АКИЛОВ Г. П.
ДЯТЛОВ В.Н.

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.П. Акилов, В.Н. Дятлов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Ответственный редактор
С.С. Кутателадзе

Новосибирск · 1973

УДК 517.

Лекции по математическому анализу.
Акилов Г.П., Дятлов В.Н. Новосибирский государственный университет,
1973, стр. I - 200.

Предлагаемый курс лекций посвящен введению в математический анализ и включает теорию пределов числовых функций (вообще говоря, многозначных), теорию непрерывных функций одной переменной, дифференциальное и интегральное исчисление (также для функций одной переменной). Основному тексту предпослана вспомогательная глава о теории множеств, в которой, в частности, сообщаются необходимые сведения о фильтрах. Эти сведения используются в общем определении предела, которое затем детализируется для различных частных случаев. В связи с понятием предела числового семейства с фильтрующимся множеством индексов изучаются суммируемые числовые семейства и на их основе ряды. При изложении теории интеграла в книге принята концепция интеграла Ньютона, согласно которой интеграл определяется как некоторая функция ориентированного промежутка.

Курс лекций рассчитан на студентов первого курса математических факультетов университетов.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Подготовка специалистов высокой квалификации, владеющих научными знаниями на современном уровне, требует от преподавателя такого изложения основ науки, которое соответствовало бы сегодняшнему её состоянию. В предлагаемом курсе лекций предпринята попытка такого изложения основ математического анализа. Курс начинается с некоторых сведений из теории множеств, включающих описание теоретико-множественных операций, определения и свойств (многозначных) отображений, произведения семейств множеств и т.д. Отдельный параграф посвящен достаточно подробному изложению теории упорядоченных множеств - здесь показывается лемма Цорна, вводится понятие фильтра, ультрафильтра и др.

Следующий раздел курса посвящён теории пределов на основе общего определения предела числового соответствия (иными словами, многозначной функции) по фильтру подмножеств данного множества. Это определение затем детализируется для различных частных случаев: для числовых семейств с фильтрующимся множеством индексов, в частности для числовых последовательностей, для функций, заданных на числовом множестве (пределы по фильтру проколотых окрестностей и по фильтру окрестностей - последнее приводит к понятию непрерывной функции). Общее определение предела используется также для построения теории суммируемых числовых семейств и на её основе теории рядов, в том числе степенных.

Глава о непрерывных функциях содержит более или менее традиционный материал: теоремы о непрерывных функциях на отрезке (включая критерий непрерывности монотонной функции), понятие о равномерной сходимости, теорему о непрерывности предела равномерно сходящегося фильтрующегося семейства непрерывных функций, теорему о равномерной сходимости степенного ряда и т.п. Заслуживает быть отмеченным помещённый в этой главе параграф об элементарных функциях и, в частности, теорема о существовании показательной функции, непрерывного гомоморфизма аддитивной группы вещественных чисел в мультипликативную группу положительных вещественных чисел.

Следующая глава посвящена изучению дифференцируемых функций. Производная и дифференциал определяются, исходя из идеи аппроксимации данной функции простейшими - линейными функциями. В этой главе мы сочли возможным и необходимым привести важную как в теоретическом отношении, так и для приложений теорему о восстановлении непрерывной функции по её производной, которая задана всюду за исключением счётного множества точек.

При изложении теории интеграла от функции на отрезке, чему посвящена заключительная часть книги, мы исходим из концепции интеграла Ньютона - (неопределённый) интеграл вводится как такая непрерывная функция ориентированного промежутка, плотность которой совпадает с данной функцией всюду за возможным исключением счётного множества точек. Такой подход представляется нам более естественным в связи с приложениями интеграла. Другое преимущество нашей точки зрения состоит в том, что мы освобождаемся от необходимости развивать теорию несобственных интегралов, которая вкладывается в общую теорию (и в более общем по сравнению со стандартным изложением виде). Наконец, следует отметить, что именно интеграл Ньютона является одномерным аналогом интеграла по ориентированному многообразию.

Коротко о системе ссылок и обозначений. Каждый параграф разбит на пункты. Первая цифра в обозначении пункта указывает номер соответствующего параграфа, вторая же - порядковый номер пункта в параграфе. При ссылке на этот пункт перед этими двумя цифрами (которые уже берутся в скобки) ставится цифра, обозначающая номер соответствующей главы.

Нумерация теорем сквозная в каждом параграфе. После порядкового номера теоремы в скобках указаны номера параграфа и главы, в которых расположена эта теорема. Утверждения, не имеющие фундаментального значения, нумеруются в пределах каждого пункта римскими цифрами. При ссылке на них эти факты именуются "предложениями".

Авторы выражают глубокую признательность редактору книги С.С. Кутателадзе и заведующему кафедрой математического анализа НГУ профессору Ю.Г. Решетняку за то внимание, с которым они отнеслись к книге.

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе излагаются некоторые общие сведения об изучаемых в математике объектах. Поскольку эти сведения имеют общематематический характер, они играют в руководстве по анализу лишь вспомогательную роль и сообщаются с максимальной степенью краткости.

Материал этой главы можно сравнить с описанием набора деталей "конструктора", из которого в последующих главах будет строиться здание анализа.

§ I. Элементы теории множеств

Основным типом "деталей" математического "конструктора" являются **множества**. Здесь мы впервые столкнемся со способом определения понятий путем описания тех отношений, в которые они вступают с другими понятиями. Впрочем представить себе дело иначе и невозможно - будучи **первоначальным** понятием математики, множество не может быть определено как объект какого-либо класса, выделяемый из этого класса теми или иными свойствами. Ведь в нашем распоряжении нет никаких понятий, в частности, и более широких, чем понятие множества.

Подобно тому, как в основаниях геометрии математическое содержание понятий "точка", "прямая", "плоскость" выясняется лишь в связи с тем, что эти понятия участвуют в определенных отношениях, так и в теории множеств сущность понятия множества определяется системой принципов, изложению которых и посвящен настоящий параграф.

I.I. Идея множества имеет прообразом собрание предметов, объединенных каким-то признаком. Мы говорим о "совокупности всех друзей данного человека", о "коллекции почтовых марок Доминиканской республики", о "собрании всех картин, написанных Петровым-Водкиным" и т.д. Во всех этих случаях слова "совокупность","коллекция", "собрание" могут быть заменены одним словом "множество". Каждому в достаточной мере владеющему русским языком понятно, о чем идет речь. И если все-таки возможны недоразумения, то лишь оттого, что порой бывает трудно определить, является ли некто действительно другом данного человека или принадлежит ли выставленное полотно кисти Петрова-Водкина, т.е. не является ли оно всего лишь искусной подделкой. Таким образом, можно говорить о множестве (или о совокупности, коллекции, собрании и т.п.), как только о каждом предмете мы с уверенностью можем установить, входит он в состав данного множества или нет.

В соответствии со сказанным основным отношением между данным множеством и прочими объектами является отношение включения. Если дано некоторое множество (обозначим его буковй A) и некоторый объект, обозначенный буквой x (кстати, объект x и сам может быть множеством), то справедливо одно и только одно из двух высказываний: "объект x входит в состав множества A " или "объект x не входит в состав множества A ". В случае, когда верно первое высказывание, говорят также: "объект x является элементом множества A ", "объект x входит в множество A " и т.д. При этом пишут: $x \in A$. Соответственно употребляются другие формы и второго высказывания, для краткого обозначения которого используется символ $x \bar{\in} A$ (или $x \notin A$).

ПРИНЦИП I. Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B и, обратно, каждый элемент из B входит в состав A , то множества A и B тождественны, т.е. $A = B$.

Иначе этот принцип, который часто называют принципом объемности, можно высказать так: множество полностью характеризуется составом своих элементов.

Другой принцип, регулирующий отношение включения, носит негативный характер. Вообще говоря, элементы данного множества сами могут быть множествами (см. далее, I.2). Однако

ПРИНЦИП II. Если A и B – множества, то не может быть одновременно $A \in B$ и $B \in A$.

В частности, полагая $B = A$, получим отсюда, что соотношение $A \in A$ неверно, т.е. никакое множество не может быть своим собственным элементом.

1.2. Пусть имеются множества A и B. Говорят, что множество B содержится в множестве A или что A содержит B, если каждый элемент из B служит также элементом и множества A. То, что B содержится в A, записывают в виде: $B \subset A$ или $A \supset B$.

Если $B \subset A$, то множество B называют подмножеством или частью множества A +). С помощью понятия подмножества принцип объемности может быть сформулирован так: если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Рассмотрим множество A. Предположим, что в отношении элементов множества A имеет смысл говорить о некотором свойстве P, т.е. если $x \in A$, то истинно одно из высказываний: "x обладает свойством P" или "x не обладает свойством P" ++).

ПРИНЦИП III. Каково бы ни было множество A и свойство P, существует множество B, элементами которого являются все те элементы множества A, которые обладают свойством P.

Множество B мы будем обозначать обычно так:

$$B = \{x \in A : x \text{ обладает свойством } P\}\ ^{+++)}.$$

+) Употребительны и другие словосочетания для обозначения соотношения $B \subset A$. Например: "множество B уже, чем A", "A шире, чем B" и т.п.

++) Не исключено, что свойство P осмыслено и для объектов, не принадлежащих множеству A.

+++) Следует иметь в виду, что в этом обозначении вместо x можно использовать любой другой знак, разумеется, за исключением тех, которые уже встречались в данном рассмотрении.

Чтобы продемонстрировать значение принципа III и, вообще, значение принципов, в которых утверждается с у щ е с т в о в а н и е каких-либо множеств, покажем, что в формулировке принципа III нельзя опустить множество A , т.е. что множество всех объектов, обладающих данным свойством P , может и не существовать. С этой целью рассмотрим в качестве P свойство "быть множеством". Существование множества S всех множеств противоречит принципу II, поскольку должно было бы быть $S \in S$. Существование множества всех множеств противоречит не только принципу II, но и принципу III. Действительно, предположим, что существует множество S всех множеств. Тогда согласно принципу III существует и множество

$$S_0 = \{ x \in S : x \bar{\in} x \}.$$

Ясно, что $S_0 \in S$. Если, кроме того, $S_0 \bar{\in} S_0$, т.е. если S_0 обладает свойством, характеризующим элементы множества S_0, то по определению этого множества $S_0 \in S_0$ (!?). Следовательно, должно быть $S_0 \in S_0$, но тогда, опять по определению множества S_0 , оказалось бы, что $S_0 \bar{\in} S_0$.

Из высказанных выше принципов не вытекает существование хотя бы одного конкретного множества. Следующий принцип вводит такое множество.

ПРИНЦИП IУ. Существует множество всех натуральных чисел.

Это множество мы будем обозначать обычно буквой $\mathcal{N}$. По причинам исторического характера часто вместо $n \in \mathcal{N}$ пишут $n=1,2..$

Рассмотрим какое-либо множество A (например, множество всех натуральных чисел) и пусть свойство P таково, что ни один элемент из A им не обладает. В качестве P можно взять, скажем, свойство: "не быть элементом множества A ". Согласно принципу III существует подмножество Λ_A множества A всех элементов из A, обладающих свойством P. Множество Λ_A называется п у с т ы м (содержащимся в A). Каков бы ни был объект x справедливо соотношение $x \bar{\in} \Lambda_A$. Действительно, если $x \bar{\in} A$, то тем более $x \bar{\in} \Lambda_A$ (ведь $\Lambda_A \subset A$!), если же $x \in A$, то $x \bar{\in} \Lambda_A$ по определению пустого множества. Отсюда вытекает, что все пустые множества совпадают. В самом деле, соотношение $\Lambda_A \subset \Lambda_B$ означает, что для какого-либо объекта x можно доказать справедливость включения $x \in \Lambda_B$ после того, как будет установлено включение $x \in \Lambda_A$. Но последнее включение никогда не будет установлено, так что опровергнуть тот факт, что если $x \in \Lambda_A$, то $x \in \Lambda_B$, невозможно. Таким образом, $\Lambda_A \subset \Lambda_B$ и, аналогично, $\Lambda_B \subset \Lambda_A$. Следовательно, по принципу объемности $\Lambda_A = \Lambda_B$. Из сказанного вытекает, что существует единственное пустое множество. Оно обозначается обычно знаком ϕ +).

