1972 г. Июль *Том 107, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

530.145

ПОЧЕМУ НЕВОЗМОЖНО ВВЕСТИ В КВАНТОВУЮ МЕХАНИКУ СКРЫТЫЕ ПАРАМЕТРЫ

А. И. Ахиезер, Р. В. Половин

СОДЕРЖАНИЕ

1. СТАТИСТИЧНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ МИКРООБЪЕКТОВ

Ни одна физическая теория, включая общую теорию относительности, не приводила к столь большим гносеологическим трудностям, как квантовая механика, так как квантовая механика отвергла привычный всем детерминизм классической механики в поведении микрообъектов *). К этому принудил ее эксперимент, который показывает, что тождественные микрообъекты в совершенно одинаковых внешних условиях ведут себя по-разному. Например, если осветить электрон, движущийся с определенным импульсом, сходящимся пучком света, то после локализации электрона в определенной области пространства импульс электрона будет неопределенным. Это значит, что если представить себе большое число абсолютно тождественных копий нашего мысленного опыта, т. е. большое число электронов, находящихся строго в одинаковых состояниях с одинаковым импульсом, и такое же число тождественных пучков света, служащих для освещения электронов, то, несмотря на тождественность установок, результаты опытов будут неодинаковыми — одни электроны будут иметь один, а другие электроны — другой импульс.

Однако мы получим не только разброс импульса. Мы обнаружим замечательный факт, заключающийся в том, что при увеличении общего числа опытов отношение числа опытов, в которых обнаруживается некоторое значение импульса, к общему числу опытов стремится к определенной величине. Это означает, что наблюдаемый разброс значений импульсов электронов в действительности не хаотичен, а характеризуется определенным статистическим или вероятностным распределением.

*) Очено ясное и обстоятельное изложение гносеологических проблем квантовой механики было дано в ряде работ Фока [1].

Естественно связать возникновение статистической закономерности в поведении электрона с неконтролируемым характером взаимодействия пучка света с электроном, или, формулируя вопрос более общим образом, с неконтролируемым характером взаимодействия прибора с микрообъектом. Однако, хотя воздействие прибора на микрообъект принципиально и не сводится к нулю (в отличие от того, что предполагается в классической физике) и взаимодействие прибора с микрообъектом носит неконтролируемый характер, отсюда тем не менее нельзя с логической необходимостью заключить, что обязательно должно иметь место определенное статистическое распределение значений импульсов электрона. Впрочем, импульс здесь не играет исключительной роли: аналогичная ситуация, т. е. вероятностное распределение, возникает и при определении других физических величин, относящихся к микрообъектам — электронам, атомам, молекулам.

Действительно, логически мыслимы три различных типа поведения объектов при измерениях:

1) Измерение физической величины с достоверностью дает некоторое значение.

2) Результат измерения может быть предсказан только статистически. Но характер статистичности таков, что если вслед за первым измерением выполняется второе, то оно будет обладать некоторым распределением, никак не связанным с первым измерением.

3) Результат измерения может быть предсказан только статистически, но последующее измерение дает результат, согласующийся с первым измерением.

Первая возможность соответствует классической физике в том случае, когда можно осуществить тождественность условий эксперимента.

Вторая возможность соответствует классической физике в том случае, когда эксперимент повторяется при нетождественных внешних условиях. Например, если подбросить большое число монет, то в среднем в половине случаев выпадет герб. Однако если отобрать все монеты, в которых выпал герб, то при повторном подбрасывании мы не можем гарантировать выпадение герба — повторное подбрасывание даст такой же статистический разброс, как и первое подбрасывание.

Третья возможность соответствует классической физике в том случае, когда различие в исходах эксперимента вызывается внутренними причинами. Например, имеется определенная вероятность того, что человек окажется дальтоником. Но если отобрать всех людей, оказавшихся дальтониками при первом испытании, то они окажутся дальтониками и при всех последующих испытаниях.

В квантовой физике первая возможность осуществляется, если волновая функция, описывающая состояние системы, является собственной функцией оператора, соответствующего измеряемой величине, в общем же случае в квантовой физике осуществляется третья возможность. Например, если пропустить неполяризованный пучок электронов через неоднородное магнитное поле, направленное вдоль оси z, то в среднем у половины электронов проекция спина на ось z окажется положительной. Если теперь выделить электроны, у которых проекция спина на ось z положительна, то при повторном измерении проекции спина в том же направлении она всегда окажется положительной.

Любопытно отметить, что на заре развития квантовой механики Бор *предположил, что осуществляется вторая возможность* (см. [2]), но это предположение было опровергнуто экспериментом Комптона (см [3]).

В настоящее время мы можем лишь констатировать, что статистичность в поведении микрообъектов, причем статистичность определенного характера, есть замечательный экспериментальный факт, т. е. мы можем утверждать, что статистичность лежит в природе вещей. Но мы не знаем тех глубоких причин, которые лежат в ее основе, точнее говоря, мы не можем сказать, какова взаимосвязь между свойством статистичности и другими глубокими явлениями природы.

Какую же задачу ставит перед собой в этих условиях квантовая механика? Не пытаясь выяснить природы статистичности (и являясь в этом смысле феноменологической теорией), квантовая механика ставит перед собой задачу дать метод нахождения вероятностных распределений для различных физических величин в различных состояниях микрообъектов. Эта задача оказывается теснейшим образом связанной с другой задачей первостепенной важности — задачей нахождения спектров возможных значений различных физических величин.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Для решения этих задач квантовая механика вводит понятия *состояний* и *наблюдаемых*. Она различает *чистые состояния* и *смеси* и сопоставляет чистому состоянию некоторую функцию — *волновую функцию* ψ, или *вектор в гильбертовом пространстве* *), а смеси — некоторую матрицу — *матрицу плотности*, или *статистический оператор* $\hat{U}$.

Каждой наблюдаемой R в квантовой механике сопоставляется некоторый линейный эрмитов оператор $\hat{R}$, действующий в гильбертовом пространстве. Действие оператора $\hat{R}$ сводится к тому, что каждому вектору ψ сопоставляется некоторый другой вектор ψ', $\hat{R}\psi = \psi'$.

Если $\psi' = r\psi$, где r — комплексное число, то вектор ψ называется *собственным вектором оператора* $\hat{R}$, а число r — *собственным значением*. Собственные значения эрмитова оператора вещественны, а совокупность его собственных векторов ψ_1, ψ_2, ... может быть выбрана в качестве базиса гильбертова пространства. Переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью унитарного преобразования.

Собственные значения операторов интерпретируются в квантовой механике как совокупности возможных значений соответствующих наблюдаемых. Это означает, что измерение какой-либо величины с помощью подходящего для этой цели устройства (оно называется *прибором*) будет давать одно из собственных значений оператора, соответствующего рассматриваемой наблюдаемой.

При этом, как правило, мы получим в различных опытах различные значения, и речь может идти только об определении вероятности обнаружения того или иного собственного значения наблюдаемой (в исследуемом состоянии микрообъекта). Найти это распределение вероятностей

---

*) Гильбертовым пространством называется совокупность элементов-векторов ψ, φ, ..., для которых определены операции сложения, умножения на комплексное число и скалярного произведения (φ, ψ). Совокупность векторов ψ_1, ψ_2, ... называется *базисом*, если любой вектор ψ гильбертова пространства можно представить в виде суперпозиции $\psi = \sum_i c_i\psi_i$. В гильбертовом пространстве число линейно независимых векторов бесконечно. В дальнейшем при изучении спиновых состояний мы будем рассматривать также конечномерное, т. е. евклидово, пространство. Поэтому, строго говоря, мы имеем дело с унитарным пространством, в котором определено скалярное произведение, а число линейно независимых векторов может быть либо бесконечным (в случае гильбертова пространства), либо конечным (в случае евклидова пространства).

проще всего в том случае, когда состояние микрообъекта является чистым. В этом случае вектор состояния вплоть до момента измерения наблюдаемой *изменяется по строго определенному закону*, в соответствии с дифференциальным уравнением Шрёдингера

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\hat{H}\psi=0,$$

где $\hat{H}$ — оператор Гамильтона объекта ($\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π). Чтобы найти искомое распределение вероятностей, нужно взять волновую функцию ψ объекта в момент времени, непосредственно предшествующий измерению наблюдаемой R, и разложить ее в ряд по собственным функциям φ_n оператора $\hat{R}$, соответствующего наблюдаемой R:

$$\psi=\sum_n c_n\varphi_n, \qquad \hat{R}\varphi_n=r_n\varphi_n.$$

Тогда суперпозиционные коэффициенты c_n этого разложения будут играть роль амплитуд вероятности, а квадраты их модулей $|c_n|^2$ будут определять вероятности различных значений r_n наблюдаемой.

Среднее значение величины R в состоянии ψ будет равно

$$\langle R\rangle=\sum_n |c_n|^2 r_n$$

(вектор ψ предполагается нормированным).

После первого этапа процесса измерения, заключающегося во взаимодействии микрообъекта с прибором, исходное чистое состояние ψ «разрушается» и вместо него возникает *смесь*, описываемая не волновой функцией, а статистическим оператором

$$\hat{U}=\sum_n |c_n|^2\hat{P}_{[\varphi_n]}, \tag{1}$$

где $\hat{P}_{[\varphi]}$ — оператор проектирования на вектор φ в гильбертовом пространстве. Этот оператор, определяемый с помощью соотношения

$$\hat{P}_{[\varphi]}\psi=(\varphi,\ \psi)\,\varphi,$$

является эрмитовым и равен своему квадрату:

$$\hat{P}^2_{[\varphi]}=\hat{P}_{[\varphi]}.$$

Среднее значение произвольного эрмитова оператора в смешанном состоянии (1) равно

$$\langle\hat{R}\rangle=\mathrm{Sp}\,(\hat{U}\hat{R})=\sum_i w_i\langle\hat{R}\rangle_i, \tag{2}$$

где $w_i=|c_i|^2$ — вероятность нахождения системы в состоянии φ_i и $\langle\hat{R}\rangle_i$ — среднее значение R в i-м состоянии

$$\langle\hat{R}\rangle_i=\mathrm{Sp}\,(\hat{P}_{[\varphi_i]}\hat{R})=(\varphi_i,\ \hat{R}\varphi_i).$$

Заметим, что если бы мы вместо смеси рассматривали суперпозицию чистых состояний $\psi=\sum_i c_i\varphi_i$, где $|c_i|^2=w_i$, то в состоянии ψ среднее значение оператора $\hat{R}$ равнялось бы

$$\langle\hat{R}\rangle=(\psi,\ \hat{R}\psi)=\sum_i w_i\langle\hat{R}\rangle_i+\sum_{i\neq j}c_i^*c_j(\varphi_i,\ \hat{R}\varphi_j). \tag{3}$$

Формула (2) соответствует классической теории вероятностей, в формуле же (3) появляются дополнительные члены (интерференционные).

