(\mathbf{x}') + \\ + \frac{1}{m} \int d^3x' \left\{ \frac{\partial \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{x}', t)}{\partial t} + \frac{1}{2} m u_s^2(\mathbf{x} + \mathbf{x}', t) \right\} \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}').$$

Для того чтобы получить замкнутое уравнение для  $\bar{\rho}$ , мы должны исключить из  $\tilde{\mathcal{H}}$  фазу  $\varphi$  и, кроме того, получить уравнение движения для скорости  $u_s(\mathbf{x}, t)$ . Заметим с этой целью, что, согласно формулам (6.2.29), (6.2.31),

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \psi(0) > 0, \quad \text{Im Sp } \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \psi(0) = 0. \quad (6.2.34)$$

Дифференцируя второе из этих соотношений по  $t$  и учитывая (6.2.33), получим

$$\frac{\partial \eta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} m u_s^2(\mathbf{x}, t) = -\bar{\mu}(\mathbf{x}, t), \quad (6.2.35)$$

$$\bar{\mu}(\mathbf{x}, t) =$$

$$= -\eta^{-1}(\mathbf{x}, t) \left\{ \frac{1}{2m} \Delta \eta(\mathbf{x}, t) + \text{Re Sp } \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) [V, \psi(0)] \right\}. \quad (6.2.36)$$

Из этого уравнения следует, что

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( m^{-1} \bar{\mu} + \frac{1}{2} u_s^2 \right) = 0, \quad \text{rot } u_s = 0. \quad (6.2.37)$$

Фаза  $\varphi$  исключается из эффективного гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t)$  с помощью уравнения (6.2.35)

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H} + \int d^3x' u_s(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \hat{\pi}(\mathbf{x}') - \frac{1}{m} \int d^3x' \bar{\mu}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}'). \quad (6.2.38)$$

Таким образом, статистический оператор  $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению (6.2.33), где эффективный гамильтониан  $\tilde{\mathcal{H}}$  оп-

ределяется формулой (6.2.38), а величины  $\bar{\mu}$  и  $u_s$  — формулами (6.2.36), (6.2.37).

Переход от статистического оператора  $\rho(t)$  к статистическому оператору  $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$  можно рассматривать как переход к новому представлению, удобному для исследования слабонеоднородных состояний. В этом представлении можно определить операторы  $\bar{a}(\mathbf{x}, t)$ , соответствующие исходным операторам  $a(\mathbf{x})$ , таким образом, чтобы

$$\text{Sp } \rho(t) a(\mathbf{x}) = \text{Sp } \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \bar{a}(\mathbf{x}, t).$$

Операторы  $\bar{a}(\mathbf{x}, t)$  связаны, очевидно, с исходными операторами  $a(\mathbf{x})$  преобразованием

$$\bar{a}(\mathbf{x}, t) = e^{iP\mathbf{x}} U_{\Phi}(t) a(\mathbf{x}) U_{\Phi}^{\dagger}(t) e^{-iP\mathbf{x}}. \quad (6.2.39)$$

В частности, используя выражения (2.2.31), для  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\pi}$ ,  $\hat{\rho}^{(m)}$ , получим

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\varepsilon}(0) + \hat{\pi}(0) u_s(\mathbf{x}, t) + \hat{\rho}^{(m)}(0) \frac{1}{2} u_s^2(\mathbf{x}, t), \\ \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\pi}(0) + \hat{\rho}^{(m)}(0) u_s(\mathbf{x}, t), \\ \hat{\rho}^{(m)}(\mathbf{x}, t) &= \hat{\rho}^{(m)}(0). \end{aligned} \quad (6.2.40)$$

**6.2.3. Уравнения гидродинамики идеальной сверхтекучей жидкости.** В двух предыдущих разделах мы получили выражения для плотностей потоков энергии, импульса и массы и установили уравнения движения для статистического оператора сверхтекучей жидкости. Основываясь на этих результатах, мы можем теперь вывести уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. Мы ограничимся выводом только уравнений гидродинамики идеальной жидкости, т. е. не будем учитывать диссипативных процессов в сверхтекучей жидкости. Для этого достаточно знания статистического оператора в нулевом приближении по градиентам.

Равновесное состояние сверхтекучей жидкости, как мы видели, характеризуется скоростью сверхтекучей компоненты  $u_s$  и плотностями  $\zeta_{\alpha}$ , т. е. плотностями энергии  $\varepsilon$ , импульса  $\pi$  и массы  $\rho$ , или, что то же самое, переменными  $u_s$ ,  $Y_{\alpha}$  (все они не зависят от координат). Поэтому естественно считать, что неравновесное состояние сверхтекучей жидкости при временах, превосходящих время установления  $\tau_r$  локального распределения Гиббса, будет характеризоваться локальными переменными  $u_s(\mathbf{x}, t)$ ,  $\zeta_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ , которые являются медленно меняющимися функциями координат и времени. Это значит, что статистический оператор  $\bar{\rho}(\mathbf{x}, t)$  при  $t \gg \tau_r$  будет универсальным функционалом  $u_s$ ,  $\zeta_{\alpha}$ :

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \bar{\sigma}(\mathbf{x}; u_s(\mathbf{x}', t), \zeta_{\alpha}(\mathbf{x}', t)), \quad (6.2.41)$$

зависящим от времени  $t$  только через посредство переменных  $u_s(x', t)$ ,  $\zeta_\alpha(x', t)$ , причем этот функционал не меняется при одновременной трансляции  $x \rightarrow x + a$ ,  $u_s(x', t) \rightarrow u_s(x' - a, t)$ ,  $\zeta_\alpha(x', t) \rightarrow \zeta_\alpha(x' - a, t)$ .

Огрубленный статистический оператор  $\bar{\sigma}$  должен, очевидно, удовлетворять соотношениям

$$\text{Sp } \bar{\sigma}(x; u_s, \zeta_\alpha) \hat{\zeta}_\alpha(x, t) = \zeta_\alpha(x, t).$$

Уравнения движения (6.2.33) для огрубленного статистического оператора  $\bar{\sigma}$  можно представить в виде

$$[\hat{\mathcal{H}}(x, t), \bar{\sigma}(x; u_s, \zeta_\alpha)] = \\ = i \int d^3x' \left\{ \frac{\delta \bar{\sigma}(x; u_s, \zeta)}{\delta \zeta_\alpha(x, t)} \frac{\partial \zeta_\alpha(x, t)}{\partial t} + \frac{\delta \bar{\sigma}(x; u_s, \zeta)}{\delta u_s(x, t)} \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial t} \right\}. \quad (6.2.42)$$

Входящие сюда величины  $\partial u_s / \partial t$  и  $\partial \zeta_\alpha / \partial t$  должны быть исключены — первая с помощью уравнения (6.2.37), а вторая с помощью законов сохранения

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} = - \frac{\partial \zeta_{\alpha k}}{\partial x_k}, \quad (6.2.43)$$

где  $\zeta_{\alpha k}(x; u_s, \zeta) = \text{Sp } \bar{\sigma}(x; u_s, \zeta) \hat{\zeta}_{\alpha k}(x, t)$ . Эти уравнения вместе с уравнением (6.2.37) для  $u_s$  представляют собой, по сути дела, уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. Однако для того, чтобы эти уравнения образовывали замкнутую систему уравнений, необходимо найти огрубленный статистический оператор  $\bar{\sigma}$  как функционал величин  $u_s, \zeta_\alpha$ .

Мы будем решать эту задачу в рамках теории возмущений, считая градиенты  $u_s$  и  $\zeta_\alpha$  малыми. В этом случае статистический оператор  $\bar{\sigma}(x; u_s, \zeta)$  можно разложить в ряд по градиентам величин  $u_s, \zeta_\alpha$ :

$$\bar{\sigma}(x; u_s, \zeta) = \bar{\sigma}_0(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + \\ + \frac{\partial \zeta_\alpha(x, t)}{\partial x_k} \bar{\sigma}_{\alpha k}(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x_k} \bar{\sigma}_k(u_s(x, t), \zeta(x, t)) + \dots, \quad (6.2.44)$$

где  $\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_{\alpha k}, \bar{\sigma}_k$  зависят от  $x$  только через посредство величин  $u_s(x, t), \zeta_\alpha(x, t)$  в точке  $x$ .

Операторы потоков  $\hat{\zeta}_{\alpha k}(x, t)$  в рассматриваемом нами представлении зависят, согласно (6.2.39), нелокальным образом от скорости сверхтекучей компоненты  $u_s(x, t)$ . Поэтому они также должны быть разложены в ряд по степеням градиентов  $u_s(x, t)$ :

$$\hat{\zeta}_{\alpha k}(x, t) = \hat{\zeta}_{\alpha k}^{(0)}(x, t) + \hat{\zeta}_{\alpha k}^{(1)}(x, t) + \dots,$$

где операторы  $\hat{\zeta}_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}, t)$  определяются, согласно (6.2.40), (2.2.39) — (2.2.41) формулами

$$\hat{\zeta}_{0k}^{(0)}(\mathbf{x}, t) \equiv \hat{q}_k^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \hat{q}_k(0) + u_{sl}(\mathbf{x}, t) \hat{t}_{lk}(0) + \frac{1}{2} u_s^2(\mathbf{x}, t) \hat{\pi}_k(0) + u_{sk}(\mathbf{x}, t) \left\{ \hat{\varepsilon}(0) + u_{sl}(\mathbf{x}, t) \hat{\pi}_l(0) + \frac{1}{2} u_s^2(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}^{(m)}(0) \right\}, \quad (6.2.45)$$

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{lk}^{(0)}(\mathbf{x}, t) &= \hat{t}_{lk}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_{lk}(0) + u_{sl}(\mathbf{x}, t) \hat{\pi}_k(0) + \\ &+ u_{sk}(\mathbf{x}, t) \hat{\pi}_l(0) + u_{sk}(\mathbf{x}, t) u_{sl}(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}^{(m)}(0), \\ \hat{\zeta}_{4k}^{(0)}(\mathbf{x}, t) &\equiv \hat{j}_k^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \hat{j}_k(0) + u_{sk}(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}^{(m)}(0). \end{aligned}$$

Здесь операторы  $\hat{j}_k(0)$ ,  $\hat{t}_{lk}(0)$ ,  $\hat{q}_k(0)$  определяются формулами (2.2.39) — (2.2.41) и берутся в точке  $\mathbf{x} = 0$ . (Операторы  $\zeta_{\alpha k}^{(1)}$  пропорциональны  $\partial u_s / \partial x_k$  и нам не понадобятся при рассмотрении идеальной сверхтекучей жидкости.)

