

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	7
Из предисловия к первому изданию	9
Введение. Статистические явления в радиофизике и оптике. Случайные колебания и случайные волны	11
Литература	17
Глава 1. Случайные процессы и их характеристики.	21
§ 1. Случайные процессы	21
§ 2. Многомерные статистические характеристики.	32
§ 3. Корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов	43
§ 4. Статистическое усреднение и усреднение по времени.	53
§ 5. Томографическое определение двумерной функции распределения	63
§ 6. Выбросы случайных процессов.	67
Литература к главе 1	77
Глава 2. Основные модели случайных процессов.	78
§ 1. Введение. Физика возникновения случайных процессов и полей и их математические модели	78
§ 2. Гауссовский (нормальный) случайный процесс	81
§ 3. Узкополосный стационарный шум	87
§ 4. Узкополосный гауссовский шум	92
§ 5. Диффузионный (винеровский) процесс	102
§ 6. Импульсные случайные процессы	108
§ 7. Телеграфный случайный процесс	121
Литература к главе 2	123
Глава 3. Специальные модели случайных процессов и полей	124
§ 1. Негауссовские квазигармонические стационарные процессы	124

§ 2. Негауссовские квазипериодические стационарные процессы	133
§ 3. Колебания, модулированные шумом	136
§ 4. Статистика уширения спектральных линий в оптике. Эффекты де- фазировки	147
§ 5. Фотоотсчеты в случайном световом поле	164
§ 6. Многомодовая модель случайного процесса	177
§ 7. «Сжатое» классическое поле — обобщенная модель узкополосного случайного процесса.	192
Литература к главе 3	203
Глава 4. Методы теории случайных процессов в радиофизике и оптике	205
§ 1. Флуктуационные (стохастические) уравнения	205
§ 2. Флуктуационные уравнения с известным решением; усреднение решения	205
§ 3. Флуктуационные уравнения с δ -коррелированными коэффициентами и неизвестным аналитическим решением. Стохастические методы усреднения уравнений	212
§ 4. Нелинейные флуктуационные уравнения с δ -коррелированными ко- эффициентами.	219
§ 5. Линейные и нелинейные флуктуационные уравнения с коэффици- ентами, меняющимися по закону «случайного телеграфного сигнала»	225
§ 6. Приближенные методы вычисления статистических характеристик Литература к главе 4	229 237
Глава 5. Шумовые колебания в линейных системах.	239
§ 1. Математическое описание линейных систем. Спектральный и вре- менной подходы.	239
§ 2. Отклик линейной системы на шумовое воздействие	247
§ 3. Распределение вероятностей на выходе линейной системы	258
§ 4. Собственные шумы линейных систем. Тепловые шумы диссипатив- ных линейных систем	262
§ 5. Совместное действие сигнала и шума на линейную систему. Обна- ружение и выделение сигнала; фильтрация	266
Литература к главе 5	282
Глава 6. Случайные поля и волны в линейных средах	283
§ 1. Введение	283
§ 2. Теория однонаправленного распространения излучения в однород- ной среде	286
§ 3. Распространение отдельных видов волн	291

§ 4. Модели и статистические характеристики случайных волн	295
§ 5. Векторные случайные поля	305
Литература к главе 6	312
Глава 7. Импульсные волны в линейных средах с дисперсией второго порядка	314
§ 1. Квазимонохроматические волны в линейной диспергирующей среде	314
§ 2. Модель частично некогерентного импульса	318
§ 3. Импульсы в среде с дисперсией второго порядка: дальняя зона, дисперсионное расплывание, формирование импульсов-спектров	320
§ 4. Распространение импульсов в среде с дисперсией второго порядка: ближняя зона, компрессия и обращение формы импульса	326
§ 5. Метод «моментов» в теории распространения и компрессии импульсов	333
§ 6. Самовоспроизведение импульсов в диспергирующей среде; временной эффект Тальбота	338
Литература к главе 7	345
Глава 8. Импульсные плоские волны в линейных средах с дисперсией высшего порядка	346
§ 1. Дисперсионные эффекты высших порядков	346
§ 2. Компрессия импульсов в среде с дисперсией произвольного порядка	348
§ 3. Степенные ряды для моментов импульса	351
§ 4. Временной эффект Тальбота в средах с дисперсией высшего порядка	352
Глава 9. Случайные параксиальные волновые пучки	355
§ 1. Математическое описание волновых пучков	356
§ 2. Статистическая неоднородность и угловой спектр светового пучка; модель частично когерентного пучка	358
§ 3. Дифракция δ -коррелированного случайного пучка; теорема Ван Циттерта—Цернике	361
§ 4. Дифракция частично когерентной волны на отверстии	366
§ 5. Фокусировка частично когерентного пучка	369
§ 6. Дифракция светового пучка на случайном фазовом экране; квазитепловой источник света	375
§ 7. Винтовые дислокации волнового фронта и пространственной корреляционной функции случайных световых пучков	382
§ 8. Распространение световых пучков в неоднородных средах; метод Фейнмана интегрирования по траекториям	388
Литература к главе 9	399

Глава 10. Немонохроматические случайные волновые пучки	402
§ 1. Введение. Общее уравнение для случайных волн	402
§ 2. Влияние немонхроматичности волны на пространственную когерентность	402
§ 3. Дифракционные изменения частотного спектра излучения пространственно ограниченных источников; эффект Вольфа	405
Литература к главе 10	420
Предметный указатель	421

Предисловие ко второму изданию

Настоящая книга посвящена стохастическим моделям и методам, которые используются в радиофизике и оптике, и анализу случайных колебаний и случайных волн в линейных радиофизических и оптических системах. Отдельный том будет посвящен изучению случайных колебаний и случайных волн в нелинейных устройствах. Объединение в одной монографии двух разделов физики (оптики и радиофизики) диктуется не только общей электромагнитной природой волн, но и общностью методов и подходов, применяемых для решения стохастических проблем в этих разделах.

В 1981 году была опубликована наша книга с близким названием «Введение в статистическую радиофизику и оптику» (Наука), где стохастические задачи в радиофизике и оптике рассматривались с единых методических позиций. С тех пор класс решенных радиофизических и оптических стохастических проблем существенно расширился. Сказанное в полной мере относится как к линейным, так и нелинейным задачам.

Мы используем классическое описание колебаний и волн. Хотя за последние десятилетия удельный вес задач, требующих привлечения квантовых методов, значительно вырос, тем не менее классический анализ источников излучения с неклассическими свойствами в ряде случаев оказывается плодотворным. Так, например, формирование квадратурно-сжатых состояний можно интерпретировать с классических позиций, что позволяет снять «ореол загадочности» с этого эффекта. Предлагаемая монография является переработанным и дополненным вариантом первой части (глав 1–4) нашей ранее опубликованной книги. Среди дополнений особо выделим изложение томографического принципа определения двумерной функции распределения, метода Фейнмана интегрирования по траекториям применительно к распространению случайных волн в неоднородных средах, эффекта Тальбота для случайных импульсов, анализ дислокаций случайных вихревых пучков и эффекта Вольфа.

Книга содержит 10 глав. В главе 1 рассмотрены статистические характеристики случайных процессов. Применяемые наиболее часто в радиофизике и оптике гауссовский, пуассоновский, винеровский и телеграфный случайные процессы изучаются в главе 2 «Основные модели случайных процессов». Другие не менее важные для радиофизики и оптики случайные процессы обсуждаются в главе 3. Методы анализа случайных процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, изложены в главе 4. Глава 5 имеет дело с матема-

тическим описанием линейных систем и их откликом на воздействие шума. В главе 6 представлено общее описание случайных полей и волн. В главах 7 и 8 рассмотрено распространение и компрессия коротких импульсов со случайной модуляцией в линейных средах с дисперсией второго и более высокого порядков соответственно. Распространение, дифракция и фокусировка волновых пучков со случайной поперечной структурой обсуждаются в главе 9. Наконец, в главе 10 изучается взаимовлияние случайных временной и поперечной пространственной модуляции пучка при распространении.

Книга предназначена для научных работников, имеющих дело с исследованием случайных колебаний и волн разной физической природы, а также может быть использована для подготовки бакалавров, магистров и аспирантов, специализирующихся в радиофизике, оптике, нелинейной и волоконной оптике, лазерной физике, спектроскопии.

Книга издается при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, за что авторы искренне признательны руководству РФФИ. Авторы глубоко благодарны директору ФИЗМАТЛИТ М. Н. Андреевой за благожелательное отношение, Д. А. Воробьеву за большой труд при подготовке рукописи к печати, а также С. Ю. Спиглазовой за изготовление иллюстраций.

Ю. Е. Дьяков
А. С. Чиркин

Москва, май 2009 г.

Из предисловия к первому изданию

... После создания лазеров и быстрого прогресса физики нелинейных волновых процессов облик радиофизики существенно изменился. Прежде всего существенно возрос удельный вес волновых задач; это в первую очередь связано с тем, что практически все устройства лазерной техники являются волновыми системами. Такие разделы линейной и нелинейной статистической оптики, как интерференция и дифракция частично когерентного света, оптическая фильтрация, статистические явления в оптических преобразователях частоты и т. п., имеют для современной радиофизики не меньшее значение, чем традиционные задачи о фильтрации и преобразовании случайных сигналов в линейных и нелинейных системах с сосредоточенными параметрами.

Обращение к новым принципам генерации, усиления и преобразования колебаний привело также и к резкому росту значения чисто физических задач в современной радиофизике. Достаточно сказать, что сейчас в радиофизике двухуровневая квантовая система заняла такое же важное место, как и классический колебательный контур. В теоретической радиофизике все шире используются методы квантовой теории поля, физической кинетики и т. п.

В предлагаемой книге сделана попытка отразить эти новые тенденции; в частности, мы старались в гораздо большей мере, чем это делалось раньше, учесть интересы радиофизиков, специализирующихся в области лазерной физики и техники. Необходимость ограничиться при этом более или менее стандартным объемом однотомного руководства поставила ряд трудных проблем, связанных с отбором материала.

Мы отчетливо понимаем, что в ряде пунктов наши решения окажутся спорными; естественно, что в определенной мере здесь проявилось и влияние собственных научных интересов авторов.

... Главный акцент в предлагаемой книге сделан на рассмотрении случайных колебаний и случайных волн в линейных и нелинейных системах; подавляющее число рассматриваемых примеров связано с электромагнитными колебаниями и волнами.

В ряде случаев мы считали важным не ограничиваться схематическим описанием явления; поэтому в книге довольно много экспериментальных графиков и т. п.

Изложение теории случайных функций проведено на «физическом» уровне строгости и, учитывая сделанные выше замечания, довольно компактивно.

Мы стремились изложить этот материал таким образом, чтобы, по возможности, облегчить читателю практическое его использование.

Вместе с тем в книге значительное внимание уделено изложению теоретических методов, широко используемых в настоящее время, но недостаточно освещенных в учебной литературе, в особенности стохастических методов решения нелинейных дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных.

... При теоретическом исследовании случайных колебаний и волн в книге широко используется метод медленно меняющихся амплитуд; мы пользуемся им и в линейных задачах даже в тех случаях, когда возможно получение точных результатов. Такое описание имеет, на наш взгляд, серьезные педагогические преимущества, позволяя дать единую картину статистики колебаний и волн. На этапе рассмотрения так называемых укороченных уравнений для медленно меняющихся амплитуд удастся выявить общность сильно различающихся на первый взгляд радиофизических явлений, проследить весьма наглядные пространственно-временные аналогии между колебательными и волновыми процессами.

С. А. Ахманов,
Ю. Е. Дьяков,
А. С. Чиркин

Москва, апрель 1980 г.

ВВЕДЕНИЕ

Статистические явления в радиофизике и оптике. Случайные колебания и случайные волны

Во многих практически важных ситуациях наиболее адекватным описанием колебательных и волновых процессов оказывается статистическое описание; так, в радиофизике и оптике, наряду с регулярными, появляются случайные колебания и волны. Статистика в радиофизику и оптику приходит потому, что многие источники радио- и световых колебаний представляют собой, по существу, генераторы шума. Хаотически изменяются параметры систем, свойства сред, в которых распространяются радио- и световые волны. Особое место в радиофизике и оптике занимают задачи, связанные с эффектами электромагнитных флуктуаций материальной среды. «Собственные» электромагнитные флуктуации ставят флуктуационный предел чувствительности приемников, точности измерений, оказываются причиной принципиальной невозможности генерирования строго монохроматических колебаний.

Статистика колебаний и волн в настоящее время представляет широкую и быстро развивающуюся область, включающую в себя как чисто физические проблемы, так и разнообразные прикладные вопросы. Исследования в этой области имеют долгую историю; в различные периоды удельный вес оптических и радиофизических задач был существенно различен.

В конце XIX и в начале XX вв. главным «источником» колебательных и волновых статистических задач, несомненно, была оптика.

В ряду ранних работ по статистической оптике первыми должны быть, безусловно, названы работы по рассеянию света, связанные с именами Рэлея, а в более позднее время — Мандельштама и Бриллюэна; имеются в виду случайные волны, возникающие за счет хаотического изменения параметров среды. Надо сказать, что, несмотря на почти вековую историю, физика рассеяния волн в статистически неоднородной среде и по сей день остается, пожалуй, одним из наиболее бурно развивающихся разделов статистической радиофизики и оптики.

Другой круг статистических задач, сформулированных в оптике в 20-е годы прошлого столетия, стимулировал разработку теории когерентности оптических полей. То обстоятельство, что обычные тепловые и газоразрядные источники света являются, по существу, генераторами случайных полей, было понято достаточно давно — еще Рэлей в «Теории звука» рассмотрел классическую задачу о сложении колебаний со случайными фазами. Выяснение особенностей протекания таких

фундаментальных явлений, как интерференция и дифракция света в поле случайных волн, и является в основном предметом теории когерентности. Ряд фундаментальных результатов в этой области связан с именами Майкельсона, Верде, Лауэ, Цернике и др. (см. [1–4])¹⁾.

В 30-е и особенно 40–50-е годы прошлого века первенство в постановке и исследовании статистических задач, безусловно, должно быть отдано радиофизике. Разработка методов радиолокации, дальней радиосвязи, радионавигации остро поставила вопросы о шумах радиоприемных устройств, стабильности колебаний автогенераторов, о статистических явлениях при излучении и распространении радиоволн. Именно в эти годы было ясно понято, что фактически на всех основных этапах передачи информации с помощью радиоволн, локации, навигации — в процессах генерации, модуляции излучения, распространения и приема — статистические явления играют чрезвычайно существенную, а зачастую и решающую роль.

Одним из важнейших направлений стало исследование собственных электромагнитных флуктуации в радиустройствах и поиск путей их уменьшения. Первые работы в этой области относятся еще к 1928–1930 гг., когда Найквист предложил формулу, описывающую спектральную плотность $G(\omega)$ собственных шумов сопротивления R , связанных с тепловым движением электронов: $G(\omega) = \frac{2}{\pi} kTR$, которая затем была подтверждена экспериментально. В 1920-е годы были установлены и закономерности дробового шума электронных ламп, обусловленного статистическим характером электронной эмиссии [5]. Возникающие в радиустройствах за счет теплового и дробового шума случайные э. д. с. невелики (речь идет о среднеквадратичных напряжениях 10^{-5} – 10^{-6} В); однако именно они, как выяснилось в дальнейшем, определяют предельные чувствительности приемных устройств. За счет внутренних шумов приемника отношение интенсивностей сигнала и шума на выходе приемника меньше, чем на входе: $(с/ш)_{\text{вых}} < (с/ш)_{\text{вх}}$; поискам путей уменьшения фактора $F = (с/ш)_{\text{вх}} / (с/ш)_{\text{вых}}$, который называют шум-фактором приемного устройства (для идеального, нешумящего приемника $F = 1$), были посвящены многочисленные исследования радиофизиков и радиоинженеров.

Радикальное решение проблемы удалось найти, обратившись к принципиально новым методам усиления радиоволн. Открытие Басовым и Прохоровым в СССР и Таунсом в США принципов усиления и генерации электромагнитных волн в квантовых системах позволило, в частности, создать так называемые квантовые парамагнитные усилители [6, 7], величина шум-фактора для которых составляет $F = 1,01 \div 1,1$ — в парамагнитном усилителе нет электронных ламп, а рабочая температура близка к температуре жидкого гелия.

¹⁾ Приводимый во Введении список литературы не претендует на полноту; ряд важных источников указан также в библиографии к отдельным главам.

Возможность резкого снижения величины шум-фактора была главным стимулом и при разработке параметрических усилителей диапазона сверхвысоких частот [8], исследовании дробовых шумов в «длинных» электронных потоках ламп бегущей волны [5] и т. п.

В автоколебательных системах (автогенераторах) собственные электромагнитные флуктуации определяют минимальную (предельную) ширину спектральной линии. В установлении этого принципиального обстоятельства решающую роль сыграли выполненная в 1933 г. фундаментальная работа Понтрягина, Андропова и Витта [9], где впервые была решена задача о поведении динамической системы под воздействием случайных толчков, и последовавшие за ней работы Берштейна [10], в которых теоретически и экспериментально были исследованы флуктуации колебания лампового генератора.

Освоение радиотехникой все более коротковолновых диапазонов поставило новые задачи и перед теорией электрических флуктуаций. Так, возник новый раздел теории тепловых флуктуации, связанный с изучением флуктуации в неквазистационарных системах, в резонаторах и волноводах диапазона сверхвысоких частот — см. работы Рытова и Левина [11, 12]. В этих работах была установлена ясная связь между тепловыми шумами в квазистационарных цепях и тепловым излучением в оптической области.

Постановка статистических задач в теории распространения радиоволн в первую очередь была связана с распространением радиоволн в турбулентной атмосфере. Существенно стимулировали эти исследования относящиеся к 1950–1955 гг. эксперименты по сверхдальному распространению ультракоротких волн; оказалось, что за пределами прямой видимости рассеянное атмосферными неоднородностями поле может намного превышать поле, связанное с дифракцией вокруг Земли [13, 14]. С тех пор теоретическая и экспериментальная активность в этой области неизменно возрастала: новый класс статистических задач возник здесь в последние годы в связи с изучением распространения лазерных пучков в турбулентной атмосфере.

Собственные шумы приемных устройств, флуктуации сигналов в процессе распространения, искусственные или естественные помехи, проходящие на вход приемника вместе с полезным сигналом, приводят к тому, что прием сигнала в реальных условиях становится принципиально статистической задачей. При наличии флуктуационных помех решение о наличии или отсутствии сигнала становится фактически статистическим решением; статистической оказывается и задача определения параметров сигнала.

Как оптимальным образом сформулировать процедуру обнаружения сигнала и уменьшить случайные ошибки при оценке его параметров?

Ответ на эти вопросы дает статистическая теория обнаружения сигналов, ряд фундаментальных положений которой был сформулирован в 1940–50-е годы. Большую роль в ее формировании сыграли работы Котельникова [15]; в настоящее время детально разработанная тео-

рия обнаружения находит многочисленные применения в радиофизике и оптике (см. [16–21] и библиографию к гл. 3–5).

Большое разнообразие задач статистической радиофизики стимулировало разработку новых приемов экспериментального исследования статистики радиосигналов (см. библиографию к гл. 1, 5), создание эффективных теоретических методов решения задач линейной и в особенности нелинейной статистической теории колебаний [22–24], статистической теории распространения волн (см. [13, 14] и библиографию к гл. 7–10). Все эти вопросы и составляют основу современной статистической радиофизики.

На фоне широкого размаха работ по статистической радиофизике достижения статистической оптики в 1930–50-е годы выглядят скромнее. Следует подчеркнуть, однако, что и здесь был выполнен ряд важных работ.

В 1947 г. Гореликом был предложен [25], а в 1955 г. Форрестером и соавт. [26] осуществлен эксперимент по смешению световых волн на фотокатоде — так называемое «гетеродинирование» света. Фактически речь идет об эксперименте, в котором впервые наблюдалось нелинейное взаимодействие случайных световых полей.

Сильное влияние на развитие статистической оптики оказали опыты Брауна и Твисса, в которых для световых полей были измерены корреляционные функции интенсивности [27].

В работах, относящихся к 1961–1963 гг., были выполнены эксперименты по статистике фотоотсчетов — были разработаны методы измерения одномерных законов распределения световых полей [28, 29]. Большое значение для статистической оптики имела разработка методов фурье-оптики — это позволило, в частности, установить тесные связи между задачами фильтрации и преобразования сигналов в радиофизике и оптике (см. [30, 31]).

Наконец, крупные результаты были получены и в общей статистической теории оптических полей; особое значение имели работы, относящиеся к квантовой ее формулировке — квантовой оптике [32]. Надо сказать, что многое здесь было сделано еще в 1920-е годы; принципиальное значение имела, в частности, ранняя работа Шредингера [33], в которой были введены состояния, названные Глаубером когерентными состояниями. В работах же 1960–1965 гг. была развита эффективная квантовоэлектродинамическая методика описания когерентности оптических полей, что позволило придать квантовой оптике завершенность и выявить ее связь со статистической теорией, использующей классическое описание поля [34–38].

Революция в оптике, связанная с созданием лазеров, коснулась всех ее разделов; в полной мере это относится и к статистической оптике. Создание лазеров повысило прежде всего интерес к изучению статистических явлений в источниках света. Теперь оптика получила в свое распоряжение широкий ассортимент источников с весьма разнообразными, в том числе негауссовскими статистическими характеристиками.

Важной задачей современной статистической оптики являлось изучение флуктуационных явлений в лазерах различных типов и разработка методов уменьшения амплитудных и фазовых флуктуации лазерного излучения [39, 40]. Существенно подчеркнуть, что сказанное относится не только к сравнительно маломощным лазерам непрерывного действия, но также и к мощным и, в особенности, сверхмощным импульсным лазерам [41, 42].

Проблемы, связанные с флуктуациями в лазерах, во многом аналогичны соответствующим проблемам, связанным с флуктуациями в автоколебательных системах радиодиапазона [43]; имеются, однако, и существенные особенности, обусловленные квантовым характером флуктуации, распределенными взаимодействиями, многомодовостью и т. п. Новый класс статистических задач в этой области связан с изучением оптических генераторов со случайной обратной связью, генераторов, принцип действия которых ближе к принципу действия ядерного реактора, чем генератора радиодиапазона [44].

Работы по оптической связи и локации с помощью лазеров стимулировали детальные исследования чувствительности оптических приемников [18, 19] и исследования по распространению световых пучков в статистически неоднородных средах [45–50]. Интересные перспективы открылись и в изучении молекулярного рассеяния света; возможность выйти за пределы регистрации только спектров рассеянного излучения и использовать, в частности, статистику фотоотсчетов позволяет получить новую информацию о рассеивающей среде и процессе рассеяния [2].

Значительные успехи в теоретических исследованиях по статистической оптике в 1980-х годах связаны с развитием метода статистических испытаний, хорошо известного как метода Монте Карло, который в настоящее время широко применяется в атмосферной оптике [84], оптике биологических сред [85]. В этом методе распространение излучения в случайно-неоднородных и дисперсных средах представляют как последовательность случайных актов рассеяния фотонов на частицах и неоднородностях среды. Метод Монте Карло является весьма эффективным для решения задач оптической диагностики и спектроскопии биотканей.

Новым разделом статистической оптики, возникновение которого целиком обязано лазерам, является статистическая нелинейная оптика [51–53]. Можно указать по меньшей мере два круга статистических задач, являющихся предметом многочисленных теоретических и экспериментальных работ. Прежде всего это задачи, связанные со «статистикой излучения», т. е. с изучением влияния пространственной и временной когерентности излучения на протекание нелинейных оптических эффектов. Другой круг задач связан с изучением нелинейных эффектов в статистически неоднородных средах (нелинейное молекулярное рассеяние, генерация оптических гармоник и параметрические явления в неоднородных кристаллах, нелинейная дифракция и т. п.)

и с влиянием квантовых шумов на протекание нелинейных эффектов [54].

Метод Монте Карло на основе волновых представлений о рассеянии волны на цепочке фазовых экранов позволяет рассматривать задачи статистической нелинейной оптики [86]. Этим методом, свободным от каких-либо предположений относительно статистики светового поля, малости возмущений или силы нелинейно-оптического взаимодействия, рассмотрен ряд задач динамики солитонов, нелинейной статистической оптики атмосферы, самовоздействия частично-когерентного излучения. За последние два десятилетия статистическая оптика, особенно связанная с изучением преобразования квантовой статистики световых полей в нелинейно-оптических процессах, интенсивно развивалась как теоретически [55–60], так и экспериментально [61]. А регистрация квадратурных компонент в настоящее время широко используется не только в радиодиапазоне, но и в оптическом, например, для регистрации сжатых полей [62].

Таким образом, статистические методы, статистические задачи проникли буквально во все разделы физической и прикладной оптики — ситуация, во многом сходная с процессом, происходившим в радиофизике.

Заканчивая этот краткий вводный очерк, заметим, что с задачами, во многом сходными с задачами статистической радиофизики и оптики, приходится сталкиваться в гидродинамике, акустике и физике плазмы. Речь идет здесь о теории турбулентности (см. [63, 64]), физике линейных и нелинейных случайных волн в акустике [65, 66].

Многие важные вопросы нелинейного взаимодействия и самовоздействия случайных волн были разработаны в физике плазмы (см. [67, 68]). Следует также сказать об интенсивной разработке функционального подхода [69–71] для решения стохастических дифференциальных уравнений, описывающих случайные процессы в радиофизике, оптике, акустике и гидродинамике.

Для статистической радиофизики, как и для физики в целом, чрезвычайно важна интенсивно исследуемая в самое последнее время в связи с изучением механизма турбулентности проблема возникновения статистики в нелинейных динамических системах [72–79, 87, 88]. При этом исследования показали [87], что динамический хаос можно использовать в качестве несущих информацию колебаний, и что он может быть положен в основу создания нового типа коммуникационных систем. Увлекательная история исследований по динамическому хаосу в России прослежена в книге [89].

В заключение отметим, что стохастические методы и статистические подходы, используемые в радиофизике и оптике, находят применение и во многих других областях физики (см., например, [80–83]).

Литература

1. *Рэлей (Стретт Дж. В.)*. Теория звука: Пер. с англ. / Под ред. С. М. Рытова. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.
2. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Под ред. С. М. Рытова. — М.: Наука, 1972.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ. / Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1970.
4. *Кросиньяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М.* Статистические свойства рассеянного света: Пер. с англ. / Под ред. И. Л. Фабелинекого. — М.: Наука, 1980.
5. Шумы в электронных приборах / Под ред. Л. Смуллина и Г. Хауса: Пер. с англ. — М.—Л.: Энергия, 1964.
6. *Карлов Н. В., Маненков А. А.* Квантовые усилители / Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Изд. АН СССР, 1966.
7. *Сигмен А.* Мазеры: Пер. с англ. / Под ред. Т. А. Шмаонова. — М.: Мир, 1966.
8. *Блекуэлл Л. А., Коцебу К. Л.* Параметрические усилители на полупроводниковых диодах: Пер. с англ. / Под ред. Л. М. Выставкина. — М.: Мир, 1964.
9. *Понтрягин Л. С., Андронов А. А., Витт А. А.* О статистическом рассмотрении динамических систем. — ЖЭТФ, 1933. т. 3, с. 165.
10. *Берштейн И. Л.* Флуктуации в автоколебательной системе и определение естественной размытости частоты лампового генератора. — ЖТФ, 1941, т. 11, с. 305.
11. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Изд. АН СССР, 1953.
12. *Рытов С. М., Левин М. Л.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
13. *Чернов Л. А.* Распространение волн в среде со случайными неоднородностями. — М.: Изд. АН СССР, 1958.
14. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
15. *Котельников В. А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956.
16. *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. А.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960.
17. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963.
18. *Росс М.* Лазерные приемники: Пер. с англ. / Под ред. А. В. Иевского. — М.: Мир, 1969.
19. *Kingsdon R. H.* Detection of Optical and Infrared Radiation. — Berlin—Heidelberg—N. Y.: Springer-Verlag, 1978.
20. *Шереметьев А. Г.* Статистическая теория лазерной связи. — М.: Связь, 1971.
21. *Фомин Я. А., Тарловский Г. Р.* Статистическая теория распознавания образов. — М.: Радио и Связь, 1986.
22. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М.: Сов. радио, 1961.

23. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
24. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического регулирования. — М.: Сов. радио, 1963.
25. Горелик Г. С. О демодуляционном анализе света. — УФН, 1948, т. 34, с. 321.
26. Forrester A. T., Gudmundsen R. A., Johnson P. O. Photoelectric mixing of incoherent light. — Phys. Rev., 1955, v. 99, p. 1691.
27. Brown R. H., Twiss R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. — Nature, 1956, v. 177, p. 27.
28. Арепки Ф., Скалли М., Хакен Г. и др. Квантовые флуктуации излучения лазера: Пер. с англ. / Под ред. Л. П. Казанцева. — М.: Мир, 1974.
29. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов / Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ. / Под ред. Ф. В. Бункина. — М.: Мир, 1978.
30. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику: Пер. с англ. / Под ред. П. Ф. Паршина. — М.: Мир, 1966.
31. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику: Пер. с англ. / Под ред. Г. И. Коосурава. — М.: Мир, 1970.
32. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1970.
33. Schrödinger E. Der Stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik. — Naturwissenschaften, 1926, Bd. 14, S. 664.
34. Glauber R. J. Photon correlation. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 84.
35. Sudarshan E. C. G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams. — Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 227.
36. Glauber R. J. The quantum theory of optical coherence. — Phys. Rev., 1963, v. 130, p. 2529.
37. Mehta C. L., Sudarshan E. C. G. Relation between quantum and semiclassical description of optical coherence. — Phys. Rev., 1965, v. 138, p. B274.
38. Klauder J. R., McKenna J., Currie D. G. On "diagonal" coherent-state representations for quantum-mechanical density matrices. — J. Math. Phys., 1965, v. 6, p. 734.
39. Зейгер С. Г., Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., Ларионцев Е. Г., Фрадкин Э. Е. Волновые и флуктуационные процессы в лазерах / Под ред. Ю. Л. Климонтовича. — М.: Наука, 1974.
40. Хакен Г. Лазерная светодинамика. — М.: Мир, 1985.
41. Сверхкороткие световые импульсы / Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
42. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
43. Малахов А. Н. Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
44. Басов Н. Г., Летохов В. С. Оптические стандарты частоты. — УФН, 1968, т. 98, с. 585.
45. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. С. Распространение лазерного излучения в случайно неоднородных средах. — УФН, 1974, т. 114, с. 415.

46. *Зуев В. Е.* Прозрачность атмосферы для видимых и инфракрасных лучей. — М.: Сов. радио, 1966.
Зуев В. Е., Банах В. А., Покасов В. В. Оптика турбулентной атмосферы. — Л.: Гидрометеоздат, 1988.
47. *Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. И., Хмелевцов С. С.* Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
48. *Миронов В. Л.* Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. — Новосибирск: Наука, 1981.
49. Распространение лазерного пучка в атмосфере. / Под ред. Д. Стробена. — М.: Мир, 1981.
50. *Апресян Л. А., Кравцов Ю. А.* Теория переноса излучения. — М.: Наука, 1983.
51. *Ахманов С. Л., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики. — М.: Изд. АН СССР, 1964.
52. *Ахманов С. А., Чиркин А. С.* Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: изд. МГУ, 1971.
53. Нелинейная спектроскопия / Под ред. Н. Бломбергена: Пер. с англ. / Под ред. С. А. Ахманова. — М.: Мир, 1979.
54. *Клышко Д. Н.* Фотоны и нелинейная оптика. — М.: Наука, 1980.
55. *Перина Я.* Квантовая статистика линейных и нелинейных оптических явлений. — М.: Мир, 1987.
56. *Walls D. F., Milburn G. J.* Quantum Optics. — Berlin: Springer, 1994.
57. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М.: Физматлит, 2000.
58. *Скалли М. О., Зубайри М. С.* Квантовая оптика. — М.: Физматлит, 2003.
59. Theory of Nonclassical States of Light / Eds V. V. Dodonov, V. I. Man'ko. — London: Taylor and Francis, 2003.
60. *Шляйх В. П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. — М.: Физматлит, 2005.
61. *Vachor H. A, Ralph T. C.* A Guide to experiments in Quantum Optics. — WILEY-WCH-Verlag, 2004.
62. *Ахманов С. А., Белинский В. А., Чиркин А. С.* В кн. Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С. А. Ахманова и М. Ю. Воронцова. — М.: Наука, 1990, с. 83–194.
63. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965, чч. 1, 2.
64. Нелинейные системы гидродинамического типа / Под ред. А. М. Обухова. — М.: Наука, 1974.
65. *Руденко О. В., Солюян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
66. *Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990.
67. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* — В сб.: Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1963, вып. 3; 1964, вып. 4; 1973, вып. 7.
68. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976.
69. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1980.
70. *Кляцкин В. И.* Динамика стохастических систем. — М.: Физматлит, 2002.

71. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001.
72. *Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И. Мандельштам и современная теория колебаний и волн: К 100-летию со дня рождения Л.И. Мандельштама.* — УФН, 1979, т. 128, с. 579.
73. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем средах. — М.: Наука, 1984.
74. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988.
75. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.
76. *Мун Ф.* Хаотические колебания. — М.: Мир, 1990.
77. *Mikhailov A. S., Lockitov A.* Chaos and Noise. — Berlin, Heidelberg, N.-Y.: Springer, 1996.
78. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. — М.: Физматлит, 2001.
79. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.—Ижевск: ИКИ, 2003.
80. *Троицкий И.Н., Устинов Н.Д.* Статистическая теория голографии. — М.: Радио и Связь, 1981.
81. *Хименко В.И., Тигин Д.В.* Статистическая акустооптика и обработка сигналов. — С.-Петербург: Изд-во С.-Петербургского университета, 1996.
82. *Ebeling W., Schimansky-Geier L., Romanovsky Yu. (eds.)* Stochastics Dynamics of Reacting Biomolecules. — Singapore World Scientific, 2002.
83. *Романовский М.Ю., Романовский Ю.М.* Введение в эконофизику. Статистические и динамические модели. / Под ред. Д.С. Чернавского. — М.—Ижевск: ИКИ, 2007.
84. *Метод Монте Карло в атмосферной оптике.* — Новосибирск: Наука, 1976.
85. *Тучин В.В.* Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. — Саратов: Изд-во СГУ, 1998.
86. *Кандидов В.П.* Метод Монте Карло в нелинейной статистической оптике. — УФН, т. 166, № 12, с. 1309, 1996.
87. *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. — М.: Физматлит, 2002.
88. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). — М.: Физматлит, 2006.
89. *Мухин Р.Р.* Очерки по истории динамического хаоса (исследования в СССР в 1950–1980-е годы).

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Математической основой статистической радиофизики и оптики является теория случайных функций.

Скалярная или векторная функция одной или нескольких независимых переменных называется случайной, если значения ее при произвольной последовательности выбора значений независимых переменных оказываются набором случайных величин.

Наряду с общим математическим понятием случайной функции, используются понятия: случайный (или стохастический) процесс (так называют случайные функции времени) и случайное поле (случайные функции пространственных координат и, вообще говоря, времени).

Статистическая радиофизика занимается изучением стохастических явлений в колебательных и волновых процессах. В математическом плане дело сводится к решению линейных или нелинейных дифференциальных уравнений со случайными начальными (или краевыми) условиями, случайными параметрами (коэффициентами), случайными внешними силами — так называемых стохастических дифференциальных уравнений. К счастью, во многих случаях перечисленные источники стохастичности можно рассматривать по отдельности. Таким образом, возникают три класса математических задач:

- задачи со случайными начальными (или граничными) условиями;
- задачи со случайно изменяющимися параметрами;
- задачи со случайными внешними силами.

Решение стохастических дифференциальных уравнений — это нахождение средних и корреляционных функций для неизвестного случайного процесса или поля. Указанные величины относительно просто определить, если решение уравнения известно. Чрезвычайно примечательным оказывается, однако, то обстоятельство, что в аналитическом решении стохастических дифференциальных уравнений часто удается продвинуться гораздо дальше, чем в решении их динамических аналогов. С помощью так называемых стохастических методов вычислить средние удается и в том случае, когда сами решения неизвестны!

§ 1. Случайные процессы

Детерминированное и статистическое описание реальных процессов. Рассматривая какой-либо физический процесс, мы стремимся описать этот процесс математически. Математическое описание мо-

жет быть детерминированным или статистическим (вероятностным). При детерминированном описании предполагается, по существу, что имеются все данные, чтобы точно предсказать временной ход процесса x , т. е. решение задачи ищется в виде некоторой конкретной математической функции

$$x = f(t). \quad (1.1.1)$$

В основе детерминированного описания фактически лежит предположение, что при повторном воспроизведении процесса мы опять получили бы зависимость величины x от времени вида (1) ¹⁾.

Примером процесса, детерминированное описание которого невозможно, является броуновское движение. Измеряя траекторию частицы вдоль оси x , мы получим некоторую кривую $x_{(1)}(t)$. Если повторить наблюдение, поместив частицу в исходную точку, то траектория $x_{(2)}(t)$ будет совершенно иной. Разброс траекторий связан с хаотическим тепловым движением очень большого числа молекул, и его непредсказуемый характер является очевидным.

В этом и других аналогичных случаях, когда процесс x является случайным, вместо детерминированного описания (1) используется статистическое описание. Величина $x(t)$ в момент t характеризуется при этом функцией распределения плотности вероятностей $w(x, t)$, которая определяет относительную вероятность различных значений x в этот момент времени. Вероятность для x принять значение, лежащее в некотором интервале, запишется через $w(x, t)$ как

$$P(x_1 \leq x \leq x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} w(x, t) dx. \quad (1.1.2)$$

Функции распределения вероятностей вводятся для вещественных случайных функций x , т. е. с вероятностью, равной единице, $-\infty < x < \infty$. Поэтому согласно (2) функция $w(x, t)$ должна удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = 1. \quad (1.1.2a)$$

В радиофизике и оптике очень часто рассматриваются и комплексные случайные процессы вида

$$z(t) = x(t) + iy(t); \quad (1.1.3)$$

вероятностные свойства z определяются совместным распределением вещественной и мнимой компонент $w(x, y, t)$.

¹⁾ В книге принята тройная нумерация формул: глава, параграф, формула. При ссылках внутри данного параграфа указывается только номер формулы.

Реализации случайного процесса; статистический ансамбль.

Возвращаясь к рассмотренному выше примеру, предположим, что одновременно и при идентичных условиях наблюдается движение большого числа N броуновских частиц. В результате мы будем иметь N различных кривых $x_{(m)}(t)$ ($m = 1, 2, \dots, N$), которые называются реализациями случайного процесса x . Совокупность всех возможных реализаций называют статистическим ансамблем или набором реализаций (см. рис. 1.1, где отдельные реализации и набор многих реализаций приведены для радиофизического случайного процесса — электрического шума на сопротивлении).

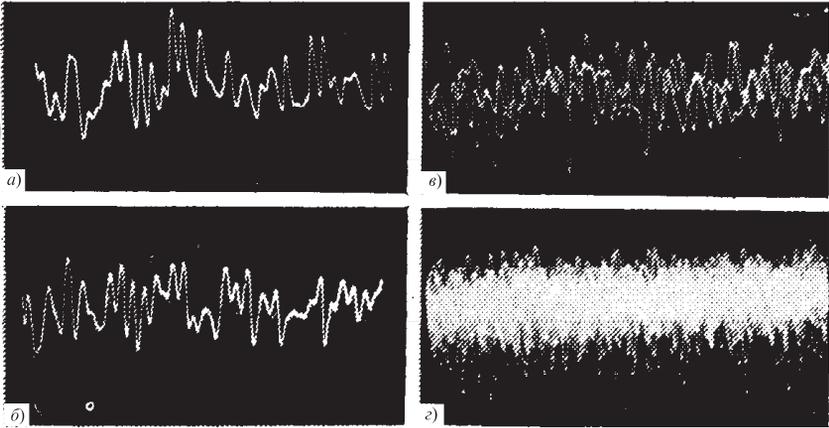


Рис. 1.1. Осциллограммы шума, спектр которого лежит в полосе частот от 100 Гц до 20 кГц:

а), б) одна реализация; в) наложение трех реализаций; г) наложение около 100 реализаций; время развертки 0,5 мс

Располагая достаточно обширной совокупностью реализаций, можно оценить вероятность (2) как

$$P_1 = P(x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x, t) \approx N_1/N, \quad (1.1.4)$$

где N_1 — число реализаций, значения которых в момент t оказались лежащими в интервале $x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta x$. Статистическое описание возможно лишь при условии, что отношение N_1/N устойчиво, т. е. при $N \rightarrow \infty$ оно стремится к определенному пределу, равному P_1 .

При достаточно малом Δx соотношение (4) позволяет произвести переход к плотности распределения вероятностей. Учитывая (2), можно написать

$$w(x, t) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{\Delta x} \frac{N_1(t)}{N(t)}. \quad (1.1.5)$$

Функцию $w(x, t)$ можно определить из массового опыта, пользуясь формулами (4), (5)¹⁾. Во многих случаях в этом довольно громоздком методе нет нужды, так как функцию $w(x, t)$ удается найти теоретическим путем на основании модельных представлений о случайном процессе. Функцию $w(x, t)$ называют также одномерным распределением плотности вероятностей. Этим определением мы и будем пользоваться ниже.

Статистическое усреднение. Используя распределения вероятностей, можно вычислить различные статистические средние, т. е. средние по ансамблю реализаций. Например, среднее значение случайного процесса $x(t)$, равное

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^N x_{(m)}(t)}{N}, \quad (1.1.6)$$

находится как

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x, t) dx. \quad (1.1.7)$$

Действительно, группируя реализации $x_{(m)}(t)$ в (6) по интервалам $x_n \leq x \leq x_n + \Delta x$, получим

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum x_n N_n}{N},$$

где N_n — число реализаций в n -м интервале. Умножив и разделив на Δx и учитывая (5), найдем

$$\langle x \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \frac{x_n}{\Delta x} \frac{N_n}{N} \Delta x \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n x_n w(x_n, t) \Delta x,$$

и в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ получим для $\langle x \rangle$ выражение (7). Кроме угловых скобок, статистическое усреднение далее обозначается также чертой сверху:

$$\langle x \rangle \equiv \bar{x}.$$

В зависимости от удобства записи формул в этой книге используются оба символа статистического усреднения.

Среднее \bar{x} имеет смысл регулярной, т. е. вполне предсказуемой, характеристики случайного процесса, который часто бывает удобно записывать в виде суммы регулярной составляющей $\bar{x}(t)$ и флуктуационной компоненты (или просто флуктуации) $\tilde{x}(t)$:

$$x(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}(t). \quad (1.1.8)$$

¹⁾ См. также § 4, где для так называемых стационарных процессов указан метод отыскания распределений по одной реализации.

Из (8) непосредственно следует, что среднее значение флуктуации равно нулю: $\langle \tilde{x}(t) \rangle = 0$.

Согласно (8) различные реализации случайного процесса различаются лишь флуктуациями, регулярные же компоненты для всех реализаций совпадают:

$$x_{(m)}(t) = \bar{x}(t) + \tilde{x}_{(m)}(t). \quad (1.1.9)$$

Эту запись можно еще несколько уточнить, выделив постоянную и переменную составляющие флуктуации:

$$\tilde{x}_{(m)}(t) = \xi_{0(m)} + \xi_{(m)}(t). \quad (1.1.10)$$

Здесь $\xi_{0(m)}$ — постоянный параметр, случайным образом меняющийся от реализации к реализации и равный в среднем нулю.

В соответствии с (9) и (10) вместо (8) можно написать

$$x(t) = \bar{x}(t) + \xi_0 + \xi(t). \quad (1.1.11)$$

Среднее значение какой-либо функции $F(x)$ случайного процесса определяется, аналогично (7), как

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) F(x) dx. \quad (1.1.12)$$

Само распределение плотности вероятности тоже можно представить как среднее, а именно, как среднее от δ -функции:

$$\langle \delta(x - x_1) \rangle = \int \delta(x - x_1) w(x_1) dx_1 = w(x). \quad (1.1.12a)$$

Статистические средние случайного процесса в общем случае зависят от времени t . В дальнейшем эта зависимость выделяется в формулах лишь в тех случаях, когда она имеет существенное значение для рассматриваемой задачи.

Пользуясь (12), можно записать выражения для различных средних: моментов

$$m_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n w(x, t) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.1.13)$$

центральных моментов

$$\mu_n = \langle (x - \bar{x})^n \rangle = \langle \tilde{x}^n \rangle, \quad (1.1.14)$$

характеристической функции

$$\theta(u) = \langle e^{iux} \rangle. \quad (1.1.15)$$

Последнюю можно также интерпретировать как фурье-образ распределения вероятностей:

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} w(x) dx. \quad (1.1.16)$$

Соответственно, зная характеристическую функцию, можно найти распределение вероятностей, выполнив обратное преобразование Фурье:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) e^{-iux} du. \quad (1.1.17)$$

В отличие от распределения вероятностей $w(x)$, характеристическая функция, вообще говоря, комплексна. Она ограничена по модулю:

$$|\theta(u)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} w(x) |e^{iux}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1.$$

Среднее значение (12) произвольной функции $F(x)$ можно выразить через $\vartheta(u)$ и фурье-образ функции $F(x)$, а именно:

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(u) \varphi(u) du, \quad (1.1.18)$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-iux} dx. \quad (1.1.19)$$

Как видно из определения (12) оператора статистического усреднения, этот оператор — линейный, коммутирующий с произвольным линейным оператором \hat{L} , не зависящим от x , т. е.

$$\langle \hat{L}F \rangle = \hat{L} \langle F \rangle. \quad (1.1.19a)$$

В частности, среднее значение интеграла равно интегралу от среднего значения, а среднее производной — производной от среднего. Например,

$$\langle \dot{F} \rangle = \dot{\langle F \rangle}, \quad F = F(x), \quad (1.1.19б)$$

где точка означает производную по времени.

Докажем (19б) непосредственно. Согласно (12)

$$\langle \dot{F} \rangle = \int F(x) \dot{w}(x, t) dx. \quad (1.1.19в)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\dot{F} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x)_{t+\tau} - F(x)_t}{\tau}, \\ \langle \dot{F} \rangle &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle F(x) \rangle_{t+\tau} - \langle F(x) \rangle_t}{\tau},\end{aligned}$$

или, используя опять (12), имеем

$$\langle \dot{F} \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int F(x) [w(x, t + \tau) - w(x, t)] dx = \int F(x) \dot{w}(x, t) dx.$$

Последнее выражение совпадает с (19а), что и доказывает равенство (19б).

Разложение в ряд по моментам. Характеристическая функция $\vartheta(u)$, распределение вероятностей $w(x)$ и статистическое среднее общего вида (12) могут быть представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяются моментами (13).

Разлагая экспоненту в ряд по x , из (15) непосредственно находим

$$\theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n. \quad (1.1.20)$$

Отсюда видно, что моменты могут быть найдены дифференцированием характеристической функции:

$$m_n = \frac{1}{i^n} \left(\frac{d}{du} \right)^n \theta(u) \Big|_{u=0}. \quad (1.1.21)$$

Подставив разложение (20) в выражение (17) для функции распределения вероятностей, получим

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} (iu)^n du = (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x), \quad (1.1.22)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Соотношение (22) можно доказать, дифференцируя выражение для δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} du.$$

Таким образом, представление $w(x)$ в виде ряда по моментам будет иметь вид

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m_n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \delta(x). \quad (1.1.23)$$

Подставляя (23) в (12) и учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x') \left(\frac{d}{dx'}\right)^n \delta(x' - x) dx' = (-1)^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x), \quad (1.1.24)$$

находим также

$$\langle F(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n F(x) \Big|_{x=0}. \quad (1.1.25)$$

Последнее соотношение представляет собой просто результат усреднения ряда Тейлора для функции $F(x)$. При $F(x) = e^{iux}$ (25) переходит в (20).

Проблема моментов. Эта проблема существует в связи с тем, что по моментам функция распределения плотности вероятности восстанавливается, однако, не во всех случаях единственным образом. Установлено (см., например, [1]), что если интервал задания функции распределения $w(x)$ конечен, то $w(x)$ восстанавливается единственным образом. Неединственность восстановления $w(x)$ при наличии моментов всех порядков может возникнуть, если интервал задания x $[0, \infty)$ или $(-\infty, +\infty)$. При этом условием неединственности является условие Крейна:

$$\int_0^{\infty} (-1) \frac{\log w(x^2)}{1+x^2} dx < \infty \quad (1.1.26)$$

в первом случае и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-1) \frac{\log w(x)}{1+x^2} dx < \infty \quad (1.1.27)$$

во втором случае. На интервале $(-\infty, +\infty)$ функция распределения $w(x)$ определяется однозначно моментами при выполнении, например, условия [1]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m_n)^{1/n}}{n} < \infty, \quad (1.1.28)$$

где n — четное число. Далее мы убедимся, что критерию (28) удовлетворяет гауссовское распределение. Здесь рассмотрим один из примеров неединственности решения проблемы моментов.

Предположим, что случайная величина x описывается следующим распределением плотности вероятности:

$$w(x) = \begin{cases} Ce^{-\lambda x^\gamma} & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (1.1.29)$$

Здесь $\lambda > 0$, $\gamma < \frac{1}{2}$, а величина C определяется из условия нормировки. Для распределения (29) выполнено условие Крейна (26). Следова-

тельно, распределение случайной величины неоднозначно определяется моментами.

Рассмотрим, например, распределение вида

$$w_{\mu}(x) = [1 + \mu \sin \beta x^{\gamma}]w(x), \quad (1.1.30)$$

где $|\mu| \leq 1$, $\beta > 0$, а $w(x)$ определяется (29). Распределение (30) удовлетворяет условию нормировки, как будет следовать из дальнейшего анализа.

Теперь моменты n -го порядка определяются выражением

$$\langle x^n \rangle = \int_0^{\infty} x^n w_{\mu}(x) dx = \int_0^{\infty} x^n w(x) dx + \mu I_n. \quad (1.1.31)$$

Первое слагаемое справа в (31) — прежнее значение n -го момента, а второе слагаемое

$$I_n = \int_0^{\infty} x^n w(x) \sin \beta x^{\gamma} dx \quad (1.1.32)$$

связано с различием распределений (29) и (30). Покажем, что интеграл I_n может быть равен нулю.

Представляя $\sin z$ через экспоненты, получаем выражение

$$I_n = \frac{i}{2\gamma} \Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right) [(\lambda - i\beta)^{-(n+1)/\gamma} - (\lambda + i\beta)^{-(n+1)/\gamma}],$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Выполняя необходимые преобразования, приходим к выражению

$$I_n = \frac{1}{\gamma} \Gamma\left(\frac{n+1}{\gamma}\right) (\lambda^2 + \beta^2)^{\frac{n+1}{2\gamma}} \sin\left(\frac{n+1}{\gamma}\varphi\right), \quad (1.1.33)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(\beta/\lambda)$. Возьмем β в виде $\beta = \lambda \operatorname{tg} \gamma\pi$, тогда $\varphi = \gamma\pi$ и, очевидно, $\sin\left(\frac{n+1}{\gamma}\varphi\right) = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем $I_n = 0$ и функция распределения (30) неоднозначно определяется своими моментами. Возможно, что некоторым читателям рассмотренный пример покажется далеким от реальной радиофизической ситуации. Но нам тем не менее представляется, что выводы из этого примера следует иметь в виду при восстановлении функции распределения на основе измерения моментов.

Неравенство Чебышева. Момент второго порядка $m_2 = \overline{x^2}$ определяет среднюю интенсивность случайного процесса. Особую роль при статистических оценках играет центральный момент второго порядка, или дисперсия (см. (14)),

$$\sigma^2 = \mu^2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 w(x) dx. \quad (1.1.34)$$

Этот параметр характеризует среднюю интенсивность флуктуации. Под среднеквадратичным отклонением случайной величины (от среднего) понимают корень квадратный из дисперсии, т. е. величину σ .

Нетрудно получить неравенство, связывающее величину σ с вероятностью того, что флуктуация \tilde{x} будет больше, чем $n\sigma$ (n — некоторое положительное число). Подынтегральное выражение в (34) неотрицательно, и можно написать

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{x-n\sigma}^{\bar{x}+n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 w(x) dx \geq \\ &\geq \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) (x - \bar{x})^2 w(x) dx. \end{aligned}$$

В последних интегралах $(x - \bar{x})^2 \geq n^2 \sigma^2$, и, следовательно,

$$\sigma^2 \geq n^2 \sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) w(x) dx. \quad (1.1.35)$$

Но согласно (2)

$$\left(\int_{-\infty}^{\bar{x}-n\sigma} + \int_{\bar{x}+n\sigma}^{\infty} \right) w(x) dx = P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma). \quad (1.1.36)$$

Подставив (36) в (35), получим искомое неравенство в виде

$$P(|x - \bar{x}| \geq n\sigma) = P(|\bar{x}| \geq n\sigma) \leq \frac{1}{n^2}$$

или

$$P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.1.37)$$

Более точная оценка для вероятности отклонения от среднего может быть получена, если известен центральный момент более высокого порядка. Выкладки, аналогичные приведенным выше, приводят к следующему результату:

$$P(|x - \bar{x}| \geq n \sqrt[2m]{\mu_{2m}}) \leq \frac{1}{n^{2m}}. \quad (1.1.38)$$

При $m = 1$ (38) совпадает с (37).

Кумулянты. Используя разложение логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

и полагая $1 + x = \theta(u)$, получим

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\theta-1)^n}{n}.$$

Подставив сюда из (20)

$$\theta - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n$$

и собирая в показателе экспоненты члены одного порядка по u , получим для характеристической функции следующее выражение:

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.39)$$

или

$$\ln \theta(u) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n. \quad (1.1.40)$$

Коэффициенты k_n называются кумулянтами. Между моментами и кумулянтами имеется однозначная связь, причем k_n выражается через моменты до n -го порядка включительно [2-4]. Например,

$$\begin{aligned} k_1 &= m_1, & k_2 &= \mu_2 = \sigma^2, & k_3 &= \mu_3, & k_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2, \\ k_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3, & k_6 &= \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 - 30\mu_2^3. \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

Если ввести безразмерные нормированные кумулянты

$$\varkappa_n = k_n / \sigma^n, \quad (1.1.42)$$

то (40) примет вид

$$\ln \theta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^n \varkappa_n}{n!}.$$

С помощью конечного числа моментов нельзя получить удобную аппроксимацию для распределения вероятностей: согласно (23) функция $w(x)$ определяется при этом как сумма δ -функции и ее производных. Напротив, конечное число кумулянтов определяет $w(x)$ без каких-либо подобных особенностей. Например, зная первые два момента m_1 и m_2 , предполагая, что остальные моменты равны нулю, и используя (23), мы получим для распределения вероятностей выражение

$$w(x) = \delta(x) - m_1 \delta'(x) + \frac{1}{2} m_2 \delta''(x).$$

Если же предположить, что отличны от нуля только два первых кумулянта, $k_1 = m_1$ и $k_2 = \sigma^2$, то согласно (39) характеристическая функция будет

$$\theta(u) = \exp \left(ium_1 - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \right). \quad (1.1.43)$$

Подставив (43) в (17), получим

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (1.1.44)$$

Распределение (44) имеет вид плавной колоколообразной кривой с максимумом в точке $x = m_1$. Это распределение называется гауссовским или нормальным.

Интересно, что случаю (43) исчерпываются все возможности представления $\theta(u)$ с помощью конечного числа кумулянтов: согласно теореме, доказанной Марцинкевичем [5], преобразуя по Фурье функцию

$$\theta(u) = \exp \sum_{n=1}^N \frac{(iu)^n}{n!} k_n, \quad (1.1.45)$$

мы можем получить неотрицательное распределение $w(x) \geq 0$ лишь при $N = 1, 2$ или $N = \infty$ (подробнее см. [6], с. 90).

Старшие кумулянты \varkappa_n ($n = 3, 4, \dots$) дают количественную оценку отклонения произвольной функции распределения от симметричной гауссовской кривой (44); величину

$$\varkappa_3 = \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

называют коэффициентом асимметрии, а

$$\varkappa_4 = \frac{k_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4 - 3\mu_2^2}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

— коэффициентом эксцесса. При $\varkappa_3 > 0$ центр тяжести функции распределения смещен в сторону меньших x относительно гауссовского распределения. При $\varkappa_4 < 0$ распределение $w(x)$ в окрестности $x = \bar{x}$ является более острым и узким, а при $\varkappa_4 > 0$, наоборот, более плоским, чем гауссовское. Интересно ([6], с. 41), что величины \varkappa_3 и \varkappa_4 не вполне независимы, так как должно выполняться неравенство $\varkappa_4 - \varkappa_3^2 + 2 \geq 0$ и, в частности, $\varkappa_4 \geq -2$. Аналогичные соотношения могут быть получены и для других кумулянтов.

§ 2. Многомерные статистические характеристики

Многомерные распределения вероятностей. Для описания совокупности нескольких случайных величин x, y, z (в частности, для выяснения связи между этими величинами) кроме одномерных распределений

$$w(x), \quad w(y), \quad w(z), \quad \dots \quad (1.2.1)$$

нужно знать также двумерные распределения вероятностей

$$w(x, y), \quad w(x, z), \quad w(y, z), \quad \dots, \quad (1.2.2)$$

трехмерные

$$w(x, y, z), \dots \quad (1.2.3)$$

и т. д. Многомерные распределения удовлетворяют условиям нормировки, аналогичным (1.1.2a), например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dx dy = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dx dy dz = 1. \quad (1.2.4)$$

Кроме того, должны выполняться условия соответствия типа

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y, z) dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, y) dy = w(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} w(x, z) dx = w(x), \quad (1.2.5)$$

т. е., проинтегрировав многомерное распределение по одной или нескольким случайным переменным, мы должны получить распределение вероятностей для остальных случайных переменных.

Если x, y, z являются случайными процессами:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то время t войдет, вообще говоря, в распределения (1)–(3) как параметр. Если значения случайных переменных относятся к разным моментам времени:

$$x = x(t_1), \quad y = y(t_2), \quad \dots, \quad (1.2.6)$$

то в многомерные распределения может войти зависимость от всех этих моментов, например:

$$w(x, y) = w(x, y; t_1, t_2). \quad (1.2.7)$$

Очень часто нас интересует связь между значениями одного и того же процесса в разные моменты времени:

$$x = x(t_1) = x_1, \quad y = x(t_2) = x_2, \quad z = x(t_3) = x_3.$$

Статистическая связь этих величин описывается многомерными распределениями вида

$$w(x_1, x_2; t_1, t_2), \quad w(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3), \quad (1.2.8)$$

причем

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} w(x_1, x_2; t_1, t_2) = w(x_1, t_1) \delta(x_2 - x_1).$$

Функциональное преобразование случайных величин. Предположим, что между величинами x и y имеется функциональная связь:

$$y = F(x), \quad x = \varphi(y),$$

и распределение вероятностей $w_1(x)$ известно; найдем распределение $w_2(y)$. Если в интеграле

$$P = \int_{x_1}^{x_2} w_1(x) dx \quad (x_2 > x_1) \quad (1.2.9)$$

перейти к новой переменной интегрирования $y = F(x)$, то мы получим

$$P = \int_{y_1}^{y_2} w_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right| dy \quad (y_2 > y_1). \quad (1.2.10)$$

Отсюда следует, что

$$w_2(y) = w_1(x = \varphi(y)) \left| \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|. \quad (1.2.11)$$

Эта формула справедлива, если зависимость x от y является однозначной. Если $\varphi(y)$ многозначна и имеет несколько ветвей $\varphi_n(y)$, то

$$w_2(y) = \sum_n w_1(x = \varphi_n(y)) \left| \frac{d\varphi_n(y)}{dy} \right|. \quad (1.2.12)$$

Особым является случай, когда кривая $y = F(x)$ содержит отрезки, параллельные оси x :

$$y = y_k, \quad a_k \leq x \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Вероятность для y принять значение y_k в этом случае конечна и равна вероятности пребывания x в интервале (a_k, b_k) , т. е.

$$P(y = y_k) = \int_{a_k}^{b_k} w_1(x) dx.$$

Плотность вероятности выразится через δ -функции; к общему выражению (12) в этом случае следует добавить сумму вида

$$\sum_k \delta(y - y_k) \int_{a_k}^{b_k} w_1(x) dx. \quad (1.2.13)$$

Полученные соотношения можно обобщить на случай двух и более случайных переменных. Например, если

$$\begin{aligned} y_1 &= F_1(x_1, x_2), & y_2 &= F_2(x_1, x_2), \\ x_1 &= \varphi_1(y_1, y_2), & x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2), \end{aligned}$$

то вместо (11) будем иметь

$$w_2(y_1, y_2) = w_1(x_1 = \varphi_1, x_2 = \varphi_2) \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right|, \quad (1.2.14)$$

где $\partial(\varphi_1, \varphi_2)/\partial(y_1, y_2)$ — якобиан преобразования от старых случайных переменных к новым.

Многомерные моменты, кумулянты, характеристические функции. Рассмотрим совокупность нескольких случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (1.2.15)$$

которая полностью описывается многомерным распределением вероятностей

$$w(x_1, \dots, x_n). \quad (1.2.16)$$

Как и в одномерном случае, можно определить характеристическую функцию совокупности:

$$\begin{aligned} \theta(u_1, \dots, u_n) &= \langle e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} w(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Характеристический функционал. Если устремим $n \rightarrow \infty$, то мы перейдем к вероятностному функционалу (функции распределения бесконечного порядка) $w(\{x(t)\})$, где $\{x(t)\}$ означает бесконечный набор всех x при всех t . Вероятностный функционал содержит полное статистическое описание случайного процесса. Ему соответствует характеристический функционал

$$\begin{aligned} \theta(\{u(t)\}) &= \left\langle \exp \left[i \int u(t)x(t) dt \right] \right\rangle = \\ &= \int \exp \left[i \int u(t)x(t) dt \right] w(\{x(t)\}) d\{x(t)\}, \end{aligned} \quad (1.2.17a)$$

где $d\{x(t)\} = \prod dx(t)$ по всем t . Выражение (17a) представляет собой бесконечномерный или континуальный интеграл. Зная характеристический функционал, можно найти характеристическую функцию для любой совокупности n случайных величин. Действительно, интересуясь значением случайного процесса в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n , запишем функцию $u(t)$ в виде

$$u(t) = \sum_{j=1}^n u_j \delta(t - t_j).$$

Подстановка этого выражения в формулу (17a) приводит ее к виду (17). Для более подробного знакомства с методом континуального интегрирования и его применением к задачам статистической радиофизики рекомендуем обратиться к монографии [7].

Распределение вероятностей связано с θ обратным многомерным преобразованием Фурье:

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int \theta(u_1, \dots, u_n) \times \\ \times e^{-i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)} du_1 \dots du_n. \quad (1.2.18)$$

Из (17) вытекает разложение характеристической функции по многомерным моментам

$$m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \langle x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \rangle, \quad (1.2.19)$$

а именно:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = 1 + \frac{i}{1!} \sum_{p=1}^n u_p \langle x_p \rangle + \frac{i^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q \langle x_p x_q \rangle + \\ + \frac{i^3}{3!} \sum \sum \sum u_p u_q u_r \langle x_p x_q x_r \rangle + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p}{p!} \langle S^p \rangle, \quad (1.2.20)$$

где $S = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$.

Выражение (1.1.32) следующим образом обобщается на многомерный случай:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \exp \left\{ \frac{i}{1!} \sum_{p=1}^n u_p K_p + \frac{i^2}{2!} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q K_{pq} + \dots \right\}. \quad (1.2.21)$$

Здесь K_p — многомерные кумулянты:

$$K_p = \bar{x}_p, \quad K_{12} = B_{12}, \quad K_{123} = B_{123}, \\ K_{1234} = B_{1234} - B_{12}B_{34} - B_{13}B_{24} - B_{14}B_{23}, \quad (1.2.22)$$

и

$$B_{p\dots s} = \langle (x_p - \bar{x}_p) \dots (x_s - \bar{x}_s) \rangle \quad (1.2.23)$$

— многомерные центральные моменты.

При $p = q = \dots = s$ функции $B_{p\dots s}$ и $K_{p\dots s}$ совпадают с введенными ранее одномерными центральными моментами и кумулянтами случайной величины x_p :

$$\underbrace{B_{p\dots p}}_{p \text{ раз}} = \mu_n = \langle (x_p - \bar{x}_p)^n \rangle, \quad \underbrace{K_{p\dots p}}_{p \text{ раз}} = k_n$$

(см. (1.1.14) и (1.1.41)).

Условные распределения вероятностей; статистическая независимость. Рассмотрим две случайные величины x и y . Будем говорить о событии A , если $a \leq x \leq a + \Delta x$, и о событии B , если $b \leq y \leq b + \Delta y$. Пусть при N испытаниях событие A произошло N_A раз, событие B — N_B раз, а в N_{AB} случаях из N имели место сразу оба события A и B . Тогда при N , N_A , N_B , $N_{AB} \rightarrow \infty$ можно написать выражения для вероятностей:

$$P(A) = N_A/N, \quad P(B) = N_B/N, \quad P(A, B) = N_{AB}/N;$$

последнее выражение определяет вероятность совместной реализации событий A и B .

Отношение N_{AB}/N_A также можно трактовать как вероятность, а именно как условную вероятность осуществления события B при условии, что событие A обязательно имеет место:

$$N_{AB}/N_A = P(B | A).$$

Аналогичную условную вероятность можно написать и для A :

$$N_{AB}/N_B = P(A | B).$$

Поскольку

$$\frac{N_{AB}}{N} = \frac{N_{AB}}{N_A} \frac{N_A}{N} = \frac{N_{AB}}{N_B} \frac{N_B}{N},$$

то между условными и обычными (или безусловными) вероятностями имеет место следующее соотношение:

$$P(A, B) = P(A | B)P(B) = P(B | A)P(A). \quad (1.2.23a)$$

Если перейти к плотностям распределения вероятностей, то получим

$$w(x, y) = w(x | y)w(y) = w(y | x)w(x). \quad (1.2.24)$$

Таким образом, совместное распределение двух случайных величин (т. е. двумерное распределение) может быть найдено, если известно одномерное распределение для одной из этих величин и соответствующее условное распределение.

Следует иметь в виду, что, например, в условном распределении $w(x | y)$ величина y играет роль параметра и нормировка для $w(x | y)$ имеет обычный вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x | y) dx = 1.$$

Фиксируя то или иное значение y , мы получим, вообще говоря, различные распределения вероятностей для x :

$$w(x | y_1) \neq w(x | y_2) \neq w(x),$$

что и отражает статистическую связь, существующую между x и y .

Если значение одной из случайных величин никак не влияет на распределение вероятностей для другой, то эти величины называют статистически независимыми. В этом случае

$$w(x | y) = w(x), \quad w(y | x) = w(y). \quad (1.2.25)$$

Подставив (25) в (24), получим

$$w(x, y) = w(x)w(y). \quad (1.2.26)$$

Вообще, если имеется n независимых случайных величин

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (1.2.27)$$

то многомерное распределение равно произведению одномерных:

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1) \dots w(x_n). \quad (1.2.28)$$

Подставив (28) в (17), получим, что многомерная характеристическая функция совокупности (27) независимых случайных величин равна произведению одномерных характеристических функций:

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \theta(u_1) \dots \theta(u_n). \quad (1.2.29)$$

Распределение суммы независимых случайных величин; центральная предельная теорема. Применим полученные результаты к анализу статистических свойств суммы

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (1.2.30)$$

независимых случайных величин с различными распределениями вероятностей $w_\alpha(x_\alpha)$ и характеристическими функциями $\theta_\alpha(u_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). Последние можно записать через кумулянты (см. (1.1.39)):

$$\theta_\alpha(u_\alpha) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu_\alpha)^m}{m!} k_{\alpha, m}. \quad (1.2.31)$$

Характеристическую функцию для y получим, полагая в (17) $u_1 = u_2 = \dots = u_n = u$. Учитывая также (29) и (31), имеем

$$\theta(u) = \langle \exp\{iu(x_1 + \dots + x_n)\} \rangle = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} k_m, \quad (1.2.32)$$

где

$$k_m = \sum_{\alpha=1}^n k_{\alpha, m}. \quad (1.2.33)$$

Формула (33) выражает свойство аддитивности кумулянтов: кумулянт суммы (независимых случайных величин) равен сумме кумулянтов (одинакового порядка). Заметим, что моменты суммы независимых случайных величин свойством аддитивности не обладают (исключение составляют моменты первого и центральные моменты второго и третьего порядка, совпадающие по величине с кумулянтами, — см. (1.1.34)). Действительно, например, для независимых ξ_1 и ξ_2

$$\overline{(\xi_1 + \xi_2)^4} = \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4} + 6\overline{\xi_1^2 \xi_2^2} \neq \overline{\xi_1^4} + \overline{\xi_2^4}.$$

Пронормируем кумулянты на дисперсию (см. (1.1.42)):

$$k_{\alpha, m} = \sigma_\alpha^m \varkappa_{\alpha, m}; \quad (1.2.34)$$

(31) теперь можно переписать как

$$\theta_\alpha(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma_\alpha)^m}{m!} \varkappa_{\alpha, m}. \quad (1.2.35)$$

Такие же коэффициенты можно ввести и для кумулянтов суммы:

$$k_m = \sigma^m \varkappa_m, \quad \sigma^2 = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^2. \quad (1.2.36)$$

В результате характеристическая функция (32) примет вид

$$\theta(u) = \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu\sigma)^m}{m!} \varkappa_m. \quad (1.2.37)$$

Из (33), (34) и (36) следует, что

$$\varkappa_m = \frac{\sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^m \varkappa_{\alpha, m}}{\left(\sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha^2 \right)^{m/2}}. \quad (1.2.38)$$

С ростом n числитель в (38) растет $\sim n$, а знаменатель $\sim n^{m/2}$, т. е.

$$\varkappa_m \sim \frac{1}{n^{m/2-1}} \quad (n \gg 1).$$

Таким образом, при увеличении числа слагаемых в сумме (30) относительная роль кумулянтов старших порядков ($m \geq 3$) падает. В предельном случае $n \rightarrow \infty$ остаются лишь кумулянты первого и второго порядков, а выражение (32) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(u) &= \langle \exp(iu(x_1 + \dots + x_n)) \rangle = \\ &= \exp \left(iuk_1 - \frac{1}{2} u^2 k_2 \right) = \exp \left(iu\bar{y} - \frac{1}{2} u^2 \sigma^2 \right), \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

так как (см. (33))

$$k_1 = \sum_{\alpha} \bar{x}_\alpha = \bar{y}, \quad k_2 = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha^2 = \bar{y}^2 - \bar{y}^2 = \sigma^2.$$

Характеристической функции (39) соответствует гауссовское распределение вероятностей (см. (1.1.44)).

Мы приходим, таким образом, к выводу, что сумма большого числа статистически независимых слагаемых, каждое из которых имеет произвольное распределение вероятностей, распределена по нормальному, или гауссовскому, закону (1.1.44). Это утверждение носит название центральной предельной теоремы (ЦПТ). ЦПТ имеет фундаментальное значение для физики; в силу ЦПТ подавляющее большинство реальных случайных процессов оказывается гауссовским.

Многомерное гауссовское распределение. Разделим сумму (30) на две части:

$$y = y_1 + y_2,$$

$$y_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} x_{\alpha}, \quad y_2 = \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha} x_{\alpha} \quad (a_{\alpha} + b_{\alpha} = 1).$$

Случайные величины y_1 и y_2 , вообще говоря, статистически зависимы. Каждая из них является суммой независимых случайных величин и, следовательно, в пределе $n \rightarrow \infty$ является нормальной (т. е. имеет гауссовское распределение вероятностей), как и $y = y_1 + y_2$. Отсюда видно, что сумма не только двух, но и произвольного числа нормальных случайных величин (зависимых или независимых, безразлично)

$$S = c_1 y_1 + \dots + c_m y_m \quad (1.2.40)$$

(c_i — неслучайные коэффициенты) также нормальна, и согласно (39)

$$\langle e^{iS} \rangle = \exp\{i\bar{S} - (\bar{S}^2 - \bar{S}^2)/2\}. \quad (1.2.41)$$

Полагая в (40) $c_i = u_i$ и используя (41), находим многомерную характеристическую функцию для совокупности нормальных случайных величин y_1, \dots, y_m :

$$\theta(u_1, \dots, u_m) = \langle \exp\{i(u_1 y_1 + \dots + u_m y_m)\} \rangle =$$

$$= \exp\left\{i \sum_{p=1}^m u_p \bar{y}_p - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^m u_p u_q B_{pq}\right\}, \quad (1.2.42)$$

где

$$B_{pq} = \langle (y_p - \bar{y}_p)(y_q - \bar{y}_q) \rangle \quad (1.2.43)$$

— двумерный центральный момент, или функция корреляций флуктуации гауссовских случайных величин y_p и y_q . Совокупность значений B_{pq} можно рассматривать как элементы корреляционной матрицы $\|B\|$.

Подставив (42) в (18) и выполнив интегрирование, найдем многомерное гауссовское распределение:

$$w(y_1, \dots, y_m) = \frac{1}{(2\pi)^m / 2 D^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^m A_{pq} (y_p - \bar{y}_p)(y_q - \bar{y}_q)\right], \quad (1.2.44)$$

где D — детерминант корреляционной матрицы $\|B\|$, A_{pq} — элементы матрицы, обратной корреляционной.

Из сравнения (42) и (21) следует, что для совокупности гауссовских случайных величин многомерные кумулянты выше второго порядка равны нулю (как и одномерные). Согласно (22) отсюда вытекает простое правило вычисления многомерных центральных моментов: при гауссовском распределении (44) все моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка — сумме всех возможных комбинаций из моментов второго порядка. Например,

$$B_{1234} = B_{12}B_{34} + B_{13}B_{24} + B_{14}B_{23}, \quad (1.2.45)$$

$$B_{123456} = B_{12}(B_{34}B_{56} + B_{35}B_{46} + B_{36}B_{54}) + B_{13}(B_{24}B_{56} + B_{25}B_{46} + B_{26}B_{54}) +$$

$$+ B_{14}(B_{32}B_{56} + B_{35}B_{26} + B_{36}B_{52}) + B_{15}(B_{34}B_{26} + B_{32}B_{46} + B_{36}B_{52}) +$$

$$+ B_{16}(B_{34}B_{52} + B_{32}B_{54} + B_{35}B_{42}). \quad (1.2.46)$$

Число слагаемых в выражении для центрального момента $2n$ -го порядка равно $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)$.

Многомерное гауссовское распределение обладает еще одним замечательным свойством. В нем переход к распределениям более низкого порядка можно осуществить не прибегая к интегрированию по случайным переменным, а вычеркивая просто в корреляционной квадратной матрице $\|B\|$ соответствующие этим переменным строки и столбцы.

Предположим, что в многомерном распределении вероятностей $w(x_1, \dots, x_n)$ необходимо произвести интегрирование, например, по «лишней» переменной x_n . Воспользовавшись выражением (18), получаем

$$\begin{aligned} w(x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int w(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \dots \int \theta(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \times \\ &\times e^{-i(u_1 x_1 + \dots + u_{n-1} x_{n-1} + u_n x_n)} du_1 \dots du_n dx_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) \times \\ &\times e^{-i(u_1 x_1 + \dots + u_{n-1} x_{n-1})} \delta(u_n) du_1 \dots du_n, \end{aligned}$$

где $\delta(u_n)$ — δ -функция. Из последнего равенства следует, что для характеристической функции общего вида (21) рассматриваемое интегрирование сводится к уменьшению числа многомерных кумулянтов каждого порядка на один. В случае же характеристической функции (42) для гауссовских случайных величин функция распределения $w(x_1, \dots, x_{n-1})$ записывается в виде

$$w(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i \sum_{p=1}^{n-1} u_p \bar{x}_p - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{n-1} u_p u_q B_{pq} \right\}.$$

Откуда видно, что теперь многомерное гауссовское распределение определяется корреляционной матрицей $\|B\|$, в которой n -ая строка и n -ый столбец отсутствуют (они равны нулю), т. е. матрицей $(n - 1) \times (n - 1)$.

Стационарные и нестационарные случайные процессы. Пользуясь многомерными распределениями, можно определить и исчерпывающий способ задания случайного процесса $x(t)$. Случайный процесс задан, если для любого числа n произвольно выбранных моментов времени известна n -мерная функция распределения

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (1.2.47)$$

С помощью указанной функции можно определить и вероятность того, что реализация процесса достаточно близка к заданной траектории:

$$dP = w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (1.2.48)$$

Формулу (48) можно рассматривать как «статистический аналог» записи (1.1.1) регулярной функции времени. Для случайного процесса (случайной функции) реализации испытывают флуктуационный раз-

брос, однако, зная $w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, можно рассчитать вероятность осуществления данной реализации (рис. 1.2).

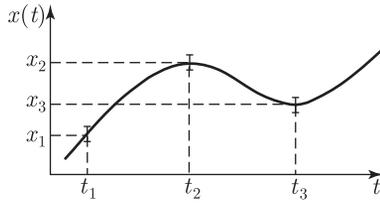


Рис. 1.2. Предполагаемая форма реализаций и оценка ее вероятностей с помощью n -мерного распределения случайного процесса

Вероятность последовательного попадания в три заданных интервала определяется трехмерным распределением $w(x_1, x_2, x_3)$

Обобщая (5), можно записать, очевидно,

$$w(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = \int w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_{m+1} \dots dx_n \quad (m < n) \quad (1.2.49)$$

— младшие функции распределения могут быть определены из старших. Таким образом, старшие функции распределения содержат в себе всю информацию о процессе, заключенную в распределениях более низкого порядка, плюс некоторая дополнительная информация. К счастью, для большинства практически важных задач ценность этой дополнительной информации быстро уменьшается с ростом n ; поэтому ниже мы не будем, как правило, иметь дело с $n \geq 5$, а в очень многих случаях вообще будем ограничиваться рассмотрением только одномерных и двумерных функций распределения. Выбор необходимого описания существенно зависит от типа случайного процесса, т. е. фактически от условий в физической системе, в которой рассматриваемый случайный процесс возникает. Далее особое значение будут иметь так называемые стационарные случайные процессы, для которых статистика определяется только разностью времен $t_i - t_j$ и не зависит от начала отсчета времени t_0 . Стационарным случайным процессом являются флуктуации некоторой физической величины, возникающие в системе, находящейся в равновесных условиях.

Сформулируем теперь и математическое определение стационарного процесса. Стационарным случайным процессом называют процесс, произвольная n -мерная функция распределения которого не изменяется при одновременном сдвиге всех точек t_1, \dots, t_n на оси времени на одну и ту же величину, иначе говоря — функция распределения не меняется со временем:

$$w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = w(x_1, \dots, x_n; t_1 + t, \dots, t_n + t). \quad (1.2.50)$$

В соответствии с (50) одномерное распределение вероятностей стационарного процесса не зависит от времени вообще:

$$w(x, t) = w(x), \quad (1.2.51)$$

а двумерное — зависит только от интервала $\tau = t_1 - t_2$:

$$w[x(t), x(t + \tau); t, t + \tau] = w[x, x_\tau, \tau], \quad (1.2.51a)$$

где $x_\tau = x(t + \tau)$. Процессы, для которых выполняются соотношения (51) и (51a), иногда называют стационарными в широком смысле.

В статистической радиофизике и оптике стационарные процессы занимают особенно важное место; условия их реализуемости осуществляются во многих экспериментальных ситуациях. Вместе с тем подчеркнем, что и нестационарные процессы, для которых (50) несправедливо, также играют важную роль: например, все переходные процессы, протекающие в присутствии флуктуации, оказываются фактически нестационарными случайными процессами.

§ 3. Корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов

Корреляционная функция и коэффициент корреляции. Статистическую связь между случайными величинами y_p и y_q характеризует корреляционная матрица (1.2.43):

$$B_{pq} = \overline{y_p y_q} - \overline{y_p} \overline{y_q}. \quad (1.3.1)$$

В общем случае средние $\overline{y_p}$ и $\overline{y_q}$ находятся по формуле (1.1.7), а корреляция $\langle y_p y_q \rangle$ определяется выражением

$$\langle y_p y_q \rangle = \int \int y_p y_q w(y_p, y_q) dy_p dy_q. \quad (1.3.2)$$

Значения B_{pq} полностью определяют, как мы видели, многомерное распределение вероятностей для нормальных случайных величин (1.2.44). Нормируя B_{pq} , получим матрицу коэффициентов корреляции

$$R_{pq} = \frac{B_{pq}}{\sigma_p \sigma_q} = \frac{\overline{y_p y_q} - \overline{y_p} \overline{y_q}}{\sqrt{(\overline{y_p^2} - \overline{y_p}^2)(\overline{y_q^2} - \overline{y_q}^2)}}, \quad (1.3.3a)$$

которая может служить мерой статистической зависимости, существующей между y_p и y_q .

Как следует из (2), коэффициент корреляции ограничен по абсолютной величине:

$$-1 \leq R_{pq} \leq +1, \quad (1.3.3b)$$

что вытекает из очевидного неравенства

$$\left\langle \left(\frac{y_p - \overline{y_p}}{\sigma_p} \pm \frac{y_q - \overline{y_q}}{\sigma_q} \right)^2 \right\rangle = 2(1 \pm R_{pq}) \geq 0.$$

При этом $R_{pq} = 0$ для статистически независимых y_p и y_q . Согласно (3б) B_{pq} также может иметь как положительные, так и отрицательные значения:

$$-\sigma_{y_p}\sigma_{y_q} \leq B_{pq} \leq \sigma_{y_p}\sigma_{y_q}. \quad (1.3.4)$$

Если y_p и y_q — значения одного и того же случайного процесса в разные моменты времени:

$$y_p = x(t), \quad y_q = x(t + \tau) = x_\tau,$$

то элементы B_{pq} корреляционной матрицы являются частными значениями корреляционной функции

$$B(t, \tau) = \overline{x x_\tau} - \bar{x} \bar{x}_\tau, \quad (1.3.5)$$

а именно:

$$B_{pq} = B(t = t_p, \tau = t_p - t_q).$$

Аналогично, элементы матрицы R_{pq} выражаются через коэффициент корреляции

$$R(t, \tau) = B(t, \tau)/\sigma\sigma_\tau. \quad (1.3.6)$$

Если процесс $x(t)$ стационарен, то в (5) и (6) остается лишь зависимость от τ :

$$B(\tau) = \overline{x x_\tau} - \bar{x}^2 = \sigma^2 R(\tau), \quad R(\tau) = (\overline{x x_\tau} - \bar{x}^2)/\sigma^2, \quad (1.3.7)$$

причем $B(\tau)$ и $R(\tau)$ — четные функции τ :

$$B(-\tau) = B(\tau), \quad R(-\tau) = R(\tau),$$

так как согласно (1) $B_{pq} = B_{qp}$.

Максимальное значение функции корреляции соответствует $\tau = 0$:

$$B(\tau)_{\max} = B(0) = \sigma^2.$$

При увеличении τ статистическая зависимость между x и x_τ становится все более слабой, $\overline{x x_\tau} \rightarrow \bar{x} \bar{x}_\tau = \bar{x}^2$, так что

$$B(\infty) = 0, \quad R(\infty) = 0.$$

Уменьшение функции $B(\tau)$ с ростом τ может быть монотонным или иметь осциллирующий характер (это зависит от вида частотного спектра случайного процесса, см. далее рис. 1.3). Аналогичным образом меняется и коэффициент корреляции.

Характерный интервал времени, на котором происходит заметный спад (в несколько раз) функции корреляции, называется временем корреляции τ_k .

Статистическую связь между значениями случайной функции в различные моменты времени характеризует и корреляционная функция

$$\psi(t, \tau) = \overline{x x_\tau} = B(t, \tau) + \bar{x} \bar{x}_\tau. \quad (1.3.8)$$

Однако в дальнейшем мы обычно будем пользоваться корреляционной функцией $B(t, \tau)$. Кроме парных корреляционных функций случайного процесса $B(t, \tau)$ и $\psi(t, \tau)$, можно ввести в рассмотрение тройные $\langle x(t)x(t + \tau_1)x(t + \tau_2) \rangle$, четверные и т. п. корреляционные функции; они дают все более детальную информацию о случайном процессе.

В радиофизике и особенно в оптике большое значение имеют корреляционные функции высших порядков, записываемые для различных степеней рассматриваемого случайного процесса $\langle x^n(t)x^n(t + \tau) \rangle$, и, в частности, корреляционная функция интенсивности

$$\langle II_\tau \rangle = \langle x^2 x_\tau^2 \rangle. \quad (1.3.9)$$

Если случайный процесс гауссовский, то корреляционные функции высших порядков всегда можно выразить через $B(\tau)$.

Используя (1.2.45), нетрудно убедиться, что

$$\langle II_\tau \rangle = \sigma^2 \sigma_\tau^2 + 2B^2(t, \tau) + \bar{x}^2 \bar{x}_\tau^2 + \bar{x}_\tau^2 \sigma^2 + \bar{x}^2 \sigma_\tau^2 + 4\bar{x} \bar{x}_\tau B(t, \tau). \quad (1.3.10)$$

Для гауссовского стационарного процесса x с нулевым средним это выражение упрощается:

$$\langle II_\tau \rangle = \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)]. \quad (1.3.11)$$

Спектральное представление случайного процесса; спектральные амплитуды и спектральная плотность; связь между спектральной плотностью и корреляционной функцией. Для статистической радиофизики и оптики особое значение имеют спектральные представления случайных процессов. Речь идет об обобщении спектральных представлений, развитых в теории регулярных сигналов и полей (и их прохождения через линейные системы), на случайные сигналы и поля.

Запишем флуктуационную компоненту стационарного случайного процесса

$$\xi = x(t) - \bar{x} \quad (1.3.12)$$

в виде интеграла Фурье¹⁾:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.3.13)$$

Спектральные амплитуды ξ_ω будут по-разному зависеть от ω в различных реализациях случайного процесса, т. е. ξ_ω — случайные функ-

¹⁾ Мы не касаемся здесь математических вопросов существования и сходимости, связанных с записью (13). Читатель, интересующийся этим аспектом, может обратиться к руководствам [2, 8].

ции ω . В соответствии с (13) для вещественных функций времени $\xi(t)$ спектральные амплитуды комплексны, причем

$$\xi_{-\omega} = \xi_{\omega}^*.$$

Введем понятие спектральной плотности¹⁾ случайного процесса $G(\omega)$, описывающей распределение средней интенсивности процесса по частотам:

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega. \quad (1.3.14)$$

Сама по себе формула (14) не определяет вид функции $G(\omega)$, для однозначного ее нахождения нужны дополнительные данные (см. далее (18)).

Замечательным свойством стационарных случайных процессов является то обстоятельство, что спектральная плотность $G(\omega)$ оказывается фурье-трансформантой другой фундаментальной статистической характеристики процесса — его корреляционной функции (теорема Винера — Хинчина). Чтобы убедиться в этом, запишем выражение для корреляционной функции $B(\tau)$, пользуясь (13). Имеем

$$B(\tau) = \langle \xi \xi_{\tau} \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle e^{i\omega t + i\omega'(t+\tau)}. \quad (1.3.15)$$

Зависимость от t в (15) для стационарного процесса должна отсутствовать; это возможно лишь при условии, что спектральные амплитуды ξ_{ω} δ -коррелированы, т. е.

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = A(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (1.3.16)$$

Подставляя (16) в (15), нетрудно убедиться, что $A(\omega) \equiv G(\omega)$ (поскольку $B(0) = \langle \xi^2 \rangle$), а для $G(\omega)$ и $B(\tau)$ мы получаем пару преобразований Фурье:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (1.3.17)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.3.18)$$

Преобразования (17) и (18) составляют содержание *теоремы Винера—Хинчина*; эти преобразования называют также *формулами Винера—*

¹⁾ Если величина $|\xi^2|$ имеет энергетический смысл (x представляет собой случайный ток, случайное напряжение или случайную напряженность поля), $G(\omega)$ можно назвать также «спектром мощности» процесса, «энергетическим спектром». Мы будем пользоваться термином «спектральная плотность» или просто «спектр» случайного процесса.

Хинчина. Пользуясь (18) и учитывая четность корреляционной функции $B(\tau)$, нетрудно убедиться, что $G(\omega)$ также является четной функцией:

$$G(-\omega) = G(\omega). \quad (1.3.19)$$

Функция $G(\omega)$ связана с измеряемым экспериментально энергетическим спектром $G^+(\omega)$ (спектром, взятым по положительным частотам) соотношением:

$$G^+(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (1.3.19a)$$

Вследствие четности функций $B(\tau)$ и $G(\omega)$ соотношения (17) и (18) можно переписать в виде

$$B(\tau) = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^{\infty} G^+(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.3.20)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (1.3.21)$$

Формулы вида (17) можно записать, очевидно, и для полной корреляционной функции $\psi(\tau)$. Фурье-преобразование от $\psi(\tau)$ будет содержать при этом как спектр флуктуационной компоненты, так и спектр среднего значения; в соответствии с (8) и (18)

$$G_{\psi}(\omega) = G(\omega) + |\bar{x}|^2 \delta(\omega).$$

Таким образом, в полном спектре $G_{\psi}(\omega)$, в отличие от спектра флуктуаций $G(\omega)$, имеется дискретная линия при $\omega = 0$; так на спектральном языке представляется среднее значение — регулярная постоянная составляющая процесса.

Соотношения (17), (18) (или (20), (21)) будут играть исключительно важную роль во всех последующих разделах этой книги. Здесь же мы ограничимся кратким обсуждением некоторых общих следствий этих соотношений и рассмотрением ряда конкретных примеров наиболее часто встречающихся случайных процессов. Если ширину спектра случайного процесса $G(\omega)$ обозначить через $\Delta\omega$, то в силу общих свойств преобразования Фурье

$$\Delta\omega = \text{const}/\tau_k \quad (1.3.22)$$

Выражение (22) называют соотношением «неопределенностей» или же соотношением взаимности. Величина постоянной в (22) зависит от конкретного определения $\Delta\omega$ и τ_k , а также от формы спектра. Таким образом, время корреляции τ_k , характеризующее временной интервал,

на котором «распадается» статистическая связь¹⁾ между значениями случайного процесса, характеризует «скорость» изменения случайной функции и распределение энергии процесса по спектру (ср. со спектральной теорией регулярных процессов, где соотношение типа (22) связывает характерную длительность процесса и ширину амплитудного спектра). Чтобы уточнить (22), приведем некоторые определения для величин $\Delta\omega$ и τ_k .

Часто пользуются понятием так называемой эффективной шумовой ширины спектра, определяемой как

$$\Delta\omega' = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega / G_{\max} = \sigma^2 / 2G_{\max}, \quad (1.3.23)$$

которая соответствует аппроксимации спектра $G(\omega)$ в области $\omega > 0$ эквивалентным прямоугольником. Возможны и другие оценки ширины спектра, например:

$$\Delta\omega'' = \frac{\left(\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega\right)^2}{\int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega} = \frac{\sigma^4}{4 \int_0^{\infty} G^2(\omega) d\omega}. \quad (1.3.24)$$

Выражения (23) и (24) удобны в том отношении, что $\Delta\omega'$ и $\Delta\omega''$ можно выразить через корреляционную функцию. Если спектр интенсивности случайного процесса расположен в области низких частот и $G_{\max} = G(0)$, то, введя время корреляции

$$\tau_k' = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad (1.3.25)$$

будем иметь

$$\Delta\omega' \tau_k' = 2\pi. \quad (1.3.26)$$

В этом нетрудно убедиться, если использовать (17) и (18). В общем случае произвольного спектра, определяя время корреляции как

$$\tau_k'' = 2 \int_0^{\infty} R^2(\tau) d\tau, \quad (1.3.27)$$

получим также

$$\Delta\omega'' \tau_k'' = 2\pi. \quad (1.3.28)$$

Примеры спектров и корреляционных функций. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся аппроксимации спектров и соответствующие им корреляционные функции (рис. 1.3).

¹⁾ Точнее — корреляционная связь; можно построить (правда, довольно экзотические) примеры, когда значения $x(t)$ и $x(t + \tau)$ некоррелированы, но зависимы (см. [6]).

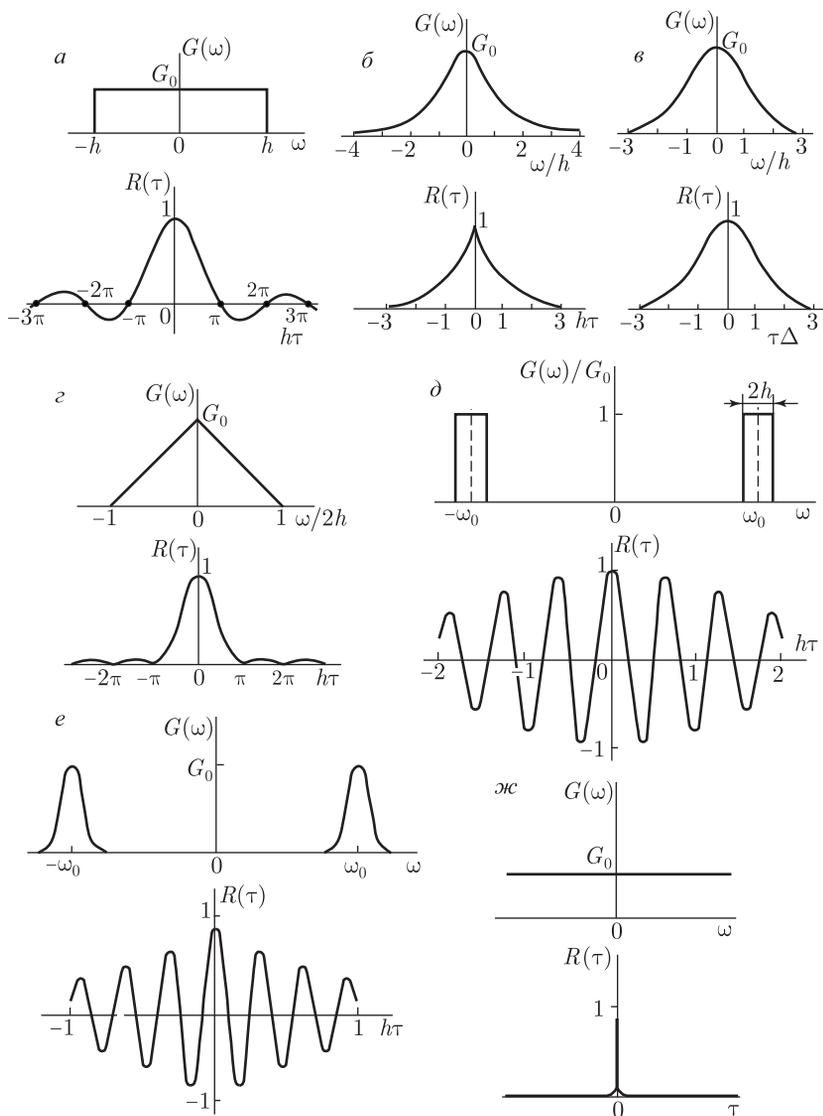


Рис. 1.3. Некоторые часто встречающиеся спектральные плотности $G(\omega)$ и соответствующие им коэффициенты корреляции $R(\tau)$

1) Прямоугольный низкочастотный спектр (рис. 1.3, а):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0, & |\omega| \leq h, \\ 0, & |\omega| > h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 2G_0h, \quad (1.3.29)$$

$$R(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau}. \quad (1.3.30)$$

2) «Лоренцевский» спектр (рис. 1.3, б):

$$G(\omega) = \frac{G_0 h^2}{h^2 + \omega^2}, \quad \sigma^2 = \pi h G_0, \quad R(\tau) = e^{-h|\tau|}. \quad (1.3.31)$$

3) Гауссовский спектр (рис. 1.3, в):

$$G(\omega) = G_0 e^{-\omega^2/2\Delta^2}, \quad \sigma^2 = G_0 \Delta \sqrt{2\pi}, \quad R(\tau) = e^{-\tau^2 \Delta^2/2}. \quad (1.3.32)$$

4) Треугольный спектр (рис. 1.3, г):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0(1 - |\omega|/2h), & |\omega| < 2h, \\ 0, & |\omega| > 2h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 2G_0 h, \quad (1.3.33)$$

$$R(\tau) = \left(\frac{\sin h\tau}{h\tau} \right)^2. \quad (1.3.34)$$

5) «Полосовой» шум с прямоугольным спектром (рис. 1.3, д):

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0, & \omega_0 - h \leq |\omega| \leq \omega_0 + h, \\ 0, & \omega_0 - h > |\omega| > \omega_0 + h, \end{cases} \quad \sigma^2 = 4G_0 h, \quad (1.3.35)$$

$$R(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau} \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.36)$$

6) «Полосовой» шум с гауссовским спектром (рис. 1.3, е):

$$G(0) = \frac{G_0}{1 + \varepsilon} [e^{-(\omega - \omega_0)^2/4h^2} + e^{-(\omega + \omega_0)^2/4h^2}], \quad (1.3.37)$$

$$G_0 = G(\omega_0), \quad \varepsilon = e^{-\omega_0^2/h^2}, \quad \sigma^2 = \frac{4\sqrt{\pi}hG_0}{1 + \varepsilon},$$

$$R(\tau) = e^{-h^2\tau^2} \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.38)$$

7) Гармонический сигнал.

Устремляя в (36) или (38) ширину спектра h к нулю ($h \rightarrow 0$), мы приходим к модели случайного гармонического сигнала с коэффициентом корреляции

$$R(\tau) = \cos \omega_0 \tau. \quad (1.3.39)$$

Такой функции соответствует спектр

$$G(\omega) = G_0 [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)], \quad (1.3.40)$$

а сам процесс описывается гармонической функцией

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.3.41)$$

с постоянной (и неслучайной) амплитудой a и случайно распределенной фазой φ : $w(\varphi) = 1/2\pi$. Следует заметить, что такой процесс является существенно негауссовским.

8) «Белый» шум (гладкий спектр) (рис. 1.3, ж):

$$G(\omega) = G_0 \quad (-\infty < \omega < \infty), \quad (1.3.42)$$

$$B(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau), \quad \sigma^2 = \infty, \quad R(\tau) = 1 \quad (\tau = 0), \quad 0 \quad (\tau \neq 0). \quad (1.3.43)$$

Отметим, что шум с конечной шириной спектра иногда называют цветным шумом; к примерам такого шума относятся спектры 1)–6).

Приведенные примеры соответствуют наиболее часто встречающимся в приложениях случайным процессам. Поскольку примеры проиллюстрированы графически, здесь мы ограничимся лишь кратким комментарием.

1. Гауссовский спектр (рис. 1.3, *в*) обладает следующим свойством: его корреляционная функция тоже оказывается гауссовской кривой.

2. Корреляционная функция «полосового» шума, спектр которого группируется вблизи некоторой частоты ω_0 (рис. 1.3, *д*, *е*), осциллирует со средней частотой случайного процесса ω_0 .

Это свойство «полосового» шума не является следствием конкретного выбора формы спектра. Нетрудно убедиться, что и в общем случае произвольного полосового спектра (не обязательно симметричного относительно «средней» частоты ω_0)

$$R(\tau) = r(\tau) \cos \omega_0 \tau + s(\tau) \sin \omega_0 \tau. \quad (1.3.44)$$

Действительно, полагая

$$G(\omega) = g(\omega - \omega_0),$$

можно записать для коэффициента корреляции

$$R(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} g(\omega - \omega_0) \cos \omega \tau \, d\omega = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \cos(\nu + \omega_0)\tau \, d\nu. \quad (1.3.45)$$

Из (45) непосредственно следует (44), где

$$r(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \cos \nu \tau \, d\nu, \quad s(\tau) = \frac{2}{\sigma^2} \int_{-\omega_0}^{\infty} g(\nu) \sin \nu \tau \, d\nu. \quad (1.3.46)$$

Из (46) (как и из (36), (38)) видно, что, если относительная полоса спектра шума мала ($h/\omega_0 \ll 1$ — узкополосный процесс), функции $r(\tau)$ и $s(\tau)$ в (44) медленно изменяются по сравнению с $\cos \omega_0 \tau$ и $\sin \omega_0 \tau$. Общая формула (44) согласуется с (36), (38) для $g(\nu) = g(-\nu)$, $s(\tau) = 0$.

3. Процесс с $G(\omega) = G_0 = \text{const}$ (рис. 1.3, *ж*) принято называть «белым» шумом. Хотя это название логически противоречиво («белый» свет, как известно, не обладает равномерным спектром), а сам такой процесс физически нереализуем, поскольку для него

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \, d\omega \rightarrow \infty, \quad (1.3.47)$$

мы довольно широко будем пользоваться этой весьма удобной математической моделью (разумеется, надо помнить о (47)!).

4. Выбирая ту или иную аппроксимацию для $B(\tau)$, нужно помнить, что ее фурье-образ (т. е. спектр $G(\omega)$) не должен принимать отрицательных значений. Поэтому нельзя, например, представить $B(\tau)$ в виде прямоугольника

$$B(\tau) = \begin{cases} B_0, & |\tau| < \tau_0, \\ 0, & |\tau| > \tau_0. \end{cases}$$

Функции типа $\exp \sum_{n=1}^N \alpha_n \tau^n$, например $e^{-\alpha \tau^4}$, также непригодны для аппроксимаций $B(\tau)$, за исключением гауссовской кривой $B(\tau) = e^{-\alpha \tau^2}$ (см. обсуждение формулы (1.1.45)).

Для комплексного случайного процесса вида (1.1.3)

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad (1.3.48)$$

в отличие от действительного процесса, можно составить две парные корреляционные функции $\langle zz_\tau \rangle$ и $\langle zz_\tau^* \rangle$. Для радиофизики и оптики особое значение имеют функции

$$\psi(t, \tau) = \langle zz_\tau^* \rangle, \quad B(t, \tau) = \langle zz_\tau^* \rangle - \bar{z} z_\tau^*, \quad (1.3.49)$$

приводящие к вещественным среднеквадратурным значениям при $\tau = 0$.

Корреляционная функция комплексного процесса в общем случае оказывается комплексной:

$$B(t, \tau) = |B(t, \tau)| \exp i\varphi(t, \tau). \quad (1.3.50)$$

Для комплексной корреляционной функции могут быть получены соотношения типа Винера — Хинчина, определяющие комплексную спектральную плотность, действительная и мнимая части которой являются преобразованием Фурье от действительной и мнимой частей корреляционной функции.

Комплексный случайный процесс, наиболее часто используемый в радиофизике и оптике, — это комплексная амплитуда квазигармонических колебаний или волн. Для стационарного колебания в этом случае x и y в (48) некоррелированы, комплексная корреляционная функция $\langle zz_\tau \rangle = 0$, а функция $\langle zz_\tau^* \rangle$ выражается через спектр $G^+(\omega)$ самого колебания (см. (2.3.19)–(2.3.21)).

§ 4. Статистическое усреднение и усреднение по времени

Эргодичность. Рассмотрим результат усреднения по интервалу T некоторой функции времени $f(t)$. Если до усреднения

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (1.4.1)$$

то усредненную функцию можно записать как

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} e^{i\omega T/2} e^{i\omega t} d\omega. \quad (1.4.2)$$

Из (2) следует, что при усреднении сильнее подавляется высокочастотная часть спектра, связанная с относительно быстрыми изменениями функции f . Иначе говоря, усреднение по времени сглаживает $f(t)$.

Предположим теперь, что по времени усредняется стационарная случайная функция $x(t)$. Используя (1.1.11), процесс $x(t)$ на «входе» усредняющего устройства, называемого также интегратором, представим в виде суммы трех компонент:

$$x(t) = \bar{x} + \xi_0 + \xi(t). \quad (1.4.3)$$

Усреднение по времени может влиять, очевидно, только на величину переменной компоненты $\xi(t)$, так что на «выходе» интегратора процесс (2) преобразуется в процесс

$$x_T(t) = \bar{x} + \xi_0 + \xi_T(x). \quad (1.4.4)$$

Из (4) следует, что при выполнении двух условий

$$(a) \quad \xi_0 = 0, \quad (б) \quad \langle \xi_T^2 \rangle \rightarrow 0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad (1.4.5)$$

получим

$$x_T(t) \approx \bar{x}, \quad (1.4.6)$$

т. е. при достаточно большом времени усреднения T среднее по времени со сколь угодно большой точностью может совпадать со средним статистическим.

Процессы, для которых выполняется условие (6), называют *эргодическими*. Таким образом, эргодический процесс при временном усреднении теряет случайный характер и стремится к некоторой постоянной величине, равной его среднему статистическому значению. Это обстоятельство, разумеется, значительно упрощает измерение статистических средних: вместо громоздкого массового опыта, состоящего в усреднении по большому количеству реализаций случайного процесса, в случае его эргодичности оказывается достаточным усреднение одной (но достаточно длинной) реализации.

Можно сказать, что в случае эргодического процесса ценность отдельной реализации резко возрастает, так как путем ее усреднения по времени можно находить всевозможные статистические характеристики случайного процесса, не обращаясь к усреднению по ансамблю.

Рассмотренный процесс обладает свойством эргодичности относительно среднего значения. В самом общем случае эргодичностью должны обладать все моменты и функции распределения. Таким образом мы приходим к следующему определению эргодичности. Стационарный случайный процесс будет эргодическим, если любая его статистическая характеристика, полученная усреднением по ансамблю реализаций, может быть сколь угодно близка соответствующему временному среднему, полученному по одной реализации за достаточно большой промежуток времени.

Закон, по которому в (5) происходит уменьшение дисперсии $\langle \xi_T^2 \rangle$ с ростом T , зависит от вида спектра $G_\xi(\omega)$ или корреляционной функции $B(\tau) = \sigma_\xi^2 R_\xi(t)$ флуктуаций $\xi(t)$ в (3). Положив в (2) $f(t) = \xi(t)$, возведя в квадрат и статистически усреднив, получим

$$\langle \xi_T^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega) \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2 d\omega = \frac{2\sigma_\xi^2}{T^2} L_\xi(T); \quad (1.4.7)$$

здесь введена функция

$$L_\xi(t) = \int_0^t (t - \tau) R_\xi(\tau) d\tau, \quad (1.4.8)$$

с которой мы будем встречаться при решении многих задач, рассматриваемых в этой книге. Непосредственно функция $L(t)$ описывает дисперсию так называемого диффузионного случайного процесса (см. гл. 2).

Как следует из (8),

$$L_\xi(T) = \begin{cases} \frac{1}{2} T^2 & (\text{при } T \ll \tau_\xi), \\ T\tau_\xi - t_\xi^2 \approx T\tau_\xi & (\text{при } T \gg \tau_\xi), \end{cases} \quad (1.4.9)$$

где τ_ξ — время корреляции флуктуаций $\xi(t)$, которое здесь удобно определить соотношением типа (1.3.25)

$$\tau_\xi = \int_0^{\infty} R_\xi(\tau) d\tau, \quad (1.4.9a)$$

и

$$t_\xi^2 = \int_0^{\infty} \tau R_\xi(\tau) d\tau \approx \tau_\xi^2. \quad (1.4.9b)$$

Подставив (9) в (7), получим:

$$\langle \xi_T^2 \rangle = \begin{cases} \sigma_\xi^2 & (T \ll \tau_\xi), \\ \frac{2\sigma_\xi^2 \tau}{T} = \frac{2\pi G_\xi(0)}{T} \sim \frac{1}{T} & (T \gg \tau_\xi). \end{cases} \quad (1.4.10)$$

Из (10) следует, что необходимое для эргодичности процесса $\xi(t)$ уменьшение дисперсии $\langle \xi_T^2 \rangle$ наступает лишь при достаточно больших T , когда

$$T \gg \tau_\xi. \quad (1.4.10a)$$

Если $G_\xi(0) = 0$, то уменьшение $\langle \xi_T^2 \rangle$ будет происходить еще быстрее, чем в (10). Полагая, например,

$$G_\xi(\omega) = \frac{G_0 \omega^2}{\omega^2 + h^2},$$

найдем

$$\langle \xi_T^2 \rangle = \frac{2\pi G_0}{hT^2} (1 - e^{-hT}) \sim \frac{1}{T^2}. \quad (1.4.10б)$$

Наименее благоприятным для усреднения является случай, когда в области малых ω спектральная плотность флуктуации неограниченно возрастает, т. е. $G(0) \rightarrow \infty$. Полагая, например,

$$G(\omega) = \begin{cases} G_0 |\omega_0/\omega|^\mu, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0, \end{cases} \quad 0 < \mu < 1$$

(спектр фликкер-шума — см. [16]), получим

$$\langle \xi_T^2 \rangle \sim \frac{1}{T^{1-\mu}}.$$

Усреднение по времени вообще неэффективно и $\langle \xi_T^2 \rangle$ не зависит от T , если вся мощность флуктуации сосредоточена в точке $\omega = 0$, т. е. если

$$G_\xi(\omega) = C\delta(\omega). \quad (1.4.10в)$$

Подстановка (10в) в формулу (7) дает

$$\langle \xi_T^2 \rangle = C = \text{const.}$$

Спектр вида (10в) как раз соответствует наличию в выражении (3) компоненты $\xi_0 \neq 0$ с дисперсией $\langle \xi_0^2 \rangle = C$.

Заметим, что случайный процесс может быть эргодическим, но нестационарным, например:

$$x(t) = \bar{x} + a \cos \Omega t, \quad (1.4.10г)$$

где a — случайная постоянная ($\bar{a} = 0$). В нестационарности легко убедиться, найдя дисперсию этого процесса

$$\langle (x - \bar{x})^2 \rangle = \langle a^2 \rangle \cos^2 \Omega t,$$

которая оказывается зависящей от времени. Тем не менее соотношение (8) для процесса (10а) выполняется, и, усредняя, мы получим в пределе

$$\tilde{x} = \bar{x}.$$

Это свойство эргодичности может оказаться, однако, потерянным для функции процесса (10г). Взяв, например, $y = x^2$, получим

$$y = \bar{x}^2 + 2\bar{x}a \cos \Omega t + a^2 \cos^2 \Omega t,$$

$$\tilde{y} \rightarrow \bar{x}^2 + a^2/2, \quad \bar{y} = \bar{x}^2 + \overline{a^2 \cos^2 \Omega t} \neq \tilde{y}.$$

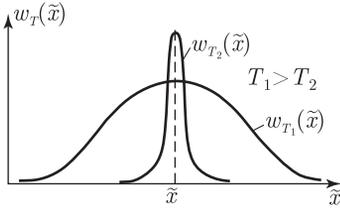


Рис. 1.4. Сходящность по вероятности

Распределение $w_T(\tilde{x})$ для случайного процесса $\tilde{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ при различных временах T ($T_1 < T_2$) усреднения

$w(\tilde{x}_T) \rightarrow \delta(x_T - \bar{x})$. Заметим, что, независимо от вида $w(x)$, распределение $w(\tilde{x}_T)$ при достаточно больших T становится гауссовским.

Точность определения средних при временном усреднении. Фундаментальная ошибка измерений, оценка необходимого времени усреднения. В реальных условиях время усреднения T конечно, что приводит к фундаментальной ошибке измерений. Поэтому представляет интерес оценить, каким должен быть интервал T , чтобы соотношение (6) выполнялось с достаточной точностью. Решая эту задачу, учтем, что случайным процессам x и x_T на входе и выходе интегратора соответствуют так называемые отношения сигнал/шум, равные

$$(c/\text{ш})_{\text{вх}} = \frac{\bar{x}^2}{\langle \xi^2 \rangle}, \quad (c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{\bar{x}^2}{\langle \xi_T^2 \rangle}, \quad (1.4.12)$$

и введем параметр

$$\mu = \frac{(c/\text{ш})_{\text{вх}}}{(c/\text{ш})_{\text{вых}}} = \frac{\langle \xi_T^2 \rangle}{\langle \xi^2 \rangle} \leq 1, \quad (1.4.13)$$

который характеризует ослабление шума при его прохождении через интегратор. Если теперь подставить (7) в выражение для $(c/\text{ш})_{\text{вых}}$ в (12), то получим искомое точное уравнение

$$\frac{L_\xi(T)}{T^2} = \frac{1}{2} \mu, \quad (1.4.14)$$

определяющее время усреднения T при заданном значении параметра μ .

Более точно соотношение (6) записывается как

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x} = \frac{\bar{x}}{P}, \quad (1.4.11)$$

где символ P означает, что имеет место сходящность \tilde{x}_T к \bar{x} по вероятности. Смысл этого термина иллюстрируется на рис. 1.4. Временное среднее, взятое за конечное время усреднения, — величина случайная и характеризуется одномерным законом распределения $w_T(\tilde{x}_T)$. Однако вид этого закона, очевидно, зависит от величины времени усреднения T . При $T \rightarrow \infty$ вероятность сколько-нибудь заметных отклонений \tilde{x}_T от \bar{x} стремится к нулю

Уравнение (14) решается точно, если, например,

$$R_{\xi}(\tau) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\tau}{\tau_{\xi}}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (1.4.14a)$$

чему соответствует, как нетрудно убедиться, используя (8), функция

$$L_{\xi}(T) = \tau_{\xi}^2(\sqrt{1+x^2}-1), \quad x = \frac{T}{\tau_{\xi}}. \quad (1.4.15)$$

Подстановка (15) в (14) дает

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}\mu, \quad (1.4.15a)$$

откуда следует, что в рассматриваемом случае время T определяется формулой:

$$T = \tau_{\xi} \frac{2}{\mu} \sqrt{1-\mu}. \quad (1.4.16)$$

Обычно ослабление шума в интеграторе бывает значительным, т. е. согласно (13)

$$\mu \ll 1. \quad (1.4.16a)$$

Выражение (16) в этом случае несколько упрощается и принимает вид

$$T \approx \tau_{\xi} \frac{2}{\mu} \gg \tau_{\xi}. \quad (1.4.16b)$$

Рассмотрим еще случай экспоненциальной корреляции, когда

$$R_{\xi}(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_{\xi}} \quad (1.4.16v)$$

и

$$L_{\xi}(T) = \tau_{\xi}^2(e^{-x} - 1 + x), \quad x = T/\tau_{\xi}.$$

Вместо (15a) мы теперь получим трансцендентное уравнение

$$\frac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} = \frac{1}{2}\mu, \quad (1.4.16г)$$

которое, однако, в случае (16a) упрощается и опять принимает вид (16б). Аналогичные результаты получаются и для других моделей корреляции. Мы приходим, таким образом, к выводу, что при выполнении условия (16a) длительность времени усреднения T определяется выражением (16б), независимо от вида коррелятора $\langle \xi \xi_{\tau} \rangle = \sigma_{\xi}^2 R_{\xi}(\tau)$. Отметим также, что неравенство

$$T \gg \tau_{\xi} \quad (1.4.16д)$$

само по себе еще не обеспечивает возможности использования принципа эргодичности, поскольку отношение T/τ_{ξ} должно быть не вообще большим, но **достаточно** большим — в соответствии со смыслом параметра μ в (13) и (16б).

О методах измерения статистических характеристик стационарных случайных процессов. Возможность извлечения статистических характеристик стационарного случайного процесса из одной его реализации представляет большой интерес для экспериментальной радиофизики и оптики. Ниже мы обсудим кратко базирующиеся на этом свойстве методы измерения моментов, корреляционных функций и законов распределения. В перечисленных задачах использование операции временного усреднения дает существенные преимущества.

Так, например, корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t)$ при помощи временного усреднения можно найти следующим образом:

$$B_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta(t)\eta(t_\tau) dt. \quad (1.4.17)$$

Анализ корреляционной функции (17) аналогичен рассмотрению измерения среднего для случайного процесса $\xi(t) = \eta(t)\eta(t + \tau)$. Однако теперь дисперсия процесса $\xi(t)$ зависит от момента четвертого порядка процесса $\eta(t)$.

Измерение средних. На рис. 1.5 показана простая схема измерения среднего значения стационарного электрического шума $x(t)$. После

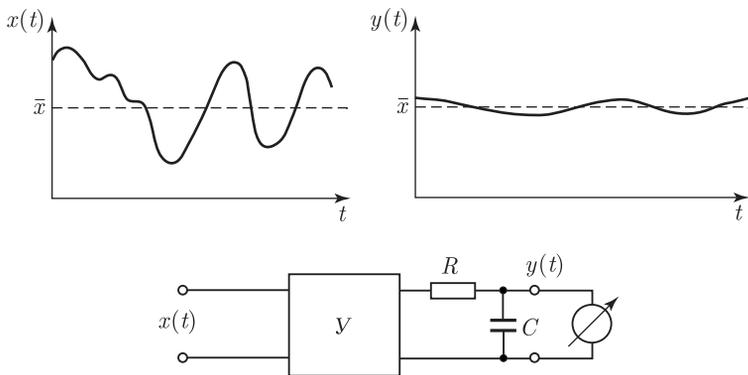


Рис. 1.5. Схема измерения среднего значения стационарного электрического шума, использующая операцию временного усреднения

усилителя Y , воспроизводящего $x(t)$ без искажений, стоит простейший интегратор в виде RC -фильтра ($T_0 = RC$) и прибор, измеряющий напряжение ¹⁾. Показания прибора

¹⁾ Можно показать, что эффективное время усреднения интегратора с фильтром равно $2T_0$ (см. § 2 гл. 5).

$$y(t) = \frac{k}{T_0} \int_0^t e^{-\theta/T_0} x(t - \theta) d\theta.$$

При выполнении (16) и (16д) величина $y \approx k\bar{x}$. Таким образом, измерения средних осуществляются с помощью простого вольтметра постоянного тока. Аналогичная схема может быть использована и для измерения \bar{x}^2 и т. п.: в этом случае между усилителем и интегратором ставится соответствующий детектор; если детектор безынерционен, то оценки точности измерений можно провести по формулам (12)–(16).

Измерение корреляционных функций. На рис. 1.6 показана схема измерения корреляционной функции $B(\tau)$ случайного процесса $\eta(t)$.

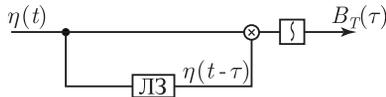


Рис. 1.6. Схема измерения корреляционной функции стационарного электрического шума:

ЛЗ — линия задержки, \otimes — перемножитель, \int — интегратор

Исходный сигнал разделяют на два, которые затем проходят через разные каналы, задерживаясь относительно друг друга на время τ . Задержанные сигналы перемножаются, а результат перемножения реализаций поступает на интегратор, где усредняется по времени. На рассмотренном принципе основано измерение корреляционных функций в разных областях физики.

Измерение вероятностей. Одномерные и многомерные распределения стационарных процессов могут быть определены также по одной реализации, путем операции усреднения по времени. В этом случае вероятность некоторого состояния определяется по относительному времени пребывания процесса в заданном состоянии. Такое определение вероятности представляется вполне естественным; для стационарного процесса оно может быть строго обосновано с помощью доказанной выше эргодической теоремы.

Пусть для стационарного случайного процесса нас интересует вероятность $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ события, заключающегося в том, что реализация $x(t)$ проходит в интервале $[x_1, x_2]$. Тогда указанную вероятность можно определить по относительному времени пребывания реализации в указанном интервале с помощью соотношения

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T_{x_1, x_2}}{T}, \quad (1.4.18)$$

где $T_{x_1, x_2} = \sum \Delta t_i$, а Δt_i — времена пребывания (рис. 1.7). Соотношение (18) непосредственно следует из (11). Действительно, если $\eta(x)$ является некоторой функцией рассматриваемой случайной величины x ,

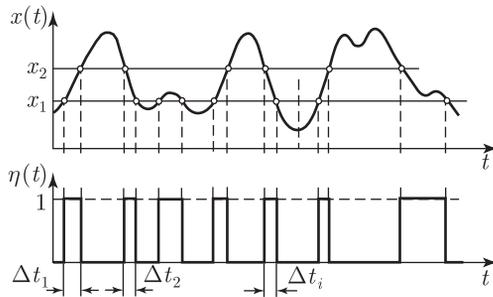


Рис. 1.7. Реализация стационарного случайного процесса $x(t)$ и построенная на ее основе реализация импульсного процесса $\eta(t)$

Площадь под кривой $\eta(t)$ равна времени пребывания процесса x в интервале $x_1 \leq x \leq x_2$

то η также представляет собой стационарный случайный процесс. В силу эргодичности $\eta(t)$

$$\bar{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)w(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta[x(t)] dt \equiv \tilde{\eta}. \quad (1.4.19)$$

Рассмотрим стационарный процесс $\eta(t)$ специального вида:

$$\eta(t) = F[x(t)] = \begin{cases} 1, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x \text{ вне интервала } [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Для такого процесса (см. рис. 1.7)

$$\bar{\eta} = P(x_1 \leq x \leq x_2), \quad \tilde{\eta} = T_{x_1, x_2}/T. \quad (1.4.20)$$

Таким образом, соотношение (18) доказано.

Для оценки точности, с которой выполняется равенство $P = T_{x_1, x_2}/T$, можно использовать соотношения (12)–(16). Для электрических шумов измерение относительных времен пребывания нетрудно выполнить с помощью электронного осциллографа. Необходимое время усреднения T может быть получено либо за счет инерционности люминофора трубки (в этом случае хорошее представление о распределении вероятности дает просто распределение яркости свечения по экрану), либо за счет выбора экспозиции при фотографировании с экрана трубки.

На рис. 1.8 приведены фотографии с экрана электроннолучевой трубки одномерных случайных разверток, полученных в условиях, когда исследуемый случайный процесс подается на вертикальные пластины осциллографа.

Фотография рис. 1.8, *a* соответствует случайному процессу $x(t) = \cos \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — случайная фаза. Если $w(\varphi) = 1/2\pi$, согласно формулам (1.2.10), (1.2.11)

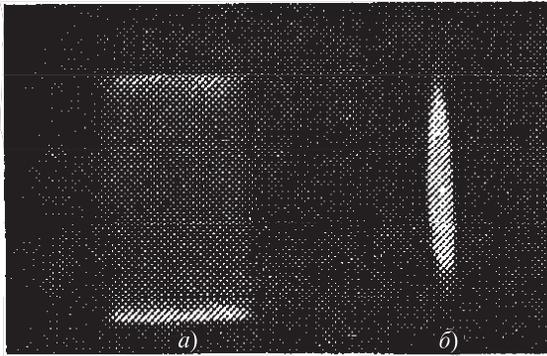


Рис. 1.8. Фотографии одномерных случайных разверток на экране электронного осциллографа [9]:

а) процесс $x(t) = \cos \varphi(t)$ ($w(\varphi) = 1/2\pi$); б) гауссовский случайный процесс.

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < -1, \end{cases} \quad (1.4.21)$$

— распределение яркости на фотографии соответствует (21). На рис. 1.8, б приведена случайная развертка для гауссовского процесса.

Для экспериментального определения двумерных распределений стационарных процессов с помощью электронного осциллографа следует получить двумерную случайную развертку; кривые равной яркости на экране осциллографа соответствуют, очевидно, условию

$$w(x, x_\tau, \tau) = \text{const} \quad (1.4.22)$$

(рис. 1.9).

На рис. 1.10 приведены фотографии, полученные описанным методом для стационарного гауссовского случайного процесса. При изменении времени задержки τ между напряжениями, поступающими на горизонтальные и вертикальные пластины, может быть определен, очевидно, набор двумерных распределений $w(x, x_\tau, \tau)$. В соответствии с (1.2.43), (1.2.44)

$$w(x, x_\tau, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2}{2\sigma^2[1-R^2(\tau)]} \right\}, \quad (1.4.23)$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции (см. (1.3.2)).

Пользуясь (23), нетрудно найти формы кривых равной яркости на экране электроннолучевой трубки. Они описываются уравнением

$$x^2 - 2R(\tau)xx_\tau + x_\tau^2 = \text{const}. \quad (1.4.24)$$

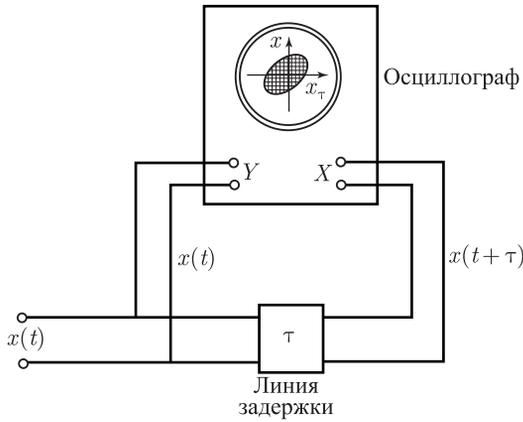


Рис. 1.9. Схема измерения двумерного распределения стационарного случайного процесса $w(x, x_\tau, \tau)$ с помощью электронного осциллографа

(X и Y — входы вертикальной и горизонтальной разверток)

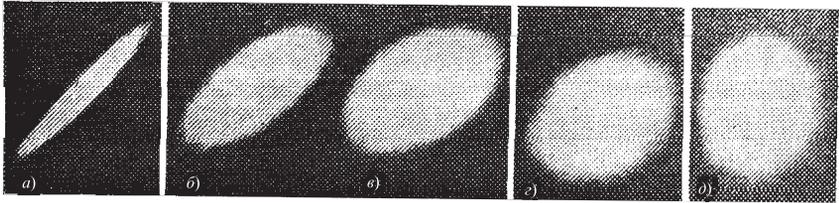


Рис. 1.10. Изображение двумерного закона распределения стационарного гауссовского процесса, измеренного с помощью схемы, приведенной на рис. 1.9

Различные фотографии соответствуют разным τ . Величина задержки увеличивается от (a) к (e); для (e) $\tau \gg \tau_k$

При $\tau \ll \tau_k$ $R(\tau) \approx 1$ и мы имеем уравнение прямой:

$$(x - x_\tau)^2 = \text{const.}$$

Напротив, при $\tau \gg \tau_k$ $R(\tau) = 0$ и (24) сводится к уравнению окружности:

$$x^2 + x_\tau^2 = \text{const.}$$

Для промежуточных значений τ (24) является уравнением эллипса. Все эти случаи хорошо иллюстрируются осциллограммами¹⁾ на рис. 1.10; для гауссовского процесса описываемая схема может быть использована, таким образом, для быстрых оценок времени корреляции.