Наличие этих дополнительных членов описывает явление интерференции вероятностей, отсутствующее в классической физике.

Если бы интерференция вероятностей имела место для классических объектов, то возникали бы парадоксальные ситуации. Примером такой ситуации является так называемый «шрёдингеровский кот». Эта ситуация состоит в следующем. В ящик помещаются кот, счетчик Гейгера и молоток, который при срабатывании счетчика разбивает ампулу с синильной кислотой. У счетчика помещено такое количество радиоактивного материала, что вероятность одного распада в течение часа равна 1/2. Если бы была возможна интерференция вероятностей для классических объектов, то через час образовалась бы суперпозиция живого и мертвого кота, т. е. был бы возможен полуживой-полумертвый кот, что является абсурдным.

Во втором этапе процесса измерения регистрирующее устройство позволяет разделить смесь на чистые состояния, описываемые собственными функциями φ_n измеряемой величины R. Если в каком-либо из таких состояний φ_n снова измерять наблюдаемую R, то мы уже не будем получать разброса ее значений, а получим вполне определенное значение — собственное значение r_n наблюдаемой, соответствующее рассматриваемому состоянию φ_n.

3. ПРОЦЕСС ИЗМЕРЕНИЯ

Коммутирующие друг с другом операторы имеют общие собственные функции. Поэтому соответствующие им величины (мы будем называть такие величины *совместными*) можно с любой степенью точности определять одновременно. Если же операторы не коммутируют, то, зная точно одну величину (т. е. рассматривая состояние с определенным значением этой величины), мы получим для другой величины не точное значение, а некоторое статистическое распределение, которое никак не зависит от устройства прибора — нужно лишь, чтобы прибор был приспособлен для измерения интересующей нас величины и был классическим. Последнее условие означает, что прибор предполагается подчиняющимся законам классической физики (точнее говоря, достаточно предполагать, что прибор описывается квазиклассически).

Это не значит, что в качестве приборов должны обязательно использоваться макроскопические тела и не могут использоваться микрообъекты. Напротив, в качестве приборов могут использоваться и микрообъекты, если они в рассматриваемых условиях допускают квазиклассическое описание. Если же они не квазиклассичны, то достижимая с помощью таких приборов точность при измерении соответствующих величин принципиально не может быть достаточно большой; она будет тем меньше, чем больше их «квантовость», т. е. чем больше они отклоняются по своим свойствам от классических объектов.

При определении различных статистических распределений, относящихся к различным некоммутирующим наблюдаемым, следует иметь в виду, что для этого недостаточно рассматривать только один коллектив невзаимодействующих между собой тождественных микрообъектов. Такой коллектив, конечно, необходим (для определения понятий вероятности), но он должен быть снабжен соответствующим измерительным «снаряжением», различным для различных наблюдаемых. Поэтому мы имеем дело не с одним, а с многими коллективами для различных наблюдаемых, а так как эти «снаряжения» для некоммутирующих наблюдаемых несовместимы между собой, рассматриваемые коллективы нельзя объединить в один коллектив.

Выше мы говорили, что процесс измерения разделяется на две стадии: взаимодействие квантового объекта с прибором, в результате которого из чистого состояния возникает смесь, и акт регистрации, в результате которого из смеси возникает чистое состояние. Чтобы разъяснить обе эти стадии, рассмотрим, следуя Гейзенбергу [4], пучок возбужденных атомов, движущихся в сильно неоднородном магнитном поле H_y (рис. 1). Если магнитный момент атома в n-м состоянии равен μ_n, то энергия взаимодействия атома с полем будет равна $E_n = \mu_n H_y\ (y)$, а сила, действующая на атом, — $\mu_n dH_y/dy$. Так как различным состояниям атома соответствуют

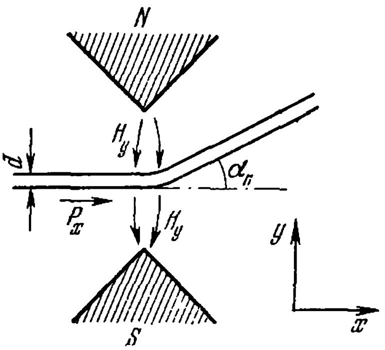

Рис. 1.

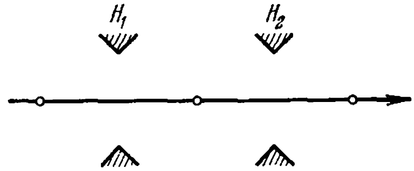

Рис. 2.

различные значения магнитного момента, пучок расщепится. Угол отклонения будет равен $\alpha_n = (dE_n/dy)\ T/p_x$, где T — пролетное время, а p_x — импульс атомов пучка в направлении движения.

Используя соотношение неопределенности, можно найти естественный разброс направлений пучка:

$$\Delta\alpha \sim \lambda/d = h/p_x d,$$

где d — ширина пучка. Чтобы можно было детектировать отклонение пучка, должно выполняться неравенство $\alpha_n \gg \Delta\alpha$, или

$$(dE_n/dy)\ Td \gg h.$$

С другой стороны, фаза ψ-функции атома в n-м состоянии равна

$$\varphi_n = -\ (2\pi E_n/h)\ t.$$

Поэтому неопределенность фазы в пучке $\Delta\varphi_n = (d\varphi_n/dy)\ d$ будет

$$\Delta\varphi_n \sim (2\pi/h)\ T\ (dE_n/dy)\ d,$$

т. е. $\Delta\varphi_n \gg 2\pi$.

Таким образом, в результате измерения возникает полная неопределенность фазы, иными словами, полностью нарушаются фазовые соотношения между атомами. В этом именно и состоит «неконтролируемое взаимодействие» между измерительным прибором и измеряемым объектом.

Если не учитывать этого взаимодействия, то можно прийти к парадоксам. Рассмотрим, например [4a], пучок возбужденных атомов, проходящий через два неоднородных магнитных поля H_1 и H_2(рис. 2). Пусть пучок перед входом в поле H_1 содержит только атомы, находящиеся в состоянии n. Обозначим через $A^{(1)}_{n\to m}$ амплитуду перехода атома из состояния n в состояние m под влиянием поля H_1. Тогда вероятность найти атом в состоянии m после прохождения поля H_1 будет равна $|\ A^{(1)}_{n\to m}\ |^2$. Если, далее, $A^{(2)}_{m\to l}$ — амплитуда перехода атома из состояния m в состояние l под влиянием поля H_2, то вероятность найти атом в состоянии l после прохождения поля H_2 при условии, что перед входом в поле атом находился в состоянии m, будет равна $|\ A^{(2)}_{m\to l}\ |^2$. Поэтому вероятность того, что атом находится в состоянии l после прохождения обоих полей H_1 и H_2, должна равняться

$$P_{n\to l}=\sum_m |A^{(1)}_{n\to m}|^2 |A^{(2)}_{m\to l}|^2. \tag{4}$$

С другой стороны, если рассматривать поля H_1 и H_2 как единое поле H_{12}, то амплитуда перехода атома из состояния n в состояние l под воздействием поля H_{12} должна определяться по формуле

$$A^{(12)}_{n\to l}=\sum_m A^{(1)}_{n\to m}A^{(2)}_{m\to l},$$

и поэтому вероятность того, что атом находится в состоянии l после прохождения поля H_{12}, должна равняться

$$|A^{(12)}_{n\to l}|^2=\Big|\sum_m A^{(1)}_{n\to m}A^{(2)}_{m\to l}\Big|^2. \tag{5}$$

Но эта величина не равна $P_{n\to l}$. Возникшее противоречие исчезает, если мы учтем, что формулы (4) и (5) относятся в действительности к двум различным экспериментам. Выражение (4) правильно, если между H_1 и H_2 производится опыт, позволяющий определить стационарное состояние атома. При таком опыте неизбежно изменяется на неопределенную величину фаза шрёдингеровской волны, относящейся к m-му состоянию, и, следовательно, каждый член $A^{(1)}_{n\to m}$, $A^{(2)}_{m\to l}$ под знаком суммы (5) должен быть умножен на фазовый множитель $e^{\pm i\chi_m}$ с неизвестной фазой χ_m, по которой все выражение должно быть усреднено. В результате такого усреднения формула (5) перейдет в формулу (4). Если же промежуточного опыта, позволяющего определить состояние атома между H_1 и H_2, не было, то результат конечного опыта дается формулой (5). Формула (4) в этом случае неправильна, так как бессмысленно утверждение о том, что между H_1 и H_2 атом находится в определенном состоянии m.

Таким образом, следует строго различать три опыта:

П е р в ы й о п ы т. Между H_1 и H_2 атомы не испытывают возмущения. Вероятность найти атом в состоянии l после прохождения поля H_2 будет

$$\Big|\sum_m A^{(1)}_{n\to m}A^{(2)}_{m\to l}\Big|^2.$$

В т о р о й о п ы т. Между H_1 и H_2 имеет место некоторое воздействие на атомы, позволяющее определить их стационарное состояние, но результат измерения не регистрируется. В этом случае возникает «смесь», и вероятность найти атом в состоянии l после прохождения поля H_2 будет

$$\sum_m |A^{(1)}_{n\to m}|^2 |A^{(2)}_{m\to l}|^2.$$

Т р е т и й о п ы т. Между H_1 и H_2 атомы испытывают воздействие, позволяющее определить их стационарные состояния, и результат измерения регистрируется. Вероятность найти атом после прохождения H_2 в состоянии l будет при этом равна

$$|A^{(2)}_{m\to l}|^2.$$

Различие между случаями второго и третьего опытов привычно уже из классической теории. Принципиальное различие между случаями первого и второго опытов образует, будучи соответственно обобщено, центральный пункт квантовой теории.