В заключение сформулируем еще один принцип образования новых множеств, исходя из данных, который, как и принцип Ш, связан с понятием подмножества.

ПРИНЦИП У. Каково бы ни было данное множество, существует множество всех его подмножеств.

Множество всех подмножеств множества A обозначается через $\mathcal{P}(A)$ ++).

Из самого определения множества $\mathcal{P}(A)$ очевидно, что соотношения $B \in \mathcal{P}(A)$ и $B \subset A$ равносильны. Например, при любом A справедливы включения $\phi \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$.

+) Из данных высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно образовать составное высказывание "если верно $\mathfrak{A}$, то верно и $\mathfrak{B}$", которое называется импликацией высказываний $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и обозначается $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ (читается: "из $\mathfrak{A}$ следует $\mathfrak{B}$"). Истинность высказывания $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ означает, что одновременно не может быть: $\mathfrak{A}$ - верно, а $\mathfrak{B}$ - неверно. В частности, $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ истинно, если $\mathfrak{A}$ неверно, независимо от того, истинно или нет $\mathfrak{B}$ - из неверного высказывания вытекает любое высказывание.

Соотношение $A \subset B$ и означает как раз импликацию $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A} : x \in A$, а $\mathfrak{B} : x \in B$.

++) Иногда вместо $\mathcal{P}(A)$ используют несколько странное на первый взгляд обозначение 2^A. Закономерность его станет понятной позднее.

1.3. В дальнейшем для обозначения множества, все элементы которого сами являются множествами, мы будем часто использовать слово "система".

ПРИНЦИП VI. Какова бы ни была система множеств $\mathfrak{A}$, существует множество U такое, что $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(U)$, т.е. U содержит каждое из множеств, входящих в состав системы $\mathfrak{A}$:

ТЕОРЕМА I (1.1). Пусть $\mathfrak{A}$ – система множеств. Существует единственное множество S , обладающее свойствами:

1) $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(S)$;

2) если множество V таково, что

$$\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(V), \tag{1}$$

то $S \subset V$, т.е. множество S – наименьшее среди множеств V , удовлетворяющих (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно принципу VI существует множество U , содержащее все множества из системы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим свойство P : объект x обладает свойством P , если существует $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $x \in A$. В соответствии с принципом III образуем множество S всех элементов из U , обладающих свойством P и убедимся, что S – требуемое.

Проверим сначала, что $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(S)$. Для этого надо доказать, что любое множество $A \in \mathfrak{A}$ входит в состав множества $\mathcal{P}(S)$, т.е. является подмножеством множества S . Отметим сначала, что из соотношения $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(U)$ вытекает включение $A \subset U$, следовательно, произвольный элемент $x \in A$ входит также и в U: $x \in U$. Поскольку существует множество из системы $\mathfrak{A}$, включающее x , именно рассматриваемое множество A , то элемент $x \in U$ обладает свойством P. Поэтому $x \in S$, а это означает, что $A \subset S$.

Хотя определение множества S и связано с множеством U, на самом деле S от U не зависит – S можно определить как множество всех объектов, обладающих свойством P : если $x \,\bar{\in}\, U$, то x не может обладать свойством P. Множество U необходимо лишь для того, чтобы можно было гарантировать с у щ е с т в о в а н и е (на основании принципа III) множества S.

Поскольку S не зависит от U , при построении множества S можно вместо U взять любое множество V , удовлетворяющее тем же условиям, что и U, содержащее все множества системы $\mathfrak{A}$

т.е. условию (I). При этом будем иметь $S \subset V$, что и доказывает второе утверждение теоремы.

Осталось убедиться в единственности множества S. Если S' - еще одно множество, обладающее свойствами, аналогичными I) и 2), то, принимая в соотношении (I) в качестве V множество S', получим на основании свойства 2), что $S \subset S'$ Поменяв ролями S и S', придем к соотношению $S' \subset S$, которое вместе с предыдущим доказывает равенство $S' = S$.

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество S, существование и единственность которого только что доказаны, называется о б ъ е д и н е н и е м множеств системы $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ и обозначается $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A$ +).

Следующие предложения являются перефразировкой определения.

I. Если A_0 - множество из системы $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, то $A_0 \subset \bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A$.

П. Если любое множество системы $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ содержится в множестве $\mathcal{U}$ то и $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A \subset \mathcal{U}$.

Из I и П получаем, например, что в случае, когда $\mathcal{O}\!\mathcal{l} = \mathcal{P}(\mathcal{U})$, объединение $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A = \mathcal{U}$. В самом деле, $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \mathcal{O}\!\mathcal{l}$, поэтому на основании I $\mathcal{U} \subset \bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A$, а вследствие П $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A = \mathcal{U}$.

Также с помощью I и П получаем

Ш. Пусть, кроме системы $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$, дана еще такая система $\mathcal{B}$, что для каждого множества $A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$ можно указать множество $B \in \mathcal{B}$. содержащее A. Тогда $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} A \subset \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$.

В теореме I не исключено, что система $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ пуста. Ввиду того, что в этом случае $\mathcal{O}\!\mathcal{l} \subset \mathcal{P}(\mathcal{U})$, каково бы ни было множество $\mathcal{U}$, в определении объединения остается только второе требование теоремы, которому, очевидно, удовлетворяет множество $S = \phi$. Таким образом, объединение множеств пустой системы есть пустое множество.

ПРИНЦИП УП. Если даны объекты x и y, то существует множество, обозначаемое $\{x, y\}$, имеющее x и y единственными элементами.

+) Понятно, что вместо A в этом символе может быть использован любой другой знак за исключением тех, которые уже встречались в данном рассмотрении.

Это означает, что соотношение $z \in \{x, y\}$ равносильно тому, что или $z = x$, или $z = y$.

Отметим, что $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Если объект y тождествен объекту x, то множество $\{x, y\}$ состоит из единственного элемента x и обозначается просто $\{x\}$. Таким образом, $\{x, x\} = \{x\}$.

Рассмотрим объекты x, y и z . На основании принципа УП образуем множества $\{x, y\}$ и $\{z\}$ и вслед за тем систему $\{\{x,y\},\{z\}\}$.

Объединение множеств этой системы, обозначаемое $\{x, y, z\}$, включает элементы x, y и z , и только их. Отсюда, между прочим, вытекает, что, например, $\{x, y, z\} = \{x, z, y\}$ и т.д.

Аналогичным образом можно построить множества, состоящие и из большего, чем три, числа объектов.

Пусть даны множества A и B . Объединение множеств системы $\{A, B\}$ называется просто объединением множеств A и B и обозначается $A \cup B$. Подобным же образом определяется объединение $A \cup B \cup C$ множеств A, B, C и т.д.

Очевидно, соотношение $x \in A \cup B$ равносильно тому, что имеет место, по крайней мере, одно из двух включений: $x \in A$ или $x \in B$.

В дополнение к предложениям I – Ш отметим еще некоторые свойства объединения.

$$A \cup B = B \cup A \;; \tag{2}$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C; \tag{3}$$

$$A \cup A = A \;, \tag{4}$$

$$A \cup \phi = A \;. \tag{5}$$

I.4. Как и в I.3, рассмотрим систему α множеств. На этот раз будем предполагать, однако, что α – непустая.

ТЕОРЕМА 2(I.I). Существует единственное множество D_0, обладающее свойствами:

I) множество D_0 является подмножеством каждого из множеств системы α ;

2) D_0 – наибольшее из множеств, обладающих этим свойством, т.е. если множество D служит подмножеством каждого множества из системы α, то $D_0 \supset D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку система $\mathfrak{A}$ непуста, существует множество $A_0 \in \mathfrak{A}$. Обозначим через D_0 множество всех таких элементов из A_0, которые принадлежат каждому из множеств системы $\mathfrak{A}$. Ясно, что D_0 обладает первым свойством. Если, далее, множество D из условия 2), то ввиду того, что для любого $A \in \mathfrak{A}$ будет $D \subset A$, соотношение $x \in D$ влечет $x \in A$ для любого множества $A \in \mathfrak{A}$. В частности, $x \in A_0$. Поэтому по построению множества D_0 оказывается $x \in D_0$. Таким образом, $D \subset D_0$.

Опираясь на свойство 2) по тому же образцу, что и в теореме 1, докажем единственность множества D_0.

Множество D_0 называется пересечением множеств системы $\mathfrak{A}$ и обозначается символом $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$.

Как и в случае объединения, образуя из данных множеств A и B систему $\{A, B\}$, можно построить пересечение $A \cap B$ множеств A и B. Соотношение $x \in A \cap B$ равносильно тому, что одновременно $x \in A$ и $x \in B$.

Можно, разумеется, говорить и о пересечении $A \cap B \cap C$ множеств A, B, C и т.д.

Предоставляем читателю самостоятельно сформулировать свойства пересечения, аналогичные свойствам I-III и (2)-(5) из I.3. Отметим здесь лишь так называемое свойство дистрибутивности: если A, B, C – произвольные множества, то

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C); \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cap C).$$

Проверим, например, второе из этих соотношений. Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$. Это означает, что либо $x \in A \cap B$, либо $x \in C$. В первом случае должно быть одновременно $x \in A$ и $x \in B$, тем более $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Оба последних включения имеют место и тогда, когда $x \in C$. Таким образом, в обоих случаях $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, т.е. $(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Рассмотрим теперь элемент $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Согласно определению, это равносильно тому, что одновременно $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Но $x \in A \cup C$ означает, что или $x \in A$, или $x \in C$. Если имеет место $x \in C$, то тем самым верно и $x \in (A \cap B) \cup C$. В случае, когда $x \overline{\in} C$ должно быть непременно $x \in A$, и по тем же причинам (ведь $x \in B \cup C$!) $x \in B$, так что $x \in A \cap B$ и подавно $x \in (A \cap B) \cup C$. Итак, справедливо включение $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$, что вместе с предыдущим приводит к требуемому равенству.

Сформулируем в заключение часто встречающийся принцип, так называемую аксиому Цермело.

ПРИНЦИП УШ. Пусть $\mathfrak{A}$ - система непустых попарно непересекающихся (т.е. с пустым пересечением) множеств. Существует множество X такое, что, каково бы ни было $A \in \mathfrak{A}$, пересечение $A \cap X$ состоит из единственного элемента.

Иначе говоря, выбрав из каждого множества системы по элементу (что возможно вследствие непустоты этих множеств), можно образовать м н о ж е с т в о всех выбранных элементов. В связи с такой интерпретацией указанный принцип часто называют п р и н ц и п о м в ы б о р а.

К операциям объединения и пересечения мы еще вернемся в следующем параграфе.

I.5. Пусть даны множества A и B. Множество

$$P = \{ x \in A : x \bar{\in} B \}$$

называется р а з н о с т ь ю множеств A и B и обозначается символом $A \setminus B$.

Ясно, что

$$(A \setminus B) \cup B = A \cup B ,$$

а в случае, когда $A \supset B$, т.е. когда объединение $A \cup B$ совпадает с A, имеет место более простое равенство

$$(A \setminus B) \cup B = A.$$

Нередко все рассматриваемые множества суть подмножества одного (универсального) множества U. В этом случае разность $U \setminus A$ называется д о п о л н е н и е м множества A (до U) и обозначается A' (или CA). Очевидно

$$A \cup A' = U , \qquad A \cap A' = \phi , \qquad A'' = (A')' = A .$$

Далее, если $A \supset B$, $A' \subset B'$.