¹⁾ Они заимствованы из [9].

Пользуясь операцией временного усреднения, можно определить и корреляционную функцию $B(\tau)$ стационарного процесса $x(t)$. Вместо статистического усреднения

$$B(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} x x_{\tau} w(x, x_{\tau}, \tau) dx dx_{\tau}, \quad (1.4.25)$$

в рассматриваемом случае можно написать

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t)x(t+\tau) dt, \quad (1.4.26)$$

и это означает, что для экспериментального определения $B(\tau)$ надо располагать линией задержки, множителем и интегратором (см. рис. 1.6).

Перечисленные методы измерения и анализа стационарных случайных процессов принято называть аналоговыми методами. Эти методы нашли достаточно широкое распространение. Вместе с тем широкие возможности цифровых ЭВМ делают во многих случаях более предпочтительной цифровую обработку реализаций случайных процессов. Для подробного ознакомления с техникой измерения и анализа случайных процессов мы отсылаем читателя к книгам [10, 17].

§ 5. Томографическое определение двумерной функции распределения

Одна из главных задач томографии состоит в получении изображения двумерной функции распределения некоторой физической величины по ее проекционным характеристикам, т. е. суммарным значениям (интегралам), вдоль конечного числа направлений [11, 12]. Эти проекции могут быть получены трансмиссионным или эмиссионным методом с использованием различных источников излучения (акустических, оптических, рентгеновских и т. п.). Удобства применения томографических методов связаны с возможностями бесконтактного и дистанционного определения разнообразных физических характеристик объекта: показателей преломления и поглощения среды, плотности распределения частиц и т. д.

Основные соотношения для томографии в вероятностном описании следуют из связи характеристической функции с функцией распределения плотности вероятности. В настоящем разделе мы рассмотрим принцип томографического измерения безотносительно к физическому содержанию распределения.

Обратимся к двумерной функции распределения $w(x, y)$, где случайные величины x, y принимают значения на интервалах

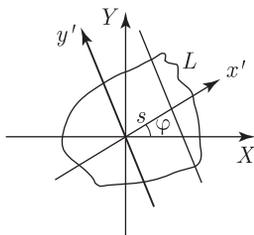


Рис. 1.11. К определению преобразования Радона

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. В прямоугольной системе координат $\{x, y\}$ рассмотрим прямую L , которая задается уравнением (рис. 1.11)

$$s = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad (1.5.1)$$

где s — расстояние от начала координат до прямой, φ — угол между осью и перпендикуляром, опущенным из начала координат на эту прямую. Предположим, что производится интегральное измерение вероятности вдоль рассматриваемого направления L . Обозначим результат измерения через $R(s, \varphi)$:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) \delta(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy, \quad (1.5.2)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция. Преобразование (2) называют преобразованием Радона [13]. Согласно (2) все значения, лежащие вдоль прямой, проецируются в точку с координатами s, φ . Нас же при измерении будет интересовать двумерная функция распределения $w(x, y)$. В связи с этим задача сводится к нахождению последней по функции $R(s, \varphi)$.

Покажем сначала, что функция Радона имеет смысл одномерной функции распределения. С этой целью обратимся к характеристической функции

$$\theta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ius(x, y)} w(x, y) dx dy. \quad (1.5.3)$$

Здесь $s(x, y)$ — пока неопределенная функция. Преобразование Фурье от характеристической функции (3)

$$w(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(u) e^{-ius} du$$

можно представить в виде

$$w(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) \delta(s - s(x, y)) dx dy. \quad (1.5.4)$$

Функция $w(s)$ неотрицательна, поскольку представляет собой интеграл от произведения двух неотрицательных функций. Учитывая свойство дельта-функции, нетрудно показать, что $w(s)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) dx dy = 1.$$

Таким образом, функция $w(s)$ обладает свойствами функции распределения плотности вероятностей: она является фурье-образом характеристической функции и нормирована на единицу.

Если функция $s(x, y)$ определяется уравнением (1), то имеем

$$w(s) = R(s, \varphi) = \iint w(x, y) \delta(s - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy. \quad (1.5.5)$$

Из (5) следует, что в данном случае результат фурье-преобразования характеристической функции дает просто функцию Радона. Двукратный интеграл (5) нетрудно преобразовать к однократному с помощью перехода к новой системе координат (новым переменным, см. рис. 1.11)

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi; \\ x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, & y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Замена (6) приводит выражение (5) к следующему виду:

$$R(s, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, s \sin \varphi + y' \cos \varphi) dy'. \quad (1.5.7)$$

Легко проверить, что функция (5) обладает свойством

$$R(-s, \varphi + \pi) = R(s, \varphi). \quad (1.5.8)$$

Физический смысл свойства (8) заключается в том, что пара величин (s, φ) и $(-s, \varphi + \pi)$ в соответствии с (1) определяют одну и ту же прямую линию.

Приведем пример радоновского образа (7) для двумерной функции распределения (1.4.23):

$$w(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 - 2Rxy}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}.$$

Здесь обозначено $y = x_\tau$ и $R = R(\tau)$ — коэффициент корреляции.

Расчет $R(s, \varphi)$ приводит к выражению

$$R(s, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+R\sin 2\varphi)}\sigma} \exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma^2(1+R\sin 2\varphi)}\right\}. \quad (1.5.9)$$

Полученная функция Радона также оказывается гауссовской, ширина которой зависит как от коэффициента корреляции R , так и от угла наблюдения φ . Ширина функции Радона с ростом R , в отличие от функции распределения $w(x, y)$, растет.

Обратимся теперь к Фурье-образу радоновской функции

$$\widehat{R}(q, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(s, \varphi) e^{-i2\pi qs} ds.$$

Принимая во внимание соотношение (7), имеем

$$\widehat{R}(q, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(s \cos \varphi - y' \sin \varphi, \sin \varphi + y' \cos \varphi) e^{-i2\pi qs} ds.$$

Это выражение с помощью замены переменных

$$\begin{aligned} x &= s \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= s \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned}$$

преобразуются к виду

$$\widehat{R}(q, \varphi) = \iint w(x, y) \exp\{-i2\pi q(x \cos \varphi + y \sin \varphi)\} dx dy. \quad (1.5.10)$$

Правая часть выражения (10) является фурье-образом двумерной функции распределения $w(x, y)$:

$$\widehat{w}(q_1, q_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x, y) e^{-i2\pi(q_1 x + q_2 y)} dx dy. \quad (1.5.11)$$

Поэтому равенство (10) можно записать так

$$\widehat{R}(q, \varphi) = \widehat{w}(q \cos \varphi, q \sin \varphi). \quad (1.5.12)$$

Соотношение (12) дает связь преобразования Фурье радоновского образа двумерной функции распределения с фурье-преобразованием самой двумерной функции распределения.

Фурье-преобразование обратное преобразованию (11) в полярных координатах $\{p, \varphi\}$ ($q_1 = p \cos \varphi$, $q_2 = p \sin \varphi$) принимает вид

$$w(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \widehat{w}(p \cos \varphi, p \sin \varphi) e^{i2\pi p(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} p dp. \quad (1.5.13)$$

Подставив в (13) выражение (12), получим

$$w(x, y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} p \widehat{R}(p, \varphi) e^{i2\pi p(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dp. \quad (1.5.14)$$

Если воспользоваться свойством (8), то после преобразований выражение можно привести к виду

$$w(x, y) = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} |q| \widehat{R}(q, \varphi) e^{i2\pi q(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dq. \quad (1.5.15)$$

Полученное выражение позволяет восстановить распределение $w(x, y)$ по фурье-преобразованию $\widehat{R}(q, \varphi)$ ее радоновского образа, и, следовательно, для нахождения двумерного распределения по радоновскому образу сначала необходимо найти его фурье-образ.

Формулу обращения (15) можно представить в ином виде. Введем функцию

$$Q(z) = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} |q| e^{i2\pi qz} dq, \quad (1.5.16)$$

причем $Q(-z) = Q(z)$ и

$$\pi(|q|) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(z) e^{-i2\pi qz} dz. \quad (1.5.17)$$

При подстановке (17) в выражение (15) последнее можно преобразовать к виду

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{R}(s, \varphi) Q(x \cos \varphi + y \sin \varphi - s) ds. \quad (1.5.18)$$

В полученной формуле обращения фигурирует радоновский образ и вспомогательная функция $Q(z)$. Отметим, что в работе [14] решение обратной задачи томографии разрабатывается на основе преобразования Хартли.

С различными типами томографии и их применением читатель может познакомиться более подробно обратившись, например, к книгам [10, 11].

§ 6. Выбросы случайных процессов

Рассмотрим так называемые выбросы случайного процесса $x(t)$, т. е. превышение этим процессом некоторого уровня C (рис. 1.12, а). Математически выбросы определяются выражением

$$x_+(t) = (x(t) - C)I(x(t) - C), \quad (1.6.1)$$

где $I(x)$ — функция, описывающая единичную ступеньку:

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (1.6.2)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dx} I(x) = \delta(x), \quad \frac{d}{dt} I(x) = \delta(x)\dot{x}. \quad (1.6.3)$$

Преобразование $x \rightarrow x_+$ может осуществляться в нелинейном устройстве типа детектора, характеристики которого показаны на рис. 1.13, а. Нелинейное преобразование $x(t) \rightarrow I(x(t) - C)$ реализует идеальный ограничитель (рис. 1.13, б).

Как функция времени процесс $I(x(t) - C)$ представляет собой случайную последовательность прямоугольных импульсов единичной

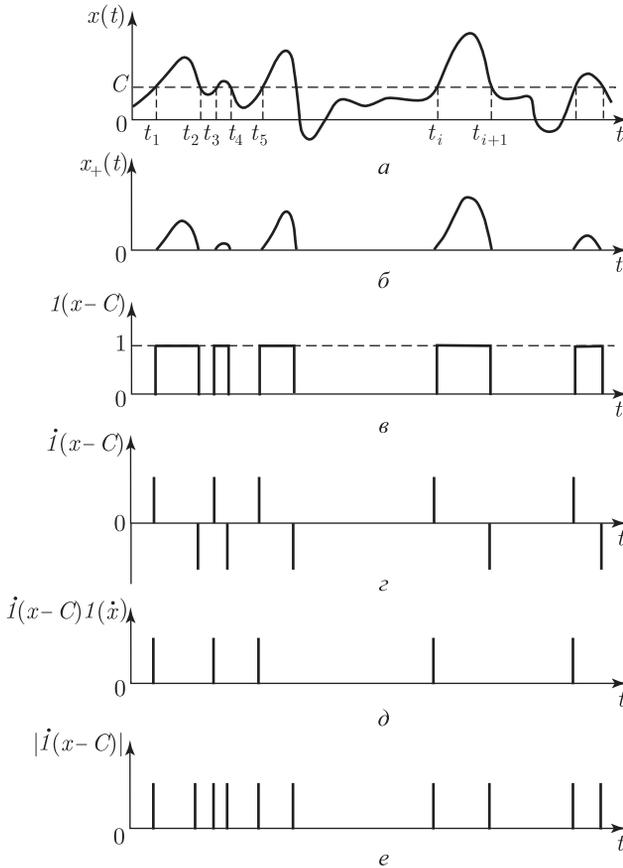


Рис. 1.12. Выбросы случайного процесса $x(t)$ над уровнем C :

a) реализация процесса $x(t)$, пересекающая уровень C ; *б*) участки реализации $x(t)$, лежащие выше уровня C ; *в*) прямоугольные импульсы той же длительности, что и выбросы; *г*) импульсы, отмечающие переход через уровень C с положительной или отрицательной производной; *д*) импульсы, соответствующие переходу через уровень C с положительной производной; *е*) импульсы, соответствующие пересечению уровня C с производной любого знака

амплитуды (рис. 1.12, *в*). Они синхронны с переходами функции x через уровень C , т.е. имеют ту же длительность, что и импульсы неправильной формы на рис. 1.12, *б*, из которых состоит процесс $x_+(t)$.

Напишем выражения для некоторых характеристик выбросов на интервале времени $(0, T)$.

Длительность выбросов. Под длительностью i -го выброса понимается величина интервала $\Delta\theta_i = t_{i+1} - t_i$ между последовательными пересечениями кривой $x(t)$ уровня C с положительной и отрицательной

производной. Суммарная длительность всех выбросов на интервале $(0, T)$, равная $\theta = \sum_i \Delta\theta_i$, совпадает с временем пребывания процесса $x(t)$ в области $x > C$. Ту же суммарную длительность θ имеют, очевидно, и импульсы $I(x - C)$ (рис. 1.12, в), причем она равна просто их площади, поскольку эти импульсы неотрицательны и имеют единичные амплитуды. Таким образом, длительность выбросов определяется выражением

$$\theta = \int_0^T I(x - C) dt. \quad (1.6.4)$$

Число выбросов. Дифференцирование по времени функции $I(x - C)$ дает ряд δ -импульсов, положительных при $\dot{x} > 0$ и отрицательных при $\dot{x} < 0$ (рис. 1.12, з). Введя фактор $I(\dot{x})$, отсекающий отрицательные δ -импульсы, получим функцию $I(x - C)I(\dot{x})$, которая представляет собой последовательность положительных δ -импульсов, число которых совпадает с числом выбросов (рис. 1.12, д). Полное число выбросов за время T равно, таким образом,

$$n = \int_0^T I(x - C)I(\dot{x}) dt = \int_0^T \delta(x - C)\dot{x}I(\dot{x}) dt. \quad (1.6.5)$$

Энергия выбросов. При наблюдении выбросов могут использоваться приборы типа калориметров, регистрирующие энергию. Энергия Q выбросов определяется интегралом

$$Q = \int_0^T [x_+(t)]^2 dt = \int_0^T (x - C)^2 I^2(x - C) dt. \quad (1.6.6)$$

Число пересечений порога. Функция

$$|\dot{I}(x - C)| = |\delta(x - C)\dot{x}| = \delta(x - C)|\dot{x}|$$

представляет собой временную последовательность положительных δ -импульсов, каждый из которых совпадает по времени с пересечением уровня C (рис. 1.12, е) т. е. интеграл

$$N = \int_0^T \delta(x - C)|\dot{x}| dt \quad (1.6.7)$$

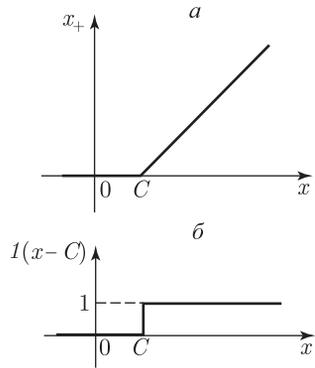


Рис. 1.13. Нелинейные характеристики, соответствующие переходу от процесса x к $x_+ = (x - C)I(x - C)$ (а) и от x к $I(x - C)$ (б)

определяет полное число пересечений как с положительной, так и с отрицательной производной. Это выражение очевидным образом обобщается на случай переменного порога $C(t)$:

$$N = \int_0^T \delta(x - C) |\dot{x} - \dot{C}| dt. \quad (1.6.8)$$

Формула (8) определяет, таким образом, число пересечений двух произвольных функций времени $x(t)$ и $C(t)$ за время T .

Максимумы и минимумы. Минимумы функции $x(t)$ соответствуют тем моментам времени, когда $\dot{x} = 0$ и $\ddot{x} > 0$. Следовательно, число минимумов равно числу выбросов производной \dot{x} относительно нулевого уровня.

Заменяя в формуле (5) x на \dot{x} и полагая $C = 0$, получим выражение

$$n_{\min} = \int_0^T \delta(\dot{x}) \ddot{x} I(\ddot{x}) dt, \quad (1.6.9)$$

определяющее суммарное число минимумов функции x на интервале $(0, T)$. Аналогичное выражение можно написать и для максимумов:

$$n_{\max} = - \int_0^T \delta(\dot{x}) \ddot{x} I(-\ddot{x}) dt.$$

Общее число экстремальных точек равно

$$n_{\text{ext}} = n_{\min} + n_{\max} = \int_0^T \delta(\dot{x}) [\ddot{x} I(\ddot{x}) - \ddot{x} I(-\ddot{x})] dt = \int_0^T \delta(\dot{x}) |\ddot{x}| dt \quad (1.6.10)$$

в соответствии с (7).

Полученные выражения в равной степени применимы как для случайных, так и для регулярных функций. Если $x(t)$ — случайный процесс, то эти характеристики будут случайными величинами. Из приведенных формул видно, какая статистическая информация необходима для вычисления тех или иных статистических средних, характеризующих выбросы.

Рассмотрим, например, среднее значение суммарной длительности выбросов. Согласно (4)

$$\bar{\theta} = \left\langle \int_0^T I(x - C) dt \right\rangle = \int_0^T \langle I(x - C) \rangle dt. \quad (1.6.11)$$

Чтобы найти $\langle I(x - C) \rangle$, достаточно знать одномерное распределение вероятностей $w(x, t)$. В результате получим

$$\langle I(x - C) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I(x - C)w(x, t) dx = \int_C^{\infty} w(x, t) dx = P(x \geq C, t), \quad (1.6.12)$$

где $P(x > C, t)$ — вероятность пребывания x над уровнем C в момент времени t . Подставив (12) в (11), найдем

$$\bar{\theta} = \int_0^T P(x > C, t) dt. \quad (1.6.13)$$

В случае стационарного процесса x вероятность P от времени зависеть не будет и согласно (13)

$$\bar{\theta} = TP(x \geq C),$$

или

$$\frac{\bar{\theta}}{T} = P(x \geq C), \quad (1.6.14)$$

т. е., как уже было показано выше, для стационарного случайного процесса относительное время пребывания в некотором состоянии ($x \geq C$) равно — в среднем — вероятности этого состояния.

Чтобы оценить отклонение θ от $\bar{\theta}$, нужно вычислить момент второго порядка

$$\overline{\theta^2} = \int_0^T \int_0^T dt_1 dt_2 \langle I(x_1 - C)I(x_2 - C) \rangle \quad (1.6.15)$$

и найти дисперсию $\overline{\theta^2} - \bar{\theta}^2$, причем для усреднения в (15) понадобится двумерное распределение вероятностей $w(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Однако, даже не конкретизируя вида функции $w(x_1, x_2)$, нетрудно показать, что дисперсия случайной величины θ/T с ростом T стремится к нулю, а это значит, что сама величина θ/T при достаточно больших T очень мало отличается от своего среднего значения,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\theta}{T} = \frac{\bar{\theta}}{T} = P(x \geq C). \quad (1.6.16)$$

Действительно,

$$\frac{\theta}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T I(x - C) dt,$$

т. е. случайная величина θ/T является средним по времени значением процесса $I(x - C)$, который эргодичен, если эргодичен x , т. е. согласно (1.4.6) величина θ/T с ростом T асимптотически приближается к своему среднему значению.

Аналогично, предполагая эргодичность $x(t)$, можно утверждать, что такие величины, как мощность выбросов (т. е. энергия в единицу времени)

$$P = \frac{Q}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T (x - C)^2 I(x - C) dt, \quad (1.6.17)$$

средняя частота пересечения порога C

$$\Omega_C = \frac{2\pi N_C}{T} = \frac{2\pi}{T} \int_0^T \delta(x - C) |\dot{x}| dt \quad (1.6.18)$$

или средняя частота появления экстремальных точек

$$\Omega_{\text{ext}} = \frac{2\pi n_{\text{ext}}}{T} = \frac{2\pi}{T} \int_0^T \delta(\dot{x}) |\ddot{x}| dt, \quad (1.6.19)$$

при увеличении T сколь угодно мало отклоняются от своих средних статистических значений, определение которых приобретает в связи с этим особый интерес.

Статистическое усреднение полученных выражений дает

$$\bar{P} = \int_C^\infty (x - C)^2 w(x) dx, \quad (1.6.20)$$

$$\bar{\Omega}_C = 2\pi \int_{-\infty}^\infty w(x = C, \dot{x}) |\dot{x}| d\dot{x}, \quad (1.6.21)$$

$$\bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2\pi \int_{-\infty}^\infty w(\dot{x} = 0, \ddot{x}) |\ddot{x}| d\ddot{x}. \quad (1.6.22)$$

В этих средних, кроме одномерного распределения $w(x)$, фигурируют двумерные распределения $w(x, \dot{x})$ и $w(\dot{x}, \ddot{x})$.

Средняя частота пересечений двух случайных стационарных и, вообще говоря, статистически зависимых функций $x(t)$ и $C(t)$, равная согласно (8)

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{2\pi \bar{N}}{T} = \frac{2\pi}{T} \left\langle \int_0^T \delta(x - C) |\dot{x} - \dot{C}| dt \right\rangle = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^\infty \int \int w(x = C, \dot{x}, C, \dot{C}) |\dot{x} - \dot{C}| d\dot{x} d\dot{C} dC, \quad (1.6.23) \end{aligned}$$

выражается через четырехмерное распределение $w(x, \dot{x}, C, \dot{C})$. При определенных условиях эти формулы упрощаются. Например,

если процесс $x(t)$ стационарный, то $\overline{x^2}$ и $\overline{\dot{x}^2}$ — константы и из соотношений

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 0, \quad \langle \dot{x}\ddot{x} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle = 0$$

следует, что отсутствует корреляция между x и \dot{x} и между \dot{x} и \ddot{x} в одни и тот же момент времени. Если x — гауссовский процесс, то отсутствие корреляции будет означать также и статистическую независимость. При этом

$$w(x, \dot{x}) = w(x)w_1(\dot{x}), \quad w(\dot{x}, \ddot{x}) = w_1(\dot{x})w_2(\ddot{x}) \quad (1.6.24)$$

и согласно (21) и (22)

$$\overline{\Omega}_C = 2\pi w(C) \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\dot{x})|\dot{x}| d\dot{x} = 2\pi w(C)\overline{|\dot{x}|}, \quad (1.6.25)$$

$$\overline{\Omega}_{\text{ext}} = 2\pi w_1(0)\overline{|\ddot{x}|}. \quad (1.6.26)$$

Для гауссовского процесса

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1.6.27)$$

$$w_1(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_1^2}\right], \quad (1.6.28)$$

$$w_2(\ddot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{\ddot{x}^2}{2\sigma_2^2}\right].$$

Подставив эти выражения в (25) и (26), находим

$$\overline{\Omega}_C = 2\frac{\sigma_1}{\sigma} \exp\left[-\frac{(C-\overline{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad \overline{\Omega}_{\text{ext}} = 2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (1.6.29)$$

Дисперсии флуктуации случайной функции x и ее производных можно выразить через спектр интенсивности $G(\omega)$ или корреляционную функцию $B(\tau)$ процесса x :

$$\sigma^2 = \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = B(0),$$

$$\sigma_1^2 = \overline{\dot{x}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega = -\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 R(\tau)\Big|_{\tau=0} = \omega_1^2 \sigma^2, \quad (1.6.30)$$

$$\sigma_2^2 = \overline{\ddot{x}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 G(\omega) d\omega = -\left(\frac{d}{d\tau}\right)^4 R(\tau)\Big|_{\tau=0} = \omega_{\text{II}} \sigma^2. \quad (1.6.31)$$

Используя неравенство Коши — Буняковского, нетрудно показать, что

$$\sigma_1^2 \leq \sigma \sigma_2, \quad \omega_{\text{II}} \geq \omega_1. \quad (1.6.32)$$

Из (29) и (32) следует, что среднее число экстремумов не меньше среднего числа пересечений любого уровня:

$$\bar{\Omega}_{\text{ext}} \geq \bar{\Omega}_C, \quad \bar{N}_{\text{ext}} \geq \bar{N}_C. \quad (1.6.33)$$

Если спектр интенсивности имеет прямоугольную форму:

$$G(\omega) = \begin{cases} G, & \omega_0 - h \leq |\omega| \leq \omega_0 + h, \\ 0, & \omega_0 - h \geq |\omega| \geq \omega_0 + h, \end{cases} \quad (1.6.34)$$

то

$$\sigma^2 = 4Gh, \quad \sigma_1^2 = \sigma^2(\omega_0^2 + h^2/3), \quad \sigma_2^2 = \sigma^2(\omega_0^4 + 2\omega_0^2h^2 + h^4/5)$$

и согласно (29)

$$\bar{\Omega}_C = 2\sqrt{\omega_0^2 + h^2/3} \exp\left[-\frac{(C - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right], \quad \bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2\sqrt{\frac{\omega_0^4 + 2\omega_0^2h^2 + h^4/5}{\omega_0^2 + h^2/3}}.$$

Если порог равен среднему значению ($C = \bar{x}$), то в предельном случае очень узкого спектра ($\omega_0 \gg h$)

$$\bar{\Omega}_N \approx \bar{\Omega}_{\text{ext}} \approx 2\omega_0.$$

В обратном предельном случае, когда средняя частота спектра равна нулю ($\omega_0 = 0$),

$$\bar{\Omega}_N = 2h/\sqrt{3}, \quad \bar{\Omega}_{\text{ext}} = 2h\sqrt{3/5} \approx 1,5\bar{\Omega}_N,$$

т. е. частота появления экстремальных точек почти в полтора раза превышает частоту пересечения уровня $C = \bar{x}$.

Пересечение случайных кривых. Рассмотрим два примера по оценке N — числа точек, в которых пересекаются две случайные кривые $x(t)$ и $C(t)$ за время T .

1. Пусть $x(t)$ и $C(t)$ — гауссовские случайные стационарные функции с нулевым средним, коррелированные, вообще говоря, между собой. Их разность $y = x - C$ будет также гауссовской функцией. Двумерное распределение вероятностей для y и \dot{y} имеет вид

$$w(y, \dot{y}) = w(y)w_1(\dot{y}), \quad (1.6.35)$$

где w и w_1 определяются выражениями вида (27), (28), причем

$$\sigma^2 = \bar{y}^2 = \bar{x}^2 + \bar{C}^2 - 2\bar{x}\bar{C}. \quad (1.6.36)$$

Очевидно, что число пересечений x и C равно числу пересечений кривой y нулевого уровня, т. е. согласно (29)

$$\bar{\Omega}_0 = 2\sigma_1/\sigma, \quad \bar{N} = T\sigma_1/\pi\sigma. \quad (1.6.37)$$

Если x и C статистически независимы, то в (27), (28)

$$\sigma^2 = \bar{x}^2 + \bar{C}^2, \quad \sigma_1^2 = \omega_{1x}^2 \bar{x}^2 + \omega_{1C}^2 \bar{C}^2,$$

где ω_{1x} и ω_{1C} — средние частоты спектров, определенные формулой (30). Согласно (37) в этом случае

$$\bar{N} = \frac{T}{\pi} \sqrt{\frac{x^2 \omega_{1x}^2 + C^2 \omega_{1C}^2}{x^2 + C^2}},$$

т. е. число пересечений определяется как частотами ω_{1C} и ω_{1x} , так и интенсивностями случайных процессов, причем средняя частота пересечений

$$\bar{\Omega} = \frac{2\sigma_1}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{\omega_{1x}^2 + \alpha\omega_{1C}^2}{1 + \alpha}} \quad (1.6.38)$$

меняется в пределах от $2\omega_{1x}$ до $2\omega_{1C}$ в зависимости от отношения интенсивностей $\alpha = C^2/x^2$.

2. Рассмотрим пересечение огибающих $A(t)$ и $\rho(t)$ двух независимых гауссовских квазигармонических процессов ¹⁾

$$x(t) = A(t) \cos[\omega_1 t + \varphi(t)], \quad C(t) = \rho(t) \cos[\omega_2 t + \psi(t)].$$

В этом случае

$$w(\rho, \dot{\rho}, A, \dot{A}) = v(\rho)v_1(\dot{\rho})w(A)w_1(\dot{A}),$$

причем распределения вероятностей для огибающих и их производных имеют вид

$$\begin{aligned} w(A) &= \frac{A}{\sigma_{11}^2} \exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma_{11}^2}\right], & w_1(\dot{A}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{12}} \exp\left[-\frac{\dot{A}^2}{2\sigma_{12}^2}\right] \\ &(\sigma_{11}^2 = \bar{x}^2, \quad \sigma_{12}^2 = \langle \dot{A}^2 \rangle), & & \\ v(\rho) &= \frac{\rho}{\sigma_{21}^2} \exp\left[-\frac{\rho^2}{2\sigma_{21}^2}\right], & v_1(\dot{\rho}) &= \frac{1}{\sqrt{1\pi}\sigma_{22}} \exp\left[-\frac{\dot{\rho}^2}{2\sigma_{22}^2}\right] \\ &(\sigma_{21}^2 = \langle C^2 \rangle, \quad \sigma_{22}^2 = \langle \dot{\rho}^2 \rangle). & & \end{aligned} \quad (1.6.39)$$

Для рассматриваемого случая усреднение выражения (8) для числа пересечений дает

$$\bar{N} = T \int_0^\infty w(\rho)v(\rho) d\rho \int \int d\dot{A} d\dot{\rho} |\dot{A} - \dot{\rho}| w_1(\dot{A})v_1(\dot{\rho}). \quad (1.6.40)$$

Согласно (39)

$$\int_0^\infty w(\rho)v(\rho) d\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)^{3/2}},$$

¹⁾ Здесь мы пользуемся моделями случайных процессов, которые будут рассмотрены в § 4 гл. 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int d\dot{A} d\dot{\rho} |\dot{A} - \dot{\rho}| w_1(\dot{A}) v_1(\dot{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2}.$$

Итак, за время T огибающие двух гауссовских процессов пересекутся в среднем

$$\bar{N} = T \frac{\sigma_{11}\sigma_{21}}{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)^{3/2}} \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2} \quad (1.6.41)$$

раз. Если предположить, что корреляционные функции процессов имеют вид

$$\overline{x x_\tau} = \overline{x^2} a(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \overline{C C_\tau} = \overline{C^2} b(\tau) \cos \omega_0 \tau$$

(это значит, что их спектральные плотности симметричны относительно ω_0), то в (39)

$$\sigma_{11}^2 = \overline{x^2}, \quad \sigma_{12}^2 = \overline{x^2} \Omega_{1x}^2, \quad \sigma_{21}^2 = \overline{C^2}, \quad \sigma_{22}^2 = \overline{C^2} \Omega_{1C}^2,$$

где

$$\Omega_{1x}^2 = -\ddot{a}(0), \quad \Omega_{1C}^2 = -\ddot{b}(0).$$

В случае узкополосных процессов величина ω_1 определяется средней частотой спектра и частота Ω_1 — шириной спектра. Например, для прямоугольного спектра (34) имеем

$$a(\tau) = \frac{\sin h\tau}{h\tau}, \quad \omega_1^2 = \omega_0^2 + h^2/3, \quad \Omega_1^2 = h^2/3. \quad (1.6.42)$$

Согласно (41) средняя частота пересечения огибающих равна

$$\Omega = \frac{2\pi N}{T} = 2\pi \left[\frac{\alpha(\Omega_{1x}^2 + \alpha\Omega_{1C}^2)}{(1+\alpha)^3} \right]^{1/2}, \quad (1.6.43)$$

где, как и в (38), $\alpha = \overline{C^2}/\overline{x^2}$ — отношение интенсивностей. В отличие от частоты (38), частота пересечения огибающих (43) стремится к нулю как при $\alpha \rightarrow 0$, так и при $\alpha \rightarrow \infty$ (рис. 1.14). Из (43) нетрудно получить, что частота Ω максимальна при

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - z^2 + z^4} - 1 + z^2}{z^2}, \quad z = \frac{\Omega_{1C}}{\Omega_{1x}}.$$

Систематическое изложение теории выбросов случайных процессов и ее применения можно найти в монографиях [3, 15, 18]. В § 7 гл. 9 при анализе дислокаций волнового фронта будут рассмотрены выбросы двумерных случайных полей.

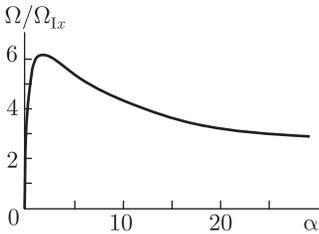


Рис. 1.14. Средняя частота пересечения огибающих двух независимых гауссовских процессов как функция отношения их дисперсий $\alpha = \overline{C^2}/\overline{x^2}$ при отношении полог $z = 3$

Литература к главе 1

1. *Стоянов Й.* Контрпримеры в теории вероятностей. — М.: Факториал, 1999.
2. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ. / Под ред. Б.Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
3. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и Связь, 1982.
5. *Marcinkewicz J.* — Math. Z., 1938, В. 44, S. 612.
6. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
7. *Мазманишвили А.С.* Континуальное интегрирование как метод решения физических задач. — Киев: Наукова думка, 1987.
8. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 1. Случайные процессы.
Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
9. *Венчковский Л.Б.* В сб.: Автомат. управление. — М.: Изд. АН СССР, 1960, с. 279.
10. *Бендат Дж., Пирсол А.* Измерение и анализ случайных процессов: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
11. *Троицкий И.Н.* Статистическая теория томографии. — М.: Радио и Связь, 1988.
12. *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. — М.: Радио и Связь, 1989.
13. *Хелдесон С.* Преобразование Радона. — М.: Мир, 1983.
14. *Каримов М.Г.* ЖЭТФ. 2000, т. 117, с. 673.
15. *Тихонов В.И.* Выбросы случайных процессов. — М.: Наука, 1970.
16. *Малахов А.Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М.: Наука, 1968.
17. *Бендат Дж., Пирсол А.* Применение корреляционного и спектрального анализа. Пер. с англ. — М.: Мир, 1983.
18. *Фомин А.Я.* Теория выбросов случайных процессов. — М.: Связь, 1980.

ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Введение. Физика возникновения случайных процессов и полей и их математические модели

Появление статистических задач в радиофизике и оптике связано с рядом обстоятельств.

Классические и квантовые флуктуации электромагнитного поля, электрические шумы приводят к тому, что реальные радиотехнические и оптические устройства постоянно испытывают воздействие случайных сил. Неконтролируемым, случайным образом изменяются и параметры этих устройств, комплексный показатель преломления сред, в которых распространяются радио- и световые волны.

Какковы статистические свойства этих случайных процессов? Это, несомненно, один из главных вопросов статистической радиофизики и оптики. Ответ на него позволяет предсказать статистическое поведение радиофизических и оптических систем, статистические свойства распространяющихся волн, — задаваясь статистическими свойствами случайных сил, флуктуационных изменений параметров, можно найти статистические характеристики «отклика» системы, распространяющегося в флуктуирующей среде излучения, и т. п.

Несмотря на огромное разнообразие физических систем, в которых генерируются те или иные случайные процессы, подавляющее большинство последних удается описать сравнительно небольшим числом математических моделей.

В этой и следующих главах рассматриваются некоторые модели, представляющие особый интерес для радиофизики и оптики; отметим сразу же, что избранный далее порядок изложения не основан на строгой классификации и в ряде случаев выделенные модели соответствуют классификации по разным признакам (по виду распределения, спектра, характеру изменения во времени); наряду с моделями стационарных процессов, приведены и примеры моделей, описывающих нестационарность. Какие же данные использованы ниже для построения математических моделей?

Прежде всего это общие представления, фактически не требующие детального знания физического механизма (например, микроскопической картины) процесса. Наиболее яркий пример такого положения вещей — это ситуация, когда выполнены условия применимости цен-

тральной предельной теоремы теории вероятностей (см. § 2 гл. 1). В этом случае процесс является гауссовским и можно сразу указать многие свойства многомерных распределений, моментов случайной функции и ее производных и т. п.

В силу центральной предельной теоремы гауссовские процессы занимают совершенно исключительное место в физике. Это, однако, не означает, что в статистической радиофизике приходится иметь дело только с ними. Дело в том, что гауссовское распределение устойчиво только в линейных системах с постоянными или регулярным образом изменяющимися параметрами. В нелинейных же системах или линейных системах со случайными параметрами статистика процесса существенно трансформируется; поэтому, несмотря на гауссовский характер флуктуационных сил и случайных изменений параметров, очень многие радиофизические процессы оказываются существенно негауссовскими.

Чрезвычайно полезной оказывается также модель случайного процесса, базирующаяся на представлении реализации как колебания, близкого к синусоиде, со случайными амплитудой и фазой. Такое представление физически очень наглядно для так называемых узкополосных, или квазимонохроматических, процессов.

Действительно, пусть речь идет о случайном процессе, относительная ширина спектра которого мала: $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ (рис. 2.1). Естественно ожидать, что по мере сужения полосы $\Delta\omega$ каждая отдельная реализация такого процесса будет все больше приближаться по виду к гармоническому колебанию частоты ω_0 . Отличие же реализации от точной синусоиды следует приписать наличию амплитудной и фазовой модуляции, тем более медленных — в масштабе средней частоты ω_0 , — чем уже ширина спектра $\Delta\omega$. Таким образом, возникает представление реализации случайного процесса в виде

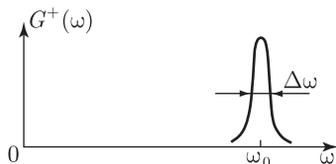


Рис. 2.1. Спектральная плотность узкополосного случайного процесса

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (2.1.1)$$

На рис. 2.2 приведена осциллограмма, иллюстрирующая высказанные соображения. В § 4 этой главы статистические характеристики ρ и φ определены для гауссовского процесса $\xi(t)$. В § 1 гл. 3 эти результаты обобщаются на случай негауссовских процессов.

Тесно связана с указанной моделью и модель колебания, модулированного шумом (см. § 3 гл. 3). Постановка задачи здесь, однако, обратная. Если в (1) по заданной статистике $\xi(t)$ следует определить статистические характеристики ρ и φ , то для колебания, модулированного шумом, исходными являются функции ρ и φ , а по ним находят характеристики ξ (в первую очередь спектр такого колебания).

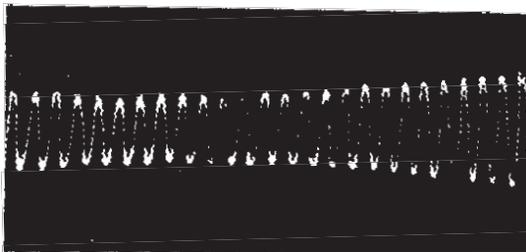


Рис. 2.2. Реализация узкополосного случайного процесса

Модель колебания, модулированного шумом, имеет много приложений в радиофизике и оптике. Такая модель дает адекватное описание автоколебаний в реальном автогенераторе радиодиапазона и лазере; много применений она находит в задачах распространения волн через статистически неоднородную среду.

Картина случайной амплитудной и фазовой модуляции колебаний может быть положена и в основу статистической теории ширины спектральных линий в оптике (см. § 3 гл. 3). Здесь, однако, центр тяжести переносится уже на микроскопическую картину возникновения случайной модуляции, а общие формулы, связывающие статистику модуляции ρ , φ и вид спектра, используются для расчета уширения спектральных линий, классификации физических механизмов.

С определенной конкретизацией физического механизма генерации случайного процесса связана и рассмотренная в § 6 модель импульсного случайного процесса. Речь идет о случайных функциях, представляющих собой суперпозицию импульсов, часто — импульсов регулярного вида. В последнем случае статистика связана со случайностью появления таких импульсов. Ярким физическим примером импульсного случайного процесса может служить дробовой шум электронной лампы. При этом случайные изменения анодного тока есть результат случайного (за счет статистики электронной эмиссии) наложения идентичных по форме регулярных импульсов. С картиной хаотически появляющихся импульсов непосредственно связана и имеющая большое значение для оптики статистика фотоэлектронного тока, или, как ее принято называть, «статистика фотоотсчетов». Естественно, что, как и ток в анодной цепи электронной лампы с подогревным катодом, фототок содержит флуктуационную составляющую; в фотоэлектродных приборах возникает дробовой шум.

Однако в задаче о статистике фототока есть и другой интересный аспект: статистика фотоотсчетов может быть использована для получения информации о статистических свойствах излучения, освещающего фотокатод. Прямые и обратные задачи, связанные с указанным обстоятельством, обсуждаются в § 5 гл. 3.

Весьма наглядная физическая модель случайного процесса рассмотрена в § 6 гл. 3; в нем речь идет о статистике процесса, представляющего собой суперпозицию гармонических колебаний со случайными фазами (а в общем случае — и амплитудами). Исследование этой модели восходит еще к классическим работам Рэлея; в его «Теории звука» (см. [1]) дано полное решение задачи о суперпозиции гармонических мод одинаковой частоты, но со случайными фазами.

Для современной оптики большое значение имеет модель оптического шума, представляющего собой суперпозицию эквидистантных по частоте гармонических колебаний со случайными фазами; такая модель хорошо описывает излучение многомодового лазера с несинхронизованными модами.

Говоря о формулировках математических моделей реальных случайных процессов, следует иметь в виду также и чисто вычислительные аспекты, связанные с решением конкретных задач. Лишь немногие статистические задачи радиофизики и оптики (сказанное в особенности относится к представляющим наибольший интерес *нелинейным* задачам) удастся решить в общем виде; в связи с этим выбор модели процесса во многом определяет и успех математического решения задачи. Поэтому, наряду с необходимостью адекватного описания физики процесса, возникает и проблема удачного выбора модели, правильно учитывающей основные физические характеристики процесса и вместе с тем, по возможности, упрощающей математическую сторону дела. Основные параметры модели — среднее значение, средняя интенсивность, ширина спектра — должны, разумеется, соответствовать физическим представлениям о процессе.

Вместе с тем при выборе более детальных характеристик допустим известный произвол, второстепенные параметры могут подбираться из соображений удобства решения данной задачи. Например, без ущерба для смысла получаемых результатов процесс со сплошным спектром иногда можно заменить на процесс с эквивалентным по ширине и форме дискретным спектром (см. § 6 гл. 3); часто используется и модель процесса с диффундирующей фазой и т. п. На перечисленных моделях случайных процессов базируется и ряд моделей случайных полей, используемых в книге.

§ 2. Гауссовский (нормальный) случайный процесс

Мы начнем со сводки данных, относящихся к гауссовским случайным процессам; в значительной мере она носит справочный характер. К гауссовскому (нормальному) шуму приводят многие физические механизмы, рассматриваемые ниже. Поэтому приведенные в этом параграфе соотношения используются очень широко.

Распределение вероятностей; характеристическая функция; моменты. Гауссовский, или нормальный, случайный процесс может

принимать любые положительные и отрицательные значения. Одномерное распределение плотности вероятностей (функция распределения)

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} \quad (-\infty \leq x \leq +\infty) \quad (2.2.1)$$

имеет один максимум при $x = \bar{x}$; $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ (рис. 2.3). Согласно (1) отличны от нуля лишь четные центральные моменты:

$$\langle (x - \bar{x})^n \rangle = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1) \sigma^n = (n-1)!! \sigma^n & (n - \text{четное}), \\ 0 & (n - \text{нечетное}). \end{cases} \quad (2.2.2)$$

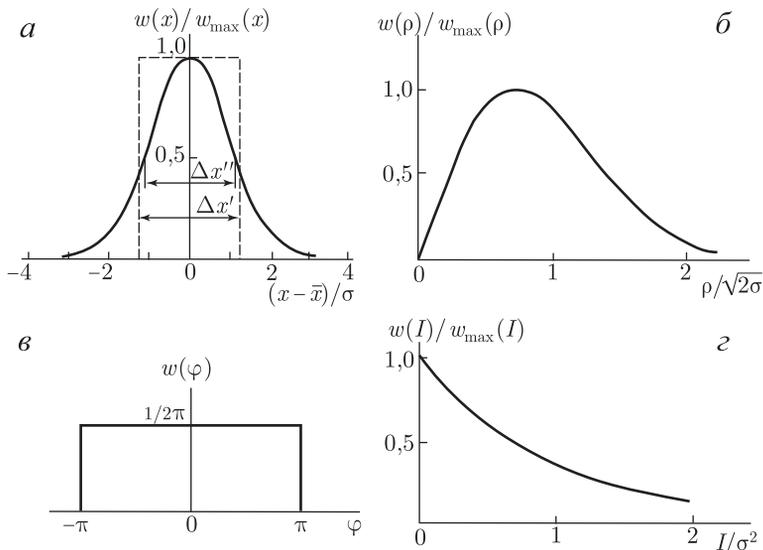


Рис. 2.3. Функции распределения:

а) гауссовского процесса (1); б) его огибающей (распределение Рэлея (2.4.6)); в) фазы (2.4.5); г) интенсивности (2.4.8)

Согласно (1) флуктуации $\tilde{x} = x - \bar{x}$ соответствует распределение вероятностей

$$w(\tilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{\tilde{x}^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \langle \tilde{x}^2 \rangle. \quad (2.2.1a)$$

Используя (1a) и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 x^2 + ibx} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$$

(его мы рекомендуем читателю запомнить из-за частого использования в книге), получим важное соотношение

$$\langle e^x \rangle = \langle e^{\bar{x} + \tilde{x}} \rangle = \langle e^{\bar{x}} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tilde{x}} w(\tilde{x}) d\tilde{x} = e^{\bar{x} + \frac{1}{2}\sigma^2}, \quad (2.2.3)$$

которое будет неоднократно применяться в дальнейшем.

Характеристическая функция $\theta(u)$ процесса определяется как фурье-образ распределения вероятностей. Получаем

$$\theta(u) = \langle e^{iu x} \rangle = \langle e^{iu(\bar{x} + \tilde{x})} \rangle = e^{iu\bar{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iu\tilde{x}} w(\tilde{x}) d\tilde{x} = e^{iu\bar{x} - \frac{1}{2}u^2\sigma^2}. \quad (2.2.4)$$

Вероятность того, что значение x лежит в некотором интервале, равна

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{b-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\bar{x}}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right],$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt$$

— табулированная функция, называемая интегралом вероятности, или функцией ошибок, изменяющаяся в пределах от $\Phi(-\infty) = -1$ до $\Phi(\infty) = 1$. В частности,

$$P(|x - \bar{x}| \leq n\sqrt{2}\sigma) = \Phi(n) = \begin{cases} 0,9 & (n = 1,17), \\ 0,99 & (n = 1,83), \\ 0,999 & (n = 2,33). \end{cases}$$

Ширина эквивалентного прямоугольного распределения (см. рис. 2.3) равна

$$\Delta x' = \sqrt{2\pi}\sigma \approx 2,51\sigma,$$

причем

$$w(x = \bar{x} \pm 1/2 \Delta x') = w_{\max} e^{-\pi/4} \approx w_{\max} \cdot 0,455, \\ P(|x - \bar{x}| \leq 1/2 \Delta x') \approx 0,79.$$

За оценку ширины пика гауссовской кривой иногда принимают мало отличающуюся от $\Delta x'$ величину

$$\Delta x'' = 2\sqrt{2\ln 2}\sigma \approx 2,37\sigma,$$

которая соответствует уменьшению $w(x)$ в два раза относительно w_{\max} .

Если имеется несколько гауссовских случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , то их совместное распределение вероятностей имеет вид (1.2.44)

$$w(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} D^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n A_{pq} (x_p - \bar{x}_p)(x_q - \bar{x}_q) \right\}; \quad (2.2.5)$$

$\|A_{pq}\|$ — матрица, обратная корреляционной матрице

$$B_{pq} = \langle (x_p - \bar{x}_p)(x_q - \bar{x}_q) \rangle = \bar{x}_p \bar{x}_q - \bar{x}_p \bar{x}_q;$$

D — определитель $n \times n$ элементов матрицы B_{pq} . Иногда удобно выражать B_{pq} и A_{pq} через коэффициенты корреляции R_{pq} и дисперсии σ_p^2 :

$$\sigma_p^2 = B_{pp} = \overline{x_p^2} - \bar{x}_p^2, \quad B_{pq} = \sigma_p \sigma_q R_{pq}, \quad |R_{pq}| \leq 1, \quad R_{pp} = 1.$$

Многомерному распределению (5) соответствует характеристическая функция

$$\begin{aligned} \theta(u_1, \dots, u_n) &= \langle \exp i(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n) \rangle = \\ &= \exp \left\{ i \sum_{p=1}^n u_p \bar{x}_p - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^n u_p u_q B_{pq} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Если величины x_1, x_2, \dots, x_n некоррелированы, то

$$B_{pq} = \begin{cases} \sigma_p^2 & (p = q), \\ 0 & (p \neq q) \end{cases}$$

и согласно (6)

$$\theta(u_1, \dots, u_n) = \theta(u_1) \dots \theta(u_n).$$

Соответственно многомерное распределение (5) распадается на произведение одномерных:

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_1) \dots w(x_n),$$

т. е. некоррелированность гауссовских случайных величин эквивалентна их статистической независимости.

При $n = 1$ распределение (5) совпадает с (1). При $n = 2$

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-R_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R_{12}^2)} \left[\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} - 2R_{12} \frac{\xi_1\xi_2}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \quad (2.2.7)$$

$$(\xi_i = x_i - \bar{x}_i, \quad \sigma_i^2 = \langle \xi_i^2 \rangle, \quad -\infty \leq \xi_i \leq +\infty).$$

В случае стационарного гауссовского процесса

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2, \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}, \quad R_{12} = R(\tau) = R(-\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2)$$

и выражение (7) несколько упрощается (см. (1.4.23)).

Как следует из (5), все статистические характеристики гауссовских флуктуаций $\xi_i = x_i - \bar{x}_i$ должны выражаться через A_{pq} или B_{pq} , т. е. через элементы корреляционной матрицы. В частности, многомерные корреляции

$$B_{p\dots s} = \langle \xi_p \dots \xi_s \rangle \quad (2.2.8)$$

могут быть выражены через парные корреляции:

$$\underbrace{B_{p\dots s}}_{2m+1} = 0, \quad \underbrace{B_{p\dots s}}_{2m} = \sum B_{pq} \dots B_{rs}. \quad (2.2.9)$$

Сумма в (9) охватывает все варианты парных сочетаний индексов.

Из общих соотношений (1.2.45), (1.2.46), в частности, следует, что

$$B_{1122} = \langle x^2 x_\tau^2 \rangle = \sigma^4 + 2B^2(\tau) = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)], \quad (2.2.10a)$$

$$B_{111222} = \langle x^3 x_\tau^3 \rangle = 9\sigma^4 B(\tau) + 6B^3(\tau) = \sigma^6 [9R(\tau) + 6R^3(\tau)]. \quad (2.2.10б)$$

Спектральные амплитуды (см. § 3 гл. 1) гауссовского процесса

$$x_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\bar{x}_\omega = 0),$$

линейно связанные с x , также будут при этом гауссовскими случайными величинами. Для них справедливы соотношения, аналогичные (8)–(10):

$$\begin{aligned} \langle x_{\omega_1} x_{\omega_2} x_{\omega_3} x_{\omega_4} \rangle &= \langle x_{\omega_1} x_{\omega_2} \rangle \langle x_{\omega_3} x_{\omega_4} \rangle + \\ &+ \langle x_{\omega_1} x_{\omega_4} \rangle \langle x_{\omega_2} x_{\omega_3} \rangle + \langle x_{\omega_1} x_{\omega_3} \rangle \langle x_{\omega_2} x_{\omega_4} \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Если процесс $x(t)$ стационарен, то в (11)

$$\langle x_{\omega_i} x_{\omega_j} \rangle = G(\omega) \delta(\omega_i + \omega_j), \quad (2.2.12)$$

где $G(\omega)$ — спектральная плотность процесса $x(t)$.

Функции распределения для производных по времени. Если $x(t)$ — стационарный шум, то средние $\langle x^2 \rangle$ и $\langle \dot{x}^2 \rangle$ — постоянные величины и

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = 2 \langle x \dot{x} \rangle = 0, \quad \frac{d}{dt} \langle \dot{x}^2 \rangle = 2 \langle \dot{x} \ddot{x} \rangle = 0,$$

т. е. \dot{x} не коррелирует как с x , так и с \ddot{x} (если все три величины берутся в один и тот же момент времени). Для гауссовских x , \dot{x} и \ddot{x} отсюда следует статистическая независимость \dot{x} от x и \ddot{x} :

$$w(x, \dot{x}, \ddot{x}) = w(\dot{x})w(x, \ddot{x}). \quad (2.2.13)$$

Дисперсия случайной функции x и ее производных равны:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega = \sigma^2, \\ \sigma_1^2 &= \langle \dot{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G(\omega) d\omega = -\sigma^2 R^{(2)}(0) \equiv \sigma^2 \omega_1^2 m, \\ \sigma_2^2 &= \langle \ddot{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 G(\omega) d\omega = \sigma^2 R^{(4)}(0) \equiv \sigma^2 \omega_{II}^4, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где $R^{(n)}(0) = [(d/d\tau)^n R(\tau)]_{\tau \rightarrow 0}$. Учитывая стационарность x , находим

$$\langle x \ddot{x} \rangle = -\langle \dot{x}^2 \rangle + \frac{d}{dt} \langle x \dot{x} \rangle = -\sigma_1^2,$$

т. е. коэффициент корреляции между x и \ddot{x} равен

$$R_{12} = \frac{\langle x \ddot{x} \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle \ddot{x}^2 \rangle}} = -\frac{\sigma_1^2}{\sigma \sigma_2} = -\gamma.$$

Поскольку всегда $|R_{12}| \leq 1$ (см. (1.3.3)), то

$$0 \leq \gamma \leq 1, \quad \gamma = \frac{\sigma_1^2}{\sigma \sigma_2} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_{II}} \right)^2. \quad (2.2.15)$$

Иначе говоря, в (14)

$$\omega_1 \leq \omega_{II}. \quad (2.2.16)$$

Таким образом, согласно (1) и (7) в (13)

$$w(\dot{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{\dot{x}^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad (2.2.17)$$

$$w(x, \ddot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_2\sqrt{1-\gamma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\gamma^2)} \left[\frac{\xi^2}{\sigma^2} + \frac{2\gamma\xi\ddot{x}}{\sigma\sigma_2} + \frac{\ddot{x}^2}{\sigma_2^2}\right]\right\} \quad (2.2.18)$$

$$(\xi = x - \bar{x}).$$

Вычисление некоторых средних. В случае гауссовского распределения $w(x)$ для вычисления средних значений можно пользоваться следующей формулой:

$$\langle xf(x) \rangle = m_1 \langle f(x) \rangle + \sigma^2 \langle f'(x) \rangle, \quad (2.2.19)$$

где $f(x)$ — произвольная детерминированная функция. По определению

$$\langle xf(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)w(x) dx. \quad (2.2.20)$$

Подставим сюда функцию (1) и проинтегрируем по частям. В результате получим искомое выражение (19), при $m_1 = 0$ имеем

$$\langle xf(x) \rangle = \sigma^2 \langle f'(x) \rangle. \quad (2.2.21)$$

Очевидно, что для расчета средних вида $\langle x^n f(x) \rangle$ формулами (19), (20) можно пользоваться последовательно.

Средние вида

$$A = \langle x_1 e^{x_2} \rangle, \quad (2.2.22)$$

где x_1 и x_2 — гауссовские случайные величины, можно найти не обращаясь к двумерному распределению (7). Действительно, A можно записать как

$$A = \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle e^y \rangle_{\alpha \rightarrow 0}, \quad (2.2.23)$$

где $y = \alpha x_1 + x_2$. Величина y , будучи линейной комбинацией x_1 и x_2 , распределена по нормальному закону, т. е. (см. формулу (4))

$$\langle e^y \rangle = \exp\left\{\bar{y} + \frac{1}{2}[\langle y^2 \rangle - \bar{y}^2]\right\}. \quad (2.2.24)$$

Но

$$\bar{y} = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad \bar{y}^2 = \alpha^2 \bar{x}_1^2 + 2\alpha \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2. \quad (2.2.25)$$

Подставив (24), (25) в (23), получим

$$\langle x_1 e^{x_2} \rangle = (\bar{x}_1 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2) \exp\left\{\bar{x}_2 + \frac{1}{2}(\bar{x}_2^2 - \bar{x}_2^2)\right\}. \quad (2.2.26)$$

Например, для стационарного процесса с нулевым средним значением и функцией корреляции $B(\tau)$ находим, используя (26),

$$\langle x_\tau e^x \rangle = \langle x e^{x_\tau} \rangle = B(\tau) e^{\sigma^2/2},$$

$$\langle \dot{x}_\tau e^x \rangle = -\langle \dot{x} e^{x_\tau} \rangle = \dot{B}(\tau) e^{\sigma^2/2}.$$

Этот простой прием очевидным образом обобщается на вычисление средних более сложного вида:

$$\langle (\hat{L}_1 x_1)^{m_1} \dots (\hat{L}_n x_n)^{m_n} e^{\hat{L}_{n+1} x_{n+1}} \rangle; \quad (2.2.27)$$

при этом, как и в рассмотренном выше примере (26), интегрирование многомерного распределения заменяется дифференцированием некоторой вспомогатель-

ной функции. В (27) m_i — целые положительные степени, \widehat{L}_i — произвольные линейные операторы.

§ 3. Узкополосный стационарный шум

Огибающая, фаза, квадратурные компоненты. В этом параграфе, а также в §§ 4 и 5 мы займемся моделью узкополосного стационарного шума (2.1.1), детальным анализом статистических характеристик его огибающей и фазы.

Физическое представление случайного процесса (2.1.1), спектр которого $G^+(\omega)$ сосредоточен в малой области $\Delta\omega$ вблизи некоторой частоты ω_0 ,

$$\Delta\omega \ll \omega_0$$

(см. рис. 2.1), в виде колебания, близкого к гармоническому, совершенно естественно. Ниже мы сосредоточимся на математических аспектах задачи и покажем, как, зная статистику $\xi(t)$, найти статистические характеристики ρ и φ .

Особое внимание в §§ 3, 4 уделено случаям, когда $\xi(t)$ является стационарным гауссовским шумом или суперпозицией гармонического сигнала и стационарного гауссовского шума. Эти примеры в равной мере важны и для радиофизики, и для оптики. Для этих случаев удается получить практически исчерпывающую информацию о корреляционных функциях и законах распределения случайных огибающей, фазы и частоты. Учитывая важность для приложений, мы приводим здесь и значительный справочный материал; наряду с действительной, мы широко будем пользоваться и комплексной записью.

Вводя огибающую (амплитуду) $\rho(t)$ и фазу $\varphi(t)$, запишем

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad (2.3.1)$$

вместо ρ и φ можно ввести так называемые квадратурные компоненты или просто квадратуры $a(t)$ и $b(t)$, тогда

$$\xi(t) = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t. \quad (2.3.2)$$

Для узкополосного процесса ($\Delta\omega \ll \omega_0$) записи (1) и (2) соответственно выделению быстрых ($\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$) и медленных (ρ , φ , a , b) функций времени. Заметим, что выражениями (1), (2) вместо одной случайной функции $\xi(t)$ вводится пара случайных функций: $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ или $a(t)$ и $b(t)$. Естественно, что при этом возникает некоторая степень неопределенности в нахождении указанных функций. Весьма нагляден и физичен способ устранения этого «произвола» для дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$, т. е. для процесса, у которого существует производная $\dot{\xi} = d\xi/dt$. Тогда для однозначного определения огибающей узкополосного стационарного шума можно воспользоваться формулой

$$\rho(t) = [\xi^2(t) + \omega_0^{-2} \dot{\xi}^2(t)]^{1/2}, \quad (2.3.2a)$$

где надо полагать $\dot{\xi} = -\omega_0 \rho \sin[\omega_0 t + \varphi(t)]$; при вычислении производной узкополосного процесса производными огибающей и фазы пренебрегаем. Если записано выражение (2а), то однозначно определена и фаза $\varphi(t)$.

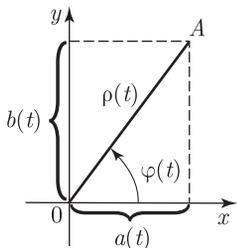


Рис. 2.4. Геометрический смысл огибающей $\rho(t)$, фазы $\varphi(t)$ и квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$ узкополосного случайного процесса.

Всюду далее при физической интерпретации результатов следует иметь в виду приведенные соотношения. Отметим вместе с тем, что при вычислении спектров и законов распределения функций ρ , φ , a , b необходимости в использовании соотношения (2а) не возникает. Огибающая, фаза и квадратурные компоненты имеют простой геометрический смысл (рис. 2.4) и связаны между собой соотношениями

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, \\ a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

В дальнейшем как сам шум ξ , так и его амплитуда, фаза и квадратуры считаются *стационарными* случайными функциями времени. Можно показать (см. § 5), что при этом условии представление в виде квазисинусоид (1) или (2) становится возможным лишь для определенного класса процессов ξ , а именно для процессов с симметричным распределением вероятностей:

$$w(\xi) = w(-\xi).$$

Очевидно, что чем уже спектр процесса $\xi(t)$, тем медленнее движется изображающая точка A по плоскости xy (см. рис. 2.4); при этом изменение во времени случайных функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ также будет медленным¹⁾.

Корреляционные и спектральные характеристики квадратурных компонент. Статистические свойства функций a , b , ρ , φ и ξ между собой определенным образом связаны. В этом разделе мы рассмотрим,

¹⁾ Подчеркнем еще раз, что представления (1), (2) физически оправданы и имеют конкретный смысл только для узкополосных процессов, поскольку только для них изменение (во времени) функций $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $a(t)$, $b(t)$ можно рассматривать как *модуляцию* в обычном радиоп физическом смысле.

Вместе с тем следует иметь в виду, что математические результаты §§ 3, 4 справедливы в общем случае процесса с произвольным спектром. Заметим, что фаза $\varphi(t)$ иногда перестает быть медленным процессом. Действительно, если точка A на рис. 2.4 переходит из второго квадранта в четвертый или из первого в третий и ее траектория проходит через начало координат, то в момент обращения в нуль огибающей величина фазы *скачком* меняется на π , каким бы медленным ни было движение A . С аналогичной ситуацией мы встречаемся в случайных световых пучках (см. § 7 гл. 9).

какие выводы могут быть сделаны только из того факта, что эти функции стационарны.

Рассмотрим стационарный шум (2) с $\bar{\xi} = 0$. В этом случае

$$\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0. \quad (2.3.3)$$

Используя (2), составим выражение для корреляционной функции $B(\tau) = \langle \xi \xi_\tau \rangle$:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} (\overline{a a_\tau} + \overline{b b_\tau}) \cos \omega_0 \tau + \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} - \overline{a b_\tau}) \sin \omega_0 \tau + \\ + \frac{1}{2} (\overline{a a_\tau} - \overline{b b_\tau}) \cos(2\omega_0 \tau + \omega_0 \tau) - \frac{1}{2} (\overline{a_\tau b} + \overline{a b_\tau}) \sin(2\omega_0 \tau + \omega_0 \tau).$$

Из-за стационарности зависимость от времени здесь должна исчезать; следовательно,

$$\langle a a_\tau \rangle = \langle b b_\tau \rangle = \sigma^2 p(\tau), \quad (2.3.4)$$

$$\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle, \quad \langle a b_\tau \rangle = -\langle a_\tau b \rangle = \sigma^2 q(\tau). \quad (2.3.5)$$

При этом

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau - \sigma^2 q(\tau) \sin \omega_0 \tau = \sigma^2 R(\tau), \quad (2.3.6)$$

где $R(\tau)$ — коэффициент корреляции:

$$R(\tau) = p(\tau) \cos \omega_0 \tau - q(\tau) \sin \omega_0 \tau = r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)], \quad (2.3.7)$$

$$r(\tau) = \sqrt{p^2(\tau) + q^2(\tau)}, \quad \psi(\tau) = \arctg \frac{q(\tau)}{p(\tau)}. \quad (2.3.8)$$

Корреляционную функцию $B(\tau)$ можно также обычным образом выразить через спектр $G^+(\omega)$ (см. (1.3.19а)):

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} G^+(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (2.3.9)$$

или, если ввести новую переменную $\Omega = \omega - \omega_0$,

$$B(\tau) = \cos \omega_0 \tau \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega\tau d\Omega - \\ - \sin \omega_0 \tau \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega\tau d\Omega. \quad (2.3.10)$$

Сравнивая (6) и (10), находим, что

$$\sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega\tau d\Omega, \quad (2.3.11)$$

$$\sigma^2 q(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \sin \Omega \tau d\Omega. \quad (2.3.12)$$

Из этих формул видно, что функция $q(\tau)$ является нечетной функцией τ :

$$q(-\tau) = -q(\tau),$$

в частности, $q(0) = 0$, т. е. в совпадающие моменты времени квадратурные компоненты некоррелированы:

$$\langle ab \rangle = \sigma^2 q(0) = 0 \quad (2.3.13)$$

(см. (5)). Из (12) также видно, что если спектр $G^+(\omega)$ симметричен относительно частоты ω_0 :

$$G^+(\omega_0 - \Omega) = G^+(\omega_0 + \Omega),$$

то $q(\tau) = 0$ при любых τ и согласно (6)

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau. \quad (2.3.14)$$

Функция $p(\tau)$ обладает всеми свойствами коэффициента корреляции стационарного процесса:

$$p(0) = 1, \quad p(-\tau) = p(\tau).$$

Преобразуя по Фурье корреляционную функцию:

$$\langle aa_\tau \rangle = \langle bb_\tau \rangle = \sigma^2 p(\tau) = \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) \cos \Omega \tau d\Omega,$$

легко убедиться, что спектр интенсивности квадратурных компонент равен симметричной относительно ω_0 части спектра $G^+(\omega)$ процесса ξ :

$$G_a(\omega) = G_b(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2} [G^+(\omega_0 - \omega) + G^+(\omega_0 + \omega)]. \quad (2.3.15)$$

При этом вид спектра квадратурных компонент существенно зависит от выбора частоты ω_0 (рис. 2.5).

Статистические свойства комплексной амплитуды узкополосного процесса. Часто вместо вещественной записи (1), (2) через огибающую и фазу или квадратурные компоненты мы будем использовать и комплексное представление случайного колебания:

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (2.3.16)$$

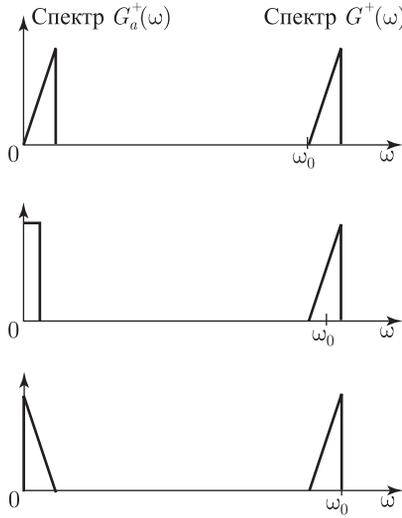


Рис. 2.5. Зависимость формы спектра квадратурных компонент от выбора частоты ω_0

Спектр узкополосного случайного процесса $G^+(\omega)$ во всех случаях один и тот же

Вычислим статистические характеристики комплексной амплитуды $A(t)$. Из сравнения (16) и (1), (2) следует, что

$$A(t) = \frac{a(t) + ib(t)}{2} = \frac{1}{2} \rho(t) e^{i\varphi(t)}, \quad (2.3.17)$$

$$a(t) = A(t) + A^*(t), \quad b(t) = i(A^*(t) - A(t)). \quad (2.3.18)$$

Пользуясь формулами для корреляционных функций квадратурных компонент (4) и (5), нетрудно получить для комплексной амплитуды стационарного шума следующие соотношения:

$$\langle A \rangle = 0, \quad \langle A^2 \rangle = \langle AA_\tau \rangle = 0, \quad \langle AA^* \rangle = \sigma^2/2, \quad (2.3.19)$$

$$\begin{aligned} \langle AA_\tau^* \rangle &= \frac{\sigma^2}{2} [p(\tau) - iq(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{-\omega_0}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) e^{-i\Omega\tau} d\Omega = \\ &= e^{i\omega_0\tau} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G^+(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = e^{i\omega_0\tau} \int_0^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

где $G(\omega)$ — спектральная интенсивность шума ξ ,

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega.$$

При $\omega < 0$ функция $G^+(\omega) \equiv 0$, т. е. $G^+(\omega_0 + \Omega) \equiv 0$ при $\Omega < -\omega_0$. Поэтому выражение (20) можно переписать как

$$\langle AA_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G^+(\omega_0 + \Omega) e^{-i\Omega\tau} d\Omega, \quad (2.3.21)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} G^+(\omega_0 + \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle AA_\tau^* \rangle e^{i\Omega\tau} d\tau, \quad (2.3.22)$$

т. е. корреляционная функция $\langle AA_\tau^* \rangle$ комплексной амплитуды и смещенный на ω_0 спектр по положительным частотам связаны преобразованием Фурье.

Как видно из (20), $\langle AA_\tau^* \rangle$ имеет, вообще говоря, как вещественную (четную по τ), так и мнимую (нечетную по τ) компоненты. Если спектр $G^+(\omega)$ симметричен относительно ω_0 , то $q(\tau) = 0$ и функция $\langle AA_\tau^* \rangle$ будет чисто вещественной:

$$B(\tau) = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \langle AA_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2 p(\tau). \quad (2.3.23)$$

§ 4. Узкополосный гауссовский шум

Анализ статистических свойств огибающей и фазы случайного процесса с наибольшей полнотой может быть выполнен в том случае, когда a и b являются гауссовскими случайными функциями. Процесс ξ , зависящий от a и b линейно, также будет при этом гауссовским. Ограничимся здесь рассмотрением случая, когда a , b и ξ стационарны.

Согласно (2.3.3) процессы a , b и ξ имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии:

$$\bar{a} = \bar{b} = \bar{\xi} = 0, \quad \overline{a^2} = \overline{b^2} = \overline{\xi^2} = \overline{\sigma^2}, \quad (2.4.1)$$

т. е. их одномерные распределения идентичны:

$$w(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-a^2/2\sigma^2}, \quad w(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-b^2/2\sigma^2}, \quad (2.4.2)$$

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2}.$$

Распределения огибающей и фазы. Из гауссовости a и b и отсутствия корреляции между ними (см. (2.3.13)) следует, что в совпадающие моменты времени a и b статистически независимы, т. е. их совместное распределение вероятностей имеет вид

$$w(a, b) = w(a)w(b) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{2\sigma^2}\right). \quad (2.4.3)$$

Переходя в (3) к переменным ρ и φ :

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

найдем совместное распределение огибающей и фазы квазигармонического гауссовского процесса:

$$w(\rho, \varphi) = w(a = \rho \cos \varphi, b = \rho \sin \varphi) \left| \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \quad (2.4.4)$$

Функцию (4) можно представить как $w(\rho, \varphi) = w(\rho)w(\varphi)$, где $w(\varphi) = \text{const}$. Следовательно, подобно a и b , случайные величины ρ и φ в совпадающие моменты времени также статистически независимы. Проинтегрировав (4) по ρ , получим

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi) d\varphi = 1. \quad (2.4.5)$$

Таким образом, фаза φ имеет равномерное распределение и все ее значения в интервале $(-\pi, \pi)$ равновероятны (рис. 2.3, в). В § 1 гл. 3 будет показано, что распределение (5) является универсальным, т. е. равномерным распределением обладает фаза любого (не только гауссовского) квазигармонического стационарного процесса.

Разделив (4) на $w(\varphi) = 1/2\pi$, найдем распределение огибающей гауссовского процесса:

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0). \quad (2.4.6)$$

Это так называемое распределение Рэлея (рис. 2.3, б). Моменты ρ равны:

$$\langle \rho^{2n} \rangle = 2^n n! \sigma^{2n}, \quad \langle \rho^{2n+1} \rangle = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2n+1)! \sigma^{2n+1}, \quad (2.4.7)$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sigma}, \quad \frac{1}{\langle \rho \rangle} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sigma}, \quad \langle \rho \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle = \pi/2. \quad (2.4.7a)$$

Распределение интенсивности. Интенсивность I узкополосного процесса связана с его огибающей соотношением $I = \rho^2/2$, причем

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \langle \rho^2 \rangle = \sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle.$$

Переходя в (6) к переменной I , нетрудно убедиться, что для гауссовского узкополосного процесса распределение интенсивности является экспоненциальным:

$$w(I) = w(\rho = \sqrt{2I}) \left| \frac{\partial \rho}{\partial I} \right| = \frac{1}{\sigma^2} e^{-I/\sigma^2} = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (2.4.8)$$

(рис. 2.3, з). Моменты интенсивности равны согласно (7):

$$\langle I^n \rangle = \frac{1}{2^n} \langle \rho^{2n} \rangle = n! \sigma^{2n} = n! \langle I \rangle^n. \quad (2.4.9)$$

Двумерные распределения и корреляционные функции огибающей и фазы. Ранее были найдены средние значения квадратурных компонент (они равны нулю — см. (2.3.3)) и парные корреляции между ними для двух моментов времени (см. (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.11), (2.3.12)). Поэтому, учитывая гауссовость a и b , по общей формуле (2.2.5) можно получить распределение $w(a, a_\tau, b, b_\tau)$, а затем, произведя замену переменных, найти четырехмерное распределение огибающей и фазы:

$$\begin{aligned} w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau) &= w(\rho, \rho_\tau, \varphi - \varphi_\tau) = \\ &= \frac{\rho\rho_\tau}{4\pi^2\sigma^4(1-r^2)} \exp\left\{-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2 - 2\rho\rho_\tau\beta}{2\sigma^2(1-r^2)}\right\}, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где $r^2 = p^2(\tau) + q^2(\tau)$, $\beta = p(\tau) \cos(\varphi - \varphi_\tau) - q(\tau) \sin(\varphi - \varphi_\tau)$, $|\beta| \leq 1$.

Проинтегрировав (10) по φ и φ_τ , получим двумерное распределение для огибающей:

$$w(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2(1-r^2)} I_0\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right]. \quad (2.4.11)$$

Аналогично находится двумерное распределение для фазы:

$$w(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1-r^2}{4\pi^2} \left[\frac{1}{1-\beta^2} + \beta \frac{\pi/2 + \arcsin \beta}{(1-\beta^2)^{3/2}} \right], \quad (2.4.12)$$

а также условные распределения:

$$w(\rho | \rho_\tau) = \frac{2(\rho\rho_\tau)}{w(\rho)} = \frac{\rho}{\sigma^2(1-r^2)} I_0\left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2}\right) \exp\left[-\frac{\rho^2 + r^2\rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)}\right], \quad (2.4.13)$$

$$w(\varphi | \varphi_\tau) = \frac{w(\varphi - \varphi_\tau)}{w(\varphi_\tau)} = 2\pi w(\varphi, \varphi_\tau). \quad (2.4.14)$$

Заметим, что распределения (10), (11) и (14) зависят только от разности фаз.

Из (11) можно найти функцию и коэффициент корреляции огибающей (см. [2], с. 561):

$$\begin{aligned} \langle \rho\rho_\tau \rangle &= \sigma^2 [2E(1) - (1-r^2)K(r)] = \sigma^2(1+r^2)E\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right) = \\ &= \frac{\pi\sigma^2}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 r^4 + \dots + \left(\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\right)^2 r^{2n} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

а также

$$\left\langle \frac{1}{\rho\rho_\tau} \right\rangle = \frac{K(r)}{2\sigma^2}. \quad (2.4.15a)$$

Согласно (15) коэффициент корреляции равен

$$\begin{aligned} R_r(\tau) &= \frac{\langle \rho\rho_\tau \rangle - \langle \rho^2 \rangle}{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2} = \frac{\pi}{4-\pi} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 r^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 r^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 r^6 + \dots \right] = \\ &= 0,921r^2 + 0,058r^4 + 0,014r^6 + \dots; \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

E и K — полные эллиптические интегралы. Ряды в (15), (16) быстро сходятся, и при учете членов порядка r^4 ошибка не превышает 2%.

Таким образом, с достаточно высокой степенью точности можно написать

$$R_\rho(\tau) \approx r^2(\tau),$$

время корреляции τ_ρ огибающей меньше времени корреляции τ_ξ самого процесса; например, для процесса с экспоненциальной корреляционной функцией $\tau_\rho = \tau_\xi/2$ (ширина спектра огибающей соответственно вдвое больше ширины спектра процесса). Вместе с тем время корреляции фазы $\tau_\varphi \approx \tau_\xi$, как следует из приводимой ниже формулы (19а).

Не обращаясь к распределению (11), а используя просто правила представления высших корреляций через парные для гауссовских процессов, можно найти корреляционные функции четных степеней огибающей:

$$\langle \rho^{2n} \rho_\tau^{2m} \rangle = \langle (a^2 + b^2)^n (a_\tau^2 + b_\tau^2)^m \rangle.$$

В частности,

$$\langle \rho^2 \rho_\tau^2 \rangle = 4\sigma^4(1 + r^2(\tau)). \quad (2.4.17)$$

Для сравнения укажем, что

$$\langle \xi^2 \xi_\tau^2 \rangle = \sigma^4[1 + 2R^2(\tau)],$$

где

$$R(\tau) = p(\tau) \cos \omega_0 \tau - q(\tau) \sin \omega_0 \tau = \frac{\langle \xi \xi_\tau \rangle}{\langle \xi^2 \rangle}$$

— коэффициент корреляции процесса ξ . В общем случае ([2], с. 560)

$$\langle \rho^\nu \rho_\tau^\nu \rangle = (2\sigma^2)^{(\nu+\mu)/2} \Gamma^a \left(\frac{\nu}{2} + 1 \right) \Gamma \left(\frac{\mu}{2} + 1 \right) F \left(-\frac{\nu}{2}, -\frac{\mu}{2}, 1, r^2(\tau) \right), \quad (2.4.18)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция. Так как ряд, которым выражается гипергеометрическая функция, обрывается при целых отрицательных α или β , то

$$\langle \rho^{2n} \rho_\tau^{2m} \rangle = \left\{ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{[(k+1)!]^2} r^{2(k+1)}(\tau) \right\} (2\sigma^2)^{n+m} n! m! \quad (n \leq m). \quad (2.4.19)$$

Приведем некоторые корреляционные характеристики фазы, которые могут быть найдены из распределения (12) ([2], с. 567, 570):

$$\langle \varphi \varphi_\tau \rangle = \pi^2 \left(1 + 2\gamma - 4\gamma^2 + \frac{\Omega}{12} \right), \quad \overline{\varphi^2} = \frac{\pi^2}{3},$$

$$K_\varphi(\tau) = \frac{\overline{\varphi \varphi_\tau}}{\overline{\varphi^2}} = 3 \left(2\gamma - 4\gamma^2 + \frac{\Omega}{12} \right),$$

$$\langle |\varphi - \varphi_\tau| \rangle = \pi(1 - 4\gamma), \quad \langle |\varphi - \varphi_\tau|^2 \rangle = \pi^2 \left(8\gamma^2 - 4\gamma + \frac{4 - \Omega}{6} \right),$$

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_0 t + \varphi) \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle &= \langle \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos(\omega_0 \tau + \varphi_\tau - \varphi) \rangle = \frac{R(\tau)}{2} \frac{E(r) - (1 - r^2)K(r)}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\langle \cos \varphi \cos \varphi_\tau \rangle = \langle \sin \varphi \sin \varphi_\tau \rangle = \frac{1}{2} \langle \cos(\varphi - \varphi_\tau) \rangle = \frac{p(\tau)}{2} \frac{E(r) - (1 - r^2)K(r)}{r^2}.$$

В этих выражениях

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \arcsin r(\tau), \quad \Omega = \Omega(r) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{n^2}, \quad \Omega(1) = 1,$$

E и K — эллиптические интегралы, причем

$$\frac{E(r) - (1-r^2)K(r)}{r^2} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right]^2 \frac{r^{2n}}{n+1} = \frac{\pi}{4} (1 + 0,125r^2 + 0,047r^4 + \dots). \quad (2.4.20)$$

Согласно (2.3.11), (2.3.12) и (10) при малых τ

$$p(\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} \tau^2 \Omega_2^2, \quad q(\tau) \approx \tau \Omega_1, \quad r(\tau) \approx 1 - \frac{1}{2} \tau^2 \Omega_3^2, \quad (2.4.21)$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega)(\omega - \omega_0) d\omega, \quad \Omega_2^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega)(\omega - \omega_0)^2 d\omega, \quad (2.4.22)$$

$$\Omega_3^2 = \Omega_2^2 - \Omega_1^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega)(\omega - \omega_0 - \Omega_1)^2 d\omega \geq 0.$$

Параметры $\Omega_{1,2,3}$, имеющие размерность частоты, характеризуют ширину спектра квазигармонического процесса и то, как этот спектр расположен относительно частоты ω_0 . Если выбрать

$$\omega_0 = \omega'_0 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega)\omega d\omega, \quad (2.4.23)$$

то

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2^2 = \Omega_3^2 = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} G^+(\omega)\omega^2 d\omega - \omega_0^2. \quad (2.4.24)$$

Статистические характеристики производных по времени от огибающей и фазы. Если в (11) перейти к пределу $\tau \rightarrow 0$, то, полагая $\rho_\tau = \rho + \tau \dot{\rho}$ и используя (21), получим, домножив на якобиан $\left| \frac{\partial(\rho, \rho_\tau)}{\partial(\rho, \dot{\rho})} \right| = \tau$, совместную функцию распределения огибающей и ее производной:

$$w(\rho, \dot{\rho}) = \frac{\rho e^{-\rho^2/2\sigma^2}}{\sigma^2} \frac{e^{-\dot{\rho}^2/2\sigma^2\Omega_3^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Omega_3}. \quad (2.4.25)$$

Из (25) следует, что ρ и $\dot{\rho}$ статистически независимы (в совпадающие моменты времени), причем одномерная функция распределения вероятностей для $\dot{\rho}$ имеет вид гауссовской кривой

$$w(\dot{\rho}) = \frac{e^{-\dot{\rho}^2/2\sigma^2\Omega_3^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Omega_3} \quad (-\infty < \dot{\rho} < \infty) \quad (2.4.26)$$

с дисперсией

$$\langle \dot{\rho}^2 \rangle = \sigma^2 \Omega_3^2 = \langle \rho^2 \rangle \Omega_3^2 / 2.$$

Тем же способом из (12) находится совместное распределение для фазы и ее производной:

$$w(\varphi, \dot{\varphi}) = w(\varphi)w(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} w(\dot{\varphi}), \quad w(\dot{\varphi}) = \frac{\Omega_3^2}{2[(\dot{\varphi} - \Omega_1)^2 + \Omega_3^2]^{3/2}}$$

$$(\infty > \dot{\varphi} > -\infty)$$

или просто

$$w(\dot{\varphi}) = \frac{\Omega_2^2}{2(\dot{\varphi}^2 + \Omega_2^2)^{3/2}} \quad (\omega_0 = \omega'_0), \quad (2.4.27)$$

если считать, что средняя частота ω_0 выбрана в соответствии с (23).

Распределение (27) представлено на рис. 2.6. Характерная область наиболее вероятных значений $\dot{\varphi}$ определяется параметром Ω_2 . В частности, $|\dot{\varphi}| \leq 2\Omega_2$ с вероятностью 0,9 и $|\dot{\varphi}| \leq 7\Omega_2$ с вероятностью 0,99. Тем не менее дисперсия $\dot{\varphi}$ не имеет конечного значения:

$$\langle \dot{\varphi}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(\dot{\varphi}) \dot{\varphi}^2 d\dot{\varphi} = \infty.$$

Этот результат показывает, что, говоря о фазе узкополосного случайного процесса как о медленно меняющейся величине (по сравнению, например, с $\cos \omega_0 t$), следует соблюдать некоторую осторожность, так как при определенных условиях (вероятность их осуществления уменьшается с уменьшением Ω_2 , но остается конечной) фаза сколь угодно узкополосного квазигармонического процесса $\xi(t)$ может меняться быстро (см. сноску на с. 88). Рассмотрим теперь этот вопрос более подробно, используя найденные распределения вероятностей [3].

Предположим, что частота ω_0 выбрана равной ω'_0 (23), так что $\Omega_1 = 0$. Из распределения (10) можно получить распределения для огибающей, фазы и их производных

$$w(\rho, \dot{\rho}, \varphi, \dot{\varphi}) = w(\varphi)w(\dot{\varphi})w(\rho, \dot{\rho}),$$

где $w(\varphi) = 1/2\pi$, $w(\dot{\rho})$ имеет вид (26), а

$$w(\rho, \dot{\varphi}) = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi} \sigma^3 \Omega_2} \exp \left[-\frac{\rho^2(\Omega_2^2 + \dot{\varphi}^2)}{2\sigma^2 \Omega_2^2} \right]. \quad (2.4.28)$$

Из этого выражения видно, что значения ρ и $\dot{\varphi}$ сильно коррелированы. Условное распределение для $\dot{\varphi}$, соответствующее заданному значению огибающей ρ , будет

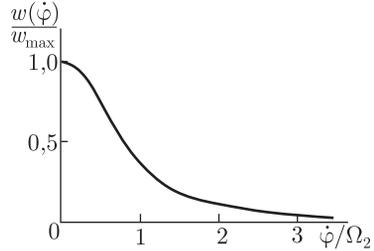


Рис. 2.6. Распределение вероятностей (27) для мгновенного значения частоты $\dot{\varphi}$.

$$w(\dot{\varphi} | \rho) = \frac{w(\rho, \dot{\varphi})}{w(\rho)} = \frac{\rho}{\sqrt{2\pi}\Omega_2\sigma} \exp\left[-\frac{\rho^2\dot{\varphi}^2}{2\sigma^2\Omega_2^2}\right]. \quad (2.4.29)$$

В отличие от безусловного распределения (27) оно имеет вид гауссовской кривой и характеризуется теперь уже конечной дисперсией

$$\langle \dot{\varphi}^2 \rangle_{\rho}^{\text{усл}} = \frac{\Omega_2^2\sigma^2}{\rho^2}. \quad (2.4.30)$$

Из (30) видно, что скорость изменения фазы становится особенно большой при «замираниях» шума $\xi(t)$, когда его огибающая $\rho(t)$, флукутуируя, падает до уровня, много меньшего, чем среднее значение $\bar{\rho} = \sqrt{2\pi/2}\sigma$.

Корреляционные свойства комплексной амплитуды. Сделаем некоторые замечания относительно статистических характеристик введенной в § 3 комплексной амплитуды узкополосного процесса применительно к рассматриваемым в этом параграфе гауссовским процессам. Представление (2.3.16) квазигармонического гауссовского процесса через комплексную амплитуду:

$$\xi(t) = A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (2.4.31)$$

(а не через огибающую и фазу), имеет определенные преимущества. В частности, из (2.3.17) следует, что статистика A в этом случае будет гауссовской, так что высшие корреляции A могут быть выражены через парные. Например, если процесс (31) стационарный, то в силу (2.3.19), (2.3.20)

$$\langle AA_{\tau} \rangle = 0, \quad \langle AA_{\tau}^* \rangle = \frac{\sigma^2}{2} [p(\tau) - iq(\tau)] \equiv \Gamma(\tau). \quad (2.4.32)$$

Тогда, используя (2.2.9), можно показать, что

$$\langle A^n A_{\tau}^n \rangle = 0, \quad \langle A^n A_{\tau}^{*n} \rangle = n! \Gamma^n(\tau) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.4.33)$$

При решении стохастических дифференциальных уравнений иногда бывает удобно заменить достаточно быстро меняющуюся случайную функцию $A^n(t)$ эквивалентным белым шумом $\eta(t)$:

$$A^n(t) \rightarrow \eta(t), \quad \langle \eta\eta_{\tau} \rangle = 0, \quad \langle \eta\eta_{\tau}^* \rangle = 2D\delta(\tau). \quad (2.4.34)$$

Корреляционную постоянную D в (34) определяем, приравнявая интегралы по τ от $\langle A^n A_{\tau}^{*n} \rangle$ и $\langle \eta\eta_{\tau}^* \rangle$:

$$n! \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^n(\tau) d\tau = 2D. \quad (2.4.35)$$

Напомним, что если спектр $G^+(\omega)$ процесса (31) симметричен относительно частоты ω_0 , то $\langle \xi\xi_{\tau} \rangle = \sigma^2 p(\tau) \cos \omega_0 \tau$, $q(\tau) = 0$ и $\Gamma(\tau) = \sigma^2 p(\tau)/2$ — вещественная функция τ .

Суперпозиция гармонического сигнала и гауссовского шума.

Полученные в предыдущих разделах результаты позволяют рассмотреть чрезвычайно важную для приложений модель случайного процесса, представляющего собой суперпозицию статистически независимых сигнала и шума. Такая модель описывает процессы на выходе реальных приемных устройств, куда принимаемый сигнал неизбежно приходит вместе с шумами, генерируемыми в самом приемном устройстве; в ряде случаев аддитивный шум накладывается на сигнал и в процессе распространения сигнала от передатчика к приемнику. Иногда модель сигнала с аддитивным шумом неплохо описывает и излучение на выходе некоторых генераторов радио- и оптического диапазона, хотя в общем случае здесь ситуация сложнее: в автоколебательной системе из-за нелинейности шум модулирует сигнал по амплитуде и фазе.

Использование представлений об огибающей и фазе узкополосных процессов позволяет дать весьма наглядную картину искажений сигнала, обусловленных аддитивным шумом. Если в отсутствие шума мы имеем дело, например, с идеальным монохроматическим сигналом, функции распределения амплитуды и фазы которого представляют собой δ -функции:

$$w(a) \sim \delta(a - a_0), \quad w(\varphi) \sim \delta(\varphi - \varphi_0),$$

то шум приводит к флуктуационному размытию этих распределений.

Удобным математическим выражением этих интуитивных представлений является представление случайно модулированного колебания в виде суперпозиции сигнала и шума. Однако теперь, в отличие от стационарного шума, огибающая и фаза будут, очевидно, статистически связанными; в зависимости от соотношения интенсивностей сигнала и шума мы должны в предельных случаях получить формулы, описывающие только сигнал или только шум.

Итак, рассмотрим случайный процесс типа сигнал + шум:

$$x(t) = S(t) + \xi(t). \quad (2.4.36)$$

Здесь $S(t)$ — некоторая регулярная функция времени (сигнал), а $\xi(t)$ — рассмотренный выше чисто флуктуационный ($\bar{\xi} = 0$) стационарный гауссовский случайный процесс (31) (шум). Записывая $S(t)$ как

$$S(t) = a_S(t) \cos \omega_0 t - b_S(t) \sin \omega_0 t = \rho_S(t) \cos[\omega_0 t + \varphi_S(t)], \quad (2.4.37)$$

$$\rho_S = \sqrt{a_S^2 + b_S^2}, \quad \varphi_S = \arctg \frac{a_S}{b_S}, \quad (2.4.38)$$

$$a_S = \rho_S \cos \varphi_S, \quad b_S = \rho_S \sin \varphi_S,$$

и используя (2.3.2), перепишем (36) в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= [a(t) + a_S(t)] \cos \omega_0 t - [b(t) + b_S(t)] \sin \omega_0 t = \\ &= \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

где теперь

$$\rho = \sqrt{(a + a_S)^2 + (b + b_S)^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{a + a_S}{b + b_S}, \quad (2.4.40)$$

$$a = \rho \cos \varphi - a_S, \quad b = \rho \sin \varphi - b_S. \quad (2.4.41)$$

Рассмотрим вероятностные характеристики огибающей ρ и фазы φ процесса $x(t)$. Как и выше, будем исходить из совместного распределения вероятностей для квадратурных компонент

$$w(a + a_S, b + b_S) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(a^2+b^2)/2\sigma^2}. \quad (2.4.42)$$

Переходя в (42) к переменным ρ и φ и учитывая, что

$$\left| \frac{\partial(a + a_S, b + b_S)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \rho,$$

получим

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{\rho^2 - 2\rho\rho_S \cos(\varphi - \varphi_S) + \rho_S^2}{2\sigma^2} \right] \quad (2.4.43)$$

$$(\rho \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi).$$

Проинтегрировав (43) по φ , получим распределение огибающей

$$w(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} w(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} I_0 \left(\frac{\rho\rho_S}{\sigma^2} \right) \exp \left[-\frac{\rho^2 + \rho_S^2}{2\sigma^2} \right], \quad (2.4.44)$$

иногда называемое обобщенным распределением Рэлея. В (44) $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Вид распределения (44) зависит от величины параметра

$$\mu^2 = \rho_S^2(t)/2\sigma^2 \quad (2.4.45)$$

(рис. 2.7). Если $S(t)$ и $\xi(t)$ — узкополосные процессы, то μ^2 ха-

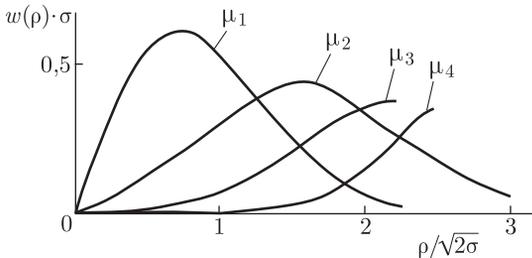


Рис. 2.7. Распределение вероятностей (44) для огибающей суммы сигнала и гауссовского шума

Параметром распределения является отношение сигнал/шум $= \mu^2$; $\mu_1 = 0$ (распределение Рэлея, $0 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$)

характеризует так называемое отношение сигнал/шум, т. е. отношение усредненной (по периоду высокой частоты ω_0) интенсивности сигнала $\rho_S^2(t)/2$ к средней интенсивности (или дисперсии) шума $\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle$. Проинтегрировав (43) по ρ , получим распределение фазы процесса (39):

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{-\mu^2} \{1 + \sqrt{\pi} z e^{z^2} [1 + \Phi(z)]\} \quad (2.4.46)$$

$$(z = \mu \cos(\varphi - \varphi_S))$$

(рис. 2.8).

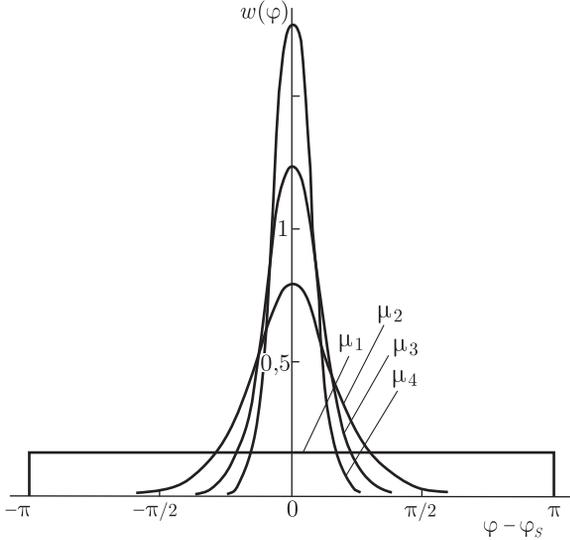


Рис. 2.8. Распределение вероятностей (46) для фазы суммы сигнала и гауссовского шума при различных отношениях сигнал/шум $= \mu^2$; $0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$

Нетрудно найти предельный вид распределений (44) и (46); при малом отношении сигнал/шум ($\mu^2 \ll 1$)

$$w(\rho) \approx \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \left(1 - \mu^2 + \mu^2 \frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.4.47)$$

$$w(\varphi) \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{\mu}{2\sqrt{\pi}} \cos(\varphi - \varphi_S) + \frac{\mu^2}{2\pi} \cos 2(\varphi - \varphi_S); \quad (2.4.48)$$

при большом отношении сигнал/шум ($\mu^2 \gg 1$)

$$w(\rho) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_S)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.4.49)$$

$$w(\varphi) \approx \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \exp[-\mu^2(\varphi - \varphi_S)^2]. \quad (2.4.50)$$

Гауссовские распределения (49), (50) нетрудно получить и непосредственно из (40): если $a \ll a_S$ и $b \ll b_S$, то в выражениях для ρ и φ достаточно учесть члены, линейные по a и b :

$$\rho \approx \rho_S + \frac{a_S a + b_S b}{\rho_S}, \quad \varphi \approx \varphi_S + \left(\frac{a}{a_S} - \frac{b}{b_S} \right) \sin \varphi_S \cos \varphi_S.$$

В этом приближении разности $\rho - \rho_S$ и $\varphi - \varphi_S$ линейно зависят от гауссовских случайных функций $a(t)$ и $b(t)$ и, следовательно, сами тоже обладают свойством гауссовости, причем их дисперсии равны

$$\langle (\rho - \rho_S)^2 \rangle = \sigma^2, \quad \langle (\varphi - \varphi_S)^2 \rangle = \sigma^2 / \rho_S^2 = 2 / \mu^2$$

в соответствии с (49), (50).

§ 5. Диффузионный (винеровский) процесс

В этом параграфе мы рассмотрим важную модель существенно нестационарного случайного процесса, которая будет использована в дальнейшем, — случайный процесс, являющийся интегралом по времени от некоторой случайной функции.

Итак, рассмотрим диффузионный процесс, описываемый выражением

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\theta) d\theta. \quad (2.5.1)$$

Функция (1) удовлетворяет уравнению

$$\dot{\eta}(t) = \xi(t). \quad (2.5.1a)$$

Важным радиофизическим примером стохастического уравнения типа (1a) является уравнение, описывающее флуктуации фазы в автономном генераторе радиодиапазона или лазере, возникающие под действием собственного теплового, дробового или квантового шума $\xi(t)$.

Зададим случайную функцию ξ в (1) соотношениями

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle \equiv \sigma_\xi^2 = \text{const}, \quad (2.5.2)$$

$$\langle \xi \xi_\tau \rangle \equiv B_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 R_\xi(\tau), \quad \tau_\xi = \int_0^\infty R_\xi(\tau) d\tau$$

(τ_ξ — время корреляции функции ξ). В этом случае согласно (1) и (1.4.7)

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta^2 \rangle = \sigma_\eta^2 = 2 \int_0^t (t - \tau) B_\xi(\tau) d\tau = \quad (2.5.3)$$

$$= 2 \int_0^\infty G_\xi(\omega) \left(\frac{\sin \omega t / 2}{\omega t / 2} \right)^2 d\omega \quad (2.5.3a)$$

или

$$\sigma_{\eta}^2(t) = 2\sigma_{\xi}^2 \int_0^t (t - \tau) R_{\xi}(\tau) d\tau \equiv 2\sigma_{\xi}^2 L_{\xi}(t), \quad (2.5.3б)$$

где по аналогии с (1.4.8) введена функция

$$L_{\xi}(t) = \int_0^t (t - \tau) R_{\xi}(\tau) d\tau. \quad (2.5.4)$$

Как следует из (3), дисперсия σ_{η}^2 зависит от времени,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{\eta}^2 &= 2 \int_0^t B_{\xi}(\tau) d\tau \neq 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \sigma_{\eta}^2 &= 2B_{\xi}(t) \neq 0, \end{aligned} \quad (2.5.4а)$$

Таким образом, процесс $\eta(t)$, определенный выражением (1), является нестационарным случайным процессом.

Согласно (1.4.9) и (1.4.9а, б) при малых и больших значениях t

$$L_{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & (t \ll \tau_{\xi}), \\ t\tau_{\xi} - t_{\xi}^2 \approx t\tau_{\xi} & (t \gg \tau_{\xi}). \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $\xi(t)$ — белый шум. При этом

$$\begin{aligned} \langle \xi = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle &= \sigma_{\xi}^2 = \infty, \quad G_{\xi}(\omega) = G = \text{const} \\ B_{\xi} &= 2D_{\xi} \delta(\tau), \quad D_{\xi} = \pi G, \quad \tau_{\xi} = 0, \end{aligned}$$

и согласно (3)

$$\sigma_{\eta}^2(t) = 2D_{\xi} t \quad (2.5.6)$$

— дисперсия диффузионного процесса (1) линейно растет со временем.

Параметр

$$D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \tau_{\xi} = \infty \cdot 0 = \text{const}$$

называется коэффициентом диффузии.

2. Спектр флуктуаций $\xi(t)$ — лоренцевский. При этом

$$\left. \begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= e^{-|\tau|/\tau_{\xi}}, \quad B_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 e^{-|\tau|/\tau_{\xi}}, \\ G_{\xi}(\omega) &= \frac{D_{\xi}}{\pi} \frac{1}{1 + \tau_{\xi}^2 \omega^2}, \quad D_{\xi} = \sigma_{\xi}^2 \tau_{\xi}, \quad t_{\xi} = \tau_{\xi}, \\ L_{\xi}(t) &= \tau_{\xi}^2 (e^{-x} - 1 + x), \quad x = t/\tau_{\xi}, \\ \frac{\sigma_{\eta}^2(t)}{2D_{\xi} \tau_{\xi}} &= \frac{L_{\xi}(x)}{\tau_{\xi}^2} = e^{-x} - 1 + x \end{aligned} \right\} \quad (2.5.7)$$

(см. рис. 2.9, кривая 1).

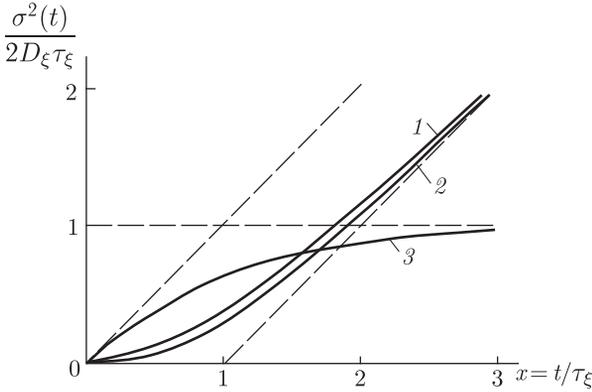


Рис. 2.9. Рост дисперсии диффузионного процесса (1) со временем

Кривые 1–3 построены для различных спектральных плотностей процесса $\eta(t)$: 1 — лоренцевский спектр, 2 — гауссовский спектр, 3 — спектр с отфильтрованными низкими частотами (10). Пунктирные кривые — асимптоты

3. Спектр флуктуаций $\xi(t)$ — гауссовский. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} R_\xi(\tau) &= e^{-\frac{1}{2}h^2\tau^2} = e^{-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\tau}{\tau_\xi}\right)^2}, \quad \tau_\xi = \frac{\pi}{2h}, \\ B_\xi(\tau) &= \sigma_\xi^2 e^{-\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{\tau}{\tau_\xi}\right)^2}, \quad t_\xi = \frac{1}{h} = \frac{2}{\pi}\tau_\xi, \\ G_\xi(\omega) &= G_\xi(0) = e^{-\omega^2/2h^2}, \\ L_\xi &= \tau_\xi^2 \left[x\Phi(x\sqrt{\pi}/2) - \frac{2}{\pi}(1 - e^{-x^2\pi/4}) \right] \\ &\quad (x = t/\tau_\xi) \\ \frac{\sigma_\eta^2(t)}{2D_\xi\tau_\xi} &= \frac{L_\xi(t)}{\tau_\xi^2} = x\Phi(x\sqrt{\pi}/2) - \frac{2}{\pi}(1 - e^{-x^2\pi/4}), \end{aligned} \right\} \quad (2.5.8)$$

где $\Phi(y) = \text{erf}(y)$ — интеграл вероятности (см. рис. 2.9, кривая 2). Кривые 1 и 2 на рис. 2.9 иллюстрируют переход от квадратичного закона нарастания дисперсии $\sigma_\eta^2(t)$ к линейному закону вида (6). Это соответствует обычной диффузии, когда спектр $G_\xi(\omega)$ имеет при $\omega = 0$ некоторое конечное значение,

$$0 < G_\xi(0) < \infty. \quad (2.5.9)$$

Но если $G_\xi(0) = 0$ или $G_\xi(0) \rightarrow \infty$, то увеличение дисперсии $\sigma_\eta^2(\tau)$ со временем будет иметь совершенно другой вид.

4. $G_\xi(0) = 0$. Предположим, например, что $\xi(t)$ — это белый шум с отфильтрованными низкими частотами:

$$G_\xi(\omega) = \frac{D_\xi}{\pi} \frac{\omega^2}{\omega^2 + h^2} = \frac{D_\xi}{\pi} \left(1 - \frac{h^2}{h^2 + \omega^2} \right), \quad (2.5.10)$$

$$B_\xi(\tau) = 2D_\xi \delta(\tau) - D_\xi h e^{-h|\tau|}, \quad h = 1/\tau_\xi.$$

Подставив (10) в (3), получим

$$\sigma_\eta^2(t) = 2D_\xi \tau_\xi (1 - e^{-t/\tau_\xi}) = 2D_\xi \tau_\xi (1 - e^{-x}), \quad (2.5.11)$$

($x = t/\tau_\xi$). Как видно из (11), на начальном интервале $0 \leq t \ll \tau_\xi$.

5. $G(0) = \infty$. Пусть, например,

$$G_\xi(\omega) = \frac{D}{\pi} \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right|^\nu \quad (0 \leq \nu < 1). \quad (2.5.12)$$

Подстановка (12) в (3а) дает

$$\sigma_\eta^2 = \frac{2D}{\omega_0 \cos(\pi\nu/2)} (\omega_0 t)^{1+\nu}. \quad (2.5.13)$$

В этом примере закон изменения дисперсии со временем может меняться от линейного ($\nu = 0$) до почти квадратичного ($\nu \approx 1$). Случай $\nu = 0$ соответствует тому, что $\eta(t)$ — белый шум (ср. (13) и (9)).

Согласно (13) зависимость $\ln \sigma^2$ от $\ln t$ является линейной:

$$\ln \sigma^2 = \text{const} + (1 + \nu) \ln(\omega_0 t), \quad (2.5.14)$$

причем наклон прямой (14) определяется только степенью ν в спектре (12)²⁾.

Диффузия фазы. В §§ 3, 4 мы рассматривали фазу как случайную величину, изменяющуюся в ограниченных пределах:

$$-\pi \leq \varphi(t) \leq \pi. \quad (2.5.15)$$

Это было связано с тем, что фактически мы интересовались не самой фазой, а периодическими функциями $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$.

Однако при решении стохастических дифференциальных уравнений фаза обычно определяется как случайный процесс, меняющийся в бесконечных пределах:

$$-\infty < \varphi(t) < \infty. \quad (2.5.16)$$

Например, при анализе действия шума на линейные или автоколебательные системы для фазы может быть получено уравнение вида (1а), что соответствует (16), а не (15). Между распределениями вероятно-

¹⁾ Спектр вида (12) отвечает реальному процессу — так называемому фликкер-шуму (см. [4]).

²⁾ Это обстоятельство может быть использовано для экспериментального определения величины ν .

стей фазы в обоих случаях имеется однозначная связь. Рассмотрим этот вопрос в общей постановке.

Приведение распределения вероятностей к интервалу периодичности.

При усреднении периодических функций

$$y = F(x) = F(x + nL) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.5.17)$$

от некоторого случайного процесса $x(t)$ вместо распределения вероятностей для x обычного вида

$$w(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.5.18)$$

заданных на бесконечном интервале, иногда удобно пользоваться распределением

$$w_L(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(x + nL) \quad (x_0 - L/2 \leq x \leq x_0 + L/2), \quad (2.5.19)$$

«свернутым» к интервалу периодичности L . Так как согласно (17) все значения x , отличающиеся на целое число L , для y полностью эквивалентны, то их вероятности, определяемые (18), в (19) суммируются. Величина x_0 в (19) произвольна. Типичным примером является случай, когда $x = \varphi(t)$ — фаза квазигармонического процесса.

Распределение $w_L(x)$ нормировано к L :

$$\frac{1}{L} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} w_L(x) dx = 1. \quad (2.5.20)$$

Функция $w_L(x)$ обладает свойством периодичности:

$$w_L(x + mL) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(x + mL + nL) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} w(x + n'L), \quad (2.5.21)$$

и, следовательно, ее можно представить в виде ряда Фурье

$$w_L(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{-i\kappa mx}, \quad \kappa = \frac{2\pi}{L}, \quad (2.5.22)$$

с коэффициентами

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{x_0-L/2}^{x_0+L/2} w_L(x) e^{i\kappa mx} dx = \frac{1}{L} \langle e^{i\kappa mx} \rangle_L. \quad (2.5.23)$$

Подстановка (19) в (23) дает

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{i\kappa mx} dx = \frac{1}{L} \langle e^{i\kappa mx} \rangle, \quad (2.5.24)$$

т. е. коэффициенты ряда Фурье (22) можно найти также преобразованием Фурье «развернутого» распределения (18). Согласно (24) формально можно записать решение обратной задачи:

$$w(x) = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_m e^{-i\kappa mx} dm. \quad (2.5.25)$$

Отметим два предельных случая, когда в рядах (19) и (22) остается по одному члену:

$$w_L(x) \approx w(x) \quad (L \gg \Delta x), \quad (2.5.26)$$

$$w_L(x) \approx 1/L \quad (L \ll \Delta x). \quad (2.5.27)$$

Здесь параметр $\Delta x \sim \sigma$ по порядку величины равен корню из дисперсии и характеризует область наиболее вероятных значений x в соответствии с распределением (18). Таким образом, с уменьшением интервала L или с увеличением дисперсии σ^2 распределение $w_L(x)$ стремится к равномерному (27).

Условие $\Delta x \sim \sigma \gg L$ реализуется, например, если $x(t)$ — диффузионный процесс винеровского типа, поскольку согласно (6) дисперсия процесса в этом случае неограниченно возрастает со временем. Подчеркнем, что при этом несвернутое распределение $w(x)$ соответствует нестационарному процессу, а свернутое (27) $w_L(x) \approx 1/L$ — стационарному. Отсюда, в частности, следует, что процесс с диффузией фазы можно рассматривать как процесс с равномерным распределением фазы $w_{2\pi}(\varphi) = 1/2\pi$.

Рассмотрим два примера.

1. Если распределение (18) гауссовское:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}, \quad (2.5.28)$$

то согласно (24) и (22)

$$a_m = \frac{1}{L} \exp\left(i\kappa m \bar{x} - \frac{1}{2} \kappa x^2 m^2 \sigma^2\right),$$

$$w_L(x) = \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos 2mv \right] = \frac{1}{L} \vartheta_3(v, q), \quad (2.5.29)$$

$$q = e^{-2\pi^2 \sigma^2 / L^2}, \quad v = \pi(x - \bar{x})/L,$$

где $\vartheta_3(v, q)$ — тэта-функция. Заметим, что непосредственная подстановка (28) в (19) дает

$$w_L(x) = \frac{e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q_1^{n^2} \cos v_1 n \right] = w(x) \vartheta_3(q_1, v_1), \quad (2.5.30)$$

$$q_1 = e^{-L^2/2\sigma^2}, \quad v_1 = i \frac{L}{\sigma^2} (x - \bar{x}).$$

Выражение (30) можно получить и непосредственно из (29), проведя преобразование тэта-функции к новым аргументам. При $L \gg \sigma$ распределение $w_L(x) \approx 1/L$, так как в этом случае $q \gg 1$ и в сумме (29) существенным будет лишь первый член. Обратный предельный случай, $L \ll \sigma$, легче проанализировать с помощью (30). При этом $q_1 \ll 1$ и $w_L(x) \approx w(x)$. Оба эти результата находятся в согласии с соотношениями (26), (27).

2. Если (18) — распределение Коши:

$$w(x) = \frac{\beta/\pi}{\beta^2 + x^2} \quad (-\infty < x < \infty), \quad (2.5.31)$$

то согласно (24)

$$a_m = \frac{1}{L} e^{-\beta\kappa|m|}. \quad (2.5.32)$$

Сумма (22) вычисляется в этом случае как геометрическая прогрессия:

$$\begin{aligned}
 w_L(x) &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\beta \varkappa |m| - i \varkappa m x} = \\
 &= \frac{1}{L} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta \varkappa m - i \varkappa m x} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta \varkappa m_i \varkappa m x} \right] = \\
 &= \frac{1}{L} \frac{\operatorname{th} \beta \varkappa}{1 - \frac{\cos \varkappa x}{\operatorname{ch} \varkappa \beta}} = \frac{\sqrt{1 - \beta_0^2}}{L} \frac{1}{1 - \beta_0 \cos \varkappa x} \quad \left(\beta_0 = \frac{1}{\operatorname{ch} \varkappa \beta} \right). \quad (2.5.33)
 \end{aligned}$$

Моменты

$$\langle x^n \rangle_L = \int_{-L/2}^{+L/2} w_L(x) x^n dx,$$

соответствующие распределению (33), имеют конечное значение, хотя для исходного распределения (31) они расходятся.

§ 6. Импульсные случайные процессы

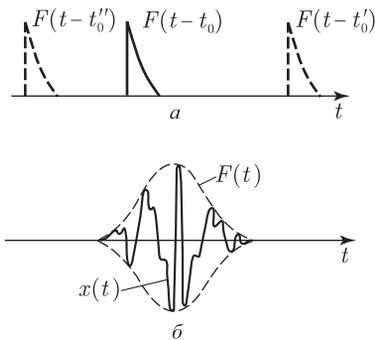


Рис. 2.10. Случайные импульсы:

а) одиночный импульс со случайным временем появления; б) импульс заданной формы со случайной субструктурой

здесь $F(t)$ — заданная регулярная функция времени (плавная огибающая импульса), а $\xi(t)$ ¹⁾ — случайный процесс. В оптических задачах в качестве процесса $\xi(t)$ в (2) часто рассматривается узкополосный оптический шум или его комплексная амплитуда (в так называемых укороченных уравнениях, см. гл. 6). Таким образом, наглядной моделью импульсного процесса рассматриваемого типа могут быть «вспышки» оптического шума.

Рассмотрим несколько моделей импульсных случайных процессов.

Одиночный случайный импульс. Представим себе импульс, форма которого известна и задана функцией $F(t)$, а момент появления t_0 случаен и меняется от реализации к реализации:

$$x(t) = F(t - t_0) \quad (2.6.1)$$

(рис. 2.10, а). Другой полезной моделью является импульс со случайной субструктурой (рис. 2.10, б):

$$x(t) = F(t) \xi(t). \quad (2.6.2)$$

Здесь $F(t)$ — заданная регулярная функция времени (плавная огибающая

¹⁾ Функция $\xi(t)$ может быть комплексной.

Случайная импульсная последовательность. Этот процесс состоит из совокупности импульсов (1):

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t - t_p). \quad (2.6.3)$$

Здесь $F(t)$ — регулярная функция времени, описывающая форму одиночного импульса, причем случайными могут быть как время появления t_p каждого импульса, так и полное число импульсов n (рис. 2.11).

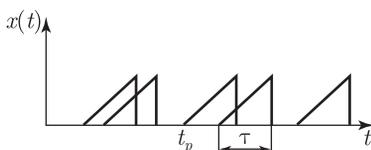


Рис. 2.11. Случайная импульсная последовательность $x(t)$

Импульсы имеют одинаковую форму, но возникают в случайные моменты времени. В задаче о дробовом шуме диода (см. ниже § 6) такие импульсы тока $x(t) = i(t)$ возникают при пролете электрона от катода к аноду: моменты их появления случайны в силу случайности процесса термоэлектронной (а также фотоэлектронной, см. § 5 гл. 3) эмиссии

Квазипериодический импульсный процесс. В этом случае

$$x(t) = \rho(t)F(\psi), \quad (2.6.4)$$

где $F(\psi)$ — периодическая функция:

$$F(\psi + 2\pi n) = F(\psi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.6.5)$$

аргумент которой следующим образом зависит от времени:

$$\psi = \omega_0 t + \varphi(t). \quad (2.6.6)$$

В частном случае постоянных $\rho = \rho_0$ и $\varphi = \varphi_0$ выражение (4) определяет регулярную периодическую последовательность импульсов произвольной формы F (рис. 2.12, а). При флуктуирующих $\rho(t)$ и $\varphi(t)$ эти импульсы будут случайным образом искажены как по высоте, так и по длительности (рис. 2.12, б).

Рассмотрим статистические характеристики перечисленных процессов.

Одиночный случайный импульс. Процесс (1) характеризуется средним значением и корреляционной функцией:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0)w(t_0) dt_0, \quad (2.6.7)$$

$$\overline{xx_\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - t_0)F(t + \tau - t_0)w(t_0) dt_0. \quad (2.6.8)$$

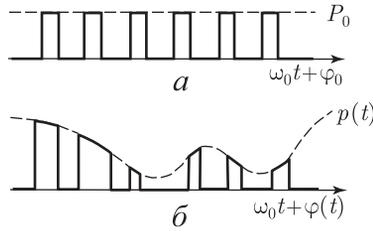


Рис. 2.12. Квазипериодический импульсный процесс:

- а) неискаженная последовательность прямоугольных импульсов; б) те же импульсы, искаженные «амплитудными» и «фазовыми» флуктуациями

В этих выражениях $w(t_0)$ — распределение вероятностей случайного момента t_0 появления импульса.

Предположим, что импульс $F(t)$ имеет максимум при t' и характеризуется длительностью $\tau_{\text{имп}}$, а «импульс» распределения $w(t_0)$ имеет длительность τ_0 , причем максимум $w(t_0)$ приходится на t'_0 . Как видно из (7), в предельных случаях а) $\tau_{\text{имп}} \ll \tau_0$ и б) $\tau_{\text{имп}} \gg \tau_0$ выражение для x будет следующим:

$$\text{а) } \langle x \rangle \approx w(t - t') \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.6.9)$$

$$\text{б) } \langle x \rangle \approx F(t - t'_0). \quad (2.6.10)$$

Аналогичным образом упрощается и выражение (8):

$$\text{а) } \overline{xx_\tau} \approx w(t - t'') \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta, \quad (2.6.11)$$

$$\text{б) } \overline{xx_\tau} \approx F(t - t'_0) F(t + \tau - t'_0). \quad (2.6.12)$$

Момент t'' в (11) определяется из условия, что при $t = t''$ произведение $F(t)F(t + \tau)$ принимает максимальное значение.

Таким образом, рассматриваемый одиночный импульс $x(t) = F(t - t_0)$ является, вообще говоря, нестационарным случайным процессом (\overline{x} и $\overline{xx_\tau}$ зависят от времени). В частности, для импульса гауссовской формы и при гауссовском распределении t_0 , т. е. при

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha^2 t^2} \quad (t_{\text{имп}} \sim 1/\alpha), \quad (2.6.13)$$

$$w(t_0) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 t_0^2}, \quad (2.6.14)$$

из (7), (8) находим

$$\langle x \rangle = \frac{F_0 \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2 \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} t^2 \right\}, \quad (2.6.15)$$

$$\overline{xx_\tau} = \frac{F_0^2 \beta}{\sqrt{2\alpha^2 + \beta}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2}{2\alpha^2 + \beta^2} [2t^2 \beta^2 + 2t\beta^2 \tau + \tau^2(\alpha^2 + \beta^2)] \right\}. \quad (2.6.16)$$

Однако если появление импульса равновероятно для любого момента на достаточно большом интервале

$$w(t_0) = 1/T, \quad T \gg t_{\text{имп}}, \quad (2.6.17)$$

то среднее значение и корреляционная функция перестают зависеть от времени:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.6.18)$$

$$\overline{xx_\tau} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) F(\theta + \tau) d\theta. \quad (2.6.19)$$

Процесс $x = F(t - t_0)$ в этом случае в пределах интервала T может считаться стационарным.

Представим импульс $F(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \varphi(-\omega) = \varphi^*(\omega); \quad (2.6.20)$$

подставив (20) в (19), получим после интегрирования по θ (это дает δ -функцию)

$$\overline{xx_\tau} = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega,$$

т. е. спектральная плотность стационарного случайного процесса типа одиночного случайного импульса равна

$$G(\omega) = \frac{2\pi}{T} |\varphi(\omega)|^2. \quad (2.6.21)$$

Другим видом случайного процесса типа одиночного импульса является импульс вида (2):

$$A(t) = F(t)\xi(t), \quad (2.6.22)$$

где $F(t)$ описывает огибающую импульса и является регулярной функцией времени, $\xi(t)$ — модулирующий случайный стационарный процесс. Процесс (22) при этом нестационарен; например, его дисперсия и корреляционная функция со временем меняются:

$$\sigma_A^2(t) = F^2(t)\xi^2, \quad \overline{A(t)A(t+\tau)} = F(t)F(t+\tau)\overline{\xi\xi_\tau}.$$

Однако коэффициент корреляции процесса A не зависит от формы импульса $F(t)$ и совпадает с коэффициентом корреляции процесса ξ :

$$R_A(\tau) = \frac{\overline{A(t)A(t+\tau)}}{\sigma_A(t)\sigma_A(t+\tau)} = \frac{\overline{\xi\xi_\tau}}{\xi^2} = R_\xi(\tau).$$

Таким образом, по виду $R_A(\tau)$ можно определить форму спектра $G_\xi(\omega)$ случайной модуляции.

Аналогичный результат может быть получен и для пространственного «импульса»:

$$A(x, y) = F(x, y)\xi(x, y)$$

(например, для распределения поля в поперечном сечении лазерного луча); пространственные коэффициенты корреляции для A и ξ совпадают: $R_A = R_\xi$.

Пуассоновская импульсная последовательность; формулы Кэмпбелла. Будем считать, что каждый импульс в сумме (3)

$$x(t) = \sum_{p=1}^n F(t - t_p) \quad (2.6.23)$$

возникает независимо от остальных. При этом времена появления t_p ($p = 1, 2, \dots, n$) и число импульсов n являются статистически независимыми случайными величинами:

$$w(n, t_1, t_2, \dots, t_n) = w(n)w(t_1) \dots w(t_n), \quad (2.6.24)$$

где все распределения $w(t_p)$ одинаковы, и средние

$$\begin{aligned} \langle F(t - t_0) \rangle &= \bar{F}, & \langle F(t + \tau - t_p) \rangle &= \bar{F}_\tau, \\ \langle F(t - t_p)F(t + \tau - t_p) \rangle &= \bar{F}F_\tau \end{aligned} \quad (2.6.25)$$

не зависят от индекса p . Усредняя (23) сначала по t_p , а затем по n , находим

$$x = \left\langle \sum_{p=1}^n F \right\rangle = \bar{n} \bar{F}, \quad (2.6.26)$$

$$\bar{x}_\tau = \left\langle \sum_{p=1}^n \bar{F}_\tau \right\rangle = \bar{n} \bar{F}_\tau, \quad (2.6.27)$$

$$\begin{aligned} \overline{xx_\tau} &= \left\langle \sum_p \sum_{p'} F(t - t_p)F(t + \tau - t_{p'}) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{p=p'} \bar{F}F_\tau + \sum_{p \neq p'} \bar{F} \bar{F}_\tau \right\rangle = n\bar{F}F_\tau + (\bar{n}^2 - \bar{n})\bar{F} \bar{F}_\tau, \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

$$B(\tau) = \overline{xx_\tau} - \bar{x} \bar{x}_\tau = \bar{n} \bar{F} F_\tau + (\bar{n}^2 - \bar{n} - \bar{n}^2) \bar{F} \bar{F}_\tau. \quad (2.6.29)$$

Чтобы конкретизировать эти выражения, рассмотрим следующую модель.

Пусть $\tau_{\text{имп}}$ характеризует длительность каждого импульса, а T — достаточно большой интервал времени, в течение которого импульсы появляются ($T \gg \tau_{\text{имп}}$). Будем считать, что появление каждого импульса в любой момент времени равновероятно:

$$w(t_p) = 1/T. \quad (2.6.30)$$

Поскольку $T \gg \tau_{\text{имп}}$, то в этом случае средние \overline{F} и $\overline{FF_\tau}$ от времени зависят практически не будут:

$$\overline{F} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta = \overline{F_\tau}, \quad \overline{FF_\tau} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta + \tau) d\theta. \quad (2.6.31)$$

Соотношения (31) называют формулами Кэмпбелла.

Найдем теперь статистику n , соответствующую этой модели. Как бы часто ни следовали друг за другом импульсы, всегда можно представить себе, что ось времени разбита на столь малые интервалы Δt , что в каждом интервале либо появится всего один новый импульс (с вероятностью p), либо не появится ни одного (с вероятностью $q = 1 - p$). Вероятность того, что за N интервалов появится n импульсов, дается в этом случае формулой Бернулли

$$P(n) = p^n q^{N-n} C_N^n \quad (n = 0, 1, \dots, N), \quad (2.6.32)$$

где

$$C_N^n = \frac{\overbrace{N(N-1)\dots(N-n+1)}^n}{n!} \geq 1 \quad (2.6.33)$$

— биномиальные коэффициенты:

$$(a+b)^N = \sum_{n=0}^N a^n b^{N-n} C_N^n. \quad (2.6.34)$$

Так как $N \Delta t = T$, то в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ в полученных соотношениях можно принять $N \rightarrow \infty$, т.е. $n \ll N$. При этом согласно (32), (33) $C_N^n \approx N^n/n!$ и

$$P(n) \approx p^n q^N N^n/n!,$$

или с точностью до нормировочной постоянной

$$P(n) \sim \alpha^n/n! \quad (\alpha = pN). \quad (2.6.35)$$

Подставляя (35) в условие нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$, находим окончательно

$$P(n) = e^{-\alpha} \alpha^n/n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.6.36)$$

Распределение (36) называют распределением Пуассона.

Можно дать другой вывод распределения Пуассона (36). Пусть n — целочисленная величина, определяющая появление числа импульсов (число событий) к моменту времени t , причем $n = 0$ при $t = 0$. Обозначим как $P(n, t)$ вероятность появления n импульсов на интервале $[0, t]$. Ясно, что $P(n, t) = 0$ при $n < 0$.

Предположим, что импульсы появляются независимо случайным образом с вероятностью (средней скоростью) ν . Изменение вероятности появления n импульсов (событий) $\Delta P(n, t)$ связано с вероятностью появления на временном интервале $[t, t + \Delta t]$ одного импульса и определяется уравнением

$$\Delta P(n, t) = P(n-1, t)\nu \Delta t - P(n, t)\nu \Delta t$$

или при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial P(n, t)}{\partial t} = \nu[P(n-1, t) - P(n, t)]. \quad (2.6.37)$$

Первое слагаемое справа в уравнении (37) обусловлено изменением вероятности, связанное с переходом из состояния с $(n-1)$ импульсом в состояние с n импульсами, а второе связано с переходом из состояния с n в состояние $(n+1)$. При $n = 0$ согласно (37)

$$\frac{\partial P(0, t)}{\partial t} = -\nu P(0, t).$$

Отсюда имеем

$$P(0, t) = e^{-\nu t}.$$

Решение (37) ищем в виде

$$P(n, t) = e^{-\nu t} Q(n, t).$$

Для $Q(n, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial Q(n, t)}{\partial t} = \nu Q(n-1, t)$$

с условием $Q(0, t) = 1$, решение которого методом итераций приводит к выражению

$$Q(n, t) = \frac{(\nu t)^n}{n!}.$$

Таким образом получаем результат

$$P(n, t) = (\nu t)^n \frac{e^{-\nu t}}{n!},$$

совпадающий с формулой (36).