Как говорит Гейзенберг, «процесс измерения разделяется на два *строго различных акта. Первый акт измерения состоит в том, что система* подвергается внешнему, физически реальному, изменяющему ход событий воздействию, например, производится освещение светом или включение поля. Это воздействие приводит к тому, что наблюдаемая система переходит в «смесь» состояний, вообще говоря, бесконечно многих. Второй акт измерения выбирает из бесконечно большого числа состояний смеси некоторое вполне определенное, как действительно реализованное. Этот второй шаг представляет собой процесс, который сам не воздействует на ход событий, но который только изменяет наше знание реальных соотношений» ([4а], стр. 50).

4. ГИПОТЕЗА О «СКРЫТЫХ» ПАРАМЕТРАХ

Но действительно ли квантовая механика сумела отвергнуть лапласовский детерминизм? Ведь статистические закономерности существуют и в классической физике, т. е. при полнейшем детерминизме. Достаточно указать на закономерности в флуктуациях различных величин, относящихся к макроскопическим телам. Более того, своими работами Больцман и Гиббс показали, что всю термодинамику можно рассматривать как статистическую механику и что, исходя из законов механики, можно, учитывая атомную структуру макроскопических тел и усредняя различные величины, относящиеся к этим телам, по ненаблюдаемым «скрытым» параметрам — координатам и импульсам отдельных атомов — получить все термодинамические свойства макроскопических тел.

*В квантовой механике ситуация несколько иная — здесь микроси*стемы, насколько мы знаем, не состоят из большого числа меньших объектов. Но, может быть, тем не менее существуют какие-то «скрытые» параметры, подобные координатам и импульсам отдельных атомов в кинетической теории материи, которые и ответственны за наблюдаемые статистические закономерности в поведении отдельных микрообъектов? Чтобы ответить на этот вопрос в настоящее время, когда нет иной, кроме квантовой механики, последовательной и непротиворечивой теории, нужно выяснить, есть ли место для «скрытых» параметров в существующей квантовой механике.

Впервые вопрос о «скрытых» параметрах был поставлен фон Нейманом и им же и решен, причем ответ фон Неймана гласит, что квантовая механика является логически замкнутой теорией, в которой нет места для «скрытых» параметров (*теорема фон Неймана*). Иначе говоря, для введения «скрытых» параметров требуется коренная ломка квантовой механики *).

В последнее время сильно возрос интерес к гносеологическим основам квантовой механики и, в первую очередь, к теореме фон Неймана. Такой интерес объясняется, возможно, тем, что, несмотря на все усилия, пока не удалось построить теорию субъядерной материи и тех фундаментальных взаимодействий, которым она подвержена. Поскольку эта центральная проблема современной физики не поддается решению, естественным представляется желание еще раз проанализировать основы существующей теории микромира. В результате такого анализа появилась большая литература по теореме фон Неймана. Ниже мы даем ее обзор и приводим наиболее простые и ясные доказательства этой фундаментальной теоремы. Но прежде всего мы приведем здесь две наиболее известные модели скры-

---

*) Подробная дискуссия этого вопроса содержится в книге [5а].

тых параметров — гидродинамическую модель и модель Винера — Зигеля и разъясним несостоятельность этих моделей.

Гидродинамическая модель [6а,г,7] исходит из аналогии между уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi+V(\mathbf{r},t)\Psi$$

и уравнением движения идеальной жидкости. Чтобы установить эту аналогию, положим

$$\Psi(\mathbf{r},t)=[\rho(\mathbf{r},t)]^{1/2}e^{iS(\mathbf{r},t)/\hbar}.$$

Мы получим тогда систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{v}=0,\\ m\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+m(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=-\nabla V+\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla\left(\dfrac{\Delta\rho^{1/2}}{\rho}\right),\end{cases}$$

где $\mathbf{v}=\nabla S/m$. Эти уравнения описывают, очевидно, движение жидкости с плотностью $\rho(\mathbf{r},t)$ и скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$, причем на жидкость, кроме внешнего поля $V(\mathbf{r},t)$, действует еще дополнительный «квантовомеханический» потенциал

$$U(\mathbf{r},t)=-(\hbar^2/2m)\,\Delta\,[\rho(\mathbf{r},t)]^{1/2}/\rho(\mathbf{r},t).$$

В гидродинамической модели скорость $\mathbf{v}$ (или импульс $m\mathbf{v}$) интерпретируется как «скрытый» параметр, и считается, что импульс частицы после измерения $\mathbf{p}$ отличается от «истинного» значения $m\mathbf{v}$. Что же касается координаты частицы, то предполагается, что ее значение после измерения совпадает с истинным значением координаты $\mathbf{r}$. Можно показать[6б], что при таком подходе мы получим правильное, т. е. соответствующее квантовой механике, распределение по импульсам частицы после измерения *). Однако такой подход придает исключительное значение координате как динамической переменной. Между тем законы квантовой механики должны быть инвариантными по отношению к выбору базиса в гильбертовом пространстве. Этому основному требованию квантовой механики не удовлетворяет гидродинамическая модель [1а, 4б, 6в, 9а] **).

В модели Винера — Зигеля [11] состояние квантовомеханической системы описывается двумя волновыми функциями — обычной волновой функцией ψ и «скрытой» волновой функцией ξ. Последняя вводится для того, чтобы точно сказать, какое из собственных значений наблюдаемой получится при ее измерении. Именно, принимается, что если рассматривается некоторая величина R, которой соответствует совокупность собственных векторов $\{\varphi_i\}$, то ψ следует разложить по этому базису:

$$\psi=\sum_i\psi_i\varphi_i,$$

а ξ — по сопряженному базису:

$$\xi=\sum_i\xi_i\varphi_i^+$$

(φ^+ — вектор, эрмитовски-сопряженный по отношению к φ). После этого следует найти максимальное значение отношения $|\psi_i|/|\xi_i|$. Если оно

*) Уравнение Шрёдингера можно также получить классически как уравнение движения частицы, подверженной случайным толчкам [6д, 8]. Но основная трудность, которую, как мы убедимся, невозможно преодолеть, состоит в невозможности построения классической модели квантовомеханических измерений.

**) Другие возражения против гидродинамической модели см. в статьях [5а, 10].

достигается при $i = k$, то при измерении R получится собственное значение r_k.

Так как в квантовой механике вероятность получить значение r_k равна $|\psi_k|^2$, следует задать распределение скрытых параметров $\{\xi_i\}$ таким образом, чтобы это требование квантовой механики выполнялось и в рассматриваемой модели. Это достигается предположением, что величины $\{|\xi_i|\}$ распределены по закону[11б, 12]

$$f(|\xi_i|) = \exp(-|\xi_i|^2/2)\,|\xi_i|.$$

Задача теперь сводится к тому, чтобы найти вероятность того, что максимальное значение отношения $|\psi_i|/|\xi_i|$ достигается при $i = k$. Эта вероятность равна, очевидно,

$$p_k = \int\limits_{D_k}\ldots\int \prod_i |\xi_i| \exp(-|\xi_i|^2/2)\, d|\xi_i|,$$

где область интегрирования D_k определяется неравенствами

$$|\xi_i| \geqslant |\psi_i|\,|\psi_k|^{-1}\,|\xi_k|.$$

Поэтому

$$p_k = \int\limits_0^\infty |\xi_k|\, e^{-|\xi_k|^2} d|\xi_k| \prod_{i\neq k} \int\limits_{|\psi_i|\,|\psi_k|^{-1}|\xi_k|}^{\infty} |\xi_i| \exp(-|\xi_i|^2/2)\, d|\xi_i|,$$

откуда находим, как и требуется,

$$p_k = |\psi_k|^2.$$

Однако модель Винера — Зигеля, так же как и гидродинамическая модель, оказывается неинвариантной по отношению к выбору базиса в гильбертовом пространстве[13] и поэтому должна быть отброшена *). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим в трехмерном гильбертовом пространстве оператор проектирования $\hat{P}_3$ на ось 3. Если в качестве базиса взять собственные векторы этого оператора

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \varphi_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \varphi_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\ \hat{P}_3\varphi_i = \lambda_i\varphi_i,\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\quad \lambda_3 = 1,$$

то оператор $\hat{P}_3$ будет иметь диагональный вид

$$\hat{P}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Заметим, что *операторы проектирования* $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$, $\hat{P}_3$ *имеют физический* смысл, так как они связаны простыми соотношениями с операторами проекции момента, равного единице. В представлении, в котором диагонален

*) Заметим, что в связи с предложенной модификацией[14а] модели Винера — Зигеля (также не инвариантной по отношению к выбору базиса в гильбертовом пространстве), которая должна была бы приводить к наблюдаемому расхождению с квантовой механикой в области коротких промежутков времени, был проведен эксперимент[15], подтвердивший справедливость квантовой механики[16] вплоть до промежутков времени порядка 10^{-15} *сек*. В работе[17] высказывалось утверждение о том, что якобы при малой плотности фотонов исчезают интерференционные явления. Однако это утверждение основано на экспериментальной ошибке.

оператор проекции момента на ось z, проекции момента имеют вид

$$\hat{J}_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \hat{J}_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{bmatrix},\quad \hat{J}_z=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

Если система координат x, y, z получается из системы координат 1, 2, 3 путем вращения на 45° вокруг оси 2 (перпендикулярной плоскости чертежа),

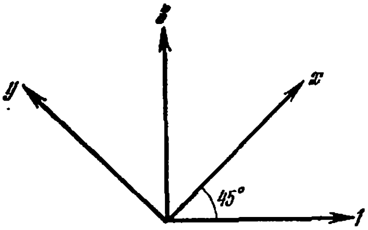

Рис. 3.