Разложение (6.2.44) статистического оператора  $\bar{\sigma}$  индуцирует разложение по градиентам величин  $\bar{\mu}$  и  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(\mathbf{x}, t) &= \mu_0(\mathbf{x}, t) + \mu_1(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ \eta(\mathbf{x}, t) &= \eta_0(\mathbf{x}, t) + \eta_1(\mathbf{x}, t) + \dots, \\ \mu_0(\mathbf{x}, t) &= -\eta_0^{-1}(\mathbf{x}, t) \operatorname{Re} \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_0(u_s(\mathbf{x}, t), \zeta(\mathbf{x}, t)) [V, \psi(0)], \\ \eta_0(\mathbf{x}, t) &= \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_0(u_s(\mathbf{x}, t), \zeta(\mathbf{x}, t)) \psi(0). \end{aligned} \quad (6.2.46)$$

В свою очередь это разложение индуцирует разложение эффективного гамильтониана  $\tilde{\mathcal{H}}$  в ряд по градиентам

$$\tilde{\mathcal{H}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathcal{H}}_0(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathcal{H}}_1(\mathbf{x}, t) + \dots,$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(\mathbf{x}, t) = \mathcal{H} + \mathbf{P}u_s(\mathbf{x}, t) - m^{-1}M\mu_0(\mathbf{x}, t). \quad (6.2.47)$$

(Оператор  $\tilde{\mathcal{H}}_1$  нам не понадобится, и явный вид его мы не будем приводить.) Статистический оператор  $\bar{\sigma}_0$ , согласно (6.2.42), (6.2.32), (6.2.34) должен удовлетворять уравнениям

$$[\tilde{\mathcal{H}}_0(\mathbf{x}, t), \bar{\sigma}_0(u_s, \zeta)] = 0, \quad [P_k, \bar{\sigma}_0(u_s, \zeta)] = 0, \quad (6.2.48)$$

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_0(u_s, \zeta) \psi(0) = 0, \quad \operatorname{Sp} \bar{\sigma}_0(u_s, \zeta) \psi(0) > 0. \quad (6.2.49)$$

Кроме того, так как  $\operatorname{Sp} \bar{\sigma}(\mathbf{x}; u_s, \zeta) \tilde{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t)$ , то должно выполняться соотношение

$$\operatorname{Sp} \bar{\sigma}_0(u_s, \zeta) \tilde{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \zeta_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (6.2.50)$$

Найдя  $\bar{\sigma}_0$  из этих уравнений, можно, согласно уравнениям (6.2.37), (6.2.43), получить уравнения гидродинамики идеальной

сверхтекучей жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ m^{-1} \mu_0 + \frac{1}{2} u_s^2 \right\} &= 0, \\ \text{rot } u_s &= 0, \quad \frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_{\alpha k}^{(0)}}{\partial x_k} = 0, \end{aligned} \quad (6.2.51)$$

где  $\mu_0$  определяется формулой (6.2.46) и

$$\zeta_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \bar{\sigma}_0(\mathbf{u}_s, \zeta) \hat{\zeta}_{\alpha k}^{(0)}(\mathbf{x}, t). \quad (6.2.52)$$

Мы покажем, что в качестве  $\bar{\sigma}_0$  должен быть взят оператор  $\bar{\sigma}_0(\mathbf{u}_s, \zeta) = \exp \{ \Omega - Y_0(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\bar{v}} - Y_3(\mathbf{x}, t) P_k - Y_4(\mathbf{x}, t) M \} \equiv w_{\bar{v}}$ , (6.2.53)

который удовлетворяет уравнениям (6.2.48), (6.2.49) в смысле квазисредних; при этом все средние, входящие в уравнения (6.2.46), также следует понимать в смысле квазисредних (см. 3.2.1):

$$\eta_0 = \{ \psi(0) \}, \quad \text{Im } \{ \psi(0) \} = 0, \quad \mu_0 = -\eta_0^{-1} \text{Re } \{ [V, \psi(0)] \}. \quad (6.2.54)$$

Функции  $Y_0, Y_k, Y_4$ , входящие в (6.2.53), определяются, согласно (6.2.50), из уравнений

$$\zeta_\alpha(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } w_{\bar{v}}(\mathbf{x}, t) \hat{\zeta}_\alpha(\mathbf{x}, t). \quad (6.2.55)$$

Покажем, что величина  $\mu_0$ , входящая в уравнение (6.2.51), для скорости сверхтекучей компоненты равна

$$\mu_0 = -mY_4/Y_0. \quad (6.2.56)$$

Заметим с этой целью, что при любом  $\bar{v}$  справедливы соотношения

$$[w_{\bar{v}}, P_k] = 0, \quad [w_{\bar{v}}, \tilde{\mathcal{H}}_0] = \left( \frac{\mu_0}{m} + \frac{Y_4}{Y_0} \right) [M, w_{\bar{v}}] + [\delta \mathcal{H}, w_{\bar{v}}], \quad (6.2.57)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Sp } w_{\bar{v}} [V, \psi(0)] &= \text{Sp } w_{\bar{v}} \left[ \tilde{\mathcal{H}}_0 + \frac{\mu_0}{m} M - \mathcal{H}_0 - P u_s, \psi(0) \right] = \\ &= m \frac{Y_4}{Y_0} \text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0) - \text{Sp } w_{\bar{v}} [\delta \mathcal{H}, \psi(0)]. \end{aligned} \quad (6.2.58)$$

Согласно методу квазисредних величина  $\{ \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n) \}$  конечна. Поэтому величина  $\bar{v}^{-1} \{ [\delta \mathcal{H}, \psi(0)] \}$  также конечна и последнее слагаемое в формуле (6.2.58) исчезает при  $\bar{v} \rightarrow 0$ . Отсюда и следует формула (6.2.56).

Замечая, что величина  $\bar{v}^{-1} \{ [\delta \mathcal{H}, \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n)] \}$  конечна, имеем, согласно (6.2.57), (6.2.56),

$$\{ [\tilde{\mathcal{H}}_0, \psi^+(\mathbf{x}_1) \dots \psi(\mathbf{x}_n)] \} = 0.$$

Из первого уравнения (6.2.57) следует, очевидно, что

$$\{[P_k, \psi^+(x_1) \dots \psi(x_n)]\} = 0.$$

Мы видим, таким образом, что  $w_{\bar{v}}$  действительно удовлетворяет уравнениям (6.2.48) в смысле квазисредних. Кроме того, статистический оператор  $w_{\bar{v}}$  удовлетворяет принципу ослабления корреляции. Поэтому мы и должны считать, что справедлива формула (6.2.53).

Заметим, что в отсутствие градиентов  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$  и согласно (6.2.41)  $\bar{\rho}(x, t) \xrightarrow[t \gg \tau_r]{} \bar{\sigma}_0$ . Это соотношение можно рассматривать как эргодическое соотношение для пространственно-однородных состояний сверхтекучей жидкости.

Знание  $\bar{\sigma}_0$  позволяет в принципе найти средние значения плотностей  $\xi_{\alpha}$  и плотностей потоков  $\xi_{\alpha k}^{(0)}$ . Согласно (6.2.55), (6.2.40) средние значения плотностей определяются формулами

$$\begin{aligned} e(x, t) &= e^0(x, t) + \pi_k^0(x, t) u_{sk}(x, t) + \frac{1}{2} \rho^0(x, t) u_s^2(x, t), \\ \pi_k(x, t) &= \pi_k^0(x, t) + \rho^0(x, t) u_{sk}(x, t), \quad \rho^{(m)}(x, t) = \rho^0(x, t), \end{aligned} \quad (6.2.59)$$

где

$$e^0(x, t) = \{\hat{e}(0)\}, \quad \pi_k^0(x, t) = \{\hat{\pi}_k(0)\}, \quad \rho^0(x, t) = \{\hat{\rho}^{(m)}(0)\}$$

и квазисредние  $\{\dots\}$  вычисляются с помощью статистического оператора  $\bar{\sigma}_0 = w_{\bar{v}}$ ,  $\{\dots\} = \lim_{\bar{v} \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{Sp } w_{\bar{v}} \dots$

Используя далее определение (6.2.45) величин  $\xi_{\alpha k}^{(0)}$ , получим, согласно (6.2.52),

$$\begin{aligned} q_k^{(0)}(x, t) &= q_k^0(x, t) + t_{kl}^0(x, t) u_{sl}(x, t) + \frac{1}{2} u_s^2(x, t) \pi_k^0(x, t) + \\ &+ u_{sk}(x, t) \left\{ e^0(x, t) + \pi^0(x, t) u_s(x, t) + \frac{1}{2} u_s^2(x, t) \rho^0(x, t) \right\}, \\ t_{kl}^{(0)}(x, t) &= t_{kl}^0(x, t) + \pi_k^0(x, t) u_{sl}(x, t) + \\ &+ \pi_l^0(x, t) u_{sk}(x, t) + \rho^0(x, t) u_{sk}(x, t) u_{sl}(x, t), \quad (6.2.60) \\ j_k^{(0)}(x, t) &= \pi_k^0(x, t) + \rho^0(x, t) u_{sk}(x, t), \end{aligned}$$

где величины

$$q_k^0(x, t) = \{\hat{q}_k(0)\}, \quad t_{kl}^0(x, t) = \{\hat{t}_{kl}(0)\}$$

были вычислены в разделе 6.2.1 и определяются формулами (6.2.18), (6.2.19).

Введем, наконец, вместо  $Y_k$  величину  $u_n$  согласно формуле

$$Y_k = Y_0(u_s - u_n)_k. \quad (6.2.61)$$

Как мы сейчас убедимся,  $u_n(x, t)$  можно интерпретировать как локальную скорость нормальной компоненты сверхтекучей жид-



кости. (Это определение находится в соответствии с определением раздела 6.2.1, так как при  $u_s = 0$   $Y = -Y_0 u_n$ .)

Используя формулы (6.2.60), (6.2.18), (6.2.19), представим плотности потоков  $i_{kl}^{(0)}$ ,  $j_k^{(0)}$  в виде

$$\begin{aligned} i_{kl}^{(0)} &= p \delta_{kl} + \rho_n u_{nk} u_{nl} + \rho_s u_{sk} u_{sl}, \\ j_k^{(0)} &= \pi_k = \rho_n u_{nk} + \rho_s u_{sk}, \end{aligned} \quad (6.2.62)$$

где  $p$  — давление сверхтекучей жидкости, определяемое как

$$p = -\omega/Y_0. \quad (6.2.63)$$

Эти формулы показывают, что величины  $u_n$  и  $u_s$  действительно следует интерпретировать как скорости нормальной и сверхтекучей компонент жидкости.