Рассмотрим непустую систему $\mathfrak{A}$ подмножеств множества U и систему $\mathfrak{A}'$, состоящую из дополнений множеств системы $\mathfrak{A}$: множество $B \in \mathfrak{A}'$ в том и только в том случае, когда существует такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $B = A'$. Справедливы соотношения

$$\Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A\Big)' = \bigcap_{A' \in \mathfrak{A}'} A' , \qquad \Big(\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A\Big)' = \bigcup_{A' \in \mathfrak{A}'} A' . \qquad (6)$$

Действительно, обозначим $S = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$ и проверим, что $S' = \bigcap\limits_{A' \in \mathfrak{A}'} A'$. Для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ имеем $S \supset A$. Следовательно, $S' \subset A'$. Пусть D – какое-либо множество, содержащееся в каждом множестве системы $\mathfrak{A}'$: из $B \in \mathfrak{A}'$ вытекает $D \subset B$. Рассмотрим дополнение D' множества D. Поскольку для произвольного $A \in \mathfrak{A}$ его дополнение $A' \in \mathfrak{A}'$, то $D \subset A'$ и, значит, $D' \supset A$. Поэтому согласно определению объединения должно быть $D' \supset S$ или $D = D'' \subset S'$. По определению пересечения заключаем отсюда, что $S' = \bigcap\limits_{A' \in \mathfrak{A}'} A'$.

Второе из соотношений (6) можно доказать, если заметить, что, образуя из системы $\mathfrak{A}'$ систему дополнений входящих в $\mathfrak{A}'$ множеств, мы получим исходную систему $\mathfrak{A}$. Тогда, воспользовавшись первым соотношением, можем написать

$$\bigcup_{A' \in \mathfrak{A}'} A' = \Big(\bigcup_{A' \in \mathfrak{A}'} A'\Big)'' = \Big(\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A\Big)'.$$

В рассматриваемой обстановке, когда все данные множества являются подмножествами универсального множества U, соотношения (6) дают возможность осмыслить пересечение $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$ и в том случае, когда система $\mathfrak{A}$ пустая. Поскольку при этом пуста и система $\mathfrak{A}'$, то $\bigcup\limits_{A' \in \mathfrak{A}'} A' = \varnothing$ (см. I.3). Следовательно, полагая $\bigcap\limits_{A \in \varnothing} A = U$, мы сохраним справедливость равенств (6) и в рассматриваемом случае. Заметим, что при таком определении пересечения пустой системы остается верной, разумеется лишь в известном смысле, и теорема 2, согласно которой пересечением пустой системы множеств должно быть наибольшее множество, т.е. множество U (ведь рассматриваются только подмножества множества U !).

I.6. Множества A и B входят в разность $A \setminus B$ не симметрично. В связи с этим иногда бывает целесообразно рассматривать так называемую *симметрическую разность* этих множеств. Под ней понимается множество

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Понятно, что $x \in A \Delta B$ означает, что верно одно и только одно из двух соотношений: $x \in A$ или $x \in B$.

В множестве $\mathfrak{P}(U)$ всех подмножеств данного множества U операции пересечения и симметрической разности в известной мере аналогичны операциям умножения и сложения чисел. При этом аналогом

числа 0 служит пустое множество, а числа I - множество U.
Если говорить точнее, то, во-первых, указанные операции над множествами подчиняются ассоциативному, коммутативному и дистрибутивному законам; для операции пересечения справедливость ассоциативного и коммутативного законов уже отмечалась в I.4; свойство коммутативности симметрической разности ясно непосредственно из определения; ассоциативный закон, т.е. соотношение

$$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C) \qquad (A, B, C \in \mathfrak{P}(U)), \tag{7}$$

следует из того, что легко проверить, что множество как в правой, так и в левой части равенства (7) состоит из всех тех элементов, которые входят только в одно из множеств A, B или C; справедливость дистрибутивного закона

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C) \qquad (A, B, C \in \mathfrak{P}(U)) \tag{8}$$

устанавливается непосредственной проверкой условий принципа I.

Кроме указанных, имеются и другие соотношения, аналогичные соотношениям между числами:

$$A \Delta \varnothing = A, \quad A \cap U = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing \qquad (A \in \mathfrak{P}(U)). \tag{9}$$

Далее, каковы бы ни были множества $A, B \in \mathfrak{P}(U)$, существует единственное множество $X \in \mathfrak{P}(U)$ такое, что

$$A \Delta X = B. \tag{10}$$

В самом деле, если множество X существует, то по ассоциативному закону

$$X = X \Delta \varnothing = \varnothing \Delta X = (A \Delta A) \Delta X = A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B.$$

Поскольку

$$A \Delta (A \Delta B) = (A \Delta A) \Delta B = \varnothing \Delta B = B,$$

то $X = A \Delta B$ действительно удовлетворяет уравнению (10).

Следует иметь в виду, что аналогия между операциями над множествами и над числами не распространяется слишком далеко. Так, мы уже пользовались равенством $A \Delta A = \varnothing$, аналог которого для чисел не имеет места. Таково же соотношение $A \cap A = A$.
С другой стороны, в то время как числа можно делить одно на другое: при любых $a \neq 0$ и b существует единственное число x, удовлетворяющее равенству $ax = b$, аналогичное дей-

ствие над множествами, вообще говоря, не выполнимо - если A и B - данные множества, то X, удовлетворяющее соотношению $A \cap X = B$ существует лишь в случае, когда $A \supset B$; будучи выполнимым, "деление", как правило, не однозначно - к X можно добавить любое множество, имеющее с A пустое пересечение.

Общими как для множеств, так и для чисел будут те свойства, которые могут быть выведены из ассоциативного, коммутативного, дистрибутивного законов и соотношения (I0). Если же какое-либо свойство не вытекает из перечисленных, то оно может наличествовать в одном и отсутствовать в другом случае. В § 4 мы еще вернемся к этому вопросу.

I.7. Рассматривая какие-либо конкретные объекты x и y, мы нередко наблюдаем, что между ними нет полного равноправия: можно различать "старший" и "младший", "левый" и "правый", "главный" и "второстепенный", "первый" и "второй" и т.п. Это наблюдение находит свое абстрактное выражение в понятии "упорядоченная пара".

Пусть имеются объекты x и y. Множество $\{x, \{x, y\}\}$ называется **упорядоченной парой** элементов x и y и обозначается символом (x, y). Объект x называется **первым** элементом упорядоченной пары (x, y), а y – вторым.

ТЕОРЕМА 3(I.I) Если $(x, y) = (u, v)$, то $x = u, y = v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $x \in (x, y) = (u, v)$, то по определению множества $(u, v) = \{u, \{u, v\}\}$ (см. I.3) должно быть одно из двух: $x = u$ или $x = \{u, v\}$. Точно так же имеет место одно из равенств: $\{x, y\} = u$ или $\{x, y\} = \{u, v\}$. Таким образом, справедливо одно из четырех предложений: а) $x = u$ и $\{x, y\} = \{u, v\}$; б) $x = u$ и $\{x, y\} = u$; в) $x = \{u, v\}$ и $\{x, y\} = u$; г) $x = \{u, v\}$, $\{x, y\} = \{u, v\}$. Разберем каждое из них в отдельности.

а) Поскольку $y \in \{x, y\} = \{u, v\}$, то либо $y = v$, и тогда утверждение теоремы доказано, либо $y = u = x$, т.е. множество $\{x, y\}$ состоит из единственного элемента x (совпадающего с y и с u). Так как v - элемент этого множества, то $v = x$. Таким образом, в этом случае все объекты x, y, u, v совпадают, в частности $x = u$ и $y = v$, так что и на этот раз утверждение теоремы справедливо.

б) Из равенства $u=\{x,y\}$ следует $x \in u$, а так как $u=x$, то $x \in x$, что противоречит принципу II - этот случай неосуществим.

в) И здесь получаем: с одной стороны $u \in \{u,v\}=x$, с другой - $x \in \{x,y\} = u$, что опять противоречит принципу II.

г) Из соотношений этого пункта вытекает равенство $x=\{x,y\}$, так что $x \in x$, и вновь мы приходим к противоречию с принципом II.

Итак, из гипотез а) - г) осуществима только первая, что и доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Если $(x,y)=(y,x)$, то $x=y$.

Следующий принцип позволяет рассматривать множество всех упорядоченных пар, составленных из элементов данных множеств.

ПРИНЦИП IX. Пусть A и B - данные множества. Существует множество $A \times B$ всех упорядоченных пар вида (x,y), $x \in A, y \in B$.

Множество $A \times B$ называется *произведением* множеств A и B.

Изучению произведения множеств посвящен, в сущности, весь следующий параграф. Здесь же мы рассмотрим лишь несколько примеров произведения множеств.

Примером произведения множеств может служить шахматная доска - каждую ее клетку можно рассматривать как упорядоченную пару (x, y), где $x \in \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $y \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Прямоугольный зрительный зал является другим примером произведения: каждое кресло - это упорядоченная пара (x,y), где x номер ряда, а y - номер кресла в данном ряду.

Более содержательный пример произведения доставляет множество P всех точек, лежащих на данной плоскости (рис. I). Проведем в плоскости какие-нибудь непараллельные прямые L и M. Множество всех точек, лежащих на L, обозначим через A, на M - через B Пусть $z \in P$. Через точку z проведем прямые L_z и M_z, параллельные прямой L и, соответственно, M +). Точку пересечения прямых M_z и L обозначим через x, прямых L_z и M - через y. Таким образом, описанная конструкция связывает с каждой точкой $z \in P$ упорядоченную пару (x,y) точек $x \in A, y \in B$.

+) Если z лежит на прямой L или M, то под L_z или, соответственно, M_z следует понимать самое прямую L (или M).

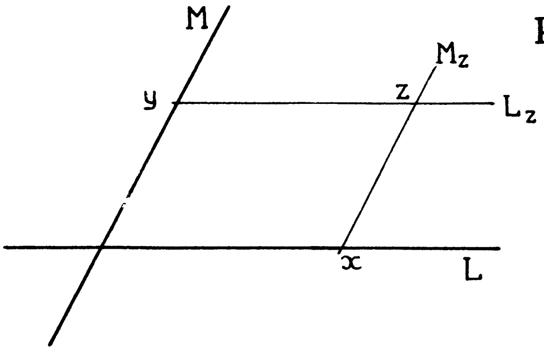

Рис. I

Обратно, всякая пара такого вида определяет с помощью подобного построения точку $z \in P$. Это позволяет говорить о парах (x,y) – элементах произведения $A \times B$ – вместо точек $z \in P$ и наоборот, т.е. позволяет отождествить множество P с произведением $A \times B$+).

Подобно этому множество всех точек параллелограмма можно рассматривать как произведение множеств всех точек, лежащих на какой-нибудь паре непараллельных его сторон.

В заключение отметим еще такой очевидный факт, что для любого множества A произведения

$$A \times \phi = \phi \times A = \phi .$$

+) Следует иметь в виду, что равенство $P = A \times B$ имеет условный характер: точка $z \in P$ не есть упорядоченная пара (x, y), а лишь однозначно определяет ее, причем то, какую именно пару определяет данная точка z, зависит от выбора прямых L и M, т.е. от способа отождествления. Пренебрежение указанным обстоятельством может привести к недоразумениям и, более того, ложным заключениям.

§ 2. Отображения

Важнейшими после множеств объектами математики являются, безусловно, отображения. Если попытаться в немногих словах охарактеризовать предмет математики, то можно сказать, что математика занимается изучением множеств и их связей между собой, осуществляемых с помощью отображений.

Говоря об отображении или, более общо, о соответствии между элементами данных множеств X и Y, обычно подразумевают п р а в и л о, согласно которому по данному элементу множества X могут быть определены соответствующие ему элементы (их может быть и несколько или, напротив, ни одного) множества Y. Как бы ни было задано такое правило, оно приводит, следовательно, к некоторому множеству упорядоченных пар вида (x, y), где x - какой-либо элемент множества X, а y - любой из соответствующих ему по этому правилу элементов множества Y (если, конечно, таковые элементы имеются). Понятно, что и обратно, указав некоторое множество $F \subset X \times Y$, мы тотчас же получаем правило соответствия: элементу $x \in X$ сопоставляются все элементы $y \in Y$ такого рода, что $(x, y) \in F$.