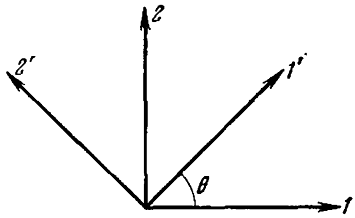

Рис. 4.

совпадающей с осью z (рис. 3), то, как нетрудно убедиться,

$$\hat{P}_1 = 1-\hat{J}_x^2,\quad \hat{P}_2 = 1-\hat{J}_z^2,\quad \hat{P}_3 = 1-\hat{J}_y^2.$$

Согласно общей схеме Винера — Зигеля при измерении $\hat{P}_3$ мы получим значение λ_k, если в ряду

$$\frac{|\psi_1|}{|\xi_1|},\quad \frac{|\psi_2|}{|\xi_2|},\quad \frac{|\psi_3|}{|\xi_3|} \tag{6}$$

наибольшим будет отношение $|\psi_k|/|\xi_k|$. Так как $\lambda_1 = \lambda_2$, то при вращении осей координат вокруг оси 3 на угол θ (рис. 4):

$$\psi_1 \to \psi_1' = \psi_1\cos\theta + \psi_2\sin\theta,\quad \psi_2 \to \psi_2' = -\psi_1\sin\theta + \psi_2\cos\theta,$$
$$\psi_3 \to \psi_3' = \psi_3,$$
$$\xi_1 \to \xi_1' = \xi_1\cos\theta - \xi_2\sin\theta,\quad \xi_2 \to \xi_2' = \xi_1\sin\theta + \xi_2\cos\theta,\quad \xi_3 \to \xi_3' = \xi_3,$$

оператор $\hat{P}_3$ не изменит своего вида. Поэтому мы должны получить при измерении $\hat{P}_3$ значение λ_k, если в ряду

$$\frac{|\psi_1'|}{|\xi_1'|},\quad \frac{|\psi_2'|}{|\xi_2'|},\quad \frac{|\psi_3'|}{|\xi_3'|},\ \ldots \tag{7}$$

наибольшим будет отношение $|\psi_k'|/|\xi_k'|$. Однако, как легко убедиться, если в ряду (6) максимальным было отношение $|\psi_k|/|\xi_k|$, то отсюда вовсе не следует, что в ряду (7) максимальным будет отношение $|\psi_k'|/|\xi_k'|$. Достаточно положить, например, $\psi_1 = 5$, $\psi_2 = -1$, $\psi_3 = 2$, $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 1$, $\theta = 45°$. При этом ряд (6) принимает вид 5/3; 1; 2. Так как из этих чисел наибольшим является третье число, при измерении $\hat{P}_3$ мы получим третье собственное значение, т. е. $(\hat{P}_3)_\xi = 1$. С другой стороны, при $\theta = 45°$ ряд (7) имеет вид 1; 3; 2. В этом случае наибольшим является второе число и при измерении $\hat{P}_3$ мы получим второе собственное значение, т. е. $(\hat{P}_3)_\xi = 0$.

Таким образом, модель скрытых параметров Винера — Зигеля является противоречивой.

5. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СКРЫТЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Мы перейдем теперь к изложению доказательств теоремы фон Неймана о невозможности введения в квантовую механику скрытых параметров без кардинального изменения ее принципов. Идея доказательств заключается в установлении противоречия между предположением о существовании скрытых параметров и постулатами квантовой механики.

Итак, пусть существуют скрытые параметры, которые мы будем обозначать через ξ (ξ обозначает одну или ряд величин). Это значит, что если измеряется какая-либо наблюдаемая R и результат единичного измерения ее есть r, то утверждается, что наблюденное значение r представляет собой однозначную функцию $f_R(\xi)$ скрытых параметров ξ:

$$r \equiv (R)_\xi = f_R(\xi).$$

Мы будем предполагать, что такие функции $f_R(\xi)$, $f_Q(\xi)$, ... существуют одновременно для всех наблюдаемых R, Q, . . . независимо от того, коммутируют или не коммутируют между собой соответствующие этим наблюдаемым операторы $\hat{R}$, $\hat{Q}$, . . . Разумеется, при некоммутирующих операторах $\hat{R}$ и $\hat{Q}$ нельзя получить $(R)_\xi \equiv f_R(\xi)$ и $(Q)_\xi$ в одном эксперименте, так для этого нужны различные измерительные приборы. Когда мы говорим об одновременном существовании величин $(R)_\xi$ и $(Q)_\xi$, то мы имеем в виду лишь потенциальную возможность: знание скрытых параметров ξ позволяет предсказать результат любого *единичного* эксперимента.

Постулат об одновременном существовании величин $(R)_\xi$, $(Q)_\xi$, . . . для всех операторов $\hat{R}$, $\hat{Q}$, . . ., в том числе и некоммутирующих, существен и далеко не очевиден. Действительно, логически мыслима возможность, когда величины $(R)_\xi$, $(Q)_\xi$, . . . определены лишь на множестве попарно коммутирующих операторов [18а]. В пользу этого постулата об одновременном существовании всех величин $(R)_\xi$, $(Q)_\xi$, . . . для всех операторов, в том числе и некоммутирующих, говорит следующий мысленный опыт Эйнштейна — Подольского — Розена [19]. Пусть система из двух электронов, находящаяся в синглетном состоянии (т. е. обладающая суммарным спином, равным нулю), распадается на два электрона *). При этом проекции спинов электронов на любую ось будут иметь противоположные знаки **). Поэтому, если бы существовали скрытые параметры, то они определяли бы величину проекции спина на любую ось, хотя операторы проекции спина на различные оси не коммутируют.

Итак, мы будем предполагать, что имеет смысл одновременное введение функций $f_R(\xi) \equiv (R)_\xi$, $f_Q(\xi)$ . . . для всех операторов $\hat{R}$, $\hat{Q}$, . . ., в том числе и для некоммутирующих ***).

Величины $(R)_\xi$ не могут, естественно, отличаться от собственных значений r_i операторов $\hat{R}$ ****). Поэтому смысл введения функций $f_R(\xi)$

---

*) *Такая ситуация может быть осуществлена, если из атома гелия, находящегося в синглетном состоянии, нейтрон выбивает ядро.*

**) Парадоксальность такой корреляции, которая должна иметь место при любых расстояниях между частицами, вызвала желание проверить наличие корреляции на опыте. Опыт был проведен в случае фотонов Ву и Шакновом (см. [20]) и подтвердил наличие корреляции (см. в связи с этим [21а]).

***) Некоторые авторы строят модели скрытых параметров, отказавшись от этого постулата (см. [21б]). Однако при этом получается противоречие с выводами квантовой механики, и, следовательно, такие модели не могут служить для объяснения квантовой теории в рамках классической физики. Строго говоря, их нельзя по этой причине называть моделями скрытых параметров.

****) Мы докажем это утверждение строго в разделе 6.

состоит в том, что существует однозначное соответствие между значениями скрытых параметров ξ и собственными значениями r_i, q_j, ... операторов $\hat{R}$, $\hat{Q}$, ... Более точная формулировка состоит в том, что пространство скрытых параметров может быть разбито на области $(\Delta\xi)_{r_i, q_j}, \ldots$, которым соответствуют определенные собственные значения r_i, q_j, операторов $\hat{R}$, $\hat{Q}$, ... Мера области $(\Delta\xi)_{r_i, q_j}, \ldots$ (т. е. определенным образом взвешенный объем области $(\Delta\xi)_{r_i, q_j} \ldots$) должна определять вероятность $w(r_i, q_j, \ldots)$ $(w \geqslant 0)$ того, что при измерении величины $\hat{R}$ получится значение r_i при измерении величины $\hat{Q}$ — значение q_j и т. д. При этом не предполагается, что величины R, Q, ... определяются в одном и том же эксперименте, что, вообще говоря, невозможно, так как операторы $\hat{R}$, $\hat{Q}$, ... могут не коммутировать друг с другом. Весьма важным здесь является лишь сам факт существования единой функции $w(r_i, q_j, \ldots)$, зависящей от собственных значений r_i, q_j, ... операторов $\hat{R}$, $\hat{Q}$, ... и определяющей результаты всех измерений. В частности, вероятность того, что измерение величины R даст значение r_i независимо от значений всех остальных величин, равна

$$w(r_i) = \sum_j w(r_i, q_j).$$

Подчеркнем, что существование такой функции является непосредственным следствием предположения о существовании скрытых параметров (т. е. следствием существования функциональных соотношений $(\hat{R})_\xi = f_R(\xi)$).

Мы покажем теперь, что существование неотрицательной функции $w(r_i, q_j, \ldots)$ противоречит результатам квантовой механики и в первую очередь интерференции вероятностей *).

Будем измерять проекции спина электрона на различные оси. Обозначим через $(\hat{s}_i)_\xi$ результат измерения проекции спина электрона на направление i, соответствующий некоторому значению ξ скрытого параметра. Эта величина должна совпадать с одним из собственных значений оператора $\hat{s}_i$, т. е. равна либо 1/2, либо —1/2. Если бы существовали скрытые параметры, то должна была бы существовать единая функция $w(s_1, s_2, s_3)$ $(s_i = \pm 1/2;\ i = 1, 2, 3)$ от собственных значений операторов проекции спина электрона на оси 1, 2, 3, расположенные как угодно друг по отношению к другу, с помощью которой можно было бы предсказывать результаты всех измерений спина электрона.

Как известно из квантовой механики, если проекция спина электрона на некоторую ось i равна 1/2, то вероятность того, что проекция спина на другую ось j также 1/2, равна $\cos^2(\vartheta_{ij}/2)$, где ϑ_{ij} — угол между осями i и j.

Предположим, теперь, что неполяризованный пучок электронов проходит анализатор, выделяющий электроны со спином, ориентированным вдоль оси 1. Тогда вероятность того, что какой-либо электрон пройдет анализатор, т. е. будет иметь $s_1 = 1/2$, равна 1/2. Пропустим, далее, эти электроны через другой анализатор, выделяющий электроны, у которых $s_2 = -1/2$. Тогда вероятность того, что после прохождения электроном второго анализатора мы обнаружим у него $s_2 = -1/2$, равна

$$W(s_1 = 1/2,\ s_2 = -1/2) = 0{,}5 \cos^2[(\pi - \vartheta_{12})/2] = 0{,}5 \sin^2(\vartheta_{12}/2). \quad (8)$$

---

*) Это утверждение было независимо доказано Блохинцевым [56] и Вигнером [226], Мы ниже следуем работе [226].