Таким образом, уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} j^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial \pi_k}{\partial t} + \frac{\partial i_{kl}^{(0)}}{\partial x_l} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} q^{(0)} = 0, \\ \frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( m^{-1} u_0 + \frac{1}{2} u_s^2 \right) = 0, \quad \operatorname{rot} u_s = 0, \end{aligned} \quad (6.2.64)$$

где величины  $j^{(0)} = \pi$ ,  $i_{kl}^{(0)}$ ,  $\varepsilon$ ,  $q^{(0)}$  определяются формулами (6.2.62), (6.2.60), (6.2.59).

Уравнения (6.2.64) были впервые установлены Ландау и носят название *уравнений Ландау* [71].

Уравнение (6.2.64), содержащее  $\partial \varepsilon / \partial t$  и выражающее закон сохранения энергии, как нетрудно показать, можно представить в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} s u_n = 0, \quad (6.2.65)$$

где  $s$  — плотность энтропии, определяемая формулой

$$s = - \lim_{\tilde{v} \rightarrow 0} \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \mathcal{Y}^{\tilde{v}-1} \operatorname{Sp} \omega_{\tilde{v}} \ln \omega_{\tilde{v}}.$$

Это уравнение выражает адиабатичность течения идеальной сверхтекучей жидкости.

Величина  $s u_n$  представляет собой плотность потока энтропии. Таким образом, энтропией обладает только нормальная составляющая сверхтекучей жидкости.

Мы показали, что оператор  $\tilde{\sigma}_0$  удовлетворяет уравнениям (6.2.48). Нам остается проверить справедливость соотношений (6.2.49). Мы сейчас убедимся, что они будут выполняться при некоторых ограничениях, накладываемых на оператор  $\hat{f}(x)$ .

Покажем прежде всего, что оператор  $\hat{f}(x)$  должен содержать нечетное число полевых операторов  $\psi(x)$ ,  $\psi^\dagger(x)$ . Заметим с этой

целью, что

$$e^{-i \frac{\pi}{m} M} \psi(x) e^{i \frac{\pi}{m} M} = -\psi(x).$$

Поэтому

$$e^{-i \frac{\pi}{m} M} \hat{f}(x) e^{i \frac{\pi}{m} M} = \beta_f \hat{f}(x), \quad (6.2.66)$$

где  $\beta_f = 1$ , если  $\hat{f}$  содержит четное число операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$  и  $\beta_f = -1$ , если  $\hat{f}$  содержит нечетное число этих операторов. Из (6.2.53), (6.2.66) следует, что

$$\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0) = -(\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0))_{\bar{v} \rightarrow \bar{v} \beta_f}.$$

Мы видим, что при  $\beta_f = 1$  (т. е. если нарушающий симметрию оператор  $\hat{f}$  содержит четное число полевых операторов)  $\{\psi(0)\} = 0$ , и, следовательно, такое нарушение симметрии не приводит к нужным нам особенностям квазисредних. Поэтому мы должны считать, что  $\beta_f = -1$ , т. е. что число полевых операторов, входящих в  $\delta \mathcal{H}$ , должно быть нечетным. В этом случае  $\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0)$  является нечетной функцией  $\bar{v}$ ,

$$\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0) = -\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0) |_{\bar{v} \rightarrow -\bar{v}}. \quad (6.2.67)$$

Отсюда можно сделать вывод, что квазисредние будут иметь смысл только в том случае, если  $\bar{v}$  стремится к нулю либо справа, либо слева [31].

Выясним теперь, при каких ограничениях, накладываемых на  $\hat{f}(x)$ , будет выполняться условие  $\text{Im } \{\psi\} = 0$ . Заметим с этой целью, что

$$\mathcal{P} T \mathcal{H} (\mathcal{P} T)^{-1} = \mathcal{H}^*, \quad \mathcal{P} T P_k (\mathcal{P} T)^{-1} = P_k^*, \quad \mathcal{P} T M (\mathcal{P} T)^{-1} = M^*,$$

где  $T$ ,  $\mathcal{P}$  — унитарные операторы, соответствующие обращению времени и отражению пространства. Будем считать, что оператор  $\hat{f}(x)$  обладает определенной временной сигнатурой  $\varepsilon_f$  ( $\varepsilon_f = \pm 1$ ). Тогда

$$\mathcal{P} T \delta \mathcal{H} (\mathcal{P} T)^{-1} = \varepsilon_f \delta \mathcal{H}^*.$$

Отсюда следует, что

$$(\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0))^* = (\text{Sp } w_{\bar{v}} \psi(0))_{\bar{v} \rightarrow \bar{v} \varepsilon_f}.$$

Таким образом, величина  $\{\psi\}$  будет вещественной, если  $\varepsilon_f = 1$ .

Величину  $\{\psi\}$ , учитывая (6.2.67), всегда можно сделать положительной, выбрав определенный способ стремления  $\bar{v}$  к нулю (т. е. считая, что либо  $\bar{v} \rightarrow +0$ , либо  $\bar{v} \rightarrow -0$ ). Можно показать, что если выбрать  $\hat{f}(x)$  в виде

$$\hat{f}(x) = \psi(x) + \psi^+(x),$$

то  $\{\psi\}$  будет больше нуля, если  $\bar{v} \rightarrow -0$ .

## § 6.3. Уравнения макроскопической электродинамики

**6.3.1. Уравнения Максвелла—Лоренца для операторов электромагнитных полей.** Мы перейдем теперь к изучению электромагнитных полей в среде, которые представляют собой средние значения микроскопических полей, действующих на частицы среды и создаваемых этими частицами.

Сформулируем прежде всего уравнения квантовой электродинамики, определяющие микроскопические электромагнитные поля в том случае, когда частицы являются нерелятивистскими.

Квантово-электродинамическая система, которую мы рассматриваем, представляет собой совокупность заряженных частиц и фотонов. Гамильтониан ее  $\mathcal{H}(t)$  в шредингеровском представлении мы запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t) = & \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_{\text{int}} + \\ & + \sum_a \frac{1}{2m_a} \int d^3x \left( \nabla + \frac{ie_a}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) \psi_a^+(\mathbf{x}) \left( \nabla - \frac{ie_a}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) \psi_a(\mathbf{x}) - \\ & - \sum_a \int d^3x \psi_a(\mathbf{x}) \mu_a \psi_a(\mathbf{x}) \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \sum_a e_a \int d^3x \psi_a^+(\mathbf{x}) \psi_a(\mathbf{x}) \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

где  $\psi_a(\mathbf{x})$  — оператор уничтожения частиц сорта  $a$  с зарядом  $e_a$  и массой  $m_a$ ,  $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  — скалярный потенциал внешнего электромагнитного поля,  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  — оператор векторного потенциала электромагнитного поля,  $\mathcal{H}_f$  — гамильтониан свободного поля излучения

$$\mathcal{H}_f = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}\lambda}^+ c_{\mathbf{k}\lambda}, \quad \omega_{\mathbf{k}} = c |\mathbf{k}|$$

( $c_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $c_{\mathbf{k}\lambda}^+$  — операторы уничтожения и рождения фотона с импульсом  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $\lambda = 1, 2$ , удовлетворяющие перестановочным соотношениям  $[c_{\mathbf{k}\lambda}, c_{\mathbf{k}'\lambda'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'}$ ) и, наконец,  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  — гамильтониан кулоновского взаимодействия частиц. Оператор  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  представляет собой сумму двух слагаемых

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t),$$

где  $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  — векторный потенциал заданного внешнего поля (эта величина является  $c$ -числом) и  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  — оператор векторного потенциала, соответствующий квантованному электромагнитному полю:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = c \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left( \frac{2\pi}{\mathcal{V}\omega_{\mathbf{k}}} \right)^{1/2} \{ e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} c_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + \text{э. с.} \}.$$

Здесь  $e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)}$  — векторы поляризации фотонов, удовлетворяющие условиям

$$e_{\mathbf{k}}^{(\lambda)} \mathbf{k} = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^2 e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\lambda)} e_{\mathbf{k}\lambda}^{(\lambda)*} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}.$$

Гамильтониан  $\mathcal{H}(t)$  можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} + V(t), \quad \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_p,$$

где  $\mathcal{H}_p$  — гамильтониан свободных частиц:

$$\mathcal{H}_p = \sum_a \frac{1}{2m_a} \int d^3x \nabla \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \nabla \psi_a(\mathbf{x})$$

и  $V(t)$  — гамильтониан взаимодействия частиц с электромагнитным полем:

$$V(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2c^2} \int d^3x \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}) + \int d^3x \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}(\mathbf{x}), \quad (6.3.2)$$

где  $\mathcal{J}(\mathbf{x}, t)$  — оператор плотности тока частиц при наличии электромагнитного поля:

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_a \frac{ie_a}{2m_a} \left\{ \left( \nabla + \frac{ie_a}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right) \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \psi_a(\mathbf{x}) - \text{э. с.} \right\} + \text{rot} \sum_a \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mu}_a \psi_a(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(\mathbf{x}) - \frac{1}{c} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}), \quad (6.3.3)$$

$\boldsymbol{\mu}_a$  — матрица собственного магнитного момента,  $\hat{\rho}_a(\mathbf{x}) \equiv e_a \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \times \psi_a(\mathbf{x})$  — оператор плотности электрического заряда частиц сорта  $a$  и  $\mathbf{j}(\mathbf{x})$  — оператор плотности электрического тока в отсутствие внешнего электромагнитного поля:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sum_a \frac{ie_a}{2m_a} \left\{ \left( \nabla + \frac{ie_a}{c} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \right) \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \psi_a(\mathbf{x}) - \text{э. с.} \right\} + \text{rot} \sum_a \psi_a^\dagger(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mu}_a \psi_a(\mathbf{x}). \quad (6.3.4)$$

Определим теперь операторы электромагнитных полей. Оператор магнитного поля определяется формулой

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t),$$

где  $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \text{rot} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  — внешнее магнитное поле и  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  — квантованное магнитное поле,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \text{rot} \mathbf{a}(\mathbf{x})$ .