В связи со сказанным нет необходимости различать множество F и правило, его породившее, т.е. под соответствием между X и Y можно понимать множество, содержащееся в произведении $X \times Y$. Именно на такую точку зрения мы и становимся в этом параграфе, где сообщаются основные определения и приводятся простейшие факты, связанные с понятием соответствия и, в частности, отображения.

2.I. Рассмотрим множества X и Y и множество $F \subset X \times Y$ (рис.2). Пусть $x \in X$. Множество

$$F[x] = \{ y \in Y : (x, y) \in F \} \tag{I}$$

называется с е ч е н и е м (п е р в о г о т и п а) множества F элементом x.

Аналогично, если $y \in Y$, то множество

$$F^{-1}[y] = \{ x \in X : (x, y) \in F \} \tag{2}$$

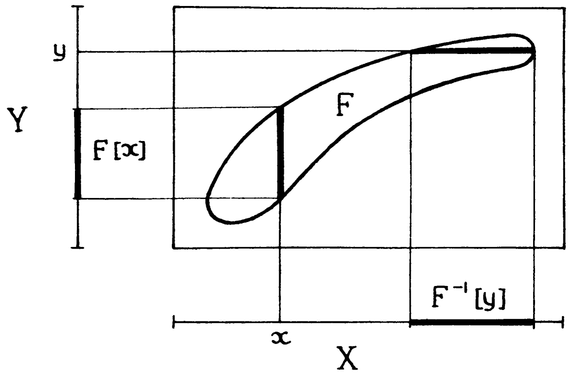

Рис. 2

называется **сечением (второго типа)** множества F элементом y.

Как ясно из данных определений, соотношения

$$(x,y)\in F, \qquad y\in F[x], \quad x\in F^{-1}[y] \tag{3}$$

равносильны друг другу.

В известном смысле сечения $F[x]$ и $F^{-1}[y]$ не зависят от множеств X и Y. Пусть X, Y, U, V – данные множества. Рассмотрим множество $F\subset X\times Y$ и предположим, что, кроме того, $F\subset U\times V$. Обозначим через $F_{X\times Y}[x]$ сечение F элементом $x\in X$, определенное исходя из произведения $X\times Y$, а через $F_{U\times V}[u]$ $(u\in U)$ – то же, но связанное с произведением $U\times V$.

I. Если для какого-либо $x\in X$ сечение $F_{X\times Y}[x]\neq\phi$, то $x\in U$, причем

$$F_{U\times V}[x] = F_{X\times Y}[x]. \tag{4}$$

В самом деле, так как $F_{X\times Y}[x]\neq\phi$, то найдется $y\in F_{X\times Y}[x]$. Согласно (3) это равносильно соотношению $(x,y)\in F$, так что $(x,y)\in U\times V$, т.е. $x\in U$, $y\in V$. Снова на основании (3) заключаем отсюда, что $y\in F_{U\times V}[x]$. Поскольку y – произвольный элемент множества $F_{X\times Y}[x]$, проведенные рассуждения доказывают включение $F_{X\times Y}[x]\subset F_{U\times V}[x]$.

Ввиду полного равноправия этих множеств (ведь $x \in U$) справедливо и обратное включение и тем самым равенство (4).

II. В условиях и обозначениях предложения I имеют место соотношения

$$F_{X\times Y}[x] \subset Y \cap V \quad (x \in X) \quad , \qquad F_{U\times V}[u] \subset Y \cap V \quad (u \in U) . \qquad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть F – множество упорядоченных пар. Основываясь на определении упорядоченной пары, а также на принципах III и VI из § I, можно доказать – предоставляем это читателю, – что существуют такие множества X и Y , что $F \subset X \times Y$.

Пусть, как и вначале, $F \subset X \times Y$.

Множества

$$Pr_I F = \{x \in X : F[x] \neq \phi\}, \; Pr_{II} F = \{y \in Y : F^{-1}[y] \neq \phi\}$$

называются п р о е к ц и я м и (первой и, соответственно, второй) множества F.

Из I вытекает, что проекции множества F не зависят от множеств X и Y , т.е. если подобно тому, как это предположено в условиях предложения I, $F \subset U \times V$,то первая проекция,определенная как подмножество множества X , совпадает с первой проекцией определенной как подмножество множества U . Точно так же совпадают и вторые проекции.

Пусть множество $A \subset X$, а множество $B \subset Y$. Положим $F \subset A \times B$ (рис. 3). Легко проверить, что

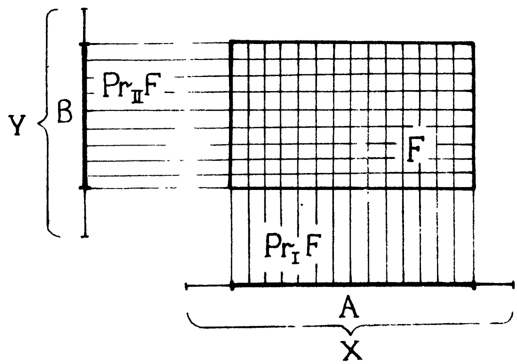

Рис. 3

$$F[x] = \begin{cases} B & (x \in A) \\ \phi & (x \in X \setminus A), \end{cases} \qquad F^{-1}[y] = \begin{cases} A & (y \in B) \\ \phi & (y \in Y \setminus B), \end{cases}$$

откуда при условии, что $A, B \neq \phi$, получаем

$$Pr_I F = A \quad , \qquad Pr_{II} F = B ,$$

так что $F = Pr_I F \times Pr_{II} F$.

В случае произвольного множества $F \subset X \times Y$ такое равенство, разумеется, уже неверно – справедливо лишь включение

$$F \subset Pr_I F \times Pr_{II} F . \tag{6}$$

Действительно, если $(x, y) \in F$, то $y \in F[x]$, $x \in F^{-1}[y]$. Следовательно, множества $F[x]$ и $F^{-1}[y]$ непусты и по определению $x \in Pr_I F$, а $y \in Pr_{II} F$.

2.2. Как уже было сказано во введении к настоящему параграфу, множество F упорядоченных пар вида (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ называется соответствием из множества X в множество Y. При этом множества $F[x]$ $(x \in X)$ и $F^{-1}[y]$ $(y \in Y)$ называются соответственно образом элемента x и (полным) прообразом элемента y при соответствии F.

Первая проекция $Pr_I F$ соответствия F называется областью определения F – обозначается через Ω_F. Множество $Pr_{II} F$ называется областью значений соответствия F и обозначается Δ_F.

Пусть A – произвольное подмножество множества X. Множество

$$F[A] = \{ y \in Y : F^{-1}[y] \cap A \neq \phi \}$$

называется образом множества A при соответствии F (рис.4). Элемент $y \in Y$ тогда и только тогда входит в образ $F[A]$ множества A, когда существует такой $x \in A$, что $x \in F^{-1}[y]$, т.е. (см.(3)) $y \in F[x]$.

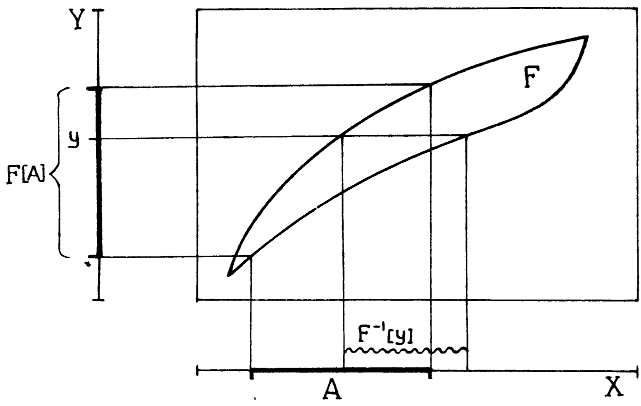

Рис. 4

Поскольку из $x \in F^{-1}[y]$, следует, что $F^{-1}[y] \neq \phi$, т.е. что $y \in Pr_{II} F = \Delta_F$, то $F[A] \subset \Delta_F$. Если же $A \supset Pr_I F = \Omega_F$, то $F[A] = \Delta_F$: вследствие (6) $F^{-1}[y] \subset Pr_I F$ при любом $y \in Y$, и, значит, пересечение $F^{-1}[y] \cap A$ совпадает в этом случае с $F^{-1}[y]$.

Непосредственно из определения легко устанавливаются следующие свойства образа:

$$F[A] = F[A \cap \Omega_F] \qquad (A \subset X); \qquad (7)$$

$$F[A_1] \subset F[A_2] \qquad (A_1 \subset A_2 \subset X); \qquad (8)$$

$$F[A_1 \cup A_2] = F[A_1] \cup F[A_2] \qquad (A_1, A_2 \subset X);$$

$$F[A_1 \cap A_2] \subset F[A_1] \cap F[A_2] \qquad (A_1, A_2 \subset X). \qquad (10)$$

Аналогично образу определяется (п о л н ы й) п р о о б р а з $F^{-1}[B]$ м н о ж е с т в а $B \subset Y$ при соответствии $F \subset X \times Y$. Именно

$$F^{-1}[B] = \{x \in X : F[x] \cap B \neq \phi\}.$$

Нет надобности выписывать свойства прообраза, подобные (7)-(10), тем более, что ниже они будут выведены формально из свойств образа.

Пусть F_1 и F_2 – соответствия из X в Y. Если $F_1 \subset F_2$, то F_1 называется **сужением** F_2, а F_2 – **распространением** F_1. Очевидно

$$F_1[x] \subset F_2(x] \qquad (x \in X), \quad F_1^{-1}[y] \subset F_2^{-1}[y] \qquad (y \in Y), \tag{11}$$

откуда вытекают включения

$$\Omega_{F_1} \subset \Omega_{F_2}, \qquad \Delta_{F_1} \subset \Delta_{F_2}. \tag{12}$$

2.3. Рассмотрим множества X, Y, U, V и соответствия $F \subset X \times Y$, $G \subset U \times V$. **Суперпозицией** $G \circ F$ данных соответствий называется соответствие $H \subset X \times V$, которое определяется как множество всех таких упорядоченных пар $(x, v) \in X \times V$, что для каждой из них существует элемент z, обладающий свойством: $(x, z) \in F$, $(z, v) \in G$.

Докажем, что

$$H[x] = G[F[x]] \qquad (x \in X). \tag{13}$$

В самом деле, $v \in H[x]$ равносильно тому, что $(x, v) \in H$; это же означает, что существует такой z, что одновременно $(x, z) \in F$ и $(z, v) \in G$. Отсюда следует, во-первых, что $z \in Y \cap U$ и, кроме того, что $z \in F[x]$, $v \in G[z]$, что по определению образа множества эквивалентно включению $v \in G[F[x]]$.

Знание всех сечений какого-либо соответствия позволяет на основании (3) восстановить это соответствие. Поэтому равенство (13) полностью определяет суперпозицию $G \circ F$. Нередко при определении суперпозиции как раз и исходят из (13).

В (13) можно подставить вместо элемента $x \in X$ произвольное множество $A \subset X$:

$$H[A] = G[F[A]]. \tag{14}$$

Хотя непосредственный вывод этого соотношения и несложен, мы не приводим его здесь. Доказательство формулы (14) будет получено из косвенных соображений позднее, когда в нашем распоряжении появятся новые факты. Там же будут даны сведения о прообразе элемента и множества при соответствии $G \circ F$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует иметь в виду, что суперпозиция не обладает свойством коммутативности, т.е. что вообще говоря, $G \circ F \neq F \circ G$.

Это вытекает хотя бы из того, что $G \circ F \subset \Omega_F \times \Delta_G$, а $F \circ G \subset \Omega_G \times \Delta_F$. Но даже и в случае $\Omega_F = \Omega_G = \Delta_F = \Delta_G$ коммутативность не имеет места. В дальнейшем мы встретим многочисленные примеры этого.