Для распределения Пуассона $\langle n \rangle = \alpha$. В самом деле, дифференцируя (36) по α ряд

$$e^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!},$$

получим

$$e^\alpha = \sum \frac{n\alpha^{n-1}}{n!} = \frac{1}{\alpha} \sum \frac{n\alpha^n}{n!}, \quad \alpha = e^{-\alpha} \sum \frac{n\alpha^n}{n!} = \bar{n}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены и моменты n более высокого порядка. В частности, $\overline{n^2} = \alpha(1 + \alpha)$, так что дисперсия и среднее значение пуассоновской случайной величины n совпадают:

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \alpha = \langle n \rangle. \quad (2.6.38)$$

Согласно (36)

$$P(n+1) = P(n) \frac{\alpha}{n+1}.$$

Отсюда следует, что при целочисленных значениях $\alpha = m + 1$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) наибольшими являются вероятности двух значений n :

$$n_1 = m, \quad n_2 = m + 1, \quad P(n_1) = P(n_2).$$

При нецелых $\alpha = m + 1 + \varepsilon$ ($m = 0, 1, 2, \dots; 0 < \varepsilon < 1$) максимальная вероятность соответствует значению $n = m + 1$. Таким образом, при $\alpha = \bar{n} > 1$ зависимость $P(n)$ от n не является монотонной: вероятности сначала растут, а затем убывают (рис. 2.13, а). Если $\alpha < 1$, то картина будет другой: вероятности уменьшаются с ростом n (рис. 2.13, б).

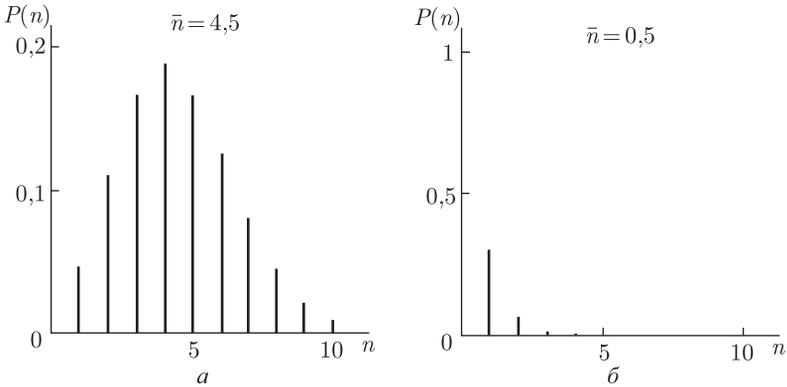


Рис. 2.13. Дискретное распределение Пуассона при $\bar{n} > 1$ (а) и $\bar{n} < 1$ (б)

С увеличением α величина $\sigma_n/\bar{n} = 1/\sqrt{\alpha} = 1/\sqrt{\bar{n}}$ стремится к нулю, распределение Пуассона становится относительно более узким и переходит в гауссовское. Действительно, используя формулу Стирлинга

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \dots\right)$$

и разложение логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m},$$

распределение Пуассона (36) можно переписать как

$$\begin{aligned} P(n) &\approx \frac{\exp\{n - \alpha - n \ln(n/\alpha)\}}{\sqrt{2\pi n}} = \frac{\exp\{\alpha[x - (1+x)\ln(1+x)]\}}{\sqrt{2\pi\alpha(1+x)}} = \\ &= \frac{\exp\left\{-\alpha \left[\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \dots\right]\right\}}{\sqrt{2\pi\alpha(1+x)}}, \end{aligned} \quad (2.6.39)$$

где $x = (n - \alpha)/\alpha = (n - \bar{n})/\bar{n}$ — относительное отклонение n от среднего значения. Согласно (38)

$$P_{\max} = P(n = \alpha) = 1/\sqrt{2\pi\alpha}.$$

Если $\sqrt{\alpha} \gg 1$, то существенным в (39) является лишь квадратичный по x член в экспоненте:

$$P(n) \approx \frac{e^{-\alpha x^2/2}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \frac{e^{-(n-\alpha)^2/2\alpha}}{\sqrt{2\pi\alpha}} = w(n). \quad (2.6.39a)$$

Мы приходим, таким образом, к гауссовскому распределению для n , причем n в (39a) можно считать непрерывной переменной (так как максимум гауссовского распределения (39a) характеризуется шириной $\sigma_n = \sqrt{\alpha} \gg 1$ и в него попадает много линий дискретного распределения $P(n)$).

Распределению Пуассона соответствует характеристическая функция

$$\begin{aligned} \theta(u) = \langle e^{iun} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{iun} P(n) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{iu})^n}{n!} = \\ &= \exp(\alpha e^{iu} - 1) = \exp \left\{ \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \right\}, \end{aligned} \quad (2.6.40)$$

и, как видно из (40), все кумулянты имеют одну и ту же величину

$$k_m = \alpha \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (2.6.41)$$

Величина относительных кумулянтов будет, однако, зависеть от α и m :

$$\varkappa_m = k_m/k_2^{m/2} = 1/\alpha^{m/2-1}.$$

В частности, если $\sqrt{\alpha} \gg 1$, то $\varkappa_m \ll 1$ ($m = 3, 4, \dots$) и (40) переходит в характеристическую функцию

$$\theta(u) = e^{+\alpha(iu - u^2/2)},$$

соответствующую гауссовскому распределению (39). Подставив (31) и (37) в (26) и (29), получим выражения для среднего значения и корреляционной функции пуассоновской импульсной последовательности:

$$\bar{x} = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) d\theta, \quad (2.6.42)$$

$$B(\tau) = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta)F(\theta + \tau) d\theta \quad (2.6.43)$$

(формулы Кэмпбелла — ср. с (18), (19)). Здесь введена средняя частота следования импульсов $\Omega = \alpha/T = \bar{n}/T$. Корреляционной функции (43) соответствует спектральная плотность

$$G(\omega) = 2\pi\Omega|\varphi(\omega)|^2, \quad (2.6.44)$$

где $\varphi(\omega)$ — фурье-образ функции $F(t)$, описывающей одиночный импульс рассматриваемой последовательности (ср. с (18)–(20)).

Характеристическая функция импульсного процесса (23) равна

$$\theta(u) = \left\langle \exp \left\{ iu \sum_{p=1}^n F(t - t_p) \right\} \right\rangle,$$

или, с учетом выражения (30),

$$\theta(u) = \langle \beta^n \rangle, \quad (2.6.45)$$

где усреднение производится по ансамблю значений n , а

$$\beta = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{iuF(t-t')} dt'. \quad (2.6.46)$$

В случае пуассоновской статистики n имеем

$$\theta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!} = e^{\alpha(\beta-1)} = \exp \left\{ \Omega \int_{-T/2}^{T/2} [e^{iuF(t-t')} - 1] dt' \right\}. \quad (2.6.47)$$

Если длительность отдельного импульса мала (по сравнению с T), то формулу (47) можно переписать как

$$\theta(u) = \exp \left\{ \Omega \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iuF(\theta)} - 1) d\theta \right\}. \quad (2.6.48)$$

Разлагая показатель экспоненты в ряд Тейлора по u , получим

$$\theta(u) = \exp \left\{ \Omega \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(iu)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta \right\},$$

т. е. кумулянты импульсного пуассоновского процесса равны

$$k_m = \Omega \int_{-\infty}^{\infty} F^m(\theta) d\theta. \quad (2.6.49)$$

Величину кумулянтов (49) можно оценить как

$$k_m \approx \Omega F_{\max}^m \tau_{\text{имп}},$$

где $\tau_{\text{имп}}$ — длительность импульса, $F_{\text{макс}}$ — его пиковое значение. Отсюда находим оценку для относительных кумулянтов:

$$\varkappa_m = \frac{k_m}{k_2^{m/2}} \approx \frac{1}{(\Omega\tau_{\text{имп}})^{m/2-1}}. \quad (2.6.50)$$

Итак, вид характеристической функции (48) импульсного процесса и, следовательно, распределение вероятностей определяются частотой следования импульсов и их формой. Оценка (50) показывает, что, если в течение времени, пока длится один импульс, появляется достаточно много новых импульсов, т. е. в предельном случае

$$(\Omega\tau_{\text{имп}})^{1/2} \gg 1, \quad (2.6.51)$$

основную роль играют лишь два первых кумулянта и распределение вероятностей приближенно будет гауссовским. В общем случае $w(x)$ имеет вид фурье-образа характеристической функции (48):

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\Omega \int_{-\infty}^{\infty} [e^{iuF(\theta)} - 1] d\theta - iux\right\} du. \quad (2.6.52)$$

Производящая функция. Факториальные моменты. В некоторых случаях при исследовании дискретных случайных процессов удобно использовать так называемую производящую функцию

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n) \quad (0 \leq z \leq 1). \quad (2.6.53)$$

Дифференцируя $Q(z)$ по z , можно найти факториальные моменты

$$\langle n^{(k)} \rangle = \langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle = \left(\frac{d}{dz}\right)^k Q(z) \Big|_{z=1}, \quad (2.6.54)$$

а затем и обычные моменты $\langle n^m \rangle$, связанные с факториальными моментами соотношениями:

$$\langle n^{(1)} \rangle = \langle n \rangle, \quad \langle n^{(2)} \rangle = \langle n(n-1) \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle$$

и т. д., так что, например,

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \langle n^{(1)} \rangle, \quad \langle n^2 \rangle = \langle n^{(2)} \rangle + \langle n^{(1)} \rangle, \\ \sigma_n^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n^{(2)} \rangle + \langle n^{(1)} \rangle - \langle n^{(1)} \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.6.55)$$

Для распределения Пуассона (36) получим:

$$Q(z) = e^{\alpha(z-1)}, \quad \langle n^{(k)} \rangle = \alpha^k,$$

т. е.

$$\langle n^{(1)} \rangle = \alpha, \quad \langle n^{(2)} \rangle = \alpha^2. \quad (2.6.56)$$

Подстановка (56) в (55) дает

$$\langle n \rangle = \alpha, \quad \langle n^2 \rangle = \alpha(1 + \alpha), \quad \sigma_n^2 = \alpha$$

— в согласии с полученными ранее результатами (см. формулу (38)).

Дробовой шум; формула Шоттки. Важным примером импульсного случайного процесса является дробовой шум электронных ламп. Анодный ток электронной лампы представляет собой случайную последовательность импульсов, обусловленную статистическим характером электронной эмиссии. Расчет характеристик возникающего импульсного случайного процесса представляет собой, вообще говоря, весьма сложную задачу; в общем случае существенным оказывается взаимодействие между электронами. Имеется, однако, важный случай, для которого расчет статистики дробового шума не представляет труда, — задача о дробовом шуме диода, работающего в режиме насыщения. Здесь взаимодействиями электронов в межэлектродном промежутке можно пренебречь; статистика импульсов анодного тока полностью аналогична статистике термоэлектронной эмиссии. Поскольку последняя является пуассоновской (различные термоэлектроны эмиттируются независимо), определение статистики анодного тока сводится к расчету характеристик пуассоновских импульсов.

Рассмотрим плоский диод, разность потенциалов между электродами которого равна V ; межэлектродное расстояние обозначим через d (рис. 2.14). Вероятность вылета одного термоэлектрона в интервале времени dt равна

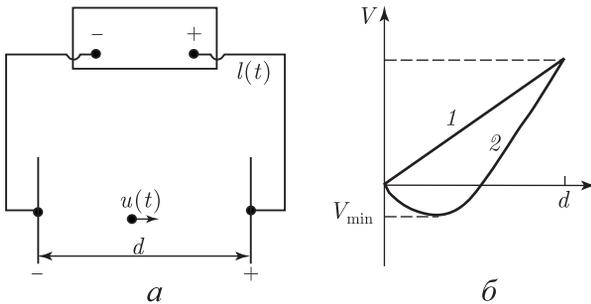


Рис. 2.14. Схема диода (а) и распределение потенциала в диоде (б):

1 — в насыщенном диоде, 2 — при ограничении тока пространственным зарядом

$$dP = p dt, \quad (2.6.57)$$

где p — вероятность вылета в единицу времени. Тогда вероятность вылета n электронов за время T описывается распределением Пуассона с $\bar{n} = \Omega T$, где $\Omega = I_0/e$ — среднее число электронов, эмиттируемых катодом в единицу времени, I_0 — средний ток и e — заряд электрона.

Соотношение (44) сразу же дает нам выражение для спектра дробового шума:

$$G(\omega) = 2\pi\Omega|i(\omega)|^2, \quad (2.6.58)$$

и вычисление спектра сводится, таким образом, к определению фурье-образа $i(\omega)$ импульса тока $i(t)$, возбуждаемого в анодной цепи отдельным электроном. Для расчета формы импульса тока можно воспользоваться следующими простыми соображениями.

При движении электрона от катода к аноду на отрезке пути ds внешнее поле \mathbf{E} совершает работу $dW = e\mathbf{E} ds$. В силу закона сохранения энергии можно записать

$$i(t)V dt = e\mathbf{E} ds = eE dz$$

(учтено, что диод является плоским), откуда

$$i(t) = \frac{e}{V} E \frac{dz}{dt} = \frac{e}{d} u(t), \quad (2.6.59)$$

где $u(t)$ — мгновенное значение скорости, $V = Ed$. Величину $u(t)$ можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{z} = eE.$$

При достаточно высоком напряжении V тепловой скоростью электрона можно пренебречь; полагая, что при $t = 0$ $z = 0$ и $\dot{z} = 0$, для $i(t)$ получаем

$$i(t) = 2et/\tau_{\text{пр}}^2, \quad \tau_{\text{пр}}^2 = 2md/eE, \quad 0 \leq t \leq \tau_{\text{пр}}, \quad (2.6.60)$$

где $\tau_{\text{пр}}$ — время пролета электрона от катода к аноду.

Таким образом, анодный ток насыщенного диода представляет собой случайную последовательность импульсов треугольной формы вида (60) (см. рис. 2.11):

$$I(t) = \sum_n i(t - t_n) = \sum_n \frac{2e}{\tau_{\text{пр}}^2} (t - t_n), \quad 0 \leq t - t_n \leq \tau_{\text{пр}},$$

где t_n — моменты вылета электронов.

Фурье-образ импульса тока имеет вид

$$i(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{e}{\pi\tau_{\text{пр}}^2} \int_0^{\tau_{\text{пр}}} te^{-i\omega t} dt, \quad (2.6.61)$$

$$|i(\omega)|^2 = \left(\frac{e}{\pi\theta^2}\right)^2 [2 + \theta^2 - 2\theta \sin \theta - 2 \cos \theta] \equiv \left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \mathcal{F}(\theta),$$

где $\theta = \omega\tau_{\text{пр}}$ — величина, которую в электронике принято называть пролетным углом.

Пользуясь (61), для спектральной плотности дробового шума насыщенного диода получим

$$G^+(\omega) = \mathcal{F}(\theta) \frac{e}{\pi} I_0. \quad (2.6.62)$$

Важно отметить, что частота входит в спектральную плотность в комбинации со временем пролета. Согласно (62) спектральная плотность дробового шума максимальна при $\theta \rightarrow 0$ ($\omega \rightarrow 0$). Разлагая $\sin \theta$ и $\cos \theta$ в ряд, нетрудно убедиться, что

$$G^+(0) = \frac{e}{\pi} I_0. \quad (2.6.63)$$

Эта формула носит название формулы Шоттки; ею пользуются обычно при расчете дробовых шумов низкочастотных электронных ламп. При $\theta \rightarrow \infty$ $G(\omega) \rightarrow 0$, т. е. при больших пролетных углах дробовой шум исчезает.

Отмеченное обстоятельство не следует рассматривать, однако, как рецепт повышения чувствительности усилителей на электронных лампах; при $\theta \rightarrow \infty$ резко уменьшается и коэффициент усиления.

Добиться уменьшения уровня дробового шума можно, переходя от режима насыщения к режиму ограничения тока пространственным зарядом. В этом случае вблизи катода (см. рис. 2.14, б) формируется минимум потенциала V_{\min} , глубина которого зависит от тока эмиссии, что приводит к уменьшению флуктуации анодного тока. Этот эффект называется депрессией дробовых шумов.

С учетом эффекта депрессии формулу (63) следует записать в виде

$$G^+(\omega) = \Gamma \frac{e}{\pi} I_0, \quad (2.6.64)$$

где Γ — так называемый коэффициент депрессии. Результаты расчета коэффициента депрессии (в этом случае принципиальным становится учет распределения электронов по скоростям) можно найти в [5]. На низких частотах величина $\Gamma \approx 0,01$, так что депрессия дробового шума оказывается достаточно сильной.

Учет взаимодействий между электронами на высоких частотах представляет собой трудную задачу; с проблемами теории высокочастотных дробовых шумов в электронных лампах можно ознакомиться по монографии [5].

§ 7. Телеграфный случайный процесс

Особый тип импульсного случайного процесса представляет телеграфный случайный процесс, изображенный на рис. 2.15. В этом

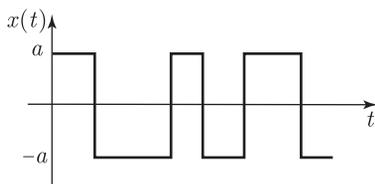


Рис. 2.15. Реализация случайного телеграфного процесса

случае импульсный процесс принимает значения a или $-a$, которые сменяют друг друга поочередно. Переключение с одного значения на другое (смена знака) происходит мгновенно, а продолжительность конкретного значения определяется пуассоновским распределением переключений со средней частотой ν .

Аналитически рассматриваемый процесс записывается так

$$x(t) = (-1)^n a, \quad (2.7.1)$$

где $n = n(t)$ — число переключений на интервале $[0, t]$, которое задается распределением Пуассона (2.6.36):

$$P(n, t) = \frac{(\nu t)^n}{n!} e^{-\nu t}. \quad (2.7.2)$$

Среднее значение случайного процесса $x(t)$ равно

$$\langle x(t) \rangle = a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n, t) = a^{-2\nu t}. \quad (2.7.3)$$

Очевидно, что средний квадрат процесса равен

$$\langle x^2(t) \rangle = a^2. \quad (2.7.4)$$

Для расчета корреляционной функции процесса $x(t)$, исходя из ее определения (1.3.2), нужно знать двумерную функцию распределения $w(x(t), x(t + \tau))$. Запишем ее следуя рассуждениям, изложенным в [7]. Если на интервале $[t, t + \tau]$ имеется четное число переключений, то $x = x(t)$ и $x_\tau = x(t + \tau)$ имеют одинаковые знаки, т. е. с одинаковой вероятностью равны $+a$, $+a$ либо $-a$, $-a$. При нечетном числе переключений на рассматриваемом интервале значения x и x_τ имеют разные знаки и равны либо $+a$, $-a$, либо $-a$, $+a$. Аналитически сказанное можно представить с помощью дельта-функций:

$$w(x, x_\tau) = \frac{1}{2} [\delta(x - a)\delta(x_\tau - a) + \delta(x + a)\delta(x_\tau + a)]P_{\text{четн.}} + \frac{1}{2} [\delta(x - a)\delta(x_\tau + a) + \delta(x + a)\delta(x_\tau - a)]P_{\text{нечетн.}} \quad (2.7.5)$$

Здесь

$$P_{\text{четн.}} = \sum_{n=0}^{\infty} P(2n, \tau), \quad P_{\text{нечетн.}} = \sum_{n=0}^{\infty} P(2n + 1, \tau). \quad (2.7.6)$$

Подставим двумерное распределение (5) в общее выражение для корреляционной функции (1.3.2). Используя свойство дельта-функции, трудно получить для коррелятора $\langle x(t)x(t + \tau) \rangle$ следующий результат:

$$\langle x(t)x(t + \tau) \rangle = a^2(P_{\text{четн.}} - P_{\text{нечетн.}}). \quad (2.7.7)$$

Принимая во внимание (2), для корреляционной функции процесса имеем

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n P(n, \tau) = a^2 e^{-2\nu\tau}. \quad (2.7.8)$$

Заметим, что выражение (7) можно, очевидно, записать сразу, не обращаясь к распределению (5). Последнее, однако, можно применять и в более общем случае, нежели рассмотренный здесь.

Другой, более компактный способ получения результата (8)

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t+\tau)+n(t)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{n(t,t+\tau)} \rangle = a^2 e^{-2\nu\tau}. \quad (2.7.9)$$

Корреляционной функции (6) соответствует лоренцевский спектр, хотя импульсы имеют прямоугольную форму. Согласно (3) и (8), рассматриваемый случайный процесс становится стационарным при временах измерения гораздо больше средней длительности импульса, т.е. при $t \gg 1/\nu$. В этом случае значения a и $-a$ оказываются равновероятными.

Для корреляционных функций более высокого порядка $M(t_1, t_2, \dots, t_n)$ процесса (1) нетрудно получить при $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$ рекуррентное соотношение (см. [8])

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2, t_3, \dots, t_m) &= a^m \langle (-1)^{n(t_1)+n(t_2)+n(t_3)+\dots+n(t_m)} \rangle = \\ &= a^m \langle (-1)^{n(t_1)+n(t_2)} \rangle \langle (-1)^{n(t_3)+\dots+n(t_m)} \rangle = \langle x(t_1)x(t_2) \rangle M(t_3, \dots, t_m). \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

При выводе (10) важную роль играет временное упорядочение: $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$. Обратим внимание на то, что формула (10) похожа на формулу для многомерных моментов гауссовского распределения (см. § 2 гл. 1). Однако в рассматриваемом случае «связанными» оказываются только два слагаемых. Формула (10) будет использована в § 5 гл. 4 для расщепления корреляций при анализе колебаний под воздействием случайного телеграфного сигнала.

Литература к главе 2

1. *Рэлей (Стретт Дж. В.)* Теория звука: Пер. с англ. / Под ред. С. М. Рытова. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.
2. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ. / Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
3. *Жодзишский А. И., Кий А. А.* — Радиотехн. и электрон., 1968, т. 13, с. 366.
4. *Малахов А. Н.* Флуктуации в автоколебательных системах. — М., 1968.
5. *Шумы в электронных приборах* / Под ред. Л. Д. Смуллина и Г. Хауса. — М.: Энергия, 1964.
6. *Лэкс М.* Флуктуации и когерентные явления. — М.: Мир, 1974.
7. *Харкевич А. А.* Спектры и анализ. — М.: Физматлит, 1962.
8. *Кляцкин В. И.* Динамика стохастических систем. — М.: Физматлит, 2002.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И ПОЛЕЙ

§ 1. Негауссовские квазигармонические стационарные процессы

В § 4 гл. 2 для огибающей и фазы узкополосного гауссовского процесса мы получили ряд физически наглядных результатов. Возникает естественный вопрос: как изменится статистика огибающей и фазы, если процесс негауссовский? Этот вопрос имеет не только методический интерес; с негауссовскими процессами в нелинейных системах приходится встречаться часто. Математические результаты, приведенные ниже, позволяют глубже понять статистику узкополосных процессов.

Универсальность равномерного распределения фазы. Рассмотрим опять процесс вида (2.3.1):

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.1.1)$$

но теперь с произвольным (не обязательно гауссовским) распределением вероятностей $w(\xi)$ ([1], ч. 1, с 310; [2, 3]). Случайные функции ξ , ρ и φ в дальнейшем считаются *стационарными*. Это условие стационарности позволяет сделать ряд общих выводов о статистических свойствах ρ и φ . Покажем, что независимо от вида $w(\xi)$ распределение $w(\varphi)$ является равномерным:

$$w(\varphi) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad (3.1.2)$$

как это было установлено раньше для частного случая гауссовского распределения $w(\xi)$ (см. (2.4.5)). Будем исходить из общего выражения для характеристической функции процесса (1):

$$\theta(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{i u \rho \cos(\omega_0 t + \varphi)} w(\rho, \varphi). \quad (3.1.3)$$

Здесь $w(\rho, \varphi)$ — пока неизвестное совместное распределение ρ и φ , соответствующее некоторому заданному распределению $w(\xi)$ квазигармонического процесса (1). Учитывая, что рассматриваются значения

фазы, принадлежащие интервалу $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, это распределение можно написать в виде ряда Фурье:

$$w(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(\rho) e^{in\varphi}. \quad (3.1.4)$$

В аналогичном виде представим также второй множитель в (3):

$$e^{i u \rho \cos \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(u\rho) e^{im\psi}, \quad (3.1.5)$$

$$\psi = \omega_0 t + \varphi, \quad U_m(u\rho) = i^m J_m(u\rho),$$

J_m — функция Бесселя; заметим, что

$$J_{-m}(z) = J_m(-z) = (-1)^m J_m(z). \quad (3.1.6)$$

Подставив (4) и (5) в (3) и интегрируя по φ , получим

$$\theta(u) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n e^{in\omega_0 t} \int_0^{\infty} V_n(\rho) J_n(u\rho) d\rho. \quad (3.1.7)$$

Однако $\theta(u)$ не должна зависеть от t , поскольку процесс $\xi(t)$ предполагается стационарным. Это значит, что все $V_n(\rho)$ в (4) равны нулю, кроме $V_0(\rho)$, т. е.

$$w(\rho, \varphi) = V_0(\rho). \quad (3.1.8)$$

Независимость совместного распределения (8) от φ означает, что $w(\varphi) = \text{const}$; учитывая нормировку $\int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi) d\varphi = 1$, приходим к (2).

Независимость ρ и φ . Выражения (7), (8) можно теперь переписать как

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} w(\rho) J_0(u\rho) d\rho, \quad (3.1.9)$$

$$w(\rho, \varphi) = w(\rho)w(\varphi) = w(\rho) \frac{1}{2\pi}, \quad (3.1.10)$$

где $w(\rho)$ — распределение для огибающей. Согласно (10) значения ρ и φ статистически независимы (в совпадающие моменты времени). Из (2) также следует, что

$$\langle \cos^{2n+1} \varphi \rangle = \langle \sin^{2n+1} \varphi \rangle = 0, \quad (3.1.11)$$

$$\langle \cos^{2n} \varphi \rangle = \langle \sin^{2n} \varphi \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (3.1.12)$$

$$\langle |\cos^{2n+1} \varphi| \rangle = \langle |\sin^{2n+1} \varphi| \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (3.1.13)$$

Учитывая статистическую независимость ρ и φ и (11)–(13), имеем следующие соотношения между моментами ξ , $|\xi|$ и ρ :

$$\langle \xi^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle \xi^{2n} \rangle = \langle \rho^{2n} \rangle \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad (3.1.14)$$

$$\langle |\xi^{2n+1}| \rangle = \langle \rho^{2n+1} \rangle \frac{2}{\pi} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}. \quad (3.1.15)$$

Равенство нулю нечетных моментов ξ означает, что кривая распределения $w(\xi)$ симметрична, а $\theta(u)$ — вещественная четная функция u :

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \theta(u) \cos u\xi \, du = w(-\xi), \quad (3.1.16)$$

$$\theta(u) = 2 \int_0^{\infty} w(\xi) \cos u\xi \, d\xi = \theta(-u) = \theta^*(u). \quad (3.1.17)$$

Связь характеристической функции процесса с распределением его огибающей. Так как распределение $w(\varphi)$ для всех квазигармонических стационарных процессов имеет один и тот же вид (2), то статистические свойства процесса ξ и его огибающей ρ оказываются однозначно связанными между собой. Например, преобразуя по обычным правилам совместное распределение (10) к новым переменным $\xi = \rho \cos \psi$ и $\eta = \rho \sin \psi$ ($\psi = \omega_0 t + \varphi$), а затем исключив η интегрированием, получим

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \left. \frac{w(\rho)}{\rho} \right|_{\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{w(\rho) \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}}. \quad (3.1.18)$$

Выражением (9) непосредственно через $w(\rho)$ определяется характеристическая функция квазигармонического процесса. Заметим, что (9) является преобразованием Ганкели. Используя обратное преобразование, придем к соотношению

$$w(\rho) = \rho \int_0^{\infty} J_0(u\rho) \theta(u) u \, du, \quad (3.1.19)$$

позволяющему найти распределение огибающей $w(\rho)$, если известна характеристическая функция $\theta(u)$. Рассмотрим несколько примеров.

1. Гауссовскому распределению

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2/2\sigma^2} \quad (-\infty < \xi < \infty)$$

соответствует характеристическая функция $\theta(u) = e^{-u^2\sigma^2/2}$. Условия четности (16), (17) при этом, очевидно, выполняются. Используя (19),

получим для огибающей распределение Рэлея (2.4.6):

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0).$$

2. Для квазигармонического стационарного процесса с постоянной неслучайной амплитудой ρ_0 находим, полагая в (18), (19) $w(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$,

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 - \xi^2}} & (|\xi| < \rho_0), \\ 0 & (|\xi| > \rho_0), \end{cases} \quad \theta(u) = J_0(u\rho_0). \quad (3.1.20)$$

Распределение (20) получено нами раньше другим способом (см. (1.4.21)).

3. В случае равномерного распределения

$$w(\xi) = 1/2\xi_0 \quad (-\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0)$$

согласно (9) и (19)

$$\theta(u) = \frac{\sin u\xi_0}{u\xi_0}, \quad w(\rho) = \frac{\rho}{\xi_0 \sqrt{\xi_0^2 - \rho^2}} \quad (0 \leq \rho \leq \xi_0). \quad (3.1.21)$$

4. Квазигармонический процесс, все значения огибающей и фазы которого равновероятны:

$$w(\rho) = 1/\rho_0 \quad (0 \leq \rho \leq \rho_0), \quad w(\varphi) = 1/2\pi, \quad (3.1.22)$$

имеет согласно (18) следующее распределение:

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi\rho_0} \ln(\rho_0^2 - \xi^2 + \sqrt{\rho_0^2 - \xi^2 + 1}) \quad (|\xi| \leq \rho_0).$$

5. Если распределение ξ экспоненциальное:

$$w(\xi) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|\xi|}, \quad \langle \xi^2 \rangle = \frac{2}{\alpha^2},$$

то характеристическая функция равна $\theta(u) = \alpha^2/(\alpha^2 + u^2)$, а распределение огибающей выражается через функцию Макдональда:

$$w(\rho) = \alpha^2 \rho K_0(\alpha\rho), \quad \langle \rho \rangle = \pi/2\alpha, \quad \langle \rho^2 \rangle = 4/\alpha^2. \quad (3.1.23)$$

6. Если огибающая распределена по гауссовскому (одностороннему) закону

$$w(\rho) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\rho^2/2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0), \quad (3.1.24)$$

то $\theta(u) = e^{-u^2\sigma^2/4} I_0(u^2\sigma^2/4)$ и

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\pi\sigma} e^{-\xi^2/4\sigma^2} K_0\left(\frac{\xi^2}{4\sigma^2}\right) \quad (-\infty < \xi < \infty).$$

7. Для квазигармонического процесса с распределением

$$w(\xi) = \frac{\alpha/\pi}{\xi^2 + \alpha^2}, \quad \langle |\xi|^n \rangle = \infty,$$

характеристическая функция имеет вид экспоненты $\theta(u) = e^{-\alpha|u|}$; подставив это в (19), найдем распределение огибающей

$$w(\rho) = \frac{\alpha\rho}{(\alpha^2 + \rho^2)^{3/2}}, \quad \langle \rho^n \rangle = \infty. \quad (3.1.25)$$

Распределение интенсивности. Общие соотношения, связывающие распределения интенсивности $I = \rho^2/2$ и огибающей ρ , имеют вид

$$w(I) = \frac{w(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{2I}}, \quad w(\rho) = \rho w(I) \Big|_{I=\rho^2/2}. \quad (3.1.26)$$

Как следует из (14), моменты интенсивности выражаются через четные моменты процесса (1):

$$\langle \xi^{2n} \rangle = \frac{2^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \langle I^n \rangle. \quad (3.1.27)$$

Используя (19) и (26), $w(I)$ можно выразить непосредственно через характеристическую функцию квазигармонического процесса (1):

$$w(I) = \int_0^\infty J_0(u\sqrt{2I})\theta(u)u \, du. \quad (3.1.28)$$

Аналогично, по заданному распределению интенсивности $w(I)$ однозначно определяется характеристическая функция процесса (1)

$$\theta(u) = \int_0^\infty w(I)J_0(u\sqrt{2I}) \, dI \quad (3.1.29)$$

и его распределение вероятностей

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\eta w(I) \Big|_{I=(\xi^2+\eta^2)/2} = \frac{1}{\pi} \int_{\xi^2/2}^\infty \frac{w(I) \, dI}{\sqrt{2I-\xi^2}}$$

— это непосредственно следует из (9), (18) и (26).

Используя (30), определим, например, статистику колебаний в автоколебательных системах (томсоновский генератор, лазер), находящихся под действием внутренних шумов. Распределение огибающей в этом случае имеет вид

$$w(\rho) = C\rho \exp(-a\rho^2 - b\rho^4)$$

(a , b и C — постоянные параметры), так что согласно (26)

$$w(I) = C \exp(-2aI - 4bI^2).$$

Подставив последнее выражение в (30), получим

$$w(\xi) = \frac{Cy}{\sqrt{\mu}} e^{-\mu y \xi^2 - 2y^2} K_{1/4}(2y^2), \quad (3.1.30)$$

где

$$\mu = 4\sqrt{b}, \quad y = \frac{a + 2b\xi^2}{\mu},$$

$K_{1/4}(z)$ — цилиндрическая функция (см. формулу (3.323в) в [4]).

В качестве еще одного примера решения обратной задачи (т.е. восстановления статистики процесса по распределению его интенсивности) рассмотрим модель процесса, для которого все значения интенсивности принимаются в некотором интервале равновероятными:

$$w(I) = \begin{cases} 1/2\sigma^2, & 0 < I < 2\sigma^2, \\ 0, & I > 2\sigma^2; \end{cases} \quad (3.1.31)$$

здесь $\sigma^2 = \langle I \rangle$ (рис. 3.1, а). Согласно (26) и (29) распределение огибающей имеет при этом форму треугольника:

$$w(\rho) = \begin{cases} \rho/2\sigma^2, & 0 < \rho < 2\sigma, \\ 0, & \rho > 2\sigma \end{cases} \quad (3.1.32)$$

(рис. 3.1, б), а характеристическая функция равна

$$\theta(u) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_0^{2\sigma} J_0(u\rho) \rho d\rho = \frac{J_1(2\sigma u)}{\sigma u}. \quad (3.1.33)$$

Подставив (31) в (30) (или (32) в (18), или преобразуя (33) по Фурье), получим, что в случае (31) функция распределения вероятностей квазигармонического процесса имеет вид полуэллипса:

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma} \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{2\sigma}\right)^2}, & |\xi| < 2\sigma, \\ 0, & |\xi| > 2\sigma \end{cases} \quad (3.1.34)$$

(рис. 3.1, в).

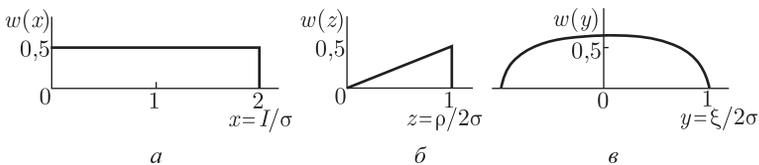


Рис. 3.1. Восстановление статистики негауссовского процесса ξ по распределению его интенсивности

Равномерному распределению для интенсивности (а) соответствует треугольное распределение для огибающей (б) и эллипсоидальное распределение (в) для самого процесса ξ (см. (31)–(34))

Двумерные распределения ρ и φ . Рассмотрим теперь двумерный случай [3]. Покажем вначале, что распределение вероятностей $w(\xi, \xi_\tau)$ и соответствующая характеристическая функция $\theta(u, v) = \langle \exp i(u\xi + v\xi_\tau) \rangle$ для процесса (1) являются периодическими функциями «быстрого» времени $\omega_0\tau$:

$$w(\xi, \xi_\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(\xi, \xi_\tau) e^{im\omega_0\tau}, \quad (3.1.35)$$

$$\theta(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{im\omega_0\tau}, \quad (3.1.36)$$

причем коэффициенты A_m и B_m в этих разложениях связаны преобразованием Фурье:

$$B_m(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\xi_\tau A_m(\xi, \xi_\tau) e^{iu\xi + iv\xi_\tau}, \quad (3.1.37)$$

$$A_m(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{-iu\xi - iv\xi_\tau} du dv. \quad (3.1.38)$$

Согласно (1)

$$\begin{aligned} \theta(u, v) &= \langle \exp[iu\rho \cos(\omega_0 t + \varphi) + iv\rho_\tau \cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_\tau)] \rangle = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} d\rho d\rho_\tau \iint_{-\pi}^{\pi} d\varphi d\varphi_\tau \exp[iu\rho \cos(\omega_0 t + \varphi) + \\ &\quad + iv\rho_\tau \cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi_\tau)] w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau). \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Аналогично (4), совместное распределение $w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau)$ всегда можно записать как двойной ряд Фурье:

$$w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} V_{kl}(\rho, \rho_\tau) e^{-ik\varphi - il\varphi_\tau}. \quad (3.1.40)$$

Подставив (40) в (39) и интегрируя по φ и φ_τ , получим

$$\theta(u, v) = \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} e^{i(k+l)\omega_0 t} e^{il\omega_0\tau} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\rho d\rho_\tau V_{kl}(\rho, \rho_\tau) J_k(u\rho) J_l(v\rho_\tau). \quad (3.1.41)$$

В силу стационарности процесса характеристическая функция (41) не должна зависеть от t , а это значит, что отличными от нуля могут быть лишь функции V_{kl} с $k + l = 0$:

$$\begin{aligned} V_{kl}(\rho, \rho_\tau) &= V_{-m, m}(\rho, \rho_\tau) \equiv C_m(\rho, \rho_\tau) \quad (k = -l = -m), \\ V_{kl}(\rho, \rho_\tau) &= 0 \quad (k \neq -l). \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

Подставив (42) в (41), мы и получим (36). Отметим, что согласно (6)

$$B_m(u, v) = (-1)^m \int_0^\infty \int_0^\infty C_m(\rho, \rho_\tau) J_m(u\rho) J_m(v\rho_\tau) d\rho d\rho_\tau. \quad (3.1.43)$$

Так как $J_m(-x)J_m(-y) = J_m(x)J_m(y)$ (см. (6)), то согласно (43) $B_m(-u, -v) = B_m(u, v)$, откуда следует четность и вещественность характеристической функции (36)

$$\theta(-u, -v) = \theta(u, v) = \theta^*(u, v) \quad (3.1.44)$$

и распределения (35)

$$w(\xi, \xi_\tau) = w(-\xi, -\xi_\tau). \quad (3.1.45)$$

Из (40) и (42) имеем

$$w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho, \rho_\tau) e^{im(\varphi - \varphi_\tau)}, \quad (3.1.46)$$

где коэффициенты C_m однозначно определяются коэффициентами B_m (36) с помощью преобразования Ганкеля, обратного (43):

$$C_m(\rho, \rho_\tau) = (-1)^m \rho \rho_\tau \int_0^\infty \int_0^\infty B_m(u, v) J_m(u\rho) (v\rho_\tau) v u du dv. \quad (3.1.47)$$

Выражения (46), (47) вместе с (35), (36) дают общее решение задачи об определении двумерных распределений ρ и φ процесса (1), если известны характеристическая функция $\theta(u, v)$ или распределение вероятностей $w(\xi, \xi_\tau)$ этого процесса. Ясно также, как получить решение обратной задачи: зная $w(\rho, \rho_\tau, \varphi, \varphi_\tau)$, найти $\theta(u, v)$ или $w(\xi, \xi_\tau)$. Для этого нужно подставить C_m в (43) и найти B_m , а затем, используя (38), и A_m . Подставив результаты в (35) и (36), мы получим $\theta(u, v)$ и $w(\xi, \xi_\tau)$ в виде разложений по гармоникам «быстрого» времени $\omega_0\tau$.

После интегрирования (46) по φ и φ_τ остается только нулевой член этого ряда, который и определяет двумерное распределение огибающей:

$$w(\rho, \rho_\tau) = C_0(\rho, \rho_\tau) = \rho \rho_\tau \int_0^\infty \int_0^\infty B_0(u, v) J_0(u\rho) J_0(v\rho_\tau) u v du dv. \quad (3.1.48)$$

Проинтегрировав (46) по ρ и ρ_τ , получим, соответственно, двумерное распределение фазы

$$w(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m(\tau) e^{im(\varphi - \varphi_\tau)}, \quad (3.1.49)$$

где

$$D_m(\tau) = \int_0^\infty \int C_m(\rho, \rho_\tau) d\rho d\rho_\tau = \langle e^{-im(\varphi - \varphi_\tau)} \rangle, \quad D_0 = 1. \quad (3.1.50)$$

Распределение разности фаз отличается от (49) множителем 2π :

$$w(\varphi - \varphi_\tau) = 2\pi w(\varphi, \varphi_\tau) \quad (-\pi \leq \varphi - \varphi_\tau \leq \pi). \quad (3.1.51)$$

Из приведенных выражений можно сделать ряд общих выводов, справедливых при любой статистике процесса (1). Согласно (46)

$$w(\rho, \rho_\tau, \varphi) = w(\rho, \rho_\tau, \varphi_\tau) = w(\rho, \rho_\tau, \varphi + \varphi_\tau) = \frac{1}{2\pi} w(\rho, \rho_\tau), \\ w(\varphi + \varphi_\tau) = 1/2\pi, \quad (3.1.52)$$

т. е. φ , φ_τ , а также суммарная фаза $\varphi + \varphi_\tau$ статистически независимы относительно ρ и ρ_τ . В частности, статистически независимы значения ρ и φ , причем как в совпадающие, так и в различные моменты времени:

$$w(\rho, \varphi) = w(\rho, \varphi_\tau) = \frac{1}{2\pi} w(\rho). \quad (3.1.53)$$

Однако разность фаз $\varphi - \varphi_\tau$ коррелирует, вообще говоря, как с ρ , так и с ρ_τ — это непосредственно видно из (46). Полученные результаты могут быть обобщены на случай многомерных распределений, дающих описание процесса (1) в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n .

Гауссовский процесс. Для гауссовского процесса (1) с нулевым средним

$$w(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2 - 2R\xi\xi_\tau + \xi_\tau^2}{2\sigma^2(1-R^2)}\right\}, \quad (3.1.54)$$

$$\theta(u, v) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2(u^2 + v^2 - 2uvR)\right] \quad (3.1.55)$$

и условия четности и вещественности (44), (45), очевидно, выполнены. В этих выражениях

$$R = R(\tau) = r(\tau) \cos[\omega_0\tau + \psi(\tau)] \quad (3.1.56)$$

— коэффициент корреляции квазигармонического процесса (см. (2.3.7)). Из (54)–(56) и разложения

$$e^{\pm a \cos \varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\pm 1)^m I_m(a) e^{im\varphi} \quad (3.1.57)$$

следует, что в (36)

$$B_m(u, v) = (-1)^m e^{-\sigma(u^2+v^2)/2} I_m(\sigma^2 r u v) e^{im\psi} \quad (r = r(\tau), \psi = \psi(\tau)), \quad (3.1.58)$$

а в (46), согласно (47),

$$C_m(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2(1-r^2)} I_m \left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2} \right) e^{im\psi} \exp \left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)} \right].$$

Используя (48), отсюда находим двумерное распределение огибающей

$$w(\rho, \rho_\tau) = C_0(\rho, \rho_\tau) = \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2(1-r^2)} I_0 \left(\frac{r}{1-r^2} \frac{\rho\rho_\tau}{\sigma^2} \right) \exp \left[-\frac{\rho^2 + \rho_\tau^2}{2\sigma^2(1-r^2)} \right],$$

полученное ранее другим методом (см. (2.4.11)).

§ 2. Негауссовские квазипериодические стационарные процессы

Общая модель процесса. Развитый в § 1 подход может быть использован для описания случайных процессов более общего вида, чем (3.1.1), а именно, квазипериодических стационарных процессов

$$\xi(t) = \rho(t)F[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad F_{\max} = 1, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad \rho \geq 0, \quad (3.2.1)$$

со стационарными «огибающей» ρ и «фазой» φ и периодической зависимостью функции F от своего аргумента:

$$F(\psi + 2\pi) = F(\psi), \quad \psi = \omega_0 t + \varphi(t). \quad (3.2.2)$$

(Например, как на рис. 2.12.) Выражение (1) переходит в (3.1.1) при $F(\psi) = \cos \psi$.

Квазипериодическая импульсная последовательность. В форме (1) можно представить, например, случайную последовательность импульсов. При этом функция F будет описывать форму отдельного импульса, не искаженного флуктуациями, ρ — случайные вариации импульсов по высоте, а φ — случайную модуляцию по длительности и времени появления (см. рис. 2.12, б). Статистические характеристики ξ , ρ и φ будут при этом связаны соотношениями, подобными полученным выше для квазигармонического процесса (3.1.1).

Пусть $w(\rho, \varphi)$ — совместное распределение вероятностей для ρ и φ в (1). Характеристическую функцию $\theta(u)$ процесса (1) представим в виде, аналогичном (3.1.3),

$$\theta(u) = \langle e^{iu\xi} \rangle = \int_0^\infty d\rho \int_{-\pi}^\pi d\varphi e^{iu\rho F(\omega_0 t + \varphi)} w(\rho, \varphi), \quad (3.2.3)$$

и по аналогии с (3.1.4) и (3.1.5) положим

$$e^{i\rho F(\omega_0 t + \varphi)} = \sum_{m=-\infty}^\infty U_m(u\rho) e^{im(\omega_0 t + \varphi)}, \quad (3.2.4)$$

$$w(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(\rho) e^{in\varphi}. \quad (3.2.5)$$

Подставив (4) и (5) в (3) и проинтегрировав по φ , получим

$$\theta(u) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} V_{-m}(\rho) U_m(u\rho) d\rho. \quad (3.2.6)$$

Функция $\theta(u)$ не должна зависеть от t , поскольку процесс (1) предполагается стационарным. Но это возможно лишь в том случае, если в (5) будет отличен от нуля только член V_0 . Из (5) и (6) при этом следуют соотношения, подобные (3.1.2), (3.1.9) и (3.1.10),

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} w(\rho) U_0(u\rho) d\rho, \quad (3.2.7)$$

$$w(\rho, \varphi) = w(\rho)w(\varphi) = w(\rho) \frac{1}{2\pi}, \quad (3.2.8)$$

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi), \quad (3.2.9)$$

в которых, как видно из (4),

$$U_0(u\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iu\rho F(\psi)} d\psi. \quad (3.2.10)$$

Распределение вероятностей $w(\rho)$ процесса (1) и связь $w(\xi)$ с $w(\rho)$ найдем, подставив (7) в общее выражение (1.1.17):

$$w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int \theta(u) e^{-iu\xi} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} du w(\rho) U_0(u\rho) e^{-iu\xi}, \quad (3.2.11)$$

где $U_0(u\rho)$ определяется формулой (10).

Примеры. Конкретизируя вид функции $F(\psi)$, рассмотрим два примера.

1. $F(\psi)$ — знакопеременная последовательность прямоугольных импульсов с длительностью $\mu\pi$ (рис. 3.2, а). В этом случае

$$U_0(u\rho) = 1 - \mu + \mu \cos u\rho \quad (0 < \mu < 1), \quad (3.2.12)$$

$$w(\xi) = w(-\xi) = (1 - \mu)\delta(\xi) + \frac{\mu}{2} w(\rho) \Big|_{\rho=\xi}. \quad (3.2.13)$$

Согласно (13) при отсутствии пауз между импульсами ($\mu = 1$) распределение огибающей совпадает с распределением самого процесса (в области положительных значений), и в (10)

$$U_0(u\rho) = \cos u\rho. \quad (3.2.14)$$

2. $F(\psi)$ — последовательность импульсов треугольной формы (рис. 3.2). При этом

$$U_0(u\rho) = \frac{\sin u\rho}{u\rho}$$

и согласно (7)

$$\theta(u) = \int_0^\infty w(\rho) \frac{\sin u\rho}{u\rho} d\rho. \quad (3.2.15)$$

Обратное преобразование дает

$$\frac{w(\rho)}{\rho} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \theta(u) u \sin u\rho du \quad (3.2.16)$$

(ср. с (3.1.19)). Из (16) следует, что для гауссовского импульсного процесса распределение огибающей не будет гауссовским. Действительно, подставив в (16)

$$\theta(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right),$$

получим

$$w(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma^2} \rho^2 e^{-\rho^2/2\sigma^2}. \quad (3.2.17)$$

Характеристической функции (15) соответствует четная функция распределения вероятностей, $w(-\xi) = w(\xi)$, причем

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos u\xi \theta(u) du = \frac{1}{\pi} \int \frac{w(\rho)}{\rho} d\rho \int_0^\infty \frac{\cos u\xi \sin u\rho}{u} du. \quad (3.2.18)$$

Но

$$\int_0^\infty \frac{\cos u\xi \sin u\rho}{u} du = \begin{cases} \pi/2 & (\rho > \xi), \\ 0 & (\rho < \xi) \end{cases} \quad (\rho, \xi > 0). \quad (3.2.19)$$

В результате, подставив (19) в (18), получим, что для треугольных импульсов соотношение между распределением самого процесса и его огибающей будет следующим:

$$w(\xi) = \frac{1}{2} \int_{|\xi|}^\infty \frac{w(\rho)}{\rho} d\rho \quad (3.2.20)$$

(ср. с (13) и (3.1.18)).

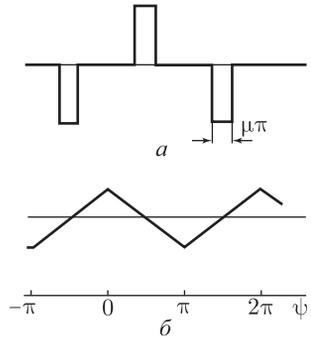


Рис. 3.2. Импульсы $F(\psi)$ различной формы
Представлены без искажений, вносимых флуктуациями

При распределении высот импульсов по закону Рэлея получим, используя (20), что распределение вероятностей импульсного процесса (1) выражается через интеграл вероятности:

$$w(\xi) = \frac{1}{2\sigma^2} \int_{|\xi|}^{\infty} e^{-\rho^2/2\sigma^2} d\rho = \frac{\sqrt{\pi}/2}{2\sigma} \left[1 - \Phi\left(\frac{|\xi|}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right]. \quad (3.2.21)$$

§ 3. Колебания, модулированные шумом

Модель случайного процесса, обсуждаемая в этом параграфе, имеет большое значение для радиофизики и оптики. Мы рассмотрим случайный процесс, возникающий за счет случайной модуляции гармонического сигнала по амплитуде, фазе или частоте.

Математическая запись такого процесса аналогична (2.3.1), однако постановка задачи теперь обратная. Если в гл. 2 мы отыскивали статистические характеристики случайной амплитуды и фазы по заданной статистике $\xi(t)$, то здесь речь будет идти о нахождении статистических характеристик функции $\xi(t)$ (и в первую очередь мы будем интересоваться ее корреляционной функцией и спектром) по заданным характеристикам случайных огибающей и фазы.

Реальные ситуации, соответствующие такой постановке задачи, разнообразны. Один из наиболее важных примеров — воздействие шума на радиогенератор или лазер; за счет нелинейности воздействие шума приводит к стохастической модуляции колебания генератора. Другой пример — уширение спектральных линий излучения и поглощения атомов или молекул. Частоты, амплитуды и фазы колебаний случайным образом изменяются при взаимодействиях — в этом фактически и заключается физика уширения спектральных линий.

Раздельное рассмотрение случайных амплитудной и фазовой (частотной) модуляций, проведенное ниже, позволяет выявить вклад каждой из них в спектр модулированного колебания.

Особое место занимают задачи о случайной частотной модуляции; такая модель описывает основные черты уширения спектральных линий в радиофизике и оптике, поэтому ей уделено наибольшее внимание.

Обратимся теперь к рассмотрению различных видов модуляции.

Амплитудная модуляция. Амплитудно-модулированное (АМ) колебание описывается выражением

$$\xi(t) = a_0[1 + \eta(t)] \cos[\omega_0 t + \varphi_0]. \quad (3.3.1)$$

Рассмотрим его статистические характеристики, считая амплитудную модуляцию $\eta(t)$ стационарным случайным процессом (при этом огибаю-

щая $\rho(t) = 1 + \eta(t) \geq 0$), а фазу φ_0 — случайной постоянной величиной с равномерным распределением

$$w(\varphi_0) = 1/2\pi \quad (-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi). \quad (3.3.2)$$

Процесс (1) в целом будет при этом также стационарным.

Предполагая, что

$$\bar{\eta} = 0, \quad \overline{\eta\eta_\tau} = B_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (3.3.3)$$

находим

$$\bar{\xi} = 0, \quad B(\tau) = \overline{\xi\xi_\tau} = \frac{a_0^2}{2} [1 + B_0(\tau)] \cos \omega_0\tau, \quad (3.3.4)$$

а спектр процесса (1) имеет вид

$$G(\omega) = \frac{a_0^2}{4} [\delta(\omega_0 - \omega) + \delta(\omega_0 + \omega) + G_0(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 + \omega)]. \quad (3.3.5)$$

Если спектр модуляции уже ω_0 ($G_0(\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_0$), то соответствующий (5) спектр по положительным частотам АМ-колебания будет

$$G^+(\omega) = \frac{a_0^2}{2} [\delta(\omega_0 - \omega) + G_0(\omega_0 - \omega)].$$

Этот спектр симметричен относительно несущей частоты ω_0 :

$$G^+(\omega_0 + \Omega) = G^+(\omega_0 - \Omega) = \frac{a_0^2}{2} [\delta(\Omega) + G_0(\Omega)], \quad (3.3.6)$$

и имеет две компоненты — дискретную и непрерывную (рис. 3.3). Дискретная компонента $(a_0^2/2)\delta(\omega_0 - \omega)$ расположена на несущей частоте, а непрерывная компонента $(a_0^2/2)G_0(\omega_0 - \omega)$ повторяет по форме спектр модулирующего шума $G_0(\omega)$.

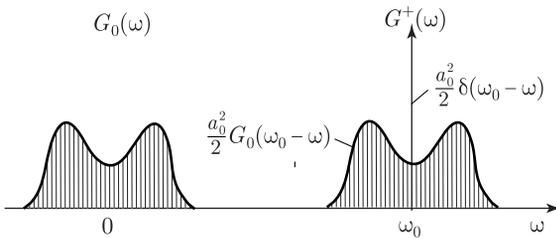


Рис. 3.3. При амплитудной модуляции спектр процесса (непрерывная часть спектра) повторяет по форме спектр $G_0(\omega)$ модулирующей функции (см. (5))

Одномерное распределение и характеристическая функция АМ-процесса определяются формулами (3.1.18) и (3.1.9):

$$w(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\eta \frac{w(\rho)}{\rho} \Big|_{\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|}^{\infty} \frac{w(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - \xi^2}},$$

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} J_0(u\rho) w(\rho) d\rho,$$

где $w(\rho)$ — распределение огибающей, определяющееся статистикой амплитудной модуляции в (1).

Рассмотрим двумерную статистику АМ-процесса. Так как при постоянной фазе φ_0

$$w(\varphi_0, \varphi_{0\tau}) = w(\varphi_0)w(\varphi_{0\tau} | \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_0 - \varphi_{0\tau}),$$

то в рассматриваемом случае

$$w(\rho, \rho_\tau, \varphi_0, \varphi_{0\tau}) = w(\rho, \rho_\tau)w(\varphi_0, \varphi_{0\tau}) =$$

$$= w(\rho, \rho_\tau) \frac{1}{2\pi} \delta(\varphi_0 - \varphi_{0\tau}). \quad (3.3.7)$$

С другой стороны, согласно (3.1.46)

$$w(\rho, \rho_\tau, \varphi_0, \varphi_{0\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m(\rho, \rho_\tau) e^{im(\varphi_0 - \varphi_{0\tau})}. \quad (3.3.8)$$

Учитывая разложение для δ -функции

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx},$$

находим из (7), (8), что в рассматриваемом случае все функции C_m одинаковы и равны двумерному распределению огибающей:

$$C_m(\rho, \rho_\tau) = w(\rho, \rho_\tau) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (3.3.9)$$

Из (9), (3.1.43) и (3.1.36) находим, что двумерная характеристическая функция АМ-колебания имеет следующий вид:

$$\theta(u, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m(u, v) e^{im\omega_0\tau}, \quad (3.3.10)$$

где

$$B_m(u, v) = (-1)^m \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} d\rho d\rho_\tau w(\rho, \rho_\tau) J_m(u\rho) J_m(v\rho_\tau) =$$

$$= \langle J_m(u\rho) J_{-m}(v\rho_\tau) \rangle. \quad (3.3.11)$$

Фазовая модуляция. Рассмотрим теперь квазигармоническое колебание с постоянной амплитудой и случайной флуктуирующей фазой

$$x(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.3.12)$$

или, в комплексной форме,

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 \exp i[\omega_0 t + \varphi(t)] + \text{к. с.} \quad (3.3.12a)$$

В этом разделе мы считаем $a_0 = \text{const}$ и вычисление среднего значения \bar{x} и корреляционной функции $\langle x x_\tau \rangle$ фазово-модулированного (ФМ) колебания сводится к вычислению средних вида

$$\langle e^{i\varphi} \rangle, \quad \langle e^{i(\varphi \pm \varphi_\tau)} \rangle.$$

Например,

$$\bar{x} = \frac{1}{2} a_0 e^{i\omega_0 t} \langle e^{i\varphi} \rangle + \text{к. с.}$$

Фазовая модуляция гауссовским шумом. Предположим, что $\varphi(t)$ — стационарный гауссовский процесс:

$$\overline{\varphi} = 0, \quad \overline{\varphi \varphi_\tau} = B_0(\tau) \equiv \sigma_0^2 R_0(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (3.3.13)$$

В этом случае

$$\langle e^{i\varphi} \rangle = e^{-\sigma_0^2/2}, \quad \langle e^{i(\varphi \pm \varphi_\tau)} \rangle = e^{-\sigma_0^2[1 \pm R_0(\tau)]},$$

так что, усредняя (12), получим

$$\bar{x} = a_0 e^{-\sigma_0^2/2} \cos \omega_0 t, \quad (3.3.14)$$

$$\sigma^2 = x^2 = \frac{a_0^2}{2} [1 + e^{-2\sigma_0^2} \cos 2\omega_0 t]. \quad (3.3.15)$$

Для флуктуационной компоненты $\xi(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ ФМ-колебания находим

$$B(t, \tau) = \overline{\xi \xi_\tau} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)]. \quad (3.3.16)$$

Как видно из (14)–(16), в рассматриваемом случае ФМ-колебание не будет стационарным случайным процессом, поскольку его статистические характеристики являются функциями времени (периодическими). Обычно представляют интерес средние по времени спектральные и корреляционные характеристики, так как именно они регистрируются приборами. Обозначая волнистой чертой усреднение по времени, имеем согласно (16)

$$\widetilde{B(\tau)} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2} [e^{B_0(\tau)} - 1] \cos \omega_0 \tau. \quad (3.3.17)$$

Таким образом, спектр ФМ-колебания, модулированного стационарным шумом, состоит из дискретной линии на несущей частоте ω_0 с интенсивностью

$$\tilde{I}_{\text{дискр}} = \frac{a_0^2}{2} e^{-\sigma_0^2}, \quad (3.3.18)$$

соответствующей (14), и непрерывного (при непрерывном спектре модуляции) спектра флуктуации

$$\widetilde{G(\omega)} = \frac{a_0^2}{4 \cdot 2\pi} e^{-\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{B_0(\tau)} - 1][e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{-i(\omega_0 + \omega)\tau}] d\tau. \quad (3.3.19)$$

Непрерывному спектру соответствует интегральная интенсивность

$$\tilde{I}_{\text{непр}} = \langle \xi^2 \rangle = \frac{a_0^2}{2} [1 - e^{-\sigma_0^2}]. \quad (3.3.20)$$

Заметим, что имеет место следующий «закон сохранения интенсивности»: при фазовой модуляции сумма интенсивностей дискретной и непрерывной компонент постоянна и равна интенсивности немодулированного колебания:

$$I_{\text{дискр}} + I_{\text{непр}} = a_0^2/2.$$

Иначе говоря, модулируя фазу, можно изменять частотный спектр колебания, но не его среднюю интенсивность. Это обстоятельство не связано, разумеется, с гауссовостью модуляции; при любой статистике $\varphi(t)$ непосредственно из (12) находим

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma^2} &= \overline{a_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{a_0^2}{2} [\overline{\cos 2(\omega_0 t + \varphi)}] = \\ &= \frac{a_0^2}{2} [1 + \overline{\cos 2\omega_0 t \cos 2\varphi} - \overline{\sin 2\omega_0 t \sin 2\varphi}] = \frac{a_0^2}{2}. \end{aligned}$$

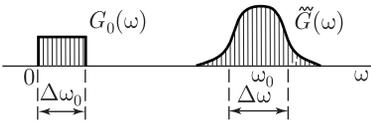


Рис. 3.4. При фазовой модуляции спектр процесса $G(\omega)$ отличается от спектра модулирующей функции $G_0(\omega)$

Ввиду существенно нелинейной зависимости x от φ в (12) спектр ФМ-колебания имеет, вообще говоря, совершенно другую форму, чем спектр модулирующего шума (рис. 3.4). Исключением является лишь случай очень слабой модуляции ($|B_0(\tau)| \leq \sigma_0^2 \ll 1$), когда выражение (19) можно переписать в виде

$$\widetilde{G(\omega)} = \frac{a_0^2}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{a_0^2}{4} [G_0(\omega - \omega_0) + G_0(\omega + \omega_0)].$$

При этом флуктуации малы ($I_{\text{непр}} \ll a_0^2/2$) и их спектр повторяет по форме спектр фазовой модуляции.

В противоположном предельном случае глубокой фазовой модуляции ($\sigma_0^2 \gg 1$) функция $\exp B_0(\tau)$ будет быстро убывать при отклонении τ от нуля. Считая, что $R_0(\tau) \approx 1 - \alpha^2 \tau^2 / 2$, и полагая в (19)

$$e^{B_0(\tau)} - 1 \approx e^{+\sigma_0^2[1 - \alpha^2 \tau^2 / 2]}, \quad \alpha^2 = |\ddot{R}_0(0)|, \quad (3.3.21)$$

получим

$$\widetilde{G(\omega)} = \frac{a_0^2}{4\alpha\sqrt{2\pi}} [e^{-(\omega_0 - \omega)^2 / 2\alpha^2 \sigma_0^2} + e^{-(\omega_0 + \omega)^2 / 2\alpha^2 \sigma_0^2}] \quad (3.3.22)$$

($\sigma_0^2 \gg 1$), т. е. ФМ-колебание имеет гауссовский спектр независимо от формы спектра самой фазовой модуляции.

Нетрудно убедиться, что спектр $\widetilde{G(\omega)}$ намного шире спектра $G_0(\omega)$. Действительно, согласно (21) можно написать следующие оценки:

$$\Delta\omega_0 \sim \alpha, \quad \Delta\omega \sim \alpha\sigma_0, \quad \Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma_0 \gg 1.$$

Заметим, что в том же предельном случае $\sigma_0^2 \gg 1$ для коэффициентов корреляции $R_0(\tau)$ вида $R_0(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \approx 1 - \alpha|\tau| + \dots$ вместо (21), (22) получим

$$\widetilde{G(\omega)} = \frac{a_0^2}{4} \frac{\alpha\sigma_0^2}{\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 \sigma_0^4 + (\omega_0 - \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sigma_0^4 + (\omega_0 + \omega)^2} \right] \quad (3.3.23)$$

($\sigma_0^2 \gg 1$). В этом случае ФМ-колебание имеет спектр лоренцевской формы, причем расширение спектра еще более значительно, поскольку отношение полос пропорционально не σ_0 , а σ_0^2 :

$$\Delta\omega_0 \sim \alpha, \quad \Delta\omega \sim \alpha\sigma_0^2, \quad \Delta\omega/\Delta\omega_0 \sim \sigma_0^2 \gg 1.$$

Фазовая модуляция негауссовским шумом. Будем предполагать стационарность как флуктуации фазы $\varphi(t)$, так и всего ФМ-колебания (12) в целом. При этом $\bar{x} = 0$, т. е. величина x является чисто флуктуационной ($x = \xi$), и в спектре ФМ-колебания (12) нет дискретной составляющей.

Как было показано в § 1, одномерные и двумерные распределения фазы, приведенные к интервалу 2π , имеют следующий вид:

$$w(\varphi) = 1/2\pi, \\ w(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m(\tau) e^{i\tau(\varphi - \varphi_\tau)}, \quad (3.3.24)$$

т. е. одномерное распределение фазы является равномерным, а конкретная форма двумерного распределения определяется коэффициентами $D_m(\tau)$. Двумерную характеристическую функцию и двумерное распределение вероятностей ФМ-колебания (12) можно найти, используя общие соотношения, приведенные в § 1.

Пусть, например, $D_m = e^{-h|m\tau|}$. Вычислив сумму в (24), получим

$$w(\varphi, \varphi_\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - \alpha \cos(\varphi - \varphi_\tau)}, \quad \alpha = \frac{1}{\text{ch } h\tau}. \quad (3.3.25)$$

Если интервал τ увеличивается, то $\text{ch } h\tau \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$ и, как и следовало ожидать, двумерное распределение (25) распадается на произведение одномерных:

$$\lim_{h\tau \rightarrow \infty} w(\varphi, \varphi_\tau) = 1/4\pi^2 = w(\varphi)w(\varphi_\tau).$$

При этом время корреляции флуктуаций $\varphi(t)$ можно приближенно оценить как $1/h$, т. е. в рассматриваемом примере ширина спектра фазовой модуляции примерно равна $\Delta\omega_0 \sim h$.

Чтобы оценить ширину спектра ФМ-колебания (12), напишем выражение для его корреляционной функции:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= a_0^2 \langle \cos \omega_0 t + \varphi \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi_\tau) \rangle = \\ &= \frac{a_0^2}{2} [\langle \cos \omega_0 \tau + \varphi_\tau - \varphi \rangle + \langle \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi + \varphi_\tau) \rangle]. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Но $w(\varphi + \varphi_\tau) = 1/2\pi$ (см. (3.1.52)), так что второе слагаемое в (26) обращается в нуль и

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} [\cos \omega_0 \tau \overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} + \sin \omega_0 \tau \overline{\sin(\varphi_\tau - \varphi)}]. \quad (3.3.27)$$

Согласно (24) при $D_m = e^{-h|m\tau|}$

$$\overline{\cos(\varphi_\tau - \varphi)} = e^{-h|\tau|}, \quad \overline{\sin(\varphi_\tau - \varphi)} = 0.$$

В результате выражение (27) принимает следующий вид:

$$B(\tau) = \frac{a_0^2}{2} e^{-h|\tau|} \cos \omega_0 \tau. \quad (3.3.28)$$

Оценивая отсюда ширину спектра ФМ-колебания, находим, что для распределения (25) она имеет тот же порядок, что и ширина спектра фазовой модуляции:

$$\Delta\omega \sim \Delta\omega_0 \sim 2h.$$

Частотная модуляция. Рассмотрим квазигармоническое частотно-модулированное (ЧМ) колебание

$$\xi(t) = a_0 \cos \left[\omega_0 t + \int_0^t \nu(\theta) d\theta \right]. \quad (3.3.29)$$

Оно отличается от ФМ-колебания (12) тем, что функция

$$\nu = \bar{\nu} + \tilde{\nu}, \quad (3.3.30)$$

описывающая случайную модуляцию частоты, входит в (29) под знаком интеграла. В дальнейшем случайный процесс (30) считаем стационарным с известным средним значением $\bar{\nu}$, дисперсией σ_ν^2 , корреляционной функцией $B_\nu(\tau)$, частотным спектром $G_\nu(\omega)$, имеющим ширину $\Delta\omega_\nu$, коэффициентом корреляции $R_\nu(\tau)$ и временем корреляции τ_ν :

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \text{const}, \quad \sigma_\nu^2 = \langle \tilde{\nu}^2 \rangle, \\ B_\nu(\tau) &= \langle \nu \nu_\tau \rangle = \sigma_\nu^2 R_\nu(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\nu(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \\ G_\nu(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_\nu(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \frac{\sigma_\nu^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\nu(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \\ \tau_\nu &= \int_0^{\infty} R_\nu(\tau) d\tau, \quad \Delta\omega_\nu \sim \frac{1}{\tau_\nu}. \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Используя (31), можно найти имеющий размерность частоты параметр

$$D = \pi G_\nu(0) = \sigma_\nu^2 \tau_\nu \quad (3.3.32)$$

и безразмерный «параметр формы»

$$S = \sigma_\nu \tau_\nu, \quad (3.3.33)$$

поскольку форма спектра $G_\nu(\omega)$ прежде всего определяется отношением высоты спектра $\sim G_\nu(0)$ к его ширине $\sim \Delta\omega_\nu$, и согласно (32), (33) это отношение равно

$$\frac{G_\nu(0)}{\Delta\omega_\nu} \approx S^2.$$

Например, при $S \gg 1$ спектр $G_0(\omega)$ всегда будет высоким и узким, а при $S \ll 1$ — широким и низким (рис. 3.5). Как будет показано ниже, форма спектра флуктуаций частоты $\nu(t)$ (а, следовательно, и величина параметра S) играют существенную роль при определении вида основных статистических характеристик ЧМ-колебания (29).

Флуктуирующая фаза

$$\tilde{\varphi}(t) = \int_0^t \tilde{\nu}(\theta) d\theta$$

ЧМ-колебания (29) является диффузионным случайным процессом с дисперсией

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2 = \langle \tilde{\varphi}^2 \rangle = 2\sigma_\nu^2 L(t), \quad (3.3.34)$$

где согласно (2.5.4) и (31)

$$L(t) = \int_0^t (t - \theta) R_\nu(\theta) d\theta \geq 0. \quad (3.3.35)$$

Как и следует из (32) и (35), в установившемся режиме частотной модуляции ($t \rightarrow \infty$) дисперсия $\sigma_{\tilde{\varphi}}^2$ неограниченно растет со временем:

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2 = 2D_\nu t \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty), \quad (3.3.35a)$$

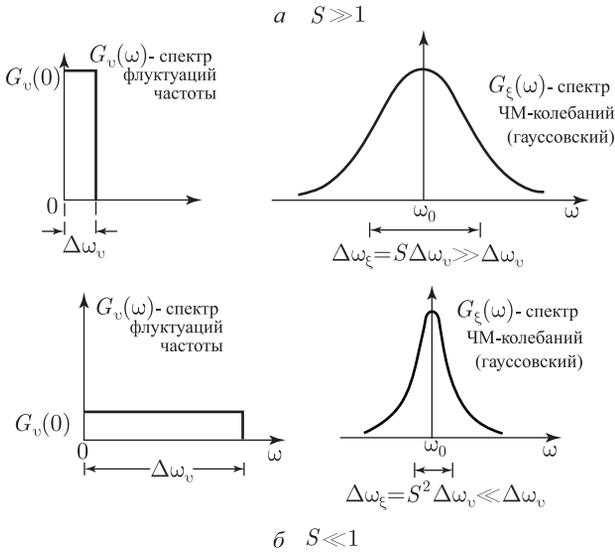


Рис. 3.5. Спектры ЧМ-колебаний при различных спектрах флуктуаций частоты

так что согласно (2.5.27), независимо от вида статистики флуктуаций частоты $\tilde{\nu}(t)$, распределение $w(\tilde{\varphi})$, приведенное к интервалу 2π , с течением времени стремится к равномерному:

$$w(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \quad (-\pi \leq \tilde{\varphi} \leq \pi). \quad (3.3.36)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что в установившемся режиме ЧМ-колебание (29) является стационарным случайным процессом с распределением (3.1.20),

$$w(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a_0^2 - \xi^2}}, & |\xi| \leq a_0, \\ 0, & |\xi| > a_0. \end{cases}$$

Записав (29) в виде

$$\xi(t) = a_0 \cos[\nu_0 t + \bar{\varphi} + \tilde{\varphi}(t)] \quad (\bar{\varphi} = \bar{\nu}t),$$

найдем, используя (36), что

$$\langle \xi(t) \rangle = 0.$$

Это означает, что в спектре любого ЧМ-колебания отсутствует дискретная составляющая.

Сделанные выводы справедливы при любой статистике частотной модуляции, но при условии, что $D_\nu \sim G_\nu(0) \neq 0$, т. е. спектр модуляции

отличен от нуля на частоте $\omega = 0$, поскольку согласно (35а) именно это условие обеспечивает рост дисперсии $\sigma_{\tilde{\varphi}}^2$ со временем.

Модуляция частоты гауссовским шумом. Предположим, что случайный процесс $\tilde{\nu}$ в (29) является гауссовским. Гауссовскими будут при этом и фазовые флуктуации $\tilde{\varphi}$, линейно связанные с $\tilde{\nu}$, так что при $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \langle e^{i\tilde{\varphi}}, \langle e^{i(\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_\tau)} \rangle &\rightarrow 0, \\ \langle e^{i(\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_\tau)} \rangle &= \langle e^{-i \int_0^\tau \tilde{\nu}(\theta+t) d\theta} \rangle \rightarrow e^{-\sigma_\nu^2 L(\tau)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что корреляционная функция ЧМ-колебания (29) и его частотный спектр описываются выражениями

$$\langle \xi \xi_\tau \rangle = \frac{1}{2} a_0^2 e^{-\sigma_\nu^2 L(\tau)} \cos \omega_0 \tau, \quad (3.3.37)$$

$$G_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \langle \xi \xi_\tau \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{a_0^2}{2} \int e^{-\sigma_\nu^2 L(\tau) - i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau \quad (3.3.37a)$$

(для простоты предполагается, что в (30) и (31) $\langle \nu \rangle = 0$).

Функция $L(\tau)$, определенная выражением (35), при малых τ меняется пропорционально τ^2 , а при больших τ — пропорционально τ (см. (2.5.5)):

$$L(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \tau^2, & (\tau \ll \tau_\nu), \\ \tau \tau_\nu - t_\nu^2 \approx \tau \tau_\nu, & (\tau \gg \tau_\nu), \end{cases} \quad (3.3.38)$$

где

$$t_\nu^2 = \int_0^\infty \tau B_\nu(\tau) d\tau \approx \tau_\nu^2$$

— параметр, близкий по величине к времени корреляции τ_ν .

Из выражений (37) и (38) следует, что если $S \equiv S' \gg 1$, то уже на «квадратичном» интервале $0 < \tau < \tau_\nu$ функция $\sigma_\nu^2 L(\tau)$ станет очень большой (поскольку $\sigma_\nu^2 \frac{1}{2} \tau_\nu^2 = \frac{1}{2} S'^2 \gg 1$), а корреляционная функция (37) — очень малой (по сравнению с $\langle \xi^2 \rangle$). Поэтому дальнейшими изменениями функции $L(\tau)$ на «линейном» интервале $\tau_\nu < \tau < \infty$ можно пренебречь, учитывая только изменение $L(\tau)$ на «квадратичном» интервале.

Наоборот, если $S \equiv S'' \ll 1$, то на «квадратичном» интервале $0 < \tau < \tau_\nu$ функция $L(\tau)$ будет меняться пренебрежимо мало (поскольку $\frac{1}{2} \sigma_\nu^2 \tau_\nu^2 = \frac{1}{2} S''^2 \ll 1$) и, следовательно, основное уменьшение коррелятора (37) будет происходить на «линейном» интервале $\tau_\nu < \tau < \infty$.

Из этих рассуждений и (38) вытекает возможность следующей аппроксимации функции, стоящей в (36) в показателе экспоненты при любых τ :

$$\sigma_{\nu}^2 L(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_{\nu}^2 \tau^2 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\tau^2}{\tau_0^2} & (\text{если } S = S' \gg 1), \quad (a), \\ \sigma_{\nu}^2 \tau_{\nu} \tau = S_{\nu}^2 \frac{\tau}{\tau_{\nu}} & (\text{если } S = S'' \ll 1) \quad (б). \end{cases} \quad (3.3.39)$$

Приближенные выражения (39) дают возможность легко находить основные статистические характеристики ЧМ-колебаний вида (29) в предельных случаях больших и малых значений параметра формы S^1).

1. Случай $S = S' \gg 1$.

Подстановка (39а) в (37) дает

$$\langle \xi \xi_{\tau} \rangle' = \frac{1}{2} a_0^2 e^{-\frac{1}{2} \sigma^2 \tau^2 / \tau_{\nu}^2} \cos \omega_0 \tau. \quad (3.3.40)$$

Отсюда следует, что спектр $G_{\xi}(\omega)$ имеет **гауссовский** профиль,

$$G_{\xi}'(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\xi \xi_{\tau}} e^{i\omega \tau} d\tau \sim e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\nu}^2}}; \quad (3.3.41)$$

его ширину можно оценить как

$$\Delta \omega_{\xi}' \approx 2\lambda \sigma_{\nu}, \quad \lambda = \sqrt{2 \ln 2} \approx 1,2. \quad (3.3.42)$$

Если сравнить $\Delta \omega_{\xi}$ и $\Delta \omega_{\nu}$ (см. (30)), то получим

$$\frac{\Delta \omega_{\xi}'}{\Delta \omega_{\nu}} \approx S \gg 1,$$

— ЧМ-колебание (29) имеет при $S \gg 1$ намного более широкий частотный спектр, чем шум $\tilde{\nu}(t)$, модулирующий его частоты (рис. 3.5, а).

2. Случай $S = S'' \ll 1$.

Подставив (39б) в (37), получим

$$\langle \xi \xi_{\tau} \rangle'' \sim e^{-D\tau} \cos \omega_0 \tau \quad (D = \sigma_{\nu}^2 \tau_{\nu} = S^2 \Delta \omega_{\nu}), \quad (3.3.43)$$

чему соответствует **лоренцевский** спектр

$$G_{\xi}''(\omega) \sim \frac{1}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (3.3.44)$$

с шириной

$$\Delta \omega_{\xi}'' \sim 2D \approx 2S^2 \Delta \omega_{\nu}, \quad (3.3.45)$$

так что

$$\frac{\Delta \omega_{\xi}''}{\Delta \omega_{\nu}} \sim S^2 \ll 1.$$

¹⁾ В дальнейшем, во избежание путаницы, характеристики уширения, относящиеся к случаю $S = S' \gg 1$, помечаются одним штрихом, а относящиеся к случаю $S = S'' \ll 1$ — двумя штрихами.

Мы видим, что в рассматриваемом случае ($S^2 \ll 1$) спектр ЧМ-колебания (29) намного уже спектра частотных флуктуаций $\tilde{v}(t)$ (рис. 3.5, б).

Интерполируя полученные результаты, можно качественно представить характер изменения формы и ширины спектра ЧМ-колебаний при различных вариантах изменения параметров частотной модуляции (рис. 3.6).

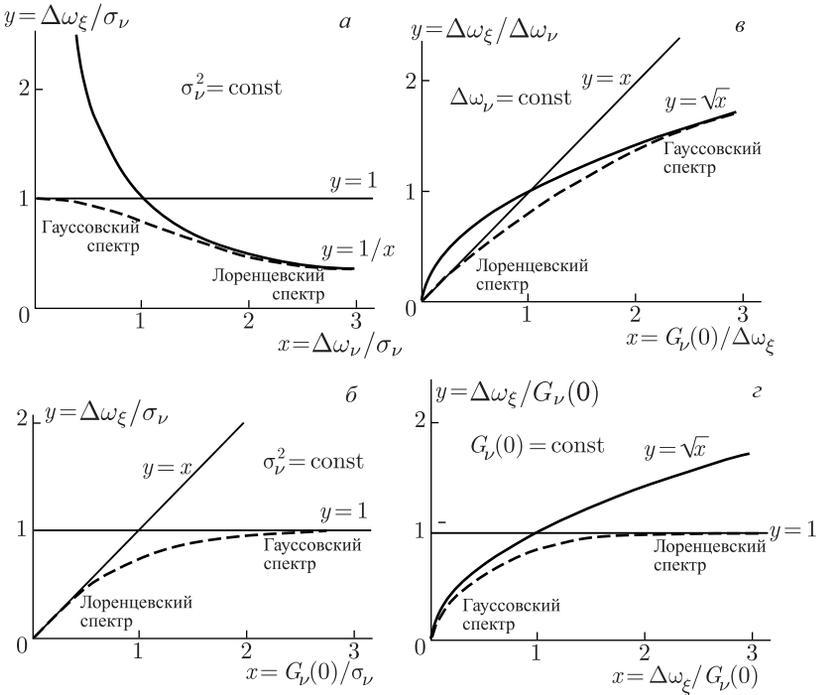


Рис. 3.6. Зависимость параметров ЧМ-колебания (ширины спектральной линии $\Delta\omega_\xi$ и формы спектра) от параметров модулирующей случайной функции (ширины спектра $\Delta\omega_\nu$, спектральной плотности $G_\nu(0)$ и дисперсии $\sigma_\nu^2 \approx G_\nu(0) \Delta\omega_\nu$)

§ 4. Статистика уширения спектральных линий в оптике. Эффекты дефазировки

Физические механизмы расширения спектров. Вопрос о ширине спектральных линий — одна из фундаментальных проблем физической оптики. Результаты измерений формы и ширины спектров излучения, поглощения и рассеяния света оказываются одним из важнейших источников информации о веществе. Исследуя оптические спектры

атомов или молекул, мы имеем дело с ансамблем частиц, поведение которых описывается законами статистической физики; естественно, что эти статистические закономерности должны отражаться и в спектрах.

В классической оптике отклик атомов и молекул на световое поле описывается с помощью модели гармонического осциллятора. Дипольный момент, связанный с колебаниями одного осциллятора x_i ,

$$p_i(t) = ex_i(t), \quad (3.4.1)$$

где e — элементарный заряд, а поведение x_i описывается уравнением гармонического осциллятора:

$$\ddot{x}_i + 2\alpha_i \dot{x}_i + \omega_{0i}^2 x_i = f(t), \quad (3.4.2)$$

$f(t)$ — внешняя сила. В общем случае $f(t)$ определяется внешним световым полем, носящим случайный характер, взаимодействиями и т. п.

Дипольный момент (поляризация) $P(t)$ единицы объема среды, содержащей N атомов (осцилляторов),

$$P(t) = \sum_{i=1}^N ex_i(t) = \sum_{i=1}^N p_i(t). \quad (3.4.3)$$

Естественная ширина спектральной линии. Рассчитаем прежде всего ширину спектральной линии излучения в ансамбле идентичных гармонических осцилляторов; будем считать, что все $\omega_{0i} = \omega_0$, $\alpha_i = \alpha$. Классическую картину спонтанного излучения света ансамблем атомов или молекул можно рассматривать как суперпозицию «вспышек» свободных колебаний случайным образом возбужденных гармонических осцилляторов.

Свободные колебания i -го осциллятора, возбужденного в момент времени t_i , описываются формулой

$$x_i(t) = x_{0i} \exp\{-\alpha(t - t_i)\} \cos[\omega_0(t - t_i) + \varphi_{0i}], \quad (3.4.4)$$

где x_{0i} и φ_{0i} — начальные амплитуда и фаза. Соответственно и дипольный момент, связанный с колебанием i -го осциллятора,

$$p_i(t) = p_{0i} \exp\{-\alpha(t - t_i)\} \cos[\omega_0(t - t_i) + \varphi_{0i}]. \quad (3.4.5)$$

В силу (5), (3) излучаемое ансамблем таких осцилляторов световое поле $E(t)$ будет иметь вид

$$E(t) = \sum_{i=1}^N a_{0i} \exp\{-\alpha(t - t_i)\} \cos[\omega_0(t - t_i) + \varphi_{0i}] = \sum_{i=1}^N E_i. \quad (3.4.6)$$

Если возбуждение осцилляторов носит стохастический характер, то моменты вспышек t_i , начальные амплитуды a_{0i} и фазы φ_{0i} — случайные числа. Поэтому суммарное поле излучения представляет собой случайный процесс. Если осцилляторы идентичны, для выявления основных его статистических характеристик достаточно учесть

случайность моментов времени t_i . В этом случае (6) представляет собой случайную импульсную последовательность — стохастический процесс, являющийся случайным наложением регулярных импульсов известной формы.

Подробно такие процессы рассмотрены в § 6 гл. 2. Если случайные импульсы — «вспышки» свободных колебаний — статистически независимы, то для спектральной плотности суммарного процесса $G(\omega)$ имеет место весьма наглядный результат (см. формулу (2.6.44)):

$$G(\omega) = 2\pi\Omega|E_\omega|^2. \quad (3.4.7)$$

В (7) Ω — средняя частота следования импульсов, а E_ω — фурье-образ функции $E_i(t)$, описывающей одиночный импульс рассматриваемой последовательности.

Таким образом, спектр всего процесса имеет тот же вид, что и спектр одиночного импульса, — происходит некогерентное наложение спектров импульсов. Записывая фурье-преобразование импульса вида (4), для $G_e(\omega)$ получаем¹⁾ (см. формулу (5.2.26))

$$G_e(\omega) = \frac{G_{e0}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (3.4.8)$$

Лоренцевская спектральная линия (8) имеет ширину

$$\Delta\omega_e = 2\alpha. \quad (3.4.9)$$

Величину $\Delta\omega_e$ принято называть естественной шириной спектральной линии; она определяется скоростью затухания амплитуды (энергии) отдельного осциллятора. Ширины линий колебаний отдельного осциллятора и ансамбля осцилляторов здесь одинаковы. Принято говорить, что в этом случае ширина спектральной линии определяется *процессами релаксации энергии*. Однако ширина спектральной линии в ансамбле осцилляторов не обязательно связана только с процессами релаксации энергии. Ширины линий отдельного осциллятора и ансамбля осцилляторов могут, разумеется, существенно различаться.

Действительно, величина дипольного момента единицы объема $P(t)$ (3) представляет собой фактически усредненное по единице объема колебательное возбуждение. Поэтому, даже если амплитуды колебаний всех элементарных осцилляторов практически постоянны, а их фазы быстро изменяются во времени (за счет движения осцилляторов и их взаимодействия меняются собственные частоты), величина $\langle P(t) \rangle$ может обратиться в нуль за времена

$$\tau_\Phi \ll 1/\alpha. \quad (3.4.10)$$

¹⁾ Рассматривая вынужденные колебания, т. е. учитывая в (2) внешнюю силу $f(t)$, нетрудно убедиться, что такой же вид для рассматриваемой модели будет иметь и линия поглощения.

Естественно, это будет приводить к уширению спектральной линии, гораздо более значительному, нежели описываемое формулой (8). В этом случае принято говорить об уширении спектральной линии, обусловленном процессами дефазировки колебаний. Различие в физике релаксации энергии и дефазировки колебаний наиболее последовательно учитывается при квантовомеханическом описании; соответствующие времена T_1 и T_2 .

В очень многих практически интересных случаях

$$T_2 \approx \tau_\phi \ll T_1, \quad (3.4.11)$$

и при расчете ширины спектральной линии процессы релаксации энергии можно вообще не учитывать.

Далее, в пренебрежении процессами релаксации энергии, обсуждаются простейшие задачи об уширении спектральных линий за счет процессов дефазировки. В основу расчета в этом случае можно, очевидно, положить формулы, выведенные в предыдущих параграфах этой главы. Порядок же конкретного расчета следующий. Сначала на основе микроскопической модели движения и взаимодействия осцилляторов находят статистические свойства частоты (или фазы), а затем, пользуясь приведенными выше формулами, можно вычислить и контур спектральной линии.

Ниже приведены простые примеры; за подробностями мы отсылаем читателя к [5, 6], где изложена статистическая теория уширения спектров излучения и поглощения, и к [7], где можно найти данные и библиографию об уширении спектров рассеяния света.

Уширение спектральных линий в газе; доплеровская ширина. Простым и чрезвычайно важным механизмом уширения спектральной линии в ансамбле осцилляторов является эффект Допплера. Если осциллятор, собственная частота которого ω_0 , движется относительно наблюдателя со скоростью \mathbf{v} , то наблюдатель регистрирует колебания на частоте

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (3.4.12)$$

В ансамбле осцилляторов (например, в газе атомов или молекул) скорости \mathbf{v} случайны; в силу (12) случайно распределены и частоты излучения отдельных осцилляторов. естественно, что это приводит к дополнительному к (9) уширению спектральной линии. На практике это уширение, так называемое доплеровское уширение спектральной линии, $\Delta\omega_D$, часто оказывается очень большим, так что $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$ (см. рис. 3.7, где для случая $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$ построены спектры отдельных осцилляторов и суммарный доплеровский контур спектральной линии).

Рассчитаем ширину доплеровского контура $\Delta\omega_D$ для случая $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega_e$. Световое поле представим в виде

$$E(t) = a_0 \exp i[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (3.4.13a)$$

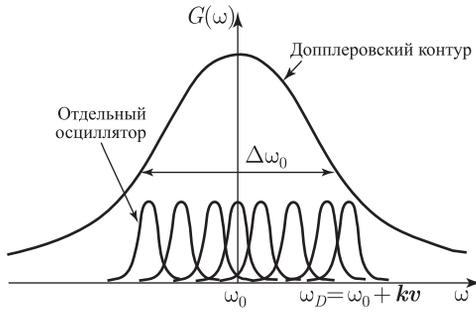


Рис. 3.7. Картина доплеровского уширения спектральной линии в газе независимых осцилляторов

где в рассматриваемом случае

$$\varphi(t) = \mathbf{k}\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' \quad (3.4.136)$$

(мгновенная частота описывается (12)). Переходя к проекции скорости на направление наблюдения v , формулам (13) можно придать вид (3.3.29), где $\nu(t) = kr(t)$. Таким образом, речь идет о случайной частотной модуляции; статистика случайной скорости определяется столкновениями молекул.

Если $v(t)$ — гауссовский процесс, корреляционная функция колебания (13а) определяется коррелятором (см. (3.3.34))

$$\langle e^{i(\varphi - \varphi\tau)} \rangle = \langle e^{ikr(t)} \rangle, \quad r(t) = \int_t^{t+\tau} v(t') dt'. \quad (3.4.14)$$

Рассмотрим сначала разреженный газ, в котором столкновением молекул можно пренебречь. Тогда $r(t) = v\tau$ и, используя для v максвелловское (гауссовское) распределение по скоростям, получим

$$w(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}u} e^{-v^2/u^2}, \quad u = \left(\frac{2\kappa T}{m}\right)^{1/2}. \quad (3.4.15)$$

Для корреляционной функции колебания $E(t)$ получим (см. формулы предыдущего параграфа)

$$B(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \exp \left\{ -\frac{1}{4} (ku\tau)^2 \right\} \cos \omega_0 \tau, \quad (3.4.16)$$

откуда для спектра получаем

$$G_D^+(\omega) = \frac{G_{D_0}}{\sqrt{\pi} \Delta\omega_D} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{\Delta\omega_D^2} \right\} \quad (3.4.17)$$

(ср. (3.3.40), (3.3.41); в (17)

$$\Delta\omega_D = ku = \frac{1}{\omega_0 c} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad (3.4.18)$$

— доплеровская ширина спектральной линии.

Согласно (16), (18) время корреляции светового поля в рассматриваемом случае

$$\tau_k \approx 1/ku \quad (3.4.19)$$

определяется средним временем смещения осциллятора на расстояние порядка длины световой волны. Если давление газа повышается, в игру включаются столкновения, ограничивающие свободные перемещения осцилляторов. В результате время τ_k увеличивается, а ширина доплеровского контура сужается. Происходит *столкновительное сужение* доплеровского контура.

Обзор статистических моделей столкновительного сужения можно найти в [6]. Можно показать (см. [6]), что в случае достаточно частых столкновений

$$B(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \exp \left\{ -\frac{\Delta\omega_D^2}{2\nu_{ст}} \tau \right\} \cos \omega_0 \tau, \quad (3.4.20)$$

где $\nu_{ст}$ — средняя частота столкновений. Корреляционная функция (20) соответствует (см. формулы (3.3.46), (3.3.47)) лоренцевскому контуру линии. Таким образом, в условиях частых столкновений первоначально гауссовский контур доплеровской линии переходит в лоренцевский¹⁾.

В проведенных расчетах эффекты, связанные с релаксацией энергии, не учитывались; их учет не представляет, однако, труда, поскольку процессы, связанные с релаксацией энергии и хаотическим движением осцилляторов, можно считать статистически независимыми. Полный спектр тогда определяется сверткой спектров G_e и G_D .

Уширение спектральных линий молекул в жидкости. В жидкости доплеровское уширение, разумеется, полностью подавлено. Процессы дефазировки обусловлены флуктуациями нормальных частот (собственных частот осцилляторов) при межмолекулярных взаимодействиях (см. рис. 3.8, который иллюстрирует сдвиги собственных частот при бинарных взаимодействиях двухатомных молекул).

Теперь для того чтобы определить статистику случайной частотной модуляции, надо задаваться конкретным видом потенциала межмолекулярного взаимодействия (это позволяет рассчитать дисперсию флуктуации частоты при межмолекулярных взаимодействиях), физическими представлениями о времени корреляции частоты. Поскольку флуктуации частоты в этой задаче гауссовские, для расчета контура линии можно пользоваться формулой (3.3.37).

¹⁾ Формула (20) была впервые получена Дики; поэтому столкновительное сужение часто называют также «эффектом Дики»; более подробно см. [6].

Предельные случаи (3.3.39) и (3.3.45) соответствуют двум существенно различным физическим ситуациям. Если флуктуации частоты медленные (см. (3.3.39)), окружение молекулы практически можно рассматривать как статистическое. Процесс дефазировки определяется фактически различием собственных частот; форма спектральной линии гауссовская, и наллюдается картина уширения, аналогичная картине доплеровского уширения. Напротив, если флуктуации частоты быстрые (см. (3.3.45)), все молекулы находятся в практически идентичных условиях и форма спектральной линии — лоренцевская (ср. с эффектом столкновительного сужения доплеровской линии).

Соответственно в указанных случаях говорят о *неоднородном* ($\sigma_0\tau_k \gg 1$) и *однородном* ($D\tau_k \ll 1$) уширении спектральной линии.

В качестве примера (более подробно см. [7]) укажем, что для молекулярных колебаний в жидкостях $\tau_k \approx 10^{-12}$ с (оно порядка времени между столкновениями) и имеет место однородное уширение.

Математическая модель дефазировки. Рассмотрим более детально уширение спектральных линий в газах. Как следует из приведенной выше картины, собственные частоты ω_{0j} частиц не постоянны, но слабо флуктуируют около среднего значения ω_0 ; эти флуктуации обусловлены, например, случайным тепловым движением $N \gg 1$ частиц, их взаимными столкновениями и т. д. Будем описывать эти флуктуации случайной функцией $\nu(t)$, так что

$$\omega_{0j}(t) = \omega_0 + \nu_j(t) \quad (\omega_0 = \text{const}, \nu_j(x) \ll \omega_0), \quad (3.4.21)$$

где $\nu_j(t)$ — реализация процесса $\nu(t)$, соответствующая j -й частице. Вместо (2) будем теперь иметь уравнения

$$\ddot{x}_j + 2\alpha_0\dot{x}_j + [\omega_0 + \nu_j(t)]^2x_j = f(t) \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (3.4.22)$$

коэффициент α_0 в (22) определяет естественную ширину спектральной линии $\Delta\omega_e = 2\alpha_0$ (9).

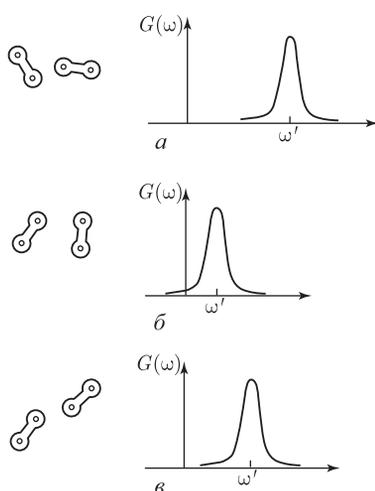


Рис. 3.8. Качественная картина, характеризующая флуктуации частоты колебания при взаимодействии двухатомных молекул в жидкости

Колебания x_j и f можно рассматривать как квазигармонические и выразить их через медленно меняющиеся комплексные амплитуды поляризации $A_j(t)$ и $a(t)$

$$\bar{p}_j = ex_j = \frac{1}{2} A_j e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad ef(t) = \frac{1}{2} a e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (3.4.23)$$

$$(\dot{A}_j \ll \omega_0 A_j, \quad \dot{a} \ll \omega_0 a)$$

Подставив (23) в (22), получим для $A_j(t)$ более простые уравнения первого порядка

$$\dot{A}_j + [\alpha_0 + i\nu_j(t)]A_j = a(t), \quad (3.4.24)$$

которые легко интегрируются:

$$A_j(t) = \int_0^\infty e^{-\alpha_0 \theta - i\Phi_j(\theta, t)} a(t - \theta) d\theta, \quad (3.4.25)$$

где

$$\Phi_j(\theta, t) = \int_{t-\theta}^t \nu_j(\theta') d\theta' = \int_0^\theta \nu_j(t - \theta'') d\theta''. \quad (3.4.26)$$

Используя (25), можно найти суммарную поляризацию, создаваемую всеми частицами,

$$P(t) = \sum_{j=1}^N p_j = \frac{1}{2} A(t) e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad (3.4.26a)$$

где

$$A(t) = \sum_{j=1}^N A_j(t) = \int_0^\infty d\theta e^{-\alpha_0 \theta} a(t - \theta) \sum_{j=1}^N e^{-i\varphi_j(\theta, t)}. \quad (3.4.27)$$

Поскольку $N \gg 1$, то можно использовать (1.1.6) и выразить сумму в (27) через статистическое среднее

$$\sum_{j=1}^N e^{-i\varphi_j(\theta, t)} = N \langle e^{-i\varphi(\theta, t)} \rangle,$$

где

$$\varphi(\theta, t) = \int_0^\theta \nu(t - \theta) d\theta, \quad (3.4.28)$$

— случайные флуктуации фазы, обусловленные флуктуациями частоты $\nu(t)$.

В результате выражение (27) примет следующий вид:

$$A(t) = N \int_0^\infty e^{-\alpha_0 \theta} a(t - \theta) \langle e^{-i\varphi(\theta, t)} \rangle d\theta. \quad (3.4.29)$$

В дальнейшем мы будем пренебрегать так называемым естественным уширением спектральной линии (см. (9)), полагая в (29) $\alpha_0 = 0$, и будем использовать для функции

$$\nu(t) = \bar{\nu} + \tilde{\nu}(t) \quad (3.4.30)$$

модель гауссовского стационарного процесса с корреляционной функцией $B_\nu(\tau)$ и частотным спектром $G_\nu(\omega)$:

$$\bar{\nu} = \text{const}, \quad \langle \tilde{\nu}\tilde{\nu}_\tau \rangle = B_\nu(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\nu(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.4.31)$$

В этом случае статистика фазы φ , связанной с ν линейным соотношением (28), также будет гауссовской, и используя (1.4.7) и (2.2.3), можно написать

$$\langle e^{-i\varphi} \rangle = e^{-i\bar{\varphi} - \frac{1}{2} \sigma_\varphi^2},$$

где

$$\bar{\varphi} = \bar{\nu}\theta, \quad \frac{1}{2} \sigma_\varphi^2 = \int_0^\theta (\theta - \tau) B_\nu(\tau) d\tau \equiv L(\theta), \quad L(\theta) = \int_0^\theta (\theta - \tau) B_\nu(\tau) d\tau, \quad (3.4.32)$$

так что выражение (29) примет вид

$$A(t) = N \int_0^\infty e^{-i\bar{\nu}\theta - \sigma_\nu^2 L(\theta)} a(t - \theta) d\theta. \quad (3.4.33)$$

Нестационарная спектроскопия. Время дефазировки. В нестационарной спектроскопии наблюдается затухание поляризации после ее возбуждения очень коротким импульсом внешнего поля f . В этом случае в (33) можно положить $a(t) = \delta(t)$, что дает

$$A(t) = e^{-i\bar{\nu}t - \sigma_\nu^2 L(t)}, \quad (3.4.33a)$$

так что согласно (26a) процесс затухания поляризации будет описываться выражением

$$P(t) = e^{-\sigma_\nu^2 L(t)} \cos(\omega_0 - \bar{\nu})t. \quad (3.4.34)$$

Заметим, что хотя флуктуации частоты ν не влияют на затухание парциальных поляризаций p , создаваемых отдельными частицами (это видно непосредственно из уравнения (24)), на затухание суммарной поляризации $P = \sum p_j$ флуктуации ν влияют всегда, ускоряя это затухание, поскольку в (34) $L > 0$. Это объясняется тем, что фазовые флуктуации φ_j нарушают синхронность затухания парциальных поляризаций p_j , приводят к их взаимной расфазировке (или дефазировке). Характерное время спада поляризации P (34) в m раз называют

временем дефазировки τ_{ph} , т. е. величина τ_{ph} определяется уравнением (вообще говоря, трансцендентным)

$$\sigma_\nu^2 L(\tau_{\text{ph}}) = m, \quad (3.4.35)$$

в котором m — произвольное положительное число.

Стационарная спектроскопия. Расширение спектра излучения, обусловленное дефазировкой. В этом случае используется стабильная монохроматическая внешняя сила f с перестраиваемой частотой ω , а наблюдается частотный спектр $|p_\omega|^2$ поляризации P . При этом в (23)

$$a = e^{i\delta t}, \quad \delta = \omega - \omega_0 \quad (|\delta| \ll \omega_0),$$

и согласно (33)

$$A(t) = N e^{i\delta t} \int_0^\infty e^{-i(\bar{\nu} + \delta)\theta - \sigma_\nu^2 L(\theta)} d\theta, \quad (3.4.36)$$

так что в (34)

$$P(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega t} P_\omega + \text{к. с.},$$

где

$$P_\omega = N \int_0^\infty \exp\{-i(\bar{\nu} + \delta)\theta - \sigma_\nu^2 L(\theta)\} d\theta. \quad (3.4.37)$$

Зависимость от давления параметров доплеровской дефазировки. Сужение Дики. Время дефазировки. При доплеровской дефазировке частотные флуктуации $\nu(t)$, реализации которых $\nu_j(t)$ входят в уравнения (21), связаны с доплеровскими флуктуациями частоты ω_0 , обусловленными хаотическим тепловым движением частиц со скоростями $v_\tau(t)$:

$$\nu(t) \equiv \nu_d(t) = k_0 v_\tau(t), \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c}. \quad (3.4.38)$$

В обычных условиях (например, при отсутствии ветра), как известно,

$$\langle v_\tau \rangle = 0, \quad \langle v_\tau^2 \rangle = \frac{kT}{m}.$$

В этом случае флуктуации $\nu_d(t)$ можно рассматривать как случайный стационарный процесс с нулевым средним, дисперсия которого не зависит, очевидно, от давления p :

$$\langle \nu_d \rangle = 0, \quad \langle \nu_d^2 \rangle \equiv \sigma_{\nu_d}^2 = k_0^2 \frac{kT}{m} = \text{const}. \quad (3.4.39a)$$

Чтобы определить зависимость от давления времени корреляции $\tau_{\nu(d)}$ доплеровских флуктуаций $\nu_d(t)$ (38), будем рассуждать следующим образом. Как известно из статистической физики, если n — число столкновений частиц в единицу времени, то

$$\langle n \rangle \sim p. \quad (3.4.39)$$

Средний интервал времени между двумя последовательными столкновениями при этом можно оценить как

$$\Delta t \sim \frac{1}{\langle n \rangle} \sim \frac{1}{p}.$$

Естественно предположить, что по порядку величины Δt совпадает с временем корреляции тепловых скоростей, а следовательно, и с временем корреляции флуктуаций доплеровской частоты $\nu_d(t)$. В результате мы приходим к выводу, что

$$\tau_{\nu(d)} = \frac{\alpha_d}{p} \sim \frac{1}{p} \quad (\alpha_d = \text{const}). \quad (3.4.40)$$

Согласно (21) механизмом уширения спектральных линий является случайная частотная модуляция. Поэтому используем теперь общие закономерности, установленные ранее (см. стр. 142–146) для **любых** случайных ЧМ-колебаний. Было показано, что ключевым здесь является «параметр формы» S (3.3.33), который определяет основные спектральные и корреляционные характеристики как самого ЧМ-колебания, так и исходных флуктуаций частоты (во всяком случае, в предельных случаях $S \ll 1$ и $S \gg 1$).

Подставив (39а) и (40) в (3.3.33), найдем, что в случае доплеровской дефазировки параметр S равен

$$S = S_d = \sigma_{\nu(d)} \tau_{\nu(d)} = \frac{p_d}{p} \sim \frac{1}{p} \quad (p_d = \sigma_{\nu(d)} \alpha_d = \text{const}). \quad (3.4.41)$$

Из (41) следует, что $S_d \gg 1$ при малых давлениях и $S_d \ll 1$ при больших давлениях. Рассмотрим подробнее эти два предельных случая.

1. Область низких давлений: $p \ll p_d$, $S_d \gg 1$.

Согласно (3.3.41), (3.3.42) спектр излучения (поглощения, рассеяния) в этом случае имеет **гауссовскую** форму

$$G'_{\xi(d)}(\omega) \sim \exp \left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_{\nu(d)}^2} \right]; \quad (3.4.41a)$$

ширина этого спектра

$$\Delta\omega'_{\xi(d)} \approx 2\lambda\sigma_{\nu(d)} = \text{const} \quad (\lambda = \sqrt{2 \ln 2}) \quad (3.4.42)$$

от давления не зависит (см. рис. 3.9, прямая 1) и намного превосходит ширину $\Delta\omega_{\nu(d)}$ спектра частотных флуктуаций $\nu_d(t)$, поскольку

$$\Delta\omega_{\nu(d)} \sim \frac{1}{\tau_{\nu(d)}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\omega'_{\xi(d)}}{\Delta\omega_{\nu(d)}} \approx \sigma_{\nu(d)} \tau_{\nu(d)} = S_d \gg 1.$$

2. Область высоких давлений: $p \gg p_d$, $S_d \ll 1$.

Согласно (3.3.44) в этом случае частотный спектр имеет **лоренцевский** профиль,

$$G''_{\xi(d)}(\omega) \sim \frac{1}{D_d^2 + (\omega - \omega_0)^2}; \quad (3.4.42a)$$

здесь

$$D_d = \sigma_{\nu(d)}^2 \tau_{\nu(d)} = \frac{\beta_d}{p} \quad (\beta_d = \sigma_{\nu(d)}^2 \alpha_d = \text{const}).$$

Ширину спектра (42a) можно оценить как

$$\Delta\omega''_{\xi(d)} \approx 2D_d \sim \frac{1}{p}. \quad (3.4.43)$$

Мы видим, что эта ширина **уменьшается** с ростом давления (**сужение Дики** — рис. 3.9, кривая 2). Ширину доплеровского спектра при любых давлениях $p \geq p_d$ приближенно можно оценить, интерполируя выражения (42) и (43) (рис. 3.9, сплошная кривая).

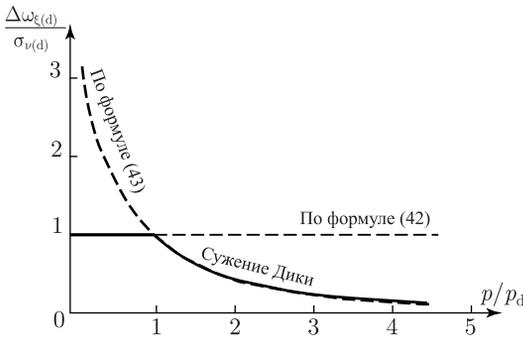


Рис. 3.9

Мы анализировали различные проявления доплеровской дефазировки, которые характеризуют непрерывное излучение ансамбля большого числа одинаковых частиц и которые могут наблюдаться методами **стационарной** спектроскопии. Рассмотрим теперь влияние доплеровской дефазировки на скорость затухания свободной поляризации при различных давлениях. Этот процесс характеризуется временем дефазировки τ_{ph} и наблюдается методами **нестационарной** спектроскопии.

С учетом полученных выше результатов эта задача решается просто: нужно подставить аппроксимирующие функции $\sigma_{\nu}^2 L(t)$ формулы (3.3.39) в определяющее τ_{ph} уравнение (35). Поскольку мы рассматриваем только доплеровский механизм дефазировки, то обозначим $\tau_{ph} \equiv \theta_{ph(d)}$; учтем также сноску на стр. 146. В результате будем иметь:

$$\tau'_{\text{ph}(d)} = \frac{\sqrt{2m}}{\sigma_{\nu(d)}} = \text{const} \quad (p \ll p_d, S_d \gg 1), \quad (\text{a}) \tag{3.4.44}$$

$$\tau''_{\text{ph}(d)} = \frac{m}{D_d} \sim p, \quad (p \gg p_d, S_d \ll 1), \quad (\text{б})$$

поскольку $\sigma_{\nu(d)}$ от давления p не зависит (см. (39а)), а $D_d \sim 1/p$ (43).

Зависимость времени дефазировки от давления при $m = 2$ схематически иллюстрирует сплошная линейно-ломаная кривая на рис. 3.10.

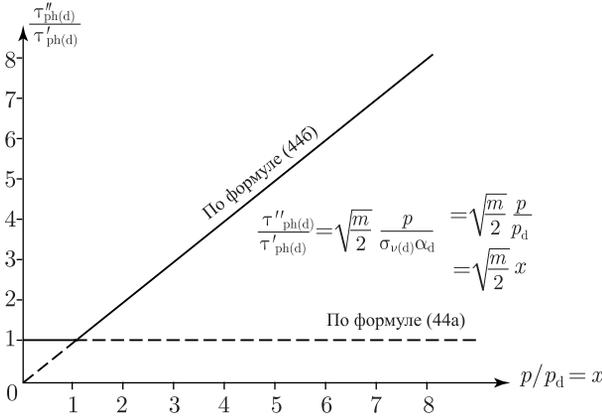


Рис. 3.10

Отметим, что согласно (42)–(44) выполняются следующие «соотношения неопределенностей» ($\lambda = \sqrt{2 \ln 2}$):

$$\begin{aligned} \Delta\omega'_{\text{ph}(d)} &= 2\lambda\sqrt{2m} \quad (p \ll p_d), \\ \Delta\omega''_{\xi(d)} \tau''_{\text{ph}(d)} &= 2m \quad (p \gg p_d). \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Зависимость от давления параметров столкновительной дефазировки. Столкновительное уширение. Время дефазировки. Малые флуктуации $\nu(t)$ частоты $\omega_0(t)$ в (21) могут также возникать в результате взаимной «встряски» частиц при их соударениях. В этом случае говорят о столкновительном механизме дефазировки. Соответствующие частотные флуктуации будем обозначать как

$$\nu(t) \equiv \nu_c(t) = \bar{\nu}_c + \tilde{\nu}_c(t).$$

Примем следующую модель столкновительной дефазировки. Сделаем простейшее предположение о линейной связи между $\nu_c(t)$ и $n(t)$ — мгновенной частотой соударений (как и в (40)):

$$\nu_c(t) \sim n(t). \tag{3.4.45a}$$

Будем также считать, что

$$\langle n^m \rangle \sim p^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.4.46}$$

где p — давление. Из (45) и (46) следует, что

$$\langle \nu_c \rangle \sim p, \quad \langle \nu_c^2 \rangle \sim p^2, \quad \langle \tilde{\nu}_c \rangle \equiv \sigma_{\nu(c)}^2 = \beta_c^2 p^2. \quad (3.4.47)$$

Используя те же рассуждения, что и при выводе выражения (40), получим для времени корреляции τ_ν флуктуаций $\tilde{\nu}_c(t)$:

$$\tau_\nu \equiv \tau_{\nu(c)} = \frac{\alpha_c}{p} \quad (\alpha_c = \text{const}). \quad (3.4.48)$$

В (47), (48) α_c и β_c — параметры вещества, не зависящие от давления. При этом параметр формы S , равный согласно (47), (48) и (3.3.39)

$$S \equiv S_c = \sigma_{\nu(c)} \tau_{\nu(c)} = \alpha_c \beta_c = \text{const}, \quad (3.4.49)$$

т. е. S_c тоже, подобно α_c и β_c , оказывается параметром вещества, который от давления не зависит.

Таким образом, при столкновительной дефазировке для веществ, характеризующихся величиной $S_c = S'_c \gg 1$, спектр излучения при всех давлениях имел бы **гауссовскую** форму и ширину, равную согласно (3.3.42) и (50)

$$\Delta\omega'_{\xi(c)} = 2\lambda\sigma_{\nu(c)} = 2\lambda\beta_c p \sim p \quad (S_c \gg 1), \quad (3.4.50)$$

которая при возрастании давления p тоже возрастала бы по линейному закону.

Для веществ с $S_c = S''_c \ll 1$ спектр излучения имел бы **лоренцевский** вид и ширину спектральной линии

$$\Delta\omega''_{\xi(c)} \approx 2D_c = 2\sigma_{\nu(c)}^2 \tau_{\nu(c)} = 2\alpha_c \beta_c^2 p = 2S''_c \beta_c p \sim p \quad (S_c \ll 1) \quad (3.4.51)$$

(согласно (3.3.43), (3.3.45) и (51)), тоже линейно зависящую от давления, но намного меньшую, чем $\Delta\omega'_{\xi(c)}$, поскольку согласно (50) и (51)

$$\frac{\Delta\omega''_{\xi(c)}}{\Delta\omega'_{\xi(c)}} \approx S''_c \ll 1. \quad (3.4.51a)$$

(рис. 3.11).

Таким образом, ширина частотного спектра, обусловленного столкновительной дефазировкой, с увеличением давления всегда увеличивается $\sim p$ (**столкновительное уширение**).

В рассматриваемом случае чисто столкновительного механизма дефазировки выражение (34), описывающее процесс затухания свободной поляризации, примет вид

$$p(t) \sim e^{-\sigma_{\nu(c)}^2 L_c(t)} \cos \omega_0 t \quad (3.4.52)$$

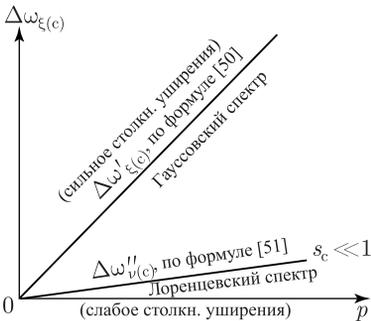


Рис. 3.11

(если учесть также упрощающие условия (37)). Согласно (3.3.39), (48), (49) и (51) в (52)

$$\sigma_{\nu(c)}^2 L_c(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_{\nu(c)}^2 t^2 & (\text{если } S_c \equiv S'_c \gg 1), \\ D_c t & (\text{если } S_c \equiv S''_c \ll 1), \end{cases} \quad (3.4.53)$$

где

$$\sigma_{\nu(c)} = \beta_c p, \quad D_c = \sigma_{\nu(c)}^2 \tau_{\nu(c)} = S''_c \beta_c p. \quad (3.4.54)$$

Подставив (53) и (54) в уравнение (35), приходим в результате к следующим оценкам для времени дефазировки $\tau_{\text{ph}(c)}$ — эффективного времени затухания свободной поляризации (52):

$$\begin{aligned} \tau'_{\text{ph}(c)} &= \frac{\sqrt{2m}}{\sigma_{\nu(c)}} \approx \frac{\sqrt{2m}}{\beta_0 p} \quad (\text{если } S_c = S'_c \gg 1), \\ \tau''_{\text{ph}(c)} &= \frac{m}{D_c} = \frac{m}{2S''_c \beta_c p} \quad (\text{если } S_c = S''_c \ll 1). \end{aligned} \quad (3.4.55)$$

т. е. имеет место неравенство

$$\tau''_{\text{ph}(c)} / \tau'_{\text{ph}(c)} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{1}{S''_c} \gg 1,$$

согласующееся по смыслу с неравенством (51а). Из выражений (50), (51) и (55) следуют «соотношения неопределенностей»

$$\Delta\omega'_{\xi(c)} \tau'_{\text{ph}(c)} = \sqrt{2m} 2\lambda, \quad \Delta\omega''_{\xi(c)} \tau''_{\text{ph}(c)} = 2m, \quad (3.4.55a)$$

совпадающие с (45).

Комбинированная (доплеровская и столкновительная) дефазировка. Появление при изменении давления минимума у ширины спектра (провал Дики) и максимума у времени дефазировки (пик дефазировки). Чтобы провести сравнение теоретических и экспериментальных результатов, рассмотрим общий случай, когда одновременно проявляются доплеровский (d) и столкновительный (c) механизмы уширения спектральных линий. В этом случае в (30) следует положить

$$\nu(t) = \nu_{d+c}(t) = \nu_d(t) + \nu_c(t). \quad (3.4.56)$$

Примем несколько упрощенную модель частотных флуктуаций ν_{d+c} , считая, что в (56) флуктуации ν_d и ν_c являются не только малыми гауссовскими (как уже предполагалось выше), но и что они взаимно статистически независимы. В этом случае в общих выражениях (33), (33а) и нужно положить

$$\sigma_{\nu}^2 L(\theta) = \sigma_{\nu(d)}^2 L_d(\theta) + \sigma_{\nu(c)}^2 L_c(\theta), \quad (3.4.57)$$

где согласно (32), (33), (38), (40), (41), (47) и (48) имеем

$$\sigma_{\nu(d)}^2 = k_0^2 \frac{kT}{m} = \text{const}, \quad \sigma_{\nu(c)} = \beta_c^2 p, \quad (3.4.58)$$

$$L_d(\theta) = \int_0^\theta (\theta - \tau) R_d(\tau) d\tau \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \theta^2 & (\text{при } S_d = S'_d \gg 1), \\ \theta \tau_{\nu(d)} & (\text{при } S_d = S''_d \ll 1), \end{cases} \quad (3.4.59)$$

$$L_c(\theta) = \int_0^\theta (\theta - \tau) R_c(\tau) d\tau \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \theta^2 & (\text{при } S_c = S'_c \gg 1), \\ \theta \tau_{\nu(c)} & (\text{при } S_c = S''_c \ll 1), \end{cases} \quad (3.4.60)$$

$$\tau_{\nu(d)} = \int_0^\infty R_d(\tau) d\tau = \frac{\alpha_d}{p}, \quad \tau_{\nu(c)} = \int_0^\infty R_c(\tau) d\tau = \frac{\alpha_c}{p},$$

$$S_d = \sigma_{\nu(d)} \tau_{\nu(d)} = \sigma_{\nu(d)} \alpha_d / p = \frac{p_d}{p} \quad (p_d = \sigma_{\nu(d)} \alpha_d = \text{const}),$$

$$S_c = \sigma_{\nu(c)} \tau_{\nu(c)} = \alpha_c \beta_c = \text{const}. \quad (3.4.61)$$

В этих выражениях постоянные $\sigma_{\nu(d)}$, p_d , α_d , α_c и β_c от давления p не зависят. Следовательно, не зависит от давления и S_c (см. (61)) — «параметр формы» вещества, который, в принципе, может иметь любую величину. Но в специально интересующем нас случае газообразного водорода (экспериментальные данные по которому представлены ниже) $S_c = 0,0186$, т. е. $S_c = S''_c \ll 1$, а значит согласно (60) можно

$$\sigma_{\nu(c)}^2 L_c(\theta) \approx D_c \theta, \quad (\text{при всех давлениях}), \quad (3.4.62)$$

где (см. (58))

$$D_c = \sigma_{\nu(c)}^2 \tau_{\nu(c)} \approx B_c p \quad (B_c = \alpha_c \beta_c^2). \quad (3.4.62a)$$

Учитывая (58) и (59), находим также, что

$$\sigma_{\nu(d)}^2 L_d(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_{\nu(d)}^2 \theta^2 & (\text{при } p \ll p_d) \\ D_d \theta & (\text{при } p \gg p_d) \end{cases} \quad (3.4.63)$$

где

$$D_d = \sigma_{\nu(d)}^2 \tau_{\nu(d)} = \frac{A_d}{p} \quad (A_d = \sigma_{\nu(d)}^2 \alpha_d). \quad (3.4.64)$$

Из этих выражений следует, что поскольку $\sigma_{\nu(d)} = \text{const}$, а $D_c \sim p$, то

$$D_c \theta \ll \frac{1}{2} \sigma_{\nu(d)}^2 \theta^2, \quad (p \rightarrow 0),$$

т. е. в области низких давлений доплеровская дефазировка доминирует над столкновительной. В результате, подставив (62), (63) и учтя (64), получим:

$$\sigma_{\nu}^2 L(\theta) = \sigma_{\nu(d)}^2 L_d(\theta) + \sigma_{\nu(c)}^2 L_c(\theta) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_{\nu(d)}^2 \theta^2 & (p \ll p_d), \\ D_{d+c} \theta & (p \gg p_d), \end{cases} \quad (3.4.65)$$

где

$$D_{d+c} = D_d + D_c = \frac{A_d}{p} + B_c p = \sigma_{\nu(d)} \cdot F(x), \quad (3.4.65a)$$

здесь

$$F(x) = \frac{1}{x} + \gamma x, \quad x = \frac{p}{p_d}, \quad \gamma = \alpha_d \alpha_c \beta_c^2 = S_c'' \frac{\tau_{\nu(d)}}{\tau_{\nu(c)}}. \quad (3.4.66)$$

Таким образом, согласно (65) при комбинированной дефазировке: 1) в области низких давлений — частотный спектр излучения имеет доплеровские характеристики, т. е. **гауссовскую** форму и независимую от давления ширину (42)

$$\Delta\omega'_{\xi(d+c)} = \Delta\omega'_{(d)} = 2\lambda\sigma_{\nu(d)} = \text{const} \quad (p \ll p_d); \quad (3.4.67)$$

2) в области высоких давлений — спектр **лоренцевский** с шириной

$$\Delta\omega''_{\xi(d+c)} = 2D_{d+c} = 2\sigma_{\nu(d)}F(x). \quad (3.4.68)$$

Поскольку $S_c \ll 1$ (см. (60)), то считая времена корреляции $\tau_{\nu(d)}$ и $\tau_{\nu(c)}$ в (66) величинами одного порядка, можно заключить, что в (66)

$$\gamma \ll 1. \quad (3.4.69)$$

График функции (68) построен на рис. 3.12. Он показывает, что при давлении $x = x_0 = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \gg 1$ сужение частотного спектра (сужение

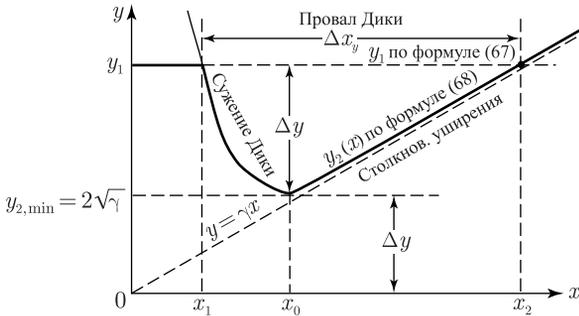


Рис. 3.12

Дики — см. рис. 3.9) прекращается и в области $x > x_0$ происходит расширение спектра, обусловленное усилением столкновительной компоненты дефазировки с ростом давления. В результате образуется так называемый **провал Дики**, т. е. уменьшение полосы $\Delta\omega''_{\xi(d+c)}$ ниже доплеровского уровня $\Delta\omega'_{\xi(d)}$. Ширину провала можно оценить как

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\gamma}\right)^2 - 1}, \quad x_{1,2} = \frac{\lambda}{2\gamma} \mp \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2\gamma}\right)^2 - \frac{1}{\gamma}}. \quad (3.4.70)$$

Глубина провала Дики составляет (в % от уровня $\Delta\omega'_{\xi(d)}$)

$$\Delta y \% = \frac{y_1 - y_{2, \min}}{y_1} \cdot 100 \% = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln 2}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\lambda}}\right) \cdot 100 \%. \quad (3.4.71)$$

Здесь

$$y_{2, \min} = 2\sqrt{\gamma}, \quad y_1 = \Delta\omega'_{\xi(d+c)}/2\sigma_{\nu(d)} = \lambda = \sqrt{2\ln 2}.$$

Как видно из (70), провал Дики возникает лишь для тех газов, для которых $(\lambda/2\gamma)^2 > 1/\gamma$, т. е. $\gamma < \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\ln 2}{2} \approx 0,35$.

Время дефазировки $\tau_{\text{ph}(d+c)}$ найдем, подставив (65) в (35). Мы получим два уравнения, соответственно, для малых и больших давлений,

$$\frac{1}{2} \sigma_{\nu(d)}^2 [\tau'_{\text{ph}(d+c)}]^2 = m \quad (p \ll p_d), \quad D\tau''_{\text{ph}(d+c)} = m \quad (p \gg p_d),$$

из которых следует, что

$$\tau'_{\text{ph}(d+c)} = \frac{\sqrt{2m}}{\sigma_{\nu(d)}} = \tau'_{\text{ph}(d)} = \text{const} \quad (p \ll p_d)$$

(см. (44)) и

$$\tau''_{\text{ph}(d+c)} = \tau'_{\text{ph}(d+c)} \cdot \frac{\sqrt{m/2}}{F(x)} \quad (p \gg p_d) \quad (3.4.72)$$

(рис. 3.13). Используя (67) и (72), находим «соотношения неопределенностей», полностью аналогичные (45) и (55а):

$$\begin{aligned} \Delta\omega'_{\xi(d+c)} \cdot \tau'_{\text{ph}(d+c)} &= 2\lambda\sqrt{2m} \quad (p \ll p_d), \\ \Delta\omega''_{\xi(d+c)} \cdot \tau''_{\text{ph}(d+c)} &= 2m \quad (p \gg p_d). \end{aligned} \quad (3.4.73)$$

§ 5. Фотоотсчеты в случайном световом поле

В этом параграфе мы обратимся к еще одному примеру импульсного случайного процесса — статистике фототока, возбуждаемого световым излучением на фотокатоде (упрощенная схема фотоэлектрического детектора изображена на рис. 3.14). Эта задача аналогична, разумеется, задаче о дробовом эффекте, рассмотренной в § 6 гл. 2: элементарный акт фотоэмиссии является случайным, подобно элементарному акту термоэлектронной эмиссии (см. рис. 2.11).