Оператор электрического поля определяется формулой

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t),$$

где  $\mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) - \nabla \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  — внешнее электрическое поле и

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^t(\mathbf{x}) + \mathbf{e}^l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{e}^t(\mathbf{x}) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \equiv -\frac{i}{c} [\mathcal{H}(t), \mathbf{a}(\mathbf{x})], \quad (6.3.5)$$

$$\mathbf{e}^l(\mathbf{x}) = -\nabla a_0(\mathbf{x}), \quad a_0(\mathbf{x}) = \int d^3x' \frac{\hat{\rho}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Здесь  $\mathbf{e}^t(\mathbf{x})$  представляет собой квантованное поперечное электрическое поле и  $\mathbf{e}^l(\mathbf{x})$  — продольное кулоновское поле, создаваемое зарядами с суммарной плотностью  $\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \sum_a \hat{\rho}_a(\mathbf{x})$  ( $a_0(\mathbf{x})$  — оператор скалярного потенциала, действующий в гильбертовом пространстве частиц).

Определив поля, мы можем перейти к установлению уравнений их движения в шредингеровском представлении. Воспользуемся для этого тем, что

$$[\mathcal{Y}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\rho}(\mathbf{x}')] = -i \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Отсюда и из (6.3.1) следует закон сохранения заряда

$$\dot{\hat{\rho}}(\mathbf{x}) \equiv i[\mathcal{H}(t), \hat{\rho}(\mathbf{x})] = -\operatorname{div} \mathcal{Y}(\mathbf{x}, t)$$

(мы учли, что  $[\mathcal{H}_{\text{int}}, \hat{\rho}(\mathbf{x})] = 0$ ). Поэтому, согласно (6.3.5),

$$\dot{\mathbf{e}}^l(\mathbf{x}) \equiv i[\mathcal{H}(t), \mathbf{e}^l(\mathbf{x})] = \nabla \operatorname{div} \int d^3x' \frac{\mathcal{Y}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Используя перестановочные соотношения для операторов  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^+$  имеем

$$\mathbf{e}^t(\mathbf{x}) \equiv -\frac{i}{c} [\mathcal{H}(t), \mathbf{a}(\mathbf{x})] = i \sum_{k\lambda=1}^2 \left( \frac{2\pi\omega_k}{\mathcal{V}} \right)^{1/2} \{ \mathbf{e}_k^{(\lambda)} c_{k\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \text{э. с.} \}.$$

Поэтому, снова используя перестановочные соотношения для операторов  $c_{k\lambda}$ ,  $c_{k\lambda}^+$ , найдем

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}^t(\mathbf{x}) \equiv \frac{i}{c} [\mathcal{H}(t), \mathbf{e}^t(\mathbf{x})] = \operatorname{rot} \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \frac{i}{c} [V(t), \mathbf{e}^t(\mathbf{x})].$$

Вычислим теперь коммутатор  $[V(t), \mathbf{e}^t(\mathbf{x})]$ . Замечая, что

$$[a_i(\mathbf{x}), e_s^t(\mathbf{x}')] = 4\pi i c \delta_{is} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - i c \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

найдем

$$\frac{i}{c} [V(t), \mathbf{e}^t(\mathbf{x})] = -\frac{4\pi}{c} \mathcal{J}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c} \nabla \operatorname{div} \int d^3x' \frac{\mathcal{J}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

Подставляя это выражение в формулу для  $\frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}^t(\mathbf{x})$  и используя уравнение для  $\dot{\mathbf{e}}^t(\mathbf{x})$ , получим окончательно следующее уравнение для электрического поля  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ :

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}(\mathbf{x}, t).$$

Изменение со временем магнитного поля определяется уравнением

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{i}{c} [\mathcal{H}(t), \mathbf{h}(\mathbf{x})] = \frac{i}{c} [\mathcal{H}_f, \mathbf{h}(\mathbf{x})],$$

откуда, используя перестановочные соотношения для операторов  $c_{\kappa\lambda}$ ,  $c_{\kappa\lambda}^+$ , получим

$$\frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = -\operatorname{rot} \mathbf{e}(\mathbf{x}).$$

Внешние поля  $\mathbf{H}^{(e)}$ ,  $\mathbf{E}^{(e)}$  удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(e)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}^{(e)}, & \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(e)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}^{(e)} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}', \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^{(e)} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E}^{(e)} &= 4\pi \rho', \end{aligned}$$

где  $\mathbf{j}'$  и  $\rho'$  — плотности сторонних токов и зарядов. Операторы полей  $\hat{\mathbf{E}}$  и  $\hat{\mathbf{H}}$  удовлетворяют поэтому уравнениям

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{H}}, & \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{c} (\mathcal{J} + \mathbf{j}'), \\ \operatorname{div} \hat{\mathbf{H}} &= 0, & \operatorname{div} \hat{\mathbf{E}} &= 4\pi (\hat{\rho} + \rho'). \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Эти уравнения мы будем называть уравнениями Максвелла — Лоренца для операторов полей.

**6.3.2. Отклик системы на внешнее электромагнитное возмущение.** Чтобы получить уравнения Максвелла—Лоренца для средних полей в среде, необходимо уравнения (6.3.6) усреднить со статистическим оператором системы, объединяющей вещество и квантованное электромагнитное поле.

Мы будем предполагать, что при  $t = -\infty$  поле и вещество находились в состоянии статистического равновесия и внешнее поле отсутствовало. Это значит, что распределение Гиббса  $w$  системы определяется при  $t = -\infty$  гамильтонианом  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(-\infty)$ , представляющим собой сумму гамильтониана вещества  $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_p + \mathcal{H}_{\text{int}}$ , гамильтониана поля излучения  $\mathcal{H}_f$  и

гамильтониана взаимодействия вещества с электромагнитным полем  $V = V(-\infty)$ ,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_m + \mathcal{H}_f + V,$$

$$V = -\frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{j}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2c^2} \int d^3x \mathbf{a}(\mathbf{x}) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}).$$

В результате включения внешнего поля  $\mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  статистический оператор системы  $\rho(t)$  будет отличаться от распределения Гиббса и изменение его со временем будет определяться уравнением

$$i \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [\mathcal{H}(t), \rho(t)], \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H} + V^{(e)}(t)$$

и начальным условием  $\rho(-\infty) = \omega$ . Здесь  $V^{(e)}(t)$  — гамильтониан взаимодействия системы с внешним полем

$$V^{(e)}(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{j}(\mathbf{x}) + \int d^3x \varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t) \hat{\rho}(\mathbf{x}) + \\ + \frac{1}{2c^2} \int d^3x \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)^2 \sum_a \frac{e_a}{m_a} \hat{\rho}_a(\mathbf{x}). \quad (6.3.7)$$

Определим теперь средние значения электромагнитных полей  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  действующих в среде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t).$$

Вводя также средние значения индуцированных токов и зарядов:

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \rho(t) \mathcal{J}(\mathbf{x}, t), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \text{Sp } \rho(t) \hat{\rho}(\mathbf{x}),$$

получим после усреднения уравнений (6.3.7) следующие уравнения Максвелла — Лоренца для средних полей в среде

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\tilde{\mathcal{J}} + \mathbf{j}'), \\ \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi (\tilde{\rho} + \rho'). \quad (6.3.8)$$

Мы видим, что в эти уравнения, помимо полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  и плотностей внешнего тока и заряда  $\mathbf{j}'$ ,  $\rho'$ , входят еще величины  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$ , представляющие собой усредненные плотности тока и заряда в среде, индуцированные внешними источниками. Поэтому задача прежде всего сводится к нахождению этих величин.

С этой целью обратимся к § 4.1. Считая внешнее поле слабым, мы можем при вычислении средних  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$  воспользоваться общей формулой (4.1.7), понимая в ней под  $F_i(\mathbf{x}, t)$  потенциалы  $-\frac{1}{c} \mathbf{A}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ . Считая, что оператор  $\hat{a}$  совпадает

с  $\mathcal{J}$  или с  $\beta$ , получим в линейном приближении по потенциалам [79]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Y}}_k(\mathbf{x}, t) = & -\frac{1}{c} A_k^{(e)}(\mathbf{x}, t) \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \left\{ -G_{ki}^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \frac{1}{c} A_i^{(e)}(\mathbf{x}', t') + \right. \\ & \left. + G_k^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \varphi^{(e)}(\mathbf{x}', t') \right\}, \quad (6.3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{x}, t) = \\ = \sum_a \rho_a + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3x' \left\{ -\bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \frac{1}{c} A_i^{(e)}(\mathbf{x}', t') + \right. \\ \left. + G^{(+)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \varphi^{(e)}(\mathbf{x}', t') \right\}, \end{aligned}$$

где  $G_{ki}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $G_k^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ ,  $G^{(+)}(\mathbf{x}, t)$  — запаздывающие функции Грина токов и зарядов:

$$\begin{aligned} G_{ki}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = & -i\theta(t) \text{Sp } w [j_k(\mathbf{x}, t), j_i(0)], \quad j_k(\mathbf{x}, t) \equiv j_k^{(H)}(\mathbf{x}, t), \\ G_k^{(+)}(\mathbf{x}, t) = & -i\theta(t) \text{Sp } w [j_k(\mathbf{x}, t), \rho(0)], \\ G_k^{(+)}(\mathbf{x}, t) = & -i\theta(t) \text{Sp } w [\rho(\mathbf{x}, t), j_k(0)], \\ G^{(+)}(\mathbf{x}, t) = & -i\theta(t) \text{Sp } w [\rho(\mathbf{x}, t), \rho(0)], \quad \rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho^{(H)}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Для электронейтральной системы первый член во второй из формул (6.3.9) обращается в нуль,  $\rho \equiv \sum_a \rho_a = 0$ .

Если  $A_k^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \partial\chi/\partial x_k$ ,  $\varphi^{(e)}(\mathbf{x}, t) = -\partial\chi/c \partial t$ , где  $\chi$  — произвольная функция, то, в силу градиентной инвариантности, плотности тока и заряда обращаются в нуль, и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial G_{ki}^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G_k^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \delta(t) \frac{\partial}{\partial x_k} \delta(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Заметим, что эти формулы можно получить также из определений (6.3.10), если воспользоваться законом сохранения заряда в операторной форме

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0$$



и перестановочными соотношениями

$$[\rho(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}')] = 0,$$

$$[j_i(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}')] = -i \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Используя далее закон сохранения среднего значения заряда

$$\frac{\partial \bar{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

получим аналогичным образом

$$\frac{\partial G_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{\partial G^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial G_{ki}^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \delta(t) \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.3.12)$$

В фурье-компонентах уравнения (6.3.9) можно записать в виде

$$\tilde{\mathcal{J}}_k(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c} G_{ki}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) A_i^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) + G_k^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \varphi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) -$$

$$-\frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a A_k^{(e)}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{c} \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) A_i^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) + G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \varphi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$$

(определение фурье-компонент см. в 4.1.1).