Можно показать (это будет сделано ниже), что

$$\Delta_{G \circ F} = G[\Omega_G \cap \Delta_F], \qquad \Omega_{G \circ F} = F^{-1}[\Omega_G \cap \Delta_F]. \tag{I5}$$

Если имеются соответствия $F_i \subset X_i \times Y_i$ $(i = 1,2,3)$, то по указанному выше образцу можно образовать их суперпозицию $F_3 \circ F_2 \circ F_1$, понимая под ней множество всех таких пар $(x, y) \in X_1 \times Y_3$, что между элементами x и y можно "вставить" элементы x_2 и y_2 так, чтобы было $(x, x_2) \in F_1$, $(x_2, y_2) \in F_2$, $(y_2, y) \in F_3$. Непосредственно из определения вытекает равенство $F_3 \circ F_2 \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1) = (F_3 \circ F_2) \circ F_1$, так что для суперпозиции выполняется ассоциативный закон.

В заключение заметим, что хотя формально суперпозиция $G \circ F$ зависит от множеств X, Y, U, V, на самом деле она определяется только соответствиями F и G. Справедливость этого замечания вытекает из того, что суперпозицию $G \circ F$ можно определить как множество в с е х таких упорядоченных пар (x, v) (не предполагая заранее, что $x \in X$, $v \in V$), для которых существует объект z, обладающий свойством: (x, z) $\in F$, (z, v) $\in G$. Роль множеств X, V (Y, U вообще не участвуют в определении) состоит лишь в том, что они без дополнительных рассуждений позволяют гарантировать с у щ е с т в о в а н и е м н о ж е с т в а $G \circ F$ (ср. замечание из 2.I).

2.4. Пусть опять имеется соответствие F из множества X в множество Y. Наряду с произведением $X \times Y$ рассмотрим произведение $Y \times X$ и соответствие

$$F^{-1} = \{ (y, x) \in Y \times X \ : (x, y) \in F \},$$

которое называется о б р а т н ы м по отношению к соответствию F.

Сразу же отметим, что соответствием, обратным по отношению к F^{-1}, будет данное соответствие F: $(F^{-1})^{-1}=F$.

Если $y\in Y$, то символ $F^{-1}[y]$ можно теперь понимать не только как прообраз элемента y при соответствии F, т.е. как сечение второго типа множества F, но и как сечение первого типа множества F^{-1}. Недоразумений, однако, здесь возникнуть не может, поскольку оба истолкования приводят к одинаковым результатам. Действительно, если рассматривать множество $F^{-1}[y]$ как сечение первого типа множества F^{-1}, то

$$F^{-1}[y]=\{x\in X:\ (y,x)\in F^{-1}\}. \tag{16}$$

Но соотношения $(y,x)\in F^{-1}$ и $(x,y)\in F$ равносильны, откуда и следует, что множество (16) совпадает с (2).

То же самое верно, конечно, и по поводу символа $F^{-1}[B]$ $(B\subset Y)$, который можно истолковывать и как прообраз множества B при соответствии F и как образ B при соответствии F^{-1}.

Используя сделанное замечание, получаем

$$\Omega_{F^{-1}}=\{y\in Y: F^{-1}[y]\neq\phi\}=\Delta_F \tag{17}$$

и точно так же

$$\Delta_{F^{-1}}=\Omega_F. \tag{18}$$

Далее, заменяя в соотношениях (7) - (10) соответствие F обратным ему, придем к свойствам прообраза множества при соответствии F^{-1}.

Обозначим

$$I=\{(x,y)\in X\times X:\ x=y\in\Omega_F\} \tag{19}$$

и проверим справедливость включения

$$F\circ F^{-1}\supset I. \tag{19}$$

Действительно, если $x\in\Omega_F$, то $F[x]\neq\phi$, т.е. существует $y\in F[x]$. Согласно (3) это означает $(x,y)\in F$ и, следовательно, $(y,x)\in F^{-1}$. Таким образом, пара $(x,x)\in F^{-1}\circ F$, что и доказывает (19).

Рассмотрим теперь соответствия $F\subset X\times Y$ и $G\subset U\times V$ и их суперпозицию $H=G\circ F$. Докажем, что

$$H^{-1}=F^{-1}\circ G^{-1}. \tag{20}$$

В самом деле, $(v,x)\in H^{-1}$ равносильно $(x,v)\in H$, а это по определению суперпозиции означает существование такого z, что $(x,z)\in F$, $(z,v)\in G$. Переписывая последние соотношения в виде $(v,z)\in G^{-1}$, $(z,x)\in F^{-1}$ и снова прибегая к определению супе - позиции, получим окончательно, что соотношения $(v,x)\in H^{-1}$ и $(v,x)\in F^{-1}\circ G^{-1}$ эквивалентны.

Используя (20), на основании (I3) для $v\in V$ можно написать

$$H^{-1}[v]=F^{-1}[G^{-1}[v]]. \qquad (2I)$$

Для множества $C\subset V$ получаем таким же образом из (I4)

$$H^{-1}[C]=F^{-1}[G^{-1}[C]]. \qquad (22)$$

2.5. Соответствие $F\subset X\times Y$ называется **однозначным**, если для любого $x\in X$ сечение $F[x]$ содержит не более одного элемента. Однозначное соответствие называется также **отображением** +). Если $x\in \Omega_F$, то множество $F[x]\neq\phi$ и, следовательно, состоит из единственного элемента, который обозначается $F(x)$ и называется **значением** отображения F ,соответствующим данному x . Таким образом, $F[x]=\{F(x)\}$.

Символ $F(x)$ определен лишь для $x\in\Omega_F$. Именно поэтому множество Ω_F и названо областью определения F . По этим же причинам употребительна фраза: "отображение F определено (или задано) на множестве Ω_F ". Таково же происхождение термина "область значений": Δ_F есть множество всех значений отображения F.

Чтобы легче было понять, идет ли речь об отображении или о произвольном соответствии, условимся на протяжении данного параграфа первые обозначать строчными буквами, вторые - прописными. В соответствии с этим соглашением рассмотрим отображение f из X в Y. Тот факт, что f - однозначное соответствие, означает, очевидно,

I. Если $(x,y_1),(x,y_2)\in f$, то $y_1=y_2=f(x)$.

Задать отображение f - это все равно, что указать правило,по

+) Кроме "отображения" употребительны и другие термины: "функция", "преобразование", "оператор" и т.п. Некоторые из них мы будем использовать, но лишь для обозначения специальных классов отображений.

которому каждому элементу $x \in \Omega_f$ сопоставляется его значение-элемент $f(x)$. Поэтому для обозначения отображения f употребительна запись: $f: x \to f(x) \quad (x \in \Omega_f)$.

Если $\Omega_f = X$ (а $\Delta_f \subset Y$), то говорят, что f – отображение X (а не из X) в Y, и пишут $f: X \to Y$. Если, кроме того, $\Delta_f = Y$, то говорят, что f на Y (в обозначениях $f: X \xrightarrow{на} Y$).

Суперпозиция $h = g \circ f$ отображений $f \subset X \times Y$ и $g \subset U \times V$, как это вытекает из формулы (13), сама является отображением. Из (13) же вытекает, что

$$\Omega_h = \{x \in \Omega_f : f(x) \in \Omega_g\} = \Omega_f \cap f^{-1}[\Omega_g],$$

причем

$$h(x) = g(f(x)) \qquad (x \in \Omega_h).$$

Если соответствие f_1 является сужением отображения $f_2 \subset X \times Y$, то из (11) следует, что f_1 – также отображение. При этом

$$\Omega_{f_1} \subset \Omega_{f_2}, \qquad f_1(x) = f_2(x) \qquad (x \in \Omega_{f_1}). \tag{23}$$

Обратно, если два отображения f_1 и f_2 связаны между собой соотношениями (23), то $f_1 \subset f_2$.

Пусть f – отображение множества Ξ в множество Y. Положим $f(\xi) = y_\xi \quad (\xi \in \Xi)$, так что $f: \xi \to y_\xi \quad (\xi \in \Xi)$. Иногда вместо этого пишут коротко: $f: \{y_\xi\} \quad (\xi \in \Xi)$, и говорят о **семействе** f элементов множества Y, причем множество Ξ – область определения f – называют **множеством индексов** семейства.+) Семейство, множеством индексов которого служит множество $\mathcal{N}$ всех натуральных чисел, называется **последовательностью**. Вместо $\{y_\xi\} \quad (\xi \in \mathcal{N})$ пишут обычно $\{y_\xi\}_{\xi=1}^{\infty}$ или даже просто $\{y_\xi\}$.

Если из двух семейств одно является сужением другого, то первое называют **подсемейством** второго.

2.6. Рассмотрим какое-либо семейство $\varphi: \{A_\xi\} \quad (\xi \in \Xi)$ подмножеств некоторого множества U, т.е., иначе говоря, отображение $\varphi: \xi \to A_\xi \quad (\xi \in \Xi)$ множества Ξ в множество $\mathcal{P}(U)$. Область значений Δ_φ отображения φ представляет собой систему $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(U)$

+) Таким образом, термин "семейство" является полным синонимом термина "отображение".

всех таких множеств $A \subset U$, что существует $\xi \in \Xi$, для которого $A_\xi = A$ +). Объединение $\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$ множеств системы $\mathfrak{A}$ называется также о б ъ е д и н е н и е м множеств данного семейства и обозначается $\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$. Если $\Xi = \mathfrak{N}$, т.е. если речь идет о последовательности множеств, то обычно используется символ $\bigcup_{\xi=1}^{\infty} A_\xi$. Наконец, если Ξ – множество всех натуральных чисел, не превосходящих данного натурального числа n, то объединение обозначают символом $\bigcup_{\xi=1}^{n} A_\xi$. Аналогичные обозначения используются и в других сходных с этим случаях.

Принимая во внимание теорему I(I.I), легко установить, что включение $x \in \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$ равносильно существованию такого $\xi_0 \in \Xi$, что $x \in A_{\xi_0}$.

Точно так же (но при условии непустоты множества Ξ) определяется п е р е с е ч е н и е $\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi$ множеств семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ ++). С помощью теоремы 2(I.I) можно проверить, что соотношение $x \in \bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi$ означает, что для каждого $\xi \in \Xi$ справедливо включение $x \in A_\xi$.

Заметим, что объединение и пересечение множеств данной системы $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как объединение (или пересечение) множеств семейства $\{A\}$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Укажем на некоторые свойства операций объединения и пересечения, которые без труда выводятся из определения.

I. Каковы бы ни были семейство множеств $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и элемент $\xi_0 \in \Xi$, справедливо включение $\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset A_{\xi_0} \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$.

II. Если $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{B_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ – семейства множеств с одним и тем же множеством индексов Ξ, причем $A_\xi \subset B_\xi$ для любого $\xi \in \Xi$, то

$$\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset \bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi, \qquad \bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi \subset \bigcap_{\xi \in \Xi} B_\xi. \tag{24}$$

III. (Ассоциативность объединения и пересечения). Пусть дано семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств. Предположим, кроме того, что

+) Короче говоря, $\mathfrak{A}$ –система всех множеств вида A_ξ $(\xi \in \Xi)$.

++) Значение символов $\bigcap_{\xi=1}^{\infty} A_\xi$, $\bigcap_{\xi=1}^{n} A_\xi$ и т.п. понятно без пояснений.