Однако здесь мы рассмотрим новый аспект этой задачи, имеющий особое значение для статистики фотоэмиссии, а именно, рассмотрим статистику фотоэлектронного тока в условиях, когда катод освещается источником света с флуктуирующей интенсивностью (в задаче о термоэлектронной эмиссии такой постановке соответствуют флуктуационные изменения температуры катода). Будем искать закон распределения $P(n)$ числа n фотоэлектронов, эмиттированных фотокатодом в течение заданного интервала времени T (числа фотоотсчетов).

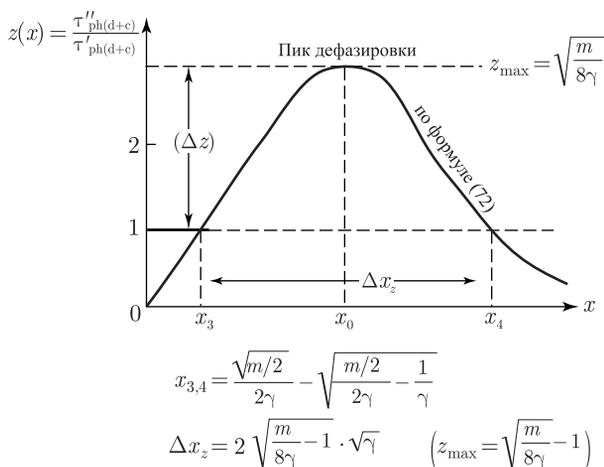


Рис. 3.13

В общем случае источника с флуктуирующей интенсивностью распределение $P(n)$, вообще говоря, отличается от пуассоновского и зависит от статистики интенсивности света. Таким образом, процесс фотодетектирования случайного света приводит к непуассоновским импульсным последовательностям. Измерение распределений $P(n)$ может быть использовано для определения одномерной статистики интенсивности светового пучка. Этот факт широко применяется в современной статистической оптике.

Распределение фотоотчетов в случайном поле. Формула Манделя.

Выведем распределение числа фотоотчетов $P(n)$ в поле светового источника с флуктуирующей интенсивностью. Согласно полуклассической теории фотоэффекта дифференциальная вероятность dP появления одного фотоэлектрона (фотоотчета) в интервале времени dt определяется выражением (ср. с (2.6.57))

$$dP(t) = p dt, \quad p = \beta I(t), \tag{3.5.1}$$

где β — коэффициент, характеризующий чувствительность фотодетектора, а $I(t)$ — интенсивность света [8].

Если источник света имеет постоянную интенсивность (на практике такой источник является хорошей моделью стабилизированного одномодового лазера непрерывного действия), то в силу (1) вероятность вылета фотоэлектрона прямо пропорциональна интервалу времени T , и, следовательно, статистика фотоэлектронов является пуассоновской

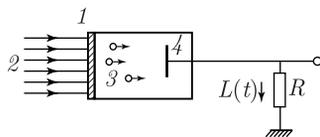


Рис. 3.14. Модель фотодетектора:

1 — катод (фоточувствительная поверхность); 2 — падающее световое излучение; 3 — эмиттированные фотоэлектроны; 4 — коллекторный анод, $i(t)$ — выходной ток, R — нагрузочное сопротивление

(см. § 6 гл. 2), при этом вероятность появления n импульсов фототока за время T дается формулой (2.6.36):

$$P(n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5.2)$$

Среднее число фотоэлектронов за время T равно

$$\alpha = \langle n \rangle = \beta T I. \quad (3.5.3)$$

Если интенсивность изменяется, то вместо (3) следует писать

$$\alpha = \langle n \rangle = \beta \int_0^T I(t) dt = \beta U, \quad (3.5.4)$$

где $U = \int_0^T I(t) dt$ — энергия светового потока, прошедшего через поверхность детектора за время T . Для случайного светового поля

$$E(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] \quad (3.5.5)$$

функция $I(t) = \rho^2(t)/2$ также имеет случайный характер, а энергия U случайно меняется от измерения к измерению. Вероятность (2) в этой ситуации следует, очевидно, интерпретировать как условную вероятность, соответствующую данному значению U :

$$P(n | U) = e^{-\beta U} \frac{(\beta U)^n}{n!}, \quad \langle n \rangle | U = \alpha = \beta U.$$

Полную вероятность найдем, усреднив $P(n | U)$ при помощи функции распределения энергии $w(U)$:

$$P(n) = \int_0^\infty P(n, u) w(U) dU = \int_0^\infty \frac{(\beta U)^n}{n!} e^{-\beta U} w(U) dU, \quad (3.5.6)$$

$$\langle n \rangle = \beta \langle U \rangle = \beta \langle I \rangle T.$$

Выражение (6) называют *формулой Манделя*. В результате усреднения по U распределение вероятностей числа фотоотсчетов, даваемое формулой Манделя (6), может существенно отличаться от первоначального пуассоновского. Это отличие проявляется, в частности, в величине дисперсии фотоотсчетов. При распределении n по Пуассону $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$ (см. (2.6.37)), в то время как согласно (6)

$$\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle + \beta^2 (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2) = \langle n \rangle + \beta^2 \sigma_U^2, \quad (3.5.7)$$

т. е. дисперсия числа фотоотсчетов в случайном поле всегда больше $\langle n \rangle$. Поэтому случайные поля можно различать по превышению σ^2 над $\langle n \rangle$.

Роль соотношения между временем корреляции поля и временем наблюдения. Величина σ_U^2 (7) существенно зависит от соотноше-

ния между временем корреляции поля τ_k и временем наблюдения T . Действительно, в предельном случае $\tau_k \ll T$ статистика фотоотчетов вообще не чувствительна к статистике светового поля. Согласно (4) при $\tau_k \ll T$ в силу эргодической теоремы $\alpha \approx \beta T \langle I \rangle$ и статистика фотоотчетов будет пуассоновской независимо от распределения интенсивности света.

Для рассмотрения промежуточных случаев и получения количественных оценок обратимся к случайному процессу (5). Корреляционная функция для стационарного поля (5) может быть записана как $\langle EE_\tau \rangle = \sigma^2 r(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \psi(\tau)]$ (см. (2.3.7)), причем $\langle E^2 \rangle = \langle I \rangle = \sigma^2$ и $\langle n \rangle = \beta \sigma^2 T$. Если поле гауссовское, то согласно (2.4.17)

$$\langle II_\tau \rangle = \frac{1}{4} \langle \rho^2 \rho_\tau^2 \rangle = \sigma^4 [1 + r^2(\tau)].$$

Отсюда находим

$$\sigma_U^2 = \sigma^4 \int_0^T \int_0^T dt_1 dt_2 r^2(t_1 - t_2) = 2\sigma^4 \int_0^T (T - \tau) r^2(\tau) d\tau,$$

или

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau) r^2(\tau) d\tau. \quad (3.5.8)$$

Возьмем $r(\tau)$ в виде

$$r(\tau) = e^{-|\tau|/\tau_k}.$$

В этом случае согласно (8) дисперсия фотоотчетов определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \frac{1}{2} q^{-2} (e^{-2q} - 1 + 2q), \\ q &= \frac{T}{\tau_k}. \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

Из (9) следует монотонное уменьшение дисперсии с ростом времени измерения T (рис. 3.15). В пределе $\tau_k \gg T$ ($q \ll 1$)

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2.$$

В другом крайнем случае, $\tau_k \ll T <$ из (9) получаем

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2 \tau_k / T \approx \langle n \rangle, \quad (3.5.9a)$$

т. е. при $\tau_k \ll T$ случайность поля не проявляется (величина дисперсии совпадает со значением дисперсии для нефлуктуирующего поля). На рис. 3.16 показана эволюция распределения $P(n)$ с ростом T/τ_k и видно, что при $\tau_k \ll T$ ($q \gg 1$) распределение приближается к пуассоновскому.

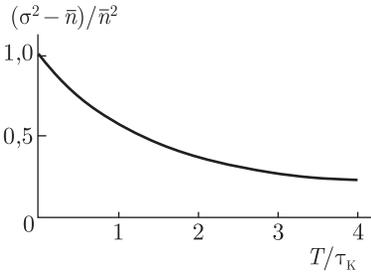


Рис. 3.15. Приведенное отклонение дисперсии фотоотсчетов от среднего числа фотоотсчетов $(\sigma_n^2 - \bar{n})/\bar{n}^2$ для излучения с гауссовской статистикой в зависимости от времени измерения T

τ_k — время корреляции излучения

Выражение (9) можно переписать как

$$\sigma_n^2 = \langle n \rangle (1 + \delta),$$

$$\delta = \frac{\langle n \rangle}{2q^2} (e^{-2q} - 1 + 2q). \quad (3.5.9б)$$

Параметр δ , называемый параметром вырождения (название заимствовано из статистической механики), характеризует увеличение дисперсии числа фотоотсчетов из-за флуктуации поля (при отсутствии флуктуации $\delta = 0$). Согласно (9б) величина δ зависит как от соотношения между временем наблюдения и временем корреляции ($q = T/\tau_k$), так и от интенсивности поля ($\langle n \rangle \sim I$).

Для лазерного излучения $\delta \approx 10^{14}$, в то время как для тепловых источников света $\delta \lesssim 10^{-3}$. Эти оценки объясняют, почему экспериментальное изучение статистики фотоотсчетов было начато только после создания лазеров.

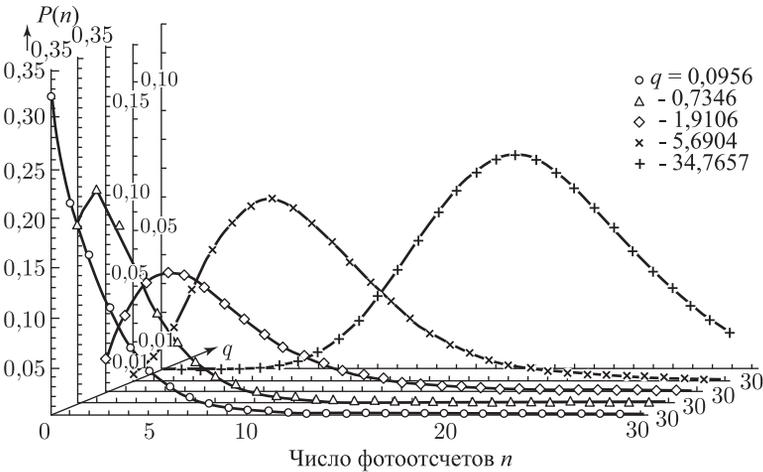


Рис. 3.16. Распределение фотоотсчетов лазерного излучения, рассеянного вращающимся матовым диском, при различных отношениях $T/\tau_k = q$ [9]

Статистика фотоотсчетов в поле теплового и лазерного излучений. Предыдущее рассмотрение показало, что для сохранения в статистике фотоотсчетов сведений о флуктуациях светового поля необходимо, чтобы время корреляции τ_k излучения превышало время

измерения T . Мы будем считать это условие ($\tau_k \gg T$) выполненным. Тогда $U = IT$, а формулу Мандела (6) можно записать в виде

$$P(n) = \int_0^{\infty} \frac{(\beta IT)^n}{n!} e^{-\alpha IT} w(I) dI. \quad (3.5.10)$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Возьмем прежде всего случай, когда распределение $w(I)$ имеет вид δ -функции:

$$w(I) = \delta(I - I_0). \quad (3.5.11)$$

Соответствующее распределение фотоотсчетов является пуассоновским:

$$P(n) = \frac{(\bar{n})^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad (3.5.12)$$

где

$$\bar{n} = \beta T I_0, \quad \sigma_n^2 = \bar{n}. \quad (3.5.13)$$

Распределения (11) и (12) относятся к идеальной модели лазера, работающего в надпороговом режиме.

2. Обратимся теперь к рассмотрению поля с гауссовской статистикой (тепловое излучение, лазерное излучение, рассеянное в неоднородных средах, и т. п.), имеющего (см. (2.4.8)) экспоненциальное распределение интенсивности:

$$w(I) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-I/\sigma^2}, \quad \sigma^2 = \langle I \rangle, \quad (3.5.14)$$

где σ^2 — средняя интенсивность.

Подставив (14) в (10), получим

$$P(n) = \bar{n}^n / (1 + \bar{n})^{1+n}, \quad (3.5.15)$$

причем

$$\bar{n} = \beta T \sigma^2, \quad \sigma_n^2 = \bar{n}(1 + \bar{n}). \quad (3.5.16)$$

Распределение (15) отличается от пуассоновского (12) прежде всего тем, что с ростом n вероятности $P(n)$ всегда убывают, как видно из (16); дисперсия фотоотсчетов в этом случае может значительно отличаться от их среднего числа.

Распределения (12) и (15) измерялись экспериментально, и было получено удовлетворительное согласие с теорией (рис. 3.17).

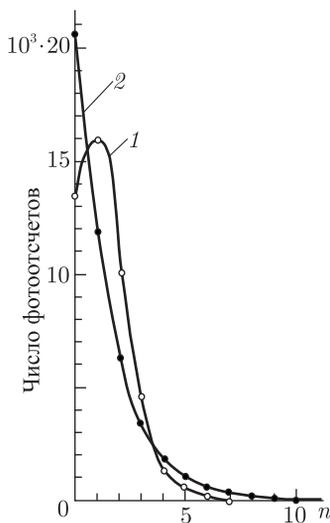


Рис. 3.17. Распределение фотоотсчетов лазерного излучения (1) и излучения с гауссовской статистикой (2) [10]

Точки — экспериментальные значения, кривые — теоретические

3. В случае суперпозиции гармонического сигнала и гауссовского стационарного шума (см. (2.4.36) и (2.4.39))

$$E = S(t) + \xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Функция $w(\rho)$ для такого поля имеет вид (2.4.44), так что

$$w(I) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-a^2/2\sigma^2} e^{-I/\sigma^2} I_0\left(\frac{a}{\sigma^2} \sqrt{2I}\right). \quad (3.5.17)$$

Задаваясь различными значениями отношения сигнал/шум $z = a^2/\sigma^2$, можно проследить непрерывный переход (10) в распределение Пуассона (12) или в распределение (15), так как

$$w(I) = \begin{cases} \delta(I - I_0), & z \rightarrow \infty \quad (I_0 = a^2/2), \\ e^{-I/\sigma^2}/\sigma^2, & z \rightarrow 0. \end{cases}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} J_0(2x\sqrt{y}) dx = \frac{n!}{2} e^{-y} L_n(y) \quad (3.5.18)$$

(см. [4], с. 732), при помощи распределения (17) найдем моменты интенсивности

$$\overline{I^n} = \sigma^{2n} n! L_n(-z) \quad (z = a^2/2\sigma^2), \quad (3.5.19)$$

где L_n — полиномы Лагерра:

$$L_n(y) = \frac{1}{n!} e^y \left(\frac{d}{dn}\right)^n e^{-y} y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-y)^k}{k!},$$

$$L_1(y) = 1 - y, \quad L_2(y) = 1 - 2y + y^2/2. \quad (3.5.20)$$

Как следует из (19), (20) и (7),

$$\langle I \rangle \sigma^2 (1+z), \quad \overline{I^2} = \sigma^4 2(1+2z+z^2/2) = \langle I \rangle^2 2 \frac{1+2z+z^2/2}{(1+z)^2},$$

$$\sigma_n^2 = \overline{n} \left[1 + \langle n \rangle \frac{1+2z}{(1+z)^2} \right], \quad \langle n \rangle = \beta T I. \quad (3.5.21)$$

Формулы (21) обобщают полученные ранее выражения (16) и (13), с которыми они совпадают в предельных случаях $z \ll 1$ или $z \gg 1$.

Подставив (17) в (10) и используя опять интеграл (18), получим следующее выражение для вероятности n фотоотсчетов:

$$P(n) = \frac{b^n}{(1+b)^{n+1}} \exp\left(-z \frac{b}{1+b}\right) L_n\left(-\frac{z}{1+b}\right), \quad (3.5.22)$$

где $b = \gamma T \sigma^2$.

4. Поле (5) — стационарный квазигармонический процесс (не обязательно гауссовский) с симметричным распределением вероятностей $w(E) = w(-E)$ и характеристической функцией $\theta(u) = \theta(-u) = \theta^*(u)$. Распределение интенсивности в этом случае дается формулой (3.1.28), подставив которую в (10) получим, меняя порядок интегрирования,

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\beta T I} (\beta T I)^n dI \int_0^\infty J_0(u\sqrt{2I}) \theta(u) u du = \\
 &= \frac{2}{n! \beta T} \int_0^\infty \theta(u) u du \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n+1} J_0(2x\sqrt{y}) dx, \quad (3.5.23)
 \end{aligned}$$

где $\sqrt{y} = u/\sqrt{2\beta T}$. Интеграл по x в (23) совпадает с (18). Следовательно, (23) можно переписать в виде

$$P(n) = \frac{1}{\beta T} \int_0^\infty e^{-u^2/2\beta T} L_n\left(\frac{u^2}{2\beta T}\right) \theta(u) u du = \int_0^\infty e^{-y} L_n(y) \theta(\sqrt{2\beta T y}) dy, \quad (3.5.24)$$

выразив, таким образом, $P(n)$ непосредственно через характеристическую функцию поля. В частности, если поле имеет гауссовскую статистику, то $\theta(u) = \exp(-\sigma^2 u^2/2)$ и согласно (24)

$$P(n) = \int_0^\infty e^{-by} L_n(y) dy = (b-1)^n b^{-n-1} \quad (b = 1 + \beta T \sigma^2)$$

(см. [4], с. 858) Легко убедиться, что полученное выражение совпадает с (15).

Обратная задача: нахождение статистики поля из распределения фотоотчетов. До сих пор мы решали прямую задачу — определение статистики фотоотчетов по заданному распределению интенсивности. Обратимся теперь к обратной задаче: определим, какую информацию о статистике регистрируемого поля можно извлечь, обладая сведениями о статистике фотоотчетов. С математической точки зрения эта задача решается обращением формулы Манделя (6) или (10). Можно показать [12, 13], что распределение интенсивности однозначно определяется распределением фотоотчетов.

Познакомимся с некоторыми методами решения обратной задачи.

1. Рассмотрим функцию

$$Q(s) = \int_0^\infty e^{isU} w(U) e^{-\beta U} dU; \quad (3.5.25)$$

ее фурье-преобразование дает

$$w(U) = \frac{e^{\beta U}}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty Q(s) e^{-isU} ds. \quad (3.5.26)$$

Если разложить в (25) экспоненту e^{isU} в ряд и использовать формулу Манделя (6), то получим

$$Q(s) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{is}{\beta}\right)^n P(n). \quad (3.5.27)$$

Это соотношение позволяет по распределению фотоотсчетов $P(n)$ найти функцию $Q(s)$, фурье-преобразование которой (26) дает распределение $w(U)$.

2. Запишем распределение $w(U)$ в виде

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m I_m(2\bar{n}x), \quad x = U/\bar{U}, \quad (3.5.28)$$

т.е. как разложение по функциям Лагерра $l_m(x)$, которые связаны с полиномом Лагерра (20) соотношением

$$l_m(x) = e^{-x/2} L_m(x) = e^{-x/2} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(-x)^n}{n!}. \quad (3.5.29)$$

Функции Лагерра ортогональны и нормированы:

$$\int_0^{\infty} l_m(x) l_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (3.5.30)$$

Поэтому, умножая (28) на $l_m(2\bar{n}x)$ и интегрируя с учетом (30), получим, что коэффициенты разложения в (28) равны

$$\lambda_m = 2\bar{n} \int_0^{\infty} w(x) l_m(2\bar{n}x) dx, \quad (3.5.31)$$

или с учетом (30) и (6)

$$\begin{aligned} \lambda_m &= 2\bar{n} \int_0^{\infty} w(x) e^{-\bar{n}x} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{(-2\bar{n}x)^n}{n!} dx = \\ &= 2\bar{n} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} (-2)^n P(n, \bar{n}). \end{aligned} \quad (3.5.32)$$

Подставив (32) в (28) и меняя порядок суммирования, получим решение обратной задачи в виде

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) P(n, \bar{n}), \quad (3.5.33)$$

где

$$\begin{aligned} a_n(x) &= 2\bar{n}(-2)^n \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} l_m(2\bar{n}x) = \\ &= 2\bar{n}(-2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} l_{n+k}(2\bar{n}x). \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

3. Чтобы воспользоваться приведенными выше методами, нужно иметь аналитическую запись распределения $P(x)$. В некоторых случаях интерес может представлять более узкая постановка обратной задачи, а именно нахождение связи между кумулянтами (а следовательно и моментами) интенсивности и числа фотоотчетов [13].

Логарифм характеристической функции распределения фотоотчетов

$$\theta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ixn} P(n) \quad (3.5.35)$$

выражается через кумулянты k_m этого распределения:

$$\ln \theta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \frac{(is)^m}{m!}. \quad (3.5.36)$$

Подстановка (6) в (36) дает

$$\begin{aligned} \ln \theta(s) &= \ln \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta e^{is} U)^n}{n!} e^{-\beta U} w(U) dU \right\} = \\ &= \ln \{ \langle \exp[\beta(e^{is} - 1)U] \rangle \}, \end{aligned} \quad (3.5.37)$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению $w(U)$.

В (37) в последнем равенстве под знаком логарифма стоит характеристическая функция распределения интенсивности от аргумента $\beta(e^{is} - 1)$. Обозначая кумулянты распределения интенсивности через $k_{m,I}$, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(is)^m}{m!} k_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[\beta(e^{is} - 1)]^m}{m!} k_{m,I}. \quad (3.5.38)$$

Сравнивая в разложении (38) коэффициенты при одинаковых степенях s , получаем связь между кумулянтами k_m и $k_{m,I}$:

$$k_1 = \beta k_{1,I}, \quad k_2 = \beta k_{1,I} + \beta^2 k_{2,I}, \quad k_3 = \beta k_{1,I} + 3\beta^2 k_{2,I} + \beta^3 k_{3,I}, \quad \dots \quad (3.5.39)$$

4. Согласно формуле Манделя (10) вероятность того, что за время T не произойдет ни одного фотоотчета (при заданном среднем числе фотоотчетов $\bar{n} = \beta T \bar{I}$), равна

$$P(0, \bar{n}) = \int_0^{\infty} e^{-\bar{n}x} w(x) dx, \quad x = I/\bar{I}, \quad (3.5.40)$$

где $w(x)$ — распределение вероятностей для относительной интенсивности $x = I/\bar{I}$.

Таким образом, величина $P(0, \bar{n})$ может рассматриваться как преобразование Лапласа функции $w(x)$, и если зависимость $P(0, \bar{n})$ от \bar{n} известна (например, из эксперимента), то соответствующее распреде-

ление интенсивности поля $w(x)$ найдется, если применить к функции $P(0, \bar{n})$ обратное преобразование Лапласа.

Исходя из определенной таким образом функции $w(x)$ или, что то же самое, $w(I)$, можно, считая поле $E(t)$ стационарным квазимонохроматическим процессом, найти распределение вероятностей для огибающей поля (см. (3.1.26)):

$$w(\rho) = \rho w(I)|_{I=\rho^2/2}; \quad (3.5.41)$$

при этом $w(\rho)$ однозначно определяет характеристическую функцию поля (см. (3.1.9))

$$\theta(u) = \int_0^{\infty} J_0(u\rho)w(\rho) d\rho \quad (3.5.42)$$

и, следовательно, распределение вероятностей $w(E)$.

Таким образом, зная $P(0, \bar{n})$ как функцию \bar{n} , можно, в принципе, решить обратную задачу и найти все статистические характеристики поля, обуславливающего фотоэффект ¹⁾.

Рассмотрим пример решения обратного задачи. В случае гауссовской статистики поля имеем

$$w(x) = e^{-x}$$

и, согласно (40),

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1}{1 + \bar{n}}.$$

Теперь предположим, что убывание $P(0, \bar{n})$ с ростом \bar{n} является более быстрым и

$$P(0, \bar{n}) = \frac{a}{(b + \bar{n})^2}. \quad (3.5.43)$$

Аналитическая аппроксимация функции $P(0, \bar{n})$ не может выбираться совершенно произвольно, так как из (40) видно, что эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$P(0, \bar{n} = 0) = \int_0^{\infty} w(x) dx = 1, \quad (3.5.44)$$

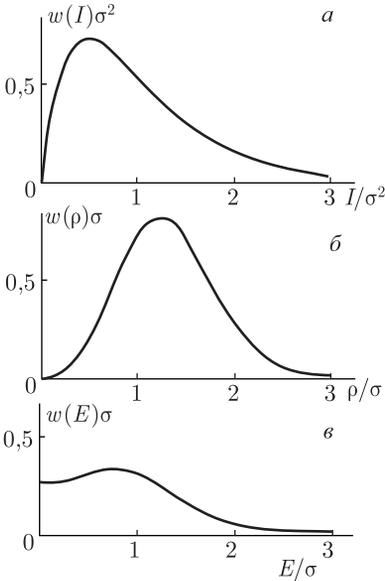


Рис. 3.18. Распределения интенсивности (а), огибающей (б) и поля (в), соответствующие распределению фотоотсчетов (43)

¹⁾ Можно было бы, очевидно, исходить из вероятности некоторого ненулевого числа фотоотсчетов $P(n, \bar{n})$, но соответствующие формулы более громоздки.

$$-\frac{\partial P(0, \bar{n})}{\partial \bar{n}} \Big|_{\bar{n}=0} = \int_0^{\infty} xw(x) dx = \langle x \rangle = \left\langle \frac{I}{\bar{I}} \right\rangle = 1. \quad (3.5.45)$$

Подставив (43) в (44), (45), получим: $a = 4$, $b = 2$, т. е. (43) мы должны переписать как

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1}{(1 + \bar{n}/2)^2}. \quad (3.5.46)$$

По таблице обратных преобразований Лапласа находим, что в этом случае

$$w(x) = 4xe^{-2x}$$

(рис. 3.18, а), т. е. распределение интенсивности имеет вид

$$w(I) = \frac{4I}{\sigma^4} e^{-2I/\sigma^2} \quad (I = \sigma^2). \quad (3.5.47)$$

Подстановка (47) в (41) дает следующий закон распределения для огибающей:

$$w(\rho) = \frac{2\rho^3}{\sigma^4} e^{-\rho^2/\sigma^2} \quad (3.5.48)$$

(рис. 3.18, б).

Распределение вероятностей для самого поля можно получить непосредственно из (48), используя соотношение (3.1.18):

$$w(E) = \frac{e^{-E^2/\sigma^2}}{2\sqrt{\pi}\sigma} \left(1 + \frac{2E^2}{\sigma^2} \right) = w(-E). \quad (3.5.49)$$

Распределение (49) существенно отличается от гауссовского, оно имеет два максимума при $E = \pm\sigma\sqrt{2}$ и провал при $E = 0$ (рис. 3.18, в).

Еще один пример: пусть

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1 - e^{-a\bar{n}}}{b\bar{n}}.$$

Учитывая условия (44), (45), находим $a = b = 2$, т. е.

$$P(0, \bar{n}) = \frac{1 - e^{-2\bar{n}}}{2\bar{n}}. \quad (3.5.50)$$

Распределению (50) соответствует равномерное в некоторой области распределение интенсивности

$$w(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

(см. рис. 3.1), или

$$w(I) = \begin{cases} 1/2\sigma^2, & 0 \leq I \leq 2\sigma^2, \\ 0, & I > 2\sigma^2, \end{cases} \quad (3.5.51)$$

где $\sigma^2 = I$. Распределения огибающей и поля, соответствующие равномерному распределению интенсивности (51), были найдены раньше (см. (3.1.32) и (3.1.34)); они представлены на рис. 3.1.

Нестационарная статистика фотоотсчетов; измерение формы световых импульсов методом фотоотсчетов.

Предыдущее рассмотрение относится к стационарному распределению фотоотсчетов, связанному со статистически стационарной случайной интенсивностью светового поля. Вследствие этого распределение фотоотсчетов определялось только временем выборки и не зависело от расположения этого интервала во времени, т. е. от его начального и конечного моментов времени.

Если методом фотоотсчетов регистрируется интенсивность импульсного излучения, то статистика фотоотсчетов становится нестационарным случайным процессом. При этом вместо распределения (2) следует писать

$$P(n; t_0, T) = \frac{\alpha^n(t_0, T)}{n!} e^{-\alpha(t_0, T)}, \quad (3.5.52)$$

где

$$\alpha(t_0, T) = \beta \int_{t_0}^{t_0+T} I(\theta) d\theta.$$

Согласно (52) значение моментов фотоотсчетов зависит от времени t_0 .

Пусть момент времени $t_0 = 0$ соответствует началу импульса $I(t)$ ($I(t_0 = 0) = 0$). Определим вероятность того, что первый фотоотсчет появится в интервале времени от t до $t + dt$ при условии проведения регистрации на интервале $[0, T]$. Такое событие, очевидно, осуществится, если на интервале $[0, t]$ не появится ни одного фотоотсчета $P(0; 0, t)$. Следовательно, безусловная вероятность появления первого фотоотсчета в интервале $[t, t + dt]$ равна

$$P_1(t) dt = P(0; 0, t)P(1; t, dt). \quad (3.5.53)$$

Для малых временных интервалов в соответствии с (52) имеем

$$P(1; t, dt) = \beta I(t) dt.$$

Вероятность появления по крайней мере одного фотоотсчета на интервале $[0, T]$

$$\mathcal{P}_1 = 1 - P(0; 0, T) = 1 - e^{-\beta \int_0^T I(\theta) d\theta}. \quad (3.5.54)$$

Разделим выражение (53) на вероятность \mathcal{P}_1 , получим условную вероятность появления первого фотоотсчета в интервале

$$P_1(t)_{\text{усл}} dt = P_1(t) dt / \mathcal{P}_1.$$

Отсюда находим

$$P(t) = P_1(t)_{\text{усл}} = \mathcal{P}_1^{-1} \beta I(t) e^{-\beta \int_0^t I(\theta) d\theta}. \quad (3.5.55)$$

Проинтегрируем (55)

$$\int_0^t P(\theta) d\theta = \mathcal{P}_1^{-1} \{1 - e^{-\beta \int_0^t I(\theta) d\theta}\}.$$

Для исключения из этого выражения экспоненциального слагаемого воспользуемся опять (55). В результате получим

$$I(t) = \frac{1}{\beta} \frac{\mathcal{P}_1 P(t)}{1 - \mathcal{P}_1 \int_0^t P(\theta) d\theta}. \quad (3.5.56)$$

Таким образом, зная временную статистику появления первого фотоотсчета, можно с помощью выражения (56) восстановить форму регистрируемого светового импульса. Это еще один пример решения обратной задачи в статистике фотоотсчетов.

В случае регистрации фотодетектором, кроме сигнального импульса $I(t)$, и шумового импульса $I_{\text{ш}}(t)$, статистика фотоотсчетов которого также пуассоновская, формула (56) принимает вид [14]

$$I(t) = \frac{1}{\beta} \frac{\mathcal{P}_1 P(t)}{1 - \mathcal{P}_1 \int_0^t P(\theta) d\theta} - I_{\text{ш}}(t). \quad (3.5.57)$$

Соотношение (57) используется в кинетической спектрофотометрии для измерения законов затухания люминесценции с помощью так называемого время-импульсного метода [14].

§ 6. Многомодовая модель случайного процесса

В этом параграфе мы рассмотрим случайный процесс, являющийся суперпозицией гармонических колебаний (мод), амплитуда и фаза которых случайны. Фактически такую модель впервые рассматривал Рэлей; именно применительно к этой задаче (рассматривалась суперпозиция колебаний одинаковой частоты, но со случайными амплитудами и фазами) Рэлей получил распределение, носящее его имя (см. формулу (2.4.6)). Ниже мы обратимся к более общему случаю, когда частоты мод различны.

Можно указать много физических примеров, приводящих к такой модели. В современной радиофизике и оптике одним из важнейших примеров такого процесса является излучение многомодового лазера; поскольку в общем случае фазы мод случайны, случайным процессом

(в общем случае — нестационарным) оказывается и лазерное излучение.

Этот источник статистики чрезвычайно важен в экспериментах с мощным лазерным излучением. Мощные лазеры обычно излучают много статистически независимых мод, поэтому многомодовая модель оказывается одной из весьма распространенных моделей мощного лазерного излучения. Вместе с тем во многих случаях многомодовая модель оказывается весьма удобной и при рассмотрении случайных процессов со сплошным спектром; в этом случае речь идет о замене реального процесса со сплошным спектром некоторым эквивалентным случайным процессом с дискретным спектром. Оба эти аспекта рассматриваются ниже.

Статистика многомодового колебания; центральная предельная теорема для случайных колебаний. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, представляющий собой суперпозицию N мод:

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n, \quad (3.6.1)$$

спектр которого показан на рис. 3.19.

Будем считать, что амплитуды мод a_n постоянны, а фазы распределены равномерно:

$$w(\varphi_n) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_n \leq \pi, \quad (3.6.2a)$$

и статистически независимы:

$$w(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) = \prod_{n=1}^N w(\varphi_n). \quad (3.6.2b)$$

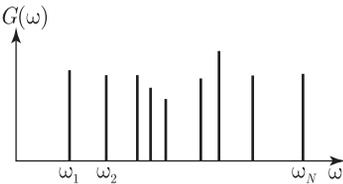


Рис. 3.19. Спектр многомодового колебания

Обратимся сначала к случаю равных частот мод ($\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_N = \omega_0$). В дальнейшем в этом параграфе мы следуем классической работе Рэлея [15]. Полагая для простоты также амплитуды мод одинаковыми ($a_n = a$), соотношение (1) запишем в виде

$$\xi(t) = a \sum_{n=1}^N \cos \Phi_n = \rho \cos(\omega_0 t + \varphi) = \rho \cos \Phi. \quad (3.6.3)$$

В декартовой системе координат колебание с заданными амплитудой ρ и фазой Φ изображается точкой (x, y) (рис. 3.20):

$$x = \rho \cos \Phi, \quad y = \rho \sin \Phi.$$

Вся совокупность возможных значений $\xi(t)$ определяется некоторым распределением точек в плоскости x, y . Заметим, что величины x и y

аналогичны квадратурным компонентам случайного колебания (см. § 3 гл. 2).

Введем функцию распределения $w(N; x, y)$ для результирующего колебания с амплитудой ρ и фазой Φ при наличии N мод. По определению $w(N; x, y) dx dy$ есть вероятность того, что точка будет найдена в пределах бесконечно малой площадки $dx dy$. Добавим к N модам еще одну моду с фазой ψ . Колебание, которое представляется точкой (x, y) , до прибавления моды должно, очевидно, изображаться точкой

$$x' = x - a \cos \psi, \quad y' = y - a \sin \psi.$$

В силу случайности фазы ψ полная вероятность найти точку на площадке $dx dy$ равна

$$dx dy \int_0^{2\pi} w(N; x', y') \frac{d\psi}{2\pi}.$$

Полученное выражение следует приравнять $w(N + 1; x, y) dx dy$, так что

$$w(N + 1; x, y) = \int_0^{2\pi} w(N; x', y') d\psi / 2\pi. \quad (3.6.4)$$

Разложим $w(N; x', y')$ в ряд Тейлора:

$$w(N; x - a \cos \psi, y - a \sin \psi) = w(x, y) - a \frac{\partial w}{\partial x} \cos \psi - a \frac{\partial w}{\partial y} \sin \psi + \\ + \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \psi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \psi + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \psi \cos \psi \right] + \dots$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} w(N; x', y') \frac{d\psi}{2\pi} = w(N; x, y) + \frac{1}{4} a^2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

При большом числе N мод можно также использовать разложение

$$w(N + 1; x, y) = w(N; x, y) + \frac{\partial w(N; x, y)}{\partial N}.$$

Таким образом, вместо интегрального уравнения (4) мы получаем дифференциальное

$$\frac{\partial w}{\partial N} = \frac{a^2}{4} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (3.6.5)$$

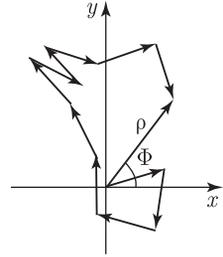


Рис. 3.20. Диаграмма суммирования мод с одинаковыми амплитудами и случайными фазами

Результирующее колебание имеет амплитуду $\rho(t)$ и фазу $\Phi(t)$

Очевидно, что при $N = 0$ $w(0; x, y) = 0$, за исключением точки $(x = 0, y = 0)$. Решением уравнения (5), удовлетворяющим этому условию и условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(N; x, y) dx dy = 1,$$

является двумерное гауссовское распределение

$$w(N; x, y) = (\pi N a^2)^{-1} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{N a^2} \right\} \quad (3.6.6)$$

с дисперсией $\sigma^2 = N a^2 / 2$. Уравнение (5) аналогично уравнению Фоккера — Планка (4.4.21), причем число мод N эквивалентно времени t . Результат (6) не является неожиданным, поскольку процесс $\xi(t)$ рассматривался нами как совокупность статистически несвязанных и, следовательно, некоррелированных между собой колебаний (т. е. были выполнены условия ЦПТ — см. § 2 гл. 1).

Напомним, что для функции распределения (6) и записи колебания в виде (3) огибающая ρ подчиняется распределению Рэлея (2.4.6):

$$w(\rho) = (\rho / \sigma^2) e^{-\rho^2 / 2\sigma^2} \quad (\rho \geq 0).$$

Выражение (6) представляет собой асимптотическое распределение суперпозиции N мод с одинаковыми частотами при $N \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, что и в общем случае разных частот мод функция распределения колебания (1) при $N \rightarrow \infty$ сходится к гауссовской. Удобный способ нахождения функции распределения $w(\xi)$ случайного процесса (1) основан на расчете его характеристической функции

$$\theta(v) = \langle e^{i\xi v} \rangle.$$

Подстановка в это соотношение выражения (1) дает

$$\theta(v) = \left\langle \exp \left\{ i v \sum_{n=1}^N a_n \cos \Phi_n \right\} \right\rangle = \prod_{n=1}^N \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \prod_{n=1}^N \theta(v a_n).$$

Здесь $\theta(v a_n)$ — характеристическая функция одной моды:

$$\begin{aligned} \theta(v a_n) &= \langle \exp \{ i v a_n \cos \Phi_n \} \rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \{ i v a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \} d\varphi_n = J_0(v a_n); \end{aligned}$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка от действительного аргумента.

Таким образом, характеристическая функция случайного процесса $\xi(t)$ в целом равна

$$\theta(v) = \prod_{n=1}^N J_0(va_n). \quad (3.6.7)$$

Функция распределения $w(\xi)$ находится из (7) с помощью фурье-преобразования:

$$w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(v) e^{-iv\xi} dv.$$

Для вычисления $w(\xi)$ воспользуемся следующим приемом. Из (1) следует, что значения ξ лежат в интервале

$$-A \leq \xi \leq A, \quad A = \sum_{n=1}^N a_n.$$

Поэтому $w(\xi)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$w(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(-i\frac{\pi k}{A}\xi\right),$$

где коэффициент

$$c_k = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A w(\xi) \exp\left(i\frac{\pi k}{A}\xi\right) d\xi = \frac{1}{2A} \left\langle \exp\left(i\frac{\pi k}{A}\xi\right) \right\rangle.$$

Отсюда следует, что коэффициент c_k с точностью до множителя $(2A)^{-1}$ представляет собой значение характеристической функции процесса ξ для величины $\pi k/A$.

Для распределения $w(\xi)$ в результате получаем

$$w(\xi) = \frac{1}{2A} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi k \xi}{A} \prod_{n=1}^N J_0\left(\frac{\pi k a_n}{A}\right) \right]. \quad (3.6.8)$$

Изменение распределения $w(\xi)$ с изменением числа мод N показано на рис. 3.21. Из рисунка видно, что распределение суперпозиции двух мод существенно отличается от распределения для одной моды. С ростом числа мод N распределение $w(\xi)$ стремится к гауссовскому.

Чтобы убедиться в этом, найдем сначала закон распределения функции

$$\eta(t) = N^{-1/2} \xi(t). \quad (3.6.9)$$

Для простоты опять считаем амплитуды мод одинаковыми, $a_n = a$. Характеристическая функция случайного процесса $\eta(t)$ при этом равна

$$\eta_\eta(v) = J_0^N(av/\sqrt{N}). \quad (3.6.10)$$

Преобразуем функцию $\theta_\eta(v)$, используя разложение функции Бесселя:

$$J_0(av/\sqrt{N}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(av)^{2k}}{2^{2k} N^k (k!)^2} = 1 - \frac{(av)^2}{4N} + \frac{(av)^4}{64N^2} - \dots \tag{3.6.11}$$

Переходя к пределу $N \gg 1$, получаем

$$\ln \theta_\eta(v) \approx -\frac{(av)^2}{4} + \frac{(av)^4}{64N},$$

или

$$\theta_\eta \approx \exp \left\{ -\frac{(av)^2}{4} \right\} \left[1 - \frac{(av)^2}{16N} \right].$$

Отсюда следует, что функция распределения процесса (9) имеет вид

$$w(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \exp \left\{ -\left(\frac{\eta}{a}\right)^2 \right\} \left[1 - \frac{1}{64N} H_4 \left(\frac{\eta}{a}\right) \right],$$

где $H_4(x)$ — полином Эрмита.

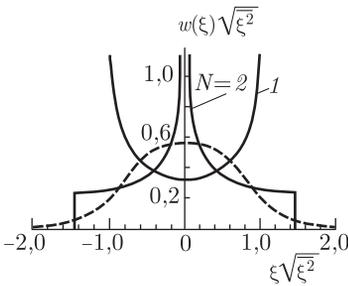


Рис. 3.21. Функции распределения для одномодового поля и двухмодового поля со статистически независимыми модами [16]

Пунктирной кривой изображено гауссовское распределение

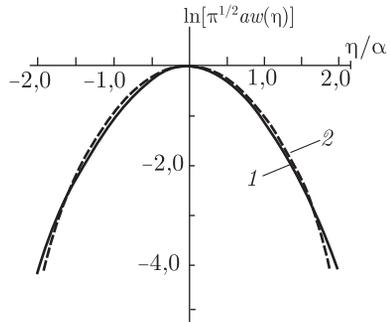


Рис. 3.22. Функция распределения случайного процесса $\eta(t) = N^{-1/2} \xi(t)$ для $N \rightarrow \infty$ (1) и $N = 5$ (2)

Распределение $w(\eta)$ симметрично. Однако при конечном числе N оно более плоское, чем гауссовское распределение (рис. 3.22). В пределе при $N \rightarrow \infty$ распределения $w(\eta)$ и $w(\xi)$ — гауссовские (ср. с (6)):

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left\{ -\frac{\xi^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad \sigma^2 = N\sigma_\eta^2 = \frac{Na^2}{2}. \tag{3.6.12}$$

Этот результат, как и ранее полученная формула (6), является следствием центральной предельной теоремы, рассмотренной в гл. 1. Следует подчеркнуть, что функция распределения (12) получена без

каких-либо ограничений на соотношение между частотами мод и, следовательно, применима как для узкополосного, так и для широкополосного спектра колебания (1).

Моменты многомодового колебания. Рассмотрим моменты случайного процесса (1). Для предельного случая $N \rightarrow \infty$, т. е. для гауссовского распределения, расчет моментов дан в § 2 гл. 2. Для конечного числа мод N моменты распределения (8) можно вычислить с помощью характеристической функции (7), при этом моменты процесса (1)

$$\langle \xi^m \rangle = i^{-m} \left. \frac{d^m \theta(v)}{dv^m} \right|_{v=0}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.6.13)$$

Вследствие симметрии функции распределения $w(\xi)$ (8) нечетные моменты процесса $\xi(t)$ равны нулю. Для расчета четных моментов воспользуемся характеристической функцией (7) в случае равных амплитуд мод и введем для нее обозначение

$$\theta_N(v) = J_0^N(av). \quad (3.6.14)$$

В соответствии с (13) и (14) моменты $\langle \xi^m \rangle$ выражаются через производные от функции Бесселя $J_0^N(av)$. Пользуясь разложением (11), находим

$$J_0^{(2m)}(0) = \left. \frac{d^{2m} J_0(av)}{dv^{2m}} \right|_{v=0} = (-1)^m \frac{a^{2m} (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}, \quad J_0^{(2m+1)}(0) = 0, \quad (3.6.15)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Первая производная от функции (14) равна

$$\frac{d\theta_N(v)}{dv} = \frac{d\theta_N}{dJ_0} \frac{dJ_0(av)}{dv} = N\theta_{N-1}(v) \frac{dJ_0(av)}{dv}.$$

Для четной производной на основании формулы Лейбница получаем

$$\frac{d^{2m}\theta_N(v)}{dv^{2m}} = N \sum_{p=0}^{2m-1} C_{2m-1}^{2p} \frac{d^p \theta_{N-1}(v)}{dv^p} \frac{d^{2m-p} J_0(av)}{dv^{2m-p}},$$

где C означает сочетания. Из последнего соотношения в силу (15) имеем

$$\left. \frac{d^{2m}\theta_N(v)}{dv^{2m}} \right|_{v=0} = N \sum_{q=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2q} \left. \frac{d^{2q}\theta_{N-1}}{dv^{2q}} \right|_{v=0} \left. \frac{d^{2(m-q)} J_0(av)}{dv^{2(m-q)}} \right|_{v=0}. \quad (3.6.16)$$

Таким образом, согласно (16), (15) и (13) моменты случайного процесса (1) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\langle \xi^{2m}(N; t) \rangle = N \sum_{q=0}^{m-1} C_{2m-1}^{2q} \langle \xi^{2q}(N-1; t) \rangle \frac{a^{2(m-q)} [2(m-q)]!}{2^{2(m-q)} [(m-q)!]^2}. \quad (3.6.17)$$

Число N в аргументе случайной функции $\xi(N; t)$ указывает на число мод, из которых образуется рассматриваемый процесс.

Из соотношения (17) следует, что высшие моменты случайного процесса определяются через моменты более низкого порядка для процесса с меньшим числом мод. Выпишем несколько моментов процесса (1):

$$\begin{aligned} \langle \xi^2(N; t) \rangle &= \frac{1}{2} N a^2 = I, & \langle \xi^4(N; t) \rangle &= 3 \left(1 - \frac{1}{2N} \right) I^2, \\ \langle \xi^6 \rangle &= 3 \cdot 5 \left(1 - \frac{3}{2N} + \frac{2}{3N^2} \right) I^3, & & \\ \langle \xi^8 \rangle &= 3 \cdot 5 \cdot 7 \left(1 - \frac{9}{8N} + \frac{41}{12N^2} - \frac{11}{8N^3} \right) I^4. & & \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

Как и следовало ожидать, значения моментов (18) при $N \rightarrow \infty$ совпадают со значениями моментов для гауссовского случайного процесса (2.2.2). Однако при конечном числе мод N различие значений высших моментов и соответствующих моментов гауссовского процесса растет с увеличением номера момента. Так, десятипроцентное отклонение моментов $\langle \xi^4 \rangle$ и $\langle \xi^6 \rangle$ (18) от значений для гауссовского процесса достигается соответственно при $N = 5$ и $N \approx 20$. Сказанное означает, что интерпретация многочастотного колебания (1) с постоянными амплитудами и статистически независимыми фазами (2) как гауссовского случайного процесса зависит от числа мод колебания и номера момента. К этому вопросу мы еще вернемся. Сейчас обратимся непосредственно к гауссовскому процессу.

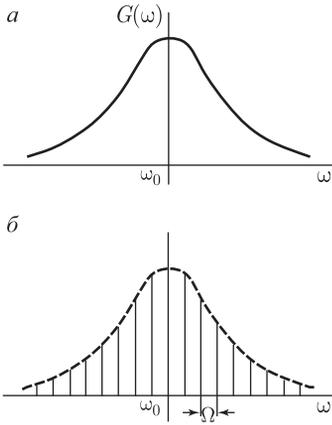


Рис. 3.23. Спектры стационарного шума (а) и многократно повторенной реализации длительности T этого же шума (б) Интервал между частотами $\Omega = 2\pi/T$

Многомодовая модель стационарного гауссовского шума. Пусть $\xi(t)$ — узкополосный стационарный гауссовский процесс:

$$\xi(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (3.6.19)$$

Частотный спектр этого процесса изображен на рис. 3.23, а.

Выделим из реализации рассматриваемого процесса отрезок, длительность которого T значительно превосходит время корреляции τ_k , и повторим его много раз. Таким способом мы получаем периодический случайный процесс. Физический смысл проделанной операции состоит в том, что реальный непрерывный спектр процесса мы представляем в виде «гребенки» мод (дискретного спектра), которая тем чаще, чем больше период T (рис. 3.23, б).

Действительно, периодическую функцию $\xi(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{in\Omega t}, \quad \xi_n = \frac{1}{T} \int_0^T \xi(t) e^{-in\Omega t} dt, \quad (3.6.20)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — частота межмодовых биений, и в силу вещественности $\xi(t)$

$$\xi_n^* = \xi_{-n}. \quad (3.6.20a)$$

Определим статистические свойства комплексных амплитуд ξ_n . Среднее значение $\bar{\xi}_n = 0$, поскольку $\bar{\xi} = 0$. В соответствии с (20) величины ξ_n линейно зависят от ξ и, следовательно, также подчиняются гауссовской статистике.

Рассчитаем значение корреляции между ξ_n и ξ_m^* :

$$\begin{aligned}
 \langle \xi_n \xi_n^* \rangle &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \langle \xi(u) \xi(v) \rangle e^{-in\Omega u + im\Omega v} du dv = \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(v-u) \exp i\{m\Omega(v-u) - n\Omega u + m\Omega u\} dv du = \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} \int_{-u}^{T-u} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta du \approx \\
 &\approx \frac{1}{T^2} \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} \int_{-\infty}^{\infty} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta du = \\
 &= \frac{2\pi}{T^2} G(m\Omega) \int_0^T e^{i\Omega(m-n)u} du, \quad (3.6.21)
 \end{aligned}$$

где $G(m\Omega)$ — спектральная плотность на частоте $m\Omega$:

$$G(m\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\theta) e^{im\Omega\theta} d\theta.$$

В (21) при расширении пределов интегрирования учтено, что корреляционная функция $B(\theta)$ заметно отличается от нуля только на конечном временном интервале порядка $\tau_k \ll T$. Если $m = n$, то, очевидно,

$$\langle \xi_n \xi_n^* \rangle = \frac{2\pi}{T} G(n\Omega) = \Omega G(n\Omega). \quad (3.6.22a)$$

В случае $m \neq n$

$$\langle \xi_m \xi_n^* \rangle = 0, \quad (3.6.22b)$$

т. е. комплексные величины ξ_n не коррелированы между собой.

Запишем ξ_n через вещественные величины:

$$\xi_n = \alpha_n + i\beta_n.$$

Согласно (20)–(22)

$$\langle |\xi_n|^2 \rangle = \overline{\alpha_n^2} + \overline{\beta_n^2}, \quad \langle \xi_n^2 \rangle = \overline{\alpha_n^2} - \overline{\beta_n^2} + i2\overline{\alpha_n\beta_n} = 0.$$

Отсюда следует, что $\overline{\alpha_n\beta_n} = 0$ и

$$\overline{\alpha_n^2} = \overline{\beta_n^2} = \frac{1}{2} \Omega G(n\Omega) = \sigma_n^2.$$

Таким образом, распределение для гауссовских случайных величин α_n, β_n имеет вид

$$w(\alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_n^2 + \beta_n^2}{2\sigma_n^2} \right\}. \quad (3.6.23)$$

Если ξ_n представить в виде

$$\xi_n = |\xi_n| e^{i\varphi_n} = a_n e^{i\varphi_n},$$

то согласно выводам § 4 гл. 2 амплитуда a_n распределена по рэлеевскому закону

$$w(a_n) = \frac{a_n}{\sigma_n^2} \exp \left\{ -\frac{a_n^2}{2\sigma_n^2} \right\}, \quad (3.6.24)$$

а распределение фазы φ_n равномерное:

$$w(\varphi_n) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \varphi_n \leq \pi.$$

Из изложенного, таким образом, следует, что если случайный процесс гауссовский, то его спектральные компоненты некоррелированы и распределены также по гауссовскому закону. Верно и обратное утверждение. Если моды колебания (1) обладают гауссовским распределением, т. е. амплитуды мод отвечают распределению (24), то колебание (1) подчиняется, очевидно, гауссовской статистике независимо от числа N мод. Действительно, усредняя характеристическую функцию (7) процесса (1) по распределению (24), получаем характеристическую функцию гауссовского процесса:

$$\theta(v) = \prod_{n=1}^N \left[\frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^\infty J_0(va_n) a_n e^{-a_n^2/2\sigma_n^2} da_n \right] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} v^2 \sum_{n=1}^N \sigma_n^2 \right\}. \quad (3.6.25)$$

При вычислении (25) мы использовали формулу

$$\int_0^\infty x^{\nu+1} e^{-\alpha x^2} J_\nu(\beta x) dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha)^{\nu+1}} \exp \left(-\frac{\beta^2}{4\alpha} \right).$$

Таким образом, статистика сложного колебания типа (1) является гауссовской при произвольном числе мод, если сами моды подчиняются гауссовской статистике. В случае нефлуктуирующих амплитуд мод гауссовская статистика колебания (1), как показано выше, имеет место только при бесконечном числе мод ($N \rightarrow \infty$).

Для большого, но конечного значения N с гауссовскими значениями моментов совпадают только низшие моменты процесса (4).

Когда многомодовое колебание можно считать гауссовским шумом? Ответ на вопрос, поставленный в заголовке, в значительной мере связан с тем преобразованием, которому подвергается многомодовое колебание (1). Рассмотрение моментов многомодового колебания, на-

пример, показало (см. (18)), что если колебание (1) возводится в n -ю степень, то близость значения средней интенсивности нелинейного процесса к значению n -го момента гауссовского шума зависит как от числа исходных мод N , так и от степени нелинейности процесса.

Чтобы проиллюстрировать еще раз, что замену многомодового колебания гауссовским процессом следует проводить с большой осторожностью, рассмотрим задачу об экспоненциальном преобразовании многомодового колебания

$$y(t) = e^{\beta\xi(t)}, \quad (3.6.26)$$

где $\xi(t)$ — многомодовое колебание. Сравним среднее значение такого процесса со средним значением экспоненциально преобразованного гауссовского шума с непрерывным спектром и найдем условие, когда указанные средние значения можно с хорошей степенью точности считать равными.

Вычислим сначала среднее значение процесса (26) \bar{y} для шума с гауссовским распределением ξ

$$w(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\xi - a_0)^2}{2\sigma^2}\right\};$$

имеем

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta\xi} w(\xi) e\xi = \exp\left\{\beta a_0 + \frac{1}{2}(\beta\sigma)^2\right\}. \quad (3.6.27)$$

Для многомодового колебания вида (1) вычисление среднего значения функции, определяемой формулой (26), представляет значительные трудности. Рассмотрим многомодовое колебание вида $\eta(t) = \xi \cos \omega_0 t$, где

$$\xi(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\Omega t + \varphi_n(t)), \quad (3.6.28)$$

в котором моды попарно связаны. В (28) Ω — частота межмодовых биений, статистика фаз φ_n определяется выражением (2). Число мод процесса (28) равно $N_0 = 2N + 1$. Средняя интенсивность колебания

$$I = \langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{2} a_0^2 + \sigma^2, \quad \text{где } \sigma^2 = 2 \sum_{n=1}^N a_n^2.$$

Подставляя (28) в (26), имеем

$$\begin{aligned} y &= \exp\left\{\beta a_0 + 2\beta \sum_{n=1}^N a_n \cos(n\Omega t + \varphi_n(t))\right\} = \\ &= e^{\beta a_0} \prod_{n=1}^N \left\{ I_0(2\beta a_n) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m(2\beta a_n) \cos m(n\Omega t + \varphi_n) \right\} \end{aligned}$$

($I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя). Отсюда, учитывая (2), получаем

$$\bar{y} = e^{\beta a_0} \prod_{n=1}^N I_0(2\beta a_n), \quad \text{или} \quad \bar{y} = e^{\beta a_0} I_0^N(2\beta a) \quad (3.6.29)$$

для равных амплитуд мод ($a_n = a_0 = a$; $n = 1, 2, \dots, N$). При этом средняя интенсивность $\bar{I} = (1 + 2N)a^2 \approx \sigma^2$.

В случае $2\beta a \ll 1$ или $(\beta\sigma)^2 \ll N$ (усиление для одной моды малое¹⁾), пользуясь разложением функции Бесселя $I_0(x)$, находим

$$\bar{y} \approx e^{\beta a_0} \left[1 + (\beta a)^2 + \frac{(\beta a)^4}{4} \right]^N \approx \exp \left\{ \beta a_0 + \frac{1}{2} (\beta\sigma)^2 - \frac{(\beta\sigma)^4}{16N} \right\}. \quad (3.6.30)$$

При $2\beta a \gg 1$ (большое усиление «на моду»), используя асимптотику функции $I_0(x)$, получим

$$\bar{y} = (4\pi\beta a)^{-N/2} \exp\{(2N + 1)\beta a\}.$$

Из сравнения выражений (27) и (30) следует: многомодовое колебание вида (28) дает тот же результат, что и гауссовский шум, при условии

$$N \gg (\beta\sigma)^4/16. \quad (3.6.31)$$

Таким образом, неравенство (31) является условием эквивалентности многомодового колебания и гауссовского шума при экспоненциальном преобразовании. Этими результатами можно пользоваться при обсуждении процессов усиления в радиофизике и оптике.

Многомодовое лазерное излучение; частичная и полная синхронизация мод. Важный пример многомодового колебания представляет собой излучение лазера. Многомодовый характер излучения лазера связан с многомодовостью спектра собственных колебаний оптического резонатора. Оптический резонатор, например резонатор Фабри — Перо, обладает набором собственных частот

$$\omega_n = 2\pi q(c/2L), \quad q = L/(\lambda/2),$$

где L — длина резонатора, c — скорость света, λ — длина волны, q — целое положительное число. Типичные значения: $L \approx 100$ см и $q \sim 10^6$. Расстояние между соседними модами $\Delta\omega_q = \omega_{q+1} - \omega_q = \pi c/L = \Omega$, т. е. моды рассматриваемого резонатора эквидистантны. Практически эквидистантными являются и частоты, на которых происходит лазерная генерация в многомодовом резонаторе.

¹⁾ Мы говорим здесь об усилении, поскольку преобразование (26) описывает параметрическое усиление при случайной накачке.

Напряженность электрического поля лазера можно записать в виде (1):

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N a_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} + \text{к. с.} \quad (3.6.32)$$

Здесь частоты ω_n удобно представить как

$$\omega_n = \omega_0 + \frac{1}{2}(2n + 1 - N)\Omega.$$

Поскольку средняя частота излучения ω_0 гораздо больше ширины спектра $(N - 1)\Omega$, поле (32) можно представить в виде квазимонохроматической волны:

$$E(t) = \sqrt{2I(t)} e^{t(\omega_0 t + \varphi(t))} + \text{к. с.}, \quad (3.6.33a)$$

где $I(t)$ — мгновенная интенсивность излучения:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_a + I_\Phi(t), \\ I_a &= \frac{1}{2} \sum_{N=1}^N a_n^2, \\ I_\Phi(t) &= \frac{1}{2} \sum_{n, i=1}^N (n \neq i) a_n a_i \cos[(n - 1)\Omega t + \varphi_n(t) - \varphi_i(t)]. \end{aligned} \quad (3.6.33б)$$

Если фазы φ_n мод излучения статистически независимы и распределены равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$, то такие моды принято называть несинхронизованными. Реализации интенсивности $I(t)$ и фазы $\varphi(t)$ излучения для этого случая показаны на рис. 3.24.

Определим моменты интенсивности $I(t)$ для несинхронизованных мод с равными амплитудами ($a_1 = \dots = a_N = a$). Воспользуемся соотношением (3.1.27) для квазигармонических колебаний

$$\langle I^m \rangle = \frac{m!}{(2m - 1)!!} \langle \xi^{2m} \rangle \quad (3.6.34)$$

и полученным выше результатом (17) для моментов $\langle \xi^{2m} \rangle$. Значения моментов $\langle I^m \rangle$ сведены в табл. 3.1.

Если фазы мод излучения связаны, например одинаковы,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = \varphi_0, \quad (3.6.35)$$

то моды называются синхронизованными. Для синхронизованных мод поле излучения (33a) представляет собой регулярную функцию. В самом деле, в этом случае выражение (32) легко преобразовать, полагая $a_1 = a_2 = \dots = a_N = a$:

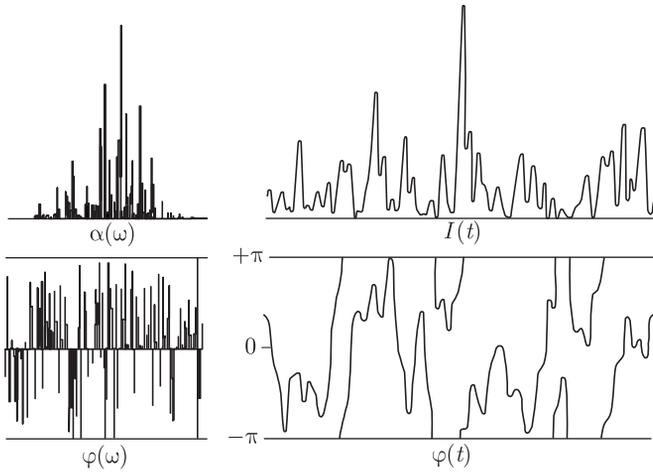


Рис. 3.24. Временная зависимость интенсивности $I(t)$ и фазы $\varphi(t)$ излучения с несинхронизованными модами ($N = 101$) [17]

Амплитуды мод $a(\omega) = a_n$ имеют рэлеевское распределение, фазы $\varphi(\omega) = \varphi_n$ распределены равномерно

Таблица 3.1

Моменты интенсивности $\langle I^m \rangle$ многомодового излучения с несинхронизованными модами [18]

m	$\langle I^m \rangle / \langle I \rangle^m$
2	$2 - 1/N$
3	$6 - 9/N + 4/N^2$
4	$24 - 27/N + 82/N^2 - 33/N^3$
5	$120 - 600N^{-1} + 1250N^{-3} - 1225N^{-3} + 456N^{-4}$
6	$720 - 5400N^{-1} + 17700N^{-2} - 30600N^{-3} + 27031N^{-4} - 9450N^{-5}$

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{1}{2} a e^{i\varphi_0} \exp \left\{ i \left[\omega_0 + \frac{1-N}{2} \Omega \right] t \right\} \sum_{n=1}^N a^{in\Omega t} + \text{к. с.} = \\
 &= a \frac{\sin(N\Omega t/2)}{\sin(\Omega t/2)} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.6.36)
 \end{aligned}$$

Из (36) следует, что интенсивность

$$I(t) = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin^2(N\Omega t/2)}{\sin^2(\Omega t/2)} \quad (3.6.37)$$

представляет собой периодическую функцию, т. е. последовательность импульсов с периодом $T = 2\pi/\Omega$ межмодовых биений (рис. 3.25). Мак-

симальная интенсивность импульсов в N раз больше средней интенсивности, $I_{\max} = NI_a$; длительность импульсов $\tau_{\text{имп}} \approx \pi/N\Omega$.

Если фазовые соотношения отличны от (2) и (35), то говорят о частичной синхронизации мод. Возможна, например, такая модель частичной синхронизации мод: часть мод, занимающая центральную область спектра излучения, полностью синхронизована, а моды в «крыльях» спектра несинхронизованы. Другая возможная модель: случайные фазы φ_n флуктуируют на интервале меньшем, чем 2π :

$$w(\varphi_n) = 1/2\varphi_0, \quad -\varphi_0 \leq \varphi_n \leq \varphi_0, \quad \varphi_0 < \pi. \quad (3.6.38)$$

Для последней модели частичной синхронизации мод реализации интенсивности показаны на рис. 3.26. Пользуясь (33), нетрудно найти, что средняя интенсивность излучения в рассматриваемом случае определяется выражением

$$\langle I(t) \rangle = I_a + \langle I_\Phi(t) \rangle, \quad (3.6.39)$$

где

$$\langle I_\Phi(t) \rangle = 2(a \sin \varphi_0)^2 \sum_{n=1}^{N-1} C_{N-1}^n \cos n\Omega t,$$

т. е. средняя интенсивность является периодической функцией времени. Таким образом, при частичной синхронизации мод (38) многомодовый процесс является периодически нестационарным¹⁾.

Проведенное выше рассмотрение относится к непрерывному излучению лазера. При работе лазера в режиме периодической модуляции доб-

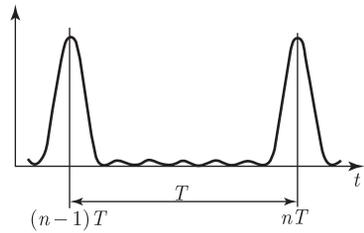


Рис. 3.25. Временная зависимость интенсивности излучения для синхронизованных мод

$T = 2\pi/\Omega$, Ω — частота межмодовых биений

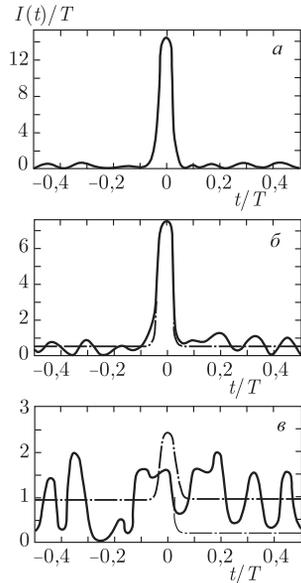


Рис. 3.26. Временная зависимость интенсивности для частично синхронизованных мод [18]

Фазы всех мод равномерно распределены в интервале $[-\varphi_0, \varphi_0]$: а) $\varphi_0 = \pi/4$; б) $\pi/2$; в) $3\pi/4$ ($N = 31$). Штрих-пунктиром изображена средняя интенсивность

¹⁾ Нестационарность появляется в результате отличия $w(\varphi_n)$ от $1/2\pi$ — в соответствии с общими выводами, приведенными в § 1 этой главы.

ротности ¹⁾ процесс является почти периодически нестационарным. Действительно, в этом случае интенсивность лазерного излучения равна

$$I(t) = F(t) \left| \sum_{n=1}^N a_n e^{i(\omega_n t + \varphi_n)} \right|^2, \quad (3.6.40)$$

где $F(t)$ — почти периодическая функция. $F(t)$ мало меняется за время $T = 2\pi/\Omega$, но она изменяется, вообще говоря, от импульса к импульсу лазерного излучения.

§ 7. «Сжатое» классическое поле — обобщенная модель узкополосного случайного процесса

Основные параметры «сжатых» полей. Степень сжатия \varkappa .

Рассмотрим опять узкополосные случайные процессы вида (2.3.2).

$$x(t) = a(t) \cos \Omega t - b(t) \sin \Omega t, \quad (3.7.1)$$

но такие для которых условия стационарности (2.3.5), (2.3.13)

$$\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle, \quad \langle ab \rangle = 0 \quad (3.7.2)$$

нарушаются, т. е.

$$\langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle, \quad \langle ab \rangle \neq 0. \quad (3.7.3)$$

В случае (3) поля (1) называют «сжатыми» в противоположность «несжатым» полям, для которых выполняются условия (2).

Названия полей — «сжатые» или «несжатые» — чисто условны и связаны с тем, что для гауссовских полей (1) область наиболее вероятных значений квадратур a , b в случае (2) имеет вид круга (см. рис. 3.27), а в более общем случае (3) — вид эллипса, т. е. как бы «сжатого» круга ²⁾ [19, 20].

Заметим, что поскольку условия (2) обеспечивали стационарность несжатых полей (1), то все сжатые поля (1), для которых условия (2) нарушены, являются нестационарными.

Возведя (1) в квадрат и статистически усреднив, получим:

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= I + \alpha \cos 2\Omega t - \beta \sin \Omega t = \\ &= I + \gamma \cos 2(\Omega t + \psi) = \\ &= I [1 + \varkappa \cos 2(\Omega t + \psi)], \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

где

¹⁾ Т. е. в режиме повторения импульсов генерации.

²⁾ Это название заимствовано из квантовой оптики.

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle}{2}, & \alpha &= \frac{\langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle}{2}, & \beta &= \langle ab \rangle, \\ \gamma &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, & \varkappa &= \frac{\gamma}{I}, \\ \cos 2\psi &= \frac{\alpha}{\gamma}, & \sin 2\psi &= \frac{\beta}{\gamma} & \operatorname{tg} 2\psi &= \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.5)$$

Из (5) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= I(1 + \varkappa \cos 2\psi), & \alpha &= I\varkappa \cos 2\psi, \\ \langle b^2 \rangle &= I(1 - \varkappa \cos 2\psi), & \beta &= I\varkappa \sin 2\psi, \\ \langle ab \rangle &= I\varkappa \sin 2\psi, & \gamma &= I\varkappa. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.6)$$

Используя (5) и (6), находим выражения, характеризующие связь между квадратурами:

отношение дисперсий:

$$\frac{\langle a^2 \rangle}{\langle b^2 \rangle} = \frac{1 + \varkappa \cos 2\psi}{1 - \varkappa \cos 2\psi};$$

коэффициент взаимной корреляции:

$$R_{ab} = \frac{\langle ab \rangle}{\sqrt{\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle}} = \frac{\varkappa \sin 2\psi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2 2\psi}}; \quad (3.7.7)$$

«соотношение неопределенностей»:

$$\sqrt{\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle} = I\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2 2\psi}.$$

Во многих задачах, связанных со сжатыми полями, эти поля удобнее выражать не через квадратуры a , b , а через комплексную амплитуду A :

$$x = \frac{1}{2}Ae^{i2\psi} + \text{к. с.}, \quad (3.7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{A + A^*}{2}, & b &= \frac{A - A^*}{2i}, & A &= a + ib, \\ \langle AA^* \rangle &= 2I, & \langle A^2 \rangle &= 2(\alpha + i\beta) = 2I\varkappa e^{2i\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (3.7.9)$$

$$\varkappa = \frac{|\langle A^2 \rangle|}{\langle AA^* \rangle}. \quad (3.7.10)$$

Введенные выше параметры удобно использовать для описания сжатых полей и действий над ними. В случае, когда сжатие отсутствует, т. е. поле (1) стационарно, эти параметры или тождественно обращаются в нуль (\varkappa , α , β , γ , R_{ab} , $\langle A^2 \rangle$), или принимают неопределенное значение (ψ), т. е. становятся сингулярными (см. § 7 гл. 9). Заметим,

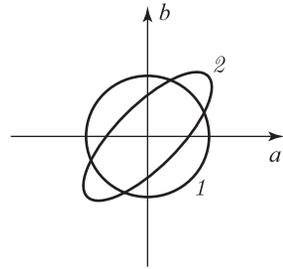


Рис. 3.27. Состояние поля: несжатое (1), сжатое (2)

что все параметры сжатия выражаются через два независимых параметра: \varkappa и ψ . Первый из этих параметров, равный согласно (6) и (9)

$$\varkappa = \frac{\gamma}{I} = \frac{\sqrt{[\langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle]^2 + 4\langle ab \rangle^2}}{\langle a^2 \rangle + \langle b^2 \rangle} = \frac{|\langle A^2 \rangle|}{\langle AA^* \rangle} \quad (0 \leq \varkappa \leq 1), \quad (3.7.11)$$

исчерпывающим образом характеризует эффект сжатия с количественной стороны, мы будем называть \varkappa *степенью сжатия* и использовать этот параметр как количественную меру сжатия, различая, таким образом, поля (1) в несжатом ($\varkappa = 0$), частично сжатом ($0 < \varkappa < 1$) и полностью сжатом ($\varkappa = 1$) состояниях.

Можно показать, что независимые от угла ψ_0 параметры \varkappa и I не меняются при повороте осей координат на фазовой плоскости (a, b) ; угол же ψ_0 в новой системе координат (a', b') принимают значение $\psi'_0 = \psi_0 - \varphi'$, где φ' — угол поворота:

$$(a, b) \rightarrow (a', b'), \quad \varkappa, I = \text{inv}, \quad \psi \rightarrow \psi - \varphi'. \quad (3.7.12)$$

Из (12) следует, что подбором угла φ' можно добиться либо отсутствия взаимной корреляции квадратур,

$$\left. \begin{aligned} \langle a'^2 \rangle &= I(1 + \varkappa), \\ \langle b'^2 \rangle &= I(1 - \varkappa), \\ \langle a'b' \rangle &= 0, \end{aligned} \right\} \text{если } \varphi' = \psi, \quad (3.7.13)$$

либо равенства их дисперсий,

$$\left. \begin{aligned} \langle a'^2 \rangle &= I, \\ \langle b'^2 \rangle &= I, \\ \langle a'b' \rangle &= \pm I\varkappa, \end{aligned} \right\} \text{если } \varphi' = \psi \pm \frac{\pi}{4}. \quad (3.7.14)$$

Иначе говоря, угол φ' всегда можно выбрать так, что условия (3) «наполовину» совпадут с (2):

$$\langle ab \rangle = 0, \quad (\text{но } \langle a^2 \rangle \neq \langle b^2 \rangle),$$

или

$$\langle a^2 \rangle = \langle b^2 \rangle, \quad (\text{но } \langle ab \rangle \neq 0).$$

Случай (13) будем называть переходом к *главным* осям.

Гауссовское сжатое поле. Рассмотрим частный случай, когда в (1) поле x и его квадратуры a, b являются гауссовскими случайными переменными. Согласно (2.2.27) в этом случае совместное распределение вероятностей для квадратур имеет следующий вид:

$$w(a, b) = W_{\max} e^{-F(a, b)}, \quad (3.7.15)$$

где

$$W_{\max} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle} \sqrt{1 - R_{ab}^2}}, \quad R_{ab} = \frac{\langle ab \rangle}{\sqrt{\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle}},$$

$$F(a, b) = \frac{1}{2(1 - R_{ab}^2)} \left[\frac{a^2}{\langle a^2 \rangle} + \frac{b^2}{\langle b^2 \rangle} - \frac{2ab\langle ab \rangle}{\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle} \right]. \quad (3.7.16)$$

Если моменты квадратур записать в виде (6), то выражения (16) примут такой вид:

$$W_{\max} = \frac{1}{2\pi\tau\sqrt{1 - \tau^2}},$$

$$F(a, b) = \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2)\varkappa \cos 2\psi - 2ab\varkappa \sin 2\psi}{2I(1 - \varkappa^2)}. \quad (3.7.17)$$

Введем огибающую ρ и фазу φ сжатого поля (1), полагая, как обычно,

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В этом случае

$$a^2 + b^2 = \rho^2, \quad a^2 - b^2 = \rho^2 \cos 2\varphi,$$

$$2ab = \rho^2 \sin 2\varphi, \quad \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho. \quad (3.7.18)$$

Используя (15), нетрудно найти совместное распределение вероятностей для ρ и φ :

$$w(\rho, \varphi) = w(a, b)|_{a=\rho \cos \varphi, b=\rho \sin \varphi} \left| \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} \right|.$$

или, учитывая (17) и (18),

$$w(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi I(1 - \varkappa^2)} \exp \left[-\frac{\rho^2}{2I} \frac{1 - \varkappa \cos 2(\varphi - \psi)}{1 - \varkappa^2} \right]. \quad (3.7.19)$$

Мы видим, что распределение (19) не распадается на произведение функций, зависящих от ρ и φ . Это, как известно, означает, что у гауссовского сжатого поля даже в один и тот же момент времени ρ и φ статистически зависимы.

Проинтегрировав (19) по φ и ρ , получим распределения отдельно для ρ и φ :

$$w(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} w(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{I\sqrt{1 - \varkappa^2}} I_0 \left[\frac{\varkappa \rho^2}{2I(1 - \varkappa^2)} \right] \exp \left[\frac{-\rho^2}{2I(1 - \varkappa^2)} \right],$$

$$(0 \leq \rho < \infty), \quad (3.7.20)$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя,

$$w(\varphi) = \int_0^{\infty} w(\rho, \varphi) d\rho = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \varkappa^2}}{1 - \varkappa \cos 2(\varphi - \psi)}, \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi). \quad (3.7.21)$$

Распределения (20) и (21) изображены соответственно на рис. 3.28 и рис. 3.29.

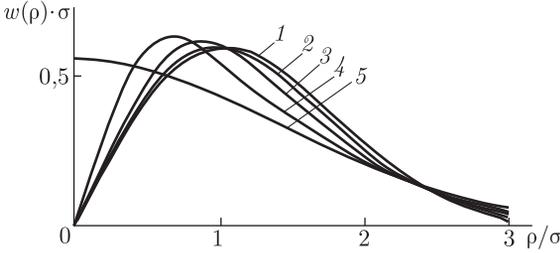


Рис. 3.28. Распределение (20) огибающей периодически нестационарного гауссовского процесса (1) при различных значениях параметра \varkappa (5)

Предельными являются эрлеевское распределение ($\varkappa = 0$) и одностороннее экспоненциальное распределение ($\varkappa = 1$); $0 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < 1$

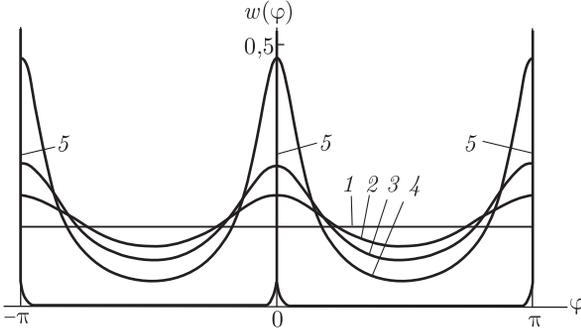


Рис. 3.29. Распределение вероятностей (21) фазы периодически нестационарного гауссовского процесса (1) при различных значениях параметра \varkappa (5)

Предельными являются распределение типа δ -функции ($\varkappa_5 = 1$) и равномерное распределение ($\varkappa_1 = 0$); $0 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < 1$

Используя (20), можно показать, что нечетные моменты $\langle \rho^{2n+1} \rangle$ выражаются через эллиптические функции, а четные — даются формулой

$$\langle \rho^{2n} \rangle = I^n n! \sum_{m=0}^n \frac{2^m \varkappa^{n-m}}{\left(\frac{n-m}{2}\right)! m!},$$

в которой нужно отбросить члены, соответствующие нечетным значениям разности $n - m$. В частности,

$$\langle \rho^2 \rangle = 2I, \quad \langle \rho^4 \rangle = 4I^2(2 + \varkappa^2). \quad (3.7.22)$$

Для среднего значения и дисперсии интенсивности $J = \frac{1}{2} \rho^2$ сжатого поля получим, используя (22),

$$\begin{aligned} \langle J \rangle &= I, \quad \langle J^2 \rangle = I^2(2 + \varkappa^2), \\ \sigma_J^2 &= \langle J^2 \rangle - \langle J \rangle^2 = I^2(1 + \varkappa^2). \end{aligned} \quad (3.7.23)$$

Выражение (23) показывает, что сжатие гауссовского поля ведет к увеличению флуктуаций его интенсивности.

Используя интеграл

$$\int_0^\pi \frac{\cos mx \, dx}{1 - \varkappa \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \varkappa^2}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}}{\varkappa} \right)^m.$$

и распределение (21), можно найти характеристическую функцию

$$\theta(u) = \langle e^{iu\varphi} \rangle$$

фазы сжатого гауссовского поля при целых значениях параметра u :

$$\langle e^{inu\varphi} \rangle = \begin{cases} 0, n = 1, 3, \dots; \\ e^{inu\psi_0} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}}{\varkappa} \right)^n, n = 0, 2, \dots \end{cases} \quad (3.7.24)$$

Эллипс сжатия. Найдем область наиболее вероятных значений квадратур гауссовского сжатого поля. Для этого перейдем в (16) или (17) к главным осям, т. е. к системе координат (a', b') , повернутой на угол ψ . Учитывая (13), получим

$$w(a', b') = \frac{1}{2\pi I \sqrt{1 - \varkappa^2}} \exp \left[-\frac{1}{2I} \left(\frac{a'^2}{1 + \varkappa} + \frac{b'^2}{1 - \varkappa} \right) \right]. \quad (3.7.25)$$

Применение к (25) критерия (11) показывает, что искомая область ограничена эллипсом

$$\frac{a'^2}{1 + \varkappa} + \frac{b'^2}{1 - \varkappa} = r_0^2, \quad r_0 = \sqrt{2I} \quad (3.7.26)$$

с полуосями

$$OK_1 = r_0 \sqrt{1 + \varkappa}, \quad OK_2 = r_0 \sqrt{1 - \varkappa}, \quad (3.7.27)$$

(см. рис. 3.30). Эллипс сжатия (26) при $(\varkappa = 0)$ переходит в круг радиуса r_0 в соответствии с рис. 3.30. Если эллипс сжатия высвечен на экране осциллографа, то по отношению его полуосей можно оценить степень сжатия:

$$\varkappa = \frac{1 - (OK_2/OK_1)^2}{1 + (OK_2/OK_1)^2}.$$

Мы видим, таким образом, что угол ψ_0 , введенный в (5), имеет смысл угла поворота эллипса сжатия на фазовой плоскости (a, b) .

Сжатое ФМ поле. Рассмотрим сжатый шум $x_0(t)$, у которого флуктуирует только фаза $\varphi = \varphi(t)$, а огибающая ρ_0 постоянна:

$$\left. \begin{aligned} x_0(t) &= \rho_0 \cos(\Omega t + \varphi(t)) = \quad (a) \\ &= \frac{1}{2} A_0(t) e^{i\Omega t} + \text{к.с.} = (A_0(t) = \rho_0 e^{i\varphi}) \quad (б) \\ &= a_0(t) \cos \Omega t - b_0(t) \sin \Omega t \quad (a_0(t) = \rho_0 \cos \varphi(t), b_0(t) = \rho_0 \sin \varphi(t)) \quad (в) \end{aligned} \right\} (3.7.28)$$

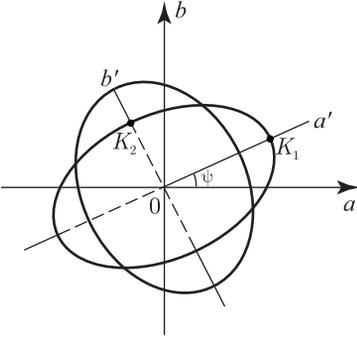


Рис. 3.30. Эллипс сжатия

Предположим, что статистическое распределение фазы φ в (28) имеет вид (21). Поле x_0 с такими свойствами может быть получено, например, путем идеального ограничения сжатого гауссовского шума, имеющего степень сжатия \varkappa и угол поворота эллипса сжатия ψ .

Найдем степень сжатия \varkappa_0 поля (28). Согласно (24) и (28) (в)

$$\begin{aligned} \langle A_0 \rangle &= \langle \rho_0 e^{i\varphi} \rangle = \rho_0 \langle e^{i\varphi} \rangle = 0, \\ \langle A_0^2 \rangle &= \rho_0^2 \langle e^{i2\varphi} \rangle = \rho_0^2 e^{i2\psi} \frac{1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}}{\varkappa}, \\ \langle A_0 A_0^* \rangle &= \rho_0^2. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в общую формулу (11), получим:

$$\varkappa_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - \varkappa^2}}{\varkappa} \leq \varkappa.$$

Статистика квадратур a_0 и b_0 , разумеется, не будет гауссовской. Найдем распределения $w(a_0)$ и $w(b_0)$.

Рассмотрим квадратуру $a_0 = \rho_0 \cos \varphi$. Обратная функция $\varphi = \varphi(a_0)$ неоднозначна и имеет две ветви,

$$\varphi_{1,2}(a_0) = \pm \arccos \frac{a_0}{\rho_0}.$$

Учитывая это, по общим правилам (1.2.12) находим

$$w(a_0) = w(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_1(a_0)} \left| \frac{\partial \varphi_1(a_0)}{\partial a_0} \right| + w(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2(a_0)} \left| \frac{\partial \varphi_2(a_0)}{\partial a_0} \right|, \quad (3.7.29)$$

где $w(\varphi)$ — распределение (21). В рассматриваемом случае это распределение удобно привести к виду

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}} \frac{1}{1 - \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa} \cos^2(\varphi - \psi)}.$$

Тогда, если для простоты считать, что $\psi = 0$, получим:

$$w(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_{1,2}(a_0)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa}} \frac{1}{1 - \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa} \left(\frac{a_0}{\rho_0} \right)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_{1,2}(a_0)}{\partial a_0} = \pm \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^2}}.$$

Подстановка этих выражений в (29) дает:

$$w(a_0) = \frac{1}{\pi \rho_0} \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^2}} \frac{1}{1 - \frac{2\varkappa}{1+\varkappa} \left(\frac{a_0}{\rho_0}\right)^2}. \quad (3.7.30)$$

Представляя (21) в форме

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1+\varkappa}{1-\varkappa}} \frac{1}{1 + \frac{2\varkappa}{1-\varkappa} \sin^2(\varphi - \psi_0)},$$

аналогичным образом получим:

$$w(b_0) = \frac{1}{\pi \rho_0} \sqrt{\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{b_0}{\rho_0}\right)^2}} \frac{1}{1 + \frac{2\varkappa}{1-\varkappa} \left(\frac{b_0}{\rho_0}\right)^2}. \quad (3.7.31)$$

В предельном случае $\varkappa = 0$ распределения (30) и (31) совпадают и переходят в известные U-образные распределения для квадратур стационарного ФМ шума (см. § 4 гл. 1):

$$w(a_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{\rho_0^2 - a_0^2}}, \quad w(b_0) = \frac{1}{\pi \sqrt{\rho_0^2 - b_0^2}}.$$

Аддитивный механизм сжатия. «Формула сжатия». Покажем, что сложив два несжатых квазигармонических поля, x_1 и x_2 можно — при определенном виде статистической связи между ними — получить поле

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.7.32)$$

которое будет сжатым. Пусть

$$x_j = a_j \cos \Omega t - b_j \sin \Omega t = \frac{1}{2} A_j e^{i\Omega t} + \text{к.с.} \quad (j = 1, 2). \quad (3.7.33)$$

При этом

$$2\langle x_1 x_2 \rangle = S_1 + S_2 \cos 2\Omega t - S_3 \sin 2\Omega t, \quad (3.7.34)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \langle a_1 a_2 \rangle + \langle b_1 b_2 \rangle, \\ S_2 &= \langle a_1 a_2 \rangle - \langle b_1 b_2 \rangle, \\ S_3 &= \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.35)$$

Представим поле (32) в виде

$$x = a \cos \Omega t - b \sin \Omega t = \frac{1}{2} A e^{i\Omega t} + \text{к.с.}, \quad (3.7.36)$$

где согласно (33)

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad A = A_1 + A_2, \quad (3.7.37)$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\langle a_1 a_2 \rangle, \\ \langle b^2 \rangle &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\langle b_1 b_2 \rangle, \\ \langle ab \rangle &= S_3 \quad (\sigma_1^2 = \langle x_1^2 \rangle, \sigma_2^2 = \langle x_2^2 \rangle). \end{aligned} \right\} \quad (3.7.38)$$

Подставляя (38) в (6) и учитывая (35), получим

$$\begin{aligned} I &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + S_1, \quad \alpha = S_2, \quad \beta = S_3, \\ \gamma &= \sqrt{S_2^2 + S_3^2}, \quad \varkappa = \frac{\sqrt{S_2^2 + S_3^2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + S_1}. \end{aligned} \quad (3.7.39)$$

Из (39) следует, что поле (32) будет сжатым ($\varkappa \neq 0$) при условии, что

$$S_2^2 + S_3^2 \neq 0. \quad (3.7.40)$$

Но, как нетрудно показать,

$$\langle A_1 A_2 \rangle = S_2 + iS_3, \quad (3.7.41)$$

так что условие сжатия (40) можно переписать в виде

$$\langle A_1 A_2 \rangle = S_2 + iS_3 \neq 0. \quad (3.7.42)$$

Подставив (41) в (39), получим

$$\varkappa = \frac{|\langle A_1 A_2 \rangle|}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + S_1}, \quad S_1 = \operatorname{Re} \langle A_1 A_2^* \rangle. \quad (3.7.43)$$

Поскольку поле A_1 предполагается стационарным, то $\langle A_1^2 \rangle = 0$, $A_1 A_1^* \neq 0$, так что условие (42) будет выполнено, если

$$A_2 = C A_1^*, \quad (3.7.44)$$

где C — произвольная комплексная постоянная. Подставив (44) в (37), получим

$$A = A_1 + C A_1^*. \quad (3.7.45)$$

Пусть S — «сжимающее» устройство, в котором несжатое поле с комплексной амплитудой A_0 преобразуется в сжатое поле с комплексной амплитудой A (см. рис. 3.31). Полагая в (45) $A_1 = k_1 A_0$, получим «формулу сжатия»

$$A = k_1 A_0 + k_2 A_0^*, \quad (3.7.46)$$

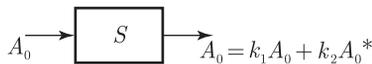


Рис. 3.31. Схема получения сжатого поля

отражающую алгоритм сжатия в линейной системе S ¹⁾: здесь k_1 и k_2 — произвольные комплексные коэффициенты.

Мы видим, что случайные фазы $\varphi_{1,2}(t)$ полей $x_{1,2}$ в (33) для получения эффекта сжатия должны быть в силу (44) связаны соотношением

$$\varphi_2(t) = -\varphi_1(t) + \text{const}, \quad (3.7.47)$$

т. е. поле x_2 по отношению к x_1 должны быть полем с обращенной (по знаку) фазой.

Найдем степени сжатия полей на входе и выходе системы S . Для входного стационарного поля имеем согласно (9):

$$\langle A_0^2 \rangle = 0, \quad \langle A_0 A_0^* \rangle = 2I_0^2, \quad \varkappa_0 = \frac{|\langle A_0^2 \rangle|}{\langle A_0 A_0^* \rangle} = 0.$$

Для поля на выходе S находим:

$$\left. \begin{aligned} \langle A^2 \rangle &= \langle (k_1 A_0 + k_2 A_0^*)^2 \rangle = 4k_1 k_2 I_0 = 4\sigma_0^2 |k_1 k_2| e^{i(\arg k_1 + \arg k_2)}, \\ \langle A A^* \rangle &= \langle |k_1 A_0 + k_2 A_0^*|^2 \rangle = 2I_0(|k_1|^2 + |k_2|^2), \end{aligned} \right\} \quad (3.7.48)$$

так что

$$\varkappa = \frac{\langle A_0^2 \rangle}{\langle A A^* \rangle} = \frac{2(k_1 k_2)}{|k_1|^2 + |k_2|^2}$$

или

$$\varkappa = \frac{2w}{1+w^2}, \quad w = \left| \frac{k_2}{k_1} \right|. \quad (3.7.49)$$

Из (49) следует, что полное сжатие ($\varkappa = 1$) на выходе S достигается при $w = 1$, т. е. при $k_1 = \pm k_2$ (см. рис. 3.32).

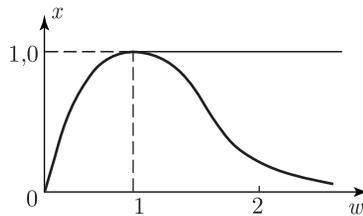


Рис. 3.32. Степень сжатия \varkappa в зависимости от параметра w

¹⁾ Формула (46) является классическим аналогом преобразования Боголюбова операторов рождения и уничтожения числа фотонов при описании сжатия квантовых флуктуаций. Устройством, «сжимающим» флуктуации, является одноконтурный параметрический усилитель в радиодиапазоне [19, 20], а в оптическом — вырожденный оптический параметрический усилитель [19, 21–23].

Используя выражения (46), (48), (49), найдем основные параметры сжатия на выходе S :

$$\left. \begin{aligned} 2\psi_0 = \varphi = \arg k_1 + \arg k_2, \\ I = \frac{1}{2} \langle AA^* \rangle = \sigma_0^2 |k_1|^2 (1 + w^2), \quad w = \left| \frac{k_2}{k_1} \right|, \end{aligned} \right\} \quad (3.7.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= I(1 + \cos \varphi) = \sigma_0^2 |k_1|^2 (1 + w^2 + 2w \cos \varphi), \\ \langle b^2 \rangle &= I(1 - \cos \varphi) = \sigma_0^2 |k_1|^2 (1 + w^2 - 2w \cos \varphi), \\ \langle ab \rangle &= I \varkappa \sin \varphi = \sigma_0^2 |k_1|^2 (1 + w^2) \sin \varphi, \\ R_{ab} &= \frac{\varkappa \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{2w \sin \varphi}{\sqrt{(1 + w^2)^2 - 4w^2 \cos^2 \varphi}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.51)$$

При этом, если поле на входе S системы является гауссовским, то сжатому полю на ее выходе будет соответствовать эллипс сжатия, наклоненный под углом $\psi_0 = \frac{1}{2} \varphi$ и имеющий согласно (27) отношение полуосей

$$\frac{OK_2}{OK_1} = \frac{|1 - w|}{1 + w}. \quad (3.7.52)$$

Фазовая чувствительность систем сжатия. При сложении любых двух колебаний одинаковой частоты $x_i = \rho_i \cos(\Omega t + \varphi_i)$, ($i = 1, 2$) всегда возникает известный интерференционный эффект: огибающая ρ суммарного колебания $x = x_1 + x_2 = \rho \cos(\Omega t + \varphi)$ будет зависеть не только от $\rho_{1,2}$, но и от $\varphi_{1,2}$:

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} [1 + q \cos(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (3.7.53)$$

где

$$q = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} = \frac{2w}{1 + w_0^2}, \quad w_0 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (0 \leq \rho \leq 1). \quad (3.7.54)$$

Сравнение (54) и (49) показывает, что зависимость параметра ρ от w_0 будет такой же, как зависимость \varkappa от w на рис. 3.32.

Такая же интерференционная картина возникнет и в системе сжатия S , если предположить, что на ее вход поступает нестационарное шумовое поле, а монохроматическое колебание с комплексной амплитудой $A_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0} = \text{const}$. Согласно (46) и (47) при этом в S будут складываться и интерферировать два монохроматических колебания x_1 и x_2 с огибающими $\rho_1 = |k_1| \rho_0$, $\rho_2 = |k_2| \rho_0$ и фазами $\varphi_1 = \varphi_0 + \psi_1$; $\varphi_2 = -\varphi_0 + \psi_2$, если $k_i = |k_i| e^{i\varphi_i}$. Используя (53) и (54) получим, что в этом случае колебание на выходе S имеет комплексную амплитуду $A_1 = \rho_1 e^{i\varphi}$, где

$$\rho = \rho_0 [|k_1|^2 + |k_2|^2]^{\frac{1}{2}} [1 + q \cos(2\varphi_0 + \psi_1 - \psi_2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7.55)$$

$$q = \frac{2|k_1 k_2|}{|k_1|^2 + |k_2|^2} = \frac{2w}{1 + w^2}, \quad (0 \leq q \leq 1), \quad (3.7.56)$$

$w = |k_2/k_1|$. Согласно (55) выходная огибающая ρ зависит не только от входной огибающей ρ_0 , но и от входной фазы φ_0 . Об этом говорят как о фазочувствительности S : в количественном отношении фазочувствительность характеризуется параметром q , определенным в (56). Сравнение (56) и (49) показывает, что степень фазочувствительности q и степень сжатия \varkappa совпадают по величине:

$$q = \varkappa, \quad (3.7.57)$$

(при структуре S , соответствующей формуле сжатия (46)).

Литература к главе 3

1. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
2. Blanc-Lapierre A., Savelle M., Fortrat A. — Ann. Telecomm., 1954, v. 9, p. 237.
3. Дьяков Ю.Е. — Вестн. МГУ. Физ. и астрон., 1979, № 5, с. 17.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1963.
5. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. — М.: Наука, 1977.
6. Раутиан С.Г., Собельман И.И. — УФН, 1966, т. 90, с. 209.
7. Ахманов С.А., Коротеев Н.И. — УФН, 1977, т. 123, с. 405.
8. Лоудон Р. Квантовая теория света: Пер. с англ. / Под ред. Г.В. Скродского. — М.: Мир, 1976.
9. Pearl P.R., Troup G.J. — Opto-electron., 1969, v. 1, p. 151.
10. Ареки Ф., Скалли М., Хакен Г. и др. Квантовые флуктуации излучения лазера: Пер. с англ. / Под ред. А.П. Казанцева. — М.: Мир, 1974.
11. Клаудер Дж., Сударшан Э. Основы квантовой оптики: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1970.
12. Перина Я. Когерентность света: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974.
13. Рэлей (Стретт Дж.В.) Теория звука: Пер. с англ. / Под ред. С.М. Рытова. — М.: Гостехиздат, 1955, т. 1.
14. Мандель Л., Вольф Э. — УФН, 1965, т. 87, с. 491, ч. 1; 1966, т. 88, с. 347, ч. 2; с. 619, ч. 3; см. также Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М.: Физматлит, 2000.
15. Демчук М.И., Иванов М.А. Статистический одноквантовый метод в оптико-физическом эксперименте — Минск: Изд-во БГУ, 1981.
16. Сверхкороткие световые импульсы / Под ред. С. Шапиро: Пер. с англ. / Под ред. С.А. Ахманова. — М.: Мир, 1981.
17. Томов И.В., Чиркин А.С. — В сб.: Квантовая электроника / Под ред. Н.Г. Басова. — М.: Сов. радио, 1971, вып. 1, с. 110.
18. Grütter A.A., Weber H.P., Dändliker R. — Phys. Rev., 1969, v. 185, p. 629.
19. Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. Оптика и спектроскопия, 1989, т. 66, с. 738; в кн. «Новые физические принципы оптической обработки информации». — М.: Наука, 1990, с. 89–193.

20. Дьяков Ю. Е. Актуальные проблемы статистической радиофизики (малаховский сборник), 2003, т. 2, с. 63.
21. Мандель А., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика: Пер. с англ. / Под ред. В. В. Самарцева. — М.: Физматлит, 2000.
22. Theory of nonclassical states of light / Eds. V. V. Dodonov, V. I. Man'ko. — N.Y.: Taylor and Francis, 2003.
23. Walls D.F., Milburn G. Y. Quantum Optics. — Springer, 2nd edition, 2008.

МЕТОДЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАДИОФИЗИКЕ И ОПТИКЕ

§ 1. Флуктуационные (стохастические) уравнения

Математический анализ задач статистической радиофизики и оптики обычно сводится к решению линейных или нелинейных дифференциальных уравнений со случайными начальными (или краевыми) условиями, случайными параметрами, коэффициентами, случайными внешними силами, — так называемых (флуктуационных) стохастических дифференциальных уравнений.

Флуктуационные уравнения имеют вид обычных уравнений движения, описывающих динамические процессы в той или иной физической системе. Но параметры этих уравнений заданы как некоторые случайные (флуктуирующие) функции или как постоянные с известными статистическими свойствами. При решении этих уравнений важным является не только определение функции $x(t)$, сколько выяснение различных статистических характеристик процесса: моментов $\langle x^n(t) \rangle$, функций распределения $w(x)$ и т. п.

В этом и последующих параграфах на примере линейных и нелинейных флуктуационных уравнений в обыкновенных производных мы проиллюстрируем основные методы решения флуктуационных дифференциальных уравнений. Мы убедимся, что решение наиболее интересных задач требует применения специфических, так называемых стохастических, методов решения. В известном смысле эти методы оказываются более мощными, нежели методы решения регулярных уравнений; найти средние для величин, описываемых флуктуационными уравнениями, удается и в том случае, когда точные решения неизвестны.

§ 2. Флуктуационные уравнения с известным решением; усреднение решения

Если случайная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению, для которого известно точное решение, то статистические характеристики можно, в принципе, найти путем статистического усреднения точного решения с учетом конкретной статистики начальных условий, внешнего воздействия или изменения параметров системы.

Наиболее прост учет статистики начальных условий. Усреднение по ансамблю реализаций внешней силы также не вызывает прин-

ципальных трудностей, если дифференциальное уравнение линейно, но трудности резко возрастают для нелинейных уравнений. Наряду с нелинейностью, сложным является и учет случайно изменяющихся параметров системы.

Поэтому для наиболее интересных задач теории колебаний и теории волн решающую роль приобретает разработка методов вычисления средних (в ряде случаев — и распределения вероятностей) в условиях, когда точные решения неизвестны.

Ниже дана сводка наиболее употребительных методов; все они иллюстрируются в этой главе на примере решения уравнения первого порядка.

Мы начнем с наиболее простых примеров, в которых вся необходимая статистическая информация может быть получена путем усреднения точного решения.

Переходные процессы со случайными начальными условиями.

Следующий ниже пример иллюстрирует методику вычисления статистических характеристик существенно нестационарного случайного колебания, описываемого уравнением, допускающим точное решение. Речь будет идти об установлении колебаний в генераторе, в котором начальная амплитуда колебаний в контуре определяется собственным шумом. Такая постановка задачи весьма близка к реальной, особенно для генераторов СВЧ и оптического диапазона, в которых регенерация включается импульсно; в этих условиях случайной становится такая важная характеристика, как время установления автоколебаний.

Рассмотрение простейшего варианта указанной задачи в этой главе диктуется, однако, скорее методическими соображениями. Мы сталкиваемся здесь с примером существенно нестационарного радиофизического случайного процесса, для которого статистическая информация может быть получена только из ансамбля реализаций (рис. 4.1), а средние и распределения вероятностей существенно зависят от начала отсчета времени.

Нарастание амплитуды колебаний в нелинейном осцилляторе (томсоновский генератор, одномодовый лазер) описывается уравнением с кубической нелинейностью

$$\dot{A}(t) - \alpha A(t) + \beta A^3(t) = 0. \quad (4.2.1)$$

Его решение имеет вид

$$A(t) = \frac{A_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 + \frac{A_0^2}{A_\infty^2} (e^{2\alpha t} - 1)}}, \quad (4.2.2)$$

где A_0 — начальное значение амплитуды, а A_∞ — установившееся значение, соответствующее $t \rightarrow \infty$. Величину A_∞ можно найти, полагая

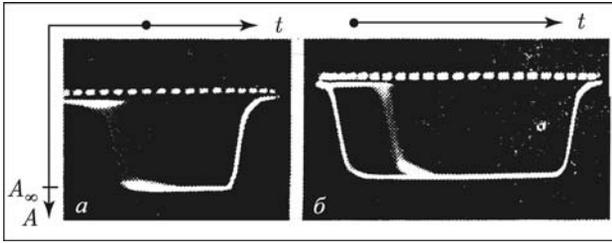


Рис. 4.1. Осциллограммы набора реализаций процесса установления амплитуды автоколебаний в отражательном клистроне [1]. а) Запуск от шумов автономного клистрона (из-за шумов размыт передний фронт импульса генерации). б) Одновременно с реализациями процесса установления в автономном клистроне показаны реализации процесса установления для клистрона, возбуждаемого регулярной внешней силой (флуктуации отсутствуют). Во всех случаях в соответствии с формулой (3) нет заметных флуктуации установившегося значения $|A_\infty|$ и задней части импульса генерации

в (1) $\dot{A}(t) = 0$:

$$I_\infty = A_\infty^2 = \alpha/\beta, \quad A_\infty = \pm\sqrt{\alpha/\beta}. \quad (4.2.3)$$

Переходя к интенсивностям, получим из (2)

$$I(t) = \frac{I_0 e^\tau}{1 + \frac{I_0}{I_\infty} (e^\tau - 1)} \quad (I = A^2, I_0 = A_0^2, \tau = 2\alpha t), \quad (4.2.4)$$

или

$$I(t) = \frac{a I_0}{1 + b I_0}, \quad a = e^\tau, \quad b = \frac{1}{I_\infty} (e^\tau - 1). \quad (4.2.5)$$

Предположим, что начальная интенсивность I_0 — случайная величина, имеющая распределение вероятностей $w_0(I_0)$. Значения интенсивности I при этом также случайны. Используя формулу (1.2.11), можно найти распределение вероятностей для интенсивности в произвольный момент времени:

$$w(I, \tau) = w_0 \left(\frac{I}{a - bI} \right) \frac{a}{(a - bI)^2}, \quad 0 \leq I \leq I_{\max} = \frac{a}{b} = \frac{I_\infty}{1 - e^{-\tau}}. \quad (4.2.6)$$

На рис. 4.2 приведены графики нестационарных одномерных распределений (6) интенсивности автоколебаний; они построены для $w_0(I_0) = \exp[-I_0/I_0]/I_0^1$.

Пользуясь полученным распределением $w(I, \tau)$ (6), можно рассчитать поведение нестационарной дисперсии $\sigma(\tau)$, а также распределение времени достижения определенного уровня интенсивности $w_I(\tau)$.

¹⁾ Именно таков закон распределения интенсивности для гауссовского шума; см. (2.4.8).

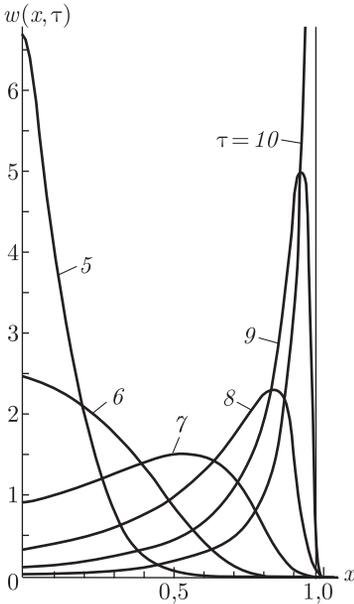


Рис. 4.2. Изменение со временем функции распределения (6) нормированной интенсивности $x = I/I_\infty$

Параметром кривых является безразмерное время τ (4), отсчитываемое от момента запуска автогенератора; $I_0/I_\infty = 10^{-3}$

Если начальные условия отличны от нуля, т.е. в момент начала действия силы f на систему эта система не находилась в состоянии покоя, то к выражению (9) следует добавить соответствующее решение y однородного уравнения

$$\widehat{L}(t)y = 0. \tag{4.2.10}$$

Это решение всегда можно представить как линейную комбинацию линейно независимых функций $y_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$), описывающих свободные колебания рассматриваемой системы:

$$y(t) = \sum_n c_n y_n(t), \quad c_n = \text{const}, \quad \widehat{L}(t)y_n(t) = 0. \tag{4.2.11}$$

Физический смысл функции $H(t, t')$ состоит в том, что она описывает отклик системы в момент t на δ -импульс обобщенной силы φ ,

Линейная система под воздействием случайных сил. Функция Грина; интеграл Дюамеля. Процессы в линейной системе, находящейся под действием силы f , описываются уравнениями вида ¹⁾

$$\widehat{L}(t)x = \widehat{M}(t)f, \tag{4.2.7}$$

где $\widehat{L}(t)$ и $\widehat{M}(t)$ — некоторые линейные операторы (дифференциальные, интегральные, разностные или смешанного типа). Введем обозначение

$$\varphi(t) = \widehat{M}(t)f. \tag{4.2.8}$$

Решение уравнения (7), соответствующее нулевым начальным условиям, может быть записано в виде так называемого интеграла Дюамеля:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \theta)\varphi(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t - \theta)\varphi(t - \theta) d\theta, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

где функция $H(t, \theta)$, называемая функцией Грина, зависит от вида оператора \widehat{L} и не зависит от φ .

¹⁾ Более подробно действие шума на линейные системы изучается в гл. 5.

который действовал на систему в момент t' . Действительно, подставив в (9)

$$\varphi(t) = \delta(t - t'), \quad (4.2.12)$$

получим

$$x(t) = H(t, t'). \quad (4.2.13)$$

Если φ в (9) является случайной функцией, то, используя представление решения в виде интеграла Дюамеля, нетрудно получить связь между средними, характеризующими процесс x , и аналогичными средними, характеризующими силу φ :

$$\langle x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, \theta) \langle \varphi(\theta) \rangle d\theta, \quad (4.2.14)$$

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 H(t_1, \theta_1) H(t_2, \theta_2) \langle \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2) \rangle, \quad (4.2.15)$$

$$\langle x(t_1)x(t_2)x(t_3) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \times \\ \times H(t_1, \theta_1) H(t_2, \theta_2) H(t_3, \theta_3) \langle \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)\varphi(\theta_3) \rangle$$

и т. д.

В случае гауссовости процесса φ процесс x также будет гауссовским, так как связь между x и φ , определяемая интегралом Дюамеля, линейна. При этом любое многомерное распределение вероятностей для x может быть выражено через среднее значение x и корреляционную функцию $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle$ (см. (1.2.45)), т. е. выражениями (14) и (15) определяется, в принципе, самое полное статистическое описание процесса $x(t)$.

Линейная система первого порядка со случайными гауссовскими параметрами. Чтобы познакомиться с трудностями, которые могут возникнуть даже при известном точном решении флуктуационного уравнения, рассмотрим простейший случай линейной системы первого порядка с одним случайным параметром $a(t)$. Флуктуационное уравнение имеет при этом вид

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t), \quad (4.2.16)$$

где $a(t)$ и $f(t)$ — заданные случайные функции.

Известно точное решение этого уравнения

$$x(t) = x_0 e^{-y(t,0)} + \int_0^t e^{-y(t,\theta)} f(\theta) d\theta, \quad (4.2.17)$$

$$y(t, \theta) = \int_{\theta}^t a(\theta') d\theta'. \quad (4.2.18)$$

Вид решения (17) показывает, что если случайными являются начальное значение x_0 или внешняя сила $f(t)$, то усреднение не вызывает особых трудностей. При этом

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle e^{-y(t,0)} + \int_0^t e^{-y(t,\theta)} \langle f(\theta) \rangle d\theta,$$

т. е. для определения $\langle x(t) \rangle$ достаточно знать $\langle x_0 \rangle$ и $\langle f(t) \rangle$.

Однако такой статистической информации будет заведомо недостаточно, если случайным является параметр $a(t)$ в (16). В этом более общем случае, усреднив (16), получим

$$\langle x(t) \rangle = \langle x_0 \rangle \langle e^{-y(t,0)} \rangle + \int_0^t \langle e^{-y(t,\theta)} \rangle \langle f(\theta) \rangle d\theta. \quad (4.2.19)$$

Для простоты x_0 , $a(t)$ и $f(t)$ считаем статистически независимыми. Как видно из (19), теперь для вычисления $\langle x(t) \rangle$ нужно уметь вычислять также средние вида $\langle e^{-y} \rangle$. Это нетрудно сделать лишь при условии, что $a(t)$ можно рассматривать как гауссовскую случайную функцию. При этом функция $y(t, \theta)$, линейно связанная с $a(t)$ (см. (18)), также будет гауссовской, что дает возможность для вычисления средних $\langle e^{-y} \rangle$ использовать соотношение (2.2.3)

$$\langle e^{-y} \rangle = e^{-\bar{y} + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle}. \quad (4.2.20)$$

Будем считать случайный процесс $a(t)$ не только гауссовским, но и стационарным. Тогда имеем

$$\begin{aligned} a(t) &= \bar{a} + \xi(t), & y(t) &= \bar{y} + \tilde{y}(t), \\ \bar{y} &= \int_{\theta}^t \bar{a} d\theta' = \bar{a} \cdot (t - \theta), & \tilde{y} &= \int_{\theta}^t \xi(\theta') d\theta', \\ \langle \tilde{y}^2 \rangle &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \int_{\theta}^t \int_{\theta}^t \langle \xi(\theta') \xi(\theta'') \rangle d\theta' d\theta''. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (20), получим

$$\langle e^{-y(t,\theta)} \rangle = \exp \left[-\bar{a} \cdot (t - \theta) + \frac{1}{2} \int_{\theta}^t \int_{\theta}^t \langle \xi(\theta') \xi(\theta'') \rangle d\theta' d\theta'' \right]. \quad (4.2.21)$$

Как следует из (19) и (21), если

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \langle f \rangle = \text{const},$$

то

$$\bar{x}(t) = \langle f \rangle \int_0^t \exp \left[-\bar{a} \cdot (t - \theta) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t \langle \xi(\theta') \xi(\theta'') \rangle d\theta' d\theta'' \right]. \quad (4.2.22)$$

Доведем вычисления в (22) до конца, предполагая, что флуктуации $\xi(t)$ δ -коррелированы:

$$\langle \xi(\theta') \xi(\theta'') \rangle = 2D\delta(\theta' - \theta''). \quad (4.2.23)$$

В этом случае

$$\int_0^t \int_0^t \langle \xi(\theta') \xi(\theta'') \rangle d\theta' d\theta'' = 2D(t - \theta),$$

и выражение (24) принимает вид

$$\bar{x}(t) = \frac{\langle f \rangle}{\bar{a} - D} [1 - e^{-(\bar{a} - D)t}]. \quad (4.2.24)$$

Из (24) следует, что для устойчивых ($\bar{x} < \infty$, $\bar{a} > D$) и стационарных колебаний $x(t)$ в (16) имеет место выражение

$$\bar{x} = \langle f \rangle / (\bar{a} - D). \quad (4.2.25)$$

Решение в аналитической форме может быть записано и для некоторых нелинейных флуктуационных уравнений. Так, если $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) = f(t)x^n(t), \quad (4.2.26)$$

то подстановкой $x = z^{1/(1-n)}$ его можно привести к уравнению для z типа (16):

$$\frac{1}{1-n} \dot{z}(t) + a(t)z(t) = f(t).$$

Очевидно, что вычисление среднего $x(t) = \langle z^{\frac{1}{1-n}} \rangle$ здесь еще более затруднительно, чем в случае (16).

§ 3. Флуктуационные уравнения с δ -коррелированными коэффициентами и неизвестным аналитическим решением. Стохастические методы усреднения уравнений

Во многих задачах, особенно нелинейных или связанных с системами с переменными параметрами, вид точного решения для дифференциального уравнения, определяющего случайный процесс, бывает неизвестен.

В теории случайных процессов разработан ряд специальных методов, которые позволяют отыскивать статистические характеристики, в принципе, и в этом случае. Эти методы называют иногда стохастическими, чтобы подчеркнуть, что в них с самого начала используется случайность (стохастичность) исследуемого процесса.

Используя стохастические методы, можно, исходя из дифференциального уравнения для x и минуя его аналитическое решение, получать уравнения (тоже дифференциальные) непосредственно для статистических характеристик — моментов \bar{x}^n , распределения вероятностей $w(x, t)$ и т. п.

Линейное уравнение первого порядка с δ -коррелированным коэффициентом. Понятие о коррелирующей компоненте. Чтобы пояснить сущность стохастического метода и перехода от флуктуационного уравнения для мгновенных значений $x(t)$ к уравнению для средних \bar{x} , рассмотрим частный случай, который был проанализирован в § 2 другим методом. Обратимся к уравнению вида (4.2.16)

$$\dot{x}(t) + [\bar{a} + \xi(t)]x(t) = f(t), \quad (4.3.1)$$

причем

$$\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0. \quad (4.3.2)$$

Будем теперь искать среднее \bar{x} , не обращаясь к точному аналитическому решению (4.2.17),

$$\dot{\bar{x}} + \bar{a}\bar{x} + \langle \xi(t)x(t) \rangle = \langle f(t) \rangle. \quad (4.3.3)$$

Уравнение (3) является незамкнутым, поскольку в него входят две неизвестные величины: \bar{x} и $\langle \xi(t)x(t) \rangle$. Если удастся выразить $\langle \xi x \rangle$ через \bar{x} , то уравнение (3) станет замкнутым, и из него можно найти среднее \bar{x} . Покажем, что в случае δ -коррелированной флуктуации $\xi(t)$ (2) такое выражение можно получить.

Прежде всего заметим, что в общем случае $x(t)$ можно представить в виде суммы двух компонент [21] ¹⁾

$$x(t) = x^{(к)}(t) + x^{(нк)}(t), \quad (4.3.4)$$

где $x^{(к)}(t)$ — коррелирующая с $\xi(t)$ компонента $x(t)$, а $x^{(нк)}(t)$ — некоррелирующая компонента. Очевидно, что

$$\langle \xi(t)x^{(к)}(t) \rangle \neq 0, \quad \langle \xi(t)x^{(нк)} \rangle = 0$$

и

$$\langle \xi(t)x(t) \rangle = \langle \xi(t)x^{(к)}(t) \rangle. \quad (4.3.5)$$

Как следует из (1),

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \dot{x}(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^t [f(\theta) - \bar{a}x(\theta) - \xi(\theta)x(\theta)] d\theta. \quad (4.3.6)$$

Однако в силу принципа причинности и известной особенности белого шума (его время корреляции можно считать сколь угодно малым: $\tau_{\text{кор}} \sim \Delta t \rightarrow 0$) с $\xi(t)$ может коррелировать лишь приращение $\delta x(t)$ функции $x(t)$, полученное в моменты времени, непосредственно предшествующие t :

$$\delta x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t [f(\theta) - \bar{a}x(\theta) - \xi(\theta)x(\theta)] d\theta. \quad (4.3.7)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)x(t) \rangle &= \langle \xi(t) \delta x(t) \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \xi(t) \int_{t-\Delta t}^t [f(\theta) - \bar{a}x(\theta) - \xi(\theta)x(\theta)] d\theta \right\rangle = \\ &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t [\bar{a} \langle \xi(t)x(\theta) \rangle + \langle \xi(t)\xi(\theta)x(\theta) \rangle] d\theta. \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

Уравнение (1) описывает некоторую инерционную физическую систему. Это означает, что случайное колебание $x(t)$ является относительно медленным (по сравнению с быстро меняющимся белым шумом $\xi(t)$). Следовательно, случайный процесс $x(t)$ нельзя считать δ -коррелированным. По этой же причине невозможна и δ -корреляция между $x(t)$ и $\xi(t)$:

$$\langle \xi(t)x(\theta) \rangle \neq \delta(t - \theta). \quad (4.3.9)$$

¹⁾ Излагаемый ниже подход, основанный на выделении коррелированной и некоррелированной компонент, можно использовать для решения некоторых квантовых задач, связанных с учетом диссипативных потерь и неизбежных при этом тепловых флуктуаций, которые традиционно считаются δ -коррелированными [22, 23].

Вследствие этого вкладом коррелятора $\langle \xi(t)x(t) \rangle$ в (8) можно вообще пренебречь, и мы получим

$$\langle \xi(t)x(t) \rangle = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \langle \xi(t)\xi(\theta)x(t) \rangle d\theta. \quad (4.3.10)$$

Учитывая (9), получить δ -корреляцию в подынтегральном выражении в (10) можно лишь одним способом: «расцепить» стоящий там коррелятор, положив

$$\langle \xi(t)\xi(\theta)x(\theta) \rangle = \langle \xi(t)\xi(\theta) \rangle \bar{x}(\theta) + \dots = 2D\delta(t-\theta)\bar{x}(t). \quad (4.3.11)$$

Определенным обоснованием равенства (11) можно считать существенное различие времен корреляции случайных процессов $\xi(t)$ и $x(t)$ при наличии свойства эргодичности. Сравнивая (5), (10) и (11), находим

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)x(t) \rangle &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \langle \xi(t)\xi(\theta)x(\theta) \rangle d\theta = \\ &= - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \langle \xi(t)\xi(\theta) \rangle \bar{x}(\theta) d\theta = \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$$= -D\bar{x}(t). \quad (4.3.13)$$

При этом из (5) и (12) следует, что

$$x^{(k)}(t) = \bar{x}\hat{\xi}(t), \quad \hat{\xi}(t) = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \xi(\theta) d\theta. \quad (4.3.14)$$

Подстановка (13) в (6) приводит к искомому замкнутому уравнению для $\bar{x}(t)$:

$$\dot{\bar{x}}(t) + \bar{a}\bar{x}(t) - D\bar{x}(t) = \langle f(t) \rangle \quad (4.3.15a)$$

со стационарным решением

$$\bar{x} = \frac{\langle f \rangle}{\bar{a} - D} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.3.15б)$$

совпадающим с полученным выше другим методом формулой (4.2.25).

Уравнение для $\langle x^2 \rangle$. Стохастические методы дают возможность найти не только \bar{x} , но и $\langle x^2 \rangle$ и вообще любые моменты $\langle x^n \rangle$. Пусть $y \equiv x^2$. Умножив (1) на $x(t)$, получим для $y(t)$ уравнение

$$\dot{y}(t) + 2(\bar{a} + \xi(t))y(t) = 2fx(t), \quad (4.3.16)$$

откуда

$$\dot{\bar{y}} + 2\bar{a}\bar{y} + 2\langle \xi y \rangle = 2\langle f \rangle \bar{x}. \quad (4.3.17)$$

Уравнение (17) совпадает с (3), если в (3) заменить

$$x \rightarrow y, \quad \bar{a} \rightarrow 2\bar{a}, \quad \langle f \rangle \rightarrow 2\langle f \rangle \bar{x}, \quad \xi \rightarrow 2\xi. \quad (4.3.18)$$

Соответственно, подставив (18) в (15), сразу получим искомый результат:

$$\bar{y} = \overline{x^2} = \frac{2\langle f \rangle \bar{x}}{2\bar{a} - 4D} = \frac{2\langle f \rangle}{2(\bar{a} - 2D)} \cdot \frac{\langle f \rangle}{\bar{a} - D} = \frac{\langle f \rangle^2}{(\bar{a} - D)(\bar{a} - 2D)}. \quad (4.3.19)$$

Усреднение системы нескольких линейных флуктуационных уравнений первого порядка. Результаты, полученные выше для одного уравнения (1), могут быть обобщены на произвольную систему связанных между собой N уравнений:

$$\dot{x}_m(t) + \sum_{n=1}^N [a_{mn} + \xi_{mn}(t)]x_n(t) = a_{m0} + \xi_{m0}(t), \quad (4.3.20)$$

$$\langle \xi_{mn}(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_{mn}(t)\xi_{pq}(t') \rangle = 2D_{mnpq}\delta(t - t'), \quad (4.3.20a)$$

$$m, n, p, q = 1, 2, \dots, N.$$

Уравнения (20) описывают вынужденные случайные колебания произвольной системы N -го порядка с регулярными параметрами a_{mn} , случайными параметрами $\xi_{mn}(t)$ под действием внешних сил, фигурирующих в правых частях уравнений $a_{m0} + \xi_{m0}(t)$. Усреднив (20), будем иметь

$$\dot{\bar{x}}_m(t) + \sum_{n=1}^N a_{mn}\bar{x}_n + \sum_{n=1}^N \langle \xi_{mn}(t)x_n(t) \rangle = a_{m0}, \quad (4.3.21)$$

где

$$\langle \xi_{mn}(t)x_n(t) \rangle = \langle \xi_{mn}(t)x_n^{(k)}(t) \rangle, \quad (4.3.22)$$

$x_n^{(k)}$ — коррелирующая (со всеми шумами $\xi_{mn}(t)$) компонента случайного процесса $x_n(t)$. Перепишем (20), изменив индексы суммирования

$$\dot{x}_n(t) + \sum_{p=1}^N [a_{np} + \xi_{np}(t)]x_p(t) = a_{n0} + \xi_{n0}(t) \quad (4.3.23)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N).$$

Как следует из (23), в (22)

$$x_n^{(k)} = - \sum_{p=1}^N \bar{x}_p \widehat{\xi}_{np} + \widehat{\xi}_{n0}, \quad (4.3.24)$$

где

$$\widehat{\xi}_{np}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \xi_{np}(t) d\theta, \quad \widehat{\xi}_{n0}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \xi_{n0}(\theta) d\theta. \quad (4.3.25)$$

Согласно (20а) и (26)

$$\begin{aligned} \langle \xi_{mn}(t) \widehat{\xi}_{np}(t) \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \langle \xi_{mn}(t) \xi_{np}(\theta) \rangle d\theta - \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t 2D_{mnpq} \delta(t-\theta) d\theta = D_{mnpq}, \\ \langle \xi_{mn}(t) \widehat{\xi}_{n0}(t) \rangle &= D_{mnn0}. \end{aligned}$$

Следовательно, в (22)

$$\begin{aligned} \langle \xi_{mn}(t) x_n(t) \rangle &= \langle \xi_{mn}(t) x_n^{(k)}(t) \rangle = \\ &= \left\langle \xi_{mn}(t) \left[-\sum_{p=1}^N \bar{x}_p \widehat{\xi}_{np}(t) + \widehat{\xi}_n(t) \right] \right\rangle = \\ &= -\sum_{p=1}^N \bar{x}_p D_{mnpn} + D_{mnn0}. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Подставив (26) в (21), приходим к следующей замкнутой системе уравнений, определяющей все средние \bar{x}_m :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_m + \sum_{n=1}^N a_{mn} \bar{x}_n - \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^N \bar{x}_p D_{mnpn} + \sum_{n=1}^N D_{mnn0} &= a_{m0} \\ (m = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Пример: усреднение системы двух связанных уравнений. Рассмотрим подробно систему двух уравнений вида (20):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) + [a_{11} + \xi_{11}(t)]x_1 + [a_{12} + \xi_{12}(t)]x_2(t) &= a_{10} + \xi_{10}(t), \\ \dot{x}_2(t) + [a_{21} + \xi_{21}(t)]x_1(t) + [a_{22} + \xi_{22}(t)]x_2(t) &= a_{20} + \xi_{20}(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.3.28)$$

Согласно (24) в этом случае

$$\begin{aligned} x_1^{(k)}(t) &= -\bar{x}_1 \widehat{\xi}_{11}(t) - \bar{x}_2 \widehat{\xi}_{12}(t) + \widehat{\xi}_{10}(t), \\ x_2^{(k)}(t) &= -\bar{x}_1 \widehat{\xi}_{21}(t) - \bar{x}_2 \widehat{\xi}_{22}(t) + \widehat{\xi}_{20}(t), \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \langle \xi_{11} x_1 \rangle &= -\bar{x}_1 D_{1111} - \bar{x}_2 D_{1112} + D_{1110}, \\ \langle \xi_{12} x_2 \rangle &= -\bar{x}_1 D_{1221} - \bar{x}_2 D_{1222} + D_{1220}, \\ \langle \xi_{21} x_1 \rangle &= -\bar{x}_1 D_{2111} - \bar{x}_2 D_{2112} + D_{2120}, \\ \langle \xi_{22} x_2 \rangle &= -\bar{x}_1 D_{2221} - \bar{x}_2 D_{2222} + D_{2220}. \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

После усреднения уравнений (28) мы получили бы незамкнутую систему двух уравнений с шестью неизвестными \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , $\langle \xi_{11}x_1 \rangle$, $\langle \xi_{12}x_2 \rangle$, $\langle \xi_{21}x_1 \rangle$ и $\langle \xi_{22}x_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) + a_{11}\bar{x}_1 + \langle \xi_{11}(t)x_1(t) \rangle + a_{12}\bar{x}_2 + \langle \xi_{12}(t)x_2(t) \rangle &= a_{10}, \\ \dot{\bar{x}}_2(t) + a_{21}\bar{x}_1 + \langle \xi_{21}(t)x_1(t) \rangle + a_{22}\bar{x}_2 + \langle \xi_{22}(t)x_2(t) \rangle &= a_{20}, \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

но, подставив в (30) соотношения (29), придем к замкнутой системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= b_{11}\bar{x}_1 + b_{12}\bar{x}_2 + b_{10}, \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= b_{21}\bar{x}_1 + b_{22}\bar{x}_2 + b_{20}, \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11} + D_{1111} + D_{1221}, & b_{21} &= a_{21} + D_{2111} + D_{2201}, \\ b_{12} &= a_{12} + D_{1112} + D_{1222}, & b_{22} &= a_{22} + D_{2112} + D_{2222}, \\ b_{10} &= a_{10} + D_{1110} + D_{1220}, & b_{20} &= a_{20} + D_{2110} + D_{2220}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что выражения (30) остаются правильными также в случае, когда параметры a_{mn} в (20) и D_{mnpq} в (20а) не постоянны, но являются некоторыми регулярными функциями времени

$$a_{mn} = a_{mn}(t), \quad D_{mnpq} = D_{mnpq}(t).$$

Шумы ξ_{mn} в этом случае являются нестационарными белыми шумами.