Фурье-компоненты функций Грина связаны между собой, согласно (6.3.11), (6.3.12), соотношениями

$$G_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) k_i - \omega G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

$$\bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) k_i - \omega G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = 0,$$

$$G_{ji}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) k_i - \omega G_j^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) + k_j \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a = 0, \quad (6.3.13)$$

$$k_j G_{ji}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) - \omega \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) + k_i \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a = 0.$$

С помощью этих формул легко выразить  $\tilde{\mathcal{J}}_i(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  через фурье-компоненты внешнего электрического поля  $E^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i\omega}{c} A^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) - ik\varphi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\tilde{\mathcal{J}}_i(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \left\{ G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) + \delta_{ij} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a \right\} E_j^{(e)}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega} \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) E_i^{(e)}(\mathbf{k}, \omega). \quad (6.3.14)$$

Согласно (6.3.13) скалярная  $G^{(+)}$  и векторные  $G_i^{(+)}$ ,  $\bar{G}_i^{(+)}$  функции Грина могут быть выражены через тензорную функцию Грина  $G_{ij}^{(+)}$ . Поэтому в конечном счете отклик системы на внешнее электрическое поле определяется только тензориой функцией Грина.

Будем предполагать, что гамильтониан вещества  $\mathcal{H}_m$  инвариантен относительно обращения времени и что состояние статистического равновесия не вырождено относительно пространственного отражения. Тогда, согласно (4.1.30), будут справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= -G_i^{(+)}(-\mathbf{k}, \omega) = G_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega), \\ G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= G_{ji}^{(+)}(-\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega),\end{aligned}\quad (6.3.15)$$

выражающие принцип симметрии обобщенных восприимчивостей по отношению к внешнему полю.

Заметим, что так как оператор  $\int d^3x \rho(\mathbf{x})$  представляет собой интеграл движения по отношению к гамильтониану  $\mathcal{H}_m$ , то векторная и скалярная функции Грина должны обращаться в нуль при  $\mathbf{k} = 0$ :

$$G_i^{(+)}(0, \omega) = G^{(+)}(0, \omega) = 0. \quad (6.3.16)$$

Мы будем рассматривать далее только изотропную среду. Тогда тензорная функция Грина будет иметь следующую структуру:

$$\begin{aligned}G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) &= -\delta_{ij} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a - i\omega \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2} - \\ &\quad - i\omega \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right),\end{aligned}\quad (6.3.17)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \left\{ \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a + \frac{k_i k_j}{k^2} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \right\} = \frac{i\omega}{k^2} G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega), \\ \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \left\{ \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a + \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \right\}.\end{aligned}\quad (6.3.18)$$

Подставляя это выражение для  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  в (6.3.14) и используя (6.3.13), получим

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{F}}_i(\mathbf{k}, \omega) &= \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) k_i \frac{\mathbf{k} \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)}{k^2} + \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) \frac{[[\mathbf{k}, \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)], \mathbf{k}]_i}{k^2}, \\ \bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{\omega} \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega).\end{aligned}\quad (6.3.19)$$

Мы видим, что величины  $\bar{\sigma}^l$  и  $\bar{\sigma}^t$  определяют продольную и поперечную составляющие (по отношению к волновому вектору

$\mathbf{k}$ ) плотности тока. Эти составляющие пропорциональны продольной и поперечной составляющим внешнего электрического поля. Поэтому величины  $\bar{\sigma}^l$  и  $\bar{\sigma}^t$  можно интерпретировать как коэффициенты продольной и поперечной электропроводности среды. Однако обычно под коэффициентом электропроводности понимают коэффициент пропорциональности между составляющей тока и составляющей электрического поля в среде (см. раздел 6.3.3). Поэтому величины  $\bar{\sigma}^l$  и  $\bar{\sigma}^t$  мы будем называть *внешними коэффициентами электропроводности*, в отличие от истинных или *внутренних коэффициентов электропроводности*  $\sigma^l$  и  $\sigma^t$ , которые будут введены в следующем разделе.

Замечая, что

$$[\mathbf{k}, \mathbf{E}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $\mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)$  — фурье-компонента внешнего магнитного поля, можно переписать выражения (6.3.19) для  $\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega)$  в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}_i(\mathbf{k}, \omega) &= -i\omega\bar{\kappa}(\mathbf{k}, \omega) E_i^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) + ic\bar{\chi}(\mathbf{k}, \omega) [\mathbf{k}, \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)]_i, \\ \bar{\rho}(\mathbf{k}, \omega) &= -i\bar{\kappa}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} E^{(e)}(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{k^2} G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega), \\ \bar{\chi}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{i\omega}{c^2 k^2} \{ \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) - \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) \}. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Покажем, что через введенные нами величины  $\bar{\sigma}^l$  и  $\bar{\sigma}^t$  выражается количество энергии, поглощаемое средой от источников внешнего поля. Количество энергии, поглощаемое средой в интервале частот  $d\omega$  и интервале волновых векторов  $d\mathbf{k}$ , определяется, согласно (4.1.13), общей формулой

$$Q_{\omega\mathbf{k}} d\omega d\mathbf{k} = \frac{-2\omega}{(2\pi)^4} \text{Im} F_i^*(\mathbf{k}, \omega) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) F_j(\mathbf{k}, \omega) d\omega d\mathbf{k},$$

где  $F_i(\mathbf{k}, \omega)$  — фурье-компонента внешнего поля  $F_i(\mathbf{x}, t)$ , входящего в гамильтониан взаимодействия среды с внешним полем,

$$V(t) = \int d^3x F_i(\mathbf{x}, t) \xi_i(\mathbf{x})$$

и  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  — фурье-компонента запаздывающей функции Грина величин  $\xi_i$  и  $\xi_j$ . В рассматриваемом нами случае гамильтониан взаимодействия  $V(t)$  имеет вид (6.3.7) и, следовательно,

$$\begin{aligned} F_i^*(\mathbf{k}, \omega) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) F_j(\mathbf{k}, \omega) &= \\ &= -\frac{1}{c} A_i^{(e)*}(\mathbf{k}, \omega) \left\{ -\frac{1}{c} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) A_j^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) + G_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \varphi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) \right\} + \\ &+ \varphi^{(e)*}(\mathbf{k}, \omega) \left\{ -\frac{1}{c} \bar{G}_i^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) A_i^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) + G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) \varphi^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) \right\}, \end{aligned}$$

где  $G_{ij}^{(+)}$ ,  $G_i^{(+)}$ ,  $\bar{G}_i^{(+)}$ ,  $G^{(+)}$  — функции Грина, определяемые формулами (6.3.10). Используя (6.3.13), можно исключить отсюда скалярную и векторные функции Грина:

$$F_i^* G_{ij}^{(+)} F_j = \frac{1}{\omega^2} E_i^{(e)*} G_i^{(+)} E_j^{(e)} + \\ + \left\{ \frac{k^2}{\omega^2} \Phi^{(e)*} \Phi^{(e)} - \frac{1}{\omega c} A_i^{(e)*} k_i \Phi^{(e)} - \frac{1}{\omega c} A_i^{(e)} k_i \Phi^{(e)*} \right\} \sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a.$$

Так как второе слагаемое здесь является вещественным, то

$$Q_{\omega k} = \frac{-2}{(2\pi)^4} \text{Im} \frac{1}{\omega} E_i^{(e)*}(\mathbf{k}, \omega) G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) E_j^{(e)}(\mathbf{k}, \omega).$$

Используя далее формулу (6.3.17) для  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , найдем окончательно

$$Q_{\omega k} = \frac{2}{(2\pi)^4} \text{Re} \{ \bar{\sigma}^l(\mathbf{k}, \omega) |E_{\parallel}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)|^2 + \bar{\sigma}^t(\mathbf{k}, \omega) |E_{\perp}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \}, \quad (6.3.22)$$

где

$$E_{\parallel}^{(e)} = \mathbf{k} \frac{\mathbf{k} E^{(e)}}{k^2}, \quad E_{\perp}^{(e)} = \frac{[[\mathbf{k}, E^{(e)}], \mathbf{k}]}{k^2}.$$

Поскольку  $Q_{\omega k} > 0$ , то из этой формулы следует, что

$$\text{Re } \bar{\sigma}^l > 0, \quad \text{Re } \bar{\sigma}^t > 0. \quad (6.3.23)$$

Заметим, что в справедливости этих неравенств можно убедиться также, исходя из явных выражений для  $\bar{\sigma}^l$  и  $\bar{\sigma}^t$  через функции Грина. При этом шуры, определяющие функции Грина, следует вычислять по формуле

$$\text{Sp } \omega ab = \sum_{nm} \omega_n \langle n | a | m \rangle \langle m | b | n \rangle,$$

где  $j_{\mu}(\mathbf{x})$  — 4-вектор плотности тока заряженных частиц (всех этих векторы состояний диагонализуют равновесный статистический оператор  $\omega$ ).

Все предыдущие формулы, как мы уже указывали, относятся к нерелятивистскому случаю, когда гамильтониан взаимодействия частиц вещества с внешним электромагнитным полем имеет вид (6.3.7). В релятивистском случае гамильтониан взаимодействия частиц вещества с внешним электромагнитным полем определяется формулой

$$V^{(e)}(t) = -\frac{1}{c} \int d^3x j_{\mu}(\mathbf{x}) A_{\mu}^{(e)}(\mathbf{x}, t), \quad (6.3.24)$$

где  $j_{\mu}(\mathbf{x})$  — 4-вектор плотности тока заряженных частиц (всех сортов) и  $A_{\mu}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$  — 4-вектор потенциала внешнего электромагнитного поля. Это выражение, в отличие от (6.3.7), не содержит квадратичного по  $A^{(e)}$  члена. Поэтому все формулы этого раздела упростятся и не будут содержать членов вида  $\sum_a \frac{e_a}{m_a} \rho_a$ .

В предельном случае  $c \rightarrow \infty$ , когда можно пренебречь взаимодействием  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  фотонов с зарядами вещества, функции Грина, описывающие отклик тока и заряда на внешнее электромагнитное поле, по-прежнему будут определяться формулами (6.3.10), в которых лишь под плотностью тока следует понимать выражение (6.3.5) без членов, содержащих  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ , а под  $\omega$  — распределение Гиббса с гамильтонианом  $\mathcal{H}_m$ .