имеется семейство $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ подмножеств множества Ξ такое, что $\Xi=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Xi_\lambda$. Тогда

$$\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi\Big),\qquad \bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcap_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi\Big).$$

В частности, пусть $\Xi=\Lambda\times M$, где Λ и M – данные множества. Положим $\Xi_\lambda=\{\lambda\}\times M$. Понятно, что $\Xi=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Xi_\lambda$. Следовательно, если условиться писать вместо $A_{(\lambda,\mu)}$ просто $A_{\lambda\mu}$ и заметить, что $\mu\in M$ равносильно включению $(\lambda,\mu)\in\Xi_\lambda$, то

$$\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}A_{\lambda\mu}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcup_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\Big),\qquad \bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}A_{\lambda\mu}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcap_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\Big).$$

Можно, разумеется, поменять ролями множества Λ и M. Сопоставляя полученные при этом равенства с написанными выше, придем к соотношениям:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcup_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\Big)=\bigcup_{\mu\in M}\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda\mu}\Big),\qquad \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\Big(\bigcap_{\mu\in M}A_{\lambda\mu}\Big)=\bigcap_{\mu\in M}\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda\mu}\Big).\tag{25}$$

IУ. (Дистрибутивность объединения и пересечения.) Если $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – данное семейство множеств, B – произвольное множество, то

$$B\cap\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcup_{\xi\in\Xi}(B\cap A_\xi),\qquad B\cup\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcap_{\xi\in\Xi}(B\cup A_\xi).$$

У. Пусть $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – семейство подмножеств некоторого множества U. Тогда

$$\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi\Big)'=\bigcap_{\xi\in\Xi}A'_\xi,\qquad \Big(\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi\Big)'=\bigcup_{\xi\in\Xi}A'_\xi.$$

(Здесь штрихом обозначено дополнение до множества U. См. I.I.5)

Рассмотрим какое-либо соответствие $F\subset X\times Y$ и множество $A\subset X$. Из определения образа $F[A]$ вытекает равенство

$$F[A]=\bigcup_{x\in A}F[x].\tag{26}$$

В случае, когда $A=\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi$, получаем отсюда, используя ассоциативность объединения,

$$F[A]=F\Big[\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi\Big]=\bigcup_{x\in A}F[x]=\bigcup_{\xi\in\Xi}\Big(\bigcup_{x\in A_\xi}F[x]\Big)=\bigcup_{\xi\in\Xi}F[A_\xi].\tag{27}$$

Заменяя здесь F обратным соответствием F^{-1}, придем к соотношению для прообразов

$$F^{-1}[\bigcup_{\xi\in\Xi} B_\xi] = \bigcup_{\xi\in\Xi} F^{-1}[B_\xi] \qquad (B_\xi \subset Y, \xi\in\Xi).$$

Эти равенства нарушаются, если объединения заменить в них пересечениями. Однако легко установить, что

$$F[\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi] \subset \bigcap_{\xi\in\Xi} F[A_\xi] \qquad (A_\xi \subset X, \xi\in\Xi); \tag{28}$$

$$F^{-1}[\bigcap_{\xi\in\Xi} B_\xi] \subset \bigcap_{\xi\in\Xi} F^{-1}[B_\xi] \qquad (B_\xi \subset Y, \xi\in\Xi). \tag{29}$$

Знак равенства в соотношении (28) можно гарантировать, если соответствие F^{-1} однозначно. Аналогично этому в (29) будет знак равенства, если F - отображение. В самом деле, если $y\in\bigcap_{\xi\in\Xi} F[A_\xi]$, то при любом $\xi\in\Xi$ будет $y\in F[A_\xi]$, так что $F^{-1}(y)\in A_\xi$. Следовательно, $F^{-1}(y)\in\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi$, а это в соответствии с (I7) означает, что $y\in F[F^{-1}(y)]\subset F[\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi]$.

Если даны соответствия $F\subset X\times Y$ и $G\subset U\times V$, то, обозначая $H=G\circ F$, можем написать на основании (26), (I3) и (27)

$$H[A] = \bigcup_{x\in A} H[x] = \bigcup_{x\in A} G[F[x]] = G[\bigcup_{x\in A} F[x]] = G[F[A]] \qquad (A\subset X). \tag{30}$$

Привлекая сюда (20), получаем

$$H^{-1}[C] = F^{-1}[G^{-1}[C]] \qquad (C\subset V). \tag{31}$$

Равенства (30) и (3I), если подставить в них $A=\Omega_F$ и $C=\Delta_G$ и воспользоваться (7), приводят к (I5).

2.7. Отображение f называется **взаимно однозначным**, если соответствие f^{-1}, обратное к f, так же, как и f, однозначно. Применяя критерий предложения I из 2.5 к соответствию f^{-1}, получаем следующее условие взаимной однозначности отображения f.

I. Для того, чтобы отображение f было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы равенство $f(x_1)=f(x_2)$ $(x_1, x_2\in\Omega_f)$ было возможно лишь при $x_1=x_2$.

Действительно, согласно упомянутому критерию соответствие f^{-1} будет отображением тогда и только тогда, когда соотношения (y, x_1), $(y, x_2) \in f^{-1}$ влекут равенство $x_1 = x_2$. Но (y, x_1), $(y, x_2) \in f^{-1}$ равносильно тому, что $x_1, x_2 \in \Omega_f$ и $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Так как суперпозиция двух отображений сама является отображением, то, если f – взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, суперпозиция $f^{-1} \circ f$ есть отображение множества X на себя, причем в силу (17) $f^{-1} \circ f \supset I_X$, где $I_X : x \to x \ (x \in X)$. Поскольку у отображений $f^{-1} \circ f$ и I_X области определения совпадают, то, как это вытекает из сказанного в 2.5 (см.(23)), имеет место равенство $f^{-1} \circ f = I_X$. Поменяв ролями f и f^{-1}, придём к равенству $f \circ f^{-1} = I_Y$, где $I_Y : y \to y \ (y \in Y)$.

Докажем, что имеет место и обратное предложение.

II. Для того, чтобы соответствие f было взаимно однозначным отображением множества X на множество Y, необходимо и достаточно, чтобы

$$f^{-1} \circ f = I_X \quad , \quad f \circ f^{-1} = I_Y . \tag{32}$$

Необходимость условия установлена выше. Докажем достаточность. Пусть имеет место (32). Так как $X = \Omega_{I_X} = \Omega_{f^{-1} \circ f} = \Omega_f$, то $\Omega_f = X$. Аналогично $\Delta_f = \Omega_{f^{-1}} = Y$. Если (x, y_1), $(x, y_2) \in f$, то $(y_1, x) \in f^{-1}$; поэтому пара $(y_1, y_2) \in I_Y$ (ведь существует x такой, что $(y_1, x) \in f^{-1}$ и $(x, y_2) \in f$!). Но $(y_1, y_2) \in I_Y$ означает $y_1 = y_2$. Согласно предложению I из 2.5 f – однозначное отображение. Точно так же из первого равенства (32) вытекает, что однозначно соответствие f^{-1}.

Заметим, что если выполняется только одно из соотношений (32), скажем, первое, то можно утверждать лишь, что одно из соответствий f или f^{-1} однозначно (в рассматриваемом случае – f^{-1}), а область определения другого совпадает с X или соответственно с Y (в данном случае $\Omega_f = X$). Отсюда следует

III. Если f – отображение множества X в множество Y, то для того, чтобы f было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы существовало отображение g из Y в X такое, что $g \circ f = I_X$. При этом в качестве g может быть взято любое отображение, удовлетворяющее условию: $g \supset f^{-1}$.

С помощью принципа выбора нетрудно доказать,

IV. Каково бы ни было соответствие $F \subset X \times Y$, существует отображение $f \subset F$ такое, что $\Omega_f = \Omega_F$.

Действительно, рассмотрим систему множеств вида $\{x\}\times F[x]$, где x – произвольный элемент из Ω_F. Множества эти, очевидно, непусты и попарно не пересекаются. Поэтому на основании принципа выбора (см. I.I.4) существует множество f, которое с каждым из введенных выше множеств имеет ровно по одному общему элементу. Можно при этом считать, что $f\subset F$ (иначе вместо f мы рассмотрели бы пересечение $f\cap F$). Пусть $(x,y_1),(x,y_2)\in f$. Так как $f\subset F$, то $y_1,y_2\in F[x]$. Таким образом, $(x,y_1),(x,y_2)\in f\cap(\{x\}\times F[x])$, что в силу определения f влечет равенство $y_1=y_2$. Итак, f – отображение. Поскольку для любого $x\in\Omega_F$ существует такой y, что $(x,y)\in f$ (ведь пересечение $f\cap(\{x\}\times F[x])\neq\phi!$), то $\Omega_F\subset\Omega_f$. Обратное включение является следствием соотношения $f\subset F$ (см.(I2)).

Основываясь на предложении IУ, нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

У. Отображение f множества X в множество Y является отображением на Y (т.е. $\Delta_f=Y$) в том и только в том случае, если существует такое отображение g множества Y в X, что $f\cdot g=I_Y$. При этом в качестве g может быть принято любое отображение, удовлетворяющее условиям: $\Omega_g=Y$, $g\subset f^{-1}$.

В самом деле, достаточность условия вытекает из IУ, если воспользоваться им применительно к соответствию f^{-1}. Необходимость была фактически установлена при доказательстве предложения П.

Отметим в заключение, что суперпозиция взаимно однозначных отображений также является взаимно однозначным отображением. В самом деле, если $h=g\cdot f$, то согласно (20) соответствие h^{-1} представляет собой суперпозицию отображений g^{-1} и f^{-1} и, следовательно, однозначно.

2.8. Рассмотрим семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ подмножеств некоторого множества U. Образуем семейство

$$\varphi:\{x_\xi\} \qquad (\xi\in\Xi) \tag{33}$$

элементов множества U, обладающее тем свойством, что $x_\xi\in X_\xi$ при любом $\xi\in\Xi$. Опираясь на принципы IX и Ш из § I, можно доказать, что существует множество P всех семейств указанного вида. Множество P называется п р о и з в е д е н и е м множеств данного семейства и обозначается $P=\prod\limits_{\xi\in\Xi}X_\xi$ [+)]. В случае,

+) Смысл обозначений $\prod\limits_{\xi=1}^{\infty}X_\xi$, $\prod\limits_{\xi=1}^{n}X_\xi$ понятен без пояснений.

когда $X_\xi = X$ при каждом $\xi \in \Xi$ обычно пишут $P = X^\Xi$, а если Ξ есть множество n_m всех натуральных чисел, не превосходящих m, то X^m.

Пусть множество X состоит из двух элементов a и b, то есть $X = \{a, b\}$, а Ξ - произвольное множество. Рассмотрим какой-либо элемент $\varphi \in X^\Xi$. По определению φ есть семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов множества X. Таким образом, при любом $\xi \in \Xi$ либо $x_\xi = a$, либо $x_\xi = b$. Положим $A = \{\xi \in \Xi : x_\xi = a\} = \varphi^{-1}[a]$. Отображение

$$f : \varphi \to A \qquad (\varphi \in X^\Xi)$$

является взаимно однозначным отображением множества X^Ξ на множество $\mathfrak{P}(\Xi)$ всех подмножеств множества Ξ. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно в соответствии с предложениями Ш и У из 2.7 проверить, что для каждого $A \in \mathfrak{P}(\Xi)$ существует единственное семейство $\varphi \in X^\Xi$ такое, что $f(\varphi) = A$. Полагая

$$x_\xi = \begin{cases} a & (\xi \in A) \\ b & (\xi \in \Xi \setminus A) \end{cases}, \quad \varphi : \{x_\xi\} \quad (\xi \in \Xi)$$

мы и получим искомое семейство, единственность которого очевидна.

Наличие взаимно однозначного отображения множества X^Ξ на множество $\mathfrak{P}(\Xi)$ позволяет отождествить эти множества. Множество X содержит два элемента и ясно, лишь этим обстоятельством определяется отмеченный факт. Это делает понятным обозначение 2^Ξ для множества $\mathfrak{P}(\Xi)$.

2.9. В заключение остановимся на некоторых схемах образования новых соответствий, исходя из данных.

Рассмотрим семейство $\{F_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ соответствий из множества X в множество Y и положим $F = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi$. Поскольку $F_\xi \subset X \times Y$ для каждого $\xi \in \Xi$, то и $F \subset X \times Y$. Если $x \in X$, то, очевидно,

$$F[x] = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi[x], \tag{34}$$

а так как $F^{-1} = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}$, то (при $y \in Y$)

$$F^{-1}[y] = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}[y]. \tag{35}$$

Отсюда на основании (26) и (25)

$$F[A] = \bigcup_{x \in A} \Big(\bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi[x]\Big) = \bigcup_{\xi \in \Xi} \Big(\bigcup_{x \in A} F_\xi[x]\Big) = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi[A] \qquad (A \subset X)$$

и аналогично

$$F^{-1}[B]=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi^{-1}[B] \qquad (B\subset Y).$$

Принимая в этих равенствах $A=X$, $B=Y$, получим

$$\Omega_F=F^{-1}[Y]=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi^{-1}[Y]=\bigcup_{\xi\in\Xi}\Omega_{F_\xi}, \qquad \Delta_F=\bigcup_{\xi\in\Xi}\Delta_{F_\xi}.$$

Будем говорить, что соответствие F получено с к л е и в а н и е м из соответствий семейства $\{F_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$, если $F=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi$ и области определения Ω_{F_ξ} попарно не пересекаются, т.е. если из $\xi_1\neq\xi_2$ $(\xi_1,\xi_2\in\Xi)$ вытекает $\Omega_{F_{\xi_1}}\cap\Omega_{F_{\xi_2}}=\phi$.