Из полученных результатов следует, что если имеется две связанные физические системы, то выбирая определенным образом случайную модуляцию $\xi_{mn}(t)$ параметров этих систем, можно существенно изменять (ослаблять, усиливать, видоизменять, подавлять) связь между системами. Например, согласно (30) и (31) если выбрать $b_{12} = 0$, то \bar{x}_2 не будет влиять на \bar{x}_1 , но сохранится влияние \bar{x}_1 на \bar{x}_2 .

Линейные системы с постоянными параметрами под действием белого шума. В случае

$$\xi_{mn}(t) = 0, \quad \xi_{m0}(t) \neq 0, \quad a_{m0} = 0, \quad a_{mn} = \text{const} \quad (4.3.32)$$

система уравнений (20) принимает вид

$$\dot{x}_m(t) + \sum_{n=1}^N a_{mn}x_n(t) = \xi_{m0}(t) \quad (m = 1, 2, \dots, N) \quad (4.3.33)$$

и описывает действие белого шума $\xi_{m0}(t)$ на произвольную линейную систему N -го порядка с постоянными параметрами a_{mn} .

Усреднив (32), получим

$$\dot{\bar{x}}_m + \sum_{n=1}^N a_{mn}\bar{x}_n = \langle \xi_{m0}(t) \rangle = 0,$$

т. е.

$$\bar{x}_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, N).$$

Мы видим, что первые моменты в рассматриваемом случае равны нулю, т. е. не информативны для описания вынужденных шумовых колебаний. Придется искать вторые моменты; число уравнений для средних при этом будет превышать N , т. е. решение задачи становится несколько более громоздким.

Как пример рассмотрим действие белого шума на колебательный контур. Эта часто встречающаяся стохастическая задача описывается линейным уравнением второго порядка (см. также § 4 гл. 5)

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \xi(t), \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau) \quad (4.3.34)$$

которое эквивалентно системе двух линейных уравнений первого порядка вида (33)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y & (a) \\ \dot{y} + 2\alpha y + \omega_0^2 x &= \omega_0^2 \xi(t) & (б) \end{aligned} \right\} \quad (4.3.35)$$

Эта задача обычно решается методом усреднения известного аналитического решения, что дает

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_\xi(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad (4.3.36)$$

где

$$K(\omega) = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} \quad (4.3.37)$$

— частотный коэффициент передачи $\xi \rightarrow x$, соответствующий уравнению (34) (см. §§ 1, 2 гл. 5). Для белого шума согласно (1.3.43)

$$G_\xi(\omega) = \frac{D}{\pi} = \text{const}. \quad (4.3.38)$$

Подставив (37) и (38) в (36), в результате находим

$$\langle x^2 \rangle = \frac{D}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{D}{\pi} \frac{\pi\omega_0^4}{2\alpha\omega_0^2} = \frac{D\omega_0^2}{2\alpha}. \quad (4.3.39)$$

Теперь выведем формулу (39), используя развитый выше стохастический метод усреднения флуктуационных уравнений. Согласно (35б) (ср. с (14))

$$y^{(к)} = \omega_0^2 \widehat{\xi}(t), \quad \langle y\xi \rangle = \langle y^{(к)}\xi \rangle = \omega_0^2 D. \quad (4.3.40)$$

Умножив (35б) на y и усреднив и учтя (40), получим

$$\frac{1}{2} \langle y^2 \rangle + 2\alpha \langle y^2 \rangle + \omega_0^2 \langle xy \rangle = \omega_0^2 \langle y\xi \rangle = \omega_0^4 D. \quad (4.3.41)$$

Ограничимся рассмотрением стационарного режима, когда, очевидно,

$$\langle y^2 \rangle \cdot = 0, \quad \langle xy \rangle = \langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle \cdot = 0 \quad (4.3.42)$$

и согласно (41)

$$2\alpha \langle y^2 \rangle = \omega_0^4 D, \quad \langle y^2 \rangle = \langle \dot{x}^2 \rangle = \frac{\omega_0^4 D}{2\alpha}. \quad (4.3.43)$$

Далее, в (35а) случайная сила $\xi(t)$ явно не входит; это означает, что

$$x^{(k)} = 0, \quad \langle x\xi \rangle = 0. \quad (4.3.44)$$

Умножим теперь (35а) на y , (35б) на x , усредним и сложим результаты. Мы придем к соотношению

$$\langle xy \rangle \cdot + 2\alpha \langle xy \rangle + \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \omega_0^2 \langle x\xi \rangle + \langle y^2 \rangle. \quad (4.3.45)$$

Подстановка (42) и (43) в (45) дает стационарное значение

$$\omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \frac{\omega_0^4 D}{2\alpha},$$

откуда получаем $\langle x^2 \rangle$, совпадающее с (39).

§ 4. Нелинейные флуктуационные уравнения с δ -коррелированными коэффициентами

Уравнение первого порядка. Обобщенное уравнение для средних. Методы решения нелинейных флуктуационных уравнений наиболее полно развиты для уравнений первого порядка вида

$$\dot{x} + a(x) = b(x)\xi(t), \quad (4.4.1)$$

где $\xi(t)$ — δ -коррелированная случайная функция,

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi\xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (4.4.2)$$

$a(x)$, $b(x)$ — произвольные функции x .

Пусть $F(x)$ — какая-то функция x . Поскольку

$$\dot{F}(x) = F'(x)\dot{x}, \quad (4.4.3)$$

(штрих означает дифференцирование по x), а \dot{x} — определяется уравнением (1), то флуктуационное уравнение для F будет следующим:

$$\dot{F} = F'[b\xi(t) - a]. \quad (4.4.4)$$

Преобразованная к виду (4) флуктуационное уравнение иногда называют уравнением Лиувилля.

Поскольку $\langle \dot{F} \rangle = \langle F \rangle \cdot$, то усреднив (4), получим:

$$\langle F \rangle \cdot = \langle F'b\xi(t) \rangle - \langle F'a \rangle. \quad (4.4.5)$$

Аналогично (4) и (5) можно написать

$$(F'b) \cdot = (F'b)' \dot{x} = (F'b)'(b\xi - a), \quad (4.4.6)$$

$$\langle (F'b) \cdot \rangle = \langle (F'b)'(b\xi - a) \rangle. \quad (4.4.7)$$

На основании результатов предыдущего параграфа (см. формулу (4.3.14)) из (6) следует, что

$$(F'b)^{(k)} = \langle (F'b)'b \rangle \widehat{\xi}, \quad (4.4.8)$$

где, как и выше,

$$\widehat{\xi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t \xi(\theta) d\theta.$$

Согласно (8) в (5)

$$\langle F'b\xi(t) \rangle = \langle (F'b)^{(k)}\xi(t) \rangle = \langle (F'b)'b \rangle \langle \widehat{\xi}\xi \rangle = D\langle (F'b)'b \rangle. \quad (4.4.9)$$

Подставив (9) в (5), получим не содержащее $\xi(t)$ уравнение для среднего $\langle F \rangle$:

$$\langle F \rangle \cdot + \langle F'a \rangle = D\langle (F'b)'b \rangle. \quad (4.4.10)$$

Некоторые точные решения. Уравнение (10) не является замкнутым, поскольку оно содержит четыре, вообще говоря, различных средних:

$$\langle F \rangle, \quad \langle F'a \rangle, \quad \langle (F'b)b \rangle, \\ \langle (F'b)'b \rangle = \langle F''b^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle F'(b^2)' \rangle.$$

Отметим некоторые специальные случаи, когда из (10) все же можно определить точные значения ряда средних.

1. Если

$$a(x) = hx, \quad b^2(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \quad (4.4.11)$$

так что флуктуационное уравнение (1) имеет вид

$$\dot{x} + hx = \pm \sqrt{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2} \xi(t). \quad (4.4.12)$$

Пусть $F(x) = x^n$. Тогда

$$F' = nx^{n-1}, \quad F'' = n(n-1)x^{n-2}, \quad F'a = hnx^n,$$

$$F''b^2 = n(n-1)(\beta_0 x^{n-2} + \beta_1 x^{n-1} + \beta_2 x^n),$$

$$\frac{1}{2} F'(b^2)' = n \left(\frac{\beta_1}{2} x^{n-1} + \beta_2 x^n \right).$$

Подставив эти выражения в (10), получим цепочку уравнений для моментов $m_n = \langle x^n \rangle$:

$$\dot{m}_n + A_n m_n = B_n m_{n-1} + C_n m_{n-2}, \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.4.13)$$

где

$$A_n = n(h - Dn\beta_2),$$

$$B_n = B_n(x) = n \left[D\beta_1 \left(n - \frac{1}{2} \right) + \dots \right],$$

$$C_n = nD(n-1)\beta_0,$$

так что

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 + A_1 m_1 &= B_1, \\ \dot{m}_2 + A_2 m_2 &= B_2 m_1 + C_2, \\ \dot{m}_3 + A_3 m_3 &= B_3 m_2 + C_3 m_1, \\ \dot{m}_4 + A_4 m_4 &= B_4 m_3 + C_4 m_2, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

и могут быть последовательно определены в явном виде все моменты $m_n(t)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) с учетом переходных процессов в той системе, которую описывает флуктуационное уравнение (12).

В стационарном режиме ($\dot{m}_n = 0$) получим, например,

$$m_{1(\text{ст})} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\frac{1}{2} D\beta_1}{h - D\beta_2}.$$

2. Если

$$\left. \begin{aligned} a(x) &— \text{произвольная функция,} \\ b(x) &= \pm\sqrt{2} \left[C_0 + C_1 x + C_2 \int^x a(x_1) dx_1 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \dot{x} + a(x) &= \pm\sqrt{2} \left[C_0 + C_1 x + C_2 \int^x a(x_1) dx_1 \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.4.15)$$

то уравнение (10) будет иметь вид

$$\langle \dot{x} \rangle + (1 - DC_2) \langle a(x) \rangle = DC_1.$$

Из него, очевидно, в общем случае можно найти лишь одно среднее —

$$\langle a(x) \rangle_{\text{ст}} = \frac{DC_1}{1 - DC_2}.$$

Уравнение Фоккера—Планка для функции распределения вероятностей. Таким образом, нахождение какого-либо среднего $\langle F(x) \rangle$ путем непосредственного интегрирования уравнения (10) приводит к положительному результату лишь в очень ограниченном числе случаев.

Оказывается, однако, что если действовать как бы «в обход» и сначала определенным образом преобразовать (10), то можно получить уравнение, определяющее самую общую характеристику случайного процесса x — его функцию распределения вероятностей $w(x, t)$, по которой любое среднее находится как результат интегрирования.

Преобразуем (10), где

$$\langle F \rangle = \int F(x)w(x, t) dx \quad (4.4.16)$$

и, следовательно,

$$\langle F \rangle \cdot = \int \dot{w}F dx$$

(точка, как обычно, означает частную производную по времени).

Будем считать, что функция w достаточно быстро стремится к нулю на пределах интегрирования в (16). Тогда интегрирование по частям даст

$$\langle F'a \rangle = \int F'aw dx = - \int (aw)'F dx. \quad (4.4.17)$$

Интегрируя по частям два раза, получим также, что

$$\langle (F'b)'b \rangle = \int (F'b)'bw dx = - \int F'b(bw)' dx = \int F[(bw)'b]' dx. \quad (4.4.18)$$

Подставляя выражения (16)–(18) в обобщенное уравнение для средних (10), получим:

$$\int \{-\dot{w} + [aw + D(bw)'b]'\}F dx = 0. \quad (4.4.19)$$

Поскольку при выводе соотношения функция F считалась произвольной, то из уравнения (19) следует, что выражение в фигурных скобках должно тождественно равняться нулю, т. е.:

$$\dot{w} + [aw + D(bw)'b]' = 0. \quad (4.4.20)$$

Уравнение (20) называется уравнение Фоккера—Планка. Решив его, можно найти функцию распределения вероятностей $w(x, t)$ случайных колебаний $x(t)$ в физических системах, которые описываются нелинейными флуктуационными уравнениями типа (1). Отметим, что само уравнение (20) всегда линейно относительно w .

Для реальных систем функция $b(x)$ в (1) действительна. Поэтому в (20) можно положить $b(x) = |b(x)|$. Заметим, что иногда уравнение (20) записывают в виде

$$\dot{w}(x, t) = [K_1w + K_2w']', \quad (4.4.21)$$

где

$$K_1 = a - Dbb', \quad K_2 = Db^2.$$

Как следует из приведенного выше вывода уравнения Фоккера—Планка (20), оно остается справедливым и в том случае, когда функции $a(x)$ и $b(x)$ в (1), а также корреляционный фактор D в (2) являются явными функциями времени (детерминированными):

$$a = a(x, t), \quad b = b(x, t), \quad D = D(t) \quad (4.4.22)$$

(импульс шума, модулированный шум, система с изменяющимися параметрами, одновременное действие на нелинейную систему шума и сигнала и т. д.)

Стационарное решение уравнения Фоккера—Планка. Если a , b и D от времени не зависят, то из уравнения Фоккера—Планка можно найти стационарное распределение $w_{\text{ст}}(x) = w(x, t \rightarrow \infty)$. Полагая в (20) $\dot{w} = 0$, получим

$$[aw + D(bw)'b]' = 0,$$

или

$$aw + D(bw)'b = \text{const.} \quad (4.4.23)$$

Но при выводе уравнения (20) использовалось интегрирование по частям и предполагалось, что $w \rightarrow 0$ на границах интервала возможных значений x . Отсюда следует, что в (23) $\text{const} = 0$. Таким образом получаем уравнение

$$aw + D(bw)'b = 0,$$

которое элементарно интегрируется:

$$w(x) = w_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{|b(x)|} \exp \left\{ -\frac{1}{D} \int \frac{a(x') dx'}{b^2(x)} \right\}. \quad (4.4.24)$$

Постоянная C определяется из условия нормировки.

Марковские процессы. Рассмотрим теперь многомерное распределение вероятностей $w(x_1, \dots, x_n)$ для процесса x , удовлетворяющего уравнению (1). Используя условные распределения (1.2.24), многомерную функцию $w(x_1, \dots, x_n)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} w(x_1, \dots, x_n) &= w(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})w(x_1, \dots, x_{n-1}) = \\ &= w(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})w(x_{n-1} | x_1, \dots, x_{n-2})w(x_1, \dots, x_{n-2}) = \\ &= w(x_n | x_1, \dots, x_{n-1})w(x_{n-1} | x_1, \dots, x_{n-2}) \dots w(x_2 | x_1)w(x_1). \end{aligned} \quad (4.4.25a)$$

Будучи решением уравнения первого порядка, функция x определяется начальным значением при $t = t_0$ и значениями процесса ξ на интервале между t и t_0 :

$$x(t) = F[x_0; \xi(\theta), t_0 \leq \theta \leq t].$$

В частности,

$$x_m = F[x_{m-1}; \xi(\theta), t_{m-1} \leq \theta \leq t_m].$$

При произвольном виде корреляционной функции шума ξ величина x_m будет зависеть не только от x_{m-1} , но и от x_{m-2} , x_{m-3} и т. д., поскольку значения ξ на интервале $t_{m-1} < \theta < t_m$ будут как-то связаны со значениями ξ на других интервалах. Однако, при δ -корреляции такая связь отсутствует и, следовательно, величина x_m от значений x , предшествующих x_{m-1} , не зависит. Это значит, что

$$w(x_m | x_{m-1}, x_{m-2}, \dots) = w(x_m | x_{m-1}). \quad (4.4.25б)$$

Процессы, для которых выполняется условие (25б), называются марковскими. Мы видим, что свойством марковости обладают все процессы, определяющиеся линейными или нелинейными уравнениями (или системами уравнений) первого порядка со случайными δ -коррелированными коэффициентами.

Подставив (25б) в (25а), получим

$$w(x_1, \dots, x_n) = w(x_n | x_{n-1})w(x_{n-1} | x_{n-2}) \dots w(x_2 | x_1)w(x_1),$$

т. е. многомерное стационарное распределение марковского процесса определяется стационарным *одномерным* распределением $w(x_1)$ вида (24) и так называемой вероятностью перехода

$$p_{nm} = w(x_n | x_m),$$

которая может быть найдена как *нестационарное* решение уравнения Фоккера—Планка (21), соответствующееначальному распределению вида δ -функции: $p_{nm} = w(x, t)$ при $x_n = x$, $x_m = x_0$ и $w(x, t = 0) = w_0(x) = \delta(x - x_0)$ (см. [16–20]).

Эффект нормализации. Используя (24), рассмотрим действие белого шума на линейную систему с детерминированными параметрами, когда уравнение (1) имеет вид

$$\dot{x} + \alpha x(t) = \xi(t), \quad \overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau), \quad (4.4.26a)$$

т. е. в (1) $a(x) = \alpha x$ и $b = 1$. В этом случае согласно (24)

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma^2 = D/\alpha. \quad (4.4.26б)$$

Действие на нелинейную систему нескольких δ -коррелированных сил. Статистическая эквивалентность. Рассмотрим более общее, чем (1), флуктуационное уравнение

$$\dot{x}(t) + a(x) = \sum_n b_n(x)\xi_n(t), \quad (4.4.27)$$

$$\langle \xi_n \rangle = 0, \quad \langle \xi_m(t_1)\xi_n(t_2) \rangle = 2D_{mn}\delta(t_1 - t_2).$$

Рассуждая как при выводе (24), в этом случае получим

$$w_{\text{ст}}(x) = \frac{C}{\left| \sum_{m,n} D_{mn} b_m(x) b_n(x) \right|} \exp\left\{-\int \frac{a(x) dx}{\sum_{m,n} D_{mn} b_m(x) b_n(x)}\right\}. \quad (4.4.28)$$

Сравнение выражений (24) и (28) показывает, что при выполнении условий

$$Db^2(x) = \left| \sum_{m,n} D_{mn} b_m(x) b_n(x) \right|$$

уравнения (1) и (28) статистически эквивалентны, поскольку в обоих случаях стационарные распределения имеют одинаковый вид.

Пример. Проиллюстрируем использование уравнения Фоккера — Планка, обратившись опять к флуктуационному уравнению вида (см. (4.2.16), (1))

$$\dot{x} + [\alpha + \xi(t)]x = f, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau), \quad (4.4.29)$$

описывающему простейшую параметрическую систему с δ -коррелированной накачкой. Раньше для уравнения (29) мы решали задачу отыскания различными методами средних $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$. Теперь, применяя уравнение Фоккера — Планка, рассмотрим гораздо более общую задачу — найдем функцию распределения $w_{ст}$, с помощью которой интегрированием могут быть определены моменты любого порядка $\langle x^n \rangle$, т. е. любые одномерные статистические характеристики случайного процесса (29).

Сравнение (29) и (1) показывает, что в рассматриваемом случае надо положить

$$a(x, t) = \alpha x - f, \quad b(x) = x. \quad (4.4.30)$$

В результате получим

$$w_{ст} = \frac{C}{|x|^{1+\nu}} e^{-\frac{\mu}{|x|}}, \quad \mu = \frac{f}{D}, \quad \nu = \frac{\alpha}{D}.$$

§ 5. Линейные и нелинейные флуктуационные уравнения с коэффициентами, меняющимися по закону «случайного телеграфного сигнала»

Введение. Модель белого (δ -коррелированного) шума используется очень часто. Она намного упрощает определение различных средних, но очевиден и ее недостаток — используя ее нельзя учесть эффекты, связанные с частотной ограниченностью спектра шума (для белого шума эта ширина бесконечна). Кроме того, с помощью белого шума нельзя аппроксимировать случайные процессы определенного знака, например, флуктуации интенсивности.

От этих недостатков свободна модель случайного телеграфного сигнала (СТС). В простейшем случае шум $\eta(t)$ типа СТС принимает в случайные моменты времени с одинаковой вероятностью одно из двух значений (см. § 7 главы 2),

$$\eta(t) = \pm \sigma_0, \quad \eta^2 = \langle \eta^2 \rangle = \sigma_0^2, \quad (4.5.1)$$

(рис. 2.15), причем вероятность того, что за время t произойдет m перескоков, определяется распределением Пуассона (2.7.2)

$$P(m) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^m}{m!}. \quad (4.5.2)$$

Таким образом, процесс СТС характеризуется двумя параметрами: σ_0 и ν (напомним, что белый шум имеет лишь один параметр D (см. (1))). Постоянная ν имеет размерность частоты и характеризует число перекоков СТС в единицу времени. Корреляционная функция СТС имеет вид экспоненты,

$$B_0(\tau) = \langle \eta \eta_\tau \rangle = \sigma_0^2 e^{-2\nu|\tau|},$$

т. е. ее частотный спектр имеет лоренцевскую форму с шириной $\Delta\omega_0 = 4\nu$.

Ценность модели (1) в том, что она хорошо считается при анализе параметрических и нелинейных систем, правда, расчеты сложнее, чем при использовании белого шума, но зато СТС описывает шумовой процесс с произвольной шириной спектра $0 < \Delta\omega_0 < \infty$. В предельном случае $\Delta\omega_0 \rightarrow \infty$, когда

$$\nu \rightarrow \infty, \quad \sigma_0^2 \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma_0^2}{\nu} = \text{const} = D, \quad (4.5.3)$$

модель СТС дает те же результаты, что и модель белого шума.

Формула дифференцирования. Предположим, что $x(t)$ описывает случайные колебания, происходящие под действием СТС $\eta(t)$ в системе, которая описывается уравнением первого порядка; например,

$$\dot{x} + a(x) = b(x)\eta(t). \quad (4.5.4)$$

Для определения статистических характеристик процесса $x(t)$ важное значение имеют так называемые формулы дифференцирования [2–4]. Обратимся к среднему значению $\langle \eta(t)x(t) \rangle$ и продифференцируем его по t :

$$\frac{d\langle \eta(t)x(t) \rangle}{dt} = \langle \dot{\eta}(t)x(t) \rangle + \langle \eta(t)\dot{x}(t) \rangle. \quad (4.5.5)$$

Производная $\dot{\eta}(t)$ представляет собой случайную последовательность δ -функций. Функция $x(t)$, являясь решением уравнения (1), определяется значениями $\eta(t)$ на интервале времени, предшествующему моменту времени t . Иначе говоря, $x(t)$ является функционалом процесса $\eta(t)$.

Рассмотрим теперь среднее $\langle \eta(t_1)x(t) \rangle$ при $t_1 \geq t$ и преобразуем его, учитывая свойство (2.7.4):

$$\begin{aligned} \langle \eta(t_1)x(t) \rangle &= \frac{1}{\sigma_0^2} \langle \eta(t_1)\eta^2(t)x(t) \rangle = \frac{1}{\sigma_0^2} \langle \eta(t_1)\eta(t) \rangle \langle \eta(t)x(t) \rangle = \\ &= e^{-2\nu(t_1-t)} \langle \eta(t)x(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

При выводе (6) принято также во внимание то, что $x(t)$ является функционалом, и формулы (2.7.9) и (2.7.10). Дифференцируя (6) по t_1 и устремляя t_1 к t , получаем

$$\langle \dot{\eta}(t)x(t) \rangle = -2\nu \langle \eta(t)x(t) \rangle. \quad (4.5.7)$$

Подстановка (7) в уравнение (5) дает одну из формул дифференцирования (ФД) [2]

$$\frac{d\langle\eta(t)x(t)\rangle}{dt} + 2\nu\langle\eta(t)x(t)\rangle = \langle\eta(t)\dot{x}(t)\rangle. \quad (4.5.8)$$

Обобщение (8) на произвольную функцию $F(x)$ имеет вид:

$$\langle\eta F\rangle\cdot + 2\nu\langle\eta F\rangle = \langle\eta\dot{F}\rangle = \langle\eta F'\dot{x}\rangle, \quad \left(F' = \frac{\partial F}{\partial x}\right). \quad (4.5.9)$$

Другие способы получения формул (8), (9) изложены в [3, 4].

Формулы дифференцирования дают возможность находить точные решения линейных флуктуационных уравнений при флуктуациях параметров, описываемых СТС (1).

Предположим, что в (4) функция $a(x) = ax$ и $b(x) = b = \text{const}$, т. е. имеем уравнение вида:

$$\dot{x} + ax = b\eta(t). \quad (4.5.10)$$

где $\eta(t)$ — дихотомный процесс со значениями ± 1 .

Умножая обе части уравнения (10) на x и усредняя, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle + a \langle x^2 \rangle = b \langle x \eta(t) \rangle. \quad (4.5.11)$$

Среднее $\langle x \eta(t) \rangle$ подчиняется уравнению (8), в котором для замены \dot{x} используем исходное уравнение (10). Принимая при этом во внимание, что $\eta^2(t) = 1$, имеем

$$\langle x \eta \rangle\cdot + (a + 2\nu) \langle x \eta \rangle - b = 0. \quad (4.5.12)$$

Мы получили замкнутую систему уравнений (11) и (12) для $\langle x \rangle$ и $\langle x \eta \rangle$, стационарное его решение дает

$$\langle x^2 \rangle = \frac{b^2}{a(a + 2\nu)}. \quad (4.5.13)$$

Изложенным способом можно найти замкнутые уравнения для статистических моментов x более высокого порядка.

Действие на нелинейную систему «окрашенного» шума типа СТС. Обобщенное уравнения Фоккера — Планка и его стационарное решение. Рассмотрим подробно случай (4), когда согласно (1) и (8)

$$\langle F(x) \rangle\cdot = \langle \dot{F}(x) \rangle = \langle F'(x)(b(x)\eta(t) - a(x)) \rangle = \langle F'b\eta \rangle - \langle F'a \rangle, \quad (4.5.14)$$

и

$$\langle \eta F \rangle\cdot + 2\nu \langle \eta F \rangle = \langle \eta F'(b\eta - a) \rangle = \langle F'b\eta^2 \rangle - \langle a\eta F' \rangle = \sigma_0^2 \langle F'b \rangle - \langle \eta F'a \rangle, \quad (4.5.15)$$

Будем понимать под x одно из возможных значений, которое может принять процесс $x(t)$ в момент t , и пусть $\tilde{x}(t)$ — реализация этого процесса, соответствующая данной реализации шума $\eta(t)$. Значение

\tilde{x} тесно связана с η , причем эта связь определяется флуктуационным уравнением (4)

$$\dot{\tilde{x}}(t) + a(\tilde{x}(t)) = b(\tilde{x}(t))\eta(t). \quad (4.5.16)$$

В данном случае при использовании (14), (15) обозначенные штрихом производные берутся по \tilde{x} .

Пусть в (14) и (15)

$$F(x) = \delta(x - \tilde{x}(t)),$$

$w(\tilde{x}, t)$ — функция распределение \tilde{x} . Тогда

$$\langle F \rangle = \langle \delta(x - \tilde{x}) \rangle = \int \delta(x - \tilde{x})w(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = w(x, t) \text{ и } \langle F \rangle \cdot = \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}(x), \quad (4.5.17)$$

$$\begin{aligned} \langle F'_x a(\tilde{x}) \rangle &= \left\langle \frac{\partial \delta}{\partial \tilde{x}} a \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \delta}{\partial x} a \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x} \int \delta(x - \tilde{x})a(\tilde{x})w(\tilde{x}, t) d\tilde{x} = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} (a(x) \langle \delta \rangle) = -[a\langle \delta \rangle]'. \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

Здесь штрих означает уже производную по x .

Аналогичным образом находим

$$\left. \begin{aligned} \langle F'b \rangle &= -[b\langle \delta \rangle]', \\ \langle F'b\eta \rangle &= -[b\langle \delta\eta \rangle]', \\ \langle F'a\eta \rangle &= -[a\langle \delta\eta \rangle]'. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.19)$$

Если учесть, что $\langle \delta \rangle = w$ (см. (17)), и ввести обозначение $\langle \delta\eta \rangle = w_1$, то, подставив выражения (17)–(19) в (14) и (15), получим систему двух уравнений для функций w и w_1 :

$$\left. \begin{aligned} \dot{w} &= (aw - bw_1)', \\ \dot{w}_1 + 2\nu w_1 &= (aw_1 - \sigma_0^2 bw)', \end{aligned} \right\} \quad (4.5.20)$$

Система уравнений (20) имеет стационарное решение

$$\begin{aligned} w_{\text{ст}}(x) &= \frac{C|b(x)|}{|\sigma_0^2 b^2(x) - a^2(x)|} \exp \left\{ -\nu \int \frac{a(x') dx'}{\sigma_0^2 b^2(x') - a^2(x')} \right\}, \\ w_{1,\text{ст}}(x) &= \frac{a(x)}{b(x)} w_{\text{ст}}(x). \end{aligned} \quad (4.5.21)$$

Полученное решение (21) переходит в решение (4.4.29) уравнения Фоккера — Планка при условии

$$\sigma_0^2 \rightarrow \infty, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad \frac{\sigma_0^2}{\nu} = 2D, \quad \sigma_0 |b(x)| \gg \frac{a(x)}{\sigma_0}, \quad (4.5.22)$$

так что

$$\frac{|b(x)|}{\sigma_0^2 b^2(x) - a^2(x)} \approx \frac{1}{\sigma_0^2 |b(x)|},$$

$$\frac{2\nu a(x)}{\sigma_0^2 b^2(x) - a^2(x)} \approx \frac{a(x)}{D b^2(x)},$$

и

$$\begin{aligned} \frac{|b(x)|C}{|\sigma_0^2 b^2(x) - a^2(x)|} \exp\left\{-2\nu \int^x \frac{a(x') dx'}{\sigma_0^2 b^2(x') - a^2(x')}\right\} &\approx \\ \approx \frac{C'}{\sigma_0^2 |b(x)|} \exp\left\{-\frac{1}{D} \int^x \frac{a(x') dx'}{b^2(x')}\right\} & \\ (C' = \sigma_0^2 C). & \end{aligned}$$

Пример. Если

$$\dot{x} + hx = \eta(t), \tag{4.5.23}$$

т. е. в (4)

$$a(x) = hx, \quad b(x) = 1, \tag{4.5.24}$$

то, подставив (24) в (4.4.24) и (21), получим соответственно гауссовское распределение

$$w(x) = C \exp\left\{-\frac{hx^2}{2D}\right\} \quad (-\infty < x < \infty, \quad \text{если } \langle \eta \eta_\tau \rangle = 2D\delta(\tau)) \tag{4.5.25}$$

или распределение вида

$$w(x) = C(\sigma_0^2 - x^2)^{\frac{\nu}{2h}-1} \quad (-\sigma_0 \leq x \leq \sigma_0, \quad \text{если } \eta(t) = \pm\sigma_0). \tag{4.5.26}$$

§ 6. Приближенные методы вычисления статистических характеристик

В статистических задачах часто используются различные приближенные, не всегда достаточно обоснованные, но зато сравнительно простые методы вычисления статистических характеристик. Некоторые из этих методов рассматриваются в следующих разделах.

Линеаризация нелинейного уравнения. Из приближенных методов прежде всего следует отметить метод линеаризации. Рассмотрим его на примере нелинейного уравнения

$$\dot{x} + f(x) = \xi(t). \tag{4.6.1}$$

В области малых x можно аппроксимировать $f(x)$ первыми двумя членами степенного ряда, что приводит к линейному уравнению

$$\dot{x} + f_0 + f'_0 x = \xi(t) \quad (f_0 \ll f'_0 x), \tag{4.6.2}$$

из которого легко найти x и его статистические характеристики. Если предварительный анализ (1) показывает, что значение x близко к некоторой величине x_0 , то функцию $f(x)$ в (1) целесообразно разлагать

не по степеням x , а по степеням разности $x - x_0$. Линеаризованное уравнение для x будет при этом выглядеть следующим образом:

$$\dot{x} + f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \xi(t) \quad (|x - x_0| \ll x_0). \quad (4.6.3)$$

Иногда можно предположить, что малы флуктуации \tilde{x} величины $x = \bar{x} + \tilde{x}$. Тогда нелинейное уравнение линеаризуется по флуктуациям, и из (1) мы получаем два уравнения:

$$\dot{\bar{x}} + f(\bar{x}) = 0, \quad (4.6.4)$$

$$\dot{\tilde{x}} + f'(\bar{x})\tilde{x} = \xi(t) \quad (|\tilde{x}| \ll |\bar{x}|), \quad (4.6.5)$$

первое из которых — существенно нелинейное — не содержит случайных функций и определяет среднее значение \bar{x} , а второе — линейное — флуктуации $\tilde{x}(t)$.

Статистическая линеаризация. К разумным результатам может привести следующий способ упрощения нелинейного уравнения: все нечетные функции x заменяются простейшей нечетной функцией вида Ax , а все четные — простейшей четной, т. е. некоторой постоянной B . Параметры линеаризации A и B подбираются при этом таким образом, чтобы при замене соблюдалась определенная статистическая эквивалентность.

Рассмотрим некоторые рецепты выбора параметра A при аппроксимации нелинейной нечетной функции $F(x) = -F(-x)$ с помощью линейной функции Ax , считая, что x — гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением ($\bar{x} = 0$) и дисперсией σ^2 .

а) Равенство дисперсий $F(x)$ и Ax :

$$\langle F^2(x) \rangle = A^2 \sigma^2. \quad (4.6.6)$$

При этом

$$A = A_1 = \langle F^2 \rangle^{1/2} / \sigma. \quad (4.6.7)$$

б) Минимум отклонения Ax от $F(x)$ (в среднеквадратичном):

$$\langle [Ax - F(x)]^2 \rangle = \min. \quad (4.6.8)$$

Приравнивая нулю производную от (8) по A , получим

$$A = A_2 = \langle F(x)x \rangle / \sigma^2. \quad (4.6.9)$$

в) Определение A как среднего значения производной нелинейной функции:

$$A = \langle F'(x) \rangle. \quad (4.6.10)$$

Учитывая, что распределение вероятностей $w(x)$ гауссовского процесса удовлетворяет соотношению

$$w'(x) = -\frac{x}{\sigma^2} w(x), \quad (4.6.11)$$

находим

$$\begin{aligned} A = A_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} F'(x)w(x) dx = w(x)F(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Fw' dx = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} Fxw dx = \frac{1}{\sigma^2} \langle Fx \rangle = A_2, \end{aligned}$$

т. е. этот критерий совпадает с предыдущим.

Разумеется, можно предложить и другие варианты выбора A , например:

$$A = A_4 = (A_1 + A_2)/2 \tag{4.6.12}$$

или

$$A = A_5 = \langle F(x)/x \rangle. \tag{4.6.13}$$

При линейной аппроксимации кубической параболы $F(x) = x^3$ получим, используя приведенные выше формулы:

$$A_1 = \sqrt{15} \sigma^2 \approx 3,88\sigma^2, \quad A_2 = A_3 = 3\sigma^2, \quad A_6 = \sigma^2 < A_1, A_2. \tag{4.6.14}$$

При статистической линейизации синусоиды $F(x) = \sin x$ имеем $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\sigma^2})$, $\langle \cos x \rangle = e^{-\sigma^2/2}$,

$$\left\langle \frac{\sin x}{x} \right\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\sigma^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)} > e^{-\sigma^2/2},$$

так что

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{1 - e^{-2\sigma^2}}, \quad A_2 = A_3 = e^{-\sigma^2/2}, \quad A_5 > A_{2,3} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\sigma} \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right). \tag{4.6.15}$$

Следует отметить, что в области малых значений x статистическая линейизация эквивалентна обычной: как видно из (15), при $\sigma^2 \ll 1$ все коэффициенты A_i стремятся к 1, т. е. $\sin x$ заменяется просто на x . В области больших σ^2 параметры A_i могут значительно между собой различаться (рис. 4.3).

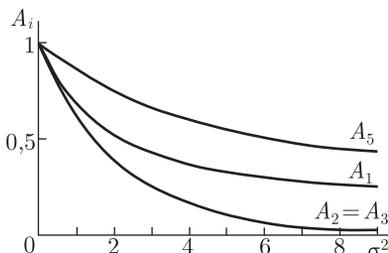


Рис. 4.3. Статистическая линейизация гармонической функции гауссовского случайного процесса: $\sin x \rightarrow Ax$

Кривые показывают зависимость коэффициентов A_i от дисперсии $\sigma^2 = \overline{x^2}$ при различных критериях выбора A_i

Приложение метода статистической линейизации к анализу шумовых колебаний в нелинейной системе мы рассмотрим на примере уравнения

$$\dot{x} + x^3 = \xi(t) \quad (\bar{\xi} = 0, \quad \xi \bar{\xi}_\tau = 2D\delta(\tau)), \tag{4.6.16}$$

в котором шум ξ предполагается гауссовским и «белым», т. е. δ -коррелированным. В этом случае моменты $\langle x^n \rangle$ могут быть найдены из уравнения Фоккера — Планка, т. е. можно сравнить точные значения моментов с их приближенными значениями, получающимися при различных вариантах статистической линейизации.

Согласно (14) в случае кубической нелинейности нужно положить $A = \beta\sigma^2$, где β — численный коэффициент. Сделав в (16) замену $x^3 \rightarrow \beta\sigma^2 x$, получим линейное уравнение

$$\dot{x} + \beta\sigma^2 x = \xi(t), \quad (4.6.17)$$

из которого следует, что

$$\tilde{x} = 0, \quad \overline{xx_\tau} = \sigma^2 e^{-\beta\sigma^2|\tau|}, \quad (4.6.18)$$

причем $\overline{x^2} = D/\beta\sigma^2$, т. е. дисперсия и время корреляции процесса x следующим образом выражаются через D и β :

$$\sigma^2 = \sqrt{\frac{D}{\beta}}, \quad \tau_k = \frac{1}{\beta\sigma^2} = \frac{1}{\sqrt{\beta D}}. \quad (4.6.19)$$

Таким образом, в зависимости от выбора параметра линеаризации

$$\tau_k \sqrt{\overline{D}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \begin{cases} \frac{1}{(15)^{1/4}} \approx 0,508 & (A = A_1), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,575 & (A = A_2), \\ 1 & (A = A_5). \end{cases} \quad (4.6.20)$$

С другой стороны, учитывая, что уравнение (16) принадлежит к типу уравнений (4.4.1) с $a(x) = -x^3$ и $b(x) = 1$, по формуле (4.4.23) находим для x точное стационарное распределение вероятностей:

$$w(x) = \frac{2\mu^{1/4}}{\Gamma(1/4)} e^{-\mu x^4}, \quad \mu = \frac{1}{4D} \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (4.6.21)$$

Согласно (21)

$$\langle x^{2n+1} \rangle = 0, \quad \langle x^{2n} \rangle = \frac{\Gamma(1/4 + n/2)}{\Gamma(1/4)\mu^{n/2}} = \frac{2^n \Gamma(1/4 + n/2)}{\Gamma(1/4)} D^{n/2}. \quad (4.6.22)$$

В частности,

$$\langle x^2 \rangle = \sigma^2 = \sqrt{D} \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}, \quad \langle x^4 \rangle = D, \quad \langle x^6 \rangle = 3\sigma^2 D, \quad (4.6.23)$$

откуда

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{D}} = \frac{2\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} = 0,675. \quad (4.6.24)$$

Таким образом, при статистической линеаризации уравнения (16) возникают следующие ошибки при определении σ^2 : 25% ($A = A_1$), 15% ($A = A_3$) и 48% ($A = A_5$). Вычисление моментов четвертого и шестого порядков приводит к следующим результатам:

$$\frac{\langle x^4 \rangle}{D} = \begin{cases} 1 & (\text{точно}), \\ 0,78 & (A = A_1), \\ 0,994 & (A = A_2), \\ 3 & (A = A_4), \end{cases} \quad \frac{\langle x^6 \rangle}{D^{3/2}} = \begin{cases} 2,02 & (\text{точно}), \\ 1,95 & (A = A_1), \\ 2,84 & (A = A_2), \\ 15 & (A = A_4). \end{cases} \quad (4.6.25)$$

Заметим, что выражения (23) для $\langle x^4 \rangle$ и $\langle x^6 \rangle$ можно получить сразу из (4.4.10).

Стоит обратить внимание еще на одно обстоятельство. Упрощенное уравнение (17) определяет x как гауссовский случайный процесс (ввиду линейности (17) и гауссовости ξ), хотя в действительности распределение вероятностей $w(x)$ (21) гауссовским не является. Между тем x действительно обладает неко-

торыми свойствами гауссовского процесса, в чем можно убедиться следующим образом.

Для произвольных гауссовских переменных x и ξ , пользуясь общими формулами (1.2.45), (1.2.46) для моментов, можно получить такие соотношения:

$$\overline{\xi x^3} = 3\overline{\xi x} \overline{x^2}, \quad \overline{\xi x^5} = 5\overline{\xi x} \overline{x^4}, \quad \overline{\xi x^7} = 7\overline{\xi x} \overline{x^6}$$

и т. д., иначе говоря,

$$\langle \xi x^{2n-1} \rangle = (2n-1) \overline{\xi x} \langle x^{2n-2} \rangle. \quad (4.6.26)$$

С другой стороны, полагая в уравнениях для средних (4.4.10) $F(x) = x^{2n}$, из (16) получим

$$\frac{d}{dt} \langle x^{2n} \rangle = -2n \langle x^{2n+2} \rangle + D2n(2n-1) \langle x^{2n-2} \rangle$$

или в стационарном режиме

$$\langle x^{2n+2} \rangle = D(2n-1) \langle x^{2n-2} \rangle. \quad (4.6.27)$$

Умножив уравнение (16) на x^{2n-1} и усреднив, получим

$$\langle x^{2n+2} \rangle = \langle \xi x^{2n-1} \rangle. \quad (4.6.28)$$

Сравнение (27) и (28) показывает, что

$$\langle \xi x^{2n-1} \rangle = D(2n-1) \langle x^{2n-2} \rangle. \quad (4.6.29)$$

Это совпадает с выражением (26), полученным только из гауссовости x и ξ , если учесть, что согласно (29) $\overline{\xi x} = D$.

Рассмотрим еще один подход к выбору параметра линеаризации β ($A = \beta\sigma^2 = A_6$) опять на примере уравнения (16). Прибавив к обеим частям уравнения $\beta\sigma^2 x$, перепишем его в виде

$$\dot{x} + \beta\sigma^2 x = \xi(t) + \mu(t), \quad (4.6.30)$$

где

$$\mu(t) = \beta\sigma^2 x - x^3. \quad (4.6.31)$$

Считая функцию $\mu(t)$ малой, будем искать решение (30) в виде ряда по степеням μ , полагая

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots,$$

где

$$\dot{x}_0 + \beta\sigma^2 x_0 = \xi(t), \quad (4.6.32)$$

$$\dot{x}_1 + \beta\sigma^2 x_1 = \mu_0(t) = \beta\sigma x_0^2(t) - x_0^3(t), \quad (4.6.33)$$

$$\dot{x}_2 + \beta\sigma^2 x_2 = \mu_1(t) = \beta\sigma^2 x_1(t) - x_1^3(t)$$

и т. д. При этом параметр β подберем так, чтобы поправка к нулевому приближению x_0 была наименьшей. Если ограничиться вычислением только поправки x_1 , то

$$\overline{x^2} = \overline{x_0^2} + \overline{2x_0x_1} + \overline{x_1^2} = \overline{x_0^2} \left[1 + \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} \right], \quad (4.6.34)$$

и для определения β получаем условие

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{\overline{x_0^2}} \right| = \min. \quad (4.6.35)$$

Учитывая δ -корреляцию ξ ($\overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau)$) и гауссовость x_0 , находим из (32)

$$\overline{x_0^2} = \sigma^2 = \frac{D}{\beta\sigma^2}, \quad B(\tau) = \overline{x_0x_{0\tau}} = \sigma^2 e^{-\beta\sigma^2|\tau|}, \quad (4.6.36)$$

$$\langle x_{0\tau}x_0^3 \rangle = 3\sigma^2 B(\tau), \quad \overline{x_0^3x_{0\tau}^3} = 9B(\tau)\sigma^4 + 6B^3(\tau),$$

$$\overline{\mu_0\mu_{0\tau}} = \sigma^4(\beta^2 - 6\beta + 9)B(\tau) + 6B^3(\tau), \quad (4.6.37)$$

$$\overline{\mu_0x_0} = \sigma^4(\beta - 3). \quad (4.6.38)$$

Согласно (33)

$$\overline{\xi x_1} = 0, \quad (4.6.39)$$

$$\overline{\mu_0x_1} = \int_0^\infty e^{-\beta\sigma^2\tau} \overline{\mu_0\mu_{0\tau}} d\tau = \frac{\sigma^4}{2\beta} (\beta^2 - 6\beta + 12). \quad (4.6.40)$$

Комбинируя (32) и (33), можно получить следующие уравнения для средних:

$$\frac{d}{dt} \langle x_0x_1 \rangle + 2\beta\sigma^2 \langle x_0x_1 \rangle = \langle x_1\xi \rangle + \langle \mu_0x_0 \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle x_1^2 \rangle + 2\beta\sigma^2 \langle x_1^2 \rangle = 2\langle \mu_0x_1 \rangle.$$

Из них, принимая во внимание (38)–(40), находим, что в стационарном режиме

$$\frac{2\overline{x_0x_1}}{x_0^2} = \frac{\beta - 3}{\beta}, \quad (4.6.41)$$

$$\frac{\overline{x_1^2}}{x_0^2} = \frac{\beta^2 - 6\beta + 12}{2\beta^2}. \quad (4.6.42)$$

Если пренебречь в (35) величиной $\overline{x_1^2}$, то согласно (41) получим

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1}}{x_0^2} \right| = \left| \frac{\beta - 3}{\beta} \right| = \min, \quad (4.6.43)$$

откуда $\beta = 3$ и $A_6 = A_2$ (см. (14)), т. е. условие (43) совпадает с критерием (8) минимума среднеквадратичного отклонения. Учитывая в (35) сразу оба слагаемых, получим согласно (41) и (42)

$$\left| \frac{2\overline{x_0x_1} + \overline{x_1^2}}{x_0^2} \right| = \frac{3}{2\beta^2} |\beta^2 - 4\beta + 4| = \min,$$

откуда $\beta = 2$, что дает следующую величину дисперсии:

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,706. \quad (4.6.44)$$

Сравнение (44) с точным значением (24) показывает, что ошибка в оценке σ^2 теперь составляет всего 5%.

Метод статистической линеаризации нашел применение при расчете систем автоматического регулирования (см., например, [5, 6]). К нему близок так называемый кумулянтный метод, развитый в [7]. Метод статистической линеаризации использован для анализа флуктуации в нелинейном колебательном контуре [24].

Уравнения Дайсона для средних. Познакомимся с еще одним методом приближенного определения статистических средних (см. [8], а также [9, 10]), частично использующим идею линеаризации и не связанным с предположением о δ -коррелированности шума.

Рассмотрим колебания x некоторой, вообще говоря, нелинейной системы, описываемой уравнением

$$\widehat{L}x = \widehat{N}(x, \xi) + f(t), \quad (4.6.45)$$

где \widehat{L} — линейный регулярный (т. е. не зависящий от случайных параметров) оператор, \widehat{N} — линейный или нелинейный оператор, $\xi = \xi(t)$ и f — заданные случайные функции. Полагая

$$x = \bar{x} + \tilde{x}, \quad (4.6.46)$$

перепишем (45) в виде двух (точных) уравнений: уравнения для средних

$$\widehat{L}\bar{x} = \langle \widehat{N}(x, \xi) \rangle + \langle f \rangle, \quad (4.6.47)$$

уравнения для флуктуации

$$\widehat{L}\tilde{x} = \widehat{N} - \langle \widehat{N} \rangle + f - \langle f \rangle. \quad (4.6.48)$$

Флуктуационное уравнение (48), вообще говоря, нелинейное относительно флуктуации \tilde{x} и ξ , существенно упростится, если его по этим флуктуациям линеаризовать. В полученное таким образом линейное относительно \tilde{x} уравнение величина \bar{x} будет входить в качестве параметра (вообще говоря, переменного). Решение линеаризованного уравнения (48) обозначим через $\tilde{x}^{(1)}$. Заменяя теперь точное значение $x = \tilde{x} + \bar{x}$ приближенным $x = \bar{x} + \tilde{x}^{(1)}$, найдем явную зависимость $\langle N \rangle$ от \bar{x} и статистических характеристик флуктуаций ξ и $\bar{f} = f - \langle f \rangle$:

$$\langle \widehat{N}(\xi, x) \rangle = F(\bar{x}). \quad (4.6.49)$$

В результате после подстановки (49) в (47) получим приближенное уравнение для \bar{x} вида

$$\widehat{L}\bar{x} = F(\bar{x}) + \bar{f}. \quad (4.6.50)$$

Уравнение (50) аналогично уравнению Дайсона, записанному в приближении Бурре (см. [9–11]).

Описанный метод называют иногда «улучшенным» методом возмущений, и нетрудно убедиться (см. ниже), что уравнение (50) действительно дает гораздо более полное описание \bar{x} , чем то, которое можно получить, используя обычный метод возмущений.

В качестве примера рассмотрим опять уравнение (1):

$$\dot{x} + [h + \xi(t)]x = \varphi, \quad \bar{\xi} = 0, \quad \overline{\xi\xi_\tau} = B(\tau). \quad (4.6.51)$$

Сначала будем вычислять \bar{x} , используя обычный метод возмущений. Полагая $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \sim \xi^n$, получим цепочку уравнений

$$\dot{x}_0 + hx_0 = \varphi, \quad \dot{x}_1 + hx_1 = -\xi(t)x_0, \quad \dot{x}_2 + hx_2 = -\xi(t)x_1$$

и т. д. Отсюда находим (при $\varphi = 1$)

$$x_0 = \frac{1}{h}, \quad x_0 = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\theta_1} \xi(t - \theta_1) d\theta_1, \quad \bar{x}_1 = 0,$$

$$x_2 = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} d\theta_1 \int_0^{\infty} d\theta_2 e^{-h(\theta_1 + \theta_2)} \xi(t - \theta_2) \xi(t - \theta_1 - \theta_2),$$

так что

$$\bar{x} \approx \bar{x}_0 + \bar{x}_2 = \frac{1}{h} \left[1 + \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau \right]. \quad (4.6.52)$$

Теперь определим \bar{x} , исходя из уравнения (50). В рассматриваемом случае

$$\widehat{L} = \frac{d}{dt} + h, \quad \widehat{N} = -\xi x, \quad f = 1,$$

и флуктуационное уравнение (48) после линеаризации по ξ и \tilde{x} принимает вид

$$\left(\frac{d}{dt} + h \right) \tilde{x} = -\bar{x} \xi.$$

Отсюда находим

$$\tilde{x} = \tilde{x}^{(1)} = -\bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\theta} \xi(t - \theta) d\theta,$$

$$\langle \widehat{N} \rangle = -\langle \xi \tilde{x}^{(1)} \rangle = \bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau = F(\bar{x}). \quad (4.6.53)$$

Подстановка (53) в (47) дает

$$\frac{d\bar{x}}{dt} + h\bar{x} = \bar{x} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau + 1. \quad (4.6.54)$$

В стационарном режиме ($\dot{x} = 0$) из (54) находим

$$\bar{x} = \frac{1}{h(1 - \alpha)}, \quad \alpha = \frac{1}{h} \int_0^{\infty} e^{-h\tau} B(\tau) d\tau. \quad (4.6.55)$$

Сравнение (52) и (55) показывает, что эти выражения совпадают лишь в предельном случае малой интенсивности параметрического шума ($\alpha \ll 1$), причем формула (52) не описывает параметрической неустойчивости (т. е. обращения \bar{x} в ∞), возникающей согласно (55) при $\alpha = 1$. Заметим, что при δ -коррелированном шуме ($\overline{\xi\xi_\tau} = 2D\delta(\tau)$)

формула (55), следующая из уравнения Дайсона (54) для \bar{x} , дает результат

$$\bar{x} = \frac{1}{h - D},$$

совпадающий с точным (см. (4.2.25)).

Для усиления метода уравнений Дайсона можно использовать его совместно с методом статистической линеаризации, применяя последний к флуктуационному уравнению (48)¹⁾.

Литература к главе 4

1. Ахманов С. А., Антонов Г. Ф. // Изв. Вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 405.
2. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Формулы дифференцирования и их применение к решению стохастических уравнений. — Препринт ИФСО-46Ф, Институт физики им. Л. В. Киренского СО АН СССР, Красноярск, 1976.
3. Шапиро В. Е., Логинов В. М. Динамические системы под воздействием случайных влияний. — Новосибирск: Наука, 1983.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001.
5. Первозванский А. А. Случайные процессы в нелинейных системах автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1962.
6. Пугачёв В. С., Казаков И. Е., Евланов Л. Г. Основы статистической теории автоматических систем. — М.: Машиностроение, 1974.
7. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
8. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
9. Барабаненков Ю. Н., Кравцов Ю. А., Рытов С. М. и др. // УФН, 1970, т. 102, с. 3.
10. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. // Письма в ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 519.
11. Ахманов С. А. // Изв. Вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 541.
12. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
13. Ахманов С. А., Чиркин А. С. Статистические явления в нелинейной оптике. — М.: МГУ, 1971.
14. Татарский В. И. // Изв. Вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 570.
15. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
16. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, ч. 1. Случайные процессы.
17. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ. / Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1.
18. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1961.

¹⁾ Более подробное изложение теории стохастических уравнений можно найти в [1–3], [8–15].

19. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977.
20. *Казаков В.А.* Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. — М.: Сов. радио, 1973.
21. *Дьяков Ю.Е., Никитин С.Ю.* Задачи по статистической радиофизике и оптике. — М.: МГУ, 1985.
22. *Chirkin A. S., Volokhovskiy V. V.* // J. Nonlinear Opt. Physics and Materials, 1977, v. 6, p. 455.
23. *Волоховский В.В., Чиркин А.С.* // Оптика и спектроскопия, 1999, т. 87, с. 641.
24. *Ахманова С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.

ШУМОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Нахождение отклика линейной колебательной системы (колебательного контура, линейного усилителя) на случайное воздействие представляет собой сравнительно простую задачу. Выполнение для линейных систем принципа суперпозиции позволяет широко использовать спектральные представления. Поэтому корреляционно-спектральная теория случайных процессов играет исключительно важную роль при исследовании шумовых колебаний в линейных системах. Зная передаточную функцию (или функцию Грина) исследуемой линейной системы, можно записать универсальные соотношения, характеризующие преобразование спектров или корреляционных функций.

Вопрос о преобразовании законов распределения является более сложным. Однако во многих практически важных случаях распределение шума на выходе линейной системы с большой точностью оказывается гауссовским, независимо от закона распределения шума на входе; происходит, как говорят, нормализация случайного процесса. Фактически речь идет еще об одном важном следствии центральной предельной теоремы.

Разумеется, кроме определения закона преобразования шума в линейных системах возникают и другие важные вопросы, например, выбор фильтра или усилителя, имеющий целью оптимальным образом обнаружить или выделить сигнал, скрытый в шумах. Линейные системы предоставляют широкие возможности для осуществления указанных операций.

Превосходное изложение динамической теории колебаний в линейных системах можно найти в [1].

§ 1. Математическое описание линейных систем. Спектральный и временной подходы

Принцип суперпозиции. Линейными называются системы или устройства, процессы в которых можно описать при помощи линейных уравнений. Линейные уравнения могут быть любыми: алгебраическими, дифференциальными (обыкновенными или в частных производных, с постоянными или переменными параметрами), интегральными, разностными и т. п.

Все линейные системы обладают следующим свойством: если на систему одновременно действует несколько внешних сил, то на каж-

дую она откликается независимо. Иначе говоря, если $x_m(t)$ — отклик системы на силу $f_m(t)$, то при воздействии

$$f(t) = \sum_m f_m(t) \quad (5.1.1)$$

отклик будет

$$x(t) = \sum_m x_m(t). \quad (5.1.2)$$

Аналогично

$$x(t) = \sum_m a_m x_m(t), \quad (5.1.3)$$

если

$$f(t) = \sum_m a_m f_m(t), \quad (5.1.4)$$

где a_m — постоянные. В этом состоит принцип суперпозиции.

Вынужденные колебания; спектральное описание отклика линейной системы. Рассмотрим случай, когда разложение (1) производится по гармоническим колебаниям. Предположим, что под действием силы

$$f_m(t) = e^{i\omega_m t} \quad (5.1.5)$$

система совершает колебание

$$x_m(t) = K(\omega_m, t)e^{i\omega_m t}. \quad (5.1.6)$$

Переходя в (3), (4) от суммы к интегралу, получим, что при действии силы произвольного вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{i\omega t} d\omega \quad (5.1.7)$$

отклик системы будет

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, t) f_\omega e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.1.8)$$

Функция $K(\omega, t)$, полностью характеризующая линейную систему, называется *коэффициентом передачи* или *частотной передаточной функцией*. Зависимость функции $K(\omega, t)$ от времени связана с возможным изменением во времени самой системы (например, при модуляции ее параметров). При этом, очевидно, в спектре колебаний могут появиться такие частоты, которых нет в спектре внешней силы.

В случае систем с постоянными параметрами появление новых частот невозможно и коэффициент передачи от времени не зависит:

$$K(\omega, t) = K(\omega). \quad (5.1.9)$$

Заметим, что в случае (9) выражение (8) можно рассматривать как спектральное разложение вынужденных колебаний, совершаемых системой:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} K(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.1.10)$$

Временной подход. Рассмотрим теперь силу типа δ -импульса:

$$f_m(t) = \delta(t - t_m). \quad (5.1.11)$$

Отклик линейной системы на такую силу представим в виде

$$x_m(t) = H(t, t_m). \quad (5.1.12)$$

Произвольную силу можно представить в виде разложения по δ -функциям:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) \delta(t - \theta) d\theta. \quad (5.1.13)$$

Отсюда на основании (3), (4) заключаем, что отклик линейной системы на воздействие $f(t)$ может быть записан как

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) H(t, \theta) d\theta. \quad (5.1.14)$$

Выражение (14) носит название интеграла Дюамеля, а $H(t, \theta)$ — функции Грина.

Отметим следующие свойства функции Грина:

1. Поскольку отклик на δ -импульс не может возникнуть во времени раньше самого импульса (иначе был бы нарушен принцип причинности), то

$$H(t, \theta) = 0, \quad \text{если } t < \theta,$$

или

$$H(t, \theta) = I(t - \theta)h(t, \theta), \quad (5.1.15)$$

где $I(t - \theta)$ — функция единичного скачка (см. (1.6.2)), а $h(t, \theta)$ — непрерывная функция, которую также называют функцией Грина.

2. Если система не меняется (т.е. параметры ее постоянны), то все моменты времени эквивалентны, и отклик системы в момент t_2 на δ -импульс, подействовавший в момент t_1 , должен быть одним и тем же для всех t_1 и t_2 , соответствующих фиксированной величине интервала $t_2 - t_1$. Иначе говоря, для систем с постоянными параметрами функция Грина зависит только от разности аргументов:

$$H(t, \theta) = H(t - \theta), \quad h(t, \theta) = h(t - \theta). \quad (5.1.16)$$

3. Принимая во внимание (15), интеграл Дюамеля (14) можно переписать так:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\theta)h(t, \theta) d\theta = \int_0^{\infty} h(t, t - \theta)f(t - \theta) d\theta. \quad (5.1.17)$$

В случае систем с постоянными параметрами, учитывая (16), имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t h(t - \theta)f(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} h(\theta)f(t - \theta) d\theta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)f(t - \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

Таким образом, если внешняя сила $F(t)$ задана, то вынужденные колебания линейной системы определяются выражениями (18) или (14). Частотное и временное представления полностью эквивалентны (рис. 5.1), однако частотное представление (8) иногда удобнее для описания колебаний в установившемся режиме, а временное (14) — при рассмотрении переходных процессов.



Рис. 5.1. Функция Грина $H(t, \theta)$ и коэффициент передачи $K(\omega, t)$ определяют колебания $x(t)$, возникающие в линейной системе под действием внешней силы $F(t)$

Между частотной функцией $K(\omega, t)$ и функцией Грина $H(t, \theta)$ имеется однозначная связь. Чтобы ее установить, перепишем (14) в виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t - \theta)f(t - \theta) d\theta$$

и подставим сюда спектральное разложение (7) для $f(t)$. В результате получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\theta}e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t - \theta)e^{-i\omega\theta} d\theta. \quad (5.1.19)$$

Сравнивая (8) и (19), находим, что $K(\omega, t)$ и $H(t, \theta)$ связаны преобразованием Фурье:

$$K(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t, t - \theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (5.1.20)$$

$$H(t, t - \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega, t) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (5.1.21)$$

Согласно (16), (20) и (21) и в случае систем с постоянными параметрами

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} h(\theta) e^{-i\omega\theta} d\theta, \quad (5.1.22)$$

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (5.1.23)$$

Свободные колебания. Свободные колебания не связаны с внешними силами и определяются начальными условиями. Как будет показано далее, математически начальные условия всегда можно представить в виде эквивалентной силы (см., например, (45), (46)). В некоторых задачах такой подход имеет свои преимущества, давая возможность учитывать начальные (а также граничные) условия и внешнее воздействие в рамках единого описания.

Функция Грина линейных систем с сосредоточенными параметрами. Колебания в линейных системах с сосредоточенными параметрами описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, например:

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^n x = f(t), \quad (5.1.24)$$

а функция Грина может быть выражена через свободные колебания

$$y_1(t), \dots, y_N(t), \quad (5.1.25)$$

являющиеся линейно независимыми решениями соответствующего (24) однородного уравнения

$$\sum_{n=0}^N a_n(t) \left(\frac{d}{dt} \right)^n y = 0. \quad (5.1.26)$$

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала уравнение первого порядка

$$a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = f(t) \quad (5.1.27)$$

и будем искать его решение в виде

$$x(t) = C_1(t)y_1(t), \quad (5.1.28)$$

где $C_1(t)$ — неизвестная пока функция, а $y_1(t)$ — решение однородного уравнения

$$a_1(t)\dot{y}_1 + a_0(t)y_1 = 0. \quad (5.1.29)$$

Подставив (28) в (27), получим

$$a_1\dot{C}_1y_1 + C_1(a_1\dot{y}_1 + a_0y_1) = f(t),$$

или, если учесть (29), то $a_1\dot{C}_1y_1 = f$, откуда имеем

$$C_1(t) = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta) d\theta}{a_1(\theta)y_1(\theta)}. \quad (5.1.30)$$

В результате получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f(\theta) \frac{y_1(t) d\theta}{a_1(\theta)y_1(\theta)}. \quad (5.1.31)$$

Из сравнения (17) и (31) следует, что для систем первого порядка функция Грина следующим образом выражается через функцию y_1 , описывающую свободные колебания:

$$h(t, \theta) = \frac{y_1(t)}{a_1(\theta)y_1(\theta)}. \quad (5.1.32)$$

Для уравнения второго порядка

$$a_1(t)\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_0(t)x = f(t) \quad (5.1.33)$$

решение ищем в виде

$$x = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t). \quad (5.1.34)$$

Дифференцируя (34), имеем

$$\dot{x} = \dot{C}_1y_1 + \dot{C}_2y_2 + C_1\dot{y}_1 + C_2\dot{y}_2. \quad (5.1.35)$$

Выразив в (34) неизвестную функцию x через две новых (C_1 и C_2), мы можем задаться одним произвольным соотношением между C_1 и C_2 . Пусть

$$\dot{C}_1y_1 + \dot{C}_2y_2 = 0. \quad (5.1.36)$$

Тогда

$$\dot{x} = C_1\dot{y}_1 + C_2\dot{y}_2, \quad \ddot{x} = \dot{C}_1\dot{y}_1 + \dot{C}_2\dot{y}_2 + C_1\ddot{y}_1 + C_2\ddot{y}_2. \quad (5.1.37)$$

Подставляя (34), (37) в исходное уравнение (33), получим

$$\dot{C}_1\dot{y}_1 + \dot{C}_2\dot{y}_2 = f/a_2. \quad (5.1.38)$$

Из (36), (38) следует, что

$$\dot{C}_1 = -\frac{fy_2/a_2}{y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2}, \quad \dot{C}_2 = \frac{fy_1/a_2}{y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2},$$

т. е.

$$C_1(t) = -\int_{-\infty}^t \frac{fy_2}{a_2} \frac{d\theta}{y_1y_2 - \dot{y}_1y_2}, \quad C_2(t) = \int_{-\infty}^t \frac{fy_1}{a_2} \frac{d\theta}{y_1y_2 - \dot{y}_1y_2},$$

и согласно (34) искомое решение уравнения (33) имеет вид

$$x(t) = \int_{-\infty}^t \frac{f(\theta)}{a_2(\theta)} \frac{y_1(\theta)y_2(t) - y_2(\theta)y_1(t)}{y_1(\theta)\dot{y}_2(\theta) - \dot{y}_1(\theta)y_2(\theta)} d\theta. \quad (5.1.39)$$

Сравнивая (17) и (39), находим функцию Грина для уравнения второго порядка:

$$h(t, \theta) = \frac{1}{a_2(\theta)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & y_2(\theta) \\ \dot{y}_1(\theta) & \dot{y}_2(\theta) \end{vmatrix}}. \quad (5.1.40)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно рассмотреть общий случай и показать, что функция Грина, соответствующая уравнению N -го порядка (24), следующим образом выражается через решения однородного уравнения (26) и их производные:

$$h(t, \theta) = \frac{1}{a_N(\theta)} \frac{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_n(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-2)}(\theta) & \dots & y_N^{(N-2)}(\theta) \\ y_1(t) & \dots & y_N(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)}(\theta) & \dots & y_N^{(N-1)}(\theta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\theta) & \dots & y_N(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)}(\theta) & \dots & y_N^{(N-1)}(\theta) \end{vmatrix}}. \quad (5.1.41)$$

При этом

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m h(t, \theta)\Big|_{t=\theta} = \begin{cases} 0, & m = 0, 1, 2, \dots, N-2, \\ \frac{1}{a_N(\theta)}, & m = N-1. \end{cases} \quad (5.1.42)$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, изменение во времени вронскиана, стоящего в знаменателе выражения (41), определяется коэффициентами при двух старших производных уравнения (26):

$$\begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_N \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(N-1)} & \dots & y_N^{(N-1)} \end{vmatrix} = \Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\left\{-\int_{t_0}^t \frac{a_{N-1}(\theta)}{a_N(\theta)} d\theta\right\}. \quad (5.1.43)$$

При $N = 1$ и $N = 2$ выражение (42) совпадает, соответственно, с (32) и (40).

Замена начальных условий эквивалентной внешней силой. Свободные колебания определяются как частное решение уравнения (26), соответствующее определенному начальному состоянию системы (начальным условиям). Обычно поступают так: находят общее решение для (26), содержащее N произвольных постоянных (N — порядок дифференциального уравнения), а затем подбирают эти постоянные так, чтобы заданные начальные условия были удовлетворены.

Познакомимся с другим подходом к решению этой задачи, который иногда более удобен, чем традиционный. Он основан на том, что граничные условия вводятся в само дифференциальное уравнение как некоторая эквивалентная внешняя сила [2].

Пусть, например, нас интересуют свободные колебания, описываемые уравнением

$$a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0 \quad (5.1.44)$$

с начальным условием $y(t=0) = y_0$. Поскольку речь идет лишь о поведении y в области $t > 0$, то вместо y достаточно рассмотреть функцию

$$y^+(t) = I(t)y(t), \quad (5.1.45)$$

совпадающую с y при $t > 0$ и равную нулю при $t < 0$. В (45) $I(t)$ — функция единичного скачка (1.6.2). Дифференцируя (45) и учитывая, что $\dot{I}(t) = \delta(t)$, получим

$$\dot{y}^+ = \delta(t)y(t) + I(t)\dot{y}(t) = \delta(t)y_0 + I(t)\dot{y}. \quad (5.1.46)$$

Если умножить (44) на $I(t)$, то с учетом (46) для заменяющей $y(t)$ функции y^+ получим неоднородное уравнение

$$a_1(t)\dot{y}^+ + a_0(t)y^+ = y_0 a(t) \delta(t) = a(0)y_0 \delta(t), \quad (5.1.47)$$

правая часть которого учитывает начальное значение y_0 . Если исходное уравнение — второго или более высокого порядка, то его удобно заменить предварительно на систему уравнений первого порядка. Пусть, к примеру,

$$a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = 0, \quad y(t=0) = y_0, \quad \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0. \quad (5.1.48)$$

Полагая $w = \dot{y}$, получим вместо (48)

$$\dot{y} = w, \quad a_2(t)\dot{w} + a_1(t)w + a_0(t)y = 0. \quad (5.1.49)$$

Домножая (49) на $I(t)$, для «односторонних» функций $y^+ = I(t)y$, $w^+ = I(t)w$ получим систему уравнений первого порядка

$$a_2(t)\dot{w}^+ + a_1(t)w^+ + a_0(t)y^+ = a_2(0)\dot{y}_0\delta(t),$$

$$\dot{y}^+ - w^+ = y_0\delta(t),$$

$$a_2(t)\dot{y}^+ + a_1(t)y^+ + a_0(t)y^+ = y_0\delta(t) + [a_1(0)y_0 + a_2(0)\dot{y}_0]\delta(t). \quad (5.1.50)$$

Преимущество уравнений (47) и (50) по сравнению с (44) и (48) состоит в том, что для их решения можно использовать интеграл Дюамеля или другие методы, развитые для анализа вынужденных колебаний.

Переход к односторонним функциям вида (45) может быть эффективно использован и в волновых задачах.

§ 2. Отклик линейной системы на шумовое воздействие

Преобразование корреляционных функций и спектров. Из результатов § 1 следует, что колебания $x(t)$, совершаемые линейной системой под действием некоторой случайной силы

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.2.1)$$

можно непосредственно выразить через силу или ее амплитудный спектр:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\theta) H(t, \theta) d\theta = \quad (5.2.2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{\omega} K(\omega, t) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.2.3)$$

Статистические характеристики процесса x на «выходе» системы (см. рис 5.1) можно получить, усредняя (2) или (3). Для простоты предположим, что рассматривается система с постоянными и вещественными параметрами¹⁾, когда

$$H(t, \theta) = H^*(t, \theta) = H(t - \theta), \quad K(\omega, t) = K(\omega) = K^*(-\omega), \quad (5.2.4)$$

а внешняя сила $\xi(t)$ на «входе» системы — стационарный шум, так что

$$\bar{\xi} = 0, \quad \overline{\xi\xi_{\tau}} = B_{\text{вх}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (5.2.5)$$

$$\langle \xi_{\omega} \xi_{\omega'} \rangle = \langle \xi_{\omega} \xi_{-\infty}' \rangle = G_{\text{вх}}(\omega) \delta(\omega + \omega'), \quad \langle \xi_{\omega} \rangle = 0. \quad (5.2.6)$$

В этом случае процесс $x(t)$ также стационарен и для него, по аналогии с (5), можно написать

$$\overline{xx_{\tau}} = B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вых}}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2.7)$$

¹⁾ То есть постоянны и вещественны коэффициенты a_n в (5.1.24).

С другой стороны, усредняя x и xx_τ с учетом (4), (6), получим

$$\bar{x} = 0, \quad B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вх}}(\omega) |K(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2.8)$$

Сравнение (7) и (8) показывает, что спектральные плотности на входе и выходе линейной системы с постоянными параметрами связаны через коэффициент передачи:

$$G_{\text{вых}}(\omega) = |K(\omega)|^2 G_{\text{вх}}(\omega). \quad (5.2.9)$$

Полная интенсивность, или дисперсия, флуктуаций на выходе системы равна

$$\overline{x^2} = \sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_{\text{вых}}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (5.2.10)$$

В общем случае линейной системы с переменными параметрами эта дисперсия будет зависеть от времени:

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega, t)|^2 G_{\text{вх}}(\omega) d\omega. \quad (5.2.11)$$

Согласно (8) входному белому шуму со спектральной интенсивностью $1/2\pi$ соответствует на выходе корреляционная функция

$$B_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 e^{-i\omega\tau} d\omega. \quad (5.2.11a)$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$|K(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (5.2.12)$$

Подставляя (12) и

$$G_{\text{вх}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{вх}}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$$

в (8) и интегрируя по ω , находим, что связь между корреляционными функциями шумов на входе и выходе линейной системы имеет интегральный вид:

$$B_{\text{вых}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau - \tau')B_{\text{вх}}(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\tau')B_{\text{вх}}(\tau + \tau') d\tau', \quad (5.2.13)$$

т. е. она сложнее, чем чисто алгебраическое соотношение (9) между спектрами.

Фильтрация шума избирательными системами. Согласно (9) при прохождении шума через линейную систему подчеркиваются те части спектра $G_{\text{вх}}(\omega)$, которым отвечают наибольшие значения функции $|K(\omega)|^2$ ¹⁾. В этом состоит эффект фильтрации. Об устройствах, изменяющих форму спектра шума, говорят как о фильтрах или избирательных системах.

Рис. 5.2 иллюстрирует два предельных случая. Если спектр $G_{\text{вх}}(\omega)$ мало меняется в области максимума резонансной кривой $|K(\omega)|^2$, то

$$G_{\text{вых}}(\omega) \sim |K(\omega)|^2 \quad (5.2.14)$$

и эффект фильтрации выражен наиболее сильно (рис. 5.2, а). Наоборот, если функция $|K(\omega)|^2$ почти не меняет своей величины в пределах основной части спектра $G_{\text{вх}}(\omega)$, то фильтрующее действие системы практически не проявляется; при этом

$$G_{\text{вых}}(\omega) \sim G_{\text{вх}}(\omega) \quad (5.2.15)$$

(рис. 5.2, б).

Рассмотрим некоторые часто встречающиеся линейные фильтры.

RC-фильтр. Схемы таких фильтров, состоящих из последовательно или параллельно соединенных емкости и сопротивления, показаны на рис. 5.3. Используя закон Кирхгофа, получим для параллельной схемы

$$\dot{q} + \frac{q}{RC} = i(t), \quad (5.2.16)$$

где q — заряд на обкладках конденсатора, i — заданный ток. Последовательная схема описывается таким же уравнением с $i = \mathcal{E}/R$.

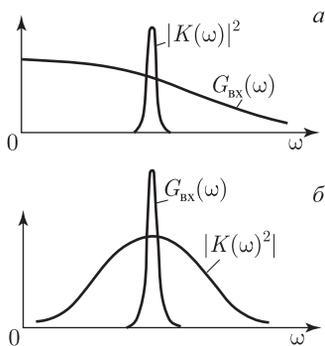
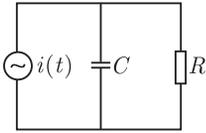


Рис. 5.2. Два предельных случая:

резонансная кривая $|K(\omega)|^2$ является более узкой (а) или более широкой (б), чем спектр $G_{\text{вх}}(\omega)$ входного шума. Фильтрующие свойства линейной системы проявляются только в случае (а)

¹⁾ Функция $|K(\omega)|^2$ описывает резонансную кривую линейной системы, и ее максимумы приходится на резонансные частоты линейной системы.



Соответствующее (16) уравнение свободных колебаний

$$\dot{y} + \alpha y = 0, \quad \alpha = 1/RC,$$

имеет решение

$$y(t) = e^{-\alpha(t-\theta)}, \quad (5.2.17)$$

где $1/\alpha = T = RC$ — время релаксации.

Считая i «входом», а q «выходом» системы и подставляя (17) в (5.1.32), найдем функцию Грина:

$$h(t, \theta) = h(t - \theta) = e^{-\alpha(t-\theta)}. \quad (5.2.18)$$

Интеграл Дюамеля (5.1.18) при этом запишется как

$$q(t) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\theta} i(t - \theta) d\theta. \quad (5.2.18a)$$

Чтобы найти коэффициент передачи $K(\omega)$, нужно положить в (16) $i(t) = e^{i\omega t}$ и $q(t) = K(\omega)e^{i\omega t}$, что дает

$$K(\omega) = \frac{1}{\alpha + i\omega}, \quad |K(\omega)|^2 = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (5.2.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \pi/\alpha. \quad (5.2.19a)$$

Мы видим, что величина $|K(\omega)|^2$ максимальна при $\omega = 0$, а с увеличением ω функция $|K(\omega)|^2$ плавно уменьшается. Таким образом, RC -фильтр обладает способностью выделять низкие частоты. Подставив (19) в (11a), найдем

$$B_0(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}/2\alpha.$$

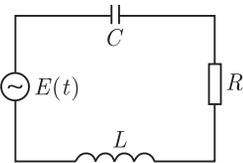


Рис. 5.4. Последовательная схема колебательного контура

Колебательный контур. Колебательный контур состоит из емкости C , индуктивности L и сопротивления R (рис. 5.4). Напряжение x на обкладках конденсатора описывается уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \mathcal{E}(t) = f(t), \quad (5.2.20)$$

где $2\alpha = R/L$, $\omega_0^2 = 1/LC$. В параллельной схеме (рис. 5.5) заданным является сторонний ток $i(t)$. Динамическое уравнение, описывающее изменение тока $i_L = x$ через индуктивность, аналогично (20):

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 i(t) = f(t). \quad (5.2.21)$$

Найдем функцию Грина колебательного контура. Из уравнения свободных колебаний

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

следует, что

$$y_{1,2} = e^{-\alpha t \pm i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (5.2.22)$$

Подставив (22) в (5.1.40), получим

$$\begin{aligned} h(t, \theta) &= h(t - \theta) = \\ &= \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha(t-\theta)} \sin \omega_1(t - \theta). \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Запись решения уравнений (20), (21) в виде интеграла Дюамеля (5.1.18) имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^\infty e^{-\alpha\theta} \sin \omega_1\theta \cdot f(t - \theta) d\theta. \quad (5.2.24)$$

Полагая в (20), (21) $f(t) = e^{i\omega t}$, $x(t) = e^{i\omega t} K(\omega)$, найдем частотную передаточную функцию контура

$$K(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \quad (5.2.25)$$

и резонансную кривую

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (5.2.26)$$

(рис. 5.6). Заметим, что

$$\int_{-\infty}^\infty |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2\alpha\omega_0^2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \omega^2 |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{2\alpha}. \quad (5.2.26a)$$

Анализ выражения (26) показывает, что наиболее сильный отклик контура соответствует резонансной частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} < \omega_1 < \omega_0.$$

При этом

$$|K(\omega_{\text{рез}})|^2 = |K(\omega)|_{\text{max}}^2 = \frac{1}{4\alpha^2\omega_1^2}. \quad (5.2.27)$$

Уменьшение значения резонансной кривой в два раза по сравнению с максимальным значением приходится на частоты

$$\omega_{2,3} = \sqrt{\omega_{\text{рез}}^2 \mp 2\alpha\omega_1}, \quad (5.2.28)$$

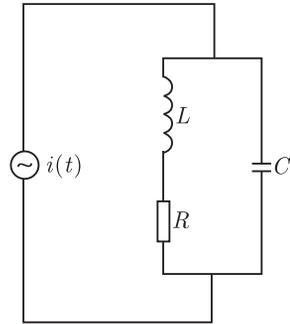


Рис. 5.5. Параллельная колебательного контура схема

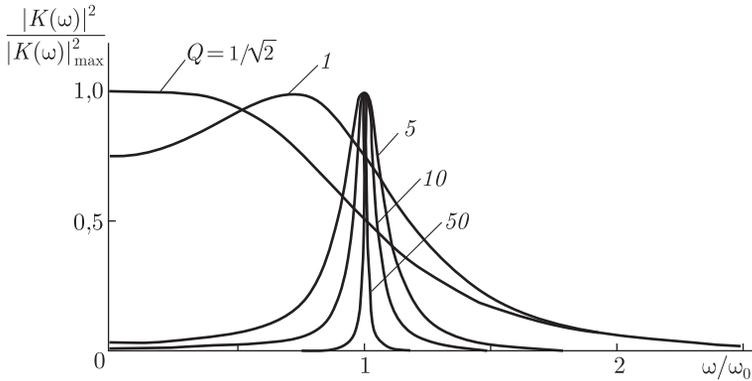


Рис. 5.6. Вид резонансных кривых колебательного контура при различных значениях добротности $Q = \omega_0/2\alpha$

а площадь под кривой равна (см. (26а))

$$\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{4\alpha\omega_0^2}. \quad (5.2.29)$$

Корреляционная функция (11а), соответствующая действию на контур белого шума, имеет вид

$$\begin{aligned} B_0(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \\ &= \frac{e^{-\alpha|\tau|}}{4\alpha\omega_0^2} \left(\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1\tau \right). \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

С уменьшением параметра α , связанного с активными потерями в контуре, резонансная кривая делается более высокой и узкой. Из приведенных выше выражений с точностью до величин первого порядка по $\alpha/\omega_0 \ll 1$ и при $\omega \approx \omega_{\text{рез}}$ находим

$$\begin{aligned} \omega_1 &\approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0, \quad \omega_{\text{рез}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0, \\ |K(\omega)|_{\text{max}} &= \frac{1}{4\alpha^2\omega_0^2}, \quad \omega_{2,3} = \omega_0 \mp \alpha, \\ |K(\omega)|^2 &= \frac{1}{4\omega_0^2} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_0)^2 + \alpha^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

Высокودобротный¹⁾ ($Q \gg 1$) резонансный контур будет выделять из спектра входного шума ту область, которая расположена около резонансной частоты $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$ в пределах относительно узкой полосы, приблизительно равной

$$\Delta\omega_{\text{рез}} = \omega_3 - \omega_2 = 2\alpha \ll \omega_0. \quad (5.2.32)$$

Анализ вынужденных колебаний с помощью укороченных уравнений. Если узкополосный процесс $x(t)$ на выходе контура записать через комплексную амплитуду $A(t)$ или квадратурные компоненты $a(t)$ и $b(t)$, то A , a и b будут медленными функциями времени:

$$x(t) = \frac{1}{2} A(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} = a(t) \cos \omega_0 t - b(t) \sin \omega_0 t, \quad (5.2.33)$$

$$\frac{\dot{A}}{A} \sim \frac{\dot{a}}{a} \sim \frac{\dot{b}}{b} \sim \frac{\Delta\omega_{\text{рез}}}{\omega_0} \ll 1.$$

Представление узкополосного процесса в виде (33) широко используется в радиофизике и оптике, так как это обычно существенно упрощает математическое решение задачи. Дело в том, что для функций A , a и b могут быть получены приближенные (так называемые укороченные) дифференциальные уравнения, более простые, чем уравнение для x , что связано с медленностью этих функций.

Иногда укороченные уравнения выписываются не для одной комплексной функции A , а для однозначно связанных с ней двух вещественных функций: огибающей ρ и фазы φ или квадратурных компонент a и b :

$$A = \rho e^{i\varphi} = a + ib.$$

Рассмотрим методику вывода укороченных уравнений на примере колебательного контура. Дифференцируя (33), находим

$$\dot{x} = \frac{1}{2} (\dot{A} + i\omega_0 A)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad \ddot{x} = \frac{1}{2} (\ddot{A} + 2i\omega_0 \dot{A} - \omega_0^2 A)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.},$$

так что

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{2} [\ddot{A} + 2\alpha\dot{A} + 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A)]e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.} \quad (5.2.34)$$

Записав правую часть уравнений (20), (21) в виде, аналогичном (33):

$$f(t) = \frac{1}{2} F(t)e^{i\omega_0 t} + \text{к. с.}, \quad (5.2.35)$$

подставив (34), (35) в (20), (21), получим точное уравнение для A :

$$\ddot{A} + 2\alpha\dot{A} + 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A) = F(t). \quad (5.2.36)$$

¹⁾ Добротностью контура называется безразмерный параметр $Q = \omega_0/2\alpha$.

Оно не проще, чем уравнения (20), (21), однако мы еще не воспользовались предполагаемой медленностью $A(t)$. Учитывая это, приходим к следующим оценкам:

$$\dot{A} \sim \alpha A, \quad \ddot{A} \sim \alpha^2 A, \quad \ddot{A} + 2\alpha\dot{A} \sim \alpha^2 A, \quad 2i\omega_0(\dot{A} + \alpha A) \sim \omega_0\alpha A.$$

Следовательно, первые два члена в (36) в $\omega_0/\alpha \gg 1$ раз меньше остальных и ими можно пренебречь. В результате получаем укороченное уравнение

$$\dot{A} + \alpha A = \frac{F(t)}{2i\omega_0}, \quad (5.2.37)$$

порядок которого на единицу меньше порядка исходного уравнения, которому удовлетворяет функция x .

Корреляционные характеристики комплексной амплитуды $F(t)$ в (37) связаны с характеристиками силы $f(t)$ (35): если $f(t)$ — вещественный стационарный квазигармонический случайный процесс, причем

$$\langle f \rangle = 0, \\ \langle f f_\tau \rangle = \langle f f_\tau^* \rangle = \sigma^2 [p(\tau) \cos \omega_0 \tau + q(\tau) \sin \omega_0 \tau],$$

то

$$\langle F \rangle = 0, \quad \langle F F_\tau \rangle = 0, \quad \langle F F_\tau^* \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2, \quad (5.2.38)$$

$$\langle F F_\tau^{**} \rangle = \frac{1}{2} \sigma^2 [p(\tau) - iq(\tau)] \quad (5.2.39)$$

(см. (2.3.20)). Аналогичное соответствие существует между спектральными характеристиками F и f : если

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad \langle f f_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega, \quad (5.2.40) \\ \langle f_\omega f_{\omega'} \rangle = G(\omega) \delta(\omega + \omega'), \quad \langle f_\omega f_{\omega'}^* \rangle = G(\omega) \delta(\omega - \omega'),$$

то

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad \langle F F_\tau^* \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G_F(\omega) e^{-i\omega \tau} d\omega, \quad (5.2.41)$$

$$\langle F_\omega F_{\omega'}^* \rangle = G_F(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad \langle F_\omega F_{\omega'} \rangle = 0, \quad (5.2.42)$$

где $G_F(\omega) = 1/2 G^+(\omega_0 + \omega)$ — смещенный на ω_0 спектр по положительным частотам силы f (см. (2.3.21)). Подобными же соотношениями связаны процесс $x(t)$ и его комплексная амплитуда A .

Используем теперь эти соотношения при решении уравнения (37). Если представить A и F в виде интегралов Фурье (41), то получим

$$A_\omega = \frac{F_\omega}{2i\omega_0(i\omega + \alpha)}.$$

Отсюда согласно (42) следует соотношение между спектральными плотностями на входе и выходе контура

$$G_A(\omega) = \frac{G_F(\omega)}{4\omega_0^2(\omega^2 + \alpha^2)}. \quad (5.2.43)$$

В общем случае

$$G_A(\omega) = |K(\omega)|^2 G_F(\omega), \quad (5.2.44)$$

где $K(\omega)$ — частотная передаточная функция, соответствующая укороченному уравнению.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Если $G_F(\omega)$ как функция ω меняется медленнее, чем $|K(\omega)|^2$, то без большой погрешности можно заменить в (44) $G_F(\omega)$ на $G_F(0)$, что эквивалентно замене $F(t)$ в укороченном уравнении на δ -коррелированный случайный процесс — белый шум. В частном случае (43) для такой замены необходимо, чтобы спектр $G_F(\omega)$ мало менялся при изменении ω на величину порядка α (т. е. в пределах резонансной кривой контура). Это же условие можно, очевидно, сформулировать иначе: время корреляции комплексной амплитуды входного шума должно быть достаточно малым по сравнению со временем релаксации свободных колебаний в контуре.

Установление шумовых колебаний в линейном осцилляторе — пример нестационарного случайного процесса. Для описания нестационарных эффектов, например случайных переходных процессов, удобно использовать временной подход и исходить из (5.1.18):

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) f(t - \theta) d\theta. \quad (5.2.45)$$

Предположим, что стационарный шум $\xi(t)$ ($\bar{\xi} = 0$, $\overline{\xi\xi_\tau} = B_{\text{вх}}(\tau)$) начал действовать на систему в момент $t = 0$. Полагая в (45) $f(t) = I(t)\xi(t)$, получим

$$x(t) = \int_0^t h(\theta)\xi(t - \theta) d\theta. \quad (5.2.46)$$

Дисперсия шумовых колебаний на выходе системы в этом случае будет зависеть от времени: возводя (46) в квадрат и усредняя, найдем

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \overline{x^2} = \int_0^t \int_0^t d\theta d\theta' h(\theta)h(\theta')B_{\text{вх}}(\theta - \theta'). \quad (5.2.47)$$

Если линейная система устойчива, $\lim_{\theta \rightarrow \infty} h(\theta) = 0$, то с течением времени дисперсия (47) будет приближаться к своему установившемуся значению:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty d\theta d\theta' h(\theta)h(\theta')B_{\text{ВХ}}(\theta - \theta') = \\ &= \int_{-\infty}^\infty |K(\omega)|^2 G_{\text{ВХ}}(\omega) d\omega.\end{aligned}\quad (5.2.48)$$

Как пример рассмотрим эволюцию во времени дисперсии шума на выходе колебательного контура, на который при $t = 0$ начал действовать белый шум. Полагая в (47) $B_{\text{ВХ}}(\tau) = 2\pi G_{\text{ВХ}}\delta(\tau)$ и $h(\theta) = \frac{1}{\omega_1} e^{-\alpha\theta} \sin \omega_1\theta$ (см. (23)), получим

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2(t) = \frac{\pi G_{\text{ВЫХ}}}{2\alpha\omega_0^2} - \frac{\pi G_{\text{ВХ}}}{2\omega_1^2} e^{-2\alpha t} \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{\omega_1 \sin 2\omega_1 t - \alpha \cos 2\omega_1 t}{\omega_0^2} \right]. \quad (5.2.49)$$

В случае контура с малыми потерями можно пренебречь малыми осциллирующими членами порядка $\alpha/\omega_0 \ll 1$; при этом

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2(t) = \sigma_{\text{ВЫХ}}^2(1 - e^{-2\alpha t}), \quad (5.2.50)$$

где $\sigma_{\text{ВЫХ}}^2$ — стационарное значение дисперсии (48):

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{\pi G_{\text{ВХ}}}{2\alpha\omega_0^2}. \quad (5.2.51)$$

Выражение (50) показывает, что время «установления стационарности» выходного шума — порядка времени затухания свободных колебаний (α^{-1}).

Линейная система как усредняющее устройство. Рассмотренную в § 4 гл. 1 операцию временного усреднения можно интерпретировать как прохождение случайного процесса через линейный фильтр (идеальный интегратор) с частотной характеристикой

$$|K(\omega)|^2 = \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2$$

(см. (1.4.2)). Как было показано в § 4 гл. 1, дисперсия σ_T^2 флуктуаций на выходе этого интегратора уменьшается с ростом времени усреднения T и в пределе $T \gg \tau_k$

$$\sigma_T^2 = 2\pi G(0)/T, \quad (5.2.52)$$

где $G(\omega)$ — спектральная плотность флуктуации входного шума, а τ_k — его время корреляции. На спектральном языке условие $T \gg \tau_k$ означает, что полоса пропускания интегратора гораздо уже, чем ширина спектра шума (рис. 5.7).

В общем случае, когда в качестве интегратора используется произвольный линейный фильтр с коэффициентом передачи $K(\omega)$, дисперсия на выходе интегратора равна

$$\sigma_T^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.2.53)$$

Сравнивая (52) и (53), можно оценить эффективное время усреднения фильтра:

$$T_{\text{эфф}} = \frac{2\pi G(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (5.2.54)$$

Как следует из (54), величина $T_{\text{эфф}}$ зависит как от вида фильтра, так и от формы спектра шума. В частности, если входной шум можно считать белым и в качестве усредняющего устройства взять RC -фильтр, то получим

$$T_{\text{эфф}} = 2T,$$

где $T = RC$ — постоянная времени RC -фильтра (см. (17)).

Белый шум и «черный ящик» (корреляционная идентификация линейных систем). Структура линейной системы полностью определяется коэффициентом передачи $K(\omega)$ или функцией Грина $h(\theta)$. Каждая из этих характеристик описывает реакцию системы на регулярное (неслучайное) воздействие определенного типа — гармоническое или δ -импульс. Для измерения этих характеристик могут быть использованы также чисто «шумовые» методы.

Рассмотрим линейную систему неизвестного вида («черный ящик»). Предположим, что на вход системы подан белый шум $\xi(t)$, возбуждающий в системе вынужденные колебания $x(t)$. Предположим сначала, что в этих условиях измерена корреляционная функция шума на выходе системы, т. е. $\langle xx_\tau \rangle = B(\tau)$. Применив к $B(\tau)$ преобразование Фурье, мы найдем спектральную интенсивность $G(\omega)$, которая согласно (9) при δ -коррелированном шуме ξ с точностью до постоянной совпадает с квадратом модуля коэффициента передачи:

$$G(\omega) \sim |K(\omega)|^2. \quad (5.2.55)$$

Таким образом, измеряя $\langle xx_\tau \rangle$ или непосредственно спектральную плотность шума на выходе системы $G(\omega)$, мы можем найти модуль комплексной функции $K(\omega)$, но фаза $K(\omega)$ остается неопределенной; возникает фазовая проблема.

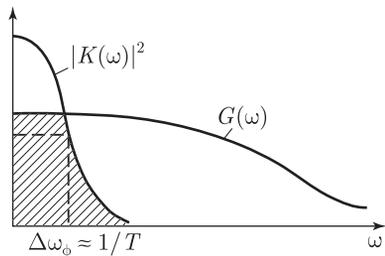


Рис. 5.7. Иллюстрация условий эффективного сглаживания стационарного шума интегратором

$|K(\omega)|^2$ — частотная характеристика интегратора, $G(\omega)$ — спектр шума. Флуктуации на выходе интегратора обусловлены спектральными компонентами шума, попадающими в заштрихованную область

Значительно более полную информацию о системе можно получить, если измерять корреляционную функцию $\langle \xi x_\tau \rangle$. Чтобы в этом убедиться, запишем x в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) \xi(t - \theta) d\theta.$$

Учитывая, что $\langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau)$, находим отсюда

$$\langle \xi x_\tau \rangle = \begin{cases} 2Dh(\tau), & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \quad (5.2.56)$$

т. е. корреляционная функция $\langle \xi x_\tau \rangle$ с точностью до постоянной совпадает с функцией Грина рассматриваемой линейной системы. Измерение $\langle \xi x_\tau \rangle$ полностью решает задачу идентификации системы. В частности, преобразуя функцию $\langle \xi x_\tau \rangle$ по Фурье, можно найти как модуль, так и фазу коэффициента передачи $K(\omega)$.

Этот метод представляет также большой интерес и в оптике, в задачах оптической спектроскопии.

§ 3. Распределение вероятностей на выходе линейной системы

Обратимся теперь к анализу факторов, определяющих распределение вероятностей на выходе линейной системы. Задача теперь ставится следующим образом: по заданному распределению вероятностей на входе мы должны определить распределение вероятностей на выходе системы.

Действие на систему гауссовского шума. Эта задача проще всего решается в том случае, когда шум на входе $\eta(t) = \bar{\eta}(t) + \tilde{\eta}(t)$ является гауссовским. Вследствие линейности системы шум на выходе также будет гауссовским в любой момент времени. Поэтому, определив (например, используя интеграл Дюамеля) два параметра: среднее значение процесса на выходе

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(\theta) H(t, \theta) d\theta$$

и его корреляционную функцию флуктуации

$$\langle \tilde{x} \tilde{x}_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta d\theta' \langle \tilde{\eta}(\theta) \tilde{\eta}(\theta') \rangle H(t, \theta) H(t + \tau, \theta'),$$

мы можем по формуле (1.2.44) построить, в принципе, любое многомерное распределение для процесса x на выходе линейной системы.

Нормализация флуктуации в узкополосных системах. Рассмотрим теперь случай, когда входной шум не является гауссовским. Чрез-

вычайно существенно, что во многих практически важных случаях распределение выходного шума оказывается очень близким к нормальному — независимо от закона распределения шума на входе.

Предположим, что спектр входного шума намного шире резонансной кривой линейной системы:

$$\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} \gg \Delta\omega_{\text{рез}} \quad (5.3.1)$$

(см. рис. 5.2, а). В этом случае входной шум допустимо рассматривать как белый, т. е. δ -коррелированный. Это дает возможность применить для определения $w(x)$ аппарат уравнения Фоккера — Планка. В частности, если линейная система описывается дифференциальным уравнением первого порядка (4.4.1), то, подставив в общее выражение для $w(x)$ (4.4.24)

$$a(x) = \alpha x, \quad b(x) = 1,$$

получим гауссовскую функцию распределения

$$w(x) \sim \exp(-\alpha x^2/2D).$$

Этот результат может быть обобщен на случай нескольких связанных линейных уравнений с δ -коррелированными правыми частями (см. [7], с. 100), иначе говоря, гауссовское распределение вероятностей (1.2.44) описывает шумовые колебания в любой линейной системе с сосредоточенными параметрами, находящейся под действием δ -коррелированных сил.

Условие (1) относится к режиму стационарных шумовых колебаний. Однако замена реального шума на δ -коррелированный возможна и при наличии переходных процессов, если кроме (1) выполняется условие

$$\Delta\omega^{\text{вх}} \gg 1/t, \quad (5.3.2)$$

где t — полное время действия внешнего шума на систему. Рассмотрим, например, действие на RC -фильтр шума с характеристиками

$$\begin{aligned} B_{\text{вх}}(\tau) &= \sigma_{\text{вх}}^2 e^{-\beta|\tau|}, & G_{\text{вх}}(\omega) &= \frac{G_0\beta^2}{\beta^2 + \omega^2}, \\ \sigma_{\text{вх}}^2 &= \pi\beta G_0, & \Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{вх}} &\approx \beta. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Дисперсия шумовых колебаний на выходе этого фильтра с учетом переходных процессов будет равна согласно (5.2.18) и (3)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2(t) &= \sigma_{\text{вх}}^2 \int_0^t \int_0^t d\theta_1 d\theta_2 e^{-\alpha(\theta_1+\theta_2)-\beta|\theta_1-\theta_2|} = \\ &= \pi\beta G_0 \left[\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)} - \frac{e^{-2\alpha t}}{\alpha(\beta-\alpha)} + \frac{2e^{-(\alpha+\beta)t}}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

С другой стороны, при действии на RC -фильтр белого шума с корреляционной функцией $B_{\text{вх}}(\tau) = 2\pi G_0 \delta(\tau)$

$$\sigma_{\text{вых}}^2(t) = \frac{\pi G_0}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}). \quad (5.3.5)$$

Нетрудно видеть, что для совпадения (4) и (5) кроме неравенства $\beta \gg \alpha$, эквивалентного (1), необходимо выполнение неравенства $\beta t \gg 1$, соответствующего (2).

Эффект нормализации шумовых колебаний в линейной системе можно также наглядно пояснить, используя центральную предельную теорему. Запишем опять шумовые колебания в линейной системе в виде интеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\theta) \eta(t - \theta) d\theta \approx \int_0^{\tau_{\text{рел}}} h(\theta) \eta(t - \theta) d\theta, \quad (5.3.6)$$

где

$$\tau_{\text{рел}} \sim 1/\Delta\omega_{\text{рез}}$$

— характерное время релаксации системы (т. е. время затухания свободных колебаний). Введя время корреляции входного шума

$$\tau_{\text{к}} \sim 1/\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{БХ}},$$

соотношение (1) можно переписать как

$$\tau_{\text{к}} \ll 1/\Delta\omega_{\text{рез}}. \quad (5.3.7)$$

Будем считать, что условие (7) выполняется с большим запасом, и выберем интервал времени τ такой, что

$$\tau_{\text{к}} \ll \tau \ll \tau_{\text{рез}}. \quad (5.3.8)$$

Представим теперь интеграл в (6) в виде суммы интегралов, в каждом из которых время интегрирования равно τ . Имеем

$$x(t) = \sum_{n=1}^N x_n(t), \quad (5.3.9)$$

где

$$x_n(t) \approx \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} h(\theta) \eta(t - \theta) d\theta \approx h(n\tau) \int_0^{\tau} \eta(t - \theta) d\theta \quad (5.3.10)$$

и согласно (8)

$$N = \tau_{\text{рел}}/\tau \gg 1. \quad (5.3.11)$$

Можно показать, что при условии $\tau_{\text{к}} \ll \tau$ корреляция случайных величин x_m и x_n ($n \neq m$) очень мала (см. ниже), так что все x_n можно приближенно считать статистически независимыми. Задача о распределении суммы N таких величин рассматривалась в гл. 1, где было

показано, что распределение $w(x)$ при $N \rightarrow \infty$ стремится к гауссовскому.

При больших, но конечных значениях N распределение шума на выходе линейной системы будет тем ближе к гауссовскому, чем меньше (по сравнению с единицей) величина относительных кумулянтов \varkappa_n распределения $w(x)$. В частности, согласно (1.2.38) для коэффициентов асимметрии и эксцесса можно написать

$$\varkappa_3 = \varkappa_{ac} \sim 1/\sqrt{N}, \quad \varkappa_4 = \varkappa_{экс} \sim 1/N. \quad (5.3.12)$$

Оценивая корреляционную связь между различными x_n , заметим, что она будет наибольшей для ближайших членов суммы (9), т. е. для x_n и x_{n+1} . Если считать действующий на линейную систему шум чисто флуктуационным ($\bar{\eta} = 0$), то $\bar{x}_n = 0$ и коэффициент корреляции между x_n и x_{n+1} будет равен

$$R_{n, n+1} = \frac{\langle x_n x_{n+1} \rangle}{\sqrt{\langle x_n^2 \rangle \langle x_{n+1}^2 \rangle}} = \frac{\int_0^\tau \int_0^\tau d\theta_1 d\theta_2 B_{\text{вх}}(\tau + \theta_2 - \theta_1)}{\int_0^\tau \int_0^\tau d\theta_1 d\theta_2 B_{\text{вх}}(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (5.3.13)$$

Это выражение не зависит от n , и его нетрудно преобразовать к виду

$$R_{n, n+1} \equiv R = \frac{\int_0^\tau B_{\text{вх}}(2\tau - \theta)\theta d\theta + \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta)\theta d\theta}{2 \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta)(\tau - \theta) d\theta}. \quad (5.3.14)$$

При большой величине параметра τ/τ_k (см. (8)) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\tau B_{\text{вх}}(2\tau - \theta)\theta d\theta &\ll \pi\tau_0 G_{\text{вх}}(0), \\ \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta)\theta d\theta &\approx \int_0^\infty B_{\text{вх}}(\theta)\theta d\theta = \pi\tau_0 G_{\text{вх}}(0), \\ 2 \int_0^\tau B_{\text{вх}}(\theta)(\tau - \theta) d\theta &\approx 2\pi(\tau - \tau_0)G_{\text{вх}}(0), \end{aligned}$$

так что

$$R \approx \tau_0/2(\tau - \tau_0), \quad (5.3.15)$$

где τ_0 — характерное время запаздывания диффузионного процесса $\int_t^{t+\tau} \eta(\theta) d\theta$.

В интересующем нас случае $\tau_0 \approx \tau_k \approx 1/\Delta\omega_{\text{ш}}^{\text{BK}}$ (см. (2.5.7) и (2.5.8)). Учитывая (8), мы получаем из (15), что $R = \tau_0/2\tau \approx \tau_k/2\tau \ll 1$.

§ 4. Собственные шумы линейных систем. Тепловые шумы диссипативных линейных систем

Случайные вынужденные колебания в реальных линейных системах возникают и в отсутствие внешних сил; они связаны с наличием принципиально неустранимых источников собственных шумов. Тепловое движение свободных электронов в проводниках приводит к тому, что даже в отсутствие внешней э. д. с. в системе течет «тепловой» ток $i_T(t)$, носящий случайный характер.

Флуктуации электронной плотности, связанные с флуктуационными токами, приводят к появлению случайной разности потенциалов на концах проводника. Таким образом, любой двухполюсник Z , содержащий сопротивление и находящийся при температуре T , можно рассматривать как генератор случайной э. д. с. $\mathcal{E}_T(t)$ (рис. 5.8, а).

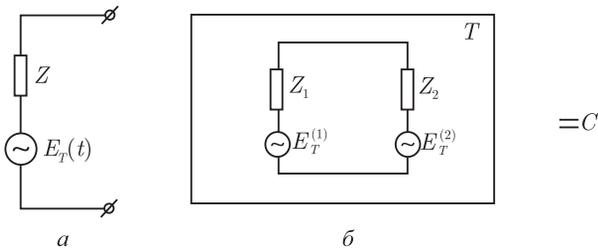


Рис. 5.8. К выводу теоремы Найквиста:

а) эквивалентная схема проводника с комплексным сопротивлением Z учитывает флуктуационную э. д. с. $\mathcal{E}_T(t)$, обусловленную тепловым движением электронов при температуре T ; б) схема двухполюсника в термостате

Собственные тепловые шумы создают принципиально неустранимые флуктуационные помехи в любой радиотехнической системе; поэтому первоочередной интерес представляют данные о статистических характеристиках случайного напряжения $\mathcal{E}_T(t)$ и случайного тока $i_T(t)$.

Рассчитать спектр (и корреляционную функцию) случайной э. д. с. можно на основе весьма общих положений термодинамики и статистики — речь идет о флуктуациях в системе, находящейся в равновесном состоянии.

Действительно, выясним прежде всего, какие заключения относительно свойств $\mathcal{E}_T(t)$ и $i_T(t)$ можно сделать из термодинамических соображений. Рассмотрим для этого замкнутую цепь, состоящую из двух двухполюсников с комплексными сопротивлениями (импеданса-

ми) $Z_{1,2} = R_{1,2} + iX_{1,2}$, изображенных на рис. 5.8, б. Пусть эта цепь помещена в термостат, находящийся при температуре T .

Каждый из источников $\mathcal{E}_T^{(1)}$, $\mathcal{E}_T^{(2)}$ вызывает ток в цепи; обозначим через P_{12} мощность, отдаваемую источником $\mathcal{E}_T^{(1)}$ в двухполюсник Z_2 , и соответственно через P_{21} — мощность, отдаваемую источником $\mathcal{E}_T^{(2)}$ в двухполюсник Z_1 . Введя спектральную плотность напряжения теплового шума $G_T(\omega)$, запишем

$$P_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 \frac{G_T^{(1)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega, \quad P_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_2 \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega, \quad (5.4.1)$$

где $Z = Z_1 + Z_2$. В силу второго начала термодинамики $P_{12} = P_{21}$ и, следовательно ¹⁾,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_2 \frac{G_T^{(1)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} R_1 \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{|Z|^2} d\omega. \quad (5.4.2)$$

Из (2) следует важное утверждение: если $R_n(\omega) \equiv 0$ ($n = 1, 2$), то и $G_T^{(n)}(\omega) = 0$, т. е. если двухполюсник не поглощает (не содержит активного сопротивления), спектральная плотность э. д. с. теплового шума на нем тождественно равна нулю.

Фактически в (2) можно приравнять и подынтегральные выражения. Действительно, представим себе, что между двухполюсниками включен чисто реактивный фильтр (не обладающий омическим сопротивлением) с сопротивлением $Z_3 = iX_3$. Тогда соотношение (2) сохранит свой вид, однако в знаменателе надо записать вместо $|Z|^2$ величину $|Z'|^2 = |Z + Z_3|^2$. Поскольку (2) должно быть выполнено при этом для любой характеристики фильтра $X_3(\omega)$, в (2) должны быть равны и подынтегральные выражения.

Поскольку выбор двухполюсников на схеме рис. 5.8 совершенно произволен, сказанное означает, что для любого двухполюсника

$$\frac{G_T^{(1)}(\omega)}{R_1(\omega)} = \frac{G_T^{(2)}(\omega)}{R_2(\omega)} = \dots = \frac{G_T^{(n)}(\omega)}{R_n(\omega)}. \quad (5.4.3)$$

В силу (3) отношение спектральной плотности теплового шума к действительной части сопротивления, в котором он генерируется (отношение «излучательной» и поглощательной способностей двухполюсника), оказывается универсальной константой, зависящей от частоты и температуры, $u(\omega, T)$, т. е.

$$G_T(\omega) = R(\omega)u(\omega, T) \equiv \operatorname{Re} Z(\omega)u(\omega, T). \quad (5.4.4)$$

¹⁾ Следующие ниже рассуждения принадлежат Горелику [8]; см. также [9–11].

Как же определить функцию $u(\omega, T)$?

Универсальность $u(\omega, T)$ позволяет для ее нахождения рассмотреть какую-нибудь простую «пробную» систему; полученный результат будет, очевидно, иметь общий характер.

Формула Найквиста в классической области. При $\kappa T \gg \hbar\omega$ (в классической области, здесь κ — постоянная Больцмана, \hbar — постоянная Планка), в соответствии с принципом равнораспределения энергии по степеням свободы, средняя энергия флуктуационных колебаний, обусловленных $\mathcal{E}_T(t)$, в системе с $N/2$ степенями свободы ¹⁾

$$\langle W \rangle = \kappa T N / 2 \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.4.5)$$

В качестве пробной системы рассмотрим высокочастотный колебательный контур RLC , настроенный на частоту $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Рассчитаем $G_T(\omega_0)$, а следовательно, и $u(\omega_0, T)$. Итак, предположим, что полоса пропускания контура $\Delta\omega = 2\alpha = R/L$ является достаточно узкой, так что в ее пределах функцию G_T можно рассматривать как постоянную: $G_T(\omega) \approx G_T(\omega_0)$. Если q — заряд на емкости, то

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2C} \langle q^2 \rangle + \frac{L}{2} \langle \dot{q}^2 \rangle. \quad (5.4.6)$$

Исходя из уравнения для q

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_T(t),$$

получим

$$\langle q^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |K(\omega)|^2 G_T(\omega) d\omega, \quad \text{где} \quad K(\omega) = L^{-1}(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\alpha\omega)^{-1}.$$

Учитывая, что полоса контура предполагается узкой, находим

$$\langle q^2 \rangle \approx 2G_T(\omega_0) \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2\alpha\omega_0^2 L^2}, \quad (5.4.7)$$

$$\langle \dot{q}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 |K(\omega)|^2 G_T(\omega) d\omega = \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2\alpha L^2}. \quad (5.4.8)$$

Как следует из (7) и (8),

$$\frac{1}{2C} \langle q^2 \rangle = \frac{L}{2} \langle \dot{q}^2 \rangle = \frac{\pi G_T(\omega_0)}{2R}, \quad (5.4.9)$$

где мы теперь пишем $\omega_0 = \omega$, так как частота ω_0 выбиралась произвольной.

¹⁾ Число N равно порядку дифференциального уравнения, описывающего систему.

Подставив (6), (9) и $N = 2$ в (5), получим формулу Найквиста для $G_T(\omega)$:

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T R(\omega). \quad (5.4.10)$$

Формула (10) описывает спектральную плотность напряжения теплового шума на чисто омическом сопротивлении $\text{Re } Z = R$. В соответствии с (4) и (10)

$$u(\omega, T) = \frac{1}{\pi} \kappa T,$$

и, следовательно, для спектральной плотности теплового шума на произвольном двухполюснике

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T \text{Re } Z$$

и для спектральной плотности, определенной только в области положительных частот,

$$G_T^+(\omega) = \frac{2}{\pi} \kappa T \text{Re } Z. \quad (5.4.11)$$

Формула (11) была впервые получена Найквистом (1928 г.), который рассматривал, однако, в качестве пробной системы не колебательный контур, а двухпроводную линию¹⁾.

Спектр и корреляционная функция теплового шума. Согласно (10), (11) в классической области форма спектра теплового шума определяется частотной зависимостью действительной части полного сопротивления. Речь фактически идет обо всем радиодиапазоне, поскольку при комнатной температуре ($T = 300$ К) $\hbar\omega \approx \kappa T$ при $\nu = \omega/2\pi \approx 10^{13}$ Гц. Поэтому тепловой шум, генерируемый омическим сопротивлением, в радиодиапазоне можно считать белым; приближение δ -коррелированного процесса с высокой степенью точности выполняется практически для всех задач, связанных с изучением воздействия теплового шума на реальные радиотехнические системы.

Для конкретной оценки времени корреляции теплового шума на омическом сопротивлении можно пользоваться следующими соображениями.

В реальном сопротивлении всегда присутствует «паразитная» шунтирующая емкость. Поэтому наиболее реальной моделью сопротивления является параллельная RC -цепочка, где $C = C_{\text{п}}$ — «паразитная» емкость. Действительная часть комплексного сопротивления такой цепочки

$$\text{Re } Z = \frac{R}{1 + (\omega C_{\text{п}} R)^2}. \quad (5.4.12)$$

¹⁾ По поводу обобщения формулы Найквиста на квантовый случай рекомендуем читателю обратиться к дискуссии на страницах журнала УФН В. И. Тарского, Ю. Л. Климонтовича, В. Л. Гинзбурга и Л. П. Питаевского [16].

Поэтому вместо (10), (11) правильнее писать

$$G_T(\omega) = \frac{1}{\pi} \kappa T \frac{R}{1 + (\omega C_n R)^2}, \quad G_T^+ = \frac{2}{\pi} \kappa T + \frac{R}{1 + (\omega C_n R)^2}, \quad (5.4.13)$$

и время корреляции теплового шума, генерируемого реальным сопротивлением,

$$\tau_k = RC_n. \quad (5.4.14)$$

Обычно эта величина не превышает $\tau_k \approx 10^{-8} - 10^{-9}$ с. В оптическом диапазоне ($\omega \gtrsim 10^{14}$ Гц) для описания теплового шума вместо (5) следует использовать распределение Планка. Однако в этом диапазоне частот тепловой шум носит уже характер *теплового излучения*. Последнее описывается, однако, не в терминах квазистационарных токов и напряжений, а в терминах напряженностей E и H случайных электромагнитных полей¹⁾.

§ 5. Совместное действие сигнала и шума на линейную систему. Обнаружение и выделение сигнала; фильтрация

В этом параграфе, пользуясь аппаратом теории флуктуации в линейных системах, мы рассмотрим простейшие задачи, связанные с приемом сигнала в присутствии шумов. Если интенсивность сигнала сравнима или меньше интенсивности шума (речь может идти как о шуме, приходящем вместе с сигналом, так и о собственном шуме приемной системы), прием сигнала становится, по существу, сугубо статистической задачей.

В статистической теории приема сигналов на фоне шумов выделяют две группы задач — задачи *обнаружения* сигналов на фоне шумов и задачи *выделения* сигнала из шума. В первом случае наблюдатель не интересуется точным воспроизведением сигнала, а должен с максимальной надежностью вынести решение (статистическое решение) о наличии или отсутствии сигнала. Во втором речь идет о наилучшем (в смысле некоторого статистического критерия) воспроизведении сигнала, скрытого в шумах.

Если формы спектров сигнала и шума различаются, то для решения этих задач естественно обратиться к использованию линейных избирательных систем — линейных фильтров. В рассматриваемом случае можно, например, стремиться подобрать частотную характеристику фильтра таким образом, что он будет подавлять спектральные компо-

¹⁾ Имеется и промежуточная область сантиметровых и миллиметровых волн, где описание тепловых шумов также следует проводить в терминах полей. В данной книге эти вопросы не затрагиваются. Мы отсылаем читателя к монографиям [10, 11], где дано исчерпывающее рассмотрение вопроса.

ненты шума и одновременно «подчеркивать» спектральные компоненты сигнала.

Какова процедура выбора такого, оптимального, фильтра? Как рассчитать частотную характеристику $K(\omega)$ оптимального фильтра? Для ответа на эти вопросы обратимся сначала к задаче обнаружения сигнала на фоне шума.

Обнаружение сигнала на фоне шума; отношение сигнал/шум.

В этом случае естественно стремиться к тому, чтобы фильтр, через который проходит смесь сигнала и шума, максимизировал отношение сигнал/шум.

Итак, пусть на вход линейной системы поступает случайное колебание $\eta(t)$, представляющее собой смесь сигнала $S(t)$ и шума $\xi(t)$:

$$\eta(t) = S(t) + \xi(t). \quad (5.5.1)$$

Чтобы пояснить основные понятия, рассмотрим сначала самый простой случай, когда входной сигнал гармонический:

$$S_{\text{вх}} = a \cos(\omega_c t + \varphi_c) = \frac{a}{2} e^{i(\omega_c t + \varphi_c)} + \text{к. с.}, \quad I_{\text{вх}} = \frac{a^2}{2}.$$

Для выходного сигнала имеем

$$S_{\text{вых}} = \frac{a}{2} K(\omega_c) e^{i(\omega_c t + \varphi_c)} + \text{к. с.}, \quad I_{\text{вых}} = \frac{a^2}{2} |K(\omega_c)|^2.$$

Если $G(\omega)$ — спектральная плотность входного шума $\xi(t)$, то интенсивности шума на входе и выходе будут

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad \sigma_{\text{вых}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega.$$

Под отношением сигнал/шум понимают отношение соответствующих интенсивностей. Таким образом,

$$(c/ш)_{\text{вх}} = \frac{a^2/2}{\sigma_{\text{вх}}^2} = \frac{a^2}{4 \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}, \quad (5.5.2)$$

$$(c/ш)_{\text{вых}} = \frac{a^2 |K(\omega_0)|^2}{4 \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega}, \quad (5.5.3)$$

$$\frac{(c/ш)_{\text{вых}}}{(c/ш)_{\text{вх}}} = \frac{|K(\omega_c)|^2 \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 G(\omega) d\omega}. \quad (5.5.4)$$

Выражение (3) показывает, каким требованиям должен удовлетворять фильтр, чтобы выполнялось условие $(с/ш)_{\text{вых}} \gg 1$. Во-первых, частота сигнала должна совпадать с резонансной частотой фильтра ω_0 :

$$\omega_c = \omega_0; \quad (5.5.5)$$

при этом числитель в (3) имеет максимальное значение. Во-вторых резонансная кривая $|K(\omega)|^2$ должна быть значительно уже спектра шума $G(\omega)$: чем с большим запасом будет выполнено условие

$$\Delta\omega_{\text{вх}} \gg \Delta\omega, \quad (5.5.6)$$

тем меньше будет знаменатель в (3). В (6) $\Delta\omega_{\text{вх}}$ — эффективная ширина спектра входного шума, $\Delta\omega$ — ширина резонансной кривой фильтра.

Условие (6) обычно означает также, что спектральная плотность шума приблизительно постоянна в пределах резонансной кривой, так что в (3) функцию $G(\omega)$ можно вынести за знак интеграла:

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{a^2 |K(\omega)|_{\text{max}}^2}{4G(\omega_0) \int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (5.5.7)$$

Здесь учтено, что согласно (5) $|K(\omega_c)| = |K(\omega)|_{\text{max}}$. Заметим, что отношение

$$\frac{\int_0^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega}{|K(\omega)|_{\text{max}}^2} = \Delta\omega_{\phi} \quad (5.5.8)$$

определяет так называемую шумовую полосу пропускания фильтра; $\Delta\omega_{\phi}$ близка по величине или несколько превосходит $\Delta\omega$. Интенсивность входного шума, приходящаяся на полосу частот $\Delta\omega_{\phi}$, равна

$$\sigma^2 = G(\omega_0) 2 \Delta\omega_{\phi}. \quad (5.5.9)$$

Используя (8) и (9), выражению (7) можно придать вид (2):

$$(с/ш)_{\text{вых}} = a^2 / 2\sigma^2. \quad (5.5.10)$$

Таким образом, пересчет отношения сигнал/шум с входа на выход системы сводится просто к замене полной интенсивности шума интенсивностью (9). Если, по аналогии с (8), ввести эффективную ширину спектра входного шума

$$\Delta\omega_{\text{ш}} = \frac{\int_0^{\infty} G(\omega) d\omega}{G(\omega_0)}, \quad (5.5.11)$$

то (10) переписывается как

$$\Delta\omega_{\phi} = \frac{(c/\text{ш})_{\text{вх}}}{(c/\text{ш})_{\text{вых}}} \Delta\omega_{\text{ш}}. \quad (5.5.12)$$

Формула (12) дает возможность выбрать полосу фильтра $\Delta\omega_{\phi}$ по заданному значению $(c/\text{ш})_{\text{вх}}$, требуемой величине $(c/\text{ш})_{\text{вых}}$ и известной полосе входного шума $\Delta\omega_{\text{ш}}$.

Отношение сигнал/шум в переходном режиме. Рассмотрим кратко, как влияют переходные процессы на эффект фильтрации. Предположим, что на колебательный контур в момент $t = 0$ начинают действовать белый шум и гармонический сигнал. Полагая в (5.2.24)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ a \cos(\omega_0 t + \varphi_0), & t > 0, \end{cases}$$

найдем, что интенсивности сигнала и шума на выходе контура, усредненные по периоду высокой частоты ω_0 , равны

$$I_{\text{вых}}(t) = I_{\text{вых}}(1 - e^{-\alpha t})^2, \quad \sigma_{\text{вых}}^2(t) = \sigma_{\text{вых}}^2(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (5.5.13)$$

Как следует из (13), в начале переходного процесса ($\alpha t \ll 1$)

$$I_{\text{вых}}(t) \sim t^2, \quad \sigma_{\text{вых}}^2(t) \sim t.$$

Это значит, что независимо от того, какова величина отношения сигнал/шум в установившемся режиме, в начале процесса установления шум по интенсивности всегда превосходит сигнал. Из (13) также видно, что стационарный режим для шума устанавливается примерно в два раза быстрее, чем для сигнала:

$$t_{\text{ш}}^{\text{уст}} \sim 1/2\alpha, \quad t_{\text{с}}^{\text{уст}} \sim 1/\alpha.$$

Оптимальный линейный фильтр; обнаружение сигналов конечной длительности. Рассмотрим теперь более реальный случай, когда вместо гармонического сигнала (1) на линейную систему действует регулярный сигнал

$$S_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.5.14)$$

с произвольным спектром $s_0(\omega)$, мгновенной интенсивностью

$$I_0(t) = S_0^2(t) \quad (5.5.15)$$

и энергией

$$Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_0(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.5.16)$$

Пусть вместе с сигналом $S_0(t)$ на вход фильтра поступает стационарный шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью $G_0(\omega)$. Поставим задачу найти передаточную функцию $K(\omega)$ так на-

зывается *оптимальным фильтром*, отношение сигнал/шум на выходе которого будет наибольшим из всех возможных.

Согласно (14) сигнал на выходе фильтра имеет вид

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega)K(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.5.16a)$$

и его интенсивность и энергия равны

$$I(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega)K(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right)^2, \quad (5.5.17)$$

$$Q = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)K(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.5.18)$$

Отсюда находим, что

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \frac{I(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} G_0(\omega)|K(\omega)|^2 d\omega}. \quad (5.5.19)$$

Предположим сначала, что $G_0(\omega) = \text{const}$, т.е. входной шум — белый. При этом G_0 выходит за знак интеграла в (19). Используя неравенство Коши — Буняковского, интенсивность (17) можно оценить как

$$I(t) \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 d\omega \right). \quad (5.5.20)$$

Подстановка (20) в (19) дает

$$(с/ш)_{\text{вых}} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 d\omega}{G_0} = \frac{Q_0}{2\pi G_0}. \quad (5.5.21)$$

Равенство в (20), (21) достигается при

$$K(\omega) = K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha s_0^*(\omega)e^{-i\omega t_0} = \alpha s_0(-\omega)e^{-i\omega t_0}, \quad (5.5.22)$$

где α и t_0 — произвольные постоянные. Частотная характеристика оптимального фильтра определяется, таким образом, выражением (22).

Формула (22) описывает частотную характеристику оптимального фильтра $K(\omega)$, обеспечивающего максимальное значение отношения сигнал/шум. Как и следовало ожидать, частотная характеристика (22) близка к спектру сигнала (поэтому оптимальный фильтр называют также *согласованным* фильтром); заметим, что в (22) входит не спектральная амплитуда сигнала, а ее комплексно сопряженное значение. Именно такой фильтр и позволяет получить максимальное значение отношения сигнал/шум, хотя и не воспроизводит форму сигнала.

Подставив (17) и (22) в (19), получаем

$$(c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{2\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega \right)^2}{G_0 Q_0}, \quad (5.5.23)$$

откуда видно, что величина $(c/\text{ш})_{\text{вых}}$ принимает наибольшее значение (21) только в момент $t = t_0$. Согласно (16) и (22) сигнал на выходе оптимального фильтра

$$S(t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t_0)} d\omega, \quad (5.5.24)$$

$$S_{\text{max}} = S(t = t_0) = \alpha Q_0 / 2\pi,$$

представляет собой импульс, симметричный относительно $t = t_0$, хотя форма импульса входного сигнала (14) может быть любой. Таким образом, при прохождении сигнала через согласованный с ним фильтр (22) его форма меняется. Это хорошо видно на примере прямоугольного входного импульса

$$S_0(t) = \begin{cases} S_0, & |t| < \tau_0/2, \\ 0, & |t| > \tau_0/2, \end{cases}$$

с энергией $Q_0 = S_0^2 \tau_0$ и спектром

$$s_0(\omega) = \frac{S_0 \tau_0}{2\pi} \frac{\sin(\omega \tau_0 / 2)}{\omega \tau_0 / 2}. \quad (5.5.25)$$

Подставив (25) в (24), получим импульс треугольной формы:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2\pi} Q_0 \left[1 - \frac{|t - t_0|}{\tau_0} \right], & |t - t_0| < \tau_0, \\ 0, & |t - t_0| > \tau_0. \end{cases}$$

Преобразуя заданный сигнал (14) в некоторый новый сигнал (24), оптимальный фильтр делает это таким образом, что новый сигнал принимает при $t = t_0$ значение, наибольшее из всех возможных, и тем самым наилучшим образом выделяется на фоне шума (рис. 5.9).