Если существуют скрытые параметры и их значения не изменяются в результате последовательных измерений, то найденную вероятность можно получить с помощью совместной функции распределения $w(s_1, s_2, s_3)$ путем суммирования по возможным значениям s_3:

$$W(s_1 = 1/2,\ s_2 = -1/2) = w(1/2,\ -1/2,\ 1/2) + w(1/2,\ -1/2,\ -1/2),$$

или

$$0{,}5 \sin^2(\vartheta_{12}/2) = w(1/2,\ -1/2,\ 1/2) + w(1/2,\ -1/2,\ -1/2). \tag{9}$$

Аналогичным образом должны иметь место соотношения

$$0{,}5 \sin^2(\vartheta_{13}/2) = w(1/2,\ 1/2,\ -1/2) + w(1/2,\ -1/2,\ -1/2),$$

$$0{,}5 \sin^2(\vartheta_{32}/2) = w(1/2,\ -1/2,\ 1/2) + w(-1/2,\ -1/2,\ 1/2).$$

а так как $w \geqslant 0$, то и

$$w(1/2,\ -1/2,\ -1/2) \leqslant 0{,}5 \sin^2(\vartheta_{13}/2),$$
$$w(1/2,\ -1/2,\ 1/2) \leqslant 0{,}5 \sin^2(\vartheta_{32}/2).$$

Подставляя эти неравенства в (9), получим

$$\sin^2(\vartheta_{12}/2) \leqslant \sin^2(\vartheta_{13}/2) + \sin^2(\vartheta_{32}/2). \tag{10}$$

Это неравенство должно выполняться для любых трех осей 1, 2, 3, что невозможно. В самом деле, пусть оси 1, 2, 3 лежат в одной плоскости и ось 3 является биссектрисой угла между осями 1 и 2. Тогда $\vartheta_{12} = 2\vartheta_{13}$, $\vartheta_{32} = \vartheta_{13}$ и неравенство (10) принимает вид

$$\sin^2\vartheta_{13} \leqslant 2 \sin^2(\vartheta_{13}/2)$$

или $2\cos^2(\vartheta_{13}/2) \leqslant 1$, что невозможно, если $\vartheta_{13} < \pi/2$.

Таким образом, существование скрытых параметров противоречит формуле (8), которая выводится на основе принципа суперпозиции. Иными словами, существование скрытых параметров противоречит интерференции вероятностей.

В приведенном доказательстве отсутствия скрытых параметров мы неявно предполагали, что в результате повторных измерений скрытые параметры не изменяются. Это очень жесткое требование может быть, как мы покажем далее, отброшено.

В заключение этого раздела упомянем еще об одной «классической» модели квантовой механики, эквивалентной, однако, обычной квантовой механике. В этой модели [22а] (см. также [5в, 9б, 23]) вводится совместная плотность вероятности координаты x и импульса p

$$f(x,\ p) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x + 0{,}5h\tau)\, e^{ip\tau} \psi(x - 0{,}5h\tau)\, d\tau, \tag{11}$$

где $\psi(x)$ — волновая функция в координатном представлении. С помощью функции $f(x,\ p)$ можно получить вероятность $dw_x(x)$ нахождения частицы в интервале $(x,\ x + dx)$:

$$dw_x(x) = dx \int f(x,\ p)\, dp,$$

а также вероятность $dw_p(p)$ того, что импульс частицы лежит в интервале $(p,\ p + dp)$:

$$dw_p(p) = dp \int f(x,\ p)\, dx.$$

Однако выражение (11) не означает, что частица может одновременно иметь определенную координату и определенный импульс, так как функция $f(x, p)$ может принимать отрицательные значения *).

Отметим также, что Фейнманом была предложена «третья формулировка квантовой механики» [25] (первой и второй формулировками являются уравнение Шрёдингера и матричная алгебра Гейзенберга), в которой каждая частица имеет случайную траекторию и амплитуда вероятности перехода является континуальным интегралом по всевозможным траекториям. Эта формулировка, эквивалентная формулировкам Шрёдингера и Гейзенберга, не является моделью скрытых параметров, так как в ней складываются не вероятности, а их амплитуды.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЕ ФОН НЕЙМАНУ

Результаты предыдущего раздела основываются на очень жестком требовании о неизменности скрытых параметров при последовательных измерениях различных величин. В доказательстве теоремы фон Неймана, данном им самим [26], это требование отбрасывается. Приведем это доказательство.

Будем исходить из основной формулы $(R)_\xi = f_R(\xi)$, связывающей значение скрытых параметров ξ с наблюдаемым значением $(R)_\xi$ величины R. Пусть распределение скрытых параметров задается плотностью вероятности $w(\xi)$. Функция $w(\xi)$ должна определяться состоянием системы, иными словами, каждому чистому состоянию ψ, либо каждому смешанному состоянию, характеризуемому матрицей плотности $\hat{U}$, должна соответствовать своя функция $w(\xi)$. (Поэтому функцию $w(\xi)$ следует снабжать индексом ψ или U.)

Ясно, что среднее значение $\langle R\rangle$ величины R, получаемое в результате ряда *независимых* измерений, производимых над системой, находящейся в состоянии ψ, будет определяться формулой

$$\langle R\rangle = \int (R)_\xi w_\psi(\xi)\, d\xi.$$

Это выражение обязано совпадать со средним, определяемым по законам квантовой механики. Иными словами, если система находится в состоянии ψ, *то должно иметь место соотношение*

$$\langle R\rangle = (\psi, \hat{R}\psi).$$

Если же система находится в смешанном состоянии, описываемом матрицей плотности $\hat{U}$, то должно иметь место соотношение

$$\langle R\rangle = \mathrm{Sp}\,(\hat{U}\hat{R}).$$

В квантовой механике средние удовлетворяют соотношению

$$\langle \hat{R} + \hat{Q}\rangle = \langle \hat{R}\rangle + \langle \hat{Q}\rangle.$$

Поэтому и в модели скрытых параметров должно иметь место соотношение

$$\int (R+Q)_\xi\, w_U(\xi)\, d\xi = \int (R)_\xi\, w_U(\xi)\, d\xi + \int (Q)_\xi\, w_U(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

*) Заметим, что эта «квазивероятность» широко применяется в квантовой кинетике [24].

Так как различным матрицам плотности $\hat{U}$ соответствуют различные плотности вероятности w_U, естественно потребовать выполнения соотношения

$$(R + Q)_\xi = (R)_\xi + (Q)_\xi \tag{13}$$

для любых наблюдаемых R и Q, которым могут соответствовать как коммутирующие, так и некоммутирующие операторы $\hat{R}$ и $\hat{Q}$. К этому соотношению должно быть добавлено соотношение

$$(R^2)_\xi = (R)_\xi^2, \tag{14}$$

выражающее отсутствие дисперсии, а также очевидное соотношение

$$(aR)_\xi = a\,(R)_\xi, \tag{15}$$

где a — произвольное комплексное число.

Мы покажем теперь, что эти соотношения не могут выполняться одновременно, причем совершенно несущественно, чтó понимается под скобками $(R)_\xi \equiv (\hat{R})_\xi$, в которых стоит эрмитов оператор $\hat{R}$. Иными словами, система соотношений (13) — (15) противоречива в формально-алгебраическом смысле. Чтобы доказать это утверждение, выберем в гильбертовом пространстве некоторый базис $\psi_1, \psi_2, \ldots$ и определим в нем матричные элементы оператора $\hat{R}$:

$$\hat{R}_{mn} = (\psi_m, \hat{R}\psi_n), \qquad \hat{R}^*_{nm} = \hat{R}_{mn}.$$

Величины $(\hat{R})_\xi$ являются некоторыми функциями совокупности $\{R_{mn}\}$ этих матричных элементов

$$(\hat{R})_\xi = \varphi(\{R_{mn}\}).$$

Из (13) следует, что

$$\varphi(\{R_{mn} + Q_{mn}\}) = \varphi(\{R_{mn}\}) + \varphi(\{Q_{mn}\}).$$

Дифференцируя это соотношение по R_{ij}, получим

$$\frac{\partial\varphi(\{R_{mn} + Q_{mn}\})}{\partial R_{ij}} = \frac{\partial\varphi(\{R_{mn}\})}{\partial R_{ij}},$$

откуда вытекает, что величины

$$U_{ji} = \frac{\partial\varphi(\{R_{mn}\})}{\partial R_{ij}}, \qquad U_{ij} = U^*_{ji}. \tag{16}$$

не зависят от R_{mn}, т. е. представляют собой некоторые константы. Так как, согласно постулату (15),

$$\varphi(\{0\}) = 0,$$

то из (16) следует

$$\varphi(\{R_{mn}\}) = \sum_{ij} U_{ji} R_{ij}. \tag{17}$$

Очевидно, что величины U_{ji} можно представить в виде

$$U_{ji} = (\psi_j, \hat{U}\psi_i),$$

где $\hat{U}$ — некоторый эрмитов оператор. С помощью него можно, согласно формуле (17), записать $(\hat{R})_\xi$ в виде

$$(\hat{R})_\xi = \mathrm{Sp}\,(\hat{U}\hat{R}).$$

В частности, $\mathrm{Sp}\,\hat{U} = 1$.

Покажем теперь, что существование матрицы плотности $\hat{U}$ противоречит бездисперсности всех эрмитовых операторов. Для этого достаточно в качестве $\hat{R}$ выбрать оператор проектирования $\hat{P}$. При этом

$$(\hat{P}^2_{[\varphi]})_\xi = \mathrm{Sp}\,(\hat{U}\hat{P}^2_{[\varphi]}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{U}\hat{P}_{[\varphi]}) = (\varphi,\ \hat{U}\varphi).$$

С другой стороны, в силу (14)

$$(\hat{P}^2_{[\varphi]})_\xi = (\hat{P}_{[\varphi]})^2_\xi,$$

откуда

$$(\hat{P}^2_{[\varphi]})_\xi = (\varphi,\ \hat{U}\varphi)^2,$$

т. е.

$$(\varphi,\ \hat{U}\varphi) = (\varphi,\ \hat{U}\varphi)^2$$

и, следовательно, величина $(\varphi,\ \hat{U}\varphi)$ равна либо нулю, либо единице.