Найдем в заключение этого раздела функцию Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  для идеального газа бозонов или фермионов. В этом случае гамильтониан  $\mathcal{H}_m$  совпадает с гамильтонианом  $\mathcal{H}_0$ :

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{p\sigma} \epsilon_p a_{p\sigma}^+ a_{p\sigma}, \quad \epsilon_p = p^2/2m,$$

а распределение Гиббса, по которому происходит усреднение в  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , совпадает с распределением Гиббса  $\omega_0$  идеального газа (см. формулу (3.1.2)); предполагается, что имеется один сорт частиц).

Замечая, что

$$\Psi_\sigma(\mathbf{x}) = \mathcal{V}^{-1/2} \sum_p a_{p\sigma} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}},$$

получим, согласно (6.3.5), следующее выражение для оператора плотности тока:

$$j_i(\mathbf{x}, t) = \mathcal{V}^{-1} \sum_{p p'} e^{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}')-it(\epsilon_p-\epsilon_{p'})} \left\{ a_{p'\sigma}^+ a_{p\sigma} \frac{e}{2m} (\mathbf{p} + \mathbf{p}')_i + a_{p'\sigma'}^+ (s_l)_{\sigma'\sigma} a_{p\sigma} \frac{i\mu}{s} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')_k e_{ikl} \right\}.$$

Легко видеть, что

$$\text{Sp } \omega_0 [a_{i_1}^+ a_{i_2}, a_{i_1'}^+ a_{i_2'}] = \delta_{i_1 i_2'} \delta_{i_2 i_1'} (n_{i_1} - n_{i_2}), \quad i \equiv p, \sigma,$$

где  $n_i = \text{Sp } \omega_0 a_i^+ a_i$  — равновесная функция распределения идеального газа бозонов или фермионов. Используя эту формулу, получим после несложных вычислений следующее выражение для функции Грина  $G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = & -i\theta(t) \left(\frac{e}{2m}\right)^2 \mathcal{V}^{-2} \sum_{p p'} \exp\{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}') - it(\epsilon_p - \epsilon_{p'})\} \times \\ & \times (2s+1)(n_{p'} - n_p) (\mathbf{p} + \mathbf{p}')_i (\mathbf{p} + \mathbf{p}')_j + i\theta(t) \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 \frac{(2s+1)s(s+1)}{3} \mathcal{V}^{-2} \times \\ & \times \sum_{p p'} \exp\{i\mathbf{x}\cdot(\mathbf{p}-\mathbf{p}') - it(\epsilon_p - \epsilon_{p'})\} (n_{p'} - n_p) \times \\ & \times \{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')_i (\mathbf{p} - \mathbf{p}')_j - \delta_{ij} (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2\}, \end{aligned}$$

где  $s$  — спин частицы. При этом мы учли следующие формулы для шпуров спиновых матриц:

$$\text{tr } s_i = 0, \quad \text{tr } s_i s_j = \frac{1}{3} (2s + 1) s (s + 1) \delta_{ij}.$$

Фурье-компонента функции Грина  $G_{ij}^{(+)}$  определяется формулой

$$G_{ij}^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{8\pi^2} \left( \frac{e}{2m} \right)^2 \int d^3p (n_p - n_{p-k}) (2p - \mathbf{k})_i (2p - \mathbf{k})_j \times \\ \times (2s + 1) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}) + i \left( \frac{\mu}{s} \right)' \frac{(2s + 1) s (s + 1)}{24\pi^2} \int d^3p (n_p - n_{p-k}) \times \\ \times \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}) (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j). \quad (6.3.25)$$

Замечая, что

$$(2p - \mathbf{k}) \mathbf{k} = -2m(\varepsilon_{p-k} - \varepsilon_p + \omega - \omega),$$

и используя (6.3.13), получим

$$G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{ie^2}{8\pi^2} (2s + 1) \int d^3p (n_p - n_{p-k}) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-k}). \quad (6.3.26)$$

Формулы (6.3.25), (6.3.26) и определяют электродинамические функции Грина идеального газа бозонов или фермионов.

**6.3.3. Связь между внутренними и внешними восприимчивостями.** В уравнения Максвелла—Лоренца (6.3.8) входят, помимо средних полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , средние значения плотности тока и заряда частиц среды  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$ , индуцированные внешними токами и зарядами  $\mathbf{j}'$ ,  $\rho'$ . Обычно, однако, вместо этих величин пользуются векторами намагничивания  $\mathbf{M}$  и поляризации  $\mathbf{P}$ , связанными с  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$  соотношениями

$$\tilde{\mathcal{J}} = c \text{rot } \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \tilde{\rho} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (6.3.27)$$

Ясно, что при этом автоматически выполняется закон сохранения заряда. Однако эти уравнения не определяют однозначно величины  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{P}$  по заданным  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$  (поскольку неизвестных шесть, а уравнений три). Тем не менее векторы намагничивания и поляризации можно определить однозначно. Заметим для этого, что плотности тока и заряда  $\tilde{\mathcal{J}}$  и  $\tilde{\rho}$ , которые мы выражали через внешнее поле  $\mathbf{E}^{(e)}$ , можно выразить также через внутренние поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , если использовать уравнения (6.3.8) и уравнения Максвелла для внешних полей

$$i[\mathbf{k}, \mathbf{H}^{(e)}] = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{E}^{(e)} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}', \quad i[\mathbf{k}, \mathbf{E}^{(e)}] = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}^{(e)}, \quad (6.3.28) \\ i\mathbf{k}\mathbf{H}^{(e)} = 0, \quad i\mathbf{k}\mathbf{E}^{(e)} = 4\pi\rho'.$$

Действительно, эти уравнения позволяют выразить  $\mathbf{j}'$  и  $\rho'$  через внешнее поле  $\mathbf{E}^{(e)}$ , после чего уравнения (6.3.8) вместе с определением (6.3.19) плотностей тока  $\tilde{\mathbf{J}}$  и заряда  $\tilde{\rho}$  позволяют установить связь между внешними и внутренними полями. Поэтому можно сказать, что в изотропном случае в нашем распоряжении имеется два независимых вектора — напряженность внутреннего электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  (вектор же магнитной индукции  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$  будет определяться при этом формулой  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k}, \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]$ ). Мы можем теперь определить вектор поляризации  $\mathbf{P}$  таким образом, чтобы он был направлен вдоль вектора  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ , а вектор намагничения  $\mathbf{M}$  — вдоль вектора  $\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega)$  или, что тоже самое, вдоль вектора  $[\mathbf{k}, \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]$ . После этого введение векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  становится однозначным и мы можем положить

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) = \kappa(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{M}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\chi(\mathbf{k}, \omega)}{\mu(\mathbf{k}, \omega)} \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.3.29)$$

где

$$\mu(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi\chi(\mathbf{k}, \omega)$$

и  $\kappa$  и  $\chi$  — некоторые материальные константы, зависящие от  $\mathbf{k}$  и  $\omega$ . Первая из них называется внутренней электрической восприимчивостью или просто *электрической восприимчивостью*, а вторая — внутренней магнитной восприимчивостью или просто *магнитной проницаемостью*. Величина  $\mu$  называется *магнитной проницаемостью*.

Введем теперь вектор магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$  и вектор электрической индукции  $\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega). \quad (6.3.30)$$

Тогда из (6.3.29) следует, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) = \mu(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \quad \mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.3.31)$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi\kappa(\mathbf{k}, \omega).$$

Эта величина называется *диэлектрической проницаемостью*.

Согласно (6.3.27), (6.3.30) уравнения Максвелла — Лоренца (6.3.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}', & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho' \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

или в фурье-компонентах

$$\begin{aligned} i[\mathbf{k}, \mathbf{H}] &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{D} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}', & i[\mathbf{k}, \mathbf{E}] &= \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \\ i\mathbf{k}\mathbf{B} &= 0, & i\mathbf{k}\mathbf{D} &= 4\pi\rho'. \end{aligned} \quad (6.3.33)$$

Из (6.3.27) следует, что

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \omega) = ic [\mathbf{k}, \mathbf{M}] - i\omega \mathbf{P}, \quad \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = -ik\mathbf{P}.$$

Поэтому, согласно (6.3.30), (6.3.31)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \omega) &= -i\omega \kappa(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E} + ic \frac{\chi(\mathbf{k}, \omega)}{\mu(\mathbf{k}, \omega)} [\mathbf{k}, \mathbf{B}], \\ \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) &= -i\kappa(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{kE}. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Далее, из уравнений (6.3.28), (6.3.33) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{k^2}{\mu}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega}{ck^2} \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{k^2}{\mu}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} [\mathbf{B}, \mathbf{k}], \\ \mathbf{E}_{\parallel}^{(e)}(\mathbf{k}, \omega) &= \varepsilon \frac{k}{k^2} \mathbf{kE}. \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (6.3.19), получим

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \omega) = \bar{\sigma}^l \varepsilon \mathbf{E} + \left\{ \frac{\omega \bar{\sigma}^l}{ck^2} \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{k^2}{\mu}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} - \varepsilon \bar{\sigma}^l \frac{\omega}{ck^2} \right\} [\mathbf{B}, \mathbf{k}].$$

Сравнение этой формулы с (6.3.34) показывает, что

$$-i\omega \kappa = \bar{\sigma}^l \varepsilon, \quad \frac{\chi}{\mu} = \frac{i\omega}{c^2 k^2} \left\{ \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{k^2}{\mu}}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \bar{\sigma}^l - \varepsilon \bar{\sigma}^l \right\}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left( 1 + \frac{4\pi \bar{\sigma}^l}{i\omega} \right)^{-1}, \\ \frac{\chi}{\mu} &= \frac{i\omega}{c^2 k^2} \left\{ \frac{\bar{\sigma}^l}{1 + \frac{4\pi \bar{\sigma}^l}{i\omega} \left( 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right)^{-1}} - \frac{\bar{\sigma}^l}{1 + \frac{4\pi \bar{\sigma}^l}{i\omega}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.3.35)$$

Учтем теперь, что, согласно уравнениям Максвелла — Лоренца

$$[\mathbf{k}, \mathbf{B}] = \frac{c}{\omega} (\mathbf{k}(\mathbf{kE}) - k^2 \mathbf{E}).$$

Поэтому плотность тока  $\tilde{\mathcal{J}}$  можно представить также в виде

$$\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \omega) = \sigma^l(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{k}, \omega) + \sigma^i(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.3.36)$$



где  $\mathbf{E}_{\parallel}$  и  $\mathbf{E}_{\perp}$  — продольная и поперечная составляющие вектора  $\mathbf{E}$  по отношению к вектору  $\mathbf{k}$  и

$$\sigma^{\parallel} = \frac{\bar{\sigma}^{\parallel}}{1 + \frac{4\pi\bar{\sigma}^{\parallel}}{i\omega}}, \quad \sigma^{\perp} = \frac{\bar{\sigma}^{\perp}}{1 + \frac{4\pi\bar{\sigma}^{\perp}}{i\omega} \left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right)^{-1}}. \quad (6.3.37)$$

Величины  $\sigma^{\parallel}$  и  $\sigma^{\perp}$  мы будем называть внутренними продольной и поперечной проводимостями\*).