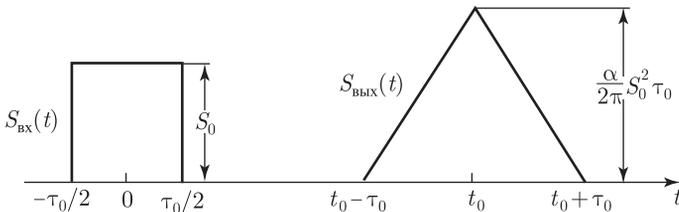


Рис. 5.9. Преобразование в согласованном линейном фильтре прямоугольного входного импульса $S_{\text{вх}}(t)$ в треугольный выходной импульс $S_{\text{вых}}(t)$

Рассмотрим теперь общий случай не δ -коррелированного входного шума: $G_0(\omega) \neq \text{const}$. Представив оптимальный фильтр состоящим из двух последовательно соединенных фильтров:

$$K(\omega) = K_1(\omega)K_2(\omega), \quad (5.5.26)$$

выберем первый фильтр таким образом, чтобы шум на его выходе был белым (δ -коррелированным):

$$K_1(\omega) = \frac{C}{\sqrt{G_0(\omega)}} e^{i\varphi(\omega)}, \quad (5.5.27)$$

где C — произвольная постоянная, $\varphi(\omega)$ — произвольная действительная функция частоты. При этом на вход второго фильтра будет подаваться сигнал

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(\omega)K_1(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

и белый шум со спектральной плотностью

$$G_1(\omega) = |K_1(\omega)|^2 G_0(\omega) = |C|^2.$$

Эта задача уже рассматривалась, и на основании (22) можно сразу написать выражение для оптимальной частотной характеристики второго фильтра:

$$K_2(\omega) = \alpha_1 K_1^*(\omega) e^{-i\omega t_0} = \frac{\alpha_1 C^*}{\sqrt{G_0(\omega)}} s_0^*(\omega) e^{-i\varphi(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (5.5.28)$$

Подставив (27) и (28) в (26), найдем

$$K_{\text{опт}}(\omega) = \alpha_2 \frac{s_0^*(\omega)}{G_0(\omega)} e^{-i\omega t_0}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 |C|^2. \quad (5.5.29)$$

Согласно (29) на форму частотной характеристики в общем случае влияет как спектр сигнала, так и спектральная интенсивность шума. Выражение (29) имеет простой смысл: фильтр подчеркивает участки спектра, где преобладает спектр сигнала, и подавляет те участки, где увеличивается спектр шума ($s_0^*(\omega)$ входит в (29) в числителе, а $G_0(\omega)$ — в знаменателе). При $G_0(\omega) = \text{const}$ (29) переходит в (22).

Обнаружение сигнала на фоне шума; статистические ошибки. Максимально увеличив отношение сигнал/шум при помощи согласованного фильтра можно приступить к решению следующей задачи — принятия решения о наличии полезного сигнала.

Если отношение сигнал/шум невелико (интенсивность сигнала порядка или меньше интенсивности шума), то в распоряжении наблюдателя имеется фактически реализация некоторого случайного процесса $x(t)$, представляющего собой либо а) шум, либо б) смесь сигнала $S(t)$ и шума. Вынесение решения о наличии или отсутствии сигнала представляет собой в этом случае, очевидно, статистическую задачу (на основании измерения наблюдатель должен выбрать одну из гипотез (а) или (б)), а само решение неизбежно будет связано с ошибками. Рассмотрим одну из простейших задач обнаружения. Вероятность случая (а) обозначим через q . Число q можно интерпретировать как априорную, т. е. известную заранее, вероятность отсутствия сигнала. Соответственно априорная вероятность наличия сигнала, или вероятность случая (б), равна $p = 1 - q$.

Задача обнаружения ставится так: сделано измерение процесса x , и получено, что $x(t_1) = x_1$. Требуется сказать, с какой из гипотез, (а) или (б), лучше согласуется этот результат измерения.

Распределение вероятностей для x в случае, например, гауссовской помехи имеет вид:

(а) только шум

$$w_{\text{ш}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]; \quad (5.5.30)$$

(б) сигнал + шум

$$w_{\text{с+ш}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - S_1)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (S_1 = S(t_1)).$$

Вывод о наличии или отсутствии сигнала в момент времени t_1 можно сделать просто исходя из того, какое из распределений (30) дает для x_1 большую вероятность, т.е. при $w_{\text{ш}}(x_1) > w_{\text{с+ш}}(x_1)$ считать, что сигнала нет, а при $w_{\text{ш}} < w_{\text{с+ш}}(x_1)$ — сигнал обнаружен. Процедура обнаружения сводится здесь к тому, что x_1 сравнивается с некоторым порогом обнаружения x_n , величина которого находится из уравнения

$$w_{\text{ш}}(x_n) = w_{\text{с+ш}}(x_n). \quad (5.5.31)$$

Подставив (30) в (31), получим

$$x_n = S_1/2. \quad (5.5.32)$$

Порог (32) оказался, однако, не зависящим от p или q , и это позволяет предположить, что он выбран не лучшим образом, так как не использована вся априорная информация о сигнале.

Рассмотрим теперь более оптимальный выбор порога, который приводил бы к наименьшей вероятности ошибок (критерий идеального наблюдателя). Таких ошибок может быть две. Первая состоит в том, что $x_1 > x_n$ и мы делаем вывод о наличии сигнала, хотя на самом деле сигнала нет (ложная тревога). Условная вероятность такой ошибки будет

$$P_1(x_1 > x_n | S = 0) = \int_{x_n}^{\infty} w_{\text{ш}}(x) dx,$$

а полная вероятность согласно (1.2.23а) равна

$$P_1 = q \int_{x_n}^{\infty} w_n(x) dx. \quad (5.5.33)$$

Другая ошибка возникает, если сигнал есть, но $x_1 < x_n$, и мы делаем вывод об его отсутствии (пропуск сигнала). Аналогично (33) находим, что эта ошибка имеет вероятность

$$P_2 = p \int_{-\infty}^{x_n} w_{\text{с+ш}}(x) dx.$$

Суммарная вероятность ошибки будет, следовательно,

$$P = P_1 + P_2 = q \int_{x_n}^{\infty} w_n(x) dx + p \int_{-\infty}^{x_n} w_{\text{с+ш}}(x) dx. \quad (5.5.34)$$

Приравнявая нулю производную $\partial P/\partial x_n$, получим, что вероятность ошибки (34) будет наименьшей, если величина x_n определяется соотношением

$$q w_{\text{ш}}(x_n) = p w_{\text{с+ш}}(x_n), \quad (5.5.35)$$

которое совпадает с (31) лишь в частном случае $p = q = 1/2$. Подстановка (30) в (35) дает

$$x_n = \frac{S_1}{2} \left(1 - \frac{2\sigma^2}{S_1^2} \ln \frac{p}{q} \right). \quad (5.5.36)$$

Согласно (36) критерий обнаружения сигнала $x_1 > x_n$ можно представить в форме

$$x_1 S_1 > \frac{S_1^2}{2} - \sigma^2 \ln \frac{p}{q}. \quad (5.5.37)$$

Разумеется, процедура вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала по результатам одного измерения весьма груба. Точность можно повысить, переходя к серии измерений, проводимых в нескольких точках временной шкалы t ; для выбора оптимальной процедуры обнаружения в этом случае следует, очевидно, воспользоваться многомерными распределениями

$$w(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n).$$

Обратимся для простоты к случаю независимых измерений, когда многомерные распределения можно заменить произведениями одномерных. Считая случайные величины $x_i = x(t_i)$ статистически независимыми (физически это условие означает, что интервал времени между последовательными замерами намного превосходит так называемое время корреляции, см. § 3 гл. 1), вместо (35) и (37) получим, соответственно,

$$q \prod_i w_{\text{ш}}(x_n) = p \prod_i w_{\text{с+ш}}(x_n), \quad (5.5.38)$$

$$\sum_i x_i S_i > \frac{1}{2} \sum S_i^2 - \sigma^2 \ln \frac{p}{q} = U_0.$$

Схемная реализация условия обнаружения (38) показана на рис. 5.10 (так называемый корреляционный приемник). Порог U_0 с увеличением числа замеров стремится к некоторому постоянному значению, равному средней интенсивности сигнала $1/2 \sum_i S_i^2$, уменьшенной на величину $\sigma^2 \ln(p/q)$.

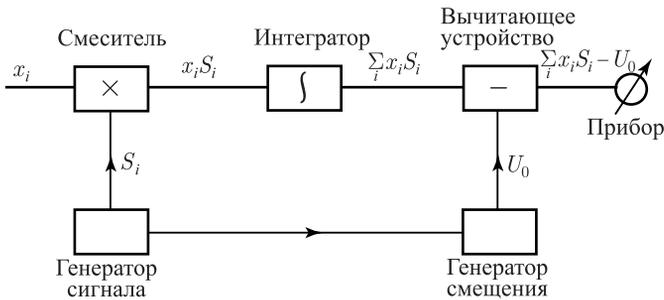


Рис. 5.10. Схема корреляционного приемника

Рассмотренная задача является одним из простейших примеров статистической процедуры обнаружения сигналов. В настоящее время статистическая теория обнаружения сигналов представляет собой хорошо разработанную дисциплину; мы отсылаем интересующегося читателя к многочисленным руководствам в этой области — см., например, [3, 6, 16].

Выделение сигнала из шума; уравнение Винера–Хопфа. Обратимся теперь к примеру задачи о выделении сигнала из шума.

Во многих случаях реальный, несущий информацию, сигнал (например, радиосигнал, промодулированный человеческой речью) естественно рассматривать как стационарный шум $\xi_1(t)$. Будем считать, что и искажающая сигнал флуктуационная помеха также представляет собой стационарный шум $\xi_2(t)$. Наша задача — указать рецепт построения линейного фильтра, наилучшим образом воспроизводящего сигнал. Естественно, что для корректности постановки задачи надо сформулировать критерий, качества воспроизведения. Ниже в качестве такого критерия мы используем критерий минимума среднеквадратичной ошибки воспроизведения.

Итак, предположим, что имеются две стационарные, случайные, статистически взаимно независимые функции времени, одну из которых

$$\xi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{1\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \overline{\xi_1} = 0,$$

мы считаем сигналом, а вторую

$$\xi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_{2\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad \overline{\xi_2} = 0,$$

— помехой. Известны корреляционные функции $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ этих процессов и соответствующие спектральные плотности $G_1(\omega)$, $G_2(\omega)$, причем для спектральных амплитуд имеем (см. (1.3.16))

$$\begin{aligned} \langle \xi_{n\omega} \rangle &= 0 \quad (n = 1, 2), \\ \langle \xi_{n\omega} \xi_{m\omega'} \rangle &= \begin{cases} G_n(\omega) \delta(\omega + \omega'), & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5.39)$$

Требуется определить частотную функцию $K(\omega) = K_\omega$ фильтра, суммарный процесс на выходе которого

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\omega (\xi_{1\omega} + \xi_{2\omega}) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.5.40)$$

с некоторой задержкой t_0 наилучшим образом воспроизводит бы входной сигнал $\xi_1(t)$. Согласно этому критерию среднеквадратичное значение $\overline{\mu^2}$ ошибки воспроизведения сигнала

$$\mu(t) = \xi(t + t_0) - \xi_1(t) \quad (5.5.41)$$

должно быть минимальным. Учитывая (39), найдем

$$\overline{\mu} = 0, \quad \overline{\mu^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \{|K'_\omega - 1|^2 G_1(\omega) + |K'_\omega|^2 G_2(\omega)\} d\omega,$$

где $K'_\omega = K_\omega e^{i\omega t_0}$. Варьируя $\overline{\mu^2}$ по K'^*_ω , получим

$$\delta \overline{\mu^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [(K'_\omega - 1)G_1(\omega) + K'_\omega G_2(\omega)] \delta K'^*_\omega d\omega + \text{к. с.} \quad (5.5.42)$$

В случае оптимального фильтра, когда $\overline{\mu^2}$ имеет минимальное значение, величина $\delta \overline{\mu^2}$ должна обращаться в нуль при любой $\delta K'^*_\omega$. Как следует из (42), это означает, что

$$(K'_\omega - 1)G_1(\omega) + K'_\omega G_2(\omega) = 0,$$

т. е. искомая частотная функция оптимального фильтра равна

$$K(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} e^{-i\omega t_0}. \quad (5.5.43)$$

Приведем теперь решение этой же задачи во временном представлении. Вместо (40) можно написать (см. (5.1.18))

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [\xi_1(t - \theta) + \xi_2(t - \theta)] d\theta,$$

где $H(\theta)$ — функция Грина оптимального фильтра. Вычисляя дисперсию ошибки воспроизведения (41), теперь получим

$$\begin{aligned} \overline{\mu^2} = & \iint_{-\infty}^{\infty} H(\theta) H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta d\theta' - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) B_1(\theta - t_0) d\theta + B_1(0), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta \overline{\mu^2} = & 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta H(\theta) \times \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta') [B_1(\theta - \theta') + B_2(\theta - \theta')] d\theta' - B_1(\theta - \theta_0) \right\} d\theta. \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что для обращения в нуль вариаций $\delta \overline{\mu^2}$ функция $H(\theta)$ должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\theta) [B_1(\tau - \theta) + B_2(\tau - \theta)] d\theta = B_1(\tau - t_0), \quad (5.5.44)$$

называемому уравнением Винера–Хопфа [4]. Учитывая, что $H(\theta)$ и K_ω , а также $B_n(\tau)$ и $G_n(\omega)$ связаны преобразованием Фурье,

можно убедиться, что (43) формально определяет решение уравнения Винера–Хопфа (44).

Согласно (5.1.16) и (5.1.21)

$$H(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (5.5.45)$$

Подставляя (43) в (45) и учитывая четность функций $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$, получим

$$\begin{aligned} H(\theta) = H(t_0 + \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \cos \omega\tau d\omega. \end{aligned} \quad (5.5.46)$$

Функция Грина оптимального фильтра (46) симметрична относительно момента времени t_0 :

$$H(t_0 + \tau) = H(t_0 - \tau). \quad (5.5.47)$$

С другой стороны, для любого физически осуществимого фильтра достаточно выполнения условия временной отсечки (3.1.14), которое в рассматриваемом случае может быть записано в виде

$$H(t_0 + \tau) = 0, \quad |\tau| > t_0. \quad (5.5.48)$$

Выражения (47) и (48) определяют функцию Грина как симметричный относительно $\theta = t_0$ импульс произвольной формы с длительностью, не превышающей $2t_0$ (см. рис. 5.11).

Обратим внимание на то, что функция Грина (46) формально имеет форму корреляционной функции, соответствующей спектральной плотности $G_1(\omega)[G_1(\omega) + G_2(\omega)]^{-1}(2\pi)^{-1}$, т. е. она уменьшается и стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, причем можно ввести аналогичный времени корреляции параметр τ_0 , характеризующий темп этого убывания. Таким образом, хотя, как правило, функция Грина (46) свойством (48) в чистом виде не обладает, всегда можно обеспечить выполнение (48) с любой заранее заданной точностью, выбрав время задержки достаточно большим ($t_0 \gg \tau_0$).

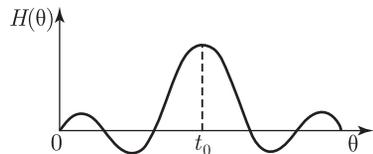


Рис. 5.11. Качественный вид зависимости функции Грина оптимального фильтра от времени θ (см. (46), (47))

Согласно полученным результатам

$$K(\omega) = \frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \leq 1,$$

$$\overline{\mu^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_1(\omega)G_2(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} d\omega \leq \int_{-\infty}^{\infty} G_n(\omega) d\omega = \sigma_n^2 \quad (n = 1, 2).$$

(5.5.49)

Таким образом, минимальная ошибка воспроизведения (49) не зависит от времени запаздывания t_0 , а также от того, какой из двух шумов ξ_1 и ξ_2 мы считаем сигналом, а какой — помехой.

Интенсивность сигнала, помехи и отношение сигнал/шум на выходе оптимального фильтра определяются выражениями

$$\sigma_c^2 = \int G_1(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega, \quad \sigma_n^2 = \int G_2(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega,$$

$$(с/ш)_{\text{вых}} = \sigma_c^2 / \sigma_n^2,$$

где согласно (43)

$$|K(\omega)|^2 = \left[\frac{G_1(\omega)}{G_1(\omega) + G_2(\omega)} \right]^2.$$

На входе фильтра

$$(с/ш)_{\text{вх}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{\int G_1(\omega) d\omega}{\int G_2(\omega) d\omega}.$$

Рассмотрим характерные режимы фильтрации.

1. Сигнал большой ($G_1 \gg G_2$), причем спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ сильно перекрываются. При этом $|K(\omega)|^2 \approx 1$, так что

$$(с/ш)_{\text{вых}} \approx (с/ш)_{\text{вх}} \gg 1.$$

Оптимальный фильтр в этом режиме практически ничего нового не вносит.

2. Отношение $(с/ш)_{\text{вх}}$ имеет произвольную величину, но спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ не перекрываются. Теперь

$$|K(\omega)|^2 \approx \begin{cases} 1, & G_1(\omega) \neq 0, \\ 0, & G_2(\omega) \neq 0, \end{cases}$$

так что $\sigma_c^2 \approx \sigma_1^2$, $\sigma_n^2 \approx 0$ и

$$(с/ш)_{\text{вых}} \gg 1.$$

Оптимальный фильтр в этом режиме работает наиболее эффективно, обеспечивая почти полное подавление помехи, не искажая в то же время сигнала.

3. Сигнал относительно мал, причем спектры $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ сильно перекрываются. Полагая $G_1 \ll G_2$, получим

$$\begin{aligned}\sigma_n^2 &\approx \int G_2(\omega)[G_1(\omega)/G_2(\omega)]^2 d\omega, \\ \sigma_c^2 &\approx \int G_1(\omega)[G_1(\omega)/G_2(\omega)]^2 d\omega \ll \sigma_n^2, \\ (c/\text{ш})_{\text{вых}} &\approx G_1/G_2 \approx (c/\text{ш})_{\text{вх}} \ll 1.\end{aligned}$$

В этом наименее благоприятном случае (как и в наиболее благоприятном случае (1)) любой линейный фильтр бесполезен, поскольку частотная селекция не в состоянии заметно повлиять на отношение сигнал/шум. Выход из этого положения может быть найден, если закодировать сигнал (промодулировав его по известному закону).

Оптимальные фильтры и корреляторы. Рассмотренные выше методы обнаружения и выделения сигналов особенно эффективны, когда спектры сигнала и шума существенно различаются; именно в этой ситуации оптимальные фильтры обеспечивают минимальные ошибки при обнаружении и выделении сигналов.

Однако если различаются спектры, то различаются и корреляционные функции сигнала и шума. Поэтому для обнаружения и выделения сигналов, наряду с оптимальными фильтрами, могут быть предложены и «сопряженные по Фурье» методы — методы, основанные на измерении корреляционных и взаимно-корреляционных функций.

Поясним сказанное на двух примерах. Пусть речь идет о рассмотренном на «спектральном» языке в начале этого параграфа обнаружении гармонического сигнала

$$S(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad w(\varphi) = 1/2\pi,$$

на фоне стационарного шума; сигнал и шум будем считать независимыми. Пусть суперпозиция сигнала и шума

$$\eta(t) = S(t) + \xi(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \xi(t)$$

подается на коррелятор (см. рис. 1.7). На выходе коррелятора имеем

$$B_\eta(\tau) = \langle \eta \eta_\tau \rangle = \langle S S_\tau \rangle + \langle S \xi_\tau \rangle + \langle S_\tau \xi \rangle + \langle \xi \xi_\tau \rangle. \quad (5.5.50)$$

При $\langle S \rangle = \langle \xi \rangle = 0$

$$\langle S \xi_\tau \rangle = \langle S_\tau \xi \rangle = 0. \quad (5.5.51)$$

Согласно (1.3.39) $\langle S S_\tau \rangle = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ и

$$B_\eta(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau + B_\xi(\tau). \quad (5.5.52)$$

Если шум ξ стационарен, то $B_\xi(\tau) \approx 0$ при $\tau \gg \tau_k$.

Таким образом, на выходе прибора, измеряющего корреляционную функцию $B_\eta(\tau)$, при $\tau \gg \tau_k$ $B_\eta \approx \frac{a^2}{2} \cos \omega_0 \tau$ независимо от отношения

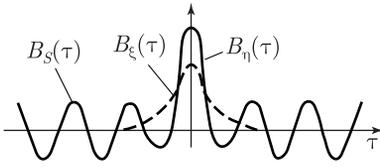


Рис. 5.12. Корреляционные функции гармонического сигнала $B_S(\tau)$, суперпозиции сигнала и шума $B_\eta(\tau)$ и шума $B_\xi(\tau)$

функцию шума в виде $B_\xi(\tau) = \sigma^2 r(\tau) \cos \omega_0 \tau$ (шум с симметричным спектром, расположенным вблизи частоты ω_0), имеем

$$(c/\text{ш})_{\text{вх}} = \frac{a^2}{2\sigma^2}, \quad (c/\text{ш})_{\text{вых}} = \frac{\langle SS_\tau \rangle}{\langle \xi\xi_\tau \rangle} = (c/\text{ш})_{\text{вх}} \frac{1}{r(\tau)}. \quad (5.5.53)$$

Согласно (53) $(c/\text{ш})_{\text{вых}} \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$. Этот результат, разумеется, совершенно аналогичен следующему из (12) выводу об обращении отношения $(c/\text{ш})_{\text{вых}}$ в бесконечность при $\Delta\omega_\phi \rightarrow 0$.

Таким образом, с принципиальной точки зрения методы обнаружения гармонического сигнала на фоне шума с помощью узкополосного фильтра или коррелятора совершенно эквивалентны; выигрыш в отношении сигнал/шум получается за счет увеличения времени измерения; напомним, что постоянная времени фильтра $T_\phi \sim 1/\Delta\omega_\phi$.

Практически же создание коррелятора с большими временами задержки часто оказывается более простым делом, нежели создание очень узкополосного фильтра. Корреляционным приемником можно заменить, разумеется, и оптимальный (согласованный) фильтр, предназначенный для оптимального обнаружения импульсного немонохроматического сигнала.

Решение задачи обнаружения сигнала на фоне шума на «временном» языке рассмотрено выше (см. формулу (38) и рис. 5.10). Переходя в формуле (38) от суммы к интегралу, заключаем, что вынести решение о наличии или отсутствии сигнала можно, сравнивая значение величины

$$\sum x_i S_i \rightarrow \int_0^T x(\theta) S(\theta) d\theta = B_{xS}(T) \quad (5.5.54)$$

с некоторым порогом.

Величина $B_{xS}(T)$ представляет собой функцию взаимной корреляции сигнала и суммы сигнал+шум. При $t = T$ с B_{xS} совпадает интеграл Дюамеля (5.1.18) вида

$$y(t) = \int_0^t h(t - \theta)x(\theta) d\theta, \quad (5.5.55)$$

описывающий выход фильтра с функцией Грина, равной

$$h(\theta) = S(T - \theta). \quad (5.5.56)$$

Действительно, поскольку

$$h(t - \theta) = S(T - t + \theta),$$

то

$$y(t) = \int_0^t S(T - t + \theta)x(\theta) d\theta$$

и $y(T) = B_{xS}$. Функции Грина (56) соответствует коэффициент передачи фильтра

$$K(\omega) = 2\pi s^*(\omega)e^{-i\omega T}, \quad (5.5.57)$$

где

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-i\omega t} d\omega = s^*(-\omega).$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой (57) в (5.1.23):

$$\begin{aligned} h(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(\omega)e^{i\omega(\theta-T)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(-\omega)e^{-i\omega(\theta-T)} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\omega)e^{i\omega(T-\theta)} d\omega = S(T - \theta). \end{aligned}$$

Выражение (57) совпадает с частотной характеристикой оптимального (согласованного) фильтра (22), если в (22) положить $\alpha = 2\pi$ и $t_0 = T$. Можно сказать, что корреляционный приемник (см. рис. 5.10), построенный по критерию минимума вероятности ошибки, представляет собой согласованный с сигналом фильтр (22), дополненный порогом обнаружения U_0 . Наличие порога позволяет однозначно выносить решение о наличии или отсутствии сигнала.

Таким образом, в рассмотренных задачах обнаружения и выделения слабых сигналов на фоне шумов методы, основанные на фильтрации по спектру, и корреляционные методы эквивалентны.

Следует иметь в виду вместе с тем, что мы рассмотрели здесь лишь простейшие постановки вопроса в статистической теории обнаружения и выделения сигналов на фоне шумов. Читателя, желающего более детально ознакомиться с вопросом, мы отсылаем к руководствам [3–5, 12–15].

Литература к главе 5

1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972.
2. *Солодов А. В., Петров С. Ф.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. — М.: Наука, 1971.
3. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
4. *Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.* Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960.
5. *Харкевич А. А.* Борьба с помехами. — М.: Наука, 1965.
6. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1974, кн. 1.
7. *Малахов А. Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М.: Сов. радио, 1978.
8. *Горелик Г. С.* — УФН, 1951, т. 44, с. 33.
9. *Гинзбург В. Л.* — УФН, 1952, т. 46, с. 348.
10. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: изд. АН СССР, 1953.
11. *Левин М. Л., Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. — М.: Наука, 1967.
12. *Хелстром К.* Статистическая теория обнаружения сигналов: Пер. с англ. / Под ред. Ю. Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963.
13. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи: Пер. с англ. / Под ред. Б. Р. Левина. — М.: Сов. радио, 1961, т. 1, 2.
14. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — 2-е изд., перераб. — М.: Сов. радио, 1975, кн. 2.
15. *Лезин Ю. С.* Оптимальные фильтры и накопители импульсных сигналов. — М.: Сов. радио, 1963.
16. Успехи физических наук, 1987, т. 151, вып. № 2, с. 273–339.

СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ И ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

§ 1. Введение

В протяженной среде случайные источники возбуждают волны, амплитуды, частоты, фазы и волновые векторы которых случайны, — случайные волны. Случайные волны возникают и в результате рассеяния регулярных волн в средах с хаотически изменяющимися параметрами.

Каковы свойства случайных волн, каковы закономерности их распространения, интерференции, дифракции? Эти вопросы важны для радиофизики и в особенности для оптики. Поэтому в настоящей и последующих главах много специальной оптической терминологии. Так, пространственные и временные корреляции случайных волн описываются в терминах давно сложившихся в оптике понятий пространственной и временной когерентности, степени когерентности. В терминах оптики предметом настоящей главы в значительной мере является «линейная оптика частично когерентных волн».

Ряд задач, обсуждаемых в этой главе, можно рассматривать как аналоги задач, изложенных в гл. 5. Поэтому большое место, как и в гл. 5, занимает корреляционно-спектральная теория, однако здесь это корреляционно-спектральная теория случайных полей. Вместе с тем задачи о случайных волнах в распределенных линейных средах оказываются гораздо более сложными, нежели задачи о шумовых колебаниях в линейных системах с сосредоточенными параметрами.

Поэтому, если в гл. 5 приближенные методы, основанные на упрощении исходных уравнений (на использовании так называемых укороченных уравнений, см. § 2 гл. 5), вводились нами скорее из педагогических соображений, то в настоящей и следующих главах практически все основные результаты базируются на результатах анализа укороченных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд распространяющихся волн. Следует подчеркнуть, что переход к укороченным уравнениям связан не только с чисто вычислительными преимуществами, но имеет и несомненную эвристическую ценность. Оказывается, что ряд на первый взгляд принципиально различных нестационарных задач теории систем с сосредоточенными параметрами и задач о распространении волн описывается, по существу, одними и теми же укороченными уравнениями для комплексных амплитуд; переход от «временной» задачи к «пространственной» связан лишь

с заменой независимой переменной. Последнее позволяет установить пространственно-временные аналогии в теории колебательных и волновых систем.

Интересные пространственно-временные аналогии удается установить и в самой физике волновых явлений; здесь речь идет об аналогии явлений, наблюдающихся в поле волн, модулированных только во времени, с одной стороны, и только в пространстве, с другой (см. § 3). Общность этих задач, на первый взгляд сильно различающихся, обнаруживается на этапе исследования укороченных уравнений.

Мы не занимаемся в этой главе анализом свойств случайных источников, возбуждающих стохастические волновые процессы; данные на этот счет содержатся в гл. 2 и гл. 3. В оптике источниками гауссовского шума являются, по существу, все нелазерные источники света; часто такие источники оказываются хорошей моделью и для описания излучения многомодовых лазеров с несинхронизованными модами (см. § 6 гл. 1).

Следует отметить, что широкий класс статистических задач возникает, в частности, в рентгеновской оптике; используемые в настоящее время источники рентгеновского излучения являются, по существу, источниками широкополосного «рентгеновского шума».

Источник широкополосного гауссовского шума представляет собой, разумеется, и нагретое тело. Следует, однако, иметь в виду, что тепловое излучение нагретых тел имеет ту же природу, что и тепловой шум сопротивлений, рассмотренный в § 4 гл. 5. Тепловое излучение представляет собой электромагнитное поле, создаваемое теми же флуктуациями зарядов и токов, которые ответственны за возникновение теплового найквистовского шума. Поэтому тепловое излучение [1, 2] можно рассматривать и как принципиально неустранимый внутренний шум линейных сред, так же как тепловой шум сопротивлений в гл. 5 рассматривался в качестве внутреннего шума систем с сосредоточенными параметрами.

Основное внимание в этой главе мы уделим случайным полям специального вида — так называемым квазиплоским, квазигармоническим случайным волнам вида

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{e} A(x, y, z, t) \exp i(\omega_0 t - k_0 z) + \text{к. с.}, \quad (6.1.1)$$

где $A(x, y, z, t)$ — комплексная амплитуда, медленно меняющаяся в масштабах среднего периода колебаний $T = 2\pi/\omega_0$ и средней длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$; \mathbf{e} — единичный вектор поляризации волны. Поскольку для волн в линейных средах, точно так же как и для колебаний в линейных системах с сосредоточенными параметрами, справедлив принцип суперпозиции, основным аппаратом этой главы будет корреляционно-спектральная теория. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением полей с пространственно-временной корреляционной функцией

$$B(\mathbf{r}_1, z_1, t_1; \mathbf{r}_2, z_2, t_2) = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, z_1, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, z_2, t_2) \rangle \quad (6.1.2)$$

(вектор \mathbf{r} расположен в плоскости xy), которая распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций:

$$B = B(\mathbf{r}_1, z_1; \mathbf{r}_2, z_2)B(t_1, t_2; z_1, z_2).$$

Для полей с такими когерентными свойствами во многих случаях эффекты временной и пространственной когерентности можно рассматривать по отдельности. Дело в том, что пространственные масштабы, на которых проявляются эффекты временной и пространственной модуляции, сильно различаются. Поэтому далее мы пользуемся моделью плоской шумовой волны и моделью монохроматического частично когерентного волнового пучка (имеется в виду пучок со случайной поперечной структурой, изменение поля во времени полагается гармоническим).

Для описания временной статистики рассматриваемых волн мы будем пользоваться моделями случайных процессов, разобранными в главах 2 и 3. При описании пространственной статистики квазиплоских случайных волн будем рассматривать пространственные корреляционные функции

$$B(\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{r}_2, z_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, z_1, t)E(\mathbf{r}_2, z_2, t) \rangle. \quad (6.1.2a)$$

В (2a) можно выделить корреляционные функции двух типов. Прежде всего это поперечная пространственная корреляционная функция (именно с этой функцией для волн типа (1) связывается ниже *понятие пространственной когерентности*)

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = B_{\perp}(x_1, x_2, y_1, y_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z)A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle, \quad (6.1.3)$$

которая для статистически однородного случайного поля имеет вид

$$B_{\perp} = B_{\perp}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{s}; z) = B_{\perp}(s_x, s_y; z) \quad (6.1.4a)$$

и для изотропного поля

$$B_{\perp} = B_{\perp}(s; z). \quad (6.1.4б)$$

Для квазиплоской случайной волны (1) весьма наглядный смысл имеет и определяемая с помощью (4a), (4б), зависящая, вообще говоря, от координаты z угловая спектральная плотность, или просто угловой спектр:

$$G(k_x, k_y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(s_x, s_y, z) e^{i(k_x s_x + k_y s_y)} ds_x ds_y. \quad (6.1.5)$$

Мы будем называть квазиплоской случайную волну, для которой ширина углового спектра мала:

$$\Delta k_x/k_0 \ll 1, \quad \Delta k_y/k_0 \ll 1.$$

Таким образом, волновое поле (1) можно представлять как случайную суперпозицию плоских волн, волновые векторы которых расположены вблизи оси z и составляют с ней малые углы:

$$\theta_x = k_x/k_0 \ll 1, \quad \theta_y = k_y/k_0 \ll 1.$$

Поэтому далее мы будем обычно иметь дело с двумя спектральными распределениями одновременно: с угловым (волновым) спектром $G(k)$ и частотным спектром $G(\omega)$.

Заметим, что если для временной статистики рассматриваемых в этой главе процессов в большинстве случаев хорошо применима модель стационарного процесса, то в подавляющем большинстве практически интересных задач случайное поле волны в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, оказывается существенно неоднородным. При этом неоднородность поля волны, как правило, связана с ее пространственной ограниченностью.

В ряде волновых задач, и в частности в задачах о случайных волнах в нелинейных средах, наряду с поперечными корреляциями интересуются также и продольными корреляциями в случайных волнах:

$$B_{\parallel}(z, z+s) = \langle A(x, y, z)A^*(x, y, z+s) \rangle. \quad (6.1.6)$$

§ 2. Теория однонаправленного распространения излучения в однородной среде

В теории распространения излучения в линейных средах обычно приходится учитывать два явления: **дифракцию**, возникающую из-за конечных размеров источника излучения, и **дисперсию**, связанную с тем, что отдельные монохроматические компоненты в спектре излучения распространяются по-разному в зависимости от их частоты.

Будем рассматривать распространение волн в линейной диспергирующей немагнитной среде, которую считаем также однородной. В этом случае фактором, облегчающим теоретическое описание процесса, является возможность предположения, что излучение имеет однонаправленный характер, т. е. излучение направлено только в одну сторону от источника, поскольку встречные волны из-за однородности среды не возникают.

Основное уравнение. Пусть излучение распространяется вдоль оси z слева направо в области $z \geq 0$, заполненной линейной средой, а источник расположен в сечении $z = 0$. Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

и материального уравнения

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (6.2.2)$$

которое связывает индукцию \mathbf{D} , поле \mathbf{E} и поляризацию среды

$$P(t) = \int_0^{\infty} h(t') \mathbf{E}(t - t') dt', \quad h(t \rightarrow \infty) = 0. \quad (6.2.3)$$

Интеграл (3) аналогичен интегралу Дюамеля (5.1.14), а действительная функция $h(t)$ аналогична функции Грина. Согласно (3) функция $h(t)$ характеризует инерционность среды и ее восприимчивость к полю \mathbf{E} и его отдельным спектральным компонентам, т. е. она определяет дисперсионные свойства среды.

Поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

как следует из (1)–(3), то

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}, \quad (6.2.4)$$

где Δ — лапласиан:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Согласно (1)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (6.2.5)$$

Подставив (5) в (4), получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.2.6)$$

Учитывая (1), (2) и (6) и полагая для простоты поле скалярным, получаем искомое *основное уравнение* распространения

$$\Delta E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[E + 4\pi \int_0^{\infty} h(t') E(t - t') dt' \right], \quad (6.2.7)$$

содержащее одну неизвестную функцию — поле E

$$E = E(x, y, z, t) = E(\mathbf{r}, z, t), \quad (6.2.8)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y$ — поперечный радиус-вектор.

Будем искать решение уравнения (7), удовлетворяющее граничному условию

$$E(\mathbf{r}, z = 0, t) = E^{(0)}(\mathbf{r}, t), \quad (6.2.9)$$

где функция $E^{(0)}$ описывает поле, создаваемое источником излучения.

Решение основного уравнения. Ищем решение (7) в виде разложения по монохроматическим составляющим:

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\Omega}(\mathbf{r}, t) e^{i\Omega t} d\Omega. \quad (6.2.10)$$

Подстановка (10) в (7) приводит к уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)E_\Omega = 0. \quad (6.2.11)$$

Здесь k — волновое число, соответствующее частоте Ω :

$$k = k(\Omega) = \frac{\Omega}{c} \sqrt{\varepsilon} = \frac{\Omega}{c} n, \quad (6.2.12)$$

ε — диэлектрическая постоянная, n — показатель преломления

$$\varepsilon = \varepsilon(\Omega) = 1 + 4\pi \int_0^\infty h(t) e^{-i\Omega t} dt, \quad (6.2.13)$$

$$n = n(\Omega) = \sqrt{\varepsilon(\Omega)}. \quad (6.2.14)$$

В дальнейшем будем рассматривать распространение волн в линейных «средах без потерь», для которых волновое число $k(\Omega)$ можно считать действительным ($\text{Im } k(\Omega) \approx 0$), хотя, как видно из (12)–(14), мнимая часть $k(\Omega)$, в принципе, всегда имеется.

Представим E_Ω в (11) в виде разложения по плоским волнам, направленными под разными углами к оси z :

$$E_\Omega(\mathbf{r}, z) = \int E_{\Omega\chi}(z) e^{i\chi\mathbf{r}} d^2\chi, \quad (6.2.15)$$

$$d^2\chi = d\chi_x d\chi_y.$$

Подставив (15) в (11), получим простое уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 - \chi^2 \right) E_{\Omega\chi} = 0 \quad (6.2.16)$$

($\chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$), решение которого соответствующее выбранному направлению распространения (слева направо) и граничному условию (9) имеет вид

$$E_{\Omega\chi}(z) = E_{\Omega\chi}^{(0)} \exp\{-i \text{sgn } \Omega \cdot \sqrt{k^2 - \chi^2} z\} \quad (6.2.17)$$

(функция $\text{sgn } \Omega = -1$ при $\Omega < 0$, $\text{sgn } \Omega = 0$ при $\Omega = 0$ и $\text{sgn } \Omega = 1$ при $\Omega > 0$). Подстановка (17) в (15), а (15) в (10) дает решение основного уравнения (7) в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\Omega\chi}^{(0)} \exp[i\Omega t + i\chi\mathbf{r} - i \text{sgn } \Omega \sqrt{k^2 - \chi^2} z] d\Omega d^2\chi. \quad (6.2.18)$$

Выражение (18) можно переписать так:

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \int_0^\infty d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} d^2\chi E_{\Omega\chi}^{(0)} \exp(i\Omega t + i\chi\mathbf{r} - i\sqrt{k^2 - \chi^2} z) + \text{к. с.} \quad (6.2.19)$$

$$(k = k(\Omega)).$$

Переход к «укороченному» уравнению для комплексной амплитуды. В оптике и радиофизике чаще всего приходится иметь дело с волнами, близкими к монохроматической плоской волне

$$E(t, z) = \frac{1}{2} A_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к. с.} \tag{6.2.20}$$

$$\left(A_0 = \text{const}, k_0 = k(\omega_0 = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0)) \right)$$

Такие **квазимонохроматические квазиплоские** волны естественно представлять в виде, аналогичном (20),

$$E(t, \mathbf{r}, z) = \frac{1}{2} A e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к. с.}, \tag{6.2.21}$$

считая, однако, комплексную амплитуду A в (21) не постоянной (как A_0 в (20)), но функцией времени и координат

$$A = A(t, \mathbf{r}, z) = A(t, x, y, z),$$

которая меняется очень медленно по сравнению с функцией $\exp i(\omega_0 t - k_0 z)$. Естественно в этом случае попытаться перейти от уравнения для поля E к уравнению для его медленно меняющейся амплитуды A . Такие уравнения для A называют «укороченными», поскольку, как правило, они имеют менее сложный вид и более удобны для решения, чем исходное уравнение для полного поля E .

Можно указать на два метода получения «укороченных» уравнений для A .

1-й метод. Если уравнение для E известно, то подставив в него соотношение (21), связывающее E и A , и упрощая полученный результат с учетом того, что по предположению амплитуда мало меняется на интервалах времени порядка $t_0 = 2\pi/\omega_0$ и пространственных интервалах порядка $\lambda_0 = 2\pi/k_0$, приходим к искомому уравнению для A .

2-й метод. Мы будем использовать другой (часто — более простой) подход, преобразуя полученное выше общее решение (19) для поля E таким образом, чтобы сразу получить интегральное представление для A , по которому затем нетрудно восстановить и вид дифференциального уравнения, которому подчиняется A . Иными словами, мы как бы сначала находим решение неизвестного еще «укороченного» уравнения и лишь потом находим само это уравнение.

Рассмотрим подробнее эту процедуру. Умножив и разделив (19) на $\exp i(\omega_0 t - k_0 z)$, получим

$$E = e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_0^\infty d\Omega \int_{-\infty}^\infty E_{\Omega \mathbf{x}}^{(0)} d^2 \mathbf{x} \times$$

$$\times \exp[i(\Omega - \omega_0)t + i\mathbf{x}\mathbf{r} + ik_0 z - i\sqrt{k^2 - \mathbf{x}^2}] + \text{к. с.} \tag{6.2.22}$$

Из сравнения (21) и (22) следует, что

$$A(t, \mathbf{r}, z) = 2 \int_0^{\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Omega, \varkappa}^{(0)} d^2 \varkappa \exp[i(\Omega - \omega_0)t + i\mathbf{\varkappa}\mathbf{r} + i(k_0 - \sqrt{k^2 - \varkappa^2})z]$$

или, если положить

$$\Omega = \omega_0 + \omega, \quad 2E_{\Omega, \varkappa}^{(0)} = 2E_{\omega_0 + \omega, \varkappa}^{(0)} \equiv A_{\omega, \varkappa}^{(0)}, \quad (6.2.23)$$

то

$$A(t, \mathbf{r}, z) = \int_{-\omega_0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \varkappa A_{\omega, \varkappa}^{(0)} \exp[i\omega t + i\mathbf{\varkappa}\mathbf{r} + i(k_0 - \sqrt{k^2 - \varkappa^2})z], \quad (6.2.24)$$

$$k_0 = k(\omega_0), \quad k = k(\omega_0 + \omega). \quad (6.2.24a)$$

Выражение (24) является точным, т. е. оно описывает формально введенную комплексную амплитуду A **любого** поля E , не обязательно квазимонохроматического и квазиплоского, как предполагалось в (21). Учет этих предположений позволяет существенно упростить выражения (24).

Квазимонохроматичность поля E означает, очевидно, что ширина $\Delta\omega_A$ частотного спектра функции A мала по сравнению со средней частотой ω_0 спектра поля E , т. е.

$$\Delta\omega_A \ll \omega_0, \quad (6.2.25)$$

и в (24) нижний предел интегрирования по ω можно заменить на $-\infty$.

Далее, если поле E является квазиплоским или, как говорят, **параксиальным**, то это означает, что волновые векторы всех монохроматических компонент поля E мало отклоняются от оси распространения z , т. е. в (24)

$$\varkappa^2 \ll k^2, \quad \sqrt{k^2 - \varkappa^2} \approx k - \frac{\varkappa^2}{2k}. \quad (6.2.26)$$

Мы приходим к следующему результату: комплексная амплитуда A квазимонохроматического параксиального поля E описывается выражением

$$A = A(t, \mathbf{r}, z) \approx \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int d^2 \varkappa A_{\omega, \varkappa}^{(0)} \times \exp \left\{ i\omega t + i\mathbf{\varkappa}\mathbf{r} + iz \left[k(\omega_0) - k(\omega_0 + \omega) + \frac{\varkappa^2}{2k(\omega_0 + \omega)} \right] \right\}. \quad (6.2.27)$$

Функция $A_{\omega, \varkappa}^{(0)}$ в (27) определяет частотно-волновой Фурье-спектр амплитуды A в начальном сечении $z = 0$:

$$A(t, \mathbf{r}, z = 0) \equiv A^{(0)}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d^2r A_{\omega, \varkappa}^{(0)} e^{i\omega t + i\varkappa \mathbf{r}}. \quad (6.2.28)$$

Выражение (27) позволяет проанализировать особенности распространения волн различного вида в однородных линейных средах.

§ 3. Распространение отдельных видов волн

Немонохроматическая плоская волна в вакууме. В этом случае поле (6.2.9) источника излучения имеет вид импульса произвольной формы

$$E(z = 0, t) = E^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Omega}^{(0)} e^{i\Omega t} d\Omega, \quad (6.3.1)$$

причем согласно (6.2.12)–(6.2.14)

$$h(t) = 0, \quad n(\Omega) = 1, \quad k(\Omega) = \frac{\Omega}{c}. \quad (6.3.2)$$

В результате, полагая в (6.2.18) в соответствии с (1)

$$E_{\Omega, \varkappa}^{(0)} = E_{\Omega}^{(0)} \delta(\vec{\varkappa}),$$

получим

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{\Omega}^{(0)} e^{i\Omega(t-z/c)} d\Omega = E^{(0)}(t - z/c). \quad (6.3.3)$$

Из (3) следует, что исходный импульс (1) при распространении переносится со скоростью c вдоль оси z безо всяких искажений. Это понятно, поскольку в случае (1) и (2) ни дисперсия, ни дифракция при распространении не проявляются.

Монохроматическая параксиальная волна. Параболическое уравнение. Частотно-волновой спектр источника $A_{\omega, \varkappa}^{(0)}$ в этом случае имеет вид

$$A_{\omega, \varkappa}^{(0)} = A_{\varkappa}^{(0)} \delta(\omega). \quad (6.3.4)$$

Подставив (4) в (6.2.27) и интегрируя по ω , получим

$$A(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\varkappa}^{(0)} e^{i\varkappa \mathbf{r} + i\frac{\varkappa^2 z}{2k_0}} d^2\varkappa. \quad (6.3.5)$$

Найдем, используя (5), дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет A . Имея в виду, что $\varkappa \mathbf{r} = \varkappa_x x + \varkappa_y y$, находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial \rho} &= i \int \varkappa_\rho A_\varkappa^{(0)} \exp \left(i \left[\varkappa \mathbf{r} + \frac{\varkappa^2 z}{2k_0} \right] \right) d^2 \varkappa, \quad \rho = x, y, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial \rho^2} &= - \int \varkappa_\rho^2 A_\varkappa^{(0)} \exp \left(i \left[\varkappa \mathbf{r} + \frac{\varkappa^2 z}{2k_0} \right] \right) d^2 \varkappa, \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{iz}{2k_0} \int \varkappa^2 A_\varkappa^{(0)} \exp \left(i \left[\varkappa \mathbf{r} + \frac{\varkappa^2 z}{2k_0} \right] \right) d^2 \varkappa.\end{aligned}\tag{6.3.5a}$$

Сопоставляя эти выражения, получим, что A удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_\perp A = 0,\tag{6.3.6}$$

которое называют **параболическим** или уравнение **квaziоптики**; в (6)

$$\Delta_\perp = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\tag{6.3.6a}$$

— поперечный лапласиан.

Выражение (5) дает решение параболического уравнения (6) в волновом представлении. Исходя из (5), нетрудно найти вид этого решения в координатном представлении. Согласно (5)

$$A(\mathbf{r}, z = 0) = A^{(0)}(\mathbf{r}) = \int A_\varkappa^{(0)} e^{i\varkappa \mathbf{r}} d^2 \varkappa,$$

откуда следует, что

$$A_\varkappa^{(0)} = \frac{1}{4\pi^2} \int A^{(0)}(\mathbf{r}_1) e^{-i\varkappa \mathbf{r}_1} d^2 r_1.\tag{6.3.7}$$

Подстановка (7) в (5) дает:

$$A(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint d^2 r_1 d^2 \varkappa A^{(0)}(z) \exp[i\varkappa(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 + i\varkappa^2 z/2k_0].\tag{6.3.8}$$

Интегрируя в (8) по \varkappa , придем к следующим выражениям для A в координатном представлении:

$$A(\mathbf{r}, z) = \int A^{(0)}(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) d^2 r_1,\tag{6.3.9}$$

или

$$A(\mathbf{r}, z) = \int A^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) H(\mathbf{r}_1) d^2 r_1,$$

где

$$H(\mathbf{r}) = \frac{ik_0}{2\pi z} \exp \left\{ -i \frac{k_0}{2z} \mathbf{r}^2 \right\}\tag{6.3.10}$$

— функция Грина уравнения (6).

Немонохроматическая параксиальная волна в вакууме. Нестационарное параболическое уравнение. Учитывая в (6.2.18) условия (2), которые выполняются при распространении в вакууме и при-

ближенное выражение (6.2.26), соответствующее параксиальному распространению, получим

$$E(\theta, \mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega d^2\boldsymbol{\kappa} E_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}^{(0)} \exp \left[i\Omega\theta + i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} + \frac{ic\boldsymbol{\kappa}^2 z}{2\Omega} \right]. \quad (6.3.11)$$

$$(\theta = t - z/c)$$

Дифференцируя это выражение по координатам x, y, z и запаздывающему времени θ , найдем, что поле E в рассматриваемом случае удовлетворяет так называемому **нестационарному параболическому уравнению**

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \theta \partial z} - \frac{c}{2} \Delta_{\perp} E = 0. \quad (6.3.12)$$

Это уравнение является линейным аналогом уравнения Хохлова—Заболотской, применяемого в акустике.

Выражение (11) описывает решение для (12) в частотно-волновом представлении. Если перейти к пространственно-временному представлению, то получим

$$E(\theta, \mathbf{r}, z) = \frac{1}{2\pi cz} \frac{\partial}{\partial \theta} \int E^{(0)} \left(\mathbf{r}_1, t = \theta - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2}{2cz} \right) d^2 r_1, \quad (6.3.13)$$

где согласно (11)

$$E^{(0)}(\mathbf{r}, t) = E(t, \mathbf{r}, z = 0) = \int E_{\Omega, \boldsymbol{\kappa}}^{(0)} e^{i\Omega t + i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d\Omega d^2 r$$

— поле $E^{(0)}$ на границе $z = 0$, предполагается заданным. Для квазимонохроматических волн, применяя представление поля в виде (6.2.21), из (12) получаем (см. также [15])

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial \eta} + \frac{i}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0. \quad (6.3.14a)$$

Отсюда следует, что второе слагаемое (смешанная производная) учитывает влияние временной модуляции на эффект дифракции. Действительно, записывая $A = A(t, \mathbf{r}, z)$ через Фурье-спектр

$$A(\eta, \mathbf{r}, z) = \int A_{\omega}(\mathbf{r}, z) e^{i\omega\eta} d\omega,$$

имеем уравнение

$$\frac{\partial A_{\omega}}{\partial z} + \frac{i}{2(1 + \omega/\omega_0)k_0} \Delta_{\perp} A_{\omega} = 0, \quad (6.3.14б)$$

из которого ясно видно, что длинноволновые компоненты ($\omega < 0$) будут дифрагировать медленнее, чем коротковолновые ($\omega > 0$). В случае волны с частотной шириной спектра $\Delta\omega_A \ll \omega_0$ или монохроматической волны уравнения (14) принимает вид уравнения (6.3.6).

Квазимонохроматическая плоская волна. Это предположение означает, что

$$A_{\omega, \varkappa}^{(0)} = A_{\omega}^{(0)} \delta(\varkappa).$$

В результате, проинтегрировав в (6.2.27) по \varkappa , получим

$$A = A(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\omega}^{(0)} e^{i\omega t + iz[k(\omega) - k(\omega_0 + \omega)]} d\omega. \quad (6.3.15)$$

Предполагаемая квазимонохроматичность означает, в свою очередь, что в (15) $\omega \ll \omega_0$. Используя это, представим $k(\omega_0 + \omega)$ в виде ряда по степеням ω , что дает

$$k(\omega_0) - k(\omega_0 + \omega) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m}{m!} \omega^m, \quad (6.3.16)$$

где

$$k_m = \left(\frac{\partial}{\partial \omega} \right)^m k(\omega_0 + \omega) \Big|_{\omega=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \omega_0} \right)^m k(\omega_0).$$

Подстановка (16) в (15) приводит к следующему выражению для A :

$$A(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\omega}^{(0)} e^{i\omega\theta - iz\psi(\omega)} d\omega, \quad (6.3.17)$$

где

$$\psi(\omega) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{k_n \omega^n}{n!}, \quad \theta = t - k_1 z = t - z/u, \quad (6.3.18)$$

$u = 1/k_1$ — групповая скорость волны на частоте ω_0 .

Из (17) и (18) следует, что комплексная амплитуда удовлетворяет уравнению (ср. с (1.1.10) книги [3])

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_m}{m!} \left(\frac{\partial}{i \partial \theta} \right)^m A = 0. \quad (6.3.19)$$

Каждый из коэффициентов k_m в (17)–(19) описывает, условно говоря, дисперсионные эффекты m -го порядка. В частности, при учете только дисперсионных явлений второго порядка, уравнение (19) имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0, \quad (6.3.20)$$

и сходно с параболическим уравнением (6). С этим сходством связано появление ряда физически интересных пространственно-временных аналогий — например, с аналогией между фокусировкой и дифракционным расширением волновых пучков (которые описываются параболическим уравнением (6) (см. гл. 9)), с одной стороны, компрессией и дисперсионным расплыванием импульсов (которые описываются уравнением (20)) — с другой (см. главы 7 и 8).

Согласно (17) решение уравнения (20) имеет следующий вид (в спектральном представлении):

$$A(\theta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\omega}^{(0)} e^{i\omega - i\frac{zk_2}{2}\omega^2} d\omega, \quad (6.3.21)$$

а во временном представлении

$$A(\theta, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ik_2}} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t_1) e^{i\frac{(\theta-t_1)^2}{2zk_2}} dt. \quad (6.3.22)$$

Переход от (21) к (22) аналогичен проделанному выше переходу от (5) к (9).

§ 4. Модели и статистические характеристики случайных волн

Радиофизические и оптические примеры случайных полей многообразны. Случайным и гауссовским является, в частности, электромагнитное поле, излучаемое нелазерным источником света. Из-за внутренних флуктуаций в генераторе флуктуаций параметров антенной системы как случайное во многих ситуациях следует рассматривать и поле излучения радиопередатчика. Модель случайного поля оказывается часто наиболее адекватной при описании излучения многомодового лазера.

Примерами случайных полей могут служить поле температуры, влажности, диэлектрической проницаемости в реальной турбулентной атмосфере; случайным становится и электромагнитное поле, распространяющееся в такой флуктуирующей среде.

Рис. 6.1 иллюстрирует один из таких примеров; здесь показано, как трансформируется распределение интенсивности $I = E^2$ первоначального регулярного светового пучка после прохождения через турбулентную среду. Флуктуации диэлектрической проницаемости турбулентной среды приводят к тому, что однородное на входе распределение интенсивности по поперечному сечению пучка превращается в нерегулярное, случайное. Поэтому на входе турбулентной среды интенсивность I и само электромагнитное поле E становятся случайными функциями времени и координат ¹⁾

$$E = E(t, \mathbf{R}), \quad I = I(t, \mathbf{R})$$

$$(\mathbf{R} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z).$$

¹⁾ Случайные поля, формирующиеся при диффузном отражении лазерного излучения от шероховатой поверхности, часто называют полем со спекл-структурой [17].

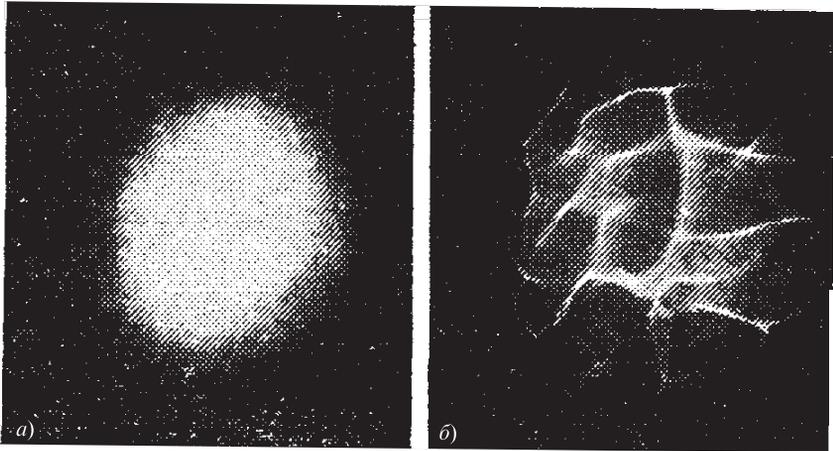


Рис. 6.1. Мгновенные распределения интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка до (а) и после (б) прохождения его через турбулентную среду. Видно, что после прохождения пучка через турбулентную среду распределение интенсивности приобретает случайный характер [4]

Естественно, подобно тому как мы делали для функции одной переменной (времени), для случайных полей можно ввести законы распределения, средние, корреляционные функции и другие статистические характеристики.

Ниже статистические свойства случайных полей мы рассмотрим на примере напряженности переменного электромагнитного поля. Речь будет идти о пространственно-временном случайном поле E , зависящем от \mathbf{R} и t . Сначала мы ограничимся одной из компонент поля (фактически рассмотрим **скалярное** поле), а затем обратимся к векторным случайным полям.

Стационарные, однородные, изотропные и факторизованные поля. Пространственно-временные корреляционные функции. Введем средние значения и корреляционные функции для скалярного случайного поля $E(\mathbf{R}, t)$. Как правило, в радиофизике и оптике

$$\langle E \rangle = 0,$$

так что корреляционная функция поля $E(\mathbf{R}, t)$, являющаяся аналогом введенной в гл. 1 функции

$$B(t_1, t_2) = B(t, \tau) \quad (t = t_1, \tau = t_2 - t_1)$$

(см. (1.3.8)), имеет вид

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{R}_1, t_1)E(\mathbf{R}_2, t_2) \rangle. \quad (6.4.1)$$

Как и для случайных процессов, здесь можно выделить класс **стационарных** случайных полей, для которых статистические харак-

теристики не зависят от начала отсчета времени, т. е. согласно (1)

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = B(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, t_2 - t_1). \quad (6.4.2)$$

По аналогии с (2) вводится также модель **однородных** полей, для которых корреляционная функция зависит лишь от разности $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$:

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = B(t_1, t_2, \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \quad (6.4.3)$$

(стационарности при этом может и не быть).

Однородное случайное поле называется при этом *изотропным*, если корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения $s = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$ расстояния между двумя точками.

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = B(t_1, t_2, |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|). \quad (6.4.4)$$

Поле может быть также одновременно **и стационарным, и однородным**. Согласно (2) и (3) при этом

$$\begin{aligned} B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) &= B(\tau, \mathbf{s}) \\ (\tau = t_2 - t_1, \quad \mathbf{s} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1). \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

Отметим еще класс **факторизованных** полей вида

$$E(\mathbf{R}, t) = F(\mathbf{R})f(t). \quad (6.4.6)$$

В этом случае, очевидно, факторизована будет и корреляционная функция,

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = B_F(R_1, R_2)B_f(t_1, t_2), \quad (6.4.7)$$

причем, если $F(\mathbf{R})$ — однородное случайное поле, а $f(t)$ — стационарный случайный процесс, то выражение (7) примет вид

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = B_F(\mathbf{s})B_f(\tau). \quad (6.4.8)$$

Частотно-волновой спектр. Случайные волны, расходящиеся от источника излучения, бегут, вообще говоря, в разных направлениях (исключением является плоская волна), и важно знать частотно-волновой спектр излучения $G(\omega, \mathbf{k})$, показывающий, какая доля полной интенсивности волны приходится на какое-то данное направление R на данной частоте ω , так что

$$I = \langle E^2(\mathbf{R}, t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int G(\omega, \mathbf{k}) d\omega d^3k. \quad (6.4.9)$$

В теории случайных процессов аналогом спектра $G(\omega, \mathbf{k})$ являлся частотный спектр $G(\omega)$, определяющий распределение интенсивности по частотам,

$$I = \langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega$$

(см. (1.3.14)).

Напомним, функция $G(\omega)$ находится путем фурье-преобразования временной корреляционной функции $B(\tau)$ (см. (1.3.18)). Соответственно спектр $G(\omega, \mathbf{k})$ будем искать, преобразуя по Фурье пространственно-временную функцию $B = B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2)$ (1).

Ограничимся анализом наиболее часто используемой модели стационарного и однородного случайного поля, когда согласно (5)

$$B = B(\tau, \mathbf{s}, \quad \tau = t_2 - t_1, \quad \mathbf{s} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1. \quad (6.4.10)$$

Запишем случайное поле в виде интеграла Фурье

$$E(\mathbf{R}, t) = \int \int_{-\infty}^{\infty} E_{\omega \mathbf{k}} e^{i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{R}} d\omega d^3k, \quad (6.4.11)$$

т. е. в виде разложения по плоским монохроматическим волнам. В (11) функции $E_{\omega \mathbf{k}}$ — спектральные амплитуды поля E , являющиеся комплексными случайными функциями ω и \mathbf{k} (аналогичными комплексным амплитудам ξ_{ω} в (1.3.13)).

Используя (11), корреляционную функцию (1) действительного поля E можно, как нетрудно убедиться, представить в виде

$$B(\mathbf{R}_1, t_1, \mathbf{R}_2, t_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int d\omega d\omega' d^3k d^3k' \langle E_{\omega \mathbf{k}} E_{\omega' \mathbf{k}'}^* \rangle \times \\ \times \exp[i\omega t - i\omega'(t + \tau) + i\mathbf{k}\mathbf{R} - i\mathbf{k}'(\mathbf{R} + \mathbf{s})], \quad (6.4.12)$$

где $t = t_1$, $t + \tau = t_2$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{R} + \mathbf{s} = \mathbf{R}_2$.

Для того, чтобы согласно (10) в (12) осталась зависимость только от τ и \mathbf{s} и чтобы при $\tau = 0$, $\mathbf{s} = 0$ выражение (12) перешло в (9), коррелятор спектральных амплитуд (12) должен иметь вид

$$\langle E_{\omega \mathbf{k}} E_{\omega' \mathbf{k}'}^* \rangle = G(\omega, \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (6.4.13)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$B = B(\tau, \mathbf{s}) = \int \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\omega\tau - i\mathbf{k}\mathbf{s}} d\omega d^3s, \quad (6.4.14)$$

и, следовательно,

$$G(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau, \mathbf{s}) e^{i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{s}} d\tau d^3s. \quad (6.4.15)$$

Выражения (14) и (15) являются обобщением на стационарные и однородные случайные поля формул Винера—Хинчина (1.3.17), (1.3.18) и при

$$G(\omega, \mathbf{k}) = G(\omega) \delta(\mathbf{k}), \quad B(\tau, \mathbf{s}) = B(\tau)$$

в них переходят. Из соотношений (14) и (15) и действительности B и G следует четность этих функций:

$$B(-\tau, -s) = B(\tau, s), \quad G(-\omega, -\mathbf{k}) = G(\omega, \mathbf{k}) \quad (6.4.16)$$

(ср. с (1.3.19)).

Постоянные изотропные случайные поля. Объемное поле, плоское поле.

Рассмотрим постоянное во времени поле, в котором имеются только случайные пространственные флуктуации. Эти флуктуации будем считать изотропными, так что корреляция между значениями поля в точках \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 будет зависеть лишь от модуля s разности $\mathbf{s} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$. В этом случае

$$B(\tau, \mathbf{s}) = B(s), \quad G(\omega, \mathbf{k}) = G(\mathbf{k})\delta(\omega),$$

и формулы (14), (15) примут вид

$$B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^3k, \quad (6.4.17)$$

$$G(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(s)e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^3s. \quad (6.4.18)$$

Объемное поле. Введя в (18) сферические координаты s, θ, φ и отсчитывая угол θ от направления вектора \mathbf{k} , получим

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} B(s)e^{i\mathbf{k}\mathbf{s} \cos \theta} \sin \theta s^2 ds = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} sB(s) \sin ks ds = G(k), \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

т. е.

$$G(-k) = G(k)$$

— волновой спектр изотропного поля тоже изотропен. При этом выражение (17) приводится к виду

$$B(s) = \frac{4\pi}{s} \int_0^{\infty} G(k)k \sin ks dk = B(-s). \quad (6.4.20)$$

Примеры. Рассчитаем корреляционную функцию (20) для некоторых видов спектра $G(k)$.

1. Если волновой спектр равномерен в интервале $[0, k_0]$,

$$G(k) = \begin{cases} G_0, & k \leq k_0, \\ 0, & k > k_0 \end{cases} \quad (6.4.21)$$

то подстановка (21) в (20) дает

$$B(s) = \frac{4\pi}{s} G_0 \int_0^{k_0} k \sin ks \, dk = 4\pi \frac{\sin k_0 s - k_0 s \cos k_0 s}{s^3} \quad (6.4.22)$$

(см. рис. 6.2 а).

2. В случае гауссовского волнового спектра

$$G(k) = G_0 \exp[-(k/k_0)^2]; \quad (6.4.23)$$

для пространственной корреляционной функции получаем

$$B(s) = \sqrt{\pi} k_0^3 G_0 \exp[-(2k_0 s)^2] \quad (6.4.24)$$

(см. рис. 6.2 б)

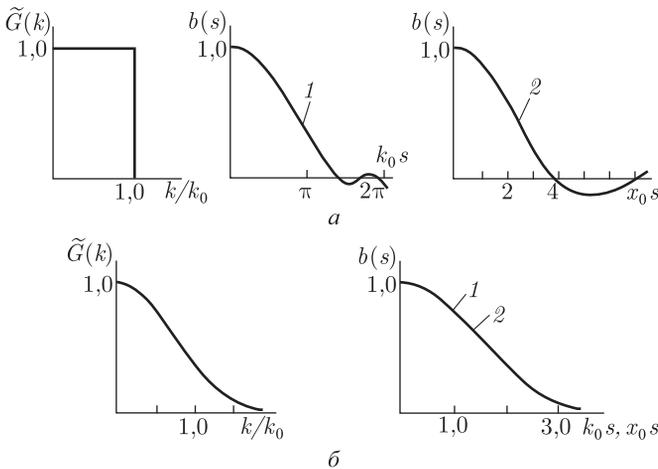


Рис. 6.2. Равномерное (а) и гауссовское (б) спектральные распределения $\tilde{G}(k)$ и соответствующие им корреляционные функции $b(s)$ для трехмерного (1) и двумерного (2) случаев. $\tilde{G}(k) = G(k)/G_0$, $b(s) = B(s)/B(0)$

Плоское поле. Рассмотрим постоянное во времени случайное поле на плоскости (x, y) , вводя радиус-вектор $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y$, точки на этой плоскости и волновой вектор $\vec{\kappa} = \mathbf{e}_x \kappa_x + \mathbf{e}_y \kappa_y$. В этом случае об-

щие соотношения (14), (15) между пространственной корреляционной функцией и волновым спектром принимают вид

$$\begin{aligned} B(\mathbf{s}) &= \int G(\boldsymbol{\varkappa}) e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{s}} d^2\boldsymbol{\varkappa}, \\ G(\boldsymbol{\varkappa}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int B(\mathbf{s}) e^{i\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{s}} d^2\mathbf{s} \quad (\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (6.4.25)$$

В частном случае статистически однородного и изотропного поля формулы (25) переходят в следующие:

$$B(s) = 2\pi \int_0^\infty J_0(\boldsymbol{\varkappa}s) G(\boldsymbol{\varkappa}) \boldsymbol{\varkappa} d\boldsymbol{\varkappa}, \quad (6.4.26)$$

$$G(\boldsymbol{\varkappa}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\boldsymbol{\varkappa}s) B(s) s ds, \quad (6.4.27)$$

где $J_m(\boldsymbol{\varkappa}s)$ — функция Бесселя m -го порядка от действительного аргумента.

Примеры. 1) В случае равномерного спектра (21) формула (26) дает (см. рис. 6.2а):

$$\begin{aligned} B(s) &= 2\pi G_0 \int_0^\boldsymbol{\varkappa} J_0(s\boldsymbol{\varkappa}) \boldsymbol{\varkappa} d\boldsymbol{\varkappa} = 2\pi G_0 \boldsymbol{\varkappa}_0 \frac{J_1(\boldsymbol{\varkappa}_0 s)}{s} \\ & \quad (\boldsymbol{\varkappa}_0 = k_0) \end{aligned} \quad (6.4.28)$$

2) В случае гауссовского спектра (23) получим (см. рис. 6.2б)

$$\begin{aligned} B(s) &= 2\pi G_0 \int J_0(\boldsymbol{\varkappa}s) e^{-(\boldsymbol{\varkappa}/\boldsymbol{\varkappa}_0)^2} \boldsymbol{\varkappa} d\boldsymbol{\varkappa} = \pi G_0 \boldsymbol{\varkappa}_0^2 e^{-(s\boldsymbol{\varkappa}_0)^2/2} \\ & \quad (\boldsymbol{\varkappa}_0 = k_0) \end{aligned} \quad (6.4.29)$$

Радиус корреляции r_k . Ширина волнового спектра Δk . «Соотношение неопределенностей» между r_k и Δk . Как непосредственно видно из (20) и (26),

$$B(s) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (6.4.30)$$

Соответственно, характерным параметром пространственной корреляционной функции $B(s)$ является **радиус корреляции** r_k , по порядку величины равный тому значению s , при котором $B(s)$ уменьшается в несколько раз по сравнению со своим максимальным значением $B(0)$. Во многих случаях удобно использовать, например, интегральное определение радиуса корреляции, полагая

$$r_k = \int_0^\infty B(s) ds / B(0). \quad (6.4.31)$$

Точно так же, имея в виду (19) и (27), для волнового спектра $G(k)$ можно написать соотношение, аналогичное (30),

$$G(k) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

и определить основной параметр функции $G(k)$ — **ширину волнового спектра** Δk выражением, аналогичным (31),

$$\Delta k = \int_0^{\infty} G(k) dk / G(0) \quad (6.4.32)$$

(если $G(0) = G(k)_{\max}$). Удобство оценок (31) и (32) не только в их простоте и однозначности, но и в том, что, как нетрудно убедиться, r_k можно точно выразить не только через $B(s)$, но и через $G(k)$, а Δk — не только через $G(k)$, но и через $B(s)$.

1. Покажем это сначала для объемных (трехмерных) изотропных случайных полей. Согласно (19) и (20) в этом случае

$$B(0) = 4\pi \int_0^{\infty} G(k) k^2 dk, \quad G(0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} B(s) s^2 ds. \quad (6.4.33)$$

Учитывая интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ks}{s} ds = \frac{\pi}{2},$$

находим также, что

$$\int_0^{\infty} B(s) ds = 2\pi^2 \int_0^{\infty} G(k) k dk, \quad \int_0^{\infty} G(k) dk = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} B(s) s ds. \quad (6.4.34)$$

Подставив (33), (34) в (31), (32), получим:

$$r_k = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} G(k) k dk}{\int_0^{\infty} G(k) k^2 dk}, \quad \Delta k = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} s B(s) ds}{\int_0^{\infty} B(s) s^2 ds}. \quad (6.4.35)$$

2. В случае плоских (двумерных) полей, используя (26), (27) и интеграл

$$\int_0^{\infty} J_0(bx) dx = \frac{1}{b},$$

найдем, что

$$B(0) = 2\pi \int_0^{\infty} G(\varkappa) \varkappa d\varkappa, \quad G(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} B(s) s ds, \quad \int_0^{\infty} B(s) ds = 2\pi \int_0^{\infty} G(\varkappa) d\varkappa.$$

Подстановка этих выражений в (31), (32) дает:

$$r_k = \frac{\int_0^{\infty} G(\varkappa) d\varkappa}{\int_0^{\infty} G(\varkappa) \varkappa d\varkappa}, \quad \Delta k = \frac{\int_0^{\infty} B(s) ds}{\int_0^{\infty} B(s) s ds}. \quad (6.4.36)$$

Объединяя (31), (32) и (35), (36), получим интегральные оценки для r_k и Δk в произвольном (координатном или волновом) представлении: для объемных изотропных полей

$$r_k = \frac{\int_0^{\infty} B(s) ds}{B(0)} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} G(k) k dk}{\int_0^{\infty} G(k) k^2 dk}, \quad (6.4.37)$$

$$\Delta k = \frac{\int_0^{\infty} G(k) dk}{G(0)} = \frac{\pi}{2} \frac{\int_0^{\infty} B(s) s ds}{\int_0^{\infty} B(s) s^2 ds};$$

для плоских изотропных полей

$$r_k = \frac{\int_0^{\infty} B(s) ds}{B(0)} = \frac{\int_0^{\infty} G(\varkappa) d\varkappa}{\int_0^{\infty} G(\varkappa) \varkappa d\varkappa}, \quad (6.4.38)$$

$$\Delta k = \frac{\int_0^{\infty} G(\varkappa) d\varkappa}{G(0)} = \frac{\int_0^{\infty} B(s) ds}{\int_0^{\infty} B(s) s ds}.$$

Примеры. 1) Для модели равномерного спектра (21) имеем:

$$G(0) = G_0, \quad \int_0^{\infty} G(k) dk = G_0 k_0, \quad \int_0^{\infty} G(k) k dk = \frac{1}{2} G_0 k_0^2,$$

$$\int_0^{\infty} G(k) k^2 dk = \frac{1}{3} G_0 k_0^2.$$

Подставив эти выражения в (37), (38), находим: для объемного поля

$$r_k = \frac{3\pi}{4k_0}, \quad \Delta k = k_0, \quad r_k \cdot \Delta k = \frac{3\pi}{4} \approx 2,35; \quad (6.4.39)$$

для плоского поля

$$r_k = \frac{2}{k_0}, \quad \Delta k = k_0, \quad r_k \cdot \Delta k = 2. \quad (6.4.40)$$

2) Если принять модель гауссовского спектра (23), то

$$G(0) = G_0, \quad \int_0^\infty G(k) dk = \frac{\sqrt{\pi}}{2} G_0 k_0, \quad \int_0^\infty G(k) k dk = \frac{1}{2} G_0 k_0^2, \\ \int_0^\infty G(k) k^2 dk = \frac{\sqrt{\pi}}{4} G_0 k_0^3,$$

и согласно (31), (32) для объемного поля

$$r_k = \frac{\sqrt{\pi}}{k_0}, \quad \Delta k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} k_0, \quad r_k \cdot \Delta k = \frac{\pi}{2}; \quad (6.4.41)$$

для плоского поля получим в рассматриваемом случае те же значения:

$$r_k = \frac{\sqrt{\pi}}{k_0}, \quad \Delta k = \frac{\sqrt{\pi}}{2} k_0, \quad r_k \cdot \Delta k = \frac{\pi}{2}. \quad (6.4.42)$$

Полученные результаты показывают, что между характерными параметрами r_k и Δk случайных полей существует универсальная связь, которую можно выразить «соотношением неопределенностей» (соотношение взаимности [16])

$$r_k \cdot \Delta k \sim 1, \quad (6.4.43)$$

аналогичным (1.3.22). Заметим, что для анизотропных полей, для которых радиусы корреляции и ширины волнового спектра по разным направлениям различны, вместо (43) следует писать

$$r_{kx} \cdot k_x \sim 1, \quad r_{ky} \cdot k_y \sim 1, \quad r_{kz} \cdot \Delta k_z \sim 1.$$

Когерентность. Степень когерентности. Смысл рассмотренного выше радиуса корреляции r_k в том, что он характеризует в среднем статистическую связь или **когерентность**¹⁾ полей $E_1(\mathbf{R}_1)$ и $E_2(\mathbf{R}_2)$ в двух разных точках пространства: если

$$|\mathbf{s}| \gg r_k \quad (\mathbf{s} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1),$$

то поля E_1 и E_2 можно с большой точностью считать статистически независимыми; если же

$$|\mathbf{s}| \ll r_k,$$

то значения E_1 и E_2 практически совпадают.

¹⁾ Cohere (англ.) — быть сцепленным, связанным, согласоваться.

Как более детальную количественную характеристику когерентности используют **степень когерентности**

$$\gamma_E = \frac{\langle E_1 E_2 \rangle}{\langle E_1^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle E_2^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq \gamma_E \leq 1 \quad (6.4.44)$$

$$(E_1 = E(\mathbf{R}_1, t_1), \quad E_2 = E(\mathbf{R}_2, t_2))$$

которая является пространственным аналогом обычного коэффициента корреляции R случайных процессов — см. (1.3.2). При рассмотрении полей типа квазимонохроматической квазиплоской случайной волны

$$E = A(t, \mathbf{r}, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к. с.}$$

вместо (44) можно использовать степень когерентности вида

$$\gamma_A = \frac{\langle A_1 A_2^* \rangle}{\langle |A_1|^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle |A_2|^2 \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq |\gamma_A| \leq 1 \quad (6.4.45)$$

$$(A_1 = A(t_1, \mathbf{r}_1, z_1), \quad A_2 = A(t_2, \mathbf{r}_2, z_2)).$$

Волны с $|\gamma_A| = 1$ называют полностью когерентными. Значения $0 < |\gamma_A| < 1$ соответствуют частично (или неполностью) когерентным волнам. Для некогерентных полей $|\gamma_A| = 0$ при любых неравных значениях одних и тех же аргументов в выражении (45).

§ 5. Векторные случайные поля

Случайная поляризация. Для векторного случайного поля случайными являются не только амплитуда и фаза, но и состояние поляризации. Рассмотрим один из способов задания статистики поляризации электромагнитной волны. Пусть плоская случайная волна распространяется в направлении оси z . Обозначим через E_x и E_y две вещественные ортогональные компоненты вектора $\mathbf{E}(z, t)$ в плоскости $z = \text{const}$ ($E_z = 0$):

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \rho_x(t) \cos(\omega t + \varphi_x(t)), \\ E_y(t) &= \rho_y(t) \cos(\omega t + \varphi_y(t)). \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

Исключая из (1) ωt , нетрудно получить соотношение

$$\left(\frac{E_x}{\rho_x(t)} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{\rho_y(t)} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{\rho_x(t) \rho_y(t)} \cos \vartheta(t) = \sin^2 \vartheta(t), \quad (6.5.2)$$

где $\vartheta(t) = \varphi_y(t) - \varphi_x(t)$.

Уравнение (2) является уравнением эллипса. Таким образом, в общем случае электрический вектор \mathbf{E} электромагнитного поля описывает в пространстве эллипс. Такая волна называется эллиптически поляризованной.

Эллипс может вырождаться в окружность либо в прямую линию. Волне с круговой поляризацией соответствуют $\rho_x = \rho_y$

и $\vartheta = (2m + 1)\pi/2$, линейно поляризованной волне — $\vartheta = m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \dots$). Направление вращения вектора \mathbf{E} определяется знаком $\sin \vartheta$; при $\sin \vartheta > 0$ имеет место правовращающаяся поляризация, а при $\sin \vartheta < 0$ — левовращающаяся поляризация.

Для случайной волны ($\rho_j(t)$ и $\varphi_j(t)$ — случайные функции) определенный вид поляризации и ее параметры сохраняются в течение интервала времени, малого по сравнению с временем корреляции волны ($\tau < \tau_k$). В противоположном случае ($t \gg \tau_k$) параметры поляризации и ее вид меняются случайным образом.

Основными параметрами эллиптически поляризованной волны являются: угол ориентации ψ эллипса (угол наклона большой полуоси к оси x ; см. рис. 6.3):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\rho_x \rho_y \cos(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 - \rho_y^2}, \quad (6.5.3)$$

и коэффициент эллиптичности, равный отношению длин малой полуоси к большой:

$$K = \pm \frac{E_{\min}}{E_{\max}} = \operatorname{tg} \chi, \quad (6.5.4)$$

Рис. 6.3. Эллипс поляризации

где χ — вспомогательный угол,

$$\sin 2\chi = \frac{2\rho_x \rho_y \sin(\varphi_x - \varphi_y)}{\rho_x^2 + \rho_y^2}. \quad (6.5.5)$$

Как уже отмечалось, для случайной волны величины ψ и χ флуктуируют во времени. Очевидно, что в случае пространственно-модулированных волн ($\rho_j = \rho_j(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_j(\mathbf{r}, t)$) параметры ψ и χ изменяются и в пространстве. Формулами (4) и (5) можно воспользоваться, например, для анализа деполяризации лазерного излучения. А сейчас перейдем к описанию поляризационных свойств волны с помощью величин, имеющих размерность интенсивности, которые можно непосредственно измерить в эксперименте.

Поляризационная матрица, параметры Стокса. Предположим, что ортогональные компоненты E_x и E_y волны представляют собой стационарные случайные процессы. Рассматриваемую волну можно охарактеризовать набором корреляционных функций

$$B_{ij}(\tau) = \langle A_i(t) A_j^*(t + \tau) \rangle \quad (i, j = x, y). \quad (6.5.6)$$

Образует из $B_{ij}(\tau)$ матрицу

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} B_{xx}(0) & B_{xy}(0) \\ B_{yx}(0) & B_{yy}(0) \end{pmatrix}. \quad (6.5.7)$$

Диагональные элементы матрицы (7) суть средние интенсивности \bar{I}_x и \bar{I}_y ($\bar{I}_j = B_{jj}(0)$) ортогональных компонент. Недиагональные элемен-

ты зависят как от амплитуд, так и от разности фаз компонент волны. Матрица (7) определяет, таким образом, интенсивность волны и ее поляризацию и поэтому называется поляризационной¹⁾.

С поляризационной матрицей тесно связаны параметры Стокса. Введем «мгновенные» значения стоксовых параметров

$$\begin{aligned} S_0(t) &= |A_x(t)|^2 + |A_y(t)|^2, & S_1(t) &= |A_x(t)|^2 - |A_y(t)|^2, \\ S_2 &= A_x(t)A_y^*(t) + A_x^*(t)A_y(t), & S_3 &= -i(A_x(t)A_y^*(t) - A_x^*(t)A_y(t)). \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Средние значения величин $S_j(t)$ принято называть просто параметрами Стокса, они определяются элементами поляризационной матрицы (7)

$$\begin{aligned} \bar{S}_0 &= B_{xx}(0) + B_{yy}(0), & \bar{S}_1 &= B_{xx}(0) - B_{yy}(0), \\ \bar{S}_2 &= B_{xy}(0) + B_{yx}(0), & \bar{S}_3 &= -i(B_{xy}(0) - B_{yx}(0)). \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

Они имеют следующий физический смысл. Параметр S_0 равен интенсивности эллиптически поляризованной волны. Параметр \bar{S}_1 есть разность интенсивности ортогональных компонент, он характеризует преимущественную горизонтальную ($\bar{S}_1 > 0$) или вертикальную ($\bar{S}_1 < 0$) поляризацию волны. Остальные параметры \bar{S}_2 и \bar{S}_3 зависят от корреляции между ортогональными компонентами. Можно показать [5, 8], что \bar{S}_2 равно разности интенсивностей волн в системе координат, повернутой относительно исходной на $\pi/4$, а параметр \bar{S}_3 — разность интенсивностей волн круговой поляризации с противоположным направлением вращения. Рассмотренное физическое содержание параметров Стокса показывает также способ их измерения.

Полностью и частично поляризованные волны. С помощью параметров Стокса (8) поляризационная матрица (7) записывается в виде

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{S}_0 + \bar{S}_1 & \bar{S}_2 + i\bar{S}_3 \\ \bar{S}_2 - i\bar{S}_3 & \bar{S}_0 - \bar{S}_1 \end{pmatrix}. \quad (6.5.10)$$

Инвариантами матриц (7) и (10) являются определитель

$$\det \hat{J} = \{B_{xx}B_{yy} - |B_{xy}|^2\} = \frac{1}{2} \{\bar{S}_0^2 - \bar{S}_1^2 - \bar{S}_2^2 - \bar{S}_3^2\} \geq 0 \quad (6.5.11)$$

и след матрицы

$$\text{Sp} \hat{J} = B_{xx} + B_{yy} = S_0 > 0. \quad (6.5.12)$$

В случае полностью поляризованной волны коэффициент взаимной корреляции

$$\gamma_{xy} = B_{xy}(0) / \sqrt{B_{xx}(0)B_{yy}(0)} = e^{i\psi}, \quad (6.5.13)$$

так что $\det \hat{J} = 0$. Для неполяризованной волны все направления вектора \mathbf{E} в плоскости волнового фронта равновероятны (коэффициент

¹⁾ Другие методы описания случайной поляризации см. в [5–7].

взаимной корреляции $\gamma_{xy} = 0$, $B_{xx} = B_{yy} = I$). Поляризационная матрица при этом имеет вид

$$\hat{J} = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5.14)$$

В промежуточном случае частично поляризованной волны $0 < |\gamma_{xy}| < 1$.

Частично поляризованную волну можно разложить на полностью поляризованную и полностью неполяризованную волны, т. е. матрицу (7) можно записать в виде

$$\hat{J} = \hat{J}^{\text{пол}} + \hat{J}^{\text{непол}}, \quad (6.5.15)$$

где $\hat{J}^{\text{пол}}$ и $\hat{J}^{\text{непол}}$ — матрицы полностью поляризованной и неполяризованной волн соответственно:

$$\hat{J}^{\text{пол}} = \begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix}, \quad \hat{J}^{\text{непол}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Из сравнения (15) с (7) следует, что

$$B_{xx} = A + B, \quad B_{yy} = A + C, \quad B_{xy} = D, \quad B_{yx} = D^*.$$

Кроме того, $\det \hat{J}^{\text{пол}} = 0$, т. е.

$$BC - DD^* = A^2 - (B_{xx} + B_{yy})A + \det \hat{J} = 0. \quad (6.5.16)$$

Решение уравнения (16) дает

$$A = \frac{1}{2} \{B_{xx} + B_{yy} \mp \sqrt{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}}\}.$$

Значение A со знаком плюс перед корнем дает отрицательные значения величин B и C , поэтому его следует отбросить. Сумма величин $B + C$ представляет собой интенсивность поляризованной волны:

$$I^{\text{пол}} = B + C = \{(B_{xx} + B_{yy})^2 - 4 \det \hat{J}\}^{1/2}.$$

Степень поляризации. Эта величина определяется как отношение интенсивности $I^{\text{пол}}$ к полной интенсивности волны $I_0 = B_{xx} + B_{yy}$ и обозначается через P :

$$P = \frac{I^{\text{пол}}}{I_0} = \left\{ 1 - \frac{4 \det \hat{J}}{(\text{Sp } \hat{J})^2} \right\}^{1/2}. \quad (6.5.17)$$

Легко убедиться, что для полностью поляризованной волны $P = 1$, для неполяризованной волны $P = 0$. Частично поляризованная волна имеет значение $0 < P < 1$.

Соотношения (11) и (12) позволяют представить степень поляризации через параметры Стокса:

$$P = [\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2 + \bar{S}_3^2]^{1/2} \bar{S}_0^{-1}. \quad (6.5.18)$$

В соответствии с физическим смыслом параметров S_j (см. выше) величину P можно записать как

$$P = \sqrt{P_l^2 + P_{кр}^2}, \quad P_l = (\bar{S}_1^2 + \bar{S}_2^2)^{1/2} S_0^{-1}, \\ P_{кр} = \bar{S}_3 / \bar{S}_0. \quad (6.5.19)$$

Здесь P_l и $P_{кр}$ — соответственно степени линейной и круговой поляризации.

Покажем теперь, что коэффициент взаимной корреляции γ_{xy} не может превышать степень поляризации P . Воспользовавшись (17), (12) и (11), получим

$$1 - P^2 = \left(\frac{2\sqrt{B_{xx}B_{yy}}}{B_{xx} + B_{yy}} \right)^2 [1 - |\gamma_{xy}|^2]. \quad (6.5.20)$$

Поскольку $(B_{xx}^{1/2} - B_{yy}^{1/2})^2 > 0$, то из (20) следует

$$P \geq |\gamma_{xy}|. \quad (6.5.21)$$

Величина P (17) выражается через инварианты $\det \hat{J}$ и $\text{Sp } \hat{J}$ и, следовательно, не зависит от выбора осей x и y . Коэффициент же γ_{xy} зависит от выбора осей координат, он имеет максимальное значение при $B_{xx} = B_{yy}$. Нетрудно показать, что всегда можно выбрать новые координаты x' и y' , повернутые на угол θ относительно осей x и y , таким образом, чтобы

$$B_{x'x'} = B_{y'y'}. \quad (6.5.22)$$

В новой системе координат компоненты электрического поля:

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta, \quad E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Вычислим величины $B_{jj'}$ = $\langle E_{j'} E_{j'}^* \rangle$ и потребуем выполнения условия (22). При этом найдем, что угол θ определяется выражением

$$\text{tg } 2\theta = \frac{B_{yy} - B_{xx}}{B_{xy} + B_{yx}}. \quad (6.5.23)$$

Поскольку $B_{yx} = B_{xy}^*$, значение θ действительное. В системе координат x' и y' степень поляризации P волны равна коэффициенту взаимной корреляции $|\gamma_{x'y'}|$. Это обстоятельство используется для измерения P .

Состояние поляризации волны, описываемое в терминах стоксовых параметров наглядно геометрически принято изображать на сфере Пуанкаре в системе координат параметров Стокса с осями \bar{S}_1/\bar{S}_0 , \bar{S}_2/\bar{S}_0 , \bar{S}_3/\bar{S}_0 . Эта же совокупность параметров определяет степень поляризации P . Сфере единичного радиуса соответствует полностью поляризованное излучение. Неполаризованное излучение ($P = 0$) отображается точкой в центре координат.

Проведенное выше рассмотрение ограничено случаем плоской случайной волны. Для случайно модулированных световых пучков степень

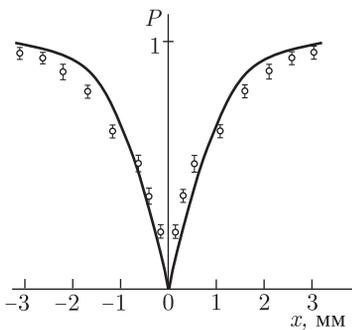


Рис. 6.4. Степень поляризации в лазерном пучке со случайной фазовой модуляцией, прошедшем через канал с оптически активным элементом [9]
 x — расстояние от центра пучка

амплитудами, но со случайными фазами с равномерной функцией распределения ($A_j(t) = \rho_0 e^{i\varphi_j(t)}$):

$$E_j(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \exp[i(\omega_0 t + \varphi_j(t))] + \text{к. с.} \quad (6.5.24)$$

$$(j = x, y),$$

$$w(\varphi_j) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi \leq \varphi_j \leq \pi.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае значение стоксовых параметров $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = \bar{S}_3 = 0$ и, следовательно, степень поляризации (18) $P = 0$.

Пример 2. Если статистически независимые флуктуации ортогональных поляризаций

$$E_x(t) = \frac{1}{2} \rho_x(t) \exp[i(\omega t + \varphi_x(t))] + \text{к. с.}, \quad (6.5.25)$$

$$E_y(t) = \frac{1}{2} \rho_y(t) \exp[i(\omega t + \varphi_y(t))] + \text{к. с.}$$

подчиняются гауссовской статистике с одинаковой дисперсией, т. е. совместная функция распределения огибающей и фазы дается выражением (2.4.4)

$$w(\rho_j, \varphi_j) = \frac{\rho_j}{2\pi\sigma^2} e^{-\rho_j^2/2\sigma^2} \quad (j = x, y) \quad (6.5.26)$$

то степень поляризации также равна нулю.

Однако дисперсии некоторых стоксовых параметров S_j в рассматриваемых случаях оказываются разными. Для первого случая имеем следующие значения дисперсий:

$$\sigma_{S_1}^2 = \langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2 = 0, \quad \sigma_{S_2}^2 = \sigma_{S_3}^2 = \frac{1}{2} (\bar{S}_0)^2, \quad (6.5.27)$$

поляризации может быть, вообще говоря, различна для различных точек пучка (рис. 6.4).

Статистика стоксовых параметров; скрытая поляризация, поляризационное сжатие. Рассмотренное выше описание поляризации векторного поля связано со статистическими характеристиками второго порядка. Изучение моментов стоксовых параметров S_j более высокого порядка и, конечно, их функций распределения дает более глубокий анализ состояния поляризации. Необходимость такого анализа ясна из сравнения следующих двух примеров.

Пример 1. Рассмотрим сначала суперпозицию двух ортогонально поляризованных полей с равными частотами и одинаковыми постоянными действительными

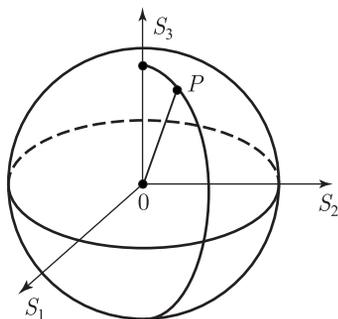


Рис. 6.5. Сфера Пуанкаре

где

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{2} \rho_0^2 = \sigma^2.$$

Для второго случая получаем

$$\sigma_{S,1}^2 = \sigma_{S,2}^2 = \sigma_{S,3}^2 = \frac{1}{2} \sigma^4 = \frac{1}{2} (\bar{S}_0)^2. \quad (6.5.28)$$

Из сравнения полученных результатов видно, что в первом случае дисперсия стокового параметра S_1 равна нулю, тогда как во втором случае она отлична от нуля. Другими словами, при измерении моментов четвертого и более высокого порядков стоковых параметров излучения неполяризованного в традиционном смысле может проявляться внутренняя структура поляризации. Это свойство Д. Н. Клышко назвал скрытой поляризацией [10].

Для неполяризованного излучения ($P = 0$) с гауссовской статистикой ортогональных компонент дисперсии всех стоковых параметров одинаковы. Однако этот вывод справедлив только для стационарных случайных полей. Если же поля ортогональных компонент статистически нестационарны, хотя и обладают гауссовской статистикой, дисперсии стоковых параметров могут быть неравными. Сказанное иллюстрируется приведенным ниже примером.

Рассмотрим ситуацию, когда флуктуации ортогональных компонент представляют собой сжатый гауссовский шум. Статистические свойства такого шума описаны в § 7 главы 3. При этом для простоты будем полагать, что степень сжатия в обеих компонентах одинакова и флуктуации идеально сжаты. Для каждой из ортогональных компонент функция распределения огибающей ρ_j фазы φ_j дается выражением (3.7.19)

$$w(\rho_j, \varphi_j) = \frac{\rho_j}{2\pi\sigma^2(1-\varkappa^2)} \exp\left\{-\frac{1-\varkappa\cos^2\varphi_j}{1-\varkappa^2} \frac{\rho_j^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (j = x, y), \quad (6.5.29)$$

где σ^2 — дисперсия (интенсивность) ортогональных компонент, \varkappa — параметр сжатия. Как уже отмечалось, в рассматриваемом случае $\bar{S}_1 = \bar{S}_2 = \bar{S}_3 = 0$ и излучение в соответствии в (18) является полностью неполяризованным.

Выражения для дисперсий стоковых параметров имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{S,1}^2 &= \sigma_{S,2}^2 = \frac{1}{2} (1 + \varkappa^2) (\bar{S}_0)^2, \\ \sigma_{S,3}^2 &= \frac{1}{2} (1 - \varkappa^2) (\bar{S}_0)^2, \end{aligned} \quad (6.5.30)$$

где $\bar{S}_0 = \sigma^2$.

Заметим, что расчет дисперсий $\sigma_{S,2}^2$ и $\sigma_{S,3}^2$ удобнее проводить, представив стоковые параметры через квадратурные компоненты и пользуясь формулами (3.7.6).

При отсутствии сжатия шума ($\varkappa = 0$) выражения (30) переходят в формулы (27). Из (30) следует, что для сжатого гауссовского шума дисперсии стоковых компонент отличаются от таковых для несжатого гауссовского шума. Это различие связано с параметром \varkappa , характеризующим степень сжатия. Интересно, что в стоковом параметре S_3 дисперсия оказывается даже меньше, чем для стационарного гауссовского неполяризованного излучения. В этом стоковом параметре флуктуации частично подавлены.

Для характеристики состояния поляризованного излучения, но с подавленными квантовыми флуктуациями некоторых стоковых параметров в [11], был введен термин поляризационно-сжатый свет¹⁾. В рассматриваемом случае можно говорить о поляризационно-сжатом неполяризованном свете, имея в виду возможность подавления флуктуаций в некоторых стоковых параметрах по отношению к уровню стационарных гауссовских флуктуаций. Если коэффициент взаимной корреляции ортогональных поляризационных компонент отличен от нуля, то можно сформировать частично поляризованный поляризационно-сжатый свет. При рассмотрении «скрытого» состояния поляризации мы ограничились анализом дисперсии стоковых параметров, в рамках описания поля моментами четвертого порядка интерес могут представить корреляции между стоковыми параметрами [12].

Читатель, который интересуется функциями распределения стоковых параметров, может обратиться к работам [13, 14].

Литература к главе 6

1. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. — М.: Изд. АН СССР, 1953.
2. *Левин М. Л., Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций электродинамике. — М.: Наука, 1967.
3. *Ахманов С. А., Вислоух В. А., Чиркин А. С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
4. *Агровский Б. С., Воробьев В. В., Гурвич А. С. и др.* // Квант. электрон., 1980, т. 7, с. 59.
5. *Шерклиф У.* Поляризованный свет. — М.: Мир, 1965.
6. *Поздняк С. И., Мелитицкий В. А.* Введение в статистическую теорию поляризации радиоволн. — М.: Сов. радио, 1974.
7. *Потехин В. А., Татаринов В. Н.* Теория когерентности электромагнитного поля. — М.: Связь, 1978.
8. *Ахманов С. А., Никитин С. Ю.* Физическая оптика. — М.: МГУ, 1998.
9. *Курашов В. Н., Новодерёжкин В. И., Хорошков Ю. В.* — В сб.: Тезисы докл. I Всесоюзн. конф. «Проблемы управления параметрами лазерного излучения». — Ташкент, ч. 2, с. 27.
10. *Клышко Д. Н.* // ЖЭТФ, 1997, т. 111, с. 1955.
11. *Чиркин А. С., Орлов А. А., Паращук Д. Ю.* // Квант. электрон., 1993, т. 20, с. 999.
12. *Agarwal G. S., Chaturvedi S.* // J. Modern Optics, 2003, v. 50, p. 711.
13. *Barakat R. J.* // Opt. Soc. Amer., 1987, v. 4, p. 1256.
14. *Brosseau C., Barakat R. J., Rockower E.* // Opt. Commun., 1991, v. 82, p. 204.

¹⁾ Следует отметить, что квантовый анализ поляризационной структуры излучения показывает возможность формирования поляризационно-скалярного света [18], который обстоятельно изучен в работах В. П. Карасёва.

-
15. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С. // ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 1430.
 16. Мандель П., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М.: Физматлит, 2000.
 17. Франсон М. Оптика спеклов. — М.: Мир, 1980.
 18. Карасёв В. П., Масалов А. В. // Оптика и спектроскопия, 1993, т. 74, с. 928.

ИМПУЛЬСНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой и следующей главе на основе уравнений, выведенных в главе 6, рассмотрено распространение частично когерентных, случайно модулированных импульсов в линейных диспергирующих средах. Целый ряд полученных при этом результатов оказываются справедливыми и для детерминированных импульсов. Поэтому мы сочли возможным в названии главы не акцентировать характер импульсов. В настоящей главе речь пойдет о распространении импульсов в средах с дисперсией второго порядка, т. е. дисперсия групповой скорости учитывается в первом порядке. Влияние дисперсии более высокого порядка на распространение импульсов в линейной среде изучается в главе 8. Основными рассматриваемыми статистическими характеристиками являются спектральная плотность, временные корреляционные функции, инварианты распространения. Наряду с этим рассматривается эффект самовоспроизведения периодической последовательности импульсов (временной эффект Тальбота).

§ 1. Квазимонохроматические волны в линейной диспергирующей среде

Рассмотрим распространение в диспергирующей линейной среде без потерь квазимонохроматической плоской волны

$$E(t, z) = \frac{1}{2} A(t, z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к.с.} \quad (7.1.1)$$

Будем предполагать, что медленно меняющаяся комплексная амплитуда имеет вид одиночного импульса с произвольной детерминированной или случайной модуляцией по амплитуде и/или по частоте (АМ-ЧМ импульс произвольной формы) (рис.7.1).

Уравнение для комплексной амплитуды и его решение. Как показано в гл. 6, функция $A(t, z) = A(\theta, z)$ ($\theta = t - z$) и удовлетворяет уравнению (см. (6.3.19))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_m}{m!} \left(\frac{\partial}{i \partial \theta} \right)^m A = 0, \quad (7.1.2)$$

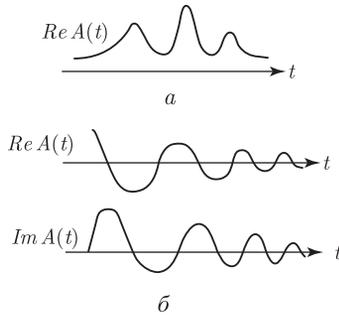


Рис. 7.1. Реализации импульсов со случайной модуляцией: а) амплитудно-модулированный (АМ) импульс ($\text{Re } A = 0, \text{Im } A = 0$), б) частотно-модулированный (ЧМ) импульс ($\text{Re } A \neq 0, \text{Im } A \neq 0$)

решение которого с граничным условием

$$A(\theta, z = 0) = A^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega}^{(0)} e^{i\omega t} dt \quad (7.1.3)$$

имеет вид

$$A(\theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega}^{(0)} \mathcal{H}(\omega, z) e^{i\omega\theta} d\omega, \quad (7.1.4)$$

где коэффициент передачи

$$\mathcal{H}(\omega, z) = e^{-i\Phi(\omega)z} \quad \left(\Phi(\omega) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_m}{m!} \omega^m \right). \quad (7.1.5)$$

Функция $\Phi(\omega)$ учитывает дисперсию среды в области частот, близких к несущей частоте ω_0 (1). Мы ограничимся анализом распространения импульсов в линейных средах без потерь, когда $\text{Im } K_m = 0$, так что

$$|\mathcal{H}(\omega, z)| = 1, \quad \mathcal{H}(\omega = 0, z) = 1. \quad (7.1.6)$$

Подставив комплексную амплитуду в виде интеграла Фурье

$$A(\theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega}(z) e^{i\omega\theta} d\omega, \quad (7.1.7)$$

из (4) находим

$$A_{\omega}(z) = A_{\omega}^{(0)} \mathcal{H}(\omega, z). \quad (7.1.8)$$

Если перейти в (4) от спектрального к временному представлению, то для $A(\theta, z)$ получим

$$A(\theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) \mathcal{H}(t - \theta, z) dt, \quad (7.1.9)$$

где

$$\mathcal{H}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(\omega, z) e^{i\omega t} d\omega. \quad (7.1.10)$$

Законы сохранения. Из (4)–(8) нетрудно получить, что при распространении импульса постоянными, т.е. не зависящими от z , остаются следующие его параметры [1]:

«площадь» импульса

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\theta, z) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega A_{\omega}^{(0)} \mathcal{K}(\omega, z) e^{i\omega\theta} = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \delta(\omega) A_{\omega}^{(0)} \mathcal{K}(\omega, z) = 2\pi A_{\omega=0}^{(0)} \mathcal{K}(\omega=0, z) = 2\pi A_{\omega=0}^{(0)} = \text{const}, \end{aligned} \quad (7.1.11a)$$

«энергетический» частотный спектр

$$g(\omega) = 2\pi |A_{\omega}(z)|^2 = 2\pi |A_{\omega}^{(0)}|^2 = g^{(0)}(\omega), \quad (7.1.11б)$$

энергия

$$U = \int g(\omega) d\omega = \int y^{(0)}(\omega) d\omega = U^{(0)} = \text{const}, \quad (7.1.11в)$$

эффективная ширина спектра

$$\Delta\omega = U/g(\omega)_{\max} = U^{(0)}/g^{(0)}(\omega)_{\max} = \text{const}, \quad (7.1.12)$$

а также корреляционная функция

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(m)}(\theta, z) A^{(n)*}(\theta + \tau, z) d\theta = \\ &= i^{m-n} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{m+n} g^{(0)}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad \left(A^{(m)}(\theta, z) = \frac{\partial^m}{\partial \theta^m} A(\theta, z) \right). \end{aligned}$$

Интенсивность импульса $I = |A(\theta, z)|^2 = I(\theta, z)$ при распространении меняется, вместе с ней меняется и эффективная длительность импульса $\Delta t(z)$:

$$\Delta t(z) = U/I_{\max}. \quad (7.1.13)$$

Длительность Δt , ширина $\Delta\omega$ частотного спектра и «база» импульса $\beta = \Delta t \Delta\omega$. При оценке параметров Δt и $\Delta\omega$ используют самые разнообразные критерии.

Пусть имеется импульс $A(t)$, для которого

$$A(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad A_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-i\omega t} dt,$$

и которому соответствует интенсивность $I(t) = |A(t)|^2$, энергетический спектр $g(\omega) = 2\pi|A_{\omega}|^2$ и энергия $U = \int I(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega$. По этим характеристикам импульса параметры Δt и $\Delta\omega$ оценивают, применяя, например, такие критерии:

1-ый критерий, интегральный совпадает с (12) и (13):

$$\Delta t = U/I_{\max}, \quad \Delta\omega = U/g_{\max}.$$

2-ой критерий, по размерам областей, в пределах которых функции $I(t)$ и $g(\omega)$ значительно уменьшаются, например, в 2 раза, в e раз и т. д.

3-ий критерий, среднеквадратичный

$$\Delta t = \Delta t_{\text{СК}} = [\{t^2\} - \{t\}^2]^{1/2}, \\ \Delta\omega = \Delta\omega_{\text{СК}} = [\{\omega^2\} - \{\omega\}^2]^{1/2},$$

где

$$\{t^n\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n I(t) dt, \quad \{\omega^n\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n g(\omega) d\omega.$$

Под так называемой «базой» импульса понимают величину $\beta = \Delta t \Delta\omega$, которая ограничена снизу $\beta \geq \beta_{\min}$, но величина β_{\min} не универсальна, а определяется выбранным критерием оценки Δt и $\Delta\omega$. Например, для спектрально ограниченного гауссовского импульса

$$A(t) = e^{-t^2/2t_A^2}, \quad A_{\omega} = \frac{t_A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2 t_A^2/2}, \quad (7.1.14) \\ I(t) = e^{-t^2/t_A^2}, \quad g_{\omega} = t_A^2 e^{-\omega^2 t_A^2}, \quad U = \sqrt{\pi} t_A$$

получим: по 1-му критерию

$$\Delta t_1 = \sqrt{\pi} t_A \approx 1,8 t_A, \quad \Delta\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{t_A} \approx \frac{1,8}{t_A}, \quad \beta_1 = \pi = 3,14; \quad (7.1.15)$$

по 2-му критерию

$$\Delta t_2 = 2\sqrt{\ln 2} \approx 1,7 t_A, \quad \Delta\omega_2 = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{t_A} \approx \frac{1,7}{t_A}, \quad \beta_2 = 4 \ln 2 \approx 2,8; \quad (7.1.16)$$

и по 3-му критерию

$$\Delta t_3 = \frac{t_A}{\sqrt{2}} \approx 0,7 t_A, \quad \Delta\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{2} t_A} \approx \frac{0,7}{t_A}, \quad \beta_3 = 0,5. \quad (7.1.17)$$

Видно, что в рассматриваемом случае

$$\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3, \quad \Delta \omega_1 > \Delta \omega_2 > \Delta \omega_3 \quad \text{и} \quad \beta_1 > \beta_2 > \beta_3. \quad (7.1.18)$$

По 1-му и 2-му критериям оценки для Δt , $\Delta \omega$ и β примерно совпадают, однако по 3-му критерию они получаются заметно меньшими. Это понятно, поскольку при расчете $\{t^n\}$ и $\{\omega^n\}$ несколько подавляется центральная, обычно наиболее энергонесущая, часть импульса и его спектра.

§ 2. Модель частично некогерентного импульса

Для описания случайно модулированных импульсов (7.1.3), испускаемых источником, расположенным на границе $z = 0$, мы будем использовать мультипликативную модель, полагая

$$A^{(0)}(t) = F(t)\xi(t), \quad (7.2.1)$$

где $F(t)$ — некоторая детерминированная функция с параметрами

$$\begin{aligned} F(t) &= \int F_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad g_F(\omega) = 2\pi |F_\omega|^2, \\ U_F &= \int |F(t)|^2 dt = \int g_F(\omega) d\omega, \quad I_F(t) = |F(t)|^2, \\ \Delta\omega_F &= U_F / g_F(\omega)_{\max}, \quad \Delta t_F = U_F / I_{F, \max}, \end{aligned} \quad (7.2.1a)$$

а $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс с статистическими характеристиками:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle |\xi(t)|^2 \rangle = \sigma_\xi^2, \quad \langle \xi(t)\xi^*(t+\tau) \rangle = \sigma_\xi^2 R_\xi(\tau) = \int G_\xi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

$$G_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

$$\tau_\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} R_\xi(\tau) d\tau = \frac{\pi G_\xi(0)}{\sigma_\xi^2} \quad (\text{время корреляции}),$$

$$\Delta\omega_\xi = \frac{\pi}{\tau_\xi} = \frac{\sigma_\xi^2}{G_\xi(0)} \quad (\text{ширина частотного спектра}).$$

Для импульса $A^{(0)}(t)$ при этом получим следующие усредненные параметры:

$$\bar{I}_0(t) = \langle |A^{(0)}(t)|^2 \rangle = \sigma_\xi^2 I_F(t), \quad (7.2.2a)$$

$$\bar{U}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0(t) dt = \sigma_\xi^2 U_F, \quad (7.2.2б)$$

$$\bar{g}_0(\omega) = 2\pi \langle |A_\omega^{(0)}|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g_F(\omega - \omega') G_\xi(\omega') d\omega', \quad (7.2.2\text{в})$$

$$\Delta t_0 = \bar{U}_0 / \bar{I}_0, \max = U_F / I_{F, \max} = \Delta t_F, \quad (7.2.2\text{г})$$

$$\Delta \omega_0 = \bar{U}_0 / \bar{g}_0(\omega)_{\max}. \quad (7.2.2\text{д})$$

Из законов сохранения следует, что при распространении импульса $A^{(0)}(t)$ в диспергирующей линейной среде, остаются постоянными усредненная энергия $\bar{U} = \bar{U}_0$, усредненный энергетический спектр $\bar{g}(\omega) = \bar{g}_0(\omega)$ и, очевидно, ширина этого спектра.

Гауссовская модель. Для расчетов удобна гауссовская модель импульса (1), в которой регулярнаягибающая $F(t)$ и корреляционная функция $\langle \xi \xi_\tau^* \rangle$ случайной огибающей $\xi(t)$ выражаются через гауссовские функции:

$$F(t) = F_0 e^{-t^2/2t_0^2}, \quad \langle \xi(t) \xi^*(t + \tau) \rangle = \sigma_\xi^2 e^{-\tau^2/4\tau_0^2}. \quad (7.2.3)$$

Для этого случая по приведенным выше формулам находим

$$g_F(\omega) = |F_0|^2 t_0^2 e^{-\omega^2 t_0^2}, \quad U_F = \sqrt{\pi} |F_0|^2 t_0, \quad (7.2.4)$$

$$\Delta t_F = \Delta t_0 = \sqrt{\pi} t_0, \quad \Delta \omega_F = \frac{\sqrt{\pi}}{t_0},$$

$$R_\xi(\tau) = e^{-\tau^2/4\tau_0^2}, \quad G_\xi(\omega) = \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi}} \sigma_\xi^2 e^{-(\tau_0 \omega)^2},$$

$$\tau_\xi = \sqrt{\pi} \tau_0, \quad \Delta \omega_\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau_0},$$

$$\bar{g}_0(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2 t_0^2 |F_0|^2}{\sqrt{1 + s_0^2}} e^{-\frac{t_0^2 \omega^2}{1 + s_0^2}}, \quad s_0 = \frac{t_0}{\tau_0} = \frac{\Delta \omega_\xi}{\Delta \omega_F},$$

$$\bar{I}_0(t) = \sigma_\xi^2 |F_0|^2 e^{-t^2/t_0^2}, \quad \bar{U}_0 = \sqrt{\pi} \sigma_\xi^2 |F_0|^2 t_0,$$

$$\Delta \omega_0 = \Delta \omega_F \sqrt{1 + s_0^2}. \quad (7.2.5)$$

Безразмерный параметр

$$s_0 = \frac{\Delta t_F}{\tau_\xi} = \frac{t_0}{\tau_0} = \frac{\Delta \omega_\xi}{\Delta \omega_F} \quad (7.2.6)$$

будем называть индексом некогерентности импульса $A^{(0)}(t)$. Как видно из (5), s_0 определяет влияние случайной модуляции на расширение частотного спектра импульса. При $s_0 \ll 1$ (слабая некогерентность, рис. 7.2а) $A^{(0)}(t)$ и $F(t)$ почти совпадают по форме. Если $s_0 \sim 1$, то случайная модуляция приводит к заметному отличию $A^{(0)}(t)$ от $F(t)$ (рис. 7.2б). В случае же $s_0 \gg 1$ (сильная некогерентность, рис. 7.2в) $A^{(0)}(t)$ принимает вид просто отрезка реализации шума $\xi(t)$, и лишь длительность этого отрезка будет, по-прежнему, определяться огибающей $F(t)$, поскольку $t_0 = t_F$ при любой величине s_0 .

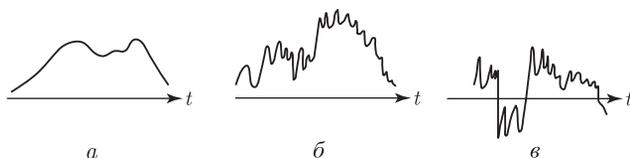


Рис. 7.2. Реализации некогерентных импульсов при разных значениях параметра S_0 : а) $S_0 \ll 1$, б) $S_0 > 1$, в) $S_0 \gg 1$

§ 3. Импульсы в среде с дисперсией второго порядка: дальняя зона, дисперсионное расплывание, формирование импульсов-спектронов

В настоящем и следующем параграфах мы подробно рассмотрим распространение детерминированных и частично когерентных импульсов с непрерывным спектром в среде с дисперсией второго порядка, распространение в таких средах импульсов с дискретным спектром будет изучено в § 6.

Частотный коэффициент передачи \mathcal{K} и функция Грина \mathcal{H} среды. Под средой с дисперсией n -го порядка ($n = 2, 3, \dots$) будем понимать среду, для которой в разложении (7.1.5) достаточно учесть только член с $m = n$. Следовательно, для среды с дисперсией второго порядка имеем $\phi(\omega) = \frac{1}{2} k_2 \omega^2$ и

$$\mathcal{K}(\omega, z) = e^{-i\frac{1}{2} k_2 \omega^2 z}, \quad (7.3.1)$$

$$\mathcal{H}(t, z) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi k_2 z}} e^{it^2/2k_2 z}. \quad (7.3.2)$$

Уравнение (7.1.2) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial z} - i\frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0,$$

а его решение (7.1.9), удовлетворяющее граничному условию (7.1.3) можно записать так:

$$\begin{aligned} A(\theta, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) \mathcal{H}(\theta - t, z) dt = \\ &= \mathcal{H}(\theta, z) \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) e^{-i\theta t/k_2 z + it^2/2k_2 z} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega}^{(0)} e^{-ik_2 z \omega^2/2 + i\omega \theta} d\omega. \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Импульс в дальней зоне. Интегрирование по t в (3) фактически производится в пределах длительности t_0 импульса $A^{(0)}(t)$, т. е.

$$t^2/2|k_2|z \lesssim t_0^2/2|k_2|z = z_d/2z,$$

где

$$z_d = t_0^2/|k_2|. \quad (7.3.4)$$

Область достаточно больших z , в которой $z \gg z_d$, называют *дальней зоной*, область малых расстояний z ($z \ll z_d$) — *ближней зоной*, расстояние z_d — длиной дисперсионного распывания (или коротко *дисперсионной длиной*). В дальней зоне можно считать

$$e^{it^2/2k_2z} \approx 1.$$

При этом интеграл в (3) принимает вид интеграла Фурье:

$$A(\theta, z) \approx \mathcal{H}(\theta, z) \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)} e^{-i\theta t/k_2z} dt = 2\pi \mathcal{H}(\theta, z) A_{\omega=\theta/k_2z}^{(0)}. \quad (7.3.5)$$

Используя (5) и учитывая (7.1.11б) и (2), находим, что в дальней зоне форма импульса интенсивности $I = |A|^2$ повторяет в определенном масштабе форму спектра $g^{(0)}(\omega) = 2\pi |A_{\omega}^{(0)}|^2$ источника

$$I(\theta, z) = \frac{1}{|k_2|z} g^{(0)}(\omega = \theta/k_2z). \quad (7.3.6a)$$

Соотношение (6a) согласуется с законом сохранения энергии (7.1.11в):

$$U(z \gg z_d) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\theta, z \gg z_d) d\theta = \frac{1}{|k_2|z} \int_{-\infty}^{+\infty} g^{(0)}(\omega = \theta/k_2z) d\theta = U^{(0)}. \quad (7.3.6б)$$

Дисперсионное распывание. Из (6a, б) следует точное общее выражение для длительности импульса в дальней зоне

$$\Delta t = |k_2| \Delta\omega_0 z = \beta_0(z/z_d)t_0 \gg t_0, \quad (7.3.7)$$

где «база» импульса $\beta_0 = \Delta\omega_0 t_0$. В (7) предполагается, что параметры Δt , t_0 и $\Delta\omega_0$ оцениваются по произвольным, но одинаковым критериям. Например, по уровню 0,5 или $1/e$ (см. (7.1.15)–(7.1.18)). Согласно (7) в дальней зоне длительность импульса по мере его распространения монотонно увеличивается пропорционально расстоянию z . Этот эффект, обусловленный дисперсией среды, называют *дисперсионным распыванием*.

Формирование импульсов-спектров. Из соотношения (6a) видно, что импульс интенсивности в дальней зоне принимает предсказуемую устойчивую форму, повторяя в определенном масштабе форму энергетического спектра $g^{(0)}(\omega)$ входного импульса $A^{(0)}(t)$, т. е. форму собственного спектра, которая является инвариантом распространения (см. (7.1.11)). Такие импульсы называют спектрами [1, 2]. Не изменяя своей формы, импульсы-спектры становятся более длинными и менее интенсивными. Тем самым как бы укрупняется масштаб вре-

менной развертки спектра $g^{(0)}(\omega)$, что можно в принципе использовать как при измерениях спектра, так и для моделирования импульсов $I(\theta, z \gg z'_d)$, т.е. придания им какой-то определенной формы.

«Скорость» и «угол» дисперсионного расплывания. Итак, в соответствии с (6) и (7), придя в дальнюю зону, импульс принимает вид импульса-спектрона, имеющего длительность Δt и пространственный масштаб (длину) l :

$$\Delta t = \Delta t(z) = |k_2| \Delta \omega_0 z, \quad l = l(z) = u \Delta t, \quad (7.3.8)$$

u — групповая скорость. Расстояние $\delta z = z_2 - z_1$ между двумя точками дальней зоны ($z_2 > z_1 \gg z_d$) импульс пробегает за время

$$\delta t = \delta z / u,$$

увеличивая при этом свою длительность вследствие дисперсионного расплывания на $\delta(\Delta t)$ и длину на δl , где

$$\delta(\Delta t) = |k_2| \Delta \omega_0 \delta z, \quad \delta l = u \delta(\Delta t).$$

Из этих выражений следует, что дисперсионное расплывание импульса в дальней зоне характеризуется скоростью

$$v_d = \delta l / \delta t = u^2 |k_2| \Delta \omega_0. \quad (7.3.9)$$

Чтобы оценить отношение

$$v_d / u = u |k_2| \Delta \omega_0, \quad (7.3.10)$$

будем рассуждать следующим образом. При учете влияния дисперсии использовалось разложение (7.1.5) волнового числа

$$k(\omega_0 + \omega) = k_0 + k_1 \omega + \frac{1}{2!} k_2 \omega^2 + \dots \quad (7.3.11)$$

в окрестности несущей частоты ω_0 по степеням частоты ω , которая по порядку величины равна $\Delta \omega_0$, ширине частотного спектра импульса. Для сходимости ряда (11) его члены должны достаточно быстро уменьшаться, т.е. должны выполняться неравенства

$$k_1 \omega = \frac{1}{u} \omega \ll k_0 \quad (\text{а}) \quad k_2 \omega^2 \ll k_1 \omega \quad (\text{б}) \quad \text{и т. д.} \quad (7.3.12)$$

Используя в (12) оценки

$$k_0 \approx \omega_0 / c \quad k_1 = u^{-1} \approx c^{-1} \quad \omega \simeq \Delta \omega_0,$$

из (12а) получим

$$\Delta \omega_0 \ll \omega_0, \quad (7.3.13)$$

а из (12б)

$$|k_2| \ll (c \Delta \omega_0)^{-1}. \quad (7.3.14)$$

Условие (13) не дает ничего нового. Оно просто означает, что рассматриваемая импульсная волна должна быть, как и предполагалось, узкополосной. Подставив в (10) неравенство (14), найдем

$$v_d/u \approx c|k_2| \Delta\omega_0 \ll 1. \quad (7.3.15)$$

Таким образом, скорость дисперсионного расплывания импульса намного меньше скорости его распространения.

Соотношение (15) имеет наглядный смысл. Из выражения (7) для длительности $\Delta t(z)$ импульсы в дальней зоне следует асимптотическое выражение (8) для длины l этого импульса. На плоскости zl угол наклона асимптоты (8) к оси z как раз совпадает с (15). Мы будем называть его углом дисперсионного расплывания, обозначая как θ_d (рис.7.3):

$$\theta_d = v_d/u = u|k_2| \Delta\omega_0 \ll 1. \quad (7.3.16)$$

Из полученных результатов следует, что поскольку угол дисперсионного расплывания $\theta_d \sim \Delta\omega_0$, то случайная модуляция $\xi(t)$ входного импульса $A^{(0)}(t)$ (7.2.1) (его частичная некогерентность) сказывается на распространении этого импульса в той мере, в какой расширяет спектральную полосу импульса. При этом согласно (16) большим $\Delta\omega_0$ соответствует большие углы θ_d , а значит, и большие скорости дисперсионного расплывания (рис.7.3).

Распространение гауссовского случайно модулированного импульса; точные результаты. В средах с дисперсией второго порядка комплексная амплитуда $A(\theta, z)$ произвольного импульса на произвольном расстоянии z от источника дается выражениями (3) и (2)

$$A(\theta, z) = \mathcal{H}(\theta, z) \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) e^{-i\theta t/k_2 z + it^2/2k_2 z} dt. \quad (7.3.17)$$

Рассмотрим случай частично некогерентного источника излучения, комплексная амплитуда которого $A^{(0)}(t)$ описывается гауссовской мультипликативной моделью (7.2.1):

$$A^{(0)}(t) = F(t)\xi(t), \quad F(t) = F_0 e^{-t^2/2t_F^2}, \quad \langle \xi\xi_\tau \rangle = \sigma_\xi^2 e^{-\tau^2/4\tau_\xi^2}. \quad (7.3.18)$$

Средняя интенсивность распространяющегося импульса при этом определяется следующим интегральным выражением

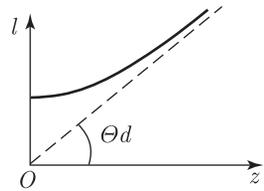


Рис. 7.3. Зависимость пространственного размера l импульса от расстояния z , пройденного в диспергирующей среде (сплошная кривая). Угол наклона асимптоты определяется выражением (7.3.16)

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, z) \rangle &= \langle |A(\theta, z)|^2 \rangle = \\ &= \frac{\sigma_\xi^2 |F_0|^2}{2\pi |k_2 z|} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_F^2} - \frac{(t_1 - t_2)^2}{4\tau_\xi^2} + i \frac{(\theta - t_1)^2 - (\theta - t_2)^2}{2k_2 z} \right] dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

для которого получается точный аналитический результат

$$\langle I(\theta, z) \rangle = \sigma_\xi^2 \frac{t_F}{t(z)} |F_0|^2 e^{-\theta^2/t^2(z)}, \quad (7.3.19)$$

где

$$t^2(z) = t_F^2 + (k_2 z)^2 \left(\frac{1}{t_F^2} + \frac{1}{\tau_\xi^2} \right). \quad (7.3.20)$$

Умножив (20) на c_j , получим точное выражение для длительности

$$\Delta t^2(z) = \Delta t_F^2 + (k_2 z)^2 (\Delta \omega_0)^2, \quad (7.3.21)$$

где $\Delta t(z) = c_j t(z)$ — длительность усредненного импульса по j -му критерию (7.1.15) на произвольном расстоянии от частично некогерентного источника (18); $\Delta t_F = c_j t_F$ — длительность импульса источника, ширина частотного спектра источника

$$\Delta \omega_0 = c_j \sqrt{\frac{1}{t_F^2} + \frac{1}{\tau_\xi^2}}.$$

Из сравнения (19) и (18) следует, что на любом расстоянии от источника средняя интенсивность импульса сохраняет гауссовскую форму, а его длительность определяется выражением (21), которое в дальней зоне переходит в универсальное выражение (8) (см. также рис. 7.3).