Легко видеть, что значение $(\varphi,\ \hat{U}\varphi)$ должно быть одинаковым для всех векторов φ гильбертова пространства, потому что любые два вектора ψ_1 и ψ_2 можно непрерывным образом перевести друг в друга, а переход из нуля в единицу является скачкообразным. Нуль, очевидно, исключается. Если же $(\varphi,\ \hat{U}\varphi) = 1$ для всех φ, то $1 = \sum\limits_{n=1}^{N} (\psi_n,\ \hat{U}\psi_n) = N$, где N — размерность унитарного пространства, что невозможно.

Таким образом, мы обнаружили противоречие в системе постулатов (13) — (15) на примере проекционных операторов, что и доказывает противоречивость этих постулатов, а следовательно, и невозможность введения скрытых параметров.

Смысл установленного противоречия очень прост. Дело в том, что, как мы сейчас покажем, величины $(\hat{R})_\xi$ не могут быть ничем иным, как собственными значениями оператора $\hat{R}$ [27]. Собственные же значения суммы некоммутирующих между собой операторов не равны сумме собственных значений этих операторов, как должно было бы быть при выполнении постулата (13).

Чтобы доказать, что $(\hat{R})_\xi$ представляет собой одно из собственных значений оператора $\hat{R}$, покажем сначала, что для коммутирующих операторов $\hat{R}$ и $\hat{Q}$ выполняется соотношение

$$(\hat{R}\hat{Q})_\xi = (\hat{R})_\xi\,(\hat{Q})_\xi. \tag{18}$$

В самом деле,

$$((\hat{R}+\hat{Q})^2)_\xi = (\hat{R}^2 + 2\hat{R}\hat{Q} + \hat{Q}^2)_\xi = (\hat{R}^2)_\xi + 2\,(\hat{R}\hat{Q})_\xi + (\hat{Q}^2)_\xi =$$
$$= (\hat{R})^2_\xi + 2\,(\hat{R}\hat{Q})_\xi + (\hat{Q})^2_\xi.$$

С другой стороны,

$$((\hat{R}+\hat{Q})^2)_\xi = (\hat{R}+\hat{Q})^2_\xi = [(\hat{R})_\xi + (\hat{Q})_\xi]^2 = (\hat{R})^2_\xi + 2\,(\hat{R})_\xi\,(\hat{Q})_\xi + (\hat{Q})^2_\xi.$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к формуле (18).

Покажем далее, что $(\hat{R})_\xi$ равно одному из собственных значений r_i оператора $\hat{R}$. Предположим противное: $(\hat{R})_\xi \neq r_i$. Тогда оператор $\hat{R} - (\hat{R})_\xi$ будет иметь обратный оператор $\hat{Q}$

$$[\hat{R} - (\hat{R})_\xi]\,\hat{Q} = 1.$$

Поэтому

$$([\hat{R} - (\hat{R})_\xi]\,\hat{Q})_\xi = 1.$$

Так как всякий оператор коммутирует с обратным, то, пользуясь (18), получим

$$(\hat{R} - (\hat{R})_\xi)_\xi\,(\hat{Q})_\xi = 1. \qquad (19)$$

С другой стороны, из постулатов (13) — (15) следует, что

$$(\hat{R} - (\hat{R})_\xi)_\xi = 0,$$

поэтому выражение (19) принимает вид $0 = 1$, что невозможно. (Заметим, что в приведенном доказательстве мы использовали постулат (13) только для коммутирующих между собой операторов $\hat{R}$ и $\hat{Q}$.)

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФОН НЕЙМАНА, НЕ ИСПОЛЬЗУЮЩЕЕ ПОСТУЛАТА ОБ АДДИТИВНОСТИ НЕСОВМЕСТИМЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Приведенное доказательство теоремы фон Неймана базируется на определенных постулатах (13) — (15) модели скрытых параметров. Поскольку первый из этих постулатов (постулат об аддитивности несовместимых наблюдаемых) представляет собой очень сильное требование [14a, 28], возникает вопрос, нельзя ли доказать теорему фон Неймана, не используя этого постулата, тем более, что соотношение (13) непосредственно не вытекает из (12), особенно если учесть принципиальную возможность зависимости плотности вероятности $w(\xi)$ не только от состояния системы $\hat{U}$, но и от вида оператора $\hat{R}$.

С другой стороны, если $\hat{R}$ и $\hat{Q}$ коммутируют между собой, то выполнение соотношения (13) представляется естественным. Мы покажем теперь, следуя Кохену и Шпекеру [27], что теорема фон Неймана остается справедливой и в том случае, если постулат (13) выполняется только для коммутирующих друг с другом операторов $\hat{R}$ и $\hat{Q}$ *). Идея доказательства заключается в том, что рассматривается совокупность проекционных операторов $\hat{P}_{[\varphi_i]}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ и с помощью постулатов (13) — (15) (постулат (13) считается справедливым только для коммутирующих операторов) устанавливаются следующие их свойства:

$$\left.\begin{aligned} &(\hat{P}_{[\varphi_i]\xi})(\hat{P}_{[\varphi_j]})_\xi = 0 \qquad \text{при } (\varphi_i, \varphi_j) = 0,\\ &\sum_{n=1}^{N} (\hat{P}_{[\psi_n]})_\xi = 1, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

где $\{\psi_n\}$ — полная ортонормированная система векторов, N — размерность евклидова пространства (в случае гильбертова пространства $N = \infty$). Далее на конкретном примере показывается, что эти свойства противоречивы. Мы не будем приводить здесь полностью этого доказательства, а проиллюстрируем лишь ход развития идей на некотором простом примере.

Предположим, что наряду с соотношениями (20) выполняется еще следующее добавочное условие: для любых некоммутирующих проекцион-

*) Мисра [29] доказал теорему фон Неймана, не используя постулата (13), а предполагая, что если $\hat{R} - \hat{S} = \hat{Q}^2$, то $(R)_\xi \geqslant (S)_\xi$.

ных операторов $\hat{P}_{[\varphi_i]}$ и $\hat{P}_{[\varphi_j]}$ существует такое значение скрытого параметра ξ, что

$$(\hat{P}_{[\varphi_i]})_\xi = (\hat{P}_{(\varphi_j]})_\xi = 1. \tag{21}$$

(Это условие носит название *постулата отделимости*.) Покажем, что при выполнении постулатов (20) и (21) можно выбрать 8 векторов в трехмерном пространстве, для которых эти соотношения не выполняются.

Будем изображать каждый вектор φ_i точкой на плоскости, а отношение ортогональности векторов φ_i и φ_j — линией, соединяющей точки φ_i и φ_j. Например, на графе, изображенном на рис. 5, ортогональны векторы φ_1 и φ_2, векторы же φ_2 и φ_3 не ортогональны. Согласно (20), если две точки φ_i и φ_j соединены линией, то по крайней мере одна из величин P_α ($\alpha = i, j$) равна нулю ($P_\alpha \equiv (\hat{P}_{[\varphi_\alpha]})_\xi$); если же три точки φ_i, φ_j и φ_k соединены попарно линиями (т. е. входят в один треугольник), то одна из величин P_α ($\alpha = i, j, k$) равна единице, а две остальных — нулю.

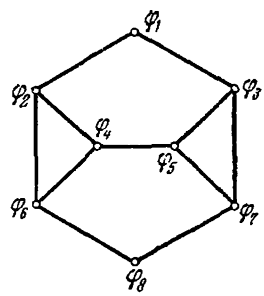

Рис. 5.

Легко видеть, что для совокупности векторов, изображенных на рис. 5, эти условия не выполняются, если считать, что $P_1 = P_8 = 1$. В самом деле, если $P_1 = 1$, то $P_2 = P_3 = 0$. Аналогично находим, что $P_6 = P_7 = 0$ Далее, если $P_2 = P_6 = 0$, то $P_4 = 1$. Аналогично находим, что $P_5 = 1$; поэтому $P_4 = P_5 = 1$, что невозможно, так как векторы φ_4 и φ_5 ортогональны.

Таким образом, ни при каком выборе скрытого параметра ξ невозможно выполнение равенств $P_1 = P_8 = 1$, т. е. не удовлетворяется постулат отделимости.

В приведенном доказательстве мы молчаливо предполагали, что конфигурация, изображенная на рис. 5, осуществима. То, что это так, явствует из следующего примера:

$$\varphi_1 = (\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3},\ \varphi_2 = (\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{2},\ \varphi_3 = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2},\ \varphi_4 = \mathbf{i},$$

$$\varphi_5 = \mathbf{k},\ \varphi_6 = (\mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{2},\ \varphi_7 = (\mathbf{i} - \mathbf{j})/\sqrt{2},\ \varphi_8 = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — три взаимно ортогональных орта.

Мы доказали противоречивость постулата (21) и соотношений (20). Кохен и Шпекер показали [27], что если отбросить постулат (20), то соотношения (20) также не выполняются, но, чтобы убедиться в этом, нужно рассматривать систему, состоящую не из 8, а из 117 векторов в трехмерном евклидовом пространстве.

Заметим, что одновременное измерение величин, соответствующих операторам $\hat{P}_{[\varphi_i]}$, $\hat{P}_{[\varphi_j]}$, $\hat{P}_{[\varphi_k]}$, в случае попарно ортогональных векторов φ_i, φ_j, φ_k можно осуществить, исследуя сдвиг энергетических уровней атома с единичным моментом ($J = 1$) в кристалле, обладающем октаэдрической симметрией [30].

8. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ ЛОГИКИ

Приведенные доказательства невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику базировались на противоречии между постулатами квантовой механики и моделью скрытых параметров. Покажем теперь, что эта невозможность, имеющая глубокий характер, связана с различием между классической и квантовой логиками, из которых ни одна не сводится к другой. Под логикой мы понимаем здесь взаимоотношения между высказываниями, т. е. так называемое *исчисление высказываний*. В классической логике каждому высказыванию A может быть сопоставлено некоторое множество Ω_A точек в фазовом пространстве, образованном обобщенными координатами и импульсами динамической системы. Это множество Ω_A называется *носителем* высказывания A.

Например, если система характеризуется гамильтонианом $H = (p^2 + q^2)/2$, то высказыванию A «энергия частицы равна единице» соответствует совокупность Ω_A точек фазового пространства, лежащих на окружности $p^2 + q^2 = 2$, а высказыванию B «частица движется в положительном направлении оси q» соответствует в фазовом пространстве полуплоскость Ω_B, $p > 0$.

Над различными высказываниями классической логики A, B, C, ... можно производить операции сложения и умножения *).

Если даны какие-либо два высказывания A и B, и высказывание C заключается в том, что справедливо хотя бы одно из высказываний A и B, то говорят, что высказывание C есть сумма высказываний A и B, и записывают это соотношение между высказываниями в виде равенства

$$C = A + B.$$

Ясно, что имеют место *коммутативный* закон

$$A + B = B + A \tag{22}$$

и *ассоциативный* закон

$$(A + B) + C = A + (B + C). \tag{23}$$

Если даны высказывания A и B и высказывание C состоит в том, что справедливы оба высказывания A и B, то говорят, что высказывание C есть произведение высказываний A и B, и записывают это отношение между высказываниями в виде равенства

$$C = AB.$$

Как для сложения, так и для умножения имеют место коммутативный и ассоциативный законы

$$AB = BA, \quad (AB)\,C = A\,(BC). \tag{24}$$

Операции сложения и умножения классической логики представляют собой теоретико-множественное сложение и умножение носителей соответствующих высказываний

$$\Omega_{AB} = \Omega_A \Omega_B, \qquad \Omega_{A+B} = \Omega_A + \Omega_B.$$

Эти операции удобно изображать графически. На рис. 6 круги A и B являются носителями высказываний A и B (в данном случае фазовым пространством является плоскость). Высказыванию AB соответствует дважды заштрихованная область, а высказыванию $A + B$ — область, заштрихованная хотя бы один раз.

В классической логике имеет место также дистрибутивный закон

$$(A + B)\,C = AC + BC. \tag{25}$$

Этот закон проиллюстрирован на рис. 7 и 8. На рис. 7 высказыванию $A + B$ соответствует горизонатальная штриховка, а высказыванию C — верти-

*) Мы изложим лишь то, что необходимо для доказательства невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику. Более подробно с классической логикой можно познакомиться, например, по книгам [31].

кальная штриховка. Поэтому высказыванию $(A + B)\,C$ соответствует дважды заштрихованная область. На рис. 8 высказыванию AC соответствует горизонтальная штриховка, а высказыванию BC — вертикальная штриховка. Поэтому высказыванию $AC + BC$ соответствует область, заштрихованная хотя бы один раз. Мы видим, что дважды заштрихованная область на рис. 7 совпадает с областью, заштрихованной хотя бы один раз на рис. 8, чего и требует дистрибутивный закон классической логики.

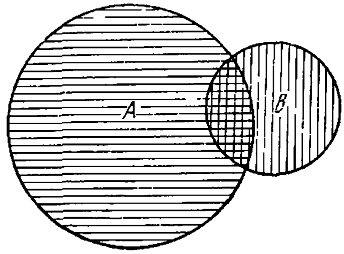

Рис. 6.

Между *некоторыми* парами высказываний $A, B, C, \ldots$ можно установить *отношение порядка*

$$A \leqslant B,$$

означающее, что если высказывание A истинно, то высказывание B также истинно, иными словами, высказывание B является следствием высказывания A.

Отношение $A \leqslant B$ означает, что носитель Ω_A высказывания A является подмножеством носителя Ω_B высказывания B:

$$\Omega_A \subseteq \Omega_B.$$

Например, высказывание B «$p > 0$» является следствием высказывания C «$p > 1$»:

$$C \leqslant B$$

Напротив, между высказываниями A «$p^2 + q^2 = 2$» и B «$p > 0$» нельзя установить отношение порядка, так как ни одно из них не является следствием другого.

Отношение порядка очевидно связано с операциями сложения и умножения высказываний законами *упорядочения*

$$A + B \geqslant A, \quad AB \leqslant A \tag{26}$$

и законами *поглощения*

$$\text{если } A \leqslant B, \text{ то } A + B = B \text{ и } AB = A. \tag{27}$$

В квантовой логике, основные принципы которой были сформулированы Биркгофом и фон Нейманом [32] (см. также [33]), каждому высказыванию

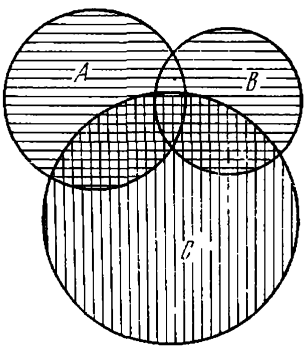

Рис. 7.

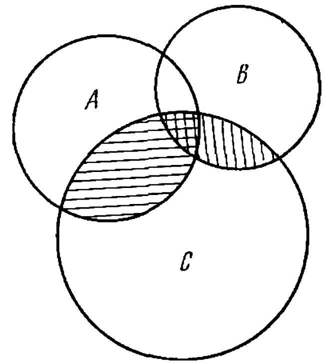

Рис. 8.

A соответствует некоторое линейное подпространство L_A гильбертова пространства. Например, высказыванию A «энергия атома равна E_n» соответствует при отсутствии вырождения некоторый ненормированный вектор ψ в гильбертовом пространстве, т. е. носителем этого высказывания является прямая L_A: $\psi = C\psi_n$ $((\psi_n, \psi_n) = 1)$ в гильбертовом пространстве. В случае двукратного вырождения носителем высказывания A является плоскость L_A в гильбертовом пространстве:

$$\psi = C_1\psi_1 + C_2\psi_2, \quad (\psi_1, \psi_1) = 1, \quad (\psi_2, \psi_2) = 1,$$

где C_1 и C_2 — произвольные числа.

В квантовой логике, так же как и в классической логике, может быть построено исчисление высказываний, основывающееся на операциях сложения, умножения и отношении следования. При этом операция умножения и отношение следования индуцируют такие же отношения между носителями высказываний $L_{AB} = L_A L_B$:

$$\text{если } A \leqslant B, \text{ то } L_A \subseteq L_B,$$

как и в классической логике. Что же касается операции сложения, то ей соответствует не теоретико-множественная сумма $L_A + L_B$ носителей отдельных слагаемых L_A и L_B, а прямая сумма $L_A \oplus L_B$ этих линейных пространств *):

$$L_{A+B} = L_A \oplus L_B \neq L_A + L_B.$$

Пусть, например, высказывание A состоит в том, что вектор магнитного момента атома μ направлен вдоль оси x, а высказывание B состоит в том, что этот вектор направлен вдоль оси y. Тогда высказывание AB состоит в том, что вектор μ направлен и вдоль оси x, и вдоль оси y, что невозможно. Такое высказывание, которое заведомо ложно, мы будем называть абсурдным и обозначать через Θ. Таким образом, в рассматриваемом случае $AB = \Theta$.

Высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ имеет вид $\mu = C_1\mu_1 + C_2\mu_2$, где μ_1 и μ_2 направлены соответственно вдоль осей x и y. Иными словами, высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ лежит в плоскости x, y (заметим, что в классической логике высказывание $A + B$ состоит в том, что вектор μ направлен либо вдоль оси x, либо вдоль оси y). В случае двумерного пространства высказывание $A + B$ заведомо истинно. Такое заведомо истинное высказывание называется тривиальным и обозначается через I.

Очевидно, что как в классической, так и в квантовой логике справедливы соотношения

$$\Theta A = \Theta, \quad \Theta + A = A, \quad IA = A, \quad I + A = I, \quad \Theta \leqslant A \leqslant I,$$

где A — любое высказывание.

В квантовой логике справедливы также коммутативный и ассоциативный законы (22), (23), (24), закон упорядочения (26) и закон поглощения (27). Что же касается дистрибутивного закона (25), то он в квантовой логике, вообще говоря, не имеет места. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим три вектора A, B, C в двумерном евклидовом пространстве (рис. 9) и высказывания A, B и C, состоящие в том, что вектор μ направлен вдоль соответствующего вектора. Имеем $A + B = I$, $(A + B)\,C = C$. С другой стороны, $AC = \Theta$, $BC = \Theta$. Поэтому $AC + BC = \Theta$. Мы видим, что дистрибутивный закон не выполняется:

$$(A + B)\,C \neq AC + BC.$$

*) Прямой суммой пространств L_A и L_B называется совокупность всевозможных сумм векторов $x + y$, где $x \in L_A$ и $y \in L_B$. Например, если L_A и L_B означают соответственно оси x и y, то теоретико-множественная сумма $L_A + L_B$ состоит из всех векторов, направленных либо вдоль оси x, либо вдоль оси y. Прямая же сумма $L_A \oplus L_B$ состоит из всех векторов, лежащих в плоскости x, y.

Приведем теперь простое доказательство невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику, опирающееся на квантовую логику (оно принадлежит Тёрнеру [13]) *).

Если бы существовали скрытые параметры, образующие фазовое пространство Ω, то существовало бы отображение $\Omega_A \to L_A$ носителей каждого высказывания A. Иными словами, мы могли бы считать, что векторы состояний ψ, дополненные скрытыми параметрами ξ, образуют некоторое фазовое пространство Ω.

С другой стороны, отображение $\Omega_A \to L_A$ должно очевидно сохранять отношение следования (*постулат изотонности*): $\Omega_A \subseteq \Omega_B$ равносильно $L_A \subseteq L_B$. Поэтому, чтобы доказать невозможность введения скрытых параметров, достаточно показать невыполнение постулата изотонности.