Понятно, что объединение $F=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi$ не будет однозначным соответствием, даже если однозначно каждое F_ξ . Однако, если f получается из отображений семейства $\{f_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ склеиванием, то можно утверждать, что и f – отображение (в этом случае для каждого $x\in\Omega_f$ имеется единственное $\xi\in\Xi$, для которого $f_\xi[x]\neq\phi$, в силу (34) $f[x]$ совпадает с соответствующим $f_\xi[x]$ и, следовательно, содержит ровно один элемент – $f_\xi(x)$.)

Рассмотрим теперь соответствия $F\subset X\times Y$ и $G\subset U\times V$. В произведении $(X\times U)\times(Y\times V)$ определим соответствие $L=F\otimes G$, полагая для произвольного $z=(x,u)\in X\times U$

$$L[z]=L[x,u]=F[x]\times G[u]\ ^{+)}. \qquad (36)$$

Соответствие L называется т е н з о р н ы м п р о и з в е д е н и е м соответствий F и G. Поскольку $L[z]\neq\phi$ только тогда, когда оба множества $F[x]$ и $G[u]$ непустые, то

$$\Omega_L=\Omega_F\times\Omega_G.$$

Из легко проверяемого соотношения, $L^{-1}=F^{-1}\otimes G^{-1}$, вытекает, следовательно, что

$$\Delta_L=\Delta_F\times\Delta_G.$$

В силу (36) произведение $l=f\otimes g$ отображений f и g само является отображением, причем

$$l(x,u)=(f(x),g(u)).$$

+) Для краткости мы пишем $L[x,u]$ вместо $L[(x,u)]$. Подобные сокращения будут допускаться и в дальнейшем.

Поэтому, если f и g взаимно однозначны, то и $f \otimes g$ будет таким же.

Разумеется, описанная схема может быть применена и для определения произведения произвольного семейства соответствий.

Остановимся, наконец, на следующей ситуации. Пусть дано соответствие $F \subset X \times Y$. Введем отображение $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$ следующим образом:

$$\varphi : x \to F[x] \qquad (x \in X). \tag{37}$$

Ясно, что если дано отображение $\varphi : X \to \mathcal{P}(Y)$, то существует соответствие $F \subset X \times Y$, связанное с φ соотношением (37).

Рассмотрим, далее, отображение $f \subset X \times Y$. Оно порождает соответствие $\Phi \subset \mathcal{P}(X) \times Y$, которое определяется так:

$$\Phi[A] = f[A] \qquad (A \in \mathcal{P}(X)). \tag{38}$$

Следует иметь в виду, что отнюдь не всякое соответствие $\Phi \subset \mathcal{P}(X) \times Y$ порождается по формуле (38) каким-либо отображением f.

§ 3. Упорядоченные множества

Одной из простейших структур, рассматриваемых в математике, является структура упорядоченности. Она служит абстрактным выражением понятия следования, старшинства, предпочтения, главенствования и т.п., словом, возникает в тех случаях, когда в данной совокупности объектов введена некоторая иерархия.

Как и в большинстве разделов этой главы, мы не намерены углубляться в теорию упорядоченных множеств, ограничиваясь лишь перечислением терминов и указанием на самые простые связи между ними.

3.I. Рассмотрим какое-либо множество X и соответствие $\sigma \subset X^2$. Это соответствие называется **отношением порядка** в X, если соблюдены следующие условия:

1) $\sigma \supset I_X \quad (I_X = \{(x,y) \in X^2 : x = y\}$;

2) $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$;

3) $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$.

Упорядоченную пару (X, σ), в которой X - данное множество, а σ – отношение порядка в нем, называют **упорядоченным множеством**.

Как правило, с данным множеством связывается лишь одно "стандартное" отношение порядка. Поэтому фраза "...упорядоченное множество X " не может вызвать недоразумений – отношение порядка, без которого нет упорядоченного множества, здесь подразумевается.

Если $(x,y)\in\sigma$, то в зависимости от обстановки говорят: "элемент x не превосходит элемента y ", или "элемент x предшествует элементу y ", или "элемент x менее предпочтителен, чем элемент y " и т.д. При этом вместо $(x,y)\in\sigma$ пишут $x\leq y$ или $x\prec y$ и т.п. Иногда удобнее говорить: "x не меньше y ", или "x следует за y ", или "x предпочтительнее y " и т.д., и писать $x\geqslant y$ или $x\succ y$ и т.п.

Условившись в обозначениях, расшифруем требования I) – 3).

Так как множество I_X состоит из всех пар вида (x,x) $(x\in X)$, то первое условие можно переписать в такой форме:

I$'$) для любого $x\in X$ имеет место $x\leq x$ (рефлексивность отношения порядка);

Далее, поскольку $(x,z)\in\sigma\circ\sigma$ означает существование такого y, что $(x,y)\in\sigma$, $(y,z)\in\sigma$, второе условие приобретает следующий вид:

2$'$) Если $x,y,z\in X$, причем $x\leq y$, $y\leq z$, то $x\leq z$ (транзитивность отношения порядка).

Наконец, последнее условие, очевидно, эквивалентно следующему:

3$'$) если одновременно $x\leq y$ и $y\leq x$ $(x,y\in X$, то $x=y$ (антисимметричность отношения порядка).

Рассмотрим несколько примеров упорядоченных множеств.

I. Простейшим примером – он-то и послужил, конечно, прообразом самого понятия упорядоченного множества – является множество $\mathfrak{n}$ всех натуральных чисел с "естественным" отношением порядка: $\sigma=\{(x,y)\in\mathfrak{n}^2 : x\leq y\}$ (знак неравенства здесь понимается в прямом его значении).

2. Пусть X-множество подмножеств некоторого множества U. Положим $\sigma=\{(A,B)\in X^2 : A\subset B\}$. Не останавливаясь на проверке условий I) – 3), отметим лишь, что условие 3$'$) есть не что иное, как принцип объемности (см. I.I.I). Укажем также, что приведенный пример универсален в том смысле, что всякое отношение порядка может

быть сведено к рассмотренному (см. предложение П из 3.2).

3. Пусть, как и в первом примере, $X=\mathfrak{N}$. Но σ определим иначе:

$$\sigma=\{(x,y)\in\mathfrak{N}^2: \text{число } x \text{ является делителем числа } y\}.$$

То, что требования I$'$) – 3$'$) здесь выполнены, очевидно. Если вместо $(x,y)\in\sigma$ писать в данном случае $x\prec y$, то, например, $13\prec 39$, но уже неверно, что $13\prec 40$.

4. В качестве X рассмотрим опять множество $\mathfrak{N}$. Пусть $x,y\in\mathfrak{N}$; каждое из чисел x и y можно единственным образом представить в виде

$$x=2^{p-1}(2q-1), \qquad y=2^{r-1}(2s-1) \qquad (p,q,r,s\in\mathfrak{N}). \quad (\mathrm{I})$$

Множество σ образуем из всех таких пар $(x,y)\in\mathfrak{N}^2$, что либо $p<r$, либо $p=r$ и $q\leq s$. В частности, если x – нечетное число $(p=1)$, а y – четное $(r>1)$, то $(x,y)\in\sigma$.

5. Пусть по-прежнему $X=\mathfrak{N}$. По определению $(x,y)\in\sigma$, если, взяв p,q,r,s из представления (I), будем иметь $p\leq r, q\leq s$.

6. Наконец, снова подразумевая под X множество $\mathfrak{N}$, составим σ из всех таких пар (x,y), что разность $y-x$ есть четное натуральное число +).

Во всех этих примерах (за исключением второго) роль множества X играет одно и то же множество $\mathfrak{N}$. Тем не менее мы имеем дело с различными у п о р я д о ч е н н ы м и множествами – поскольку отношение порядка в каждом случае свое, отличное от других. Таким образом, если каждый элемент одного упорядоченного множества является элементом другого упорядоченного множества, то это еще не служит достаточным основанием для вывода о совпадении этих множеств ++).

+) Если определить отношение σ как множество всех пар (x,y), для которых $y-x$ – н е ч е т н о е натуральное число, то не будет соблюдено условие 2) (или 2$'$)).

++) Строго говоря, поскольку упорядоченное множество – это пара (X,σ), т.е. множество $\{X,\{X,\sigma\}\}$ (см. I.I.7), то элементами упорядоченного множества служат X и $\{X,\sigma\}$. Однако здесь и всюду в последующем слова "элемент упорядоченного множества" означают элемент множества, в котором введено отношение порядка.

3.2. Укажем на некоторые простейшие свойства отношения порядка.

I. Если σ - отношение порядка в множестве X, то и σ^{-1} - отношение порядка в X.

В самом деле, очевидно $I_X^{-1} = I_X$, поэтому из условия I) получаем: $\sigma^{-1} \supset I_X^{-1} = I_X$.

Далее, в силу условия 2) $(\sigma \circ \sigma)^{-1} \subset \sigma^{-1}$. Но согласно равенству (20) из § 2 $(\sigma \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1}$, так что $\sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \subset \sigma^{-1}$.

Если учесть, что $(\sigma^{-1})^{-1} = \sigma$, то станет очевидным, что условие 3) для σ совпадает с условием 3) для σ^{-1}.

Если в соответствии с соглашением пункта 3.I соотношение $(x, y) \in \sigma$ записывается в виде $x \leq y$, то включение $(y, x) \in \sigma^{-1}$ целесообразно записывать как $y \geq x$. При этом $x \leq y$ $((x, y) \in \sigma)$ и $y \geq x$ $((y, x) \in \sigma^{-1})$ будут означать одно и то же. Аналогичное замечание относится к употреблению знаков $\prec$ и $\succ$ и им подобных.

II. Пусть (X, σ) - упорядоченное множество. Тогда соотношение $(x, y) \in \sigma$ равносильно каждому из включений $\sigma^{-1}[x] \subset \sigma^{-1}[y]$ и $\sigma[x] \supset \sigma[y]$.

Действительно, предположим, что $(x, y) \in \sigma$ и $z \in \sigma^{-1}[x]$, т.е. $(x, z) \in \sigma^{-1}$ или, иначе, $(z, x) \in \sigma$. По условию 2) отсюда следует $(z, y) \in \sigma$, так что $z \in \sigma^{-1}[y]$.

Если, наоборот, имеет место включение $\sigma^{-1}[x] \subset \sigma^{-1}[y]$, то, учитывая, что по условию I) $x \in \sigma^{-1}[x]$, заключаем о справедливости соотношения $x \in \sigma^{-1}[y]$, которое эквивалентно тому, что $(x, y) \in \sigma$. Так как σ^{-1} – отношение порядка, то по доказанному $(y, x) \in \sigma^{-1}$ означает $\sigma[y] \subset \sigma[x]$.

Заметим, что при доказательстве предложения II условие 3) определения отношения порядка не было использовано.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему всех подмножеств множества X имеющих вид $\sigma^{-1}[x]$ $(x \in X)$. Отображение $\Phi: x \to \sigma^{-1}[x]$ $(x \in X)$ взаимно однозначно. В самом деле, если $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X)$, то $x_1 \in \sigma^{-1}[x_1] = \sigma^{-1}[x_2]$, т.е. $(x_1, x_2) \in \sigma$; но точно так же и $(x_2, x_1) \in \sigma$, так что согласно условию 3) $(x_1, x_2) \in \sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X$.