Корреляция частично некогерентного импульса. Рассмотрим теперь корреляционную функцию

$$B(\theta, \tau; z) = \langle A(\theta, z) A^*(\theta + \tau, z) \rangle \quad (7.3.22)$$

для мультипликативной модели (7.2.1) источника излучения. В дальней зоне ($z \gg z_d$) для рассматриваемого импульса получим

$$\begin{aligned} B(\theta, \tau; z) &= \mathcal{H}(\theta, z) \mathcal{H}^*(\theta + \tau, z) \times \\ &\times \int \int F(t_1) F^*(t_2) B_\xi(t_1 - t_2) \exp[-i(\theta t_1 - (\theta + \tau)t_2)/k_2 z] dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (7.3.23)$$

Переходя к новым переменным интегрирования $t = t_2$, $\tau' = t_1 - t$, находим

$$\begin{aligned} B(\theta, \tau; z) &= \frac{1}{2\pi k_2 z} e^{-i \frac{2\theta\tau + \tau^2}{2k_2 z}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau') e^{-i\theta\tau'/k_2 z} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t + \tau') F^*(t) e^{i\tau t/k_2 z} dt d\tau'. \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

Если предположить, что импульс источника сильно некогерентный, т. е.

$$\tau_\xi \ll t_F, \quad s_0 = t_F / \tau_\xi \gg 1,$$

то в (24) можно считать $F(t + \tau') \approx F(t)$. В результате двойной интеграл в (24) распадается на два независимых интеграла и имеем

$$B(\theta, \tau; z) = e^{-i\frac{2\theta\tau + \tau^2}{2k_2z}} \bar{I}(\theta, z) \mathcal{R}(\tau, z),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}(\theta, z) = \langle |A(\theta, z)|^2 \rangle &= \frac{1}{2\pi|k_2|z} U_F \int_{-\infty}^{+\infty} B_\xi(\tau') e^{-i\frac{\theta\tau'}{k_2z}} d\tau' = \\ &= \frac{1}{|k_2|z} U_F G_\xi(\omega = \theta/k_2z) \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

$$\mathcal{R}(\tau, z) = \frac{1}{U_F} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|^2 e^{i\tau t/k_2z} dt \quad (|R| \leq 1) \quad (7.3.26)$$

(U_F дается формулой (7.2.1a)). Выражение (25) аналогично (6), и из него следует, что длительность импульса равна

$$\Delta t(z) = |k_2| \Delta \omega_\xi z$$

(см. также формулу (7)). Время корреляции $\tau(z)$, соответствующее коэффициенту корреляции (26), оценим как

$$\tau(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(\tau, z) d\tau. \quad (7.3.27)$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau/k_2z} d\tau = 2\pi\delta\left(\frac{t}{k_2z}\right) = 2\pi k_2z \delta(t), \quad (7.3.28)$$

то подставив (26) и (28) в (27), найдем

$$\tau(z) = \pi|k_2|z/t_F \quad (z \gg z_d) \quad (7.3.29)$$

Полученные выше результаты указывают на интересные и неожиданные особенности импульса $A(\theta, z)$, порожденного сильно некогерентным импульсом $A^{(0)}(t)$ источника типа (7.2.1).

1. В ближней зоне ($z \ll z_d$) импульс A в диспергирующей среде мало отличается от импульса $A^{(0)}$ источника: его длительность определяется огибающей $F(t)$, а корреляционные характеристики — случайной модуляцией $\xi(t)$.

2. В дальней зоне ($z \gg z_d$), однако, оказывается все обстоит наоборот: временные характеристики импульса $\langle I \rangle$ определяются случайной модуляцией $\xi(t)$ (см. (25)), корреляционные характеристики — детерминированной огибающей $F(t)$ (см. (26)).

3. При этом индекс некогерентности $s(z) = \frac{\Delta t(z)}{\tau(z)}$ импульса при его распространении не меняется, оставаясь равным индексу некогерентности s_0 импульса источника. Действительно,

$$s_0 = s(0) = \frac{t_F}{\tau_\xi} \approx \frac{\Delta\omega_\xi}{\Delta\omega_F} \quad (\text{см. (7.2.6)})$$

$$\text{и } s(z) = \frac{\Delta t(z)}{\tau(z)} = \frac{\Delta\omega_\xi}{\Delta\omega_F}, \quad \text{т. е. } s(z) = s_0.$$

§ 4. Распространение импульсов в среде с дисперсией второго порядка: ближняя зона, компрессия и обращение формы импульса

Как и в § 3, будем исходить из общего выражения (7.3.3) для комплексной амплитуды $A(\theta, z)$ импульса, распространяющегося в диспергирующей линейной среде. Мы покажем, что при определенном выборе функции $A^{(0)}(t)$ в (7.3.3) зависимость длительности $\Delta t(z)$ импульса A от пройденного расстояния z может быть немонотонной (рис. 7.4): сначала длительность будет уменьшаться

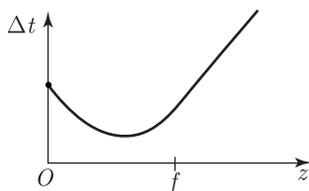


Рис. 7.4. Зависимость длительности импульса с линейной частотной модуляцией $\omega(t) = -t/(k_2 f)$ от расстояния z , пройденного в среде с дисперсией второго порядка, характеризуемой параметром k_2

$$\Delta t(z) < \Delta t(0) \quad (0 < z < f), \quad (7.4.1)$$

достигнет при некотором $z \lesssim f$ минимального значения

$$\Delta t(f) = \Delta t_{\min}, \quad (7.4.2)$$

а затем будет увеличиваться

$$\Delta t(z) > \Delta t(0) \quad (z > f). \quad (7.4.3)$$

При этом режим распространения (3) соответствует рассмотренному ранее дисперсионному расплыванию. В случае же (1) имеет место эффект сужения импульса или его компрессии. Такая картина напо-

минает фокусировку волнового пучка, при этом длительность $\Delta t(z)$ импульса является аналогом радиуса $r(z)$ пучка. Характерный масштаб f в (1)–(3) будем называть «временным» фокусным расстоянием или просто фокусным расстоянием.

Условия компрессии импульса. Будем искать оптимальный входной импульс $A_{\text{opt}}^{(0)}(t)$, который на заданном расстоянии $z = f$ от источника создавал бы наиболее короткий (из всех возможных) импульсов $A_{\text{opt}}(\theta, z = f)$.

В частотном представлении имеем

$$A_{\text{opt}}^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega, \text{opt}}^{(0)} e^{i\omega t} d\omega \quad (7.4.4)$$

и согласно (7.3.3)

$$A_{\text{opt}}(\theta, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega, \text{opt}}^{(0)} e^{-ik_2 f \omega^2 / 2 + i\omega \theta} d\omega. \quad (7.4.5)$$

Формально поставленная задача решается просто. Из (5) непосредственно видно, что в оптимальном случае должно быть

$$A_{\omega, \text{opt}}^{(0)} \sim e^{ik_2 f \omega^2 / 2} = M_{\omega}. \quad (7.4.6)$$

Поскольку тогда

$$A_{\text{opt}}(\theta, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} |A_{\omega, \text{opt}}^{(0)}|^2 e^{i\omega \theta} d\omega \sim \int e^{i\omega \theta} d\omega = 2\pi \delta(\theta), \quad (7.4.7)$$

т. е. пробежав в диспергирующей среде расстояние z , импульс (4) трансформируется в бесконечно короткий импульс вида δ -функции. Подстановка (6) в (4) дает

$$A_{\text{opt}}^{(0)}(t) \sim M(t) \sim e^{-it^2/2k_2 f}, \quad (7.4.8)$$

т. е. найденный импульс (8) представляет собой ЧМ-поле, частота которого

$$\omega_M(t) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{t^2}{2k_2 f} \right) = -t/(k_2 f) \quad (7.4.9)$$

меняется со временем по линейному закону, причем величина $(k_2 f)^{-1}$ характеризует «скорость» изменения частоты.

Конечно, импульс вида (8) реально нельзя создать, поскольку его энергия и длительность бесконечны. Тем не менее этот результат является весьма важным и может быть использован в квазиоптимальной (модуляционной) схеме компрессии (рис. 7.5а). В этом случае через диспергирующую среду пропускается не сам подлежащий компрессии исходный импульс $A^{(0)}(t)$ (произвольной формы и некогерентности,

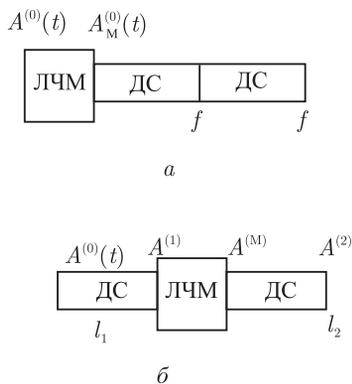


Рис. 7.5. Схемы компрессии импульса (а) и обращение формы импульса (б). ЛЧМ — линейный частотный модулятор, ДС — диспергирующая среда

имеющий длительность Δt_0 и ширину $\Delta\omega_0$), а предварительно промодулированный импульс

$$A_M^{(0)}(t) = A^{(0)}(t)M(t) = A^{(0)}(t)e^{-it^2/2k_2f}. \quad (7.4.10)$$

Поскольку при $A^{(0)} = \text{const}$ в (10) мы получили бы сверхкомпрессию (7), то очевидно, что сильную (хотя и не бесконечную) компрессию с $\Delta t_f \ll \Delta t_0$ можно получить, если функция $A^{(0)}(t)$ в (10) будет меняться значительно медленнее, чем $M(t)$.

Рассмотрим это условие относительной медленности $A^{(0)}(t)$ более подробно. Согласно (9) частота модуляции $M(t)$ в (10) меняется по линейному закону. При этом в соответствии с (10) эта модуляция фактически осуществляется в течение длительности Δt импульса $A^{(0)}(t)$. Девiation частоты функции $M(t)$ можно оценить, положив в (9) $t = \Delta t_0$:

$$\Delta\omega_M \approx \Delta t_0/|k_2|f. \quad (7.4.11)$$

Таким образом, записав условие относительной медленности функции $A^{(0)}(t)$ в (11)

$$\Delta\omega_0 \ll \Delta\omega_M \quad (7.4.12)$$

и подставив (11) в (12), получим

$$f \ll z_d/\beta_0, \quad (7.4.13)$$

где $z_d = (\Delta t_0)^2/|k_2|$ — дисперсионная длина (7.3.4), а β_0 — база начального импульса $A^{(0)}(t)$. Обычно база импульса $\beta_0 \geq 1$, поэтому $f \ll z_d$.

Распространение импульса, прошедшего через компрессор. Обозначим через $A_M(\theta, z)$ комплексную амплитуду импульса,

распространяющегося в диспергирующей среде (рис. 7.5а). Поскольку на входе среды $A_M(\theta, z)$ удовлетворяет условию (10)

$$A_M(\theta, z = 0) = A_M^{(0)}(t) = A^{(0)}(t)e^{-it^2/2k_2f}, \quad (7.4.14)$$

то подставив (14) в общее выражение (7.3.3), получим

$$A_M(\theta, z) = \mathcal{H}(\theta, z) \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t)e^{-i\theta t/k_2z} \cdot e^{\frac{it^2}{2k_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{f}\right)} dt. \quad (7.4.15)$$

Для фокусного расстояния ($z = f$) анализ выражения (14) можно выполнить, не обращаясь к конкретной форме импульса $A^{(0)}(t)$. В этом случае выражение принимает вид преобразования Фурье, аналогичного (7.3.5):

$$A_M(\theta, f) = \mathcal{H}(\theta, f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t)e^{-i\theta t/k_2f} dt = \mathcal{H}(\theta, f)2\pi A_{\omega=\theta/k_2f}^{(0)}. \quad (7.4.16)$$

Таким образом, как и в (7.3.6) и (7.3.7), можно написать

$$I_M(\theta, f) = |A_M(\theta, f)|^2 = \frac{1}{|k_2|f} g^{(0)}(\omega = \theta/k_2f), \quad (7.4.17)$$

$$\Delta t_f = |k_2|f \Delta\omega_0.$$

Эффективность компрессии характеризует коэффициент

$$N_f = \Delta t_0/\Delta t_f. \quad (7.4.18)$$

Из (17) и (18), учитывая (11), находим

$$N_f = \Delta\omega_M/\Delta\omega_0 = z_d/f\beta_0. \quad (7.4.19)$$

Следовательно, при выполнении найденного выше условия (13) в модуляционной схеме на рис. 7.5а можно действительно получить сильную компрессию. В соответствии с (18) и (19) любая (детерминированная или случайная) АМ-ЧМ входного импульса $A^{(0)}(t)$, расширяющая его частотный спектр, тем самым увеличивает длительность Δt_f и уменьшает N_f , т. е. ослабляет эффект компрессии. Согласно (16) при $z = f$ импульс $A_M(\theta, f)$ принимает вид спектрума, независимо от того выполняется ли при этом условие сильной компрессии или нет.

Импульс вне зоны компрессии. Если в (15) перейти к переменной интегрирования

$$t_1 = t - \frac{\theta}{1 - \frac{z}{f}}, \quad (7.4.20)$$

то получим

$$A_M(\theta, z) = \frac{e^{-i\beta^2 t}}{\sqrt{i2\pi k_2 z}} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)} \left(t_1 + \frac{\theta}{1 - z/f} \right) e^{-i\alpha^2 t_1^2} dt_1, \quad (7.4.21)$$

где обозначено

$$\alpha^2 = \frac{1 - \frac{f}{z}}{2k_2 f}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{f}\right) 2k_2 f}. \quad (7.4.22)$$

В (21) функция $A^{(0)}(t)$ с полосой $\Delta\omega_0$ заметно меняется за время порядка $t' \sim 1/\Delta\omega_0$, а экспонента $e^{-i\alpha^2 t_1^2}$ — за время порядка $t'' \sim \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2k_2 f}{|1 - \frac{f}{z}|}}$. Поэтому если $t'' \ll t'$, т. е.

$$\frac{2|k_2|f}{|1 - f/z|} \ll 1/(\Delta\omega_0)^2, \quad (7.4.23)$$

или учитывая (19)

$$\left|1 - \frac{f}{z}\right| \gg 2|k_2|f \Delta\omega_0^2 = 2\beta_0/N_f, \quad (7.4.24)$$

то экспоненту $e^{-i\alpha^2 t^2}$ в (21) можно заменить на δ -функцию:

$$e^{-i\alpha^2 t_1^2} \approx \sqrt{\frac{\pi}{i\alpha^2}} \delta(t_1).$$

В этом случае получаем следующий результат:

$$A_M(\theta, z) \approx \frac{e^{-i\beta^2 \theta^2}}{i\sqrt{\left(1 - \frac{z}{f}\right) \frac{z}{f}}} A^{(0)} \left(\frac{\theta}{1 - z/f} \right). \quad (7.4.25)$$

Условию (24) справедливости выражения (25) можно удовлетворить при выполнении следующих трех независимых условий:

$$z \neq f, \quad N_f \gg 1, \quad \beta_0 \ll N_f. \quad (7.4.26)$$

В этом случае комплексная амплитуда $A_M(\theta, z)$ (25) имеет вид входного импульса $A^{(0)}(t)$, но «уширенного» в $\left|1 - \frac{z}{f}\right|$ раз. При этом длительность Δt_M импульса (25) описывается простой формулой

$$\Delta t_M(z \neq f) \approx \left|1 - \frac{z}{f}\right| \Delta t_0. \quad (7.4.27)$$

Распространение и компрессия случайно модулированного гауссовского импульса; точные результаты. Рассмотрим теперь случай, когда свойства начального гауссовского импульса определяются вы-

ражениями (7.3.18), а на входе диспергирующей среды импульс записывается в виде (7.4.10). В диспергирующей среде импульс имеет комплексную амплитуду

$$A_M(\theta, z) = \mathcal{H}(\theta, z) \int_{-\infty}^{+\infty} A_M^{(0)}(t) \exp \left[\frac{it^2}{2k_2} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f} \right) \right] dt,$$

и среднюю интенсивность

$$\bar{I}_M(\theta, z) = \langle |A_M(\theta, z)|^2 \rangle = \sigma^2 F_0^2 \frac{t_F}{t(z)} \exp[-\theta^2/t^2(z)], \quad (7.4.28)$$

где

$$t^2(z) = t_F^2(1 - z/f)^2 + (k_2 z)^2 \left(\frac{1}{t_F^2} + \frac{1}{\tau_\xi^2} \right). \quad (7.4.29)$$

Как видно из (28), в данном случае на любом расстоянии z от компрессора-ЧМ модулятора M импульс сохраняет гауссовскую форму. Определим его эффективную длительность как $\Delta t_M = c_j t(z)$, а длительность и ширина спектра входного импульса соответственно будут

$$\Delta t_0 = c_j t_F, \quad \Delta \omega_0 = c_j \sqrt{\frac{1}{t_F^2} + \frac{1}{\tau_\xi^2}}.$$

Как и выше, c_j — безразмерный коэффициент, который определяется критерием оценки этих величин (см. § 1). Из (29) нетрудно получить

$$\Delta t_M^2(z) = \Delta t_0^2 \left(1 - \frac{z}{f} \right)^2 + (k_2 z \Delta \omega_0)^2. \quad (7.4.30)$$

Используя (30), найдем общее выражение для коэффициента компрессии

$$N_z = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_M(z)} = \left[\left(1 - \frac{x}{\varepsilon} \right)^2 + x^2 \right]^{-1/2}, \quad (7.4.31)$$

где

$$x = \beta_0 z/z_d, \quad \varepsilon = \beta_0 f/z_d = \frac{1}{N_f} = \frac{\Delta \omega_0}{\Delta \omega_M} \quad (7.4.32)$$

и $z_d = (\Delta t_0)^2/|k_2|$ — дисперсионная длина. Параметр ε в (32) характеризует расширение спектра импульса $A^{(0)}(t)$ модулятором M . При сильной компрессии на фокусном расстоянии

$$N_f \gg 1, \quad \text{а} \quad \varepsilon \ll 1.$$

Заметим, однако, что в соответствии с (31) максимальная компрессия с $N_{z, \max} = N_w = \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}} > N_f$ достигается не на расстоянии $z = f$, а на длине $z = z_w = \frac{f}{1 + \varepsilon^2}$ несколько меньшей f .

Отметим также, что поскольку согласно (32) $\varepsilon \sim \Delta \omega_0$, то любое расширение спектральной полосы $\Delta \omega_0$ импульса $A^{(0)}(t)$ (за счет его

детерминированной или случайной модуляции) увеличивает параметр ε и, следовательно, уменьшает коэффициенты сжатия N_f и N_w .

Сохранение и обращение формы импульса. Выше проанализирована схема компрессии импульсов, в которой они поступали непосредственно на вход частотного модулятора. Интересные трансформационные особенности импульсы приобретают в более общей схеме, когда до поступления на частотный модулятор, импульсы предварительно распространяются через диспергирующую среду и, следовательно, приобретают определенную частотную модуляцию (рис. 7.5б).

Пусть, по-прежнему, исходная форма импульса $A^{(0)}(t)$. Пройдя в первой диспергирующей среде расстояние l_1 , импульс перед модулятором определяется выражением

$$A^{(1)}(\theta_1, l_1) = \int \mathcal{H}(\theta_1 - t', l_1) A^{(0)}(t') dt', \quad (7.4.33)$$

где $\theta_1 = t - \frac{l}{u_1}$ и

$$\mathcal{H}(\theta_1, l_1) = [i2\pi k_2 l_1]^{-1} e^{i\theta_1^2/2k_2 l_2}. \quad (7.4.34)$$

Непосредственно после частотного модулятора имеем

$$A^{(M)}(\theta, l_1) = A^{(1)}(\theta_1, l_1) e^{-i\theta_1^2/2k_2 f}, \quad (7.4.35)$$

где скорость изменения частоты модулятора, как и выше, характеризуем $k_2 f$.

После модулятора на расстоянии l_2

$$A^{(2)}(\theta_2, l_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\theta_2 - t'', l_2) A^{(M)}(t'', l_1) dt''. \quad (7.4.36)$$

Подставим выражения (33), (34), (35) в (36), полагая выполнение соотношения

$$1/l_1 + 1/l_2 = 1/f; \quad (7.4.37)$$

тогда получаем простой результат

$$A^{(2)}(\theta_2, l_2) = -i\sqrt{N} A^{(0)}(-N\theta_2) e^{iN\theta_2^2/k_2 f}, \quad (7.4.38)$$

где

$$\theta_2 = t - (l_1 + l_2)/u, \quad N = l_1/l_2.$$

Заметим, что условие (37) аналогично формуле линзы в геометрическом приближении. Значение N может быть, очевидно, как больше, так и меньше единицы ($N \geq 1$).

Из (38) видно, что в рассматриваемом сечении диспергирующей среды импульс обладает частотной модуляцией, которая отличается от частоты модулятора в N раз. Изменяются и статистические характеристики импульса: длительность импульса и время корреляции

«уменьшаются» в N раз, а интенсивность, напротив, «возрастает» в N раз:

$$I^{(2)}(\theta_2, l_2) = |A^{(2)}(\theta_2, l_2)|^2 = NI^{(0)}(-N\theta_2). \quad (7.4.39)$$

Однако принципиально важным следствием из (38), (39) является то, что имеет место не только сохранение, но и обращение формы импульса [1, 4]. Фурье-спектр интенсивности обращенного импульса оказывается инвертированный по частоте относительно такового исходного импульса

$$S_{\Omega}(I^{(2)}) = S_{\Omega}(I^{(0)}) = \int I^{(0)}(t)e^{-i\Omega t} dt. \quad (7.4.40)$$

Избавиться от временной инверсии можно, используя два частотных модулятора [1].

§ 5. Метод «моментов» в теории распространения и компрессии импульсов

Временные «моменты». В § 1 главы 1 показано, что случайный процесс $x(t)$ удобно описывать, помимо неотрицательной и нормированной функции распределения плотности вероятности $w(x, t)$ («импульса» вероятности), используя различные статистические характеристики такие, как статистические моменты

$$m_n(t) = \langle x^n(t) \rangle = \overline{x^n} = \int x^n(t)w(x, t) dx, \quad (7.5.1)$$

центральные моменты

$$\mu_n(t) = \langle (x(t) - \bar{x}(t))^n \rangle, \quad (7.5.2)$$

характеристическую функцию

$$\theta(u, t) = \langle e^{iux(t)} \rangle = \int e^{iux(t)} w(x, t) dx \quad (7.5.3)$$

и т. п.

Свойствами, подобными $w(x, t)$, обладает также введенная в § 1 настоящей главы нормированная интенсивность $V(\theta, z)$ импульса, распространяющегося в линейной среде без потерь:

$$V(\theta, z) = \frac{I(\theta, z)}{U_0}, \quad I(\theta, z) = |A(\theta, z)|^2, \quad (7.5.4)$$

$$U_0 = \int I(\theta, z) d\theta, \quad V(\theta, z) \geq 0, \quad \int V(\theta, z) d\theta = 1.$$

Поэтому, естественно, при анализе импульсов попытаться использовать характеристики, аналогичные (1)–(3) [1, 5]. Чтобы не путать статистическое усреднение с усреднением по времени, для обозначения последнего будем использовать фигурные скобки:

$$\int f(t)V(\theta, z) d\theta \equiv \{f(\theta)\}. \quad (7.5.5)$$

Итак, распространяющийся импульс характеризуем временными моментами

$$m_n(z) = \int \theta^n V(\theta, z) d\theta = \{\theta^n\}, \quad (7.5.6)$$

которые имеют следующий наглядный смысл: первый момент $m_1(z) = \{\theta\}$ описывает положение «центра тяжести» импульса в произвольном сечении среды z ; второй центральный момент

$$\mu_2(z) = m_2(z) - m_1^2 = [\Delta t_{\text{CK}}(z)]^2, \quad (7.5.7)$$

аналогичный дисперсии (1.1.34) в теории случайных процессов, определяет так называемую среднеквадратичную длительность $\Delta t_{\text{CK}}(z)$ импульса (ср. с § 1 настоящей главы). «Кумулянты» (коэффициент асимметрии \varkappa_3 и коэффициент эксцесса \varkappa_4)

$$\varkappa_3 = \mu_3/\mu_2^{3/2}, \quad \varkappa_4 = (\mu_4 - 3\mu_2^2)/\mu_2^2$$

можно использовать для более детального описания формы импульса. Наконец, используя временные моменты можно написать следующую простую оценку для энергии, заключенной в «крыльях» импульса

$$U(|t - m_1| \geq \tau, z) \leq U_0 \mu_2(z) / \tau^2$$

аналогичную неравенству Чебышева (1.1.37).

Важным свойством временных моментов является то, что известен общий вид их зависимости от пройденного расстояния z . Момент n -го порядка является полиномом n -ой степени по z :

$$\{\theta^n\} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad (7.5.9)$$

где c_j — постоянные. Доказательство соотношения (9) для общего случая линейных сред без потерь с произвольным законом дисперсии будет дано ниже в § 3 гл. 8.

Частотные моменты. Для описания частотных характеристик распространяющегося импульса, имеющего частотный спектр $g(\omega)$ и энергию $U = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) d\omega$, по аналогии с (6), можно ввести частотные моменты

$$\{\omega^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^n V(\omega) d\omega, \quad (7.5.10)$$

где

$$V(\omega) = g(\omega)/U, \quad \int V(\omega) d\omega = 1.$$

Таким образом, используя (9) и (10), длительность произвольного АМ-ЧМ импульса и ширину его частотного спектра можно оценить по формулам

$$\begin{aligned} \Delta t^2(z) &= \Delta t_{\text{CK}}^2(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2, \\ \Delta \omega^2 &= \Delta \omega_{\text{CK}}^2 = \{\omega^2\} - \{\omega\}^2. \end{aligned} \quad (7.5.11)$$

Двойное (частотно-временное) представление моментов. Очень важно, что при «моментном» описании импульсов, кроме (9), можно использовать то обстоятельство, что временные моменты могут быть записаны как во временном, так и в частотном представлении и, наоборот, частотные моменты — как в частотном, так и во временном представлении. Применяя преобразование Фурье, нетрудно показать, что если

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad g(\omega) = 2\pi |A_\omega|^2, \\ U &= \int g(\omega) d\omega = \int |A(t)|^2 dt, \end{aligned} \quad (7.5.12)$$

то

$$\{t\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} t |A(t)|^2 dt = \frac{i2\pi}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\omega^* \frac{\partial A_\omega}{\partial \omega} d\omega, \quad (7.5.13a)$$

$$\{t^2\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |A(t)|^2 dt = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial A_\omega}{\partial \omega} \right|^2 d\omega; \quad (7.5.13b)$$

$$\{\omega\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega g(\omega) d\omega = -\frac{i}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} A^*(t) \frac{\partial A}{\partial t} dt, \quad (7.5.14a)$$

$$\{\omega^2\} = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 g(\omega) d\omega = \frac{1}{U} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial A(t)}{\partial t} \right|^2 dt. \quad (7.5.14b)$$

Соотношения (9) и (13)–(14) играют основную роль при моментном описании импульсов. Их совместное использование дает возможность получить ряд новых точных и общих результатов, которые излагаются в последующих разделах настоящей главы.

Ширина частотного спектра АМ-ЧМ импульса произвольной формы. Пусть рассматриваемый импульс имеет вид

$$A(t) = b(t) e^{i\varphi(t)} = \int A_\omega e^{i\omega t} d\omega, \quad (7.5.15)$$

где $b(t)$ и $\varphi(t)$ — произвольные действительные функции ($b(t \rightarrow \pm\infty) = 0$, $\varphi(t \rightarrow \pm\infty) = 0$), и мы хотим найти ширину $\Delta\omega$ частотного спектра функции (15). Если вид A_ω в (15) известен, то обычный метод прямой оценки $\Delta\omega$ заключается в том, чтобы сначала вычислить энергетический спектр

$$g(\omega) = 2\pi |A_\omega|^2 \quad (7.5.16)$$

функции (15), а затем по любому из критериев § 1 этой главы оценить ширину $\Delta\omega$ спектра.

Предположим, что функция A_ω , а следовательно, и $g(\omega)$ нам неизвестны. Покажем, что и в этом случае, используя соотношения (13), можно найти среднеквадратичную оценку для ширины $\Delta\omega = \Delta\omega_{\text{СК}}$ спектра (16), форму которого мы не знаем.

Согласно (15)

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) &= (\dot{b}(t) + i\dot{\varphi}(t)b(t))e^{i\varphi(t)}, \\ A^*(t)\dot{A}(t) &= b(t)\dot{b}(t) + i\dot{\varphi}(t)b^2(t), \quad |\dot{A}(t)|^2 = \dot{b}^2(t) + b^2(t)\dot{\varphi}^2(t). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (14), получим

$$\begin{aligned} \{\omega\} &= \{\dot{\varphi}\}, \\ \{\omega^2\} &= \frac{1}{U} \int \dot{b}^2(t) dt + \{\dot{\varphi}^2\}, \end{aligned} \quad (7.5.17)$$

где

$$\{p(\dot{\varphi})\} = \frac{1}{U} \int p(\dot{\varphi})b^2(t) dt, \quad U = \int b^2(t) dt.$$

Подстановка (17) в (11) приводит к следующему выражению, определяющему искомую ширину $\Delta\omega_{\text{ск}}$ спектра функции (15):

$$\Delta\omega_{\text{ск}}^2 = \Delta\omega_b^2 + \Delta\omega_\varphi^2, \quad (7.5.18)$$

где

$$\Delta\omega_b^2 = \frac{1}{U} \int \dot{b}^2(t) dt \quad (7.5.19a)$$

есть среднеквадратичное уширение спектра (16) за счет модуляции амплитуды $b(t)$, а

$$\Delta\omega_\varphi^2 = \{\dot{\varphi}^2\} - \{\dot{\varphi}\}^2 \quad (7.5.19b)$$

— среднеквадратичное уширение спектра, обусловленное модуляцией фазы $\varphi(t)$.

Для дальнейшего удобно обобщить полученные результаты на случай импульса вида

$$A(t) = b(t)e^{i[\varphi(t)+\mu(t)]}, \quad (7.5.20)$$

который отличается от (15) добавочной временной фазой $\mu(t)$. Решение получим, просто заменяя в (17)–(19) φ на $\varphi + \mu$. Окончательное выражение для среднеквадратичной ширины частотного спектра функции (20) имеет следующий вид:

$$\Delta\omega_{\text{ск}}^2 = \Delta\omega_b^2 + \Delta\omega_\varphi^2 + \Delta\omega_\mu^2 + 2R \Delta\omega_\varphi \Delta\omega_\mu, \quad (7.5.21)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta\omega_\mu^2 &= \{\dot{\mu}\}^2 - \{\dot{\mu}\}^2, \\ R &= \frac{\{\dot{\varphi}\dot{\mu}\} - \{\dot{\varphi}\}\{\dot{\mu}\}}{\Delta\omega_\varphi \Delta\omega_\mu}. \end{aligned} \quad (7.5.22)$$

Параметр R (22) можно условно назвать среднеквадратичным коэффициентом взаимной корреляции функций $\dot{\varphi}(t)$ и $\dot{\mu}(t)$. В случае $\mu(t) = -\frac{t^2}{2k_2f}$ имеем

$$\Delta\omega_\mu^2 = [\{t^2\} - \{t\}^2]/(k_2f)^2 = (\Delta t_0)^2/(k_2f)^2, \quad (7.5.23)$$

$$\{\dot{\varphi}\dot{\mu}\} - \{\dot{\varphi}\}\{\dot{\mu}\} = -\Phi_0/(k_2f), \quad \Phi_0 = \{\dot{\varphi}t\} - \{\dot{\varphi}\}\{t\}. \quad (7.5.24)$$

Расширение частотного спектра импульса в компрессоре. Вернемся к схеме компрессора, представленной на рис. 7.5а. Будем полагать, что на входе компрессора импульс имеет вид (15):

$$A^{(0)}(t) = b(t)e^{i\varphi(t)} \quad (7.5.25)$$

и, следовательно, для его описания можно воспользоваться выражениями (18) и (19). Однако ширину спектра вместо $\Delta\omega_{\text{сч}}$ будем обозначать как $\Delta\omega^{(0)}$, т. е.

$$(\Delta\omega^{(0)})^2 = \Delta\omega_b^2 + \Delta\omega_\varphi^2. \quad (7.5.26)$$

На выходе компрессора импульс приобретает дополнительную частотную модуляцию (см. (7.4.10)) и принимает вид (20) с $\mu(t) = t^2/(2k_2f)$. При этом очевидно, длительность импульса сохраняется, а ширина спектра определяется выражением

$$(\Delta\omega_M^{(0)})^2 = (\Delta\omega^{(0)})^2 + (\Delta t_{(0)}/k_2f)^2 - 2\Phi_0/(k_2f). \quad (7.5.27)$$

Напомним, что в приведенных здесь формулах везде имеются в виду среднеквадратичные значения параметров

$$\Delta\omega^{(0)}, \quad \Delta\omega_M^{(0)}, \quad \Delta t^{(0)}, \quad \Delta t_M^{(0)}, \quad \Delta\omega_\varphi.$$

Импульс в среде с дисперсией второго порядка после компрессора. В соответствии со схемой компрессии на рис. 7.5а импульс с выхода компрессора ($z = 0$) сразу же поступает в диспергирующую среду ($z > 0$), который в процессе распространения приобретает вид импульса $A_M(\theta, z)$ (7.4.16) со среднеквадратичной длительностью

$$\Delta t_M^2(z) = \{\theta^2\} - \{\theta\}^2. \quad (7.5.28)$$

Из (28) и общего соотношения (9) следует, что величина $\Delta t_M^2(z)$ будет зависеть от z по квадратичному закону (ср. с (7.4.30))

$$\Delta t_M^2(z) = D_0 + D_1z + D_2z^2. \quad (7.5.29)$$

Чтобы найти коэффициенты D_j в (29), можно использовать три условия: 1) $\Delta t_M(z = 0) = \Delta t^{(0)}$, 2) $\Delta t_M(z = f) = |k_2|f \Delta\omega_M^{(0)}$ (формула (7.4.17)) и 3) $\Delta t_M(z \rightarrow \infty) = |k_2|z \Delta\omega_M^{(0)}$ (формула (7.3.7)). Причем $\Delta\omega_M^{(0)}$ дается выражением (27).

Модифицированный метод моментов при частично некогерентном (случайно модулированном) входном импульсе. Выражение

(29) в равной степени справедливо как для детерминированных, так и случайно модулированных входных импульсов. Однако в последнем случае параметры начального импульса

$$\Delta t^{(0)}, \Delta \omega_M^{(0)} \text{ и } \Phi_0 \quad (7.5.30)$$

будут случайными величинами, флуктуирующими от реализации к реализации входного импульса $A^{(0)}(t)$. Для получения каких-то достоверных оценок анализ следует продолжить и провести дополнительное аналитическое или численное усреднение полученных выше результатов с учетом флуктуаций параметров (30).

Намного проще, однако, поступить иначе как бы «огрубить» метод моментов, используя весовую функцию V не в виде (4), а в модифицированной форме:

$$V(\theta, z) = \frac{I(\theta, z)}{\bar{U}_0}, \quad \bar{U}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}(\theta, z) d\theta = \text{const.}$$

§ 6. Самовоспроизведение импульсов в диспергирующей среде; временной эффект Тальбота

До сих пор речь шла о распространении в диспергирующих средах одиночных импульсов, т. е. излучения с непрерывным спектром. Интересные особенности в таких средах могут проявлять периодически повторяющиеся импульсы, излучение с дискретным спектром. При этом возможен эффект самовоспроизведения формы импульсов, который является временным аналогом эффекта Тальбота. Эффект Тальбота заключается в самовоспроизведении периодической поперечной структуры поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, на определенных расстояниях от источника (см., например, [6–9]). Аналог пространственного эффекта Тальбота имеет место, когда периодически повторяющийся когерентный или частично некогерентный импульс распространяется в среде, где существенную роль играет дисперсия групповой скорости. Как показано в § 3, отдельный импульс в такой среде расплывается по мере распространения. На расстояниях больше, чем дисперсионная длина (в дальней зоне), расплывающиеся импульсы интерferируют и могут формировать периодическую модуляцию огибающей [14].

Физика эффекта Тальбота. Возможность самовоспроизведения последовательности импульсов в диспергирующей среде можно наглядно продемонстрировать при использовании спектрального представления. Воспользуемся сначала многомодовой моделью случайного процесса, подробно проанализированного в § 6 главы 3. Комплексная

амплитуда такого процесса на входе диспергирующей среды определяется выражением (см. (3.6.32))

$$A^{(0)}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \exp i \left[\left(n + \frac{1}{2} (1 - N) \right) \Omega t + \varphi_n \right], \quad (7.6.1)$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ — частота межмодовых биений, T — период повторения импульса, a_n и φ_n — случайные параметры, изменяющиеся от реализации к реализации, N — число мод в импульсе, полная ширина спектра импульса $\Delta\omega = (N - 1)\Omega$, причем $\Delta\omega \ll \omega_0$ (ω_0 — центральная частота импульса). Для упрощения анализа будем полагать, что N — нечетное число. Напомним, что эта модель импульса (1) хорошо описывает многомодовый режим лазерного излучения как с синхронизованными, так и несинхронизованными модами.

В общем случае динамика импульса (1) в диспергирующей среде дается уравнением (7.1.2). Полным аналогом пространственного эффекта Тальбота является эффект в среде с дисперсией второго порядка. При этом удобно использовать в данном случае решение в спектральной форме (7.3.3).

Согласно (1) фурье-спектр исходного излучения равен:

$$A_{\omega}^{(0)} = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\varphi_n} \delta(\omega - n_1 \Omega). \quad (7.6.2)$$

Здесь и далее для упрощения записи введено обозначение $n_1 = n + \frac{1}{2}(1 - N)$.

Подставив (2) в (7.3.3), получим

$$A(\theta, z) = \sum_{n=1}^N a_n e^{-i\frac{1}{2} k_2 z n_1^2 \Omega^2 + i\varphi_n}.$$

Форма импульса $A(\theta, z)$ будет, очевидно, точно совпадать с исходной $A^{(0)}(t)$, если $e^{-i\frac{1}{2} k_2 z n_1^2 \Omega^2} = 1$. Это условие выполняется на длинах z , удовлетворяющих равенству

$$\frac{1}{2} k_2 \Omega^2 z = 2\pi m \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots). \quad (7.6.3)$$

Наименьшая длина из этого равенства

$$L_T = \frac{4\pi}{(|k_2| \Omega^2)} = \frac{T^2}{\pi |k_2|} \quad (7.6.4)$$

носит название *тальботовского расстояния*.

Физика самовоспроизведения формы импульса на расстоянии L_T достаточно ясна: в этом сечении среды набег фаз компонент эквидистантного дискретного спектра оказывается кратным 2π , вследствие

чего и восстанавливается первоначальное фазовое соотношение между спектральными компонентами.

Типы эффекта Тальбота. Существует несколько разновидностей временного эффекта Тальбота (см, например, [10–12] и цитируемую там литературу). Рассмотрим их кратко, обратившись к исходному временному представлению. Начальную комплексную амплитуду импульса запишем в виде (ср. с. (2.6.3))

$$A^{(0)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(t - nT), \quad (7.6.5)$$

где $F(t)$ — комплексная регулярная функция, определенная на интервале $|t| \leq T/2$ и равная нулю вне его ($F(t) = 0$ при $t > T/2$), n — целое число. Интенсивность импульса будет также периодической функцией

$$I_0(t) = |A^{(0)}(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(t - nT)|^2. \quad (7.6.6)$$

Фурье-спектр амплитуды $A^{(0)}(t)$ имеет вид

$$A_{\omega}^{(0)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p\Omega} \delta(\omega - p\Omega), \quad a_{p\Omega} = \frac{\Omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) e^{-ip\Omega t} dt. \quad (7.6.7)$$

Как и выше, $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ — частота повторения импульса (частотный интервал между спектральными компонентами).

В соответствии с (7.3.3) в диспергирующей среде фурье-спектр определяется выражением

$$A_{\omega}(z) = \mathcal{H}(\omega, z) A_{\omega}^{(0)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p\Omega} e^{-ip^2 \varphi} \delta(\omega - p\Omega), \quad (7.6.8)$$

где введено обозначение $\varphi = \frac{1}{2} k_2 z \Omega^2$.

При анализе явления Тальбота выделяют так называемые «целочисленные» и «дробные» эффекты.

1) *Обычные и обращенные «целочисленные» эффекты Тальбота.*

Предположим, что

$$\varphi = 2\pi m \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (7.6.9)$$

т. е. $z = |m|L_T$. Тогда $\varphi p^2 = 2\pi N$, причем N — целое число. Переходя от спектрального (8) к временному представлению, на тальботовском расстоянии имеем

$$A(\theta, L_T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\theta - nT), \quad (7.6.10)$$

$\theta = t - L_T/u$. Полученный результат (10) относится к *обычному* эффекту Тальбота и аналогичен таковому предыдущего раздела: на тальботовском расстоянии форма импульса совпадает с первоначальной, а время его прихода определяется групповой скоростью u (см. рис. 7.6).

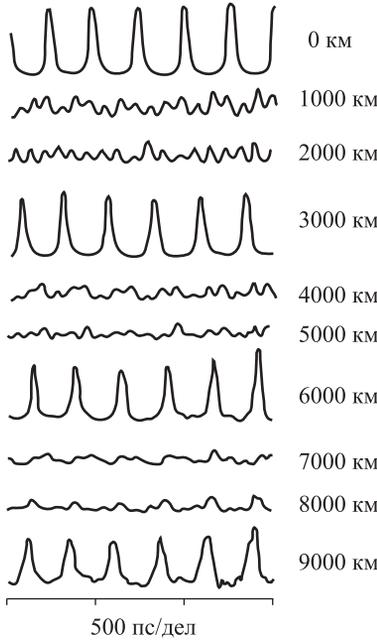


Рис. 7.6. Формы измеренных периодических импульсов, распространяющихся в оптическом волокне с дисперсией $k_2 = 21,6$ нс/нм, на различных пройденных расстояниях. Видно, что импульсы восстанавливаются приблизительно через каждые 3000 км. Заимствовано из [13]

Пусть теперь выполняется условие

$$\varphi = \pi t \quad (m = \pm 1, \pm 3, \dots) \tag{7.6.11}$$

и, следовательно, $p^2\varphi = \pi N$, где $N = mp^2$. N — четное число, когда p — четное, и N — нечетное число, когда p — нечетное. Вследствие этого $p^2\varphi$ можно заменить на $p\pi$. Поэтому фурье-спектр (8) в рассматриваемом случае можно записать так

$$A_\omega \left(\frac{1}{2} L_T \right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p\Omega} e^{-ip\pi} \delta(\omega - p\Omega). \tag{7.6.12}$$

Однако поскольку $p\pi = p\Omega T/2$, то (12) можно преобразовать к виду

$$A_\omega\left(\frac{1}{2}L_T\right) = e^{-i\frac{1}{2}\omega T} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p\Omega}\delta(\omega - p\Omega). \quad (7.6.13)$$

Видно, что появляется линейная фазовая добавка. При переходе к временному представлению она преобразуется во временную задержку, равную $T/2$:

$$A\left(\theta, \frac{1}{2}L_T\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\theta - \frac{T}{2} - nT\right). \quad (7.6.14)$$

Форма же импульса опять точно совпадает с исходной. Рассмотренный эффект принято называть «обращенным» эффектом Тальбота [10].

2) «Дробный» эффект Тальбота. Он имеет место, если считать

$$\varphi = (m/q)\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots; q = 2, 3, 4, \dots), \quad (7.6.15)$$

так что отношение m/q нецелое и неприводимое рациональное число. Анализ этой ситуации приводит к следующим выражениям для интенсивностей импульсов [10]

$$I(t, L_T) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\theta - \frac{n}{q}T\right) \right|^2, \quad (7.6.16)$$

$$I\left(t, \frac{1}{2}L_T\right) = \frac{1}{q} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\theta - \frac{T}{2q} - \frac{n}{q}T\right) \right|^2. \quad (7.6.17)$$

Из (16) и (17) следует, что первоначальная форма импульсов и их длительность сохраняются, но частота повторения возрастает в q раз. Интенсивность импульсов уменьшается соответственно q в раз. Заметим, что в «обращенном» эффекте Тальбота (17) временная задержка обратно пропорциональна q . Максимальный коэффициент M мультипликации (размножения) импульса должен, очевидно, удовлетворять неравенству $M_{\max} \leq T/\Delta t$, где Δt — длительность исходного импульса.

Эффект Тальбота для частично некогерентных импульсов. Обратимся к мультипликативной модели импульса (7.2.1)

$$A^{(0)}(t) = F(t)\xi(t). \quad (7.6.18)$$

Как и выше, здесь $F(t)$ — детерминированная функция, а случайная модуляция $\xi(t)$ представляет собой стационарный случайный процесс со статистическими характеристиками, изложенными в § 2 настоящей главы.

Далее будем следовать в основном работе [12]. Запишем фурье-спектр импульса (18) через свертку

$$A_{\omega}^{(0)} = \int \xi_{\omega_1} \tilde{F}(\omega - \omega_1) d\omega_1,$$

где ξ_{ω} и $\tilde{F}(\omega)$ — фурье-спектры случайного процесса $\xi(t)$ и функции $F(t)$.

В среде с дисперсией второго порядка во временном представлении согласно (7.3.3) имеем

$$A(\theta, z) = \int \xi_{\omega_1} F(\theta; \omega_1, z) d\omega_1, \quad (7.6.19)$$

где введено обозначение

$$F(\theta; \omega_1, z) = \int \mathcal{K}(\omega_2, z) \tilde{F}(\omega_2 - \omega_1) e^{i\omega_2 \theta} d\omega_2, \quad (7.6.20)$$

а коэффициент передачи $\mathcal{K}(\omega, z)$ определяется выражением (7.3.1).

Принимая во внимание стационарность случайного процесса, для средней интенсивности находим

$$\langle I(\theta, z) \rangle = \int G(\omega) |F(\theta; \omega, z)|^2 d\omega, \quad (7.6.21)$$

где $G(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса $\xi(t)$.

Функцию (20) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} F(\theta; \omega, z) &= \mathcal{K}(\omega) e^{i\omega \theta} \int \mathcal{K}(\Omega) \tilde{F}(\Omega) e^{-i(\theta - k_2 \omega z) \Omega} d\Omega = \\ &= \mathcal{K}(\omega) e^{i\omega \theta} F(\theta - k_2 \omega z, z) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$|F(\theta; \omega, z)|^2 = |F(\theta - k_2 \omega z, z)|^2 = I_F(\theta - k_2 \omega z, z). \quad (7.6.22)$$

Выражение для $F(\theta - k_2 \omega z, z)$ аналогично (7.3.3), описывающего динамику детерминированного импульса в диспергирующей среде. Величина $k_2 \omega z$ характеризует дополнительное «запаздывание» монохроматической волны с частотой $\omega_0 + \omega$ по отношению волне с частотой ω_0 .

С учетом (22) выражение (21) принимает вид

$$\langle I(\theta, z) \rangle = \int G(\omega) I_F(\theta - k_2 \omega z, z) d\omega. \quad (7.6.23)$$

С помощью введения фурье-спектра интенсивности

$$\tilde{I}_F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int I_F(\theta) e^{i\Omega \theta} d\theta$$

результат (23) можно переписать так

$$\langle I(\theta, z) \rangle = \sigma_{\xi}^2 \int R(k_2 z \omega) \tilde{I}_F(\omega, z) e^{-i\omega \theta} d\omega, \quad (7.6.24)$$

где σ_ξ^2 — дисперсия и $R(\tau)$ — нормированная корреляционная функция случайного процесса (см. § 2). Из (24) наглядно видно, что конечное время корреляции случайного процесса приводит к уменьшению амплитуд фурье-спектра импульса. Другими словами, случайная модуляция по отношению к детерминированному импульсу играет роль своеобразного частотного фильтра, который, однако, сохраняет энергию импульса. Полученный результат (24) является довольно общим, он справедлив для произвольных детерминированных импульсов и для произвольных длин распространения, ограничения связаны лишь с характером дисперсии среды.

Конкретизируем теперь выражение (21) для периодической последовательности детерминированного импульса, т. е. будем полагать, что $F(t)$ определяется выражением (5). Нетрудно записать формулы для средних интенсивностей на тальботовских расстояниях для рассмотренных выше ситуаций. Так, например, для обычного временного эффекта Тальбота (10) при $z = L_T$ имеем

$$\langle I(\theta, L_T) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int G(\omega) |F(\theta - k_2 \omega L_T - nT)|^2 d\omega. \quad (7.6.25)$$

Разложим интенсивность модулирующего импульса на гармоники

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(t - nT)|^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i\Omega m t} \quad (7.6.26)$$

и подставим это выражение в (25). Тогда получим

$$\langle I(\theta, L_T) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m B(4\pi m/\Omega) e^{im\Omega t}, \quad (7.6.27)$$

где

$$B\left(\frac{4\pi m}{\Omega}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \exp\{-i(4\pi m/\Omega)\omega\} d\omega$$

— корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$.

Из выражения (27) следует, что при конечном времени корреляции случайного процесса средние интенсивности гармоник и средняя интенсивность импульса на тальботовском расстоянии уменьшается. Причем подавление амплитуд гармоник увеличивается с ростом номера гармоники. Максимальное число гармоник на тальботовском расстоянии определяется временем когерентности $m_{\max} \approx \Omega \tau_k / 4\pi = \frac{1}{2} \frac{\tau_k}{T}$. Вывод об уменьшении средней интенсивности импульса (27) на первый взгляд противоречит ранее полученному результату, следующего из (2), что форма импульса на тальботовском расстоянии полностью восстанавливается. На самом деле никакого противоречия нет, поскольку модели импульсов (1) и (18) существенно различны. Для импульсов

вида (1), где амплитуды и фазы случайные величины, время корреляции бесконечно (спектральная плотность имеет вид набора δ -функций на соответствующих частотах, см. формулы (1.3.39), (1.3.40)).

Полученные выше формулы (23), (25) справедливы для стационарного случайного процесса. Они обобщаются на периодически нестационарный, сжатый шум путем замены в них спектральной плотности $G(\omega)$ на сумму спектральных плотностей квадратурных компонент $a(t)$ и $b(t)$: $G(\omega) = G_a(\omega) + G_b(\omega)$ при условии $\langle a(t)b(t) \rangle = \bar{a}\bar{b} = 0$.

В рассматриваемой среде набег фазы на частоте Ω , связанный с дисперсией второго порядка, равен $\varphi = \frac{1}{2} k_2 z \Omega^2$. Для переноса приведенных результатов на диспергирующие оптические устройства достаточно произвести замену на $\varphi = \frac{1}{2} \dot{\Phi}(0) \Omega^2$, где $\dot{\Phi}(0)$ — вторая производная по частоте Ω в зависимости $\phi(\Omega) = \arg K(\Omega)$, где $K(\Omega)$ — частотный коэффициент передачи устройства (см. [3]).

Анализом целочисленного эффекта Тальбота мы здесь и ограничимся. Для ознакомления с дробным эффектом Тальбота в случае частично некогерентных импульсов можно обратиться к публикации [12]. При этом, как и в ситуации с детерминированными импульсами, можно найти условия увеличения частоты повторения некогерентных импульсов.

Литература к главе 7

1. Ю.Е. Дьяков, С.Ю. Никитин. Задачи по статистической радиофизике и оптике. — Изд-во МГУ, 1985, 186 с.
2. Ю.Е. Дьяков // Письма в ЖЭТФ. 1983, т. 37, с. 14.
3. С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. — М.: Наука, 1988.
4. Л.С. Телегин, А.С. Чиркин // Квант. электроника, 1985, т. 12, с. 166.
5. С.Н. Власов, В.А. Петрищев, В.И. Таланов // Изв. Вузов, сер. Радиофизика, 1971. Т. 14. с. 1353.
6. В.П. Кандидов // Физ. образов. в вузах, 1998, т. 4, № 3, с. 99; Сорос. образ. журнал, 1999, № 12, с. 68.
7. В.В. Лиханский, А.П. Напортович // УФН, 1990, т. 160, с. 101.
8. В.П. Кандидов, А.В. Кондратьев // Квант. электроника, 1997, т. 24, с. 240; 2001, т. 31, с. 1032.
9. M. V. Berry, S. Klein // J. Mod. Opt., 1996, v. 43, p. 2139.
10. J. Azana, M. A. Muriel // IEEE J. Select. Topics in Quantum Electron., 2001, v. 7, p. 728.
11. J. Lancis, J. Caraquitena, P. Andreers, M. A. Muriel // Opt. Communs, 2005, v. 253, p. 156.
12. L. Chantada, C. R. Fernandez-Pousa, C. Gormez-Reino // Opt. Communs, 2006, v. 266, p. 393.
13. P. A. Anderson // Opt. Letters, 1993, v. 18, p. 1621.
14. V. P. Minkovich, A. N. Starodumov, V. I. Borisov, V. I. Lebedev, S. N. Perepechko // Opt. Communs, 2001, v. 192, p. 231.

ИМПУЛЬСНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В ЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ С ДИСПЕРСИЕЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Настоящая глава тесно связана с предыдущей; в ней рассмотренные ранее задачи для линейной среды с дисперсией второго порядка обобщаются на среды с дисперсией более высокого порядка. Другими словами, в данной главе будет кратко проанализировано распространение и компрессия детерминированных и случайно модулированных импульсов, а также временной эффект Тальбота в средах с дисперсией выше второго порядка.

§ 1. Дисперсионные эффекты высших порядков

В уравнении (7.1.2) для квазимонохроматической волны (7.1.1), записанном в бегущей системе координат ($\theta = t - \frac{z}{u}$, $z \rightarrow z$), и в его решении в спектральном представлении (7.1.4) учитывающая дисперсионные свойства среды функция (7.1.5) бралась в виде

$$\phi(\omega) = \frac{1}{2} k_2 \omega^2 \quad (m = 2). \quad (1)$$

Случай (1) для анализа является наиболее простым, поскольку коэффициент передачи $\mathcal{H}(\omega, z)$ (7.1.5) и функция Грина $\mathcal{H}(\theta, z)$ (7.1.10) выражаются через гауссовские функции (7.3.1) и (7.3.2). Для диспергирующих сред с $m \neq 2$ аналитический вид функции $\mathcal{H}(\theta, z)$ обычно неизвестен. Поэтому в общем случае $m \neq 2$ удобнее исходить не из временного представления (7.1.9) для $A(\theta, z)$, а из частотного представления (7.1.4) и (7.1.5), которое для анализа перепишем в виде

$$A(\theta, z) = \int A_{\omega}^{(0)} e^{-iz\psi(\omega)} d\omega, \quad (8.1.2)$$

$$\psi(\omega) = \phi(\omega) - \frac{\omega\theta}{z}. \quad (8.1.3)$$

Дальняя зона, метод перевала. На больших расстояниях ($z \rightarrow \infty$) (дальняя зона) функция $e^{-iz\psi(\omega)}$ в (2) быстро осциллирует везде, кроме малой области $\delta\omega$ вблизи частоты $\omega = \bar{\omega}$ (частоты перевала), на которой производная $\partial\psi/\partial\omega = \psi'(\omega)$ обращается в нуль

$$\psi'(\bar{\omega}) = \phi'(\bar{\omega}) - \frac{\theta}{z} = 0 \quad (8.1.4)$$

(здесь и ниже штрих означает производную по частоте ω). В дальней зоне на величину интеграла (2) существенно влияет лишь интегриро-

вание по ω в пределах малой области $\delta\omega$. Поэтому, положив $\omega = \bar{\omega} + \tilde{\omega}$ ($|\bar{\omega}| \leq \delta\omega$), можно $\psi(\omega)$ представить в виде разложения по $\tilde{\omega}$:

$$\psi(\omega) = \psi(\bar{\omega} + \tilde{\omega}) = \psi(\bar{\omega}) + \frac{1}{2} \psi''(\bar{\omega}) \tilde{\omega}^2 + \dots \quad (8.1.5)$$

Здесь учтено (4). Подстановка (5) в (2) дает

$$A(\theta, z \rightarrow \infty) \simeq e^{-iz\psi(\bar{\omega})} \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\omega=\bar{\omega}+\tilde{\omega}}^{(0)} e^{-iz\psi''(\bar{\omega})\tilde{\omega}^2} d\tilde{\omega}. \quad (8.1.6)$$

Согласно (6) величину области интегрирования можно оценить как

$$\delta\omega \approx (z\psi''(\bar{\omega}))^{-1/2}. \quad (8.1.7)$$

Видно, что $\delta\omega \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Если считать спектр входного импульса достаточно широким

$$\Delta\omega^{(0)} \gg \delta\omega, \quad (8.1.8)$$

то зависимостью функции $A_{\bar{\omega}+\tilde{\omega}}^{(0)}$ от $\tilde{\omega}$ в интеграле (6) можно пренебречь и вынести ее за знак интеграла. В результате получим

$$A(\theta, z \rightarrow \infty) = e^{-iz\psi(\bar{\omega})} \sqrt{\frac{2\pi}{iz\psi''(\bar{\omega})}} A_{\omega=\bar{\omega}}^{(0)}. \quad (8.1.9)$$

Из (9) вытекает соотношение между формой импульса $I(\theta, z \rightarrow \infty) = |A(\theta, z \rightarrow \infty)|^2$ в дальней зоне и энергетическим спектром $G^{(0)}(\bar{\omega}) = 2\pi|A_{\omega=\bar{\omega}}^{(0)}|^2$ поля источника $A^{(0)}(t)$:

$$I(\theta, z \rightarrow \infty) = \frac{1}{z|\psi''(\bar{\omega})|} G^{(0)}(\omega = \bar{\omega}). \quad (8.1.10)$$

Выражение (10) обобщает ранее полученное спектронное соотношение (7.3.6) для среды с дисперсией второго порядка ($\bar{\omega}$ — частота перевала).

Среды с дисперсией четного порядка. Если $\phi(\omega) = \frac{k_m \omega^m}{m!}$ ($m = 2, 4, 6, \dots$), то

$$\psi'(\omega) = \frac{k_m \omega^{m-1}}{(m-1)!} - \frac{\theta}{z}, \quad \psi''(\omega) = \frac{k_m \omega^{m-2}}{(m-2)!}, \quad (8.1.11)$$

так что частота $\bar{\omega}$ перевала является действительным корнем (положительным или отрицательным) уравнения нечетной степени

$$(\bar{\omega})^{m-1} = (m-1)\theta/(k_m z), \quad (8.1.12)$$

а в (9)

$$\psi(\bar{\omega}) = \frac{k_m \bar{\omega}^m}{m!} - \frac{\bar{\omega}\theta}{z}, \quad \psi''(\bar{\omega}) = \frac{k_m \bar{\omega}^{m-2}}{(m-2)!}.$$

В качестве примера рассмотрим применение полученных результатов для среды с дисперсией второго порядка ($m = 2$). В этом случае $\bar{\omega} = \theta/k_2 z$ и результат (9) принимает вид

$$A(\theta, z \rightarrow \infty) = e^{+i\theta^2/2k_2 z} \sqrt{\frac{2\pi}{ik_2 z}} A_{\bar{\omega}=\theta/k_2 z}^{(0)}, \quad (8.1.13)$$

который в точности совпадает с полученным ранее выражением (7.3.5) при учете (7.3.2) для $\mathcal{H}(\theta, z)$.

Среды с дисперсией нечетного порядка. В этом случае выражение (7.1.5) содержит только нечетные степени частоты ($m = 3, 5, \dots$) $\phi(\omega) = \frac{k_m \omega^m}{m!}$, а частота перевала, определяемая (12), имеет два противоположных по знаку действительных корня. В связи с этим изменится и выражение для $A(\theta, z \rightarrow \infty)$, вместо (13) теперь имеем

$$A(\theta, z \rightarrow \infty) = \left(\frac{2\pi}{iz\psi''(\bar{\omega}_1)} \right)^{1/2} e^{-iz\psi(\bar{\omega}_1)} A_{\omega=\bar{\omega}_1}^{(0)} + \left(\frac{2\pi}{iz\psi''(\bar{\omega}_2)} \right)^{1/2} e^{-iz\psi(\bar{\omega}_2)} A_{\omega=\bar{\omega}_2}^{(0)}. \quad (8.1.14)$$

§ 2. Компрессия импульсов в среде с дисперсией произвольного порядка

Как и в § 4 предыдущей главы, где рассмотрена среда с дисперсией 2-го порядка, будем искать функцию

$$M(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} M_\omega(f) e^{i\omega t} d\omega, \quad (8.2.1)$$

описывающую действие модулятора (компрессора, временной линзы с «фокусным» расстоянием f) как импульс, который распространяясь в произвольной диспергирующей среде, на расстоянии $z = f$ создает импульс, наиболее короткий из всех возможных, а именно, δ -импульс. Прodelав выкладки, аналогичные изложенным в § 4 гл. 7, получим

$$M_\omega(f) \sim \mathcal{H}^*(\omega, f) \sim e^{if\phi(\omega)} \quad (8.2.2)$$

и, соответственно,

$$M(t, f) \sim \int e^{if\phi(\omega) + i\omega t} d\omega, \quad (8.2.3)$$

где $\phi(\omega)$ дается формулой (7.1.5). Выражение (2) представляет собой частотный спектр модулирующей функции, которая во временном представлении (3) в общем случае содержит не только частотную, но и амплитудную модуляцию. В случае среды только с дисперсией

2-го порядка $\phi(\omega) = \frac{k_2\omega^2}{2}$ выражения (2) и (3) принимают вид (7.4.6) и (7.4.8).

Преобразование спектра импульса в компрессоре. Амплитуды импульсов на входе $A^{(0)}(t)$ и выходе $A_M^{(0)}(t)$ модулятора связаны соотношением типа (7.4.10)

$$A_M^{(0)}(t) = M(t)A^{(0)}(t). \quad (8.2.4)$$

В частотном представлении, принимая во внимание (2), имеем

$$A_{M,\omega}^{(0)} = \int A_{\omega_1}^{(0)} M_{\omega-\omega_1} d\omega_1 = \int A_{\omega_1}^{(0)} e^{if\phi(\omega-\omega_1)} d\omega_1. \quad (8.2.5)$$

Здесь функция $\phi(\omega)$ согласована с последующей линейной средой, обладающей такой же дисперсионной характеристикой. Поскольку рассматриваем среду без потерь, то функция $\phi(\omega)$ действительная.

Свертку (5) можно преобразовать, предполагая, что спектр модулирующей функции значительно шире спектра входного импульса, что допускает использования разложения $\phi(\omega - \omega_1) = \phi(\omega) - \phi'(\omega)\omega_1$. В результате получим

$$A_{M,\omega}^{(0)} = e^{if\phi(\omega)} A^{(0)}(t = -f\phi'(\omega)). \quad (8.2.6)$$

Энергетический спектр импульса на выходе компрессора

$$G_M^{(0)}(\omega) = 2\pi |A_{M,0}^{(0)}|^2 = 2\pi I^{(0)}(t = -f\phi'(\omega)). \quad (8.2.7)$$

Отсюда видно, что вид спектра выходного импульса зависит как от временной формы входного импульса $I^{(0)}(t)$, так и частотной шкалы, определяемой из решения уравнения $\phi'(\omega) = t/f$. Для среды с дисперсией 2-го порядка $\phi'(\omega) = k_2\omega$, и мы получаем простой результат

$$G_M^{(0)}(\omega) = 2\pi I^{(0)}(t = -fk_2\omega), \quad (8.2.8)$$

т. е. форма спектра выходного импульса совпадает с временной формой входного импульса. Справедливость обратного утверждения была показана ранее (см. формулу (7.4.17)).

Общее соотношение (6) является новым результатом в теории компрессии импульсов. Если спектр симметричен, а его максимум приходится на $\omega = 0$, то ширину спектра можно оценить как

$$\Delta\omega_M^{(0)} = \frac{U_M^{(0)}}{G_M^{(0)}(0)}, \quad (8.2.9)$$

где энергия импульса

$$U_M^{(0)} = \int G_M^{(0)}(\omega) d\omega = 2\pi \int I^{(0)}(t = -f\phi'(\omega)) d\omega. \quad (8.2.10)$$

При распространении в среде спектр импульса не меняется и определяется выражениями (7) и (8).

Для иллюстрации применения соотношений (7) и (10) определим вид спектра и его ширину для случая входного гауссовского импульса $A^{(0)}(t) = A_0 e^{-\frac{1}{4} \alpha^2 t^2}$ и компрессора, «настроенного» на среду с дисперсией n -го порядка ($\phi(\omega) = k_n \omega^n / n!$). При этом

$$G_M^{(0)} = 2\pi A_0^2 \exp\{-2p(\omega/\alpha)^{2(n-1)}\}, \quad (8.2.11)$$

где

$$p = \left[\frac{\alpha^n f k_n}{2(n-1)!} \right]^2.$$

Из (11) следует, что на выходе компрессора частотный спектр импульса имеет в данном случае супергауссовскую форму.

Используя интеграл

$$\int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-qx^\mu} dx = \frac{\Gamma(\beta/\mu)}{|\mu|q^{\beta/\mu}},$$

определим энергию этого импульса $U_M^{(0)}$. В соответствии с (9) для ширины импульса получим

$$\Delta\omega = 2^{\frac{1}{2(n-1)}} \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)}{(n-1)} \left[\frac{(n-1)!}{\alpha^n f k_n} \right]^{1/(n-1)}. \quad (8.2.12)$$

Можно убедиться, что длительность импульса, соответствующая ширине спектра (12) для случая $m = 2$, качественно согласуется с результатом (7.4.17).

Максимальная компрессия в среде с дисперсией высокого порядка. Выше получена связь параметров выходного импульса модулятора с входным для рассматриваемого квазиоптимального метода компрессора, когда функция $\phi(\omega)$ подбирается в соответствии с дисперсионной характеристикой среды.

Амплитуда импульса, распространяющегося в диспергирующей среде, расположенной за модулятором, при учете (7.1.4) и (7.1.5) дается выражением

$$A(\theta, z) = \int A^{(0)}(t = -f\phi'(\omega)) e^{i(f-z)\phi(\omega) + i\omega\theta} d\omega. \quad (8.2.13)$$

На фокусном расстоянии среды $z = f$ это выражение упрощается:

$$A(\theta, f) = A(\theta, z = f) = \int A^{(0)}(t = -f\phi'(\omega)) e^{i\omega\theta} d\omega. \quad (8.2.14)$$

Предположим, что максимум интенсивности импульса $I_f(\theta)$ достигается при $\theta = 0$. Тогда длительность импульса можно оценить по формуле

$$\Delta t_f = U_f / I_{f, \max}. \quad (8.2.15)$$

Если входной импульс имеет гауссовскую форму, а среда характеризуется дисперсией n -го порядка, то на фокусном расстоянии f коэффициент компрессии импульса равен

$$N = \frac{\Delta t^{(0)}}{\Delta t_f} = \frac{\Delta \omega_M^{(0)}}{\Delta \omega^{(0)}}, \quad (8.2.16)$$

где $\Delta \omega_M^{(0)}$ определяется (9).

Приведенные результаты показывают, что, в принципе, можно получить сильную компрессию ($N \gg 1$), используя среду с дисперсией любого порядка. При этом должны выполняться два условия: 1) модулятор создает модуляцию специального вида, согласованную с видом дисперсии среды (для функции $\phi(\omega)$ (7.1.5) модулирующая функция определяется выражением (3)); 2) ширина спектра модулирующей функции должна быть достаточно большой так, чтобы $N \gg 1$.

§ 3. Степенные ряды для моментов импульса

В настоящем параграфе покажем, что представление (7.5.9) моментов импульса $m_n(z)$ в виде конечных рядов по z (пройденному расстоянию) справедливо для сред с дисперсией любого порядка.

Вспользуемся «функцией распределения» импульса (7.5.4) $V(\theta, z) = I(\theta, z)/U_0$ и введем по аналогии с (1.1.15) «характеристическую функцию»

$$\Lambda(u, z) = \int V(\theta, z) e^{iu\theta} d\theta. \quad (8.3.1)$$

Временные моменты (7.5.6) находятся дифференцированием функции Λ по u :

$$m_n(z) = \left(\frac{d}{i du} \right)^n \Lambda(u, z) |_{u=0}. \quad (8.3.2)$$

Согласно же (7.1.4) в (7.5.4)

$$I(\theta, z) = |A(\theta, z)|^2,$$

где

$$A(\theta, z) = \int A_\omega^{(0)} \mathcal{K}(\omega, z) e^{i\omega\theta} d\omega, \quad (8.3.3)$$

$$\mathcal{K}(\omega, z) = e^{-i\phi(\omega)z}, \quad \phi(\omega) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{k_m \omega^m}{m!}, \quad (8.3.4)$$

причем $A_\omega^{(0)}$ — спектральная амплитуда входного импульса.

Подставив (4) в (1), после некоторых преобразований получим

$$\Lambda(u, z) = \frac{2\pi}{U_0} \int_{-\infty}^{+\infty} A_\omega^{(0)} A_{\omega+u}^{(0)*} \mathcal{K}(\omega, z) \mathcal{K}^*(\omega+u, z) d\omega. \quad (8.3.5)$$

Поэтому для моментов (2) будем иметь

$$m_n(z) = \frac{2\pi}{i^n U_0} \int A_\omega^{(0)} \mathcal{K}(\omega, z) \left(\frac{d}{d\omega} \right)^n [A_\omega^{(0)*} \mathcal{K}^*(\omega, z)] d\omega. \quad (8.3.6)$$

Согласно (5) производная

$$\left(\frac{d}{d\omega} \right)^s \mathcal{K}^*(\omega, z) = Q_s(z, \omega) e^{i\phi(\omega)z}, \quad (8.3.7)$$

где $Q_s(z, \omega)$ полином s -ой степени относительно z . В частности, имеем

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = iz\phi'(\omega), \quad Q_2 = iz\phi''(\omega) - z^2[\phi'(\omega)]^2, \\ Q_3 = iz\phi''' - 3z^2\phi'(\omega)\phi''(\omega) - iz^3[\phi'(\omega)]^3 \quad \text{и т. д.}$$

(штрих означает дифференцирование по ω).

Используя (7) и формулу Лейбница для производной n -го порядка от произведения двух функций

$$(fg)^{(n)} = \sum_{s=0}^n C_n^s f^{(n-s)} g^{(s)}$$

(C — знак сочетаний), приходим к следующему выражению для моментов

$$m_n(z) = \frac{2\pi}{i^n u_0} \sum_{s=0}^n C_n^s \int A_\omega^{(0)} (A_\omega^{(0)*})^{(n-s)} Q_s(z_0\omega) d\omega. \quad (8.3.8)$$

Отсюда следует, что момент импульса n -го порядка является полиномом n -го порядка относительно z .

§ 4. Временной эффект Гальбота в средах с дисперсией высшего порядка

Обратимся теперь к задаче о распространении периодической последовательности импульсов в средах с дисперсией произвольного порядка. Пусть на входе такой среды комплексная амплитуда импульса определяется выражением (7.6.5)

$$A^{(0)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(t - nT). \quad (8.4.1)$$

Интенсивность и фурье-спектр такого импульса, повторяющегося с периодом T , даются выражениями (7.6.6) и (7.6.7). Его фурье-спектр в диспергирующей среде в общем случае равен

$$A_\omega(z) = \mathcal{K}(\omega, z) A_\omega^{(0)} = \Omega \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{p\Omega} e^{-i\Phi(\Omega)z} \delta(\omega - p\Omega), \quad (8.4.2)$$

где

$$\Phi(\Omega) = p^m \varphi(\Omega), \quad \varphi(\Omega) = \frac{1}{m!} k_m \Omega^m.$$

Чтобы в диспергирующей среде импульс на некотором расстоянии z_0 был таким же как на ее входе, очевидно, должно выполняться условие

$$\varphi(\Omega)z_0 = 2\pi N, \quad (8.4.3)$$

где N — целое (положительное или отрицательное) число. Из (8.3.3) находим искомое тальботовское расстояние

$$L_T^{(m)} = \frac{2\pi m!}{|k_m|\Omega^m}. \quad (8.4.4)$$

Случай $m = 2$ рассмотрен в § 2 гл. 7, при этом $L_T^{(2)}$ равно тальботовскому расстоянию (7.6.4). Для среды с дисперсией третьего порядка ($m = 3$) имеем

$$z_0 = L_T^{(3)} = \frac{3T^3}{2\pi^2|k_3|}. \quad (8.4.5)$$

Как и в случае среды с дисперсией второго порядка, здесь можно получить условия реализации обращенного и дробного эффекта Тальбота (см. § 6 гл. 7). Нетрудно найти тальботовское расстояние для сред с дисперсией и более высокого порядка. Следуя методу, изложенному в § 6 гл. 7, можно выполнить обобщение эффекта Тальбота для сред с произвольной дисперсией на случай частично некогерентных импульсов.

Определение условия самовоспроизведения формы импульсов в средах, когда существенной оказывается одновременно дисперсия нескольких порядков, является более сложной задачей. В этом случае, очевидно, необходимо, чтобы тальботовские расстояния, связанные с каждым типом дисперсии, были одинаковыми. Рассмотрим пример среды, обладающей, например, одновременно дисперсией второго и третьего порядков. Фаза в (2) при этом имеет следующий вид

$$\Phi(\Omega) = \frac{1}{2} k_2 \Omega^2 p^2 + \frac{1}{3!} k_3 \Omega^3 p^3. \quad (8.4.6)$$

Теперь условие самовоспроизведения формы импульсов принимает такой вид

$$\left(\frac{1}{2} k_2 \Omega^2 p^2 + \frac{1}{3!} k_3 \Omega^3 p^3 \right) z_0 = 2\pi N, \quad (8.4.7)$$

где, как и выше, N — целое число. Равенству (7) можно удовлетворить, если выполняются соотношения:

$$\frac{1}{2} k_2 \Omega^2 z_0 = 2\pi m_1, \quad \frac{1}{6} k_3 \Omega^3 z_0 = 2\pi m_2, \quad (8.4.8)$$

где $m_j = \pm 1, \pm 2, \dots$, что имеет место для частоты

$$\Omega = \Omega_0 = 3|(k_2 m_2)/(k_3 m_1)|. \quad (8.4.9)$$

При этом обобщенная тальботовская длина равна

$$L_T^{(2,3)} = \frac{4\pi}{\Omega_0^2} \left| \frac{m_1}{k_2} \right| = \frac{4}{9} \pi \left| \frac{m_1^3 k_3^2}{m_2^2 k_2^3} \right|.$$

Поскольку необходимая частота Ω_0 следования импульсов определяется дисперсионными свойствами среды, расстояния $L_T^{(2,3)}$, где они воспроизводятся, тоже зависят только от дисперсии среды. Заметим, что в отличие от «однодисперсионного» эффекта Тальбота в «двухдисперсионном» эффекте длина самовоспроизведения импульсов определяется отношением дисперсий k_2 и k_3 и величин m_1 и m_2 .

СЛУЧАЙНЫЕ ПАРАКСИАЛЬНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ

В основное волновое уравнение (6.2.7) пространственная координата r и время t входят несимметрично; по времени, кроме дифференцирования, производится интегрирование в выражении (6.2.3) для поляризации вследствие частотной дисперсии. Линейное волновое уравнение принимает симметричный вид, если среда обладает одновременно и пространственной дисперсией; при этом линейная поляризация среды записывается в виде

$$P(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dt' \int d^3 r' H(t', \mathbf{r}') E(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Однако при приближенном описании распространения волн, модулированных только в пространстве, и волн, модулированных только во времени, удастся выделить важные частные случаи, которые описываются сходными уравнениями. В квазиоптическом приближении распространение пространственно-модулированных волн подчиняется параболическому уравнению (6.3.6). Уравнением такого же типа во втором приближении теории дисперсии описывается распространение волн, модулированных во времени (см. (6.3.20) и (7.3.3а)). Дисперсионному расплыванию волнового пакета можно уподобить дифракционное расширение пучка. Сказанное означает, что результаты решения временных задач могут быть в определенной мере перенесены на пространственные задачи и наоборот.

Ценность аналогии состоит в том, что она позволяет предсказать качественную картину поведения модулированной волны, если известны результаты, относящиеся к волне-аналогу. Вместе с тем следует ясно представлять ограниченность пространственно-временной аналогии. Так, в случае распространения модулированных волн в линейных средах возможно отличие пространственных задач от временных, и причины этого заключаются в следующем.

1. Прежде всего, следует иметь в виду различие в числе измерений: временные задачи — двумерные, а пространственные задачи — трехмерные, причем направления, перпендикулярные направлению распространения волн, могут быть неравноправными.

2. Если во временных задачах во многих случаях процесс можно считать стационарным, то в пространственных задачах принципиальное значение для большинства случаев имеют конечные пространственные размеры случайных пучков (статистическая неоднородность).

3. Наконец, следует отметить различие в виде исходных временных и пространственных корреляционных функций поля. Для симметричного спектра временные корреляционные функции являются действительными. Поперечные (пространственные) корреляционные функции даже для симметричного углового спектра в общем случае комплексны (см. § 2). Последнее обусловлено тем, что в угловом спектре положительные и отрицательные углы физически различимы, а в частотном спектре положительные и отрицательные частоты физически идентичны.

§ 1. Математическое описание волновых пучков

Параболическое уравнение; волновой коэффициент передачи и функция Грина. Область пространства, в которой сконцентрировано поле волновых пучков, рассматриваемых в этой главе, имеет вид конуса, как бы прижатого к оси z с малым углом $\theta \ll 1$ при вершине (θ — угол дифракционной расходимости, см. ниже формулу (9.2.2)). Образующие конуса при этом идут почти параллельно оси z (рис. 9.1). Такие пучки называют слабосходящимися (или слаборасходящимися), а также параксиальными.

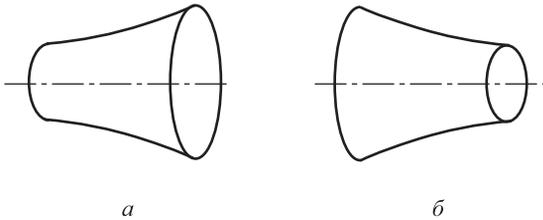


Рис. 9.1. Типы пучков: а) слабо расходящийся, б) слабо сходящийся

В § 3 гл. 6 показано, что монохроматические параксиальные пучки можно записать в виде

$$E(t, \mathbf{r}, z) = A(\mathbf{r}, z)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}, \quad (9.1.1)$$

где $A(\mathbf{r}, z)$ — независящая от времени комплексная амплитуда волнового пучка, $k_0 = k(\omega_0)$ — волновое число, соответствующее несущей частоте ω_0 , \mathbf{r} — поперечный радиус-вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной оси z .

Динамика амплитуды $A(\mathbf{r}, z)$ удовлетворяет параболическому уравнению Леонтовича (6.3.6)

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0. \quad (9.1.2)$$

В § 3 гл. 6 также показано, что решение уравнения (1) с граничным условием при $z = 0$

$$A(\mathbf{r}, z = 0) = A^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (9.1.3)$$

можно представить через двумерную функцию Грина (6.3.10)

$$H(\mathbf{r}, z) = \frac{ik_0}{2\pi z} e^{-i\frac{k_0 r^2}{2z}}$$

или волновой коэффициент передачи

$$\mathcal{K}(\mathcal{X}, z) = e^{i\frac{\mathcal{X}^2 z}{2k_0}}. \quad (9.1.4)$$

При этом решение имеет соответственно вид

$$A(\mathbf{r}, z) = \int A^{(0)}(r_1) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, z) d^2 r_1 \quad (9.1.5)$$

(см. также (6.3.9)) и

$$A(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\mathcal{X}}^{(0)} e^{i\frac{\mathcal{X}^2 z}{2k_0} + i\mathcal{X}\mathbf{r}} d^2 \mathcal{X} \quad (9.1.6)$$

(см. (6.3.5)), где $A^{(0)}(\mathcal{X})$ — двумерное фурье-преобразование (6.3.7) начальной амплитуды (3). Функции $H(\mathbf{r}, z)$ и $\mathcal{K}(\mathcal{X}, z)$ связаны соотношением

$$H(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{K}(\mathcal{X}, z) e^{-i\mathcal{X}\mathbf{r}} d^2 \mathcal{X}. \quad (9.1.7)$$

Законы сохранения. Как и в главах 7 и 8 будем считать, что речь идет о распространении световых пучков в линейной среде без потерь, т. е. волновое число $k(\omega_0)$ — действительное ($\text{Im } k(\omega_0) = 0$). В этом случае имеют место законы сохранения, представляющие собой обобщение законов сохранения в двумерном пространстве, рассмотренных в § 1 гл. 7, на трехмерное пространство. Выпишем некоторые из них.

Поскольку

$$|\mathcal{K}(\mathcal{X}, z)|^2 = |e^{i\frac{\mathcal{X}^2 z}{2k_0}}|^2 = 1 \quad (9.1.8)$$

и в соответствии с (6)

$$A_{\mathcal{X}}(z) = \mathcal{K}(\mathcal{X}, z) A_{\mathcal{X}}^{(0)}, \quad (9.1.9)$$

то из (9) и (8) следует, что волновой спектр мощности пучка $g(\mathcal{X}, z) = (2\pi)^2 |A_{\mathcal{X}}(z)|^2$ при его распространении не меняется:

$$g(\mathcal{X}, z) = (2\pi)^2 |A_{\mathcal{X}}^{(0)}|^2 = g^{(0)}(\mathcal{X}). \quad (9.1.10)$$

Закон сохранения (10) означает, что при распространении пучка не будет изменяться также полная мощность

$$P(z) = \int g(\mathcal{X}, z) d^2 \mathcal{X} = \int g^{(0)}(\mathcal{X}) d^2 \mathcal{X} = P^{(0)} = \text{const} \quad (9.1.11)$$

и эффективная ширина волнового спектра

$$\Delta \mathcal{X}(z) = \Delta \mathcal{X}^{(0)} = \text{const}.$$

Однако вследствие статистической неоднородности световых пучков законы сохранения пространственных корреляционных функций для них не выполняются (см. ниже § 2).

§ 2. Статистическая неоднородность и угловой спектр светового пучка; модель частично когерентного пучка

В главе 6 рассмотрены статистически однородные двумерные случайные поля, для которых поперечная корреляционная функция (6.1.14) зависит только от разности векторов, проведенных в точки, между которыми измеряется корреляция. Если это условие не выполняется, то поля называют *статистически неоднородными*. Статистически неоднородными полями являются пространственно ограниченные световые пучки.

Для доказательства этого утверждения получим уравнение для поперечной, пространственной корреляционной функции

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z)A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle. \quad (9.2.1)$$

Заменим в (9.1.2) координату \mathbf{r} на \mathbf{r}_1 и умножим уравнение на $A^*(\mathbf{r}_2, z)$. Полученное таким образом уравнение сложим с этим же комплексно сопряженным уравнением, предварительно поменяв местами индексы 1 и 2. Выполняя статистическое усреднение, придем к уравнению для поперечной корреляционной функции:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{1}{2k} (\Delta_{\perp,1} - \Delta_{\perp,2}) \right\} B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = 0. \quad (9.2.2)$$

В новых переменных

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{R} = 1/2 (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \quad (9.2.3)$$

уравнение (2) имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{R}} \right\} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = 0. \quad (9.2.4)$$

Для статистически однородного поля функция B_{\perp} зависит только от \mathbf{r} (см. (6.4.3)). Зависимость B_{\perp} от координаты \mathbf{R} обусловлена прежде всего пространственной ограниченностью светового пучка, распределение интенсивности которого в поперечном сечении (при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$)

$$\langle |E(\mathbf{r}_1, z, t)|^2 \rangle = B_{\perp}(\mathbf{0}, \mathbf{R}; z) = I(\mathbf{R}, z). \quad (9.2.5)$$

Таким образом для случайных световых пучков пространственная корреляционная функция B_{\perp} зависит от обеих переменных \mathbf{r} и \mathbf{R} , а ее динамика вдоль продольной координаты z определяется уравнением (4).

Часто используемой моделью частично когерентного светового пучка по аналогии с (7.2.1) является мультипликативная модель

$$A^{(0)}(\mathbf{r}) = M(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}), \quad (9.2.6)$$

где $M(\mathbf{r})$ — детерминированная функция, описывающая пространственную ограниченность пучка, $\xi(\mathbf{r})$ — случайная функция. При этом поле, связанное с функцией $\xi(\mathbf{r})$, считается статистически однородным.

Пространственная корреляционная функция, соответствующая модели пучка (6), берется обычно в виде

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = I_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}_2^2 + \mathbf{r}_1^2}{a^2} - \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{r_k^2} \right\}, \quad (9.2.7)$$

где I_0 — средняя интенсивность в центре пучка, a — радиус пучка, r_k — радиус корреляции, или в координатах \mathbf{r}, \mathbf{R} (3)

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = I_0 \exp \left\{ -\frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} \right\}, \quad (9.2.8)$$

где

$$r_{\text{эфф}}^{-2} = r_k^{-2} + a^{-2}/2. \quad (9.2.9)$$

Угловые спектры световых пучков определяются не только радиусом корреляции, но и геометрическими параметрами пучка, в частности распределением средней интенсивности в его поперечном сечении. Этот вопрос имеет большое значение для лазерной оптики; остановимся на нем подробнее. Итак, рассмотрим угловой спектр, соответствующий поперечной корреляционной функции неоднородного случайного поля.

Фурье-спектр комплексной амплитуды $A(\mathbf{r}, z)$ поля равен

$$A_{\mathcal{K}}(z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{r}, z) e^{i\mathcal{K}\mathbf{r}} d^2r. \quad (9.2.10)$$

Следовательно, угловой спектр статистически неоднородного случайного поля определяется выражением

$$G(\mathcal{K}, z) = \langle |A_{\mathcal{K}}(z)|^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A(\mathbf{r}_1, z) A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle e^{i\mathcal{K}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} d^2r_1 d^2r_2.$$

Переходя к переменным \mathbf{r} и \mathbf{R} (3), имеем

$$G(\mathcal{K}, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) e^{i\mathcal{K}\mathbf{r}} d^2r d^2R. \quad (9.2.11)$$

Спектр (11) можно интерпретировать как спектр статистически однородного поля с корреляционной функцией

$$B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) d^2R, \quad (9.2.12)$$

$$G(\boldsymbol{\kappa}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) e^{i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d^2r. \quad (9.2.13)$$

Заметим, что для поперечной корреляционной функции, не зависящей от R , выражение (12) дает бесконечное значение, что связано в этом случае с однородностью поля (см. (6.4.13)).

Если рассматриваемое поле статистически изотропно, то для него можно воспользоваться соотношениями (6.4.27) для безграничной случайной волны

$$G(\boldsymbol{\kappa}, z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} s J_0(\boldsymbol{\kappa}s) B_{\perp}^{\text{одн}}(s; z) ds. \quad (9.2.14)$$

Для поля с узким угловым спектром $\boldsymbol{\kappa} = k_0 \sin \theta \approx k_0 \theta$ (θ — угол между $\boldsymbol{\kappa}$ и \mathbf{k}_0), и, следовательно, угловой спектр поля

$$G(k_0\theta, z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} s J_0(k_0s\theta) B_{\perp}^{\text{одн}}(s; z) ds. \quad (9.2.15)$$

Преобразование, обратное (15), дается выражением (6.4.26).

Рассмотрим теперь, как изменяется угловой спектр пучка с изменением радиуса корреляции r_k при постоянном радиусе пучка a . В качестве примера возьмем пучок с корреляционной функцией вида (8). В соответствии с (8) для (12), (15) получаем

$$B_{\perp}^{\text{одн}}(\mathbf{r}; z) = \frac{2\pi}{a^2} I_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} \right\}, \quad (9.2.16)$$

$$G(\theta; z) = \frac{\pi r_{\text{эфф}}^2}{a^2} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (kr_{\text{эфф}}\theta)^2 \right\}. \quad (9.2.17)$$

Согласно (17) полуширина углового спектра по уровню e^{-1}

$$\Delta\theta = \frac{2}{kr_{\text{эфф}}} = \left(\frac{2}{k^2 a^2} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2a^2}{r_k^2} \right]^{1/2}. \quad (9.2.18)$$

Изменение $\Delta\theta$ в зависимости от радиуса корреляции r_k изображено на рис. 9.2. Уменьшение значения r_k приводит к сильному расширению углового спектра. При $r_k \ll a$

$$\Delta\theta = 2/kr_k, \quad (9.2.19)$$

т. е. угловой спектр пучка определяется исключительно значением радиуса корреляции. Если $r_k \gg a$, $\Delta\theta = 2(ka)^{-1} = \Delta\theta_d$ ($\Delta\theta_d$ — дифракционная расходимость детерминированного пучка).

Как уже отмечалось, в рамках квазиоптического приближения для волновых пучков и второго приближения теории дисперсии для волновых пакетов процессы распространения описываются похожими уравнениями, отличающимися лишь размерностью пространства. Однако

это различие может приводить к принципиальным отличиям в некоторых ситуациях распространения частично некогерентных световых пучков и импульсов. Тем не менее изложенные в главе 7 методы анализа частично некогерентных импульсов можно полностью перенести на частично некогерентные пучки. Другими словами, понятия и определения ближняя и дальняя зоны, расплывание и сжатие, метод моментов и т. п. в равной мере используются для изучения распространения световых пучков. В научной литературе (см., например, книги [1, 2]) распространение регулярных световых пучков хорошо освещено, поэтому основное внимание в настоящей главе будет уделено рассмотрению особенностей распространения частично некогерентных пучков в наиболее типичных ситуациях.

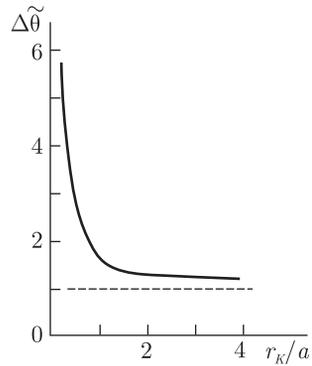


Рис. 9.2. Приведенная полуширина углового спектра $\Delta\tilde{\theta} = \Delta\theta/\Delta\theta_d$ частично когерентного светового пучка в зависимости от отношения корреляции r_k к радиусу пучка a

§ 3. Дифракция δ -коррелированного случайного пучка; теорема Ван Циттерта—Цернике

Мы начинаем рассмотрение статистических дифракционных проблем с фундаментальной задачи о преобразовании поперечной корреляционной функции светового пучка в процессе распространения. Мы убедимся, что поперечный радиус корреляции частично когерентного волнового пучка в процессе распространения за счет дифракции увеличивается. Это обстоятельство имеет много важных приложений в физической и прикладной оптике; часть из них рассматривается в этой главе. Изменение комплексной амплитуды пучка в процессе распространения дается уравнением (9.1.5). Откуда следует, что поперечная пространственная корреляционная функция, учитывая (9.1.4) определяется выражением

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = C' \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \exp \left[-i \frac{k_0}{2z} ((\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\rho}_2)^2) \right], \quad (9.3.1)$$

где $C'(z) = (k_0/(2\pi z))^2 = (\lambda z)^2$. Перейдем к переменным (9.2.3) и введем новые обозначения для переменных, по которым производится интегрирование

$$\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{r}', \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2) = \mathbf{R}'. \quad (9.3.2)$$

Тогда выражение (1) для корреляционной функции приводится к виду

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = C'(z) \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \exp \left\{ -i \frac{k}{z} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \right\} d^2 r' d^2 R'. \quad (9.3.3)$$

Формула (3) в квазиоптическом приближении дает связь поперечной корреляционной функции в произвольной плоскости с ее значением в плоскости $z = 0$ (рис. 9.3).

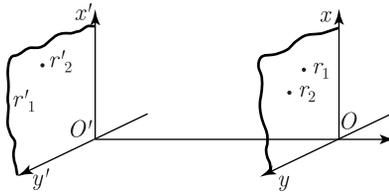


Рис. 9.3. Расположение координат плоскости источника $x'y'$ и произвольной плоскости наблюдения xy

Рассмотрим сначала важный частный случай выражения (3). Заменим корреляционную функцию $B'_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}')$ реального поля в плоскости $z = 0$ на δ -функцию, т. е. считаем, что поле создается δ -коррелированными в пространстве источниками:

$$B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') = h^2 I(\mathbf{R}') \delta(\mathbf{r}'). \quad (9.3.4)$$

Функция $I(\mathbf{R}')$ характеризует распределение средней интенсивности поля, а коэффициент h определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B'_{\perp 0}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) d^2 r = h^2 I(\mathbf{R}).$$

Для корреляционной функции (4) формула (3) принимает вид

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = C \exp \left\{ -i \frac{k}{z} \mathbf{r} \mathbf{R} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{R}') \exp \left\{ i \frac{k}{z} \mathbf{r} \mathbf{R}' \right\} d^2 R', \quad (9.3.5)$$

где $C = h^2 C' = (h/\lambda z)^2 = (hk/2\pi z)^2$. Формула (5) выражает *теорему Ван Циттерта—Цернике*: поперечная корреляционная функция поля связана фурье-преобразованием с начальным распределением интенсивности.

Возвращаясь в (5) к старым переменным \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 (9.2.3), получаем

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = C \exp \left\{ i \frac{k}{2z} (\mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_1^2) \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int I(x', y') \exp \left\{ i \frac{k}{z} [(x_1 - x_2)z' + (y_1 - y_2)y'] \right\} dx' dy'. \quad (9.3.6)$$

Удобство расчета с помощью выражения (5) или (6) зависит от вида распределения интенсивности $I(\mathbf{R})$.

Из (5) и (6) видно, что при $z > 0$ корреляционная функция поля отличается от начальной (4), а радиус корреляции уже не равен нулю. В формулы (5) и (6) входит отношение k/z ; поэтому при $k/z \rightarrow \infty$ получаем одинаковый результат независимо от того, устремляем ли мы волновое число к бесконечности ($k \rightarrow \infty$, приближение геометрической оптики) или полагаем $z \rightarrow 0$.

Если $I(\mathbf{R})$ существенно уменьшается на масштабе порядка a (a — радиус пучка), то радиус корреляции согласно (5) равен

$$r_k \approx z/ka. \quad (9.3.7)$$

Видно, что радиус корреляции линейно нарастает с пройденным расстоянием. Речь идет, действительно, о существенно дифракционном эффекте; он тем больше, чем больше длина волны λ . Наглядное физическое объяснение полученного результата заключается в том, что по мере распространения фазовые фронты элементарных волн, на которые можно разложить поле пучка, совпадают между собой на все возрастающей с ростом z площади.

Расчеты корреляционной функции $B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z)$ и значения r_k для ряда конкретных случаев выполнены ниже.

Дифракция некогерентной волны на отверстии; звездный интерферометр Майкельсона. Применим теперь полученные выше общие результаты для решения конкретных задач. Сначала рассмотрим дифракцию δ -коррелированной волны. Предположим, что отверстие имеет форму круга радиуса a с центром в точке 0 и распределение интенсивности вдоль отверстия равномерное:

$$I(\mathbf{R}) = \begin{cases} I_0, & R \leq a, \\ 0, & R \geq a. \end{cases} \quad (9.3.8)$$

Для расчета функции B_{\perp} на расстоянии z от такого источника воспользуемся формулой (5), полагая $\mathbf{r}_1 = 0$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{s} \neq 0$. Переходя к полярным координатам и обозначая угол между векторами \mathbf{s} и \mathbf{R} через φ , имеем

$$\begin{aligned}
 B_{\perp}(s; z) &= CI_0 \exp \left\{ -i \frac{k}{z} s^2 \right\} \int_0^a dR \int_0^{2\pi} R d\varphi \exp \left\{ -i \frac{k}{z} R s \cos \varphi \right\} = \\
 &= 2\pi CI_0 e^{-iks^2/z} \int_0^a R J_0 \left(\frac{ksR}{z} \right) dR = I_0 \frac{kac e^{-iks^2/z}}{2\pi zs} J_1 \left(\frac{kas}{z} \right). \quad (9.3.9)
 \end{aligned}$$

При выводе (9) использовано рекуррентное соотношение для функции Бесселя

$$\frac{d}{dx} (x^n J_n(vx)) = vx^n J_{n-1}(vx).$$

Нормированная пространственная корреляционная функция (9) равна

$$|\gamma(s)| = |B_{\perp}(s; z)/B_{\perp}(0; z)| = 2 \left| J_1 \left(\frac{kas}{z} \right) / \left(\frac{kas}{z} \right) \right|. \quad (9.3.10)$$

Функция (10) представлена на рис. 9.4. Первое нулевое значение $|\gamma(s)|$ принимает при $kas/z = 3,83$, т. е. при

$$s = s_0 = 0,61\lambda/\theta_0, \quad (9.3.11)$$

где $\theta_0 = a/z$ — так называемый угловой радиус источника излучения. Радиус, значение которого удовлетворяет условию $|\gamma(s)| = 0,88$, будем считать радиусом корреляции (ср. с (7)):

$$r_k = 0,16\lambda z/a = 0,16\lambda/\theta_0. \quad (9.3.12)$$

Видно, что радиус корреляции прямо пропорционален расстоянию z от источника излучения и обратно пропорционален размеру источника. При $a \rightarrow \infty$ излучение остается δ -коррелированным.

Рассмотренная модель источника δ -коррелированного в пространстве излучения, ограниченного круглой диафрагмой, широко используется в астрофизике для описания собственного излучения звезд. Измерения радиуса корреляции приходящего от звезд излучения согласно (12) могут быть использованы для определения угловых размеров звезд (или диаметров звезд, если известно расстояние z).

Для измерения поперечной корреляционной функции излучения, приходящего от звезды, можно использовать звездный интерферометр Майкельсона (рис. 9.5), видность интерференционной картины в котором в точке наблюдения P изменяется в соответствии с зависимостью, изображенной на рис. 9.4, при изменении расстояния между зеркалами \mathcal{Z}_1 и \mathcal{Z}_2 . Если угловой радиус звезды $\theta_0 \approx 10^{-7}$, то $|\gamma(s)| = 0$ при расстоянии $s = 4$ м ($k = 10^5$ см $^{-1}$). Угловой радиус Солнца, наблюдаемый с Земли, $\theta_0 \approx 0,0047$; таким образом, для волн оптического диапазона радиус корреляции (12) принимает значение $r_k \approx 20$ мкм. Практическое применение звездного интерферометра Майкельсона ограничено, однако, тем обстоятельством, что на измеряемую степень когерентности звезды сильное влияние оказывают флуктуации показателя прелом-

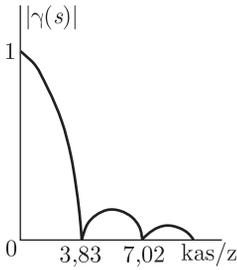


Рис. 9.4. Степень пространственной когерентности $|\gamma(s)|$ пространственно некогерентного источника, имеющего форму диска радиуса a

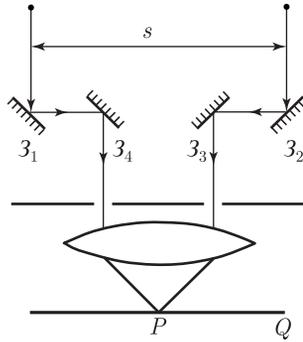


Рис. 9.5. Схема звездного интерферометра Майкельсона:
3₁–3₄ — зеркала, Q — экран

ления атмосферы. Эти флуктуации приводят лишь к фазовым искажениям, которые не влияют на измерения корреляционных функций интенсивности.

Заметим, что корреляционная функция (10) описывается точно таким же выражением, как и поле плоской монохроматической волны, дифрагированное на круглом отверстии.

Проиллюстрируем теперь, что неравномерное распределение интенсивности, вообще говоря, изменяет вид поперечной корреляционной функции поля. В качестве примера рассмотрим распространение цилиндрически-симметричного пучка с плавным поперечным распределением интенсивности (дифракция на «мягкой» диафрагме), когда распределение интенсивности $I(\mathbf{R})$ имеет вид

$$I(\mathbf{R}) = I_0 \exp\{-2\mathbf{R}^2/a^2\}; \tag{9.3.13}$$

здесь a — радиус пучка по уровню e^{-2} .

В этом случае вместо выражения (9) для поперечной корреляционной функции имеем

$$B_{\perp}(s; z) = 2\pi C I_0 e^{-iks^2/z} \int_0^{\infty} R e^{-2R^2/a^2} J_0\left(\frac{kRs}{z}\right) dR. \tag{9.3.14}$$

Интегрирование приводит к следующему результату:

$$B_{\perp}(s; z) = \frac{\pi}{2} a^2 C I_0 \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{kas}{2z}\right)^2 - i\frac{ks^2}{z}\right\}. \tag{9.3.15}$$

В этом случае корреляционная функция (15) имеет гауссовский вид с радиусом корреляции по уровню e^{-1} , равным

$$r_k = \sqrt{2} \lambda z / \pi a. \quad (9.3.16)$$

Из сравнения (15) с (9) следует, что форма распределения средней интенсивности влияет на вид пространственной корреляционной функции. В связи с этим оказывается, что измерение пространственной корреляционной функции дельта-коррелированного источника можно использовать для нахождения распределения средней интенсивности. Иначе говоря, можно решить обратную задачу.

Заметим прежде всего, что в соответствии с (5) имеем соотношение

$$B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z) = e^{-i\frac{k}{z} \mathbf{rR}} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{0}; z). \quad (9.3.17)$$

Поэтому в рассматриваемом случае достаточно измерить корреляционную функцию между точками с противоположными векторами ($\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1$, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$). Пространственная корреляция для точек с одинаковой разностью векторов (одинаковыми \mathbf{r}), но $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$ отличаются лишь фазой. Интегрирование (17) по разностной переменной r дает

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{0}; z) e^{-i\frac{k}{z} \mathbf{rR}} d^2r = h^2 I(\mathbf{R}). \quad (9.3.18)$$

Отсюда видно, что пространственное распределение средней интенсивности $I(\mathbf{R})$ из корреляционной функции определяется с точностью до постоянного множителя.

§ 4. Дифракция частично когерентной волны на отверстии

До сих пор мы считали, что исходная волна δ -коррелирована в пространстве. В реальных условиях радиус корреляции случайной волны или источника шумового излучения всегда имеет конечное значение.

Решение задачи о дифракции частично когерентной волны дается общей формулой (9.3.3), определяющей изменение пространственной когерентности волны в процессе распространения. Мы рассмотрим удобный для аналитического описания случай распространения гауссовских световых пучков, поперечная корреляционная функция которых также имеет вид гауссовской кривой. Будет показано, что в квазиоптическом приближении гауссовская форма пучка и вид корреляционной функции в процессе распространения остаются неизменными с пройденным расстоянием z изменяются лишь параметры этих кривых в полной аналогии с временной задачей (см. § 7 гл. 7) — распространением гауссовского импульса с гауссовской корреляционной функцией в среде с дисперсией второго порядка. Это связано со следующим обстоятельством.

Согласно общему решению (9.3.3) в этом случае для произвольного расстояния z поперечная корреляционная функция представляет собой свертку функции $B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R})$ гауссовского вида (9.2.8) и функции отклика, имеющей вид экспоненты, показатель которой квадратичен по $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $\mathbf{R} - \mathbf{R}'$. В подобных случаях интегральное преобразование (9.3.3) сохраняет гауссовский вид функции B_{\perp} (см. примеры расчета спектров и корреляционных функций в § 3 гл. 1).

Для рассматриваемого гауссовского пучка дифференциальное уравнение в частных производных для корреляционных функций можно свести к уравнениям в обыкновенных производных для функций, описывающих ширину пучка, ширину корреляционной функции и т. п. (см. [3] с. 298).

Итак, рассмотрим дифракцию частично когерентной волны на круглом отверстии. Пусть амплитудный коэффициент пропускания (передаточная функция) отверстия равен

$$M(\mathbf{r}) = \exp\{-(\mathbf{r}/a)^2\} \quad (9.4.1)$$

и падающее излучение статистически изотропно в пространстве и имеет гауссовскую корреляционную функцию. Тогда непосредственно за отверстием поперечная корреляционная функция волны равна (ср. с (9.2.7))

$$\begin{aligned} B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) &= \langle A^{(0)}(\mathbf{r}_1)A^{(0)*}(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= I_0 \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{a^2} - \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{r_0^2} - \frac{i\alpha_0}{2} (\mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_1^2) \right\}, \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

где a — радиус пучка, r_0 — радиус корреляции, параметр α_0 характеризует фазу корреляционной функции. В переменных \mathbf{R} и \mathbf{r} (9.2.3) функция (2) имеет вид

$$B_{\perp 0}(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = I_0 \exp \left\{ -\frac{2\mathbf{R}^2}{a^2} - \frac{\mathbf{r}^2}{r_{\text{эфф}}^2} - i\alpha_0 \mathbf{R}\mathbf{r} \right\}, \quad (9.4.3)$$

где $r_{\text{эфф}}$ определяется формулой (9.2.9).

Подставим (2) в выражение (9.3.1) или (3) в (9.3.3); пользуясь двойным интегралом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \exp\{-\alpha_1^2 x_1^2 - \alpha_2^2 x_2^2 + 2\beta^2 x_1 x_2 + i\gamma_1 x_1 - i\gamma_2 x_2\} dx_2 dx_1 = \\ = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \beta^4}} \exp\left\{-\frac{\alpha_1^2 \gamma_2^2 + \alpha_2^2 \gamma_1^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 \beta^2}{4(\alpha_1^2 \alpha_2^2 - \beta^4)}\right\}, \quad (9.4.4)$$

придем к следующему окончательному результату (в переменных \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2):

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \\ = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{1}{u^2} \left[\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{a^2} + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}{r_0^2} - i\frac{k}{4} (u^2)'(\mathbf{r}_1^2 - \mathbf{r}_2^2) \right]\right\}, \quad (9.4.5)$$

где

$$u^2 = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 + l_d^{-2} \right] z^2 + 2\frac{\alpha_0}{k} z + 1, \quad (9.4.6)$$

$$l_d = \frac{ka r_{\text{эфф}}}{2\sqrt{2}} = \frac{ka^2}{2} \left[1 + 2\left(\frac{a}{r_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (9.4.7)$$

Величина l_d является дифракционной длиной для частично когерентного пучка. Если исходный радиус корреляции $r_0 \rightarrow \infty$, то величина l_d стремится к величине дифракционной длины для полностью когерентного пучка ($l_d \rightarrow ka^2/2$).

Из (5) нетрудно найти распределение интенсивности пучка ($\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$)

$$I(\mathbf{r}, z) = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{2\mathbf{r}^2}{(ua)^2}\right\} = I_0 u^{-2} \exp\left\{-\frac{2\mathbf{r}^2}{a^2(z)}\right\} \quad (9.4.8)$$

и степень когерентности ($\mathbf{s} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$)

$$|\gamma(\mathbf{s}; z)| = \exp\left\{-\frac{\mathbf{s}^2}{(ur_0)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\mathbf{s}^2}{r_k^2}\right\}. \quad (9.4.9)$$

Из (8) и (9) следует, что радиус пучка $a(z)$ и радиус корреляции $r_k(z)$ изменяются по одному и тому же закону:

$$a(z) = au, \quad r_k = r_0 u. \quad (9.4.10)$$

Заметим, что при $z = l_d$ радиусы пучка и корреляции увеличиваются в $\sqrt{2}$ раз при $\alpha_0 = 0$.

В соответствии с (10), так называемый коэффициент когерентности пучка

$$C = r_k(z)/a(z) = r_0/a \quad (9.4.11)$$

есть постоянная величина, определяемая начальным значением (статистический инвариант пучка).

Согласно (6) в случае расходящихся пучков ($\alpha_0 > 0$) радиусы пучка и корреляции монотонно увеличиваются с расстоянием. Интересно, что

при $\alpha_0 = 0$ (рис. 9.6) и $a \gg r_0$ в дальней зоне частично когерентного пучка (на расстояниях z , больших дифракционной длины l_d (7)) радиус пучка определяется начальным радиусом корреляции:

$$a(z) = 2\sqrt{2} z / kr_0, \quad (9.4.12)$$

а радиус корреляции определяется первоначальным значением радиуса пучка:

$$r_k(z) = 2\sqrt{2} z / ka = \sqrt{2} \lambda z / \pi a, \quad (9.4.13)$$

т. е. так же, как при δ -коррелированной исходной волне (см. (9.3.12)). В ближней зоне пучка ($z \ll l_d$) при $\alpha_0 = 0$ как радиус пучка, так и радиус корреляции согласно (10) не меняются.

В случае дифракции сходящегося пучка ($\alpha_0 < 0$) радиусы пучка и корреляции сначала уменьшаются с расстоянием, достигая минимума при

$$z = z_0 = -\frac{\alpha_0}{k} \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 + l_d^{-2} \right]^{-1}, \quad (9.4.14)$$

а затем увеличиваются. На расстоянии $z = z_0$ значение функции u (6) равно

$$u^2(z_0) = \left[\left(\frac{\alpha_0}{k} \right)^2 l_d + 1 \right]^{-1}. \quad (9.4.15)$$

Значения z_0 и $u(z_0)$ тем меньше, чем меньше дифракционная длина l_d (7), которая уменьшается с уменьшением радиуса корреляции r_0 .

§ 5. Фокусировка частично когерентного пучка

Обратимся теперь к классической задаче оптики о фокусировке светового пучка. Естественно ожидать, что неполная когерентность пучка будет ухудшать возможность концентрации энергии в фокусе.

Тонкая линза, через которую проходит падающая волна, задерживает ее фазовый фронт на величину, пропорциональную толщине линзы, в каждой точке, т. е. тонкая линза изменяет фазу падающей волны, трансформируя ее волновой фронт. Передаточная функция сферической линзы [4]

$$M_l(\mathbf{r}) = \exp \left\{ i \frac{k}{2f} \mathbf{r}^2 \right\}. \quad (9.5.1)$$

Здесь f — фокусное расстояние линзы. Для собирающих линз $f > 0$, для рассеивающих линз $f < 0$.

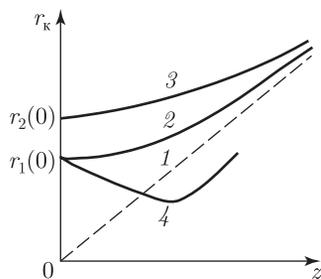


Рис. 9.6. Зависимость радиуса корреляции дифрагированной на круглом отверстии частично когерентной волны от расстояния до отверстия:

- 1) дельта-коррелированная исходная волна; 2) $r_0 = r_1(0) \neq 0$, $\alpha_0 = 0$; 3) $r_0 = r_2(0) > r_1(0)$, $\alpha_0 = 0$; 4) $r_0 = r_1(0) \neq 0$, $\alpha_0 < 0$

Рассмотрим сначала задачу в общей постановке (ср. с компрессией импульса, изученной в § 4 гл. 7). Пусть источник излучения находится на расстоянии l_1 от линзы L (плоскость $z = 0$, см. рис. 9.7). Комплексная амплитуда излучения источника $A(\mathbf{r}, z = 0) = A^{(0)}(\mathbf{r})$. Процесс

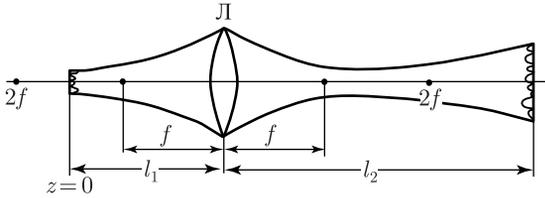


Рис. 9.7. Прохождение частично когерентного светового пучка через линзу (качественная картина)

распространения волны от источника до линзы описывается параболическим уравнением (9.1.2). Амплитуда волны непосредственно перед линзой дается выражением (9.1.5)

$$A_1(\mathbf{r}, l_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l_1) d^2 r_1. \quad (9.5.2)$$

Непосредственно после линзы амплитуда волны с учетом передаточной функции $M_L(\mathbf{r})$ (1) равна

$$A_2(\mathbf{r}) = M_L(\mathbf{r}) A_1(\mathbf{r}, l_1). \quad (9.5.3)$$

За линзой процесс распространения волны описывается опять уравнением (9.1.2). На некотором расстоянии l_2 от линзы для амплитуды волны имеем

$$A(\mathbf{r}, l_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_2(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, l_2) d^2 r_2. \quad (9.5.4)$$

Подстановка в (4) выражений (3) и (2) дает значение комплексной амплитуды $A(\mathbf{r})$ через ее исходное значение $A^{(0)}(\mathbf{r})$:

$$A(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) d^2 r_1. \quad (9.5.5)$$

Здесь $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ — функция Грина, характеризующая весь процесс распространения:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, l_2) M_L(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, l_1) d^2 r_2. \quad (9.5.6)$$

Выражение (6) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = & \\
 = & -\frac{k^2}{(2\pi)^2 l_1 l_2} \exp \left\{ -i \frac{k}{2} \left(\frac{\mathbf{r}^2}{l_2} + \frac{\mathbf{r}_1^2}{l_1} \right) \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i \frac{k}{2} q \mathbf{r}_2^2 + i k \mathbf{h} \mathbf{r}_2 \right\} d^2 r_2 = \\
 & -(\pi l_1 l_2 q^2)^{-1} \exp \left\{ -i \frac{k}{2} \left(\frac{\mathbf{r}^2}{l_2} + \frac{\mathbf{r}_1^2}{l_1} \right) - i \frac{k}{q} \mathbf{h}^2 \right\}, \quad (9.5.7)
 \end{aligned}$$

где

$$q = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} - \frac{1}{f}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{r}_1}{l_1} + \frac{\mathbf{r}}{l_2}. \quad (9.5.8)$$

В оптически сопряженных плоскостях ($q = 0$) выражение (7) дает δ -функцию:

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = \left(-\frac{1}{l_1 l_2} \right) \exp \left\{ -i \frac{k}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_2^2}{l_2} + \frac{\mathbf{r}_1^2}{l_1} \right) \right\} \delta(\mathbf{h}). \quad (9.5.9)$$

В геометрической оптике условие $q = 0$ известно как формула линзы

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{f}. \quad (9.5.10)$$

Подставляя (9) в (5), получаем

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{r}) = & \left(-\frac{1}{l_1 l_2} \right) \exp \left\{ -i \frac{k}{2} \frac{\mathbf{r}^2}{l_2} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) \exp \left\{ -i \frac{k}{2 l_1} \mathbf{r}_1^2 \right\} \times \\
 & \times \delta \left(\frac{\mathbf{r}_1}{l_1} + \frac{\mathbf{r}}{l_2} \right) d^2 r_1 = \left(-\frac{l_1}{l_2} \right) A^{(0)} \left(-\frac{l_1 \mathbf{r}}{l_2} \right) \exp \left\{ -i k \mathbf{r}^2 \frac{l_1 + l_2}{2 l_2^2} \right\}. \quad (9.5.11)
 \end{aligned}$$

Видно, что в оптически сопряженных плоскостях комплексные амплитуды световых пучков связаны довольно простым соотношением. Значение амплитуды меняется в l_1/l_2 раз, поперечный пространственный размер пучка изменяется в l_2/l_1 раз. Кроме того, изображение перевернуто относительно первоначального. При выводе соотношения (11) мы нигде не использовали когерентные свойства пучков, поэтому оно справедливо как для полностью, так и для частично когерентных световых пучков.

Пользуясь (11), нетрудно получить связь между корреляционными функциями в оптически сопряженных плоскостях:

$$\begin{aligned}
 B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = & \\
 = & \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 B_{\perp 0} \left(-\frac{l_1}{l_2} \mathbf{r}_2, -\frac{l_1}{l_2} \mathbf{r}_1 \right) \exp \left\{ i \frac{k(l_1 + l_2)}{2 l_2^2} (\mathbf{r}_2^2 - \mathbf{r}_1^2) \right\}. \quad (9.5.12)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что, помимо изменения масштаба когерентности пучка, при прохождении им линзы происходит изменение фазы корреляционной функции.

Для степени когерентности в оптически сопряженных плоскостях из (12) имеем

$$|\gamma(s)| = |\gamma_0(l_1 s/l_2)|.$$

В силу этого соотношения изменение радиуса корреляции при прохождении через линзу определяется формулой

$$r_k = \frac{l_2}{l_1} r_0. \quad (9.5.13)$$

Если исходный пучок находится на двойном фокусном расстоянии $l_1 = 2f$, то расстояние $l_2 = 2f$ и радиус корреляции пучка остается неизменным: $r_k = r_0$. Следует, однако, подчеркнуть, что фаза корреляционной функции в этом случае изменяется: появляется дополнительный множитель $\exp\left\{i\frac{k}{2f}(r_2^2 - r_1^2)\right\}$ (см. (12)).

Рассмотрим еще один пример *фокусировки* сферической линзой *частично когерентного светового пучка*. Пусть пучок задан непосредственно перед линзой ($l_1 \approx 0$), причем его поперечная корреляционная функция $B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ дается выражением (9.4.2). Найдем минимальные размеры сфокусированного пучка и соответствующую интенсивность. Для такой постановки решение задачи фактически содержится в предыдущем параграфе. Здесь только надо учесть изменение фазы корреляционной функции, вносимое линзой. Сразу же после линзы, в соответствии с (9.4.2) и (1),

$$B(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \exp\left\{i\frac{k}{2f}(r_1^2 - r_2^2)\right\}. \quad (9.5.14)$$

Из (14) и (9.4.2) видно, что для использования результатов, следующих за формулой (9.4.2), нужно произвести замену

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0 - k/f. \quad (9.5.15)$$

Наиболее интересными являются результаты при $\alpha_0 < k/f$, когда существует расстояние $z_0 \neq 0$, при котором радиусы корреляции и пучка минимальны. В соответствии с (9.4.14) расстояние до области перетяжки

$$z_0 = \left(\frac{1}{f} - \frac{\alpha_0}{k}\right) \left[\left(\frac{1}{f} - \frac{\alpha_0}{k}\right)^2 + l_d^{-2}\right]. \quad (9.5.16)$$

Дифракционная длина l_d частично когерентного пучка определяется (9.4.7). В геометрическом приближении ($k \rightarrow \infty$, $l_d \rightarrow i$), как и следовало ожидать,

$$z'_0 = f. \quad (9.5.17)$$

Дифракция приводит к отличию значения z_0 от f . При $\alpha_0 = 0$ расстояние до перетяжки

$$z_0'' = f/[1 + (f/l_d)^2] \quad (9.5.18)$$

меньше, чем фокусное расстояние линзы (рис. 9.8).

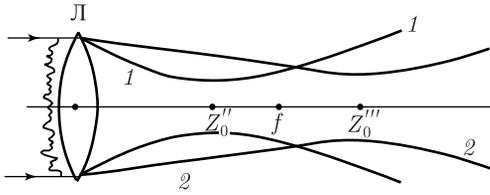


Рис. 9.8. Фокусировка частично когерентного светового пучка:

1) $l_d \neq 0, \alpha_0 = 0$; 2) $l_d \rightarrow \infty, \alpha_0 \neq 0$

Для полностью когерентного пучка, полагая $l_d \rightarrow \infty$, из (16) имеем

$$z_0''' = kf/(k - \alpha_0 f), \quad (9.5.19)$$

т. е. в случае расхождения пучка (регулярная кривизна волнового фронта $\alpha_0 > 0$) расстояние $z_0''' > f$. В общем случае значение z_0 для частично когерентных пучков определяется конкуренцией дифракционных эффектов и эффектов, связанных с фазой корреляционной функции. Зависимость положения области перетяжки пучка от фазы корреляционной функции можно использовать, очевидно, для определения величины α_0 .

Распределение интенсивности в области перетяжки согласно (9.4.8) равно

$$I(\mathbf{r}, z_0) = I_0 u^{-2}(z_0) \exp \left\{ -\frac{2\mathbf{r}_2}{(au(z_0))^2} \right\}, \quad (9.5.20)$$

где $u^2(z_0)$ в соответствии с (9.4.15) и (15) имеет вид

$$u^2(z_0) = \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha_0 k}{f} \right)^2 \left(\frac{l_d}{f} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (9.5.21)$$

Здесь наличие $\alpha_0 \neq 0$ эквивалентно изменению дифракционной длины l_d , поэтому далее считаем $\alpha_0 = 0$.

Радиус пучка в области перетяжки

$$a_{\min}(z_0) = au(z_0) = \left\{ 1 + \left(\frac{l_d}{f} \right)^2 \right\}^{-1/2} a \approx \frac{2\sqrt{2}f}{kr_0}. \quad (9.5.22)$$

Интенсивность в центре пучка

$$I(0, z_0) = I_0 \left[1 + \left(\frac{l_d}{f} \right)^2 \right] \approx \left(\frac{l_d}{f} \right)^2 I_0 = \left(\frac{a}{a_{\min}(z_0)} \right)^2 I_0. \quad (9.5.23)$$

Приближенные равенства в (22) и (23) справедливы при $l_d \gg f$.

Для случая регулярных гауссовских пучков в формулах (22) и (23) r_0^2 нужно заменить на $a/\sqrt{2}$. Таким образом, при фокусировке частично когерентных световых пучков *интенсивность в области перетяжки*

меньше, чем для когерентных пучков, в $N = a^2/2r_0^2$ раз; соответственно во столько же раз увеличивается *площадь пятна в перетяжке*. Величина N равна среднему числу неоднородностей в пучке.

Покажем теперь, что линзу можно применять в качестве элемента, позволяющего измерить *угловой спектр излучения*. Обратимся к формуле (4), описывающей поле за линзой. Поскольку анализируемое излучение задано непосредственно перед линзой ($l_1 = 0$), то согласно (4) имеем

$$A(\mathbf{r}, l) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) \exp \left\{ i \frac{k}{2f} \mathbf{r}_1^2 \right\} H(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, l) d^2 r_1$$

или, учитывая вид функции Грина (9.1.4),

$$A(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi l} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) \exp \left\{ -i \frac{k}{2l} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 + i \frac{k}{2f} \mathbf{r}_1^2 \right\} d^2 r_1, \quad (9.5.24)$$

где l — расстояние от линзы. В фокальной плоскости линзы, т. е. при $l = f$, амплитуда поля

$$A(\mathbf{r}) = \frac{ik}{2\pi f} \exp \left(-\frac{ik}{2f} \mathbf{r}^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) \exp \left(-i \frac{k}{f} \mathbf{r} \mathbf{r}_1 \right) d^2 r_1 \quad (9.5.25)$$

есть фурье-образ исходного поля. Отличие от точного фурье-спектра поля связано с фазовым множителем, стоящим перед интегралом.

В соответствии с (25) распределение интенсивности в фокусе линзы

$$I(\mathbf{r}) = \left(\frac{k}{2\pi f} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \exp \left\{ i \frac{k}{f} \mathbf{r}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right\} d^2 r_1 d^2 r_2. \quad (9.5.26)$$

В координатах \mathbf{r}' и \mathbf{R} (9.2.3) выражение (26) принимает вид

$$I(\mathbf{r}) = \left(\frac{k}{2\pi f} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \exp \left\{ -i \frac{k}{f} \mathbf{r} \mathbf{r}' \right\} d^2 r' d^2 R' \quad (9.5.27)$$

и с точностью до постоянного множителя совпадает со спектром (9.2.11) случайного поля, причем поперечной компоненте \varkappa волнового вектора соответствует величина $k\mathbf{r}/f$. В связи с этим можно воспользоваться выводами § 2. Так, например, формула (9.2.18) и рис. 9.2 показывают зависимость углового спектра (фокального размера пятна $\Delta\theta = \mathbf{s}/f$) от параметров исходного пучка.

§ 6. Дифракция светового пучка на случайном фазовом экране; квазитепловой источник света

Здесь мы рассмотрим задачу, по постановке противоположную задачам § 4, 5, в которых изучалась дифракция случайной волны. Проанализируем задачу о дифракции когерентного светового пучка на плоском экране со случайным пропусканием $M(\mathbf{r})$. В общем случае функция $M(\mathbf{r})$ является комплексной:

$$M(\mathbf{r}) = m(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r})}, \quad (9.6.1)$$

где $m(\mathbf{r})$ — амплитудный коэффициент пропускания, $\Phi(\mathbf{r})$ — фаза. Изменение $m(\mathbf{r})$ связано с изменением прозрачности экрана, а изменение фазы $\Phi(\mathbf{r})$ — с изменением толщины или коэффициента преломления экрана. Эта задача представляет интерес как в статистической оптике, так и в статистической теории антенн [5–13].

Можно выделить весьма важный частный случай, когда $m = 1$ и, следовательно, $M(\mathbf{r}) = e^{i\Phi(\mathbf{r})}$; такой случайный экран называется фазовым. Модель рассеивающего объекта как случайного фазового экрана является довольно распространенной как в радиофизике, так и в оптике. Она успешно используется для изучения распространения волн в неоднородной ионосфере и межзвездной плазме, турбулентных средах.

Случайный фазовый экран достаточно подробно изучен и теоретически [14–16]. Поэтому ниже мы ограничимся рассмотрением лишь одного примера, заимствованного из оптики. Речь пойдет о модели так называемого квазитеплого источника света, реализующейся при рассеянии когерентного светового пучка (например, от лазера) на вращающемся матовом диске [9–12]. Такой источник часто используется в экспериментах по статистической оптике, он детально изучался экспериментально.

Пусть на движущийся фазовый экран нормально падает лазерный пучок с гауссовским профилем (мода TEM_{00}), предварительно прошедший через линзу (рис. 9.9). В плоскости экрана комплексную амплитуду пучка можно представить в виде

$$A^{(0)}(\mathbf{r}) = A^{(0)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}^2}{a^2} - i\alpha\mathbf{r}^2 \right\}, \quad (9.6.2)$$

где a — радиус пучка на экране, коэффициент α характеризует расходимость пучка, значения a и α определяются фокусным расстоянием линзы и расстоянием от линзы до экрана.