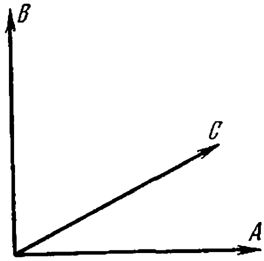

Рис. 9.

Рассмотрим с этой целью четыре направления 1, 2, 1′, 2′, лежащих в одной плоскости (см. рис. 4) унитарного пространства. Пусть этим направлениям соответствуют четыре квантовомеханических вектора состояния ψ_1, ψ_2, $\psi_{1'}$, $\psi_{2'}$. Введем, далее, суперпозиции состояний

$$\psi_{12} = C_1\psi_1 + C_2\psi_2, \quad \psi_{1'2'} = C_{1'}\psi_{1'} + C_{2'}\psi_{2'}.$$

Так как четыре направления 1, 2, 1′, 2′ лежат в одной плоскости, то $\psi_{12} = \psi_{1'2'}$. На языке квантовой логики это означает равенство прямых сумм

$$L_1 \oplus L_2 = L_{1'} \oplus L_{2'}, \tag{28}$$

где L_1, L_2, $L_{1'}$, $L_{2'}$ означают линейные подпространства 1, 2, 1′, 2′.

Из формулы (28) следует, что

$$L_{1'} \subseteq L_1 \oplus L_2.$$

Пусть теперь существуют скрытые параметры ξ. Тогда вектору состояния ψ_1 и параметру ξ должно соответствовать некоторое фазовое подпространство Ω_1, $\{\psi_1, \xi\} \in \Omega_1$, и аналогично $\{\psi_2, \xi\} \in \Omega_2$, $\{\psi_{1'}, \xi\} \in \Omega_{1'}$, $\{\psi_{2'}, \xi\} \in \Omega_{2'}$. Возьмем теперь суперпозицию состояний $\psi_{12} = C_1\psi_1 + C_2\psi_2$. Тогда должно иметь место соотношение $\{\psi_{12}, \xi\} \in \Omega_1 + \Omega_2$. Подчеркнем, что в это соотношение входит не прямая сумма, а теоретико-множественная, так как скрытые параметры по самой идее их введения должны подчиняться исчислению высказываний классической логики.

Поскольку высказывания $\Omega_1 + \Omega_2$ и $\Omega_{1'} + \Omega_{2'}$ не равносильны $\Omega_1 + \Omega_2 \neq \Omega_{1'} + \Omega_{2'}$, то

$$\Omega_{1'} \subseteq \Omega_1 + \Omega_2,$$

и, следовательно, постулат изотонности не выполняется.

Таким образом, мы показали, что структура квантовой логики не может быть изоморфна структуре классической логики.

*) Первое доказательство невозможности введения скрытых параметров в квантовую механику, основанное на квантовой логике, было дано Яухом и Пироном [34]. Однако это доказательство основывается на так называемой «аксиоме 4»: если истинны высказывания A и B, то истинно также высказывание AB,— которая в случае квантовой логики далеко не очевидна [146]. Доказательства, основанные на квантовой логике и не опирающиеся на аксиому 4, были даны Гаддером [186] и Цирлером и Шлессингером [35]. *Однако эти доказательства слишком сложны, и мы не будем их приводить.*

Огромные успехи квантовой механики и объяснение с ее помощью самых различных физических явлений породили в некотором смысле прагматический подход к квантовой механике, когда главное значение придавалось рецептурным предписаниям квантовой механики, а не ее принципиальным основам.

Значение теоремы фон Неймана для физики заключается в том, что именно благодаря этой теореме мы уверены в логической замкнутости нерелятивистской квантовой механики, и в том, что никакие попытки «подправить» ее с помощью эклектической мешанины из отдельных элементов аппарата квантовой механики и гипотезы о скрытых параметрах невозможны.

Физико-технический институт
АН УССР, Харьков

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, *а*) УФН **62**, 461 (1957); *б*) Вопросы философии, № 1, 168 (1953); Квантовая физика и строение материи, Л., Изд-во ЛГУ, 1965, § 5—13; сборник «Ленин и современное естествознание», М., «Мысль», 1969, стр. 186.
2. N. Bohr et al., Zs. Phys. **24**, 69 (1924).
3. Э. В. Шпольский, УФН **16**, 458 (1936).
4. *а*) В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, М.—Л., ГТТИ, 1932, стр. 48—51; *б*) сборник «Нильс Бор и развитие физики», М. ИЛ, 1958, стр. 23.
5. Д. И. Блохинцев, *а*) Принципиальные вопросы квантовой механики, М., «Наука», 1966, § 7 и 16; *б*) сб. «Философские вопросы современной физики», М., Изд-во АН СССР, 1952, стр. 381; *в*) J. Phys. USSR **2**, 71 (1940).
6. D. Bohm, Phys. Rev. **85**, *а*) 166, *б*) 180 (1952) (см. перевод в сб. «Вопросы причинности в квантовой механике», М., ИЛ, 1955, стр. 34 и 65); **89**, *в*) 319, *г*) 458 (1953); *д*) Причинность и случайность в современной физике, М., ИЛ, 1959, стр. 164—175.
7. D. Bohm, J. P. Vigier, Phys. Rev. **96**, 208 (1954); D. Bohm et al., Suppl. Nuovo Cimento **1**, 48 (1955); D. Bohm, R. Schiller, ibid., p. 67.
8. Б. Т. Гейликман, ЖЭТФ **17**, 830 (1947); I. Fényes. Zs. Phys. **132**, 81 (1952) (см. перевод по [6б], стр. 244); W. Weizel, ibid. **134**, 264 (1953); Э. И. Адирович, М. И. Подгорецкий, ЖЭТФ **26**, 150 (1954); D. Kershaw, Phys. Rev. **B136**, 1850 (1964); J. C. Aron, Prog. Theor. Phys. **33**, 726 (1965); E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).
9. *а*) S. T. Epstein, ibid. **89**, 319 (1953); T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. **8**, 143 (1952); *б*) **11**, 341 (1954).
10. J. P. Vigier, сборник La Physique Quantique Restera-t-elle Indéterminist?, P., 1953, p. 89 (см. перевод по [6б], стр. 145), А. С. Давыдов и др., сборник «Философские проблемы современной физики», Киев, Изд-во АН УССР, 1956, стр. 70; H. Freistadt, Suppl. Nuovo Cimento, Ser. 10. **5**, 1 (1957).
11. N. Wiener, A. Siegel, *а*) Phys. Rev. **91**, 1551 (1953); *б*) Suppl. Nuovo Cimento **2**. 982 (1955).
12. Н. Винер, Нелинейные задачи в теории случайных процессов, М., ИЛ, 1961, лекция 9.
13. J. E. Turner, J. Math. Phys. **9**, 1411 (1968).
14. D. Bohm, J. Bub, Rev. Mod. Phys. **38**, *а*) 453, *б*) 470 (1966).
15. C. Papaliolios, Phys. Rev. Lett. **18**, 622 (1967).
16. J. H. Tutsch, Rev. Mod. Phys. **40**, 232 (1968).
17. Ю. П. Донцов, А. И. Базь, ЖЭТФ **52**, 3 (1967).
18. S. P. Gudder, *а*) J. Math. Phys. **11**, 431 (1970); *б*) Rev. Mod. Phys. **40**, 229 (1968).
19. A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935) (см. перевод: УФН **16**, 440 (1936)); N. Bohr, ibid. **48**, 696 (1935) (см. перевод: ibid., стр. 446); сборник Albert Einstein: Philosopher-Scientist (The Library of Living Philosophers, v. 7), Evanston, Ill. 1949, p. 199 (см. перевод: УФН **66**, 571 (1958)).
20. D. Bohm, Y. Aharonov, Phys. Rev. **108**, 1070 (1957).
21. *а*) A. Peres, P. Singer, Nuovo Cimento **15**, 907 (1960); T. B. Day, Phys. Rev. **121**, 1204 (1961); *б*) А. X. Левин, Вопросы философии, № 2, 75 (1972).
22. E. P. Wigner, *а*) Phys. Rev. **40**, 749 (1932); *б*) Amer. J. Phys. **38**, 1005 (1970).

23. Д. Блохинцев, П. Немировский, ЖЭТФ **10**, 1263 (1940); Г. П. Дишкент, ЖЭТФ **28**, 117 (1955); Р. Л. Стратонович, ЖЭТФ **31**, 1012 (1956); **32**, 1483 (1957); G. A. Baker, Phys. Rev. **109**, 2198 (1958); Г. В. Рязанов, ЖЭТФ **35**, 121 (1958); H. Margenau, R. N. Hill, Progr. Theor. Phys. **26**, 722 (1961).
24. J. H. Irwing, R. W. Zwanzig, J. Chem. Phys. **19**, 1173 (1951); O. van Roos, Phys. Rev. **119**, 1174 (1960); D. C. Kelly, ibid. **A134**, 641 (1964); R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **19**, 2127 (1964).
25. R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948) (см. перевод по [6б], стр. 167); Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, М., «Мир», 1968, гл. 2.
26. И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, М., «Наука», 1968, стр. 234—241.
27. S. Kochen, E. P. Specker, J. Math. Mech. **17**, 59 (1967).
28. J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966); J. Bub, Intern. J. Theor. Phys. **2**, 101 (1969).
29. B. Misra, Nuovo Cimento **A47**, 841 (1967).
30. K. W. H. Stevens, Proc. Roy. Soc. **A214**, 237 (1952).
31. Д. Гильберт, А. Аккерман, Основы теоретической логики, М., ИЛ, 1947, гл. 1; П. С. Новиков, Элементы математической логики, М , Физматгиз, 1959, гл. 1.
32. G. Birkhoff, J. von Neumann, Ann. Math. **37**, 823 (1936).
33. Г. Биркгоф, Теория структур, М., ИЛ, 1952, стр. 269—271; V. S. Varadarajan, Comm. Pure Appl. Math. **15**, 189 (1962); C. Piron, Helv. Phys. Acta **37**, 439 (1964).
34. J. M. Jauch, C. Piron, ibid. **36**, 827 (1963).
35. N. Zierler, M. Schlessinger, Duke Math. J. **32**, 251 (1965).