Через величины  $\sigma^{\parallel}$  и  $\sigma^{\perp}$  можно выразить, согласно (6.3.34), (6.3.36), восприимчивости  $\kappa$ ,  $\chi$ :

$$\kappa = \frac{i}{\omega} \sigma^{\parallel}, \quad \frac{\chi}{\mu} = \frac{i\omega}{c^2 k^2} (\sigma^{\perp} - \sigma^{\parallel}).$$

Эти формулы аналогичны формулам (6.3.21) для  $\bar{\kappa}$  и  $\bar{\chi}$ . Поэтому величины  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\chi}$  можно назвать внешними восприимчивостями. Заметим, однако, что величина  $\bar{\kappa}\mathbf{E}^{(e)}$  при произвольных  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  не совпадает с вектором  $\mathbf{P}$ , а величина  $\bar{\chi}\mathbf{H}^{(e)}$  не совпадает с вектором  $\mathbf{M}$ .

Уравнения (6.3.32) вместе с уравнениями (6.3.31) называются *уравнениями Максвелла* для среды.

Таким образом, мы связали внутренние восприимчивости и проводимости с внешними восприимчивостями и проводимостями. Последние величины, как мы видели, выражаются через запаздывающие функции Грина микроскопических токов и зарядов.

В разделе 6.3.2 была определена функция Грина  $G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$  идеального газа. Зная  $G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$ , можно по формуле (6.3.35) (см. также формулу (6.3.17) для  $\sigma^{\parallel}$ )

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{4\pi}{k^2} G^{(+)}(\mathbf{k}, \omega)$$

вычислить диэлектрическую проницаемость идеального газа:

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{ie^2}{2\pi k^2} (2s + 1) \int d^3p (n_p - n_{p-\mathbf{k}}) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-\mathbf{k}}). \quad (6.3.38)$$

Эта формула дает правильный результат только в области больших  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Если же частоты  $\omega$  и волновые векторы  $\mathbf{k}$  малы, то ею нельзя пользоваться, так как при этом существенную роль играет взаимодействие между частицами, которое мы не учитывали при выводе формулы (6.3.38).

Правильная формула для  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  в области низких частот может быть получена, если воспользоваться уравнениями (5.4.61), (5.4.59), сводящими задачу нахождения асимптотики функции Грина к решению линеаризованного кинетического

\*) Связь между внутренними и внешними восприимчивостями в отсутствие пространственной дисперсии рассматривалась в [54], а при наличии пространственной дисперсии в [12].

уравнения. Если кинетическое уравнение учитывает только самосогласованное поле, а взаимодействие между частицами является кулоновским, то мы приходим к следующей формуле для  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{ie^2}{2\pi k^2} (2s + 1) \int d^3p (n_p - n_{p-\mathbf{k}}) \delta_+(\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_{p-\mathbf{k}}),$$

справедливой в пренебрежении обменными эффектами [103]. В классическом случае, когда  $k \ll \lambda^{-1}$  ( $\lambda$  — средняя де-бройлевская длина волны частицы), эта формула переходит в формулу (1.5.30) для диэлектрической проницаемости плазмы.

В предыдущем разделе мы определили энергию  $Q_{\omega\mathbf{k}}$ , поглощаемую средой от внешних источников электромагнитного поля. Мы выразили там  $Q_{\omega\mathbf{k}}$  через внешнее электрическое поле. Но эту величину можно выразить и через внешние токи. Воспользуемся для этого уравнениями Максвелла (6.3.28), из которых вытекает, что

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(e)} = -\frac{4\pi i}{\omega} j'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp}^{(e)} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{-1} j'_{\perp},$$

где  $j'_{\parallel}$  и  $j'_{\perp}$  — продольная и поперечная составляющие вектора  $j'$  относительно вектора  $\mathbf{k}$ . Подставляя эти выражения в (6.3.22) и используя соотношения (6.3.35), получим

$$Q_{\omega\mathbf{k}} = \frac{-2}{(2\pi)^4} \operatorname{Im} \left\{ \frac{4\pi}{\omega \varepsilon} |j'_{\parallel}|^2 + \frac{4\pi \omega}{c^2} \frac{|j'_{\perp}|^2}{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{k^2}{\mu}} \right\}. \quad (6.3.39)$$

Так как всегда  $Q_{\omega\mathbf{k}} > 0$ , то справедливы неравенства

$$\operatorname{Im} \varepsilon > 0, \quad \operatorname{Im} \left( \varepsilon - \frac{c^2 k^2}{\omega^2 \mu} \right) > 0.$$

Заметим, что эти неравенства являются следствием неравенств (6.3.23) и соотношений (6.3.35), связывающих  $\varepsilon$  и  $\mu$  с внешними проводимостями  $\bar{\sigma}^t$  и  $\bar{\sigma}^f$ .

Формулой (6.3.39) можно воспользоваться для определения энергии, теряемой заряженной частицей при прохождении через вещество. Если потери энергии невелики, то движение частицы можно считать равномерным. При этом плотность тока частицы будет определяться формулой

$$\mathbf{j}'(\mathbf{x}, t) = ze\mathbf{v} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t),$$

где  $ze$  — заряд частицы и  $\mathbf{v}$  — ее скорость. Фурье-компонента плотности тока равна, очевидно,

$$\mathbf{j}'(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi ze\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}).$$

Найдя отсюда продольную и поперечную составляющие  $j'(\mathbf{k}, \omega)$ , и замечая, что

$$\delta^2(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = \frac{T}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}),$$

где  $T$  — время пролета частицы, получим следующее выражение для энергии, теряемой частицей в единицу времени в интервале частот  $d\omega$  и волновых векторов  $d\mathbf{k}$ :

$$-d\epsilon_{\omega\mathbf{k}} = q_{\omega\mathbf{k}} d\omega d\mathbf{k},$$

$$q_{\omega\mathbf{k}} = \frac{Q_{\omega\mathbf{k}}}{T} = -\left(\frac{ze}{\pi}\right)^2 \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \omega \operatorname{Im} \frac{\frac{v^2}{c^2} - 1}{\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \frac{k^2}{\mu}}. \quad (6.3.40)$$

Интегрируя это выражение по  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , найдем суммарную потерю энергии частицы на единице пути:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{v} \int d\omega d^3k q_{\omega\mathbf{k}}.$$

В области прозрачности основной вклад в этот интеграл вносят полюсы подынтегрального выражения, которые определяются уравнениями

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\mathbf{k}, \omega) \mu(\mathbf{k}, \omega) - k^2 = 0. \quad (6.3.41)$$

Потери, связанные с нулями  $\epsilon$ , называются *поляризационными*, а потери, связанные с нулями  $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k^2$ , — *черенковскими*.

Соотношения (6.3.41) имеют простой физический смысл. Они представляют собой дисперсионные уравнения для свободных волн, могущих распространяться в среде, и вытекают из уравнений Максвелла (6.3.32), если положить в них  $\mathbf{j}' = \rho' = 0$ . Легко убедиться, что дисперсионное уравнение  $\epsilon = 0$  определяет *продольные*, а уравнение  $\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu - k^2 = 0$  — *поперечные волны*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
2. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, «Наука», 1973.
3. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, Время намагничения слабого раствора  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$ , ДАН СССР 92, 259 (1953).
4. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, К теории релаксационных процессов при низких температурах, ЖЭТФ 36, 216 (1959).
5. А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950.
6. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, Кинетика черного излучения, ДАН СССР 200, 1317 (1971).
7. А. И. Ахиезер, К теории теплопроводности диэлектриков, ЖЭТФ, 10, 1934 (1940).
8. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, Теплопроводность ферродиелектриков, ФТТ 2, 2442 (1960).
9. А. И. Ахиезер, С. В. Пелетминский, Введение в физическую кинетику, препринт ИТФ-71-96Р, Киев, 1971.
10. А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, Кинетическое уравнение Больцмана, препринт ИТФ-73-48Р, Киев, 1973; Теория явлений переноса в газах, препринт ИТФ-73-49Р, Киев, 1973.
11. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Электродинамика плазмы, «Наука», 1974.
12. И. А. Ахиезер, К теории электромагнитных восприимчивостей систем заряженных частиц, УФЖ, VI, 435 (1961).
13. Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
14. R. Balescu, Dynamical correlation patterns a new representation of the Liouville equation, Physica 56, 1 (1971).
15. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Microscopic Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 106, 162 (1957); Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
16. В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, К теории неравновесных процессов в статистической механике II, препринт ИТФ-68-4, Киев, 1968.
17. В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, Кинетика слабонеоднородных состояний в системах многих частиц I, препринт ИТФ-69-56, Киев, 1969.
18. Н. Н. Боголюбов, Лекції з квантової статистики, «Радянська школа», К., 1949 (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд-во «Наукова думка», Киев, 1970).
19. Н. Н. Боголюбов, Квазисредние в задачах статистической механики, препринт —1451, ОИЯИ, Дубна, 1963 (см. Избранные труды в трех томах, т. 3, изд. «Наукова думка», Киев, 1971).

20. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946 (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд. «Наукова думка», Киев, 1970).
21. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, «Наука», 1976.
22. Н. Н. Боголюбов, К теории сверхтекучести, Изв. АН СССР, сер. физ., г. 11 (1947).
23. Н. Н. Боголюбов, О новом методе в теории сверхпроводимости, ЖЭТФ 34, 58 (1958); препринт П-94, ОИЯИ, Дубна, 1957.
24. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР, 1958.
25. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, Запаздывающие и опережающие функции Грина в статистической физике, ДАН СССР 126, 53 (1959).
26. Н. Н. Боголюбов, К. П. Гуров, Кинетические уравнения в квантовой механике, ЖЭТФ 17, 614 (1947).
27. N. N. Bogoliubov, O. A. Parasiuk, Acta Math. 97, 227 (1957).
28. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. «Наука», 1969.
29. Н. Н. Боголюбов, К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости, препринт Р-1395, ОИЯИ, Дубна, 1963 (см. Избранные труды в трех томах, т. 3, изд-во «Наукова думка», Киев, 1971).
30. Н. Н. Боголюбов, Рівняння гідродинаміки в статистичній механіці, зб. праць ін-ту мат. № 10, 41 (1948) (см. Избранные труды в трех томах, т. 2, изд-во «Наукова думка», Киев, 1970).
31. Н. Н. Боголюбов (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, «Наука», 1974.
32. Н. Н. Боголюбов (мл.), Б. И. Садовников, Функции Грина и функции распределения в статистической механике классических систем, ЖЭТФ 43, 677 (1962).
33. Л. Больцман, Лекции по теории газов, Гостехиздат, 1956.
34. В. Л. Бонч-Бруевич, С. В. Тябликов, Метод функций Грина в статистической механике, Физматгиз, 1961.
35. M. Born, H. S. Green, A general kinetic theory of liquids, Proc. Roy. Soc. A188, 10 (1947).
36. Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, 1961.
37. E. P. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, Phys. Rev. 40, 749 (1932)
38. Ю. П. Вирченко, С. В. Пелетминский, Квантовые вириальные разложения в теории кинетических уравнений, ТМФ 27, 94 (1976).
39. Ю. П. Вирченко, Вириальные разложения в равновесной квантовой статистической механике, препринт ХФТИ 75-31, Харьков, 1975.
40. А. А. Власов, О вибрационных свойствах электронного газа, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
41. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, Гостехиздат, 1932.
42. Дж. В. Гиббс, Основные принципы статистической механики, Гостехиздат, 1946.
43. Г. Голдстейн, Классическая механика, «Наука», 1975.
44. Л. Э. Гуревич, Физическая кинетика, Гостехиздат, 1940.
45. Л. Э. Гуревич, Кинетика намагничивания одноатомных парамагнитных газов, ЖЭТФ 6, 544 (1936).
46. К. П. Гуров, Основания кинетической теории, «Наука», 1966.
47. К. П. Гуров, К квантовой гидродинамике, ЖЭТФ 18, 110 (1948); 20, 279 (1950).
48. J. Goldstone, Field Theories of «Superconductor» Solutions, Nuovo Cimento 19, 154 (1961).
49. И. И. Гольдман, Колебания электронного газа с функцией распределения Ферми в состоянии вырождения, ЖЭТФ 17, 681 (1947).
50. Ф. С. Джеларов, В. А. Красников, Уравнения гидродинамики и функции Грина, ТМФ 14, 82 (1973).

51. *F. Dyson*, Thermodynamic Behavior of an Ideal Ferromagnet., Phys. Rev. **102**, 1230 (1956).
52. *П. Де Жен*, Сверхпроводимость металлов и сплавов, «Мир», 1968
53. *П. А. М. Дирак*, Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
54. *И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский*, Ван-дер-ваальсовы силы в неоднородном диэлектрике, ЖЭТФ **36**, 1797 (1959).
55. *Дж. Займан*, Принципы теории твердого тела, «Мир», 1974.
56. *Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967.
57. *Д. Н. Зубарев*, Статистический оператор для неравновесных систем, ДАН СССР **140**, 92 (1961); Локально равновесный ансамбль Гиббса и его связь с теорией флуктуаций и явлений переноса, ДАН СССР **162**, 532 (1965).
58. *Д. Н. Зубарев*, Неравновесная статистическая термодинамика, «Наука», 1971.
59. *Д. Н. Зубарев*, Граничные условия для статистических операторов в теории неравновесных процессов и квазисредние, ТМФ **3**, 276 (1970).
60. *Д. Н. Зубарев, В. П. Калашников*, Построение статистических операторов для неравновесных процессов, ТМФ **3**, 126 (1970).
61. *Дж. Кирквуд*, Статистическая механика процессов переноса, сб. Термодинамика необратимых процессов, ИЛ, 1962.
62. *Т. Карлеман*, Математические задачи кинетической теории газов, ИЛ, 1960.
63. *S. T. Choh, G. E. Uhlenbeck*, The Kinetic Theory of Phenomena in Dense Gases, Navy Theoretical Physics, Contract No. Nonr. 1224 (15), 1958.
64. *А. А. Красовский*, Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем, «Наука», 1974.
65. *Ю. Л. Климонтович*, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд-во МГУ, 1964.
66. *Ю. Л. Климонтович*, Статистическая теория неупругих процессов в плазме, ЖЭТФ **52**, 1233 (1967); ЖЭТФ **54**, 135 (1968).
67. *Ю. Л. Климонтович, В. П. Силин*, О спектрах систем взаимодействующих частиц, ЖЭТФ **23**, 151 (1952).
68. *А. С. Компанец*, Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами, ЖЭТФ **31**, 876 (1956).
69. *L. N. Cooper*, Bound Electron Pairs in Degenerate Fermi Gas, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
70. *R. Kubo*, Статистическая механика необратимых процессов, Journ Phys. Soc. Japan **12**, 570 (1957) (см. перевод в сборнике «Вопросы квантовой теории необратимых процессов», ИЛ, 1961).
71. *Л. Д. Ландау*, Теория сверхтекучести гелия II, ЖЭТФ **11**, 592 (1941).
72. *Л. Д. Ландау*, Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия, ЖЭТФ **7**, 203 (1937).
73. *Л. Д. Ландау*, Теория ферми-жидкости, ЖЭТФ **30**, 1058 (1956).
74. *Л. Д. Ландау*, Колебания ферми-жидкости, ЖЭТФ **32**, 59 (1957).
75. *Л. Д. Ландау*, О колебаниях электронной плазмы, ЖЭТФ **16**, 574 (1946).
76. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
77. *A. Lennard*, On Bogolubovs kinetic equation for a spatially homogeneous plasma, Ann. Phys. **3**, 90 (1960).
78. *М. А. Леонтович*, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
79. *Мартин, Швингер*, Теория систем многих частиц, ИЛ, 1962.
80. *T. Matsubara*, Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
81. *P. Mazur, E. Montroll*, J. Math. Phys. **1**, 70 (1960).
82. *H. Mori*, Statistical — Mechanical Theory of Transport in Fluids. Phys. Rev. **112**, 1829 (1958)
83. *Фон-Нейман*, Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964.
84. *Р. Ньютон*, Теория рассеяния волн и частиц, «Мир», 1969.
85. *С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский*, Операторы потоков физических величин и метод квазисредних, ТМФ **18**, 121 (1974).
86. *С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, К теории неравновесных процессов в статистической механике III. препринт ИТФ-68-5, Киев, 1968.
87. *С. В. Пелетминский, А. А. Яценко*, Метод производящего функционала и вириальные разложения в неравновесной статистической механике, ТМФ **3**, 287 (1970).

88. С. В. Пелетминский, А. А. Яценко, К квантовой теории кинетических и релаксационных процессов, ЖЭТФ 53, 1327 (1967); К теории неравновесных процессов в статистической механике I, препринт ИТФ-68-3, Киев, 1968.
89. С. В. Пелетминский, В. И. Приходько, Метод асимптотических операторов в статистической механике I, II, ТМФ 12, 88 (1972); 12, 283 (1972); Метод асимптотических операторов (пространственно-неоднородные состояния), препринт ИТФ-71-87Р, Киев, 1971.
90. С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов, К кинетике пространственно-неоднородных состояний, ТМФ 6, 238 (1971).
91. С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, Неравновесная энтропия и определение произведений обобщенных функций, ТМФ, 20, 381 (1974); К вопросу о построении неравновесной энтропии, ТМФ 20, 85 (1974).
92. С. В. Пелетминский, К теории кинетических уравнений при наличии связанных состояний частиц, ТМФ 6, 123 (1971).
93. С. В. Пелетминский, В. Д. Цуканов, К кинетике систем в переменных внешних полях, ТМФ 7, 395 (1971).
94. С. В. Пелетминский, А. И. Соколовский, В. С. Щелоков, «Низкочастотная асимптотика функций Грина и метод сокращенного описания», препринт ИТФ-75 129Р, Киев, 1975.
95. С. В. Пелетминский, Кинетика слабонеоднородных состояний в системах многих частиц II, препринт ИТФ-69-58, Киев, 1969.
96. С. В. Пелетминский, В. С. Щелоков, Низкочастотная асимптотика электродинамических функций Грина, ТМФ 25, 70 (1975).
97. И. Пригожин, Неравновесная статистическая механика, «Мир», 1964.
98. В. И. Приходько, Применение эргодических соотношений к неоднородным системам со слабым взаимодействием, препринт ИТФ-72-188Р, Киев, 1972.
99. В. И. Приходько, Слабонеоднородные состояния в системе типа жидкость — газ, препринт ИТФ-72-29Р, Киев, 1972.
100. Б. Н. Провоторов, О магнитном резонансном насыщении в кристаллах, ЖЭТФ 41, 1582 (1961).
101. Д. Рюэль, Статистическая механика (строгие результаты), «Мир», 1971.
102. Б. И. Садовников, Уравнения для «классических» функций Грина в кинетическом приближении, ДАН СССР 164, 785 (1965).
103. В. П. Силин, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
104. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
105. В. П. Силин, К теории спектра возбуждений системы многих частиц, ЖЭТФ 23, 641 (1952).
106. В. П. Силин, Кинетическое уравнение для быстропеременных процессов, ЖЭТФ 38, 1771 (1960).
107. В. П. Силин, О высокочастотной диэлектрической проницаемости плазмы, ЖЭТФ 41, 861 (1961).
108. В. В. Толмачев, Теория бозе-газа, Изд-во МГУ, 1969.
109. В. В. Толмачев, Теория ферми-газа, Изд-во МГУ, 1973.
110. Дж. Уленбек, Дж. Форд, Лекции по статистической механике, «Мир», 1965.
111. С. Фудзита, Введение в неравновесную квантовую статистическую механику, «Мир», 1969.
112. I. E. Farquhar, Ergodic theory in statistical mechanics: Interscience publishers a division of John Wiley & Sons, Ltd., London — New York — Sydney, 1964.
113. Ergodic theory, Academic Press New York and London 1960 (international school of physics «Enrico Fermi»).
114. И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, «Наука», 1971.
115. Т. Хилл, Статистическая механика, ИЛ, 1960.
116. L. Van Hove, Physica, 21, 517 (1955) (см. перевод в сб. «Вопросы квантовой теории необратимых процессов» ИЛ, 1961)
117. Керзон Хуанг, Статистическая механика, «Мир», 1966.
118. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947
119. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.