Непосредственно за случайным фазовым экраном имеем

$$A(\mathbf{r}, t) = A^{(0)}(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)} = A^{(0)} \exp \left\{ -\frac{\mathbf{r}^2}{a^2} - i\alpha\mathbf{r}^2 + i\Phi(\mathbf{r}-\mathbf{v}t) \right\}, \quad (9.6.3)$$

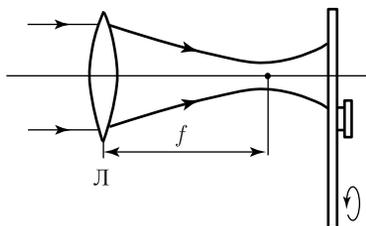


Рис. 9.9. Фокусировка светового пучка на вращающийся матовый диск

где \mathbf{v} — скорость движения экрана (экран с «замороженными» неоднородностями). Случайный процесс $\Phi(\mathbf{r})$ считаем статистически изотропным, дисперсия процесса $\overline{\Phi^2} = \sigma_\Phi^2$, а коэффициент корреляции

$$\gamma_\Phi(\mathbf{s}) = \overline{\Phi(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r} + \mathbf{s})} / \sigma_\Phi^2. \quad (9.6.4)$$

Поскольку флуктуации $\Phi(\mathbf{r})$ связаны с изменением толщины экрана $h(\mathbf{r})$:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{2\pi \Delta n}{\lambda} h(\mathbf{r}),$$

то дисперсия

$$\sigma_\Phi^2 = \left(\frac{2\pi \Delta n}{\lambda} \right)^2 \sigma_h^2, \quad \sigma_h^2 = \overline{h^2}, \quad (9.6.5)$$

λ — длина волны излучения, Δn — разность показателей преломления материала экрана и окружающей среды.

Изменение дифрагированного поля на расстоянии l от случайного экрана до плоскости наблюдения дается выражением типа (9.1.5):

$$A(\mathbf{r}, l; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) e^{i\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t)} H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) d^2 r_1. \quad (9.6.6)$$

Временная корреляционная функция рассеянного поля при этом записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \langle A(\mathbf{r}, l; t) A^*(\mathbf{r}, l; t + \tau) \rangle = \\ &= \int \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) A^{(0)*}(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) H^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, l) \times \\ &\quad \times \langle \exp i[\Phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t) - \Phi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{v}(t + \tau))] \rangle d^2 r_1 d^2 r_2. \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

Под интегралом в (7) фигурирует функция, представляющая собой двумерную характеристическую функцию процесса $\Phi(\mathbf{r})$. Если статистика поля $w(\mathbf{r})$ гауссовская, то

$$C_\Phi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle \exp l[\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)] \rangle = \exp\{-\sigma_\Phi^2 l [1 - \gamma_\Phi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)]\} \quad (9.6.8)$$

и выражение (7) записывается как

$$\begin{aligned}
 B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \\
 &= \iint_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) A^{(0)*}(\mathbf{r}_2) H(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, l) H^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, l) C_{\Phi}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}\tau) d^2 r_1 d^2 r_2.
 \end{aligned} \tag{9.6.9}$$

Воспользовавшись выражением для функции Грина (9.1.4), представим (9) в виде

$$\begin{aligned}
 B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \\
 &= \left(\frac{k_0}{2\pi l}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{u}) C_{\Phi}(\mathbf{u} - \mathbf{v}\tau) \exp\left\{-i\frac{k}{2l}(2\mathbf{r} - \mathbf{u})\mathbf{u}\right\} d^2 u, \tag{9.6.10} \\
 A(\mathbf{u}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{u}_1) A^{(0)*}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}) \exp\left\{i\frac{k_0}{l}\mathbf{u}\mathbf{u}_1\right\} d^2 u_1.
 \end{aligned}$$

Здесь произведена замена переменных $\mathbf{r}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{u} - \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Учитывая (2), для функции $A(\mathbf{u})$ имеем

$$\begin{aligned}
 A(\mathbf{u}) &= \frac{\pi a^2}{2} A^{(0)2} \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}^2}{w^2} - i\frac{k_0}{2l}\mathbf{u}^2\right\}, \tag{9.6.11} \\
 w &= \left\{2a^{-2} + \left(2\alpha + \frac{k_0}{l}\right)^2 a^2\right\}^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

В результате корреляционная функция (10) приводится к виду

$$\begin{aligned}
 B(\mathbf{r}, l; \tau) &= \\
 &= \left(\frac{k_0}{2\pi l}\right)^2 \frac{\pi a^2}{2} A^{(0)2} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\Phi}(\mathbf{u} - \mathbf{v}\tau) \exp\left\{-\frac{\mathbf{u}^2}{w^2} - i\frac{k_0}{l}\mathbf{r}\mathbf{u}\right\} d^2 u. \tag{9.6.12}
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициент корреляции $\gamma_{\Phi}(\mathbf{s})$ имеет гауссовскую форму:

$$\gamma_{\Phi}(\mathbf{s}) = \exp\{-(\mathbf{s}/r_0)^2\},$$

где r_0 — радиус корреляции фазовых флуктуации. Тогда функция (8) равна

$$C_{\Phi}(\mathbf{s}) = \exp\{-\sigma_{\Phi}^2[1 - \exp\{-(\mathbf{s}/r_0)^2\}]\}. \tag{9.6.13}$$

Однако для произвольных значений фазовых флуктуации интегрирование (12) для функции $C_{\Phi}(\mathbf{s})$ (13) не удается выполнить. Наглядные аналитические результаты можно получить в предельных случаях сильных ($\sigma_{\Phi}^2 \gg 1$) и слабых флуктуации ($\sigma_{\Phi} \ll 1$).

При больших значениях σ_w^2 функция $C_\Phi(\mathbf{s})$ очень быстро убывает от единицы до $\exp\{-\sigma_\Phi^2\}$ при изменении s от нуля до $s \gg r_0$. Самое быстрое изменение $C_\Phi(\mathbf{s})$ происходит при $s < r_0$, и поэтому можно использовать приближение

$$\exp\{-(s/r_0)^2\} \approx 1 - (s/r_0)^2,$$

а $C_\Phi(\mathbf{s})$ заменить приближенным выражением (см. [10])

$$C_\Phi(\mathbf{s}) = \exp\{-\sigma_\Phi^2\} + [1 - \exp\{-\sigma_\Phi^2\}] \exp\{-\sigma_\Phi^2(s/r_0)^2\}. \quad (9.6.14)$$

Используя (14), интеграл (12) легко вычислить:

$$B(\mathbf{r}, l; \tau) = I_{\text{рег}}(\mathbf{r}, l) + B_\Phi(\mathbf{r}, l; \tau), \quad (9.6.15)$$

где

$$I_{\text{рег}}(\mathbf{r}, l) = \frac{1}{2} \left(\frac{k_0 a w}{2l} \right)^2 A^{(0)2} \exp\left\{-\sigma_\Phi^2 - \left(\frac{k_0 \mathbf{r} w}{2l} \right)^2\right\}, \quad (9.6.16)$$

$$B_\Phi(\mathbf{r}, l; \tau) = \frac{(k_0 a w / 2l)^2}{2(1 + \sigma^2 w^2)} (1 - \exp\{-\sigma_\Phi^2\}) \times \\ \times A^{(0)2} \exp\left\{-[(k_0 \mathbf{r} w / w l)^2 + (\sigma \mathbf{v} \tau)^2 + \frac{i}{l} \sigma^2 k_0 w^2 \mathbf{v} \mathbf{r} \tau](1 + \sigma^2 w^2)^{-1}\right\}. \quad (9.6.17)$$

Здесь введено обозначение

$$\sigma^2 = \sigma_\Phi^2 / r_0^2. \quad (9.6.18)$$

Функция $I_{\text{рег}}$ (16) описывает распределение интенсивности нерассеянной части пучка, дифрагирующего на собственной апертуре. Очевидно, что при $\sigma_\Phi^2 \gg 1$ значение $I_{\text{рег}}$ мало.

Выражение (17) соответствует рассеянной части пучка. Первое слагаемое в фигурных скобках экспоненты ответственно за распределение интенсивности в поперечном сечении пучка, второе слагаемое — за временную когерентность поля и последнее — за доплеровское смещение частоты, которое равно нулю, когда направление наблюдения (вектор \mathbf{r}) перпендикулярно скорости \mathbf{v} .

Радиус рассеянного пучка в плоскости наблюдения

$$a_p = \frac{2l}{k_0 w} (1 + \sigma^2 w^2)^{1/2}. \quad (9.6.19)$$

В реализуемых на практике условиях $\sigma w \gg 1$, так как $\sigma w = \sigma_\Phi(w/r_0)$, $w \gg r_0$ и $\sigma_\Phi > 1$ ¹⁾. Поэтому в реальных условиях ширина рассеянного пучка

$$a_p = 2\sigma l / k_0 = 2\sigma_\Phi l / k_0 r_0 \quad (9.6.20)$$

¹⁾ В типичных условиях $k_0 \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$, $\Delta n \approx 0,3-0,5$, $\sigma_h \approx 1-10 \text{ мкм}$ и, согласно (5), $\sigma_\Phi \approx 3-30$.

не зависит от первоначального значения, а определяется статистическими характеристиками случайного экрана (σ_{Φ} и r_0) и расстоянием l от экрана до плоскости наблюдения. Напротив, при условии $\sigma w \gg 1$ время корреляции излучения

$$\tau_k = w/v \tag{9.6.21}$$

не зависит от характеристик случайного экрана.

Согласно (11) параметр w и, следовательно, время корреляции τ_k зависят от радиуса a и угловой расходимости (величины α) падающего пучка и расстояния l . На рис. 9.10 показано время корреляции для различных радиусов пучка a . При $a^2 = l/k_0\sqrt{2}$ и $\alpha = 0$ время корреляции достигает максимального значения

$$\tau_{k \max} = \frac{2^{3/4}}{v} \left(\frac{l}{k_0}\right)^{1/2}. \tag{9.6.22}$$

Если падающий световой пучок рассеивается вращающимся матовым стеклом, то скорость

$$v = \Omega R, \tag{9.6.23}$$

где Ω — угловая скорость вращения матового диска, R — расстояние от оси вращения до центра пучка на диске. В этом случае имеются дополнительные возможности изменения времени корреляции за счет изменения значений Ω и R .

Следует отметить, что статистика рассеянной волны становится гауссовской, когда ширина исходного пучка a гораздо больше радиуса корреляции r_0 неоднородностей рассеивающего экрана [5, 10, 11].

Теперь обратимся к случаю слабых флуктуации фазы ($\sigma_{\Phi} \ll 1$); здесь можно воспользоваться следующим приближением для функции (13):

$$C_{\Phi} \approx 1 - \sigma_{\Phi}^2 + \sigma_{\Phi}^2 \exp\{-(s/r_0)^2\}. \tag{9.6.24}$$

Соотношение (24) можно получить из выражения (14), если в экспонентах, в которых отсутствует параметр s , считать $\sigma_{\Phi}^2 < 1$, а при наличии s положить $\sigma_{\Phi}^2 = 1$, т. е. в (18) принять $\sigma^2 = r_0^{-2}$. При таких предположениях можно использовать формулы (15)–(17) и (19), в ко-

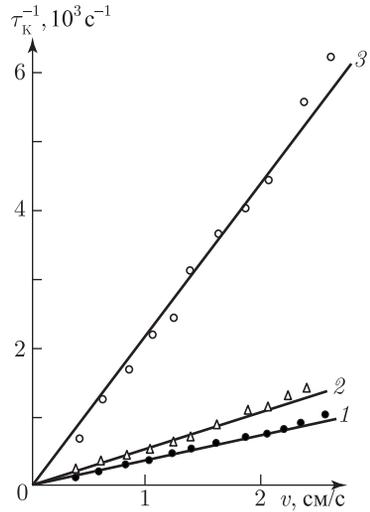


Рис. 9.10. Зависимость времени корреляции рассеянного излучения от скорости вращения матового диска при различных фокусных расстояниях линзы [12]:

1) 13,0 см; 2) 9,0 см; 3) 2,3 см. Радиус светового пучка на линзе во всех случаях одинаков

торых, однако, нужно учесть новое значение $\sigma^2 = r_0^{-2}$. При этом время корреляции рассеянного излучения, определенное из (17),

$$\tau_k = \frac{1}{\sigma v} [1 + \sigma^2 w^2]^{1/2} \approx w/v \quad (9.6.25)$$

совпадает с результатом (21) для сильных флуктуации. Радиус же рассеянного пучка согласно (19)

$$a_p = \left(\frac{2l}{k_0}\right) [w^{-2} + r_0^{-2}]^{1/2} \approx \frac{2l}{k_0 r_0} \quad (9.6.26)$$

и меньше, чем в случае сильных флуктуаций (20).

Дифрагированное поле во фраунгоферовой зоне; решение по методу Рэлея. Рассмотрим общий случай дифракции регулярной волны на плоском экране со случайным комплексным пропусканием (1). В методе Рэлея дифрагированное поле разлагается на плоские волны. Разложение произвольного поля по плоским волнам дается формулой (ср. с (6.2.18))

$$E(\mathbf{R}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} d\omega d^3 k, \quad (9.6.27)$$

где $\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k})$ — амплитуда волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} .

В случае монохроматических полей

$$\mathcal{E}(\omega, \mathbf{k}) = \mathcal{E}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_0) \delta(k - \omega/c). \quad (9.6.28)$$

Появление в (28) функции $\delta(k - \omega/c)$ связано с дисперсионным соотношением $k = \omega/c$. Амплитуды волн, которые не удовлетворяют этому соотношению, равны нулю [5]. В этом случае

$$E(\mathbf{R}, t) = E(\mathbf{R}) e^{i\omega_0 t},$$

где

$$E(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\mathbf{k}) \delta(k - \omega_0/c) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3 k. \quad (9.6.29)$$

Представим $\mathbf{k}\mathbf{R}$ в виде

$$\mathbf{k}\mathbf{R} = k_z z + k_x x + k_y y = k_z z + \boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r}, \quad k^2 = k_z^2 + \boldsymbol{\varkappa}^2.$$

Интегрируя (29) по dk_z , получаем (ср. с (6.2.17))

$$E(\mathbf{r}, z) = E(\mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\boldsymbol{\varkappa}) e^{-i(\boldsymbol{\varkappa}\mathbf{r} + \sqrt{k^2 - \boldsymbol{\varkappa}^2} z)} d^2 \boldsymbol{\varkappa}. \quad (9.6.30)$$

Разложение (30) состоит из суперпозиции волн двух типов. До тех пор, пока $k^2 > \boldsymbol{\varkappa}^2$, это плоские бегущие волны. Значениям $k^2 < \boldsymbol{\varkappa}^2$ соответствуют неоднородные волны, затухающие в направлении z .

Функция $\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa})$ определяется из условия на границе линейной среды (при $z = 0$):

$$E(\mathbf{r}, z = 0) = A^{(0)}(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d^2\boldsymbol{\kappa},$$

откуда

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}) e^{i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}} d^2r.$$

Следовательно,

$$E(\mathbf{f}, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) e^{-i[\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \sqrt{k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2} z]} d^2r_1 d^2\boldsymbol{\kappa}. \quad (9.6.31)$$

Если характерный размер неоднородностей рассеивающего экрана порядка r_0 и угловой спектр (9.2.19) рассеянной волны узок ($\Delta\boldsymbol{\kappa}/k = 2/k r_0 \ll 1$), то существенны лишь бегущие волны и в интеграле (31) можно использовать приближение (см. также (6.2.26))

$$(k^2 - \boldsymbol{\kappa}^2)^{1/2} \approx k - \boldsymbol{\kappa}^2/2k,$$

после чего получаем

$$E(\mathbf{r}, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\mathbf{r}_1) e^{-ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)^2/2z} d^2r_1. \quad (9.6.32)$$

Выражение (32) аналогично выражению (9.1.5), вытекающему из решения параболического уравнения (9.2.1). Таким образом, задача о дифракции монохроматической волны на экране со случайным пропусканием оказывается аналогичной задаче о дифракции шумовой волны на регулярном препятствии. Физически эта аналогия вполне понятна. Случайный экран модулирует проходящую через него волну по амплитуде и фазе. В связи с этим нетрудно прийти к выводу, что результаты § 5 по дифракции случайных волн могут быть перенесены на задачи о дифракции волн на случайном экране.

Разумеется, полное перенесение указанных результатов возможно лишь в том случае, когда статистические характеристики случайной волны и случайного экрана одинаковы. Подчеркнем также, что формула (32), как и параболическое уравнение (9.2.1), применима только для крупномасштабных неоднородностей ($kr_0 \gg 1$). Общее же решение (31) получено без каких-либо ограничений на соотношение между длиной волны λ и масштабом неоднородностей r_0 .

§ 7. Винтовые дислокации волнового фронта и пространственной корреляционной функции случайных световых пучков

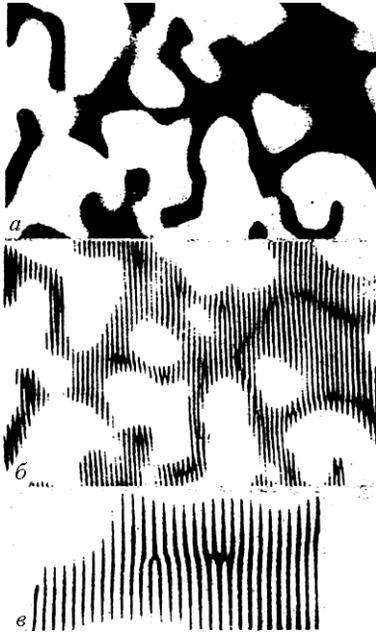


Рис. 9.11. Реализация пространственного распределения случайного поля (спекл-картины) без опорной волны (*a*) и в присутствии опорной волны (*б*) при наличии дислокаций; (*в*) увеличенное изображение двух дислокаций с разными знаками топологического заряда. Заимствовано из [17]

составлять рассмотрение дислокаций в волновом фронте детерминированных пучков.

Вихревые детерминированные световые пучки. Под волновым фронтом подразумевают, как известно, поверхность одинакового значения фазы в данный момент времени. Волне с почти плоским волновым фронтом соответствует семейство непересекающихся эквифазных поверхностей близких по форме к плоскостям, которые отстоят друг от друга на расстояние длины волны λ (рис. 9.12а). Вместе с тем

Проведенный в предыдущих разделах анализ случайных световых пучков основан на их осредненном описании, на расчете средней интенсивности и поперечной пространственной корреляционной функции. Более детальную информацию об амплитудно-фазовой структуре случайного поля можно получить при его интерференции с детерминированной плоской или сферической волной. В интерференционной картине при этом могут наблюдаться слияния и возникновения («ветвления») интерференционных полос (см. рис. 9.11). Такие особенности интерференционной картины обусловлены винтовыми дислокациями волнового фронта. В последние десятилетия с момента первых экспериментальных наблюдений дислокаций волнового фронта [17] (см. также [18]) они интенсивно исследуются как в случайных, так и в детерминированных световых пучках, называемых вихревыми пучками. Эти исследования фактически сформировали новую область оптики — так называемую сингулярную оптику [19]. В настоящем параграфе мы будем изучать случайные винтовые дислокации волнового фронта. Им будет предше-

могут быть световые пучки с более сложными волновыми фронтами, которые не являются гладкими поверхностями, а имеют особые, сингулярные точки, в которых амплитуда поля равна нулю, а значение фазы неопределено. К таким пучкам относятся лазерные пучки с оптическими вихрями [20, 21]. При обходе особой точки с винтовой дислокацией по замкнутому контуру фаза меняется на 2π или -2π , а в общем случае оптического вихря m -го порядка на $m2\pi$. Целочисленная величина m носит название топологического заряда вихря ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Наличие винтовой дислокации кардинально меняет топологию волнового фронта, эквифазная поверхность становится геликоидальной, т. е. имеет винтовую структуру (см. рис. 9.12б). При этом волновая поверхность всюду гладкая за исключением оси геликоида. Поскольку направление распространения энергии задается вектором Умова—Пойнтинга, перпендикулярным к поверхности волнового фронта в каждой его точке, то в окрестности винтовой дислокации поток энергии электромагнитного поля обладает вихревыми свойствами.

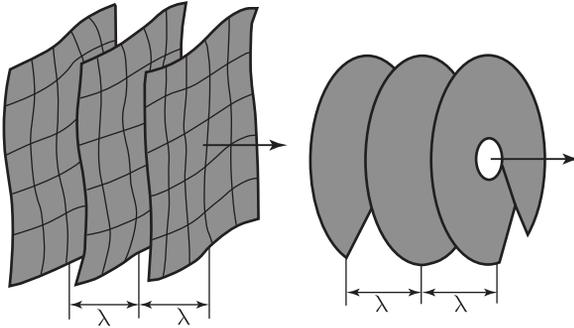


Рис. 9.12. Структура волнового фронта при отсутствии (а) и наличии (б) винтовой дислокации. Заимствовано из [21]

Детерминированные пучки с винтовыми дислокациями могут быть получены непосредственно в лазерах, при прохождении через спиральные фазовые пластинки или через специальным образом изготовленные голограммы. Типичным примером вихревого пучка являются моды Лагерра—Гаусса лазерного резонатора [22].

Рассмотрим лагерь-гауссовский пучок, комплексная амплитуда которого в полярных координатах r, φ имеет вид

$$A(r, \varphi) = \frac{r}{a} A^{(0)} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2} + i\varphi\right), \quad (9.7.1)$$

где a — радиус пучка. Распределение интенсивности этой моды имеет «кольцеобразную» форму. Моду (1) можно получить также путем на-

ложения эрмит-гауссовских мод вида TEM_{10} и TEM_{01} , сдвинутых по фазе на $\pi/2$. В декартовых координатах имеем в результате

$$A(x, y) = \frac{x + iy}{a} A^{(0)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a^2}\right). \quad (9.7.2)$$

Из сравнения выражений (2) и (1) следуют соотношения:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \text{arctg}(y/x). \quad (9.7.3)$$

Видно, что при $r = 0$ фаза φ неопределена, т. е. точка с координатами $x = y = 0$ является сингулярной. При обходе такой точки по часовой стрелке фаза скачком меняется на 2π . Это означает, что в волновом фронте появляется винтовая дислокация. Как отмечалось выше, дислокация волнового фронта проявляется при интерференции с детерминированной опорной волной (рис. 9.11).

Оптические вихри в случайных световых пучках. Плотность оптических вихрей (дислокаций волнового фронта) в случайных полях теоретически исследовалась в ряде работ [23–26]. Для световых пучков с гауссовской статистикой можно найти плотность среднего числа дислокаций в поперечном сечении пучка [23, 24]. Из выражений (2) и (3) следует, что в комплексном представлении поля дислокации волнового фронта возникают на пересечении линии, в которых равны нулю одновременно действительные и мнимые части комплексной амплитуды, т. е. при условии $\text{Re } A(x, y) = \text{Im } A(x, y) = 0$. Статистику оптических вихрей в случайных полях обычно изучают, используя комплексное представление поля. Однако мнимая и действительная части комплексной амплитуды являются ее квадратурными компонентами. Поэтому далее мы будем пользоваться обозначениями и результатами § 3 главы 2.

Действительное случайное поле можно записать двояко:

$$\begin{aligned} E(r, z, t) &= a(r, z) \cos(\omega t - k_0 z) - \\ &- b(r, z) \sin(\omega t - k_0 z) = \\ &= \rho(r, z) \cos(\omega t - k_0 z + \varphi(r, z)). \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

Рис. 9.13. Траектории нулевых значений квадратурных компонент: $a(x, y)$ — сплошные кривые, $b(x, y)$ — пунктирные. Пересечение этих кривых дают точки с нулевыми значениями огибающей

Отсюда следуют соотношения: $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$, а $\rho^2 = a^2 + b^2$, $\varphi = \text{arctg}(b/a)$. Будем считать, что среднее значение поля равно нулю ($\langle E(r, z, t) \rangle = 0$), а значит $\langle a \rangle = \langle b \rangle = 0$. Дислокации волнового фронта имеют место при $a(x, y) = b(x, y) = \rho(x, y) = 0$ (см. рис. 9.13).



В терминах теории выбросов случайных процессов (§ 6 гл. 1) определение числа дислокаций в некотором поперечном сечении $z = z_0$ сводится к задаче нахождения числа пересечений двумерных случайных полей $a(x, y)$ и $b(x, y)$ при их нулевых значениях. Обобщая формулу (1.6.7) на рассматриваемый случай, для среднего числа дислокаций $\langle N \rangle$ на площадке размером S получим выражение

$$\langle N \rangle = \left\langle \oint \delta(a(x, y)) \delta(b(x, y)) da(x, y) db(x, y) \right\rangle, \quad (9.7.5)$$

где интегрирование выполняется по площади S , а усреднение производится по реализациям случайных полей $a(x, y)$ и $b(x, y)$. Из выражения (5) видно, что каждые нулевые значения a и b в одной и той же точке пространства (x, y) дают единичный вклад в интеграл до его усреднения.

Переход в (5) от переменных интегрирования a и b к переменным x и y осуществляется с помощью якобиана преобразования

$$J = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = a_x b_y - a_y b_x. \quad (9.7.6)$$

В результате выражение (5) можно привести к виду

$$\langle N \rangle = \left\langle \oint \delta(a(x, y)) \delta(b(x, y)) |J| dx dy \right\rangle. \quad (9.7.7)$$

Будем считать исходное случайное поле $E(r, z, t)$ статистически однородным в поперечном сечении, таковыми будут и квадратуры случайных полей $a(x, y)$ и $b(x, y)$. В этом случае из (7) получим

$$\langle n \rangle = \langle N \rangle / S = \langle \delta(a(x, y)) \delta(b(x, y)) |J| \rangle, \quad (9.7.8)$$

$\langle n \rangle$ — среднее число дислокаций на единице площади.

Для расчета среднего (8) необходима шестимерная функция распределения

$$w(a, b, a_x, b_x, a_y, b_y). \quad (9.7.9)$$

Для гауссовских случайных полей среднее удается получить в аналитическом виде. В силу статистической однородности рассматриваемого случайного поля, по своим свойствам аналогичной статистической стационарности (см. § 6 гл. 1 и § 4 гл. 2), в корреляционной матрице

$$C = \langle (a, b, a_x, b_x, a_y, b_y)^T (a, b, a_x, b_x, a_y, b_y) \rangle, \quad (9.7.10)$$

где T означает транспонирование, отличными от нуля будут лишь диагональные элементы, т. е. следующие дисперсии:

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= \langle b^2 \rangle = \langle E^2 \rangle = \langle I \rangle = \sigma^2, \\ \langle a_x^2 \rangle &= \langle b_x^2 \rangle = B_{xx}(0, 0) = B_{xx}, \\ \langle a_y^2 \rangle &= \langle b_y^2 \rangle = B_{yy}(0, 0) = B_{yy}. \end{aligned} \quad (9.7.11)$$

Поскольку взаимные корреляции в матрице равны нулю, а статистика полей гауссовская, многомерная функция распределения (9) распадается на произведение одномерных гауссовских распределений

$$w(a, b, a_x, b_x, a_y, b_y) = w(a)w(b)w(a_x)w(b_x)w(a_y)w(b_y). \quad (9.7.12)$$

Пользуясь значением четырехкратного интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} |xy - zv| \exp[-(x^2 + y^2 + z^2 + v^2)] dx dy dz dv = \frac{1}{4} \pi^2, \quad (9.7.13)$$

для средней плотности числа дислокаций (8) получаем¹⁾

$$\langle n \rangle = (B_{xx} B_{yy})^{1/2} / (4\pi\sigma^2). \quad (9.7.14)$$

Формула (14) относится к статистически анизотропному полю. В случае статистически однородного и изотропного поля $B_{xx} = B_{yy}$. Принимая во внимание связь пространственной корреляционной функций с волновым спектром $G(\boldsymbol{\kappa})$ (6.4.25), находим:

$$B_{xx} = \int \kappa_x^2 G(\kappa_x, \kappa_y) d^2 \kappa, \quad B_{yy} = \int \kappa_y^2 G(\kappa_x, \kappa_y) d^2 \kappa. \quad (9.7.15)$$

Для квазиплоского случайного волнового пучка, вводя по аналогии с (6.1.6) углы $\theta_x = \kappa_x/k_0$, $\theta_y = \kappa_y/k_0$, имеем соотношения

$$B_{xx} = k_0^2 \langle \theta_x^2 \rangle, \quad B_{yy} = k_0^2 \langle \theta_y^2 \rangle. \quad (9.7.16)$$

Здесь $\langle \theta_x^2 \rangle$ и $\langle \theta_y^2 \rangle$ — средний квадрат угловой расходимости пучка вдоль направлений x и y соответственно, например

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \int \theta_x^2 g(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y, \quad (9.7.17)$$

где $g(\theta_x, \theta_y)$ — нормированное угловое распределение:

$$g(\theta_x, \theta_y) = G(\theta_x, \theta_y) / \int G(\theta_x, \theta_y) d\theta_x d\theta_y.$$

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае угловое распределение симметрично, так что $\langle \theta_x \rangle = \langle \theta_y \rangle = 0$.

С учетом выражений (16) и (17) формула (14) принимает вид

$$\langle n \rangle = \frac{1}{4\pi} k_0^2 (\langle \theta_x^2 \rangle \langle \theta_y^2 \rangle)^{1/2} = \frac{\pi}{\lambda_0^2} (\langle \theta_x^2 \rangle \langle \theta_y^2 \rangle)^{1/2}. \quad (9.7.18)$$

Для изотропного поля $\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle$ и формула (18) упрощается:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{4\pi} k_0^2 \langle \theta^2 \rangle = \frac{\pi}{\lambda_0^2} \langle \theta^2 \rangle. \quad (9.7.19)$$

¹⁾ Отметим, что значение (14) в 2 раза меньше приведенного в работах [17].

Среднюю плотность дислокаций $\langle n \rangle$ можно выразить через радиус корреляции случайного поля. Для гауссовской корреляционной функции вида (9.2.7) площадь когерентности $S_{\text{ког}} = \pi r_{\text{к}}^2$, а $\langle \theta^2 \rangle = 2/(kr_{\text{к}})^2$. Подставляя это значение в формулу (19), получаем простую зависимость

$$\langle n \rangle = 1/2S_{\text{ког}}. \quad (9.7.20)$$

Плотность числа дислокаций волнового фронта оказывается, таким образом, обратно пропорциональна площади когерентности случайного поля. При интерференции случайного поля с опорной когерентной плоской волной места дислокации волнового фронта проявляются как точки ветвления в интерференционной картине (рис. 9.11).

Зависимость (20) экспериментально исследовалась в [27], где получено хорошее согласие с теорией (см. рис. 9.14).

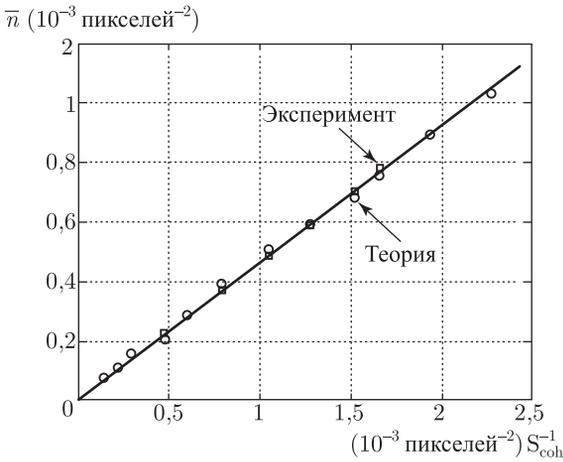


Рис. 9.14. Зависимость плотности дислокаций волнового фронта от площади когерентности: \square — экспериментальные данные, \circ — расчет по формуле (9.8.20). Масштаб по осям в пикселах⁻², умноженных на 10^{-3} . Заимствовано из [27]

Напомним, что изложенная теория дислокаций волнового фронта и результаты экспериментов [17, 27] относятся к статистически однородным полям; дислокации в неоднородных случайных полях, полученных на выходе волоконного световода, изучались в [28]. В работе [29] определен класс частично когерентных полей с оптическими вихрями, который может быть представлен как некогерентная суперпозиция мод Лагерра—Гаусса. Теоретически и экспериментально исследовались также особенности структуры случайного поля вблизи дислокации волнового фронта [27, 30, 31].

Дислокации корреляционных функций. Помимо рассмотренных выше дислокаций волнового фронта, случайные поля могут иметь

дислокации в пространственной корреляционной функции. Иначе говоря, сингулярные особенности могут встречаться в двухточечной пространственной корреляции при интерференции пары лучей, поля в которых полностью некоррелированы между собой. Впервые «ветвления» в интерференционной картине, связанные с дислокациями пространственной корреляционной функции наблюдали авторы работы [32]. Такие дислокации регистрируются при интерференции двух идентичных полей (см. рис. 9.15). На рис. 9.15, как и на рис. 9.11,

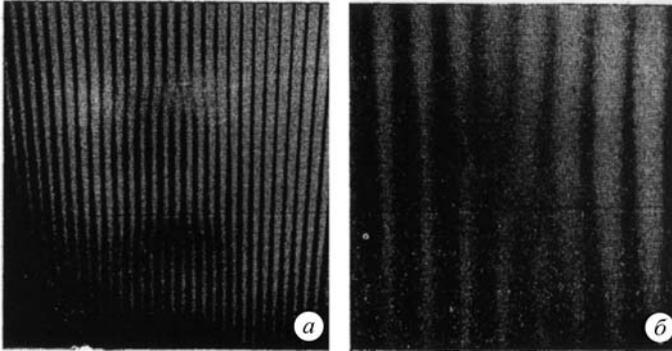


Рис. 9.15. Интерференционные картины при сложении двух идентичных случайных пучков: *а*) в поперечном сечении, *б*) в продольном сечении. Заимствовано из [32]

ветвления интерференционных полос происходят в нулях видности интерференционной картины. Так, случайное поле, дифрагирующее на круговой апертуре (см. § 3 этой главы) и описываемое пространственной корреляционной функцией вида (9.3.9), имеет нулевые значения корреляции и, следовательно, скачки фазы на $\pm 2\pi$ при $J_1(\psi)/\psi = 0$, где $\psi = k_0 a s / z$, a — радиус апертуры, z — расстояние от апертуры до плоскости наблюдения, s — поперечное расстояние между двумя репликами дифрагированного поля.

Для знакомства с теорией дислокаций в корреляционных функциях частично когерентных пучков следует обратиться к работам [33–35].

§ 8. Распространение световых пучков в неоднородных средах; метод Фейнмана интегрирования по траекториям

В неоднородных средах диэлектрическая проницаемость ϵ является функцией пространственных координат. С такими средами связан чрезвычайно широкий круг явлений в радиофизике, оптике, квантовой электронике и т. д. При этом можно выделить класс задач, связанных как с регулярными неоднородностями среды, так и задачи, связанные

с распространением волн в случайных средах. В настоящем параграфе мы кратко рассмотрим примеры задач обоих классов, используя общий подход к их решению.

Метод Фейнмана интегрирования по траекториям. В общем случае распространение монохроматических волн в неоднородной линейной среде без потерь описывается уравнением вида (ср. с (6.2.7))

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \Delta_{\perp}(\mathbf{r})E = \frac{\varepsilon(\mathbf{r}, z)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (9.8.1)$$

Как и выше в книге, ось имеет направление распространения волны, $\Delta_{\perp}(\mathbf{r})$ — поперечный лапласиан, $\varepsilon(\mathbf{r}, z)$ — диэлектрическая проницаемость среды, состоящая из постоянной ε_0 и изменяющейся в пространстве частей $\varepsilon_0 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$: $\varepsilon(\mathbf{r}, z) = \varepsilon_0(1 + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z))$. Распространение волн в неоднородной среде, в которой пространственные масштабы изменения диэлектрической проницаемости значительно больше длины волны, можно искать в виде [5]

$$E(\mathbf{r}, z) = A(\mathbf{r}, z)e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} + \text{к.с.} \quad (9.8.2)$$

В этом случае динамика комплексной амплитуды $A(\mathbf{r}, z)$ описывается следующим параболическим уравнением (ср. с (9.1.2))

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A + i \frac{1}{2} k_0 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z) A = 0. \quad (9.8.3)$$

Непосредственно уравнение (3) не удастся решить. Поэтому для его решения разработаны различные приближенные методы (см. [5–7, 14–16, 36, 37]). Здесь мы изложим применение метода интегрирования по траекториям, развитого Фейнманом для решения уравнений типа (3) [38]. Метод Фейнмана позволяет записать значение амплитуды $A(\mathbf{r}, z)$ волны на выходе неоднородной среды через значение на входе $A^{(0)}(\mathbf{r})$. Конкретный вид зависимости $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$ при этом не важен, т. е. функция $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$ может быть либо регулярной, либо случайной.

Будем искать решение уравнения (3) в виде (ср. с (9.1.5))

$$A(\mathbf{r}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) H(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{r}; z) d^2 \rho, \quad (9.8.4)$$

где функция Грина $H(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{r}; z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial H}{\partial z} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp}(\boldsymbol{\rho}) H + i \frac{1}{2} k_0 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z) H = 0 \quad (9.8.5)$$

и граничному условию

$$H(\boldsymbol{\rho}; \mathbf{r}; z = 0) = \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}). \quad (9.8.6)$$

Для нахождения решения уравнения (5) обратимся сначала к случаю однородной среды ($\tilde{\varepsilon} \equiv 0$); получающееся при этом известное решение обозначим как

$$H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = i(k_0/2\pi z) \exp\{-ik_0(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2/2z\}. \quad (9.8.7)$$

Нетрудно убедиться, что функция Грина (7) удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) d^2\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = 1, \quad (9.8.8)$$

$$H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z_1 + z_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1; z_1) H_0(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}; z_2) d^2\rho_1. \quad (9.8.9)$$

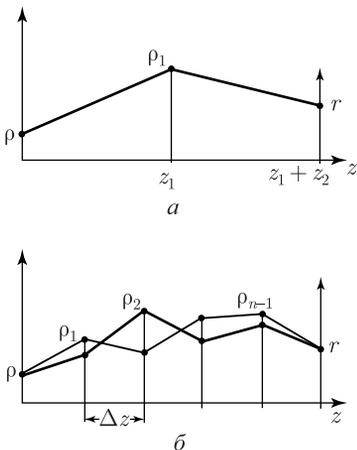


Рис. 9.16. К выводу интеграла по траекториям

Следуя Фейнману, соотношениям (8) и (9) можно дать вероятностную интерпретацию. В соответствии с условием (8), аналогичным условию нормировки (1.1.2а) для функции распределения плотности вероятности, комплексную функцию (7) будем рассматривать как амплитуду вероятности перехода луча из точки $\boldsymbol{\rho}$ в точку \mathbf{r} , разделенных расстоянием z вдоль направления распространения волны. Тогда произведение $H_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1; z_1)H_0(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}; z_2)$ является аналогом двумерного распределения (1.2.24), т. е. представляет собой двумерное распределение амплитуды вероятностей. При этом соотношение (9) не что иное, как условие соответствия типа (1.2.5).

Таким образом, согласно (9) амплитуда вероятности того, что луч, выходящий из точки $\boldsymbol{\rho}$ в сечении среды $z = 0$, попадает в точку \mathbf{r} сечения среды $z = z_1 + z_2$, равна сумме амплитуд вероятностей по всем возможным траекториям, проходящим через точки ρ_1 в сечении $z = z_1$ (рис. 9.16)

Теперь разделим расстояние z на n отрезков длиной Δz , т. е. $z = n\Delta z$. Используя многократно соотношение (9), можно записать функцию Грина для всего отрезка $[0, z]$

$$H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z = n\Delta z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_1; \Delta z) H_0(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2; \Delta z) \dots \\ \dots H_0(\boldsymbol{\rho}_{n-2}, \boldsymbol{\rho}_{n-1}; \Delta z) H_0(\boldsymbol{\rho}_{n-1}, \mathbf{r}; \Delta z) d^2\rho_1 d^2\rho_2 \dots d^2\rho_{n-1}. \quad (9.8.10)$$

Физический смысл этого выражения таков. Луч из точки $\boldsymbol{\rho}$ в сечении $z = 0$ попадает в точку \mathbf{r} в сечении z , проходя через последовательность промежуточных точек $\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \dots, \boldsymbol{\rho}_{n-1}$ (рис. 9.16). Интегрирование в (10) производится по всевозможным промежуточным траекториям.

При стремлении размера отрезка Δz к нулю число интегралов n в (10) стремится к бесконечности. Результат такого перехода записывают в символическом виде

$$H_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = \int \Phi(\boldsymbol{\rho}(z)) \mathcal{D}^2\rho(z), \quad (9.8.11)$$

где

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}(z)) = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ n\Delta z = z}} \exp\{-i(k_0/2\Delta z)[(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_1)^2 + (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)^2 + \dots \\ + (\boldsymbol{\rho}_{n-1} - \mathbf{r})^2]\} = \exp\left\{-i\frac{1}{2}k_0 \int_0^z (d\rho/ds)^2 ds\right\}, \quad (9.8.12)$$

$$\mathcal{D}^2\rho(z) = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ n\Delta z = z}} (ik_0/2\pi\Delta z)^{n-1} d^2\rho_1 d^2\rho_2 \dots d^2\rho_n.$$

Выражение (11) является другой записью функции Грина (7) для однородной среды. Наша цель — получить функцию Грина для неоднородной среды, для уравнения (6). Мы поступаем следующим образом. На бесконечно малых интервалах Δz неоднородность среды будем учитывать методом возмущений, т. е. полагаем

$$H(\boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}; z) = H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}; z) + \delta H(\boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}; z). \quad (9.8.13)$$

Малая поправка δH в соответствии с (6) определяется уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i\frac{1}{2k_0}\Delta_{\perp}\right)\delta H = -i(k_0/2)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \mathbf{r}; z),$$

решение которого

$$\delta H(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; z) = \\ = -i\frac{k_0}{2} \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}_{j+1}, \boldsymbol{\rho}'; \Delta z - z')\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}', z')H_0(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}_j; z') d^2\rho'. \quad (9.8.14)$$

Поскольку функция $H_0(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}_j; \Delta z)$ сильно локализована (вследствие малости Δz), интеграл (14) можно оценить методом перевала. В результате имеем

$$\begin{aligned} \delta H(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{j}_{j+1}; \Delta z) &\approx \\ &\approx -i \frac{k_0}{2} \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_0, z') \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(\boldsymbol{\rho}_{j+1}, \boldsymbol{\rho}'; \Delta z - z') H_0(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}_j; z') d^2 \boldsymbol{\rho}', \end{aligned} \quad (9.8.15)$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_0 = [z' \boldsymbol{j}_{j+1} + (\Delta z - z') \boldsymbol{\rho}_j] / \Delta z$$

есть координата стационарной точки. Учитывая свойство (9), вместо (15) можно написать

$$\begin{aligned} \delta H(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) &\approx -i \frac{k_0}{2} H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_0, z') dz' \approx \\ &\approx -i \frac{1}{2} k_0 H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_j, z') dz'. \end{aligned} \quad (9.8.16)$$

В правой части соотношения (16) принято во внимание малость Δz , так что $\boldsymbol{\rho}_0 \approx \boldsymbol{\rho}_j$.

Для функции (13) таким образом получаем

$$H(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) = \left\{ 1 - i \frac{1}{2} k_0 \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_j, z') dz' \right\} H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z), \quad (9.8.17a)$$

или опять же вследствие малости Δz (17a) можно преобразовать к виду

$$H(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) \approx H_0(\boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_{j+1}; \Delta z) \exp \left\{ -i(k_0/2) \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_j, z') dz' \right\}. \quad (9.8.17б)$$

Из полученного результата следует, что учет неоднородности среды на каждом интервале траектории луча сводится к умножению функции Грина однородной среды на величину $\exp\{-i(k_0/2) \int_{j\Delta z}^{(j+1)\Delta z} \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_j, z') dz'\}$.

Итак, для неоднородной среды функция Грина при $\Delta z \rightarrow 0$ будет определяться континуальным (бесконечномерным) интегралом, называемым также интегралом по траекториям, (ср. с (11))

$$H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = \int \Phi(\boldsymbol{\rho}(z)) \exp\left\{-i(k_0/2) \int_0^z \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}(s), s) ds\right\} \mathcal{D}^2 \boldsymbol{\rho}(z). \quad (9.8.18)$$

Выражения (4) и (18) дают формально точное решение задачи о распространении волн в неоднородных средах.

В настоящем параграфе применение интегралов по траекториям будет проиллюстрировано на примере как случайной среды, так и среды с регулярными неоднородностями. Отметим, что с помощью метода интегрирования по траекториям удастся решить некоторые статистические задачи нелинейной оптики [40, 41].

Световой пучок в случайной среде. Рассмотрим сначала распространение светового пучка с исходной регулярной амплитудой в статистически неоднородной среде. Пусть $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$ — случайный гауссовский процесс с корреляционной функцией вида

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1, z) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2, z) \rangle = B_\varepsilon(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \delta(z_2 - z_1) \quad (9.8.19)$$

и средним значением $\langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z) \rangle = 0$.

Среднее значение амплитуды волны в случайной среде определяется формулой

$$\langle A(\mathbf{r}, z) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) \langle H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) \rangle d^2 \boldsymbol{\rho}, \quad (9.8.20)$$

где

$$\langle H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) \rangle = \int \Phi(\boldsymbol{\rho}(z)) \langle e^{-i(k_0/2) \int_0^z \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}(s), s) ds} \rangle \mathcal{D}^2 \boldsymbol{\rho}(z). \quad (9.8.21)$$

Под интеграл (21) входит характеристическая функция случайного гауссовского процесса, поэтому, пользуясь (1.1.43) и (19), находим

$$\begin{aligned} \left\langle \exp\left\{-i(k_0/2) \int_0^z \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}(s), s) ds\right\} \right\rangle &= \exp\left\{-\left(k_0^2/8\right) \int_0^z \int_0^z B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}(s'') - \boldsymbol{\rho}(s')) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta(s'' - s') ds'' ds'\right\} = \exp\left\{-\left(k_0^2/8\right) B_\varepsilon(0)z\right\}. \end{aligned} \quad (9.8.22)$$

Следовательно, среднее можно вынести из-под интеграла (21); оставшийся при этом интеграл по траекториям есть функция Грина для однородной среды.

Для средней комплексной амплитуды, таким образом, получаем

$$\langle A(\mathbf{r}, z) \rangle = e^{-(k_0^2/8) B_\varepsilon(0)z} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^{(0)}(\boldsymbol{\rho}) H_0(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{r}; z) d^2 \boldsymbol{\rho}. \quad (9.8.23)$$

Отсюда видно, что флуктуации диэлектрической проницаемости среды приводят к затуханию средней амплитуды светового пучка, причем влияние дифракции и затухания аддитивны. Это хорошо известный результат в теории распространения волн в случайных средах.

Расчеты средней интенсивности и корреляционных функций поля и интенсивности в случайной среде оказываются более сложными. Так, корреляционная функция поля определяется выражением

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \langle A(\mathbf{r}_1, z)A^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle = \iint A^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_0)A^{(0)*}(\boldsymbol{\rho}_2)\langle H(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1; z)H^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_2; z) \rangle d^2\rho_1 d^2\rho_2, \quad (9.8.24)$$

где

$$\langle H(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_1; z)H^*(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{r}_2; z) \rangle = \iint \Phi(\boldsymbol{\rho}_1(z))\Phi^*(\boldsymbol{\rho}_2(z))C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1(z), \boldsymbol{\rho}_2(z))\mathcal{D}^2\rho_1(z)\mathcal{D}^2\rho_2(z), \quad (9.8.25)$$

$$C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1(z), \boldsymbol{\rho}_2(z)) = \exp\left\{-\left(k_0^2/4\right)\left[B_\varepsilon(0)z - \int_0^z B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1(s) - \boldsymbol{\rho}_2(s)) ds\right]\right\}. \quad (9.8.26)$$

В общем случае (25) учитывает искривление траекторий лучей за счет неоднородностей среды. Если же масштаб поперечной корреляции неоднородностей среды не превышает радиус пучка, то искривлением лучей можно пренебречь за счет неоднородностей среды (среда выступает в качестве «распределенного» фазового экрана). Другими словами, в этом случае в (26) допустима замена

$$\int_0^z B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1(s) - \boldsymbol{\rho}_2(s)) ds = \int_0^z B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1(0) - \boldsymbol{\rho}_2(0)) ds = B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)z, \quad (9.8.27)$$

а интегралы по траекториям опять представляют собой функции Грина для однородной среды. Окончательное выражение для корреляционной функции (24) принимает такой вид:

$$B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \iint A^{(0)}(\boldsymbol{\rho}_1)A^{(0)*}(\boldsymbol{\rho}_2)H_0(\boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{r}_1; z)H_0^*(\boldsymbol{\rho}_2 - \mathbf{r}_2; z) \times \exp\left\{-\left(k_0^2/4\right)[B_\varepsilon(0) - B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2)]z\right\} d^2\rho_1 d^2\rho_2. \quad (9.8.28)$$

То, что в рассматриваемом приближении слой статистически неоднородной среды проявляет себя как «распределенный» фазовый экран, хорошо видно из сравнения выражения (28) с (9.6.9). В данном случае, однако, эквивалентом дисперсии фазовых флуктуаций выступает величина

$$\sigma_{\Phi, \text{экр}}^2 = \frac{1}{4} k_0^2 B_\varepsilon(0)z. \quad (9.8.29)$$

Видно, что дисперсия фазовых флуктуаций пропорциональна толщине слоя неоднородной среды z и дисперсии флуктуаций диэлектрической

проницаемости $B_\varepsilon(0)$. Отметим также, что в (28) учитывается эффект дифракции на длине z . Дальнейший анализ выражения (28) можно выполнить по аналогии с таковым, изложенным в § 6 настоящей главы.

Распространение случайных волн в оптических волокнах. Рассматриваемая задача относится к классу задач о распространении волн в средах с регулярными неоднородностями. Будем считать, что среда имеет квадратичный закон изменения диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(\mathbf{r}, z) = \varepsilon_0(1 - q^2 \mathbf{r}^2), \quad \tilde{\varepsilon} = -q^2 \mathbf{r}^2. \quad (9.8.30)$$

Параметр q определяет скорость изменения $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}, z)$ ¹⁾.

В рассматриваемом случае функция Грина (18) неоднородной среды принимает вид

$$H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = \int \exp \left\{ -i \frac{1}{2} k_0 \left[\int_0^z L \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}, \boldsymbol{\rho}(s) \right) ds \right] \right\} \mathcal{D}^2 \rho(s), \quad (9.8.31)$$

где введено

$$L \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}, \boldsymbol{\rho}(s) \right) = \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds} \right)^2 - q^2 \boldsymbol{\rho}^2(s). \quad (9.8.32)$$

Максимальный вклад в (31) дают траектории, для которых

$$\int_0^z L \left(\frac{d\boldsymbol{\rho}}{ds}, \boldsymbol{\rho}(s) \right) ds = \min. \quad (9.8.33)$$

Для этих траекторий функция L удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\rho}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\rho}} = 0 \quad \left(\dot{\boldsymbol{\rho}}(s) = \frac{d\boldsymbol{\rho}(s)}{ds} \right). \quad (9.8.34)$$

Отсюда, учитывая (32), получаем уравнение для «оптимальных» траекторий

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}(s) + q^2 \boldsymbol{\rho}(s) = 0, \quad (9.8.35)$$

которое представляет собой векторное уравнение для гармонического осциллятора и которое следует решать с граничными условиями

$$\boldsymbol{\rho}_0(s=0) = \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho}_0(s=z) = \mathbf{r}. \quad (9.8.36)$$

В результате для «оптимальных» траекторий получаем выражение

$$\boldsymbol{\rho}_0(s) = \boldsymbol{\rho} \cos qs + (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho} \cos qz) \frac{\sin qs}{\sin qz}. \quad (9.8.37)$$

Траектории, вклад которых в функцию Грина (31) не является минимальным, т. е. «неоптимальные» траектории, представим как

$$\boldsymbol{\rho}(s) = \boldsymbol{\rho}_0(s) + \boldsymbol{\eta}(s). \quad (9.8.38)$$

¹⁾ Далее для краткости такую среду называем средой с квадратичной неоднородностью.

При этом

$$\mathcal{D}^2 \rho(s) = \mathcal{D}^2 \eta(s), \quad (9.8.39)$$

поскольку для каждого значения s $\rho(s)$ и $\eta(s)$ отличаются на постоянную величину. Граничные условия для функции $\eta(s)$ очевидны:

$$\eta(s=0) = \eta(s=z) = 0. \quad (9.8.40)$$

Таким образом функция (31) примет вид

$$H(\rho, \mathbf{r}; z) = F(z) \exp \left\{ -i \frac{k_0}{2} \int_0^z [(\dot{\rho}_0(s))^2 - q^2 \rho_0^2(s)] ds \right\}, \quad (9.8.41)$$

$$F(z) = \int_0^{(0)} e^{-i \frac{k_0}{2} \int_0^z [(\dot{\rho}(s))^2 - q^2 \dot{\eta}(s)] ds} \mathcal{D}^2 \eta(s). \quad (9.8.42)$$

Расчет экспоненциального множителя в (41) с учетом (37) приводит к следующему выражению

$$e^{-i \frac{k_0}{2} \int_0^z [(\dot{\rho}_0(s))^2 - q^2 \rho_0^2(s)] ds} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \frac{k_0 q}{\sin qz} [(\rho^2 + \mathbf{r}^2) \cos qz - z \rho \mathbf{r}] \right\}. \quad (9.8.43)$$

Теперь вычислим интеграл по траекториям (42), следуя методу, изложенному в [38]. Функция (42) зависит только от z . Все траектории выходят из точки 0 с координатой $s=0$ и возвращаются в эту точку при $s=z$ и, следовательно, функцию $\eta(s)$ можно представить в виде суммы гармоник

$$\eta(s) = \sum_n \mathbf{a}_n \sin \frac{n\pi s}{z}. \quad (9.8.44)$$

В каждом сечении среды s траектории η теперь можно рассматривать как функцию коэффициентов a_n , а не как функцию η . Это преобразование будет определяться некоторым якобианом J . Интегрирование в экспоненте (42) с учетом (44) дает

$$\int_0^z [(\dot{\eta}(s))^2 - q^2 \eta^2(s)] ds = \frac{z}{2} \sum_n \left[\left(\frac{n\pi}{z} \right)^2 - q^2 \right] a_n^2. \quad (9.8.45)$$

Если предположить, что расстояние z разделено на N интервалов длиной Δz (фактически мы осуществляем переход от континуального интеграла к N -кратному интегралу), то функция (42) примет вид (см. (11) и (12))

$$F(z) = J \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -i(k_0 z/2) \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{n\pi}{z} \right)^2 - q^2 \right] a_n^2 \right\} \times \\ \times (ik_0/2\pi \Delta z)^N d\mathbf{a}_1 \dots d\mathbf{a}_N. \quad (9.8.46)$$

Через J обозначен упомянутый выше якобиан преобразования при переходе от $d\eta_1 d\eta_2 \dots d\eta_n$ к $da_1 da_2 \dots da_n$. Интеграл (46) легко вычисляется, а результат запишем в виде

$$F(z) = C_N(z) \prod_{n=1}^N \left[1 - \frac{(qz)^2}{n^2 \pi^2} \right]^{-1}. \quad (9.8.47)$$

Здесь $C_N(z)$ обозначает величину, не зависящую от q . Для бесконечного произведения справедлива формула (см. [42], с. 51)

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{p^2}{n^2} \right] = \frac{1}{\Gamma(p+1)\Gamma(1-p)} = \frac{1}{p\Gamma(p)\Gamma(1-p)} = \frac{\sin \pi p}{\pi p}, \quad (9.8.48)$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция. Окончательное выражение для (46) при $N \rightarrow \infty$ принимает вид

$$F(z) = C(z) \frac{qz}{\sin qz}. \quad (9.8.49)$$

Значение $C(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_N(z)$, его можно найти при стремлении $q \rightarrow 0$, т. е. для случая однородной среды; это значение равно (см. (9.1.4))

$$C(z) = \frac{ik_0}{2\pi z}. \quad (9.8.50)$$

Совокупность полученных выражений (50), (49) и (43) определяет функцию Грина (41) для среды с квадратичной неоднородностью. Ее удобно записать в виде

$$H(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}; z) = i \frac{k_0 p(z)}{2\pi z} \exp\{-i[\varphi(\boldsymbol{\rho}, z) + \varphi(\mathbf{r}, z) - k_0 p(z) \boldsymbol{\rho} \mathbf{r}]\}, \quad (9.8.51)$$

где

$$p(z) = \frac{qz}{\sin z}, \quad \varphi(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{k_0}{2z} p(z) \cos qz. \quad (9.8.52)$$

Общее решение (4) с функцией Грина (51) позволяет рассмотреть распространение в таких средах как детерминированных, так и случайных световых пучков.

Рассчитаем поперечную (пространственную) корреляционную функцию поля в квадратично-неоднородной среде

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp 0}(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_1) H(\boldsymbol{\rho}_1, \mathbf{r}_1; z) H^*(\boldsymbol{\rho}_2, \mathbf{r}_2; z) d^2 \rho_1 d^2 \rho_2. \quad (9.8.53)$$

Пусть падающий пучок δ -коррелирован в пространстве (см. (9.3.4))

$$B_{\perp 0}(\rho_1, \rho_2) = \langle A^{(0)}(\rho_1) A^{(0)*}(\rho_2) \rangle = h^2 I(\rho_1) \delta(\rho_1 - \rho_2).$$

Тогда корреляционная функция (53) дается выражением (см. также [3, 39])

$$B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z) = \left(\frac{hq}{\lambda \sin qz} \right)^2 \exp\{-i[\varphi(\mathbf{r}_1, z) - \varphi(\mathbf{r}_2, z)]\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} I(\rho) \exp\left\{i \frac{p(z)k_0}{z} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\boldsymbol{\rho}\right\} d^2\rho. \quad (9.8.54)$$

При $q = 0$ ($p = 1$) из (54) получаем результат (9.3.5) для однородно среды. Выражением (54) представляет собой, таким образом, обобщение теоремы Ван Циттерта—Церника на среды с квадратичной неоднородностью в поперечном сечении. По существу, отличие (54) от случая однородной среды состоит в замене расстояния z на некоторое эффективное расстояние $z_{\text{эфф}} = \frac{z}{p(z)} = \frac{1}{q} \sin qz$. Отсюда ясно, что когерентные свойства волны являются периодической функцией расстояния z . Это обусловлено тем обстоятельством, что среда с квадратичной неоднородностью действует как линза и, следовательно, на определенном расстоянии воспроизводит характеристики падающего излучения (см. (9.5.12)).

Если на рассматриваемую неоднородную среду падает пространственно некогерентный пучок радиуса a с равномерным распределением интенсивности, то, пользуясь формулой (9.3.10), можно сразу, не интегрируя (54), написать выражение для степени пространственной когерентности поля:

$$|\gamma(s; z)| = |2J_1(\tilde{s})/\tilde{s}|, \quad \text{где } \tilde{s} = k_0 a q s / \sin qz.$$

Радиус корреляции равен (ср. с (9.3.12))

$$r_k = 0,16\lambda |\sin qz| / aq. \quad (9.8.55)$$

Изменение r_k с расстоянием в однородной и неоднородной средах показано на рис. 9.17.

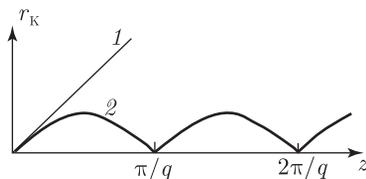


Рис. 9.17. Зависимость радиуса корреляции первоначально δ -коррелированного пучка от расстояния:

1 — в однородной среде; 2 — в среде с квадратичной неоднородностью

Формула (53) допускает анализ распространения пучков с начальным ненулевым радиусом корреляции в средах с квадратичной неоднородностью, например пучков, имеющих корреляционную функцию вида (9.4.2). Получим для этого случая выражение для пространственной корреляционной функции (28). Подставив (9.4.2) и (51) в (53) и беря интеграл вида (9.4.4), для модуля корреляционной функции имеем

$$|B_{\perp}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; z)| = I_0 u^{-2}(z) \exp \left\{ -\frac{1}{u^2(z)} \left(\frac{\mathbf{r}_1^2 + \mathbf{r}_2^2}{a^2} + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}{r_0^2} \right) \right\},$$

где

$$u^2(z) = \left[\cos qz + \left(\frac{\alpha_0}{k_0 q} \right) \sin qz \right]^2 + (ql_d)^{-2} \sin^2 ql.$$

Дифракционная длина l_d дается выражением (9.4.7).

Изменение радиуса пучка и радиуса корреляции в процессе распространения определяется формулами (9.4.10). Таким образом, в среде с квадратичной неоднородностью указанные параметры в общем случае изменяются периодически (рис. 9.18). Причем период не зависит от

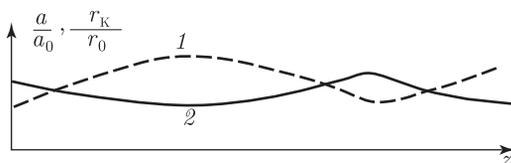


Рис. 9.18. Изменение в среде с квадратичной неоднородностью радиуса пучка и радиуса корреляции:

1) $ql_d < 1$; 2) $ql_d > 1$

начальной фазы ($\alpha_0 \neq 0$) корреляционной функции (9.4.2). При $l_d = q^{-1}$ и $\alpha_0 = 0$ дифракционные эффекты уравниваются фокусирующей способностью среды, и параметры частично когерентного пучка остаются неизменными в неоднородной среде. Заметим, что в [3, 39] решение рассмотренной задачи дано с помощью разложения случайного поля по эрмит-гауссовским модам [22].

Литература к главе 9

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М.: Наука, 1979.
2. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
4. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
5. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, т. 1 и т. 2, 1981.

7. Гурвич А. С., Кон А. И., Миронов В. Л., Хмелевцов С. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
8. Лобкова Л. М. Статистическая теория антенн сверхвысоких и оптических частот. — М.: Связь, 1975.
9. Martienssen W., Spiller E. — Amer. J. Phys., 1964, v. 32, p. 919.
10. Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов / Под ред. Г. Камминса и Э. Пайка: Пер. с англ. / Под ред. Ф. В. Бункина. — М., 1978.
11. Кросиньяни Б., Ди Порто П., Бертолотти М. Статистические свойства рассеянного света: Пер. с англ. — М., 1980.
12. Estes L., Narducci L., Tuft R. — J. Opt. Soc. Amer., 1971, v. 61, p. 1301.
13. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. — М., 1970.
14. Кравцов Ю. А., Рытов С. М., Татарский В. И. — УФН, 1975, т. 115, с. 239.
15. Прохоров А. М., Бункин Ф. В., Гочелашвили К. С., Шишов В. И. — УФН, 1974, т. 114, с. 415.
16. Денисов Н. Г. — Изв. вузов. Радиофиз., 1961, т. 4, с. 630.
17. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 206; ЖЭТФ, 1982, т. 83, с. 1702.
18. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
19. Soskin M. S., Vasnetsov M. V. Prog. Opt., 2001, v. 42, p. 219.
20. Короленко П. В. Оптические вихри // Соросовский образовательный журнал, 1998, № 6, с. 94.
21. Короленко П. В. Оптика когерентного излучения. — М.: Изд-во МГУ, 1998.
22. Быков В. П., Силичев О. О. Лазерные резонаторы. — М.: Физматлит, 2003.
23. Nye J. F., Berry M. V. Proc. Royal Soc. London A, 1974, v. 336, p. 165.
24. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я. ЖЭТФ, 1981, т. 80, с. 1789.
25. Berry M. V., Dennis M. R. Proc. Royal Soc. London A, 2000, v. 456, p. 2059.
26. Shvartsman N., Freund I. Phys. Rev. Letters, 1994, v. 72, p. 1008.
27. Wang W., Hanson S. G., Miyamoto Yoko, Takeda M. Phys. Rev. Letters, 2005, v. 94, p. 103902.
28. Абдуллаев С. С., Ахмаджанов Т., Ташпулатов З. Т., Хабибулаев П. К. Квант. электроника, 1986, т. 13, с. 1042.
29. Popomarenko S. A. J. Opt. Soc. Am. A, 2001, v. 18, p. 150.
30. Zhang Sh., Genac A. Phys. Rev. Letters, 2007, v. 99, p. 203901.
31. Egorov R. I., Soskin M. S., Kessler D. A., Freund I. Phys. Rev. Letters, 2008, v. 100, p. 103901.
32. Клименко И. С., Рябухо В. П., Федудеев Б. В. Ж. техн. физики, 1985, т. 55, с. 980.
33. van Dijk T., Schouten H. F., Visser T. D. Phys. Rev. A, 2009, v. 79, p. 033805.
34. Maleev I. D., Palacios D. M., Marathay, Swartzlander G. A., jr. J. Opt. Soc. Am. B, 2004, v. 21, p. 1895.

35. *Gbur G., Swartzlander G.A., jr.* J. Opt. Soc. Am. B, 2008, v. 25, p. 1422.
36. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001.
37. *Чернов Л.А.* Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975.
38. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.
39. *Agrawal G.P., Ghatak A.K., Mehta C.L.* Opt. Commun, 1974, v. 12, p. 333.
40. *Фаттахов А.М., Чиркин А.С.* Квантовая электрон., 1984, т. 11, с. 2349.
41. *Чиркин А.С., Юсубов Ф.М.* Вестник МГУ. Серия физ., астроном., 1985, т. 26, № 4, с. 57.
42. *Градиштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1963.

НЕМОНОХРОМАТИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПУЧКИ

§ 1. Введение. Общее уравнение для случайных волн

В предыдущих главах 7, 8 и 9 выполнен анализ приближенных уравнений, описывающих распространение в линейной среде волн, случайно модулированных только во времени или только в пространстве. Хотя на практике обычно приходится иметь дело со случайными волнами, модулированными одновременно в пространстве и времени, раздельное рассмотрение эффектов частичной пространственной и временной когерентности очень часто вполне оправдано. Как будет показано ниже, это связано с существенным различием в темпе проявления эффектов, связанных с временной и пространственной модуляциями. Вместе с тем для целого ряда задач оказывается необходимым одновременный учет обоих видов модуляций.

В этом случае можно исходить из нестационарного уравнения для комплексного поля (6.3.11) в вакууме:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \theta \partial z} - \frac{c}{2} \Delta_{\perp} E = 0, \quad (10.1.1)$$

$$\theta = t - z/c, \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

или из уравнения для комплексной амплитуды

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{i}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + i \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp} A = 0, \quad (10.1.2)$$

которое получается, если пользоваться уравнениями (6.3.6) и (6.3.20), полагая в них производные одного порядка. Общее уравнение (2) записано в квазиоптическом приближении и во втором приближении теории дисперсии.

§ 2. Влияние немонохроматичности волны на пространственную когерентность

Начнем с рассмотрения задачи, как неполная временная когерентность волны может влиять на пространственную когерентность [1, 2, 17].

Физика эффекта заключается в следующем. Как мы выяснили, анализируя теорему Ван Циттерта—Цернике (§ 3 гл. 9), изменение радиуса корреляции в процессе распространения связано с дифракцией пучка конечной апертуры. Естественно, что если мы имеем дело с немонохроматическим излучением, различные спектральные компоненты частотного спектра дифрагируют по-разному. Это приводит к отличию дифракционной картины от таковой для случая монохроматической волны.

Здесь возникает и другой вопрос. Пусть пространственно-временная корреляционная функция поля источника распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций. Сохраняется ли это свойство в любой точке пространства для практически реализуемых параметров?

Итак, предположим, что в плоскости $z = 0$ пространственно-временная корреляционная функция поля распадается на произведение пространственной и временной корреляционных функций; в координатах (9.2.3) имеем

$$B_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \tau) = B_{\perp 0}(\mathbf{r}, \mathbf{R})B_0(\tau). \quad (10.2.1)$$

Применив к (1) преобразование Фурье, получим

$$B_0(\mathbf{r}, \mathbf{R}; \omega) = G^{(0)}(\omega)B_{\perp 0}(\mathbf{r}, \mathbf{R}), \quad (10.2.2)$$

где функция $B_{\perp}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ дается выражением (9.3.4), $G^{(0)}(\omega)$ — спектральная плотность. Поле в плоскости источника излучения δ -коррелировано в пространстве. В случае стационарного поля для каждой спектральной компоненты на основе результатов § 4 гл. 9 можно записать

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \omega; z) = G^{(0)}(\omega)B_{\perp}(\mathbf{r}, \mathbf{R}; z). \quad (10.2.3)$$

Предположим также для простоты, что среда недиспергирующая ($k = \omega/c$). Тогда согласно (3) и (9.3.5) пространственно-временная корреляционная функция в среде равна

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau; z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} B(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \omega; z)e^{-i\omega\tau} d\omega = \\ &= -\left(\frac{h}{2\pi cz}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(0)}(\omega)I(\mathbf{R}')e^{i\omega f} d^2R', \end{aligned} \quad (10.2.4)$$

где

$$f = \frac{1}{cz} \mathbf{r}(\mathbf{R}' - \mathbf{R}) - \tau.$$

Для квазимонохроматического поля со средней частотой ω_0 ($G^{(0)}(\omega) = G^{(0)}(\omega - \omega_0)$) выражение (4) можно упростить:

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau; z) = \left(\frac{h\omega_0}{2\pi cz}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} I(\mathbf{R}') e^{i\omega_0 f} \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(0)}(\Omega) e^{i\Omega f} d\Omega d^2 R'. \quad (10.2.5)$$

Для гауссовского спектра поля, т. е. временной корреляционной функции (7.2.3), последний интеграл в (5) равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(\Omega) e^{i\Omega f} d\Omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \tau_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau_0^2 \Omega^2 + i f \Omega} d\Omega = e^{-f^2/4\tau_0^2}$$

(через τ_0 обозначено время корреляции исходного излучения). Следовательно, выражение (5) принимает вид

$$B(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \tau; z) = \left(\frac{h\omega_0}{2\pi cz}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{R}') e^{-f^2/4\tau_0^2 + i\omega_0 f} d^2 R'. \quad (10.2.6)$$

Отсюда следует, что при $z \neq 0$ запись корреляционной функции поля в виде произведения временной и пространственной корреляционных функций остается справедливой при условии

$$|f + \tau| = |\mathbf{r}(\mathbf{R}' - \mathbf{R})/cz| \ll \tau_0,$$

которое в координатах $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ (9.2.3) и при $r_1 = 0, r_2 = s$ можно записать как

$$sa/z \ll c\tau_0, \quad s^2/z \ll c\tau_0, \quad (10.2.7a, б)$$

где a — размер источника.

Подстановка в (7) вместо текущей координаты s радиуса корреляции r_k (например, выражения (9.3.7) для монохроматического поля) показывает, что условие (7a) выполняется всегда ($ck_0\tau_0 \gg 1$ или $\omega_0\tau_0 \gg 1$), а для выполнения условия (7б) необходимо, чтобы

$$z \ll l_0, \quad l_0 = (a\omega_0)^2 c^{-1} \tau_0 \approx (\omega_0/\Delta\omega) k a^2. \quad (10.2.8)$$

Таким образом, неполная временная когерентность поля не влияет на пространственную когерентность при выполнении (8). Радиус корреляции при этом пропорционален пройденному расстоянию z (9.3.7).

Оценим характерную длину l_0 . Пусть радиус источника излучения $a = 1$ см, $\Delta\omega/\omega_0 \approx 10^{-4}$ и $k = 10^5$ см $^{-1}$; тогда $l_0 \approx 10^9$ см. Следовательно, в практических случаях временная немонахроматичность излучения не оказывает влияния на пространственную когерентность, а произведение временной и пространственной корреляционных функций дает пространственно-временную корреляционную функцию поля.

В другом предельном случае, $z \gg l_0$, согласно (6)

$$B(s, \tau; z) \sim \exp \left\{ -\frac{1}{4} \frac{s^2}{cz\tau_0} \right\}$$

и радиус корреляции оценивается как

$$r_k \approx 2(c\tau_0 z)^{1/2}, \quad (10.2.9)$$

т. е. пропорционален корню квадратному из длины z (см. также рис. 10.1).

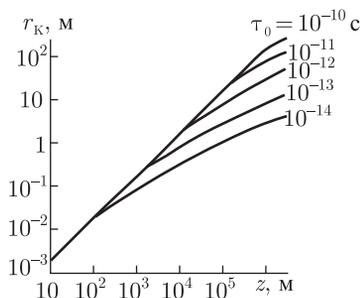


Рис. 10.1. Зависимость радиуса корреляции некогерентного излучения от расстояния z при различных временах корреляции τ_0 . Заимствовано из [1]

Временная некогерентность изменяет, таким образом, закон роста радиуса корреляции с увеличением расстояния. Естественно, что пространственная некогерентность влияет в свою очередь на временную когерентность поля (см. (6)).

§ 3. Дифракционные изменения частотного спектра излучения пространственно ограниченных источников; эффект Вольфа

Внимание к дифракционному изменению спектра некогерентного волнового пучка привлекла работа [3], в которой отмечался универсальный характер этого эффекта и его фундаментальное значение, например, в метрологии. В результате появилось довольно много работ, посвященных теоретическому и экспериментальному изучению этого интересного и, как оказалось, во многом неожиданного волнового явления (см. рис. 10.2), которое вызывало оживленные дискуссии (см. [4–7] и приведенную там литературу). Сообщалось также о наблюдении этого эффекта в оптических [8–12] и акустических [13] экспериментах.

По мнению одних авторов изменение спектра вдоль трассы распространения пучка связано с пространственной корреляцией (частичной пространственной когерентностью) источника излучения [3, 8–12, 14], по мнению других — просто с дифракцией [4–6]. По нашему

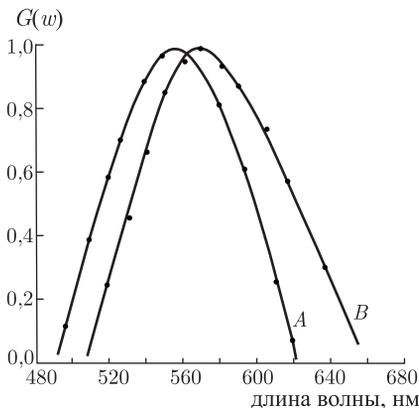


Рис. 10.2. Спектр источника в плоскости наблюдения без ограничивающей апертуры (A) и с апертурой (B) на пути от источника к плоскости наблюдения. Заимствовано из [9]

мнению, главным эффектом здесь все же следует признать дифракцию, связанную с ограниченными размерами источника: в случае ее ослабления при увеличении размеров источника исчезает — при любой корреляции — и изменение частотного спектра (см. ниже формулы (31), (47)). Поэтому мы будем говорить о дифракционном изменении спектра (ДИС) в условиях произвольной когерентности.

ДИС или эффект Вольфа проявляется в том, что при распространении излучения происходит пространственное перераспределение частот, т.е. образование дифракционных спектров. Результаты работы [3] продемонстрировали, насколько существенно влияет на ДИС когерентность источника, которая для ω -компоненты частотного спектра пучка определяется пространственной корреляционной функцией $R(\omega, \mathbf{s}, \mathbf{s} - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Оказалось, что при выполнении условия

$$R(\omega, \mathbf{s}) = h(\omega \mathbf{s}) \quad (10.3.1)$$

(закон масштабирования) ДИС не возникает вообще, несмотря на дифракцию. Условие (1) соответствует распространению излучения в пустоте; в случае распространения пучка в диспергирующей среде оно принимает вид

$$R(\omega, \mathbf{s}) = h[\omega \mathbf{s} n(\omega)], \quad (10.3.2)$$

где $n(\omega)$ — показатель преломления (см. ниже). Условию (1) удовлетворяют, в частности, источники, подчиняющиеся закону Ламберта.

Физическая интерпретация, монодивергентные пучки. Эффекту ДИС вообще и его исчезновению в случаях (1) или (2) в частности можно дать следующее наглядное объяснение. Представим себе пучок стационарного излучения как сумму взаимно не коррелирующих парциальных пучков, соответствующих различным

частотам ω . Каждый парциальный пучок характеризуется углом дифракционной расходимости θ_ω и увеличивающимся при распространении радиусом $a_\omega^\infty(z) = \theta_\omega z$ (в дальней зоне). Зависимость этих параметров от ω приводит к тому, что парциальные пучки расходятся по-разному (бóльшим длинам волн соответствуют и бóльшие θ_ω), что, в свою очередь, вызывает перераспределение частот в пространстве, т. е. появление ДИС (см. рис. 10.3а на с. 415).

Пусть волновой пучок создается почти некогерентным источником. Если характеризовать источник его радиусом a и радиусом корреляции $r_{k\omega}$, то в случае почти некогерентного источника ($r_{k\omega} \ll a$) и угол сходимости пучка $\theta_\omega \sim \frac{1}{k_\omega r_{k\omega}}$ (см. (9.2.19)). Корреляционную функцию в (2) можно переписать как $R(\omega, \mathbf{s}) = h(s/r_{k\omega})$, поскольку $r_{k\omega} \sim r\omega h(\omega) \sim k_\omega^{-1}$. Подставив последнее выражение в формулу для θ_ω получим, что при условии (2) углы расходимости и радиусы парциальных пучков перестают зависеть от ω :

$$\theta_\omega = \theta = \text{const}, \quad r_\omega^\infty(z) = \theta z. \quad (10.3.3)$$

При этом, естественно, все парциальные пучки будут расходиться одинаково (рис. 10.3б), пространственное перераспределение частот не произойдет и ДИС не возникнет. Дифракционная картина сохраняется, но она одинакова для всех ω . Таким образом, смысл условий (1), (2) состоит в том, что при их выполнении имеет место ахроматическая дифракция. Формирующийся при этом пучок условно назовем монодивергентным.

Кроме свойства, описываемого выражением (3), монодивергентные пучки обладают еще одной интересной особенностью. При фокусировке обычных пучков тонкой ахроматической линзой с функцией передачи $\mu(r) = \exp(ik_\omega r^2/2f)$ все парциальные пучки имеют общий фокус при $z = f$, но размеры фокального пятна для разных частот различны:

$$r_\omega(f) = \theta_\omega f. \quad (10.3.4)$$

Формула (4) следует из известного соотношения подобия между параметрами пучка в дальней зоне и фокусе (см. § 5, гл. 9). Согласно (3) и (4) при фокусировке той же линзой монодивергентного пучка размеры фокального пятна будут для всех значений ω одинаковы,

$$r_\omega(f) = r(f) = \theta f,$$

т. е. монодивергентность позволяет в принципе улучшить качество фокусировки пучка с широким частотным спектром.

Теория распространения в диспергирующей среде. Теория ДИС для однородных сред развивалась в предположении, что пучок распространяется в вакууме; исключением является работа [15], где рассмотрено распространение в оптическом волокне, которое моделировалось как диспергирующая неоднородная среда.

Рассмотрим общий случай, считая, что частоте ω соответствует волновое число $k_\omega = n(\omega)\omega/c$, где $n(\omega)$ — действительный показатель преломления ($\text{Im } n(\omega) = 0$). Мы используем также параксиальное приближение (все пучки слабо расходящиеся, $\theta_\omega \ll 1$).

Пусть $I_\omega(r, z)$ — интенсивность поля на частоте ω в некоторой точке r, z пространства:

$$I_\omega(r, z) = G_0(\omega)M_\omega(r, z), \quad (10.3.5)$$

где $G_0(\omega)$ — спектр источника. Будем считать, что в плоскости источника функция M_ω не зависит от ω : $M_\omega(r, 0) = M(r)$. Функция M_ω является основной характеристикой ДИС; зависимость M_ω от ω при $z > 0$ означает, что спектр интенсивности (5) отличается по форме от $G_0(\omega)$ и зависит от точки наблюдения.

Для определения функции M_ω будем исходить из спектрального разложения поля

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \int E_\omega(\mathbf{r}, z) \exp(i\omega t - ik_0 z) d\omega \quad (10.3.6)$$

пучка, распространяющегося в области $z > 0$, которое следует из решения волнового уравнения. В случае стационарного пучка поле E в каждой точке является стандартным случайным процессом. Спектральные амплитуды такого поля δ -коррелированы $\langle E_\omega(\mathbf{r}_1, z) E_{\omega'}^*(\mathbf{r}_2, z) \rangle = G_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \delta(\omega - \omega')$. Функцию $G_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z)$ называют перекрестным частотным спектром; этот спектр определяет пространственно-временную корреляционную функцию поля

$$\langle E(\mathbf{r}_1, z, t) E^*(\mathbf{r}_2, z, t + \tau) \rangle = \int G_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

и спектральную интенсивность при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$

$$I_\omega(\mathbf{r}, z) = G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}, z). \quad (10.3.7)$$

Пусть при $z = 0$ поле источника задано как некоторая функция

$$\begin{aligned} E^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= \int E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega = \iint E_{\omega\mathbf{k}}^{(0)} \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\omega d^2k, \\ E_\omega(\mathbf{r}, z) &= \int E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1) H_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, z) d^2r_1 = \int E_{\omega\mathbf{k}}^{(0)} \mathcal{H}_\omega(\mathbf{k}, z) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^2k, \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

где

$$\begin{aligned} H_\omega(\mathbf{r}, z) &= \frac{ik_\omega}{2\pi z} \exp(-ik_\omega r^2/2z); \\ \mathcal{H}_\omega(\mathbf{k}, z) &= \int H_\omega(\mathbf{r}, z) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^2r = \exp(ik^2 z/2k_\omega). \end{aligned}$$

Можно показать, что функция H_ω обладает следующими свойствами (см. также (9.8.8) и (9.8.9))

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} H_\omega(\mathbf{r}, z) &= \delta(\mathbf{r}), \quad \int H_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, z) d^2 r_1 = 1, \\ \int H_\omega(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, z) H_\omega^*(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2, z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2 r_1 d^2 r_2 &= e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}}, \\ \int H_\omega(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, z) H_\omega^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, z) d^2 r &= \delta(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

Используя эти соотношения, нетрудно получить решения прямой и обратной задач для ω -амплитуд и перекрестных спектров:

$$\begin{aligned} G_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) &= \int G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \mathcal{F}_\omega(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2, z) d^2 r'_1 d^2 r'_2, \\ E_\omega^{(0)}(\mathbf{r}) &= \int E_\omega(\mathbf{r}_1, z) H_\omega^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, z) d^2 r_1, \\ G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \int G_\omega(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \mathcal{F}_\omega^*(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2, z) d^2 r'_1 d^2 r'_2, \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

где

$$\mathcal{F}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = H_\omega(\mathbf{r}_1, z) H_\omega^*(\mathbf{r}_2, z) = \left(\frac{k_\omega}{2\pi z} \right)^2 \exp[-ik_\omega(r_1^2 - t_2^2)/2z].$$

Подставив (10) в (7), найдем

$$I_\omega(\mathbf{r}, z) = \int G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \mathcal{F}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \exp(-ik_\omega \mathbf{r}\mathbf{s}/z) d^2 r_1 d^2 r_2. \quad (10.3.11)$$

Законы сохранения. Проинтегрировав выражение (11) по сечению пучка и учтя (9), получим закон сохранения спектральной мощности:

$$\begin{aligned} P_\omega &= \int I_\omega(\mathbf{r}, z) d^2 r = P_\omega^{(0)}, \\ P_\omega^{(0)} &= \int I_\omega^{(0)}(\mathbf{r}) d^2 r = G_0(\omega) N, \end{aligned} \quad (10.3.12)$$

где коэффициент $N = \int M_\omega(\mathbf{r}, z) d^2 r = \int M(\mathbf{r}) d^2 r$ зависит от ω и z . Имеет место также закон сохранения волнового спектра [4, 6]:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{k}) &= g^{(0)}(\mathbf{k}) = \int g_\omega(\mathbf{k}) d\omega, \\ g_\omega(\mathbf{k}) &= g_\omega^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2 r_1 d^2 r_2. \end{aligned} \quad (10.3.13)$$

Здесь

$$g(\mathbf{k}) = (2\pi)^2 \langle |E_{\mathbf{k}}(z, t)|^2 \rangle,$$

где

$$E_{\mathbf{k}}(z, t) = \int E_{\omega\mathbf{k}}(z) \exp(i\omega t - ik_\omega z) d\omega, \quad (10.3.14)$$

так что выражение (6) можно представить как

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \int E_{\mathbf{k}}(z, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2 k.$$

Учитывая, что

$$E_{\omega\mathbf{k}}(z) = E_{\omega\mathbf{k}}^{(0)} K_{\omega}(\mathbf{r}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int E_{\omega}(\mathbf{r}, z) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^2r,$$

причем $|K_{\omega}(\mathbf{r}, z)|^2 = 1$, и тот факт, что спектральные амплитуды $E_{\omega}(r, z)$ δ -коррелированы, получим

$$\begin{aligned} \langle E_{\omega\mathbf{k}}(z) E_{\omega'\mathbf{k}'}^*(z) \rangle &= \langle E_{\omega\mathbf{k}}^{(0)} E_{\omega'\mathbf{k}'}^{(0)*} \rangle = \\ &= \delta(\omega - \omega') (2\pi)^{-4} \int G_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2r_1 d^2r_2. \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

Из соотношений (14) и (15) следует, что

$$\begin{aligned} \langle |E_{\mathbf{k}}(r, t)|^2 \rangle &= \int \int \langle E_{\omega\mathbf{k}} E_{\omega'\mathbf{k}'}^* \rangle \exp[i(\omega - \omega')t - i(K_{\omega} - K_{\omega'})z] d\omega d\omega' = \\ &= (2\pi)^{-4} \int G_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2r_1 d^2r_2 d\omega, \end{aligned}$$

и мы приходим к (13). В согласии с (12)

$$\int g_{\omega}(\mathbf{k}) d^2k = \int I_{\omega}(\mathbf{r}, z) d^2r = P_{\omega}.$$

ДИС и дифракционные потери. В выражении для полной мощности P_{ω} спектр $G_0(\omega)$ воспроизводится без искажений (см. (12)). Однако ДИС останется (в несколько ослабленном виде), если выделить частичный поток пощности

$$P_{\omega}^D(z) = \int_D I_{\omega}(\mathbf{r}, z) d^2r = G_0(\omega) \int_D M_{\omega}(\mathbf{r}, z) d^2r$$

через некоторую диафрагму D . Разница между измеренным спектром $G_0^{\text{means}}(\omega, z) \sim P_{\omega}^D(z)$ и измеряемым спектром $G_0(\omega)$ определяется при этом соотношением

$$G_0^{\text{means}}(\omega, z) \sim G_0(\omega) [1 - \varepsilon_{\omega}(z)],$$

где параметр

$$\varepsilon_{\omega}(z) = \frac{1}{N} \int_{\bar{D}} M_{\omega}(\mathbf{r}, z) d^2r = 1 - \frac{1}{N} \int_D M_{\omega}(\mathbf{r}, z) d^2r \quad (10.3.16)$$

совпадает с коэффициентом дифракционных потерь. Символ \bar{D} означает интегрирование по области вне диафрагмы. Следует иметь в виду, что $\varepsilon_{\omega}(z)$ дает лишь верхнюю оценку влияния ДИС. Например, в случае ахроматического пучка ДИС вообще отсутствует и $G_0^{\text{means}}(\omega) \sim G_0(\omega)$, но $\varepsilon_{\omega} = \varepsilon \neq 0$. С уменьшением когерентности источника ε_{ω} возрастает, так как при этом увеличивается ширина волнового спектра излучения и относительно меньшая часть его мощности попадает в диафрагму D (см. ниже формулу (52)).

Дальняя зона. В дальней зоне выражение (11) принимает вид

$$I_\omega(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty) \equiv I_\omega^\infty(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega}{2\pi z}\right)^2 \int G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \exp(-ik_\omega \mathbf{r} \mathbf{s} / z) d^2 r_1 d^2 r_2,$$

т. е. согласно (13)

$$I_\omega^\infty(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega}{z}\right)^2 g_\omega^{(0)}(\mathbf{k} = -k_\omega \mathbf{r} / z). \quad (10.3.17)$$

Выражение (17) показывает, что в дальней зоне спектр пучка подобен по форме волновому спектру источника. Отсюда следует точное соотношение

$$r_\omega^\infty(z) = \frac{z}{2k_\omega} \Delta k_\omega^{(0)} \quad (10.3.18)$$

между радиусом пучка и шириной волнового спектра. В (18) подразумевается, что при оценке параметров r_ω^∞ и $\Delta k_\omega^{(0)}$ используются произвольные, но одинаковые критерии. Характерную дифракционную длину L_ω , разграничивающую ближнюю ($z \ll L_\omega$) и дальнюю ($z \gg L_\omega$) зоны, можно определить соотношением $r_\omega^\infty(z = L_\omega) = r_0$; тогда согласно (18) (см. также § 2 гл. 9)

$$L_\omega = \frac{2k_\omega r_0}{\Delta k_\omega^{(0)}} = \frac{r_0}{\theta_\omega}. \quad (10.3.19)$$

Согласно (17) на оси пучка ($r = 0$) ДИС стабилизируется, т. е. в дальней зоне перестает зависеть от z .

Модель источника. Применим полученные общие соотношения к случаю, когда поле источника описывается выражением

$$E^{(0)}(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})\xi(t, \mathbf{r}), \quad (10.3.20)$$

где $F(r)$ — регулярная функция,

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \int \xi_\omega(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) d\omega = \int \int \xi_{\omega \mathbf{k}} \exp(i\omega t - i\mathbf{k} \mathbf{r}) d\omega d^2 k$$

$\xi(t, \mathbf{r})$ — случайная функция t и \mathbf{r} . Поле $\xi(t, \mathbf{r})$ будем считать статистически стационарным во времени и однородным в пространстве. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\omega \mathbf{k}} \xi_{\omega' \mathbf{k}'}^* \rangle &= Q(\omega, \mathbf{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle \xi_\omega(\mathbf{r}_1) \xi_{\omega'}^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= B(\omega, \mathbf{s}) \delta(\omega - \omega'), \quad \mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \langle \xi(t, \mathbf{r}_1) \xi^*(t + \tau, \mathbf{r}_2) \rangle &= \int B(\omega, \mathbf{s}) \exp(-i\omega \tau) d\omega, \end{aligned} \quad (10.3.21)$$

причем

$$B(\omega, \mathbf{s}) = \int Q(\omega, \mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \mathbf{s}} d^2 k. \quad (10.3.22)$$

Согласно (21) частотный спектр $B(\omega, \mathbf{0})$ поля ξ в любой точке плоскости источника $z = 0$ одинаков и тождественно равен $G_0(\omega)$. Полагая в (22)

$$B(\omega, \mathbf{s}) = G_0(\omega)R(\omega, \mathbf{s}) \quad (R(\omega, \mathbf{0}) = 1), \quad Q(\omega, \mathbf{k}) = G_0(\omega)q(\omega, \mathbf{k}), \quad (10.3.23)$$

получим

$$R(\omega, \mathbf{s}) = \int q(\omega, \mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2k, \quad (10.3.24)$$

$$q(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int R(\omega, \mathbf{s})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2s.$$

Из выражений (23) и (24) следует, что форма волнового спектра $Q(\omega, \mathbf{k})$ поля ξ определяется функцией $q(\omega, \mathbf{k})$; ширину этого спектра обозначим через Δk_ω .

Таким образом, в случае (20) источник имеет следующие статистические характеристики:

$$G_\omega^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = F(\mathbf{r}_1)F^*(\mathbf{r}_2)R(\omega, \mathbf{s})G_0(\omega), \quad P_\omega^{(0)} = P_F G_0(\omega), \quad (10.3.25)$$

$$I_\omega^{(0)}(\mathbf{r}) = |F(\mathbf{r})|^2 G_0(\omega), \quad g_\omega^{(0)}(\mathbf{k}) = G_0(\omega)S(\omega, \mathbf{k}),$$

где

$$S(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int F(\mathbf{r}_1)F^*(\mathbf{r}_2)R(\omega, \mathbf{s})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{s}} d^2r_1 d^2r_2,$$

$$P_F = \int |F(\mathbf{r})|^2 d^2r = \int S(\omega, \mathbf{k}) d^2k.$$

Подставив (25) в (11), получим, что в рассматриваемом случае в (5)

$$M_\omega(\mathbf{r}, z) = \int F(\mathbf{r}_1)F^*(\mathbf{r}_2)R(\omega, \mathbf{s})\mathcal{F}_\omega(r_1, r_2) \exp(-ik_\omega \mathbf{r}\mathbf{s}/z) d^2r_1 d^2r_2 \quad (10.3.26)$$

$$\left(\int M_\omega(\mathbf{r}, z) d^2r = P_F \right).$$

В переменных $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ выражение (26) принимает вид

$$M_\omega(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega}{2\pi z} \right)^2 \int F(\mathbf{R} - \mathbf{s}/2)F^*(\mathbf{R} + \mathbf{s}/2)R(\omega, \mathbf{s}) \times$$

$$\times \exp[ik_\omega \mathbf{s}(\mathbf{R} - \mathbf{r})/z] d^2R d^2s. \quad (10.3.27)$$

Введем следующую «одноаргументную» модель корреляционной функции источника:

$$R(\omega, \mathbf{s}) = h(\mathbf{s}/\rho_\omega). \quad (10.3.28)$$

Здесь ρ_ω — некоторая функция частоты, определяющая зависимость от ω радиуса корреляции $r_{k\omega}$ случайного поля ξ источника: $r_{k\omega} \sim \rho_\omega$. Модель (28) является обобщением условий (1), (2) и дает возможность рассмотреть широкий класс источников. Подставив (28) в (24), по-

лучим $q(\omega, \mathbf{k}) = \rho_\omega^2 f(\mathbf{k}\rho_\omega)$, где $f(\mathbf{v}) = (2\pi)^{-2} \int h(\mathbf{u}) e^{i\mathbf{u}\mathbf{v}} d^2u$. При этом $r_{c\omega} \sim \rho_\omega$, $\Delta k_\omega \sim \rho_\omega^{-1}$.

Пучок, излучаемый почти некогерентным источником. В этом случае выполняется неравенство $r_{k\omega} \ll a$; в (27) интервал изменения для $s \sim r_{k\omega}$ намного меньше, чем для $R \sim r_0$, так что это выражение можно упростить, полагая $F(R \pm s/2) \approx F(R)$:

$$M_\omega(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega}{2\pi z}\right)^2 \int |F(\mathbf{R})|^2 R(\omega, \mathbf{s}) \exp \frac{ik_\omega \mathbf{s}(\mathbf{R} - \mathbf{r})}{z} d^2R. \quad (10.3.29)$$

Ширина волнового спектра $g_\omega^{(0)}(\mathbf{k})$ в этом случае определяется в основном флуктуациями ξ , т. е. $\Delta k_\omega^{(0)} \approx \Delta k_\omega \sim r_{k\omega}^{-1}$, и выражение (19) для дифракционной длины принимает вид $L_\omega = 2k_\omega r_0 r_{k\omega}$. В ближней зоне ($z \ll L_\omega$), следовательно,

$$r_{k\omega} \ll r_0 \gg z/2k_\omega r_{k\omega} \quad (10.3.30)$$

и ДИС стремится к нулю вместе с дифракцией. Действительно, полагая в соответствии с (27) $F(R) = F_0 = \text{const}$ ($r_0 \rightarrow \infty$), получаем из (29)

$$\begin{aligned} M_\omega(\mathbf{r}, z) &= \left(\frac{k_\omega}{2\pi z}\right)^2 |F_0|^2 \int R(\omega, \mathbf{s}) \exp(-ik_\omega \mathbf{s}\mathbf{r}/z) d^2s \times \\ &\quad \times \int \exp(-ik_\omega \mathbf{s}\mathbf{R}/2) d^2R = \\ &= |F_0|^2 \int R(\omega, \mathbf{s}) \exp(-ik_\omega \mathbf{s}\mathbf{r}/2) \delta(\mathbf{s}) d^2s = |F_0|^2. \end{aligned} \quad (10.3.31)$$

В дальней зоне ($z \gg L_\omega$) должно быть

$$r_{k\omega} \ll r_0 \ll z/2k_\omega r_{k\omega} \quad (r_{k\omega} \ll (z/2k_\omega)^{1/2}).$$

При этом $k_\omega \mathbf{s}\mathbf{R}/z \sim k_\omega r_{k\omega} r_0/z \sim L_\omega/z \ll 1$ и выражение (31) принимает вид

$$M_\omega(\mathbf{r}, z \rightarrow \infty) \equiv M_\omega^{(\infty)}(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega}{2\pi z}\right)^2 P_F \int R(\omega, \mathbf{s}) \exp \frac{-ik_\omega \mathbf{s}\mathbf{r}}{z} d^2s. \quad (10.3.32)$$

Если использовать модель (28), то получим

$$M_\omega^{(\infty)}(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k_\omega \rho_\omega}{2\pi z}\right)^2 P_F \int h(\mathbf{u}) \exp \frac{-ik_\omega \rho_\omega \mathbf{u}\mathbf{r}}{z} d^2u, \quad (10.3.33)$$

$$\theta_\omega \sim \frac{1}{k_\omega \rho_\omega}, \quad r_\omega^{(\infty)}(z) \sim \frac{z}{k_\omega \rho_\omega}. \quad (10.3.34)$$

Из выражения (33) видно, что ДИС не возникает, если

$$k_\omega \rho_\omega \sim \omega n(\omega) \rho_\omega = \text{const}, \quad (10.3.35)$$

так как при выполнении этого условия функция (33) перестает зависеть от ω . Соотношения (34) в случае (30) переходят в (3), т. е. расхо-

димность всех парциальных пучков одинакова. Обращение интегралов Фурье (33) и (34) дает принципиальную возможность определения функций $R(\omega, \mathbf{s})$ и $h(\mathbf{u})$.

Возможные методы компенсации эффекта Вольфа. Рассмотрим общий случай $k_\omega \rho_\omega \neq \text{const}$, когда согласно (33) ДИС имеет место. Из выражений (5) и (33) видно, что отношение спектральных интенсивностей в двух произвольных точках плоскости z будет зависеть от ω и z только в комбинации $k_\omega \rho_\omega / z$

$$I_\omega(\mathbf{r}_1, z) / I_\omega(\mathbf{r}_2, z) = M_\omega(\mathbf{r}_2, z) / M_\omega(\mathbf{r}_1, z) = J(k_\omega \rho_\omega / z).$$

Это значит, что, перестраивая ω (предполагается, что перед прибором, измеряющим интенсивность, стоит монохроматор, настроенный на частоту ω , которую можно менять) и подбирая $z = z_\omega$ так, чтобы J оставалось постоянным, мы автоматически обеспечим выполнение условия

$$k_\omega \rho_\omega / z_\omega = \text{const} \quad (10.3.36)$$

и постоянство коэффициента M_ω . В результате спектр $G_0(\omega)$ на частотах $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ можно рассчитать по измеряемым интенсивностям, используя формулу

$$G_0(\omega) = G_0(\omega_1) I_\omega(\mathbf{r}_i, z_\omega) / I_\omega(\mathbf{r}_i, z_\omega)_{\omega=\omega_1} \quad (\omega = \omega_1, \omega_2, \dots; i = 1, 2). \quad (10.3.37)$$

Этот метод дает возможность определить форму спектра $G_0(\omega)$. Одновременно, если известна дисперсия показателя преломления $n(\omega)$, находится и частотная зависимость радиуса корреляции источника: $r_{K\omega} \sim \rho_\omega \sim z_\omega / k_\omega$. Из формул (34) и (36) следует, что расстояния $z = z_\omega$ соответствуют одинаковым радиусам парциальных пучков:

$$r_\omega^{(\infty)}(z_\omega)_{\omega=\omega_1} = t_\omega^{(\infty)}(z_\omega)_{\omega=\omega_2} = \dots$$

(рис. 10.3, а).

Небольшая модификация этой методики позволяет обойтись любым приемлемым в условиях лаборатории интервалом расстояний

$$z_{\min} < z_\omega < z_{\max} \quad (10.3.38)$$

при неограниченном диапазоне изменения ω . Для этого все измерения следует разбить на серии ($I_\omega = I_\omega^{(i)}$, i — номер серии), каждая из которых укладывается в интервал (38), причем последнее измерение i -й серии ($z_\omega \approx z_{\max}$) и первое измерение $(i+1)$ -й серии ($z_\omega \approx z_{\min}$) проводятся на одной и той же частоте. Тем самым устанавливается связь между соотношениями (37), справедливыми для каждой из серий измерений в отдельности. В результате в первой серии измерений ($\omega_1 < \omega < \omega_n$) спектр вычисляется по формуле (37), во второй серии — по формуле

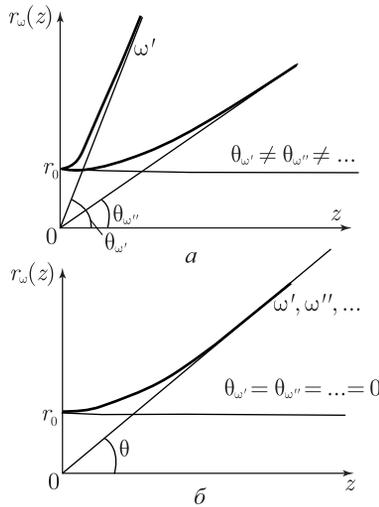


Рис. 10.3. Расходимость спектральных компонент некогерентного пучка при нарушении (а) и выполнении (б) условий монодивергентности (см. формулы (1), (2), (7))

$$G_0(\omega) = G_0(\omega_1) I_{\omega_n}^{(1)} I_{\omega'}^{(2)} / I_{\omega_1}^{(1)} I_{\omega_2}^{(2)} \quad (\omega = \omega_{n+m}, m = 0, 1, \dots) \quad (10.3.39)$$

и т. д.

Примеры. Проиллюстрируем полученные результаты на нескольких примерах. Рассмотрим сначала два случая, когда корреляционная функция источника не зависит от ω : $R(\omega, \mathbf{s}) = R(\mathbf{s})$.

Пример 1). *Пространственно-когерентный источник* (см. также [16]). Пусть в (20)

$$\xi(\tau, \mathbf{r}) = \xi(t), \quad (10.3.40)$$

При этом

$$E_\omega(\mathbf{r}, z) = \xi_\omega \cdot \mathcal{H}_\omega(\mathbf{r}, z), \quad M_\omega(\mathbf{r}, z) = |\mathcal{H}_\omega(\mathbf{r}, z)|^2, \quad (10.3.41)$$

$$R(\omega, \mathbf{s}) \equiv 1, \quad \mathcal{H}_\omega(\mathbf{r}, z) = \int F(r_1) H_\omega(r - r_1, z) d^2 r_1.$$

Функция M_ω из (41) не зависит от параметров случайного поля ξ и ее можно в принципе измерить, используя любой достаточно узкополосный и перестраиваемый источник света. По определенной таким образом функции M_ω и измеренной интенсивности I_ω спектр источника найдется как $G_0(\omega) = I_\omega(\mathbf{r}, z) / M_\omega(\mathbf{r}, z)$.

Пример 2). *Частично когерентный источник*. Рассмотрим источник мультипликативного типа, в котором

$$\xi(t, \mathbf{r}) = \xi(t) \eta(\mathbf{r}), \quad (10.3.42)$$

где $\eta(\mathbf{r})$ — случайное пространственно-однородное поле, причем

$$\langle \eta \rangle = 0, \quad \langle \eta(\mathbf{r}_1)\eta^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \eta\eta^* \rangle R(\mathbf{s}), \quad \mathbf{s} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (10.3.43)$$

Подставив (43) в (26), получим

$$M_\omega(\mathbf{r}, z) = \langle \eta\eta^* \rangle \int F(\mathbf{r}_1)F^*(\mathbf{r}_2)R(\mathbf{s})\mathcal{F}_\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) \exp(-ik_\omega\mathbf{r}\mathbf{s}/z) d^2r_1 d^2r_2. \quad (10.3.44)$$

Нетрудно видеть, что функции M_ω в (41) и (44) являются функциями вида

$$M_\omega(\mathbf{r}, z) = m(\mathbf{r}, k_\omega/z).$$

Этим можно воспользоваться для компенсации ДИС, определяя для каждого значения ω расстояние $z = z'_\omega$ так, чтобы выполнялось соотношение $k_\omega/z_\omega = \text{const}$. Если зависимость k_ω от ω неизвестна, то для компенсации ДИС применима описанная в предыдущем разделе «двухточечная» методика (см. (37) и (39)). При этом кроме формы спектра $G_0(\omega)$ находится и частотная зависимость показателя преломления $n(\omega) \sim (\omega z'_\omega)^{-1}$. В дальней зоне выражение (44) принимает вид

$$M_\omega^{(\infty)}(\mathbf{r}, z) = \langle \eta\eta^* \rangle \left(\frac{k_\omega}{2\pi z} \right)^2 \int F(\mathbf{r}_1)F^*(\mathbf{r}_2)R(\mathbf{s}) \exp(-ik_\omega\mathbf{r}\mathbf{s}/z) d^2r_1 d^2r_2. \quad (10.3.45)$$

Пример 3). *Когерентный гауссовский источник.* Для этого источника

$$E^{(0)}(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r})\xi(t), \quad F(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2r_0^2). \quad (10.3.46)$$

Видно, что это источник типа (40); тогда, используя (41), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\omega(\mathbf{r}, z) &= \frac{1}{1 - iD_\omega} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_0^2} \frac{1}{1 - iD_\omega}\right), \\ M_\omega(\mathbf{r}, z) &= \frac{\omega^2}{\Omega_\omega^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2} \frac{\omega^2}{\Omega_\omega^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{1 + D_\omega^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2} \frac{1}{1 + D_\omega^2}\right), \end{aligned} \quad (10.3.47)$$

где

$$D_\omega = \frac{z}{k_\omega r_0} = \frac{\Omega_\omega}{\omega}, \quad \Omega_\omega = \frac{zc}{n(\omega)r_0^2}. \quad (10.3.48)$$

Согласно (47) на расстоянии z от источника пучок имеет эффективный радиус $r(z) = r_0(1 + D_\omega^2)^{1/2}$. В ближней зоне $D_\omega \ll 1$, $\Omega_\omega \ll \omega$, в дальней зоне $D_\omega \gg 1$, $\Omega_\omega \gg \omega$. Ограничимся для простоты случаем недиспергирующих сред ($\Omega_\omega = \Omega = zc/nr_0^2$). Зависимость функции (47) от ω показана на рис. 10.4. Видно, что при небольшом удалении от оси пучка ($0 < r < r_0$) из-за ДИС спектр интенсивности сдвигается в синюю область относительно $G_0(\omega)$. Если $r > r_0$, то синему смещению соответствует диапазон низких частот $\omega < \Omega_m$, а красному — диапазон

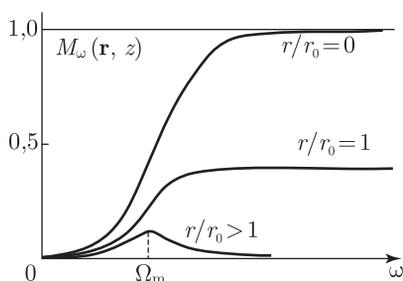


Рис. 10.4. Зависимость функции передачи спектра $M_\omega(\mathbf{r}, z)$, определенной выражением (50), от ω в случае распространения пучка через недиспергирующую среду

высоких частот $\omega > \Omega_m$; здесь частота $\Omega_m = \Omega[(r/r_0)^2 - 1]^{-1/2}$ является частотой, при которой функция (47) имеет максимум

$$M_\omega(\mathbf{r}, z)|_{\max} = r^2/r_0^2 e, \quad \omega = \Omega_m.$$

Пример 4). *Источник типа (9.2.6) с гауссовской формой пучка и гауссовской корреляционной функцией.* В этом случае

$$F(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2r_0^2), \quad R(\omega, \mathbf{s}) = \exp(-s^2/4r_{к\omega}^2). \quad (10.3.49)$$

Использував интеграл (9.4.4), получим, подставив (49) в (26), выражение для M_ω вида (47), в котором теперь

$$D_\omega = \frac{z}{k_\omega r_0^2} \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r_{к\omega}^2}}, \quad \Omega_\omega = \frac{zc}{n(\omega)r_0^2} \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r_{к\omega}^2}}. \quad (10.3.50)$$

Таким образом, в этой модели влияние корреляции проявляется в увеличении характерной частоты Ω_ω , т.е. в расширении области синего смещения (кривые на рис. 10.4 сдвигаются вправо).

Выражения (49) и (50) подтверждают сделанный выше вывод о том, что если расстояние z фиксировано, то при увеличении размеров источника (см. правое неравенство в (30)) вместе с дифракцией стремится к нулю и ДИС.

Особенностью пучка, создаваемого источником (49), является то, что монодивергентность в этом пучке возникает сразу для всех расстояний $0 < z < \infty$ и любых отношений $r_0/r_{к\omega}$, если волновой параметр D_ω не зависит от ω :

$$D_\omega = \frac{z}{k_\omega r_0^2} \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r_{к\omega}^2}} = \text{const}. \quad (10.3.51)$$

В случае $r_{к\omega} \ll r_0$ условия (1), (2) и (51) эквивалентны.

Используя (47), легко вычислить коэффициент дифракционных потерь $\varepsilon_\omega(z)$. В случае кольцевой диафрагмы радиуса r_d получим согласно (16)

$$\varepsilon_\omega(z) = \exp\left(-\frac{r_d^2}{r_0^2} \frac{1}{1 + D_\omega^2}\right). \quad (10.3.52)$$

Выражение (52) показывает, что при уменьшении радиуса корреляции $r_{k,\omega}$ источника коэффициент $\varepsilon_\omega(z)$ возрастает, так как при этом будет расти волновой параметр D_ω , определяемый выражением (50).

Оценки смещения спектра. Определим обусловленный ДИС сдвиг $\Delta\omega$ максимума спектра (5) относительно максимума спектра источника $G_0(\omega)$ для некоторых характерных примеров.

Пример 1. Если когерентный гауссов источник (46) излучает в пустоту ($k_\omega = \omega/c$), то в дальней зоне на оси пучка согласно (47) $M_\omega^{(\infty)} \sim \omega^2$. Считая спектр $G_0(\omega)$ также гауссовым с центральной частотой ω_0 и шириной $\Delta\omega_0$, т. е. $G_0(\omega) \sim \exp[-\alpha^2(\omega - \omega_0)^2]$, $\alpha = 1/\Delta\omega_0$, получим

$$I_\omega^{(\infty)}(0, z) \sim \omega^2 \exp[-\alpha^2(\omega - \omega_0)^2]. \quad (10.3.53)$$

Максимум спектра (53) приходится на частоту

$$\omega_m = \omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0[\sqrt{1 + (2/Q)^2} - 1],$$

$$Q = \omega_0/\Delta\omega_0 = \alpha\omega_0.$$

В этом примере спектр испытывает положительное (синее) смещение, которое не превышает $\Delta\omega_0$: $0 < \Delta\omega < \Delta\omega_0$, причем

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} \equiv \frac{\omega_m - \omega_0}{\Delta\omega_0} = \frac{1}{2}Q(\sqrt{1 + (2/Q)^2} - 1)$$

и, в частности,

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0} = 1 - \frac{Q}{2} \quad (Q \ll 1); \quad Q^{-1} \quad (Q \gg 1).$$

Пример 2. В общем случае $r \neq 0$ сдвиг $\Delta\omega$ зависит от z , может иметь любой знак и превышать $\Delta\omega_0$ (см. также [16]).

Пример 3. Рассмотрим произвольный почти некогерентный источник. Если точка наблюдения находится в дальней зоне на оси пучка, то согласно (33) $M_\omega^{(\infty)}(0, z) \sim k_\omega^2 \rho_\omega^2$. Пусть, например, $k_\omega^2 \rho_\omega^2 \sim \omega^{2\beta}$. Спектр источника будем считать планковским: $G_0(\omega) \sim x^3(e^x - 1)^{-1}$, $x = \hbar\omega/k_B T$ (\hbar и k_B — постоянные Планка и Больцмана). В результате имеем

$$I_\omega^{(\infty)}(0, z) \sim x^\nu / (e^x - 1), \quad \nu = 3 + 2\beta. \quad (10.3.54)$$

Частота $\omega = \omega_m$, при которой спектр (54) имеет максимум, определяется уравнением $x_m = \nu(1 - e^{-x_m})$, где $x_m = \hbar\omega_m/k_B T$. Полагая $x_m = \nu - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, получаем для ε уравнение $\varepsilon = \nu e^{-\nu+\varepsilon} \approx \nu e^{-\nu}(1 + \varepsilon)$, т. е.

$$\varepsilon \approx \nu/(e^\nu - \nu), \quad x_m \approx \nu - \nu/(e^\nu - \nu). \quad (10.3.55)$$

При $\nu = 3$ выражение (55) определяет частоту ω_0 , соответствующую максимуму планковского спектра: $x_0 = \hbar\omega_0/k_B T \approx 2,82$. Таким образом, искомый сдвиг спектра за счет ДИС

$$\Delta x = x_m - x_0 = n\nu - \frac{\nu}{e^\nu - \nu} - 2,8, \quad \Delta x = \frac{\hbar}{k_B T} \Delta\omega.$$

Например, в случае $\beta = 1$, $\nu = 5$ (источник типа (42), см. также (45)) получим $x_m = 4,96$, $\Delta x = 2,14$, т. е. средняя частота спектра возрастет почти в два раза.

Подведем итог полученным в этом параграфе результатам. Эффект ДИС является дифракционным, он связан с ограниченными размерами излучающего источника и заметно проявляется в средней и дальней зонах, стремясь к нулю в ближней зоне. Он влияет на частотный спектр изменяющихся при распространении параметров пучка, например на интенсивность поля $I_\omega(\mathbf{r}, z)$, и не влияет на спектр параметров, сохраняющихся при распространении (P_ω , $g_\omega(\mathbf{k})$).

Физически ДИС связано с различной расходимостью парциальных пучков, соответствующих отдельным частотам ω в спектре излучения. На расходимость сильно влияет форма и степень пространственной корреляции источника; при определенных условиях может возникать ахроматическая дифракция, когда угол расходимости одинаков для всех частот спектра:

$$\theta_\omega = \theta = \text{const}. \quad (10.3.56)$$

В этом исключительном случае ДИС отсутствует и распространение пучка не сопровождается изменением его частотного спектра. Соотношение (36) является наиболее общим условием формирования такого монодивергентного пучка в однородной диспергирующей среде. В частном случае почти некогерентного источника оно эквивалентно соотношениям (1), (2). Выше было показано, что можно обеспечить выполнение условия (56) и в случае когерентных источников (см. (50)).

Мы рассматривали эффект Вольфа ДИС с позиций метрологии, т. е. как нежелательный, и искали методы его исключения или компенсации. Между тем он может оказаться и полезным как дающий простую возможность непрерывной перестройки и преобразования частотного спектра, например, лазера путем изменения расстояния между лазером и мишенью, для дальномерных целей, для диагностики источников (измерения их пространственной корреляционной функции $R(\omega, s)$)

и радиуса корреляции $r_{\kappa\omega} \approx \rho_\omega$) и т. д. Полезным объектом может оказаться и сам по себе монодивергентный пучок из-за его уникального свойства не создавать дифракционных спектров ни в дальней зоне, ни в фокальной плоскости.

Литература к главе 10

1. *Курашов В. Н., Кисель А. В., Хорошков Ю. В.* Квантовая электроника. 1976. Т. 3. С. 5.
2. *Ахманова С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С.* Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981.
3. *Wolf E.* Phys. Rev. Letts. 1986. V. 56. P. 1370.
4. *Mielenz K. D.* J. Res. Nat. Inst. Stand. Technol. 1993. V. 98. P. 231.
5. *Nugent K. A., Gardner J. L.* Metrologia. 1992. V. 29. P. 319.
6. *Дьяков Ю. Е.* Квантовая электроника. 1993. Т. 20. С. 1068.
7. *Мандель П., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. — М.: Физматлит, 2000.
8. *Morris G. M., Faklis D.* Optics Comms. 1987. V. 62. P. 5.
9. *Kandapal H. C., Vaishya J. S., Joshi K. C.* Optics Comms. 1989. V. 73. P. 169; Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 4541.
10. *Kandapal H. C., Vaishya J. S., Chandra M., Joshi K. C.* Optics Comms. 1992. V. 87. P. 147.
11. *Vaishya J. S., Chander M., Kandapal H. C., Hoshi K. C.* Optics Comms. 1992. V. 87. P. 144.
12. *Gori F., Guattari G., Palma C., Padovani R. S.* Optics Comms. 1988. V. 67. P. 1.
13. *Воско М. Ф., Дуглас Д. Н., Кнох Р. С.* Phys. Rev. Letts. 1987. V. 58. P. 2649.
14. *Dačić Z., Volf E. J.* Opt. Soc. Amer. A. 1988. V. 5. P. 1118.
15. *Gamliel A., Agrawal G. P. J.* Opt. Soc. Amer. A. 1990. V. 7. P. 2184.
16. *Wolf E., Fienup J. R.* Optics Comms. 1991. V. 82. P. 209.
17. *Борисов В. М., Христофоров О. Б., Чернышев Л. Е.* Изв. РАН, Сер. физич., 1992, т. 56, с. 115.

Предметный указатель

- Ансамбль статистический, 23
- Белый шум, 50
- Ван Циттерта–Цернике теорема, 362
- Винера–Хинчина теорема (формула), 46
- — — — обобщенная, 299
- Винера–Хопфа уравнение, 275
- Вихревые пучки, 382
- Волна, параксиальная, 291
- , полностью поляризованная, 308
- , частично поляризованная, 308
- Волновой фронт, 382
- Волновые пучки, случайные пара-
сиальные, 360
- — немонохроматические случай-
ные, 403
- Вольфа эффект (дифракционное
изменение спектра), 406
- —, компенсация, 414
- Время корреляции, 48
- Выбросы случайных процессов, 67
- — —, длительность, 68
- — —, число выбросов, 69
- — —, число пересечений, 69, 74
- Выделение сигнала из шума, 275
- Вычисление средних, 86
- Грина функция, 208, 241
- — линейных систем, 243
- — оптимального фильтра 277
- —, среды 320
- Дайсона, уравнение, 234
- Дефазировка, эффект, 147
- , время, 155, 156, 159
- , модель, 153
- Дикий провал, 163
- Дислокации волнового фронта, 383
- , плотность, 387
- пространственной корреляцион-
ной функции, 388
- среднее число, 385
- Дисперсия, 29
- , Диффузионного (винеровского)
процесса, 104, 143
- , Пуассоновского распределения,
114
- Дифракция частично когерентной
волны, 367
- некогерентной волны, 364
- Дифракция светового пучка на
случайном фазовом экране, 375
- Диффузия фазы, 105
- Дюамеля интеграл, 208, 241
- Законы сохранения, 316, 357, 409
- Измерение средних, 58
- вероятностей распределения, 59
- корреляционной функции, 59
- световых импульсов методом
фотоотсчетов, 176
- , фундаментальная ошибка, 56
- Импульс, амплитудно-модулиро-
ванный, 315
- , база, 317
- в ближней зоне, 325
- в дальней зоне, 321, 347, 411
- , гауссовская модель, 319
- , компрессия, 327, 348
- , обращение формы, 332
- , одиночный случайный, 109
- , самовоспроизведение, 338
- , частотно-модулированный, 315
- , частотно некогерентный, 318,
324

- Импульсная последовательность, квазипериодическая, 133
 — — случайная, 109
 — — пуассоновская, 112
 Импульс-спектр, 321
 Источник, когерентный гауссовский, 416
 —, пространственно когерентный, 415
 —, частично когерентный, 415
 — света, квазитепловой, 375
- Квадратурные компоненты, 87, 384
 Когерентность, пространственная, 285
 —, степень, 305
 Колебательный контур, последовательная схема, 250
 — —, параллельная схема, 251
 Компрессия импульса, 327
 — —, коэффициент, 329, 331, 351
 — —, гауссовского, 331
 Коррелирующая компонента, 213
 Корреляционный приемник, 274
 Корреляционная функция, пространственная, 285, 359, 406
 — —, пространственно-временная, 284, 403
 — — частично некогерентного импульса, 324
 Коэффициент передачи 240
 — — среды, частотный, 320
 Коэффициент асимметрии, 32
 — корреляции, 44
 — эксцесса, 32
 Кумулянты, 31
 — многомерные, 35, 36
- Лазерное излучение многомодовое, 188
 — —, статистика фотоотсчетов, 169
 Линеаризация, метод, 229
 —, статистическая, 230
- Майкельсона, звездный интерферометр, 364
 Матрица корреляционная, 40, 43, 84
 —, поляризационная, 306
 Метод «моментов», 333
 — — модифицированный, 338
 Методы стохастические, 212
 —, приближенные вычисления статистических характеристик, 229
 Модуляция амплитудная, 136
 —, фазовая, 139
 —, частотная, 142
 Моменты временные, 333
 — второго порядка, 29
 — импульсов, 352
 — интенсивности многомодового излучения, 189
 — многомерные, 36
 — многомодового колебания, 183
 — проблема, 28
 — распределения вероятностей, 25
 — факториальные, 118
 — частотно-временные, 335
 — частотные, 334
 — центральные, 25
 — многомерные центральные, гауссовского распределения, 40
- Найквиста формула, 265
 Независимость статистическая, 37
 Нормализации эффект, 224, 258
- Область перетяжки, 373
 Обнаружение сигнала, 267
 — — конечной длительности, 269
 Огибающая узкополосного шума, 87
 Отношение сигнал/шум, 267
- Поле, векторное случайное, 305
 — параксиальное, 290
 — «сжатое», 192, 194
 Поляризация, случайная, 305
 Проблема моментов, 28
 Процесс детерминированный, 22
 — переходной, 206
 — случайный, 22
 Процессы марковские, 223
 Принцип суперпозиции, 239
 Пуанкаре сфера, 310

- Радиус корреляции, 301
Расплывание импульса, дисперсионное, 321
Распределение вероятностей одномерное, 24
— — для огибающей, 94
— — суммы сигнала и гауссовского шума, 100
— — многомерное, 33
— — — гауссовское, 40
— — условное, 36
— фотоотсчетов, 165
Рэлея метод, 380
- Свет, поляризационно-сжатый, 312
—, поляризационно-скалярный, 312
— со скрытой поляризацией, 311
Световой пучок, мультипликативная модель, 358
— — статистически неоднородный, 358
— — в случайной среде, 393
— —, угловой спектр, 359
— — частично когерентный, 367
Световой пучок в дальней зоне, 411
Сжатие поляризационное, 310
—, степень, 201
— фазово-модулированного случайного поля, 197
—, эллипс, 197
Системы линейные диссипативные, 262
— — с постоянными параметрами, 217, 240
— —, спектральное описание, 240
— —, отклик на шумовое воздействие, 247
Случайная волна, квазиплоская, 286
— —, в оптическом волокне, 395
Случайное поле, 284
— —, статистически однородное, 285
— —, статистически изотропное, 297
— —, статистически стационарное, 297
- Случайный процесс, выбросы, 67
— — гауссовский (нормальный), 82
— — диффузионный (винеровский), 102
— — импульсный, 108
— — комплексный, 22, 52, 91
— — многомодовая модель, 177
— — нестационарный, 43, 255
— — реализации, 23, 80
— —, спектральное представление, 45
— — стационарный, 42
— — — квазипериодический, 133
— — телеграфный, 121, 225
Соотношение «неопределенностей» (взаимности), 47, 301
Спектр гауссовский, 50
— лоренцевский, 50
— угловой, 360
—, дифракционное изменение (см. эффект Вольфа)
Спектральная линия, естественная ширина, 148
— —, уширение в газе, 150
— —, при высоких давлениях, 158
— —, при низких давлениях, 157
— —, столкновительное уширение, 163
— —, уширение в жидкости, 152
Спектральная плотность, 46, 49
Статистика фотоотсчетов лазерного излучения, 169
— — нестационарная, 176
— —, обратная задача, 171
— — теплового излучения, 169
— — суммы гармонического сигнала и гауссовского шума, 170
Статистическая неоднородность светового пучка, 359
— эквивалентность, 224
Степень поляризации, 308
— сжатия, 194
Стокса, параметры, 307
Сужение Дики, 156
— столкновительное, 152
- Тальбота, временной эффект, 338
—, дробный эффект, 342

- , обращенный эффект, 340
- , расстояние, 339
- эффект для частично некогерентных импульсов, 343
- — в средах с дисперсией высшего порядка, 352
- Томография, 63
- Угловая расходимость (спектр), 359
- —, средний квадрат, 386
- Уравнение, волновое, 287
- , параболическое, 292, 356
- , — нестационарное 293, 402
- квазиоптики, 292
- Уравнения стохастические (флуктуационные), 205
- флуктуационные с известным решением, 206
- — с дельта-коррелированными коэффициентами, 212
- — с коэффициентами случайного телеграфного сигнала, 226
- — первого порядка, 212
- — нелинейные, 219
- — —, линеаризация, 229
- —, несколько линейных, 215
- Уравнения укороченные, 253
- Усреднение временное, 53
- решения, 206
- статистическое, 24, 53, 212
- Фейнмана метод, 389
- Фильтр, оптимальный линейный, 269, 279
- Фоккера–Планка уравнение, 222
- — —, обобщенное, 227
- Фокусировка частично когерентного пучка, 370
- Формула дифференцирования, 226
- Функция Грина, 208
- Фаза узкополосного шума, 87
- , универсальность равномерного распределения, 124
- Фазовая чувствительность, 202
- Фильтрация шума, 249
- Формула Кэмбелла, 112
- Манделя, 166
- Шоттки, 119
- Функционал характеристический, 36
- Функция корреляционная, 44, 49
- — интенсивности, 45
- — комплексной амплитуды, 98
- — огибающей, 94
- — фазы, 94
- производящая, 118
- распределения гауссовская, 32
- — — двумерная, 61, 94
- — двумерная для огибающей, 133
- — для производных по времени, 85, 96
- — огибающей, 93
- периодически нестационарного гауссовского процесса, 195
- — интенсивности, 93, 128
- — Пуассона, 113
- — Релея, 93, 180
- — — обобщенная, 100
- — фазы, 93
- — — периодически нестационарного гауссовского процесса, 195
- характеристическая, 25
- — гауссовского процесса, 83
- — импульсного процесса, 117
- — многомерная, 35
- — многомодового колебания, 181
- —, связь с распределением огибающей, 126
- , частотная передаточная, 240
- Центральная предельная теорема, 38
- — — для случайных колебаний, 178
- Центральные моменты, 25
- Чебышева неравенство, 29
- Ширина спектральной линии, естественная, 148
- доплеровская, 150
- Шум белый, 50
- гауссовский узкополосный, 92

-
- — стационарный, многомодовая модель, 184
 - дробовой, 119
 - полосовой, 50
 - стационарный узкополосный, 87
 - тепловой, 262
 - Эргодичность, 53
 - Якобиан преобразования, 35, 385, 397