Следовательно, $x_1 = x_2$.

Наличие взаимно однозначного отображения Φ множества X на множество $\mathfrak{A}$ позволяет отождествить эти множества. Важно отметить, что если ввести в $\mathfrak{A}$ отношение порядка, описанное в примере 2 пункта 3.I, то, как это следует из предложения II, при указанном отождествлении совпадут и отношения порядка. Точнее говоря, отображение $\Phi\otimes\Phi$ (см. I.2.9) будет взаимно однозначно отображать σ на отношение порядка в $\mathfrak{A}$. Таким образом, данное упорядоченное множество и множество $\mathfrak{A}$ "устроены" одинаково - всякое утверждение об элементах одного из них с помощью Φ (или Φ^{-1}) может быть переведено на "язык" другого множества. Именно это обстоятельство и имелось в виду, когда в 3.I говорилось об упорядоченном множестве примера 2, как об универсальном.

Сказанное выше приводит к следующему общему определению. Упорядоченные множества (X,σ) и (Y,τ) называются **изоморфными**, если существует такое взаимно однозначное отображение $\Phi : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, что

$$(\Phi \otimes \Phi)[\sigma] = \tau. \tag{2}$$

Прокомментируем последнее условие. Согласно определению из I.2.9 отображение $\Psi = \Phi \otimes \Phi$ взаимно однозначно отображает X^2 на Y^2. При этом

$$\Psi(x,u) = (\Phi(x),\ \Phi(u)) \cdot \quad ((x,u)\in X^2).$$

Следовательно, соотношение (2) означает, что включения $(x,u)\in\sigma$ и $(\Phi(x),\ \Phi(u))\in\tau$ равносильны.

Если отношение σ записывать с помощью знака $\leq$, τ - с помощью знака $\prec$, то можно еще сказать, что $x\leq u\ (x,u\in X)$ эквивалентно $\Phi(x)\prec\Phi(u)$.

Из сказанного выше вытекает

III. Каждое упорядоченное множество изоморфно некоторой упорядоченной системе множеств, отношение порядка в которой определяется включением.

Если вместо (2) выполняется лишь

$$(\Phi \otimes \Phi)[\sigma]\subset\tau, \tag{3}$$

где Φ- какое-либо отображение из множества X в множество Y (необязательно $\Omega_\Phi = X$ и $\Delta_\Phi = Y$; Φ может быть и не взаимно однозначным), то Φ называется **возрастающим**. В традиционных обозначениях условие (3) означает, что соотношение $x\leq u\ (x,u\in\Omega_\Phi)$ влечет (а не эквивалентно) соотношение $\Phi(x)\prec\Phi(u)$.

Если при таких же предположениях относительно Φ имеет место

$$(\Phi \otimes \Phi)[\sigma] \subset \tau^{-1} \qquad (4)$$

или, что то же,

$$(\Phi \otimes \Phi)[\sigma^{-1}] \subset \tau,$$

т.е. если из $x \leq u$ $(x, u \in \Omega_\Phi)$ вытекает $\Phi(x) \succ \Phi(u)$, то отображение Φ называется у б ы в а ю щ и м .

В случае, когда

$$(\Phi \otimes \Phi)[\sigma \setminus I_X] \subset \tau \setminus I_Y \qquad ((\Phi \otimes \Phi)[\sigma \setminus I_X] \subset \tau^{-1} \setminus I_Y) \qquad (5)$$

отображение Φ называется с т р о г о в о з р а с т а ю щ и м (или, соответственно, с т р о г о у б ы в а ю щ и м). Нетрудно проверить, что строго возрастающее отображение будет и возрастающим, а строго убывающее - убывающим. В самом деле, если $(x,u) \in \sigma$, то либо $x = u$, и тогда $\Phi(x) = \Phi(u)$, так что $(\Phi \otimes \Phi)(x,u) \in I_Y \subset \tau$; либо $(x,u) \in \sigma \setminus I_X$.
В этом случае по (5) $(\Phi \otimes \Phi)(x,u) \in \tau \setminus I_Y \subset \tau$.

Более или менее очевидно, что возрастающее взаимно однозначное отображение - строго возрастающее. Следует, однако, иметь в виду, что строго возрастающее отображение может и не быть взаимно однозначным.

Возрастающие и убывающие отображения объединяются общим термином - монотонные отображения. Подобно этому строго монотонное отображение - это или строго возрастающее или строго убывающее.

3.3. Рассмотрим упорядоченное множество (X, σ). Если не оговорено противного, будем здесь и всюду в дальнейшем вместо $(x,y) \in \sigma$ писать $x \leq y$ (или $y \geq x$). Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то это обстоятельство коротко записывают в виде $x < y$ (или $y > x$); при этом говорят, что x строго меньше y (или y строго больше x).

Пусть множество $A \subset X$. Элемент $\bar{x} \in A$ называется н а и б о л ь ш и м элементом множества A , если для любого $x \in A$ справедливо соотношение $x \leq \bar{x}$, т.е. если $A \subset \sigma^{-1}[\bar{x}]$.

Элемент $x_0 \in A$ называется м а к с и м а л ь н ы м элементом множества A , если в A не существует элемента $x > x_0$. Иначе говоря, если $A \cap \sigma[x_0] = \{x_0\}$.

Аналогично определяются н а и м е н ь ш и й и м и н и м а л ь н ы й элементы множества A.

Рассмотрим упорядоченное множество примера 3 из 3.I. В качестве A возьмем множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.Ясно, что I будет наименьшим элементом множества A : каждое число $x \in A$ делится на единицу. Это же число оказывается и единственным минимальным элементом множества: в A нет числа, отличного от единицы, которое делилось бы на единицу.

Как легко понять, множество A наибольшего элемента не имеет: если бы такой элемент существовал, он должен был бы делиться на 6; но единственное число, входящее в A и делящееся на 6, - это само 6. Поскольку 6 не делится на 5, оно не может быть наибольшим в A.

Несмотря на то, что в A нет наибольшего элемента, это множество обладает максимальными элементами - ими будут числа 4,5,6

В общем случае нетрудно доказать

I. Каково бы ни было множество A, оно может иметь только один наибольший и только один наименьший элемент.

Действительно, если $\bar{x}$ и $\bar{u}$ - наибольшие элементы A, то из определения следует: $\bar{x} \leqslant \bar{u}$ ($\bar{u}$ - наибольший, а $\bar{x} \in A$), и точно так же $\bar{u} \leqslant \bar{x}$. Поэтому $\bar{x} = \bar{u}$.

II. Если A обладает наибольшим (наименьшим) элементом $\bar{x}$, то $\bar{x}$ является единственным максимальным (минимальным) элементом множества A.

В самом деле, очевидно, что $\bar{x}$ - максимален. Если x_0 - какой-либо элемент из A, то $\bar{x} \geqslant x_0$. Поэтому, если x_0 -максимальный элемент, то, поскольку не может быть $\bar{x} > x_0$, будет $\bar{x} = x_0$.

Множество A называется о г р а н и ч е н н ы м с в е р х у, если существует $b \in X$ такой, что для любого $x \in A$ имеет место $x \leqslant b$ +), т.е. в силу предложения II из 3.2 $b \in \bigcap_{x \in A} \sigma[x]$ (это обстоятельство мы будем записывать в виде $A \leqslant b$). Элемент b называется в е р х н е й г р а н и ц е й множества A. Множество всех верхних границ для данного множества A будем обозначать S_A. Ясно, что $S_A = \bigcap_{x \in A} \sigma[x]$.

Тот факт, что $b \in S_A$, содержит определенную информацию о множестве A - на основании предложения II и 3.2 можно утверждать, что $A \subset \sigma^{-1}[b]$. Понятно, что чем меньше b, тем большей

+) Если множество $A = \varnothing$, то в соответствии с соглашением, принятым в I.I.5, мы будем считать "пустое" пересечение совпадающим с X.

информацией о множестве A мы располагаем. Максимальной эта информация будет, следовательно, тогда, когда b – наименьший элемент множества S_A, т.е. когда b – наименьшая верхняя граница. Она называется точной верхней границей или супремумом множества A и обозначается $\sup A$.

Аналогично сказанному вводится понятие ограниченного снизу множества и нижней границы такого множества. Если через J_A обозначить множество всех нижних границ для множества A (при этом $J_A = \bigcap_{x \in A} \sigma^{-1}[x]$), то наибольший элемент множества J_A – наибольшая нижняя граница множества A – называется точной нижней границей или инфимумом множества A и обозначается $\inf A$.

Данные выше определения легко приводят к следующему предложению.

Ш. Если множество A имеет наибольший (наименьший) элемент $\bar{x}$, то существует $\sup A = \bar{x}$ $(\inf A = \bar{x})$. Обратно, если существует $v = \sup A$, причем $v \in A$, то v – наибольший элемент множества A.

Действительно, соотношение $A \leq \bar{x}$ вытекает из определения наибольшего элемента. Далее, если $A \leq b$, то, поскольку $\bar{x} \in A$, должно быть $\bar{x} \leq b$. Второе утверждение очевидно.

Возвратимся к примеру 3 из 3.I, и пусть опять $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. В соответствии с предложением Ш $\inf A = 1$. Наибольшего элемента, как уже отмечалось, множество A не имеет. Тем не менее оно ограничено сверху – на роль верхней границы годится любое число, делящееся на все числа, входящие в состав A, т.е. любое число, делящееся на 60. Ясно, что $v = 60$ и будет точной верхней границей множества A: v делится на все числа из A, а если b – какое-либо число, делящееся на все числа из A, в частности, на 3, 4, 5, то b делится и на их произведение $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Этот пример показывает, что возможна такая ситуация, когда множество, не имея наибольшего элемента, все же обладает точной верхней границей. Учитывая вторую часть предложения Ш, можно поэтому сказать, что точная верхняя граница является как бы суррогатом наибольшего элемента.+)

+) Отсюда и сам термин "супремум" – по латыни *supremum* – наивысший.

Следует иметь в виду, что возможно и такое положение, когда множество (непустое) A не обладает не только наибольшим элементом, но и точной верхней границей. Так заведомо будет, если оно не ограничено сверху. Множество $S_A = \phi$ в этом случае, т.е. не имеет никаких элементов, в том числе и наименьшего. Однако может случиться, что A ограничено сверху $(S_A \neq \phi)$, но все же точной верхней границы у A не существует. Рассмотрим пример, иллюстрирующий такую возможность. Пусть X - система подмножеств множества $\mathfrak{N}$, включающая все конечные множества и только те из бесконечных, которые содержат как четные, так и нечетные числа. Отношение порядка в X введем в соответствии с примером 2 из 3.I - по включению. Множество $\mathfrak{A} \subset X$ составим из всех **конечных** множеств **четных** чисел. Ясно, что $\mathfrak{A}$ ограничено сверху - в качестве верхней границы можно взять, например, множество B_m всех четных чисел, к которому добавлено нечетное число m (множество всех четных чисел не является элементом системы X и потому не может быть верхней границей множества $\mathfrak{A}$). В множестве всех верхних границ - $S_{\mathfrak{A}}$ - все элементы вида B_m минимальны, и потому в силу предложения II множество $S_{\mathfrak{A}}$ не имеет наименьшего элемента.

Если $\varphi:\{x_\xi\}\ (\xi\in\Xi)$ - семейство элементов множества X, то, понимая под A множество всех элементов вида $x_\xi\ (\xi\in\Xi)$, т.е. принимая $A=\Delta_\varphi$, будем говорить, что данное семейство **ограничено сверху** (снизу), если ограничено сверху (снизу) множество A. **Точной верхней (нижней) границей** семейства φ - в обозначениях $\sup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$ +) $(\inf\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi)$ - называется точная верхняя граница множества A.

Докажем важное свойство точных границ - их **ассоциативность**.

IУ. Пусть $\varphi:\{x_\xi\}\ (\xi\in\Xi)$ - данное семейство элементов множества X. Предположим, что $\Xi=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\Xi_\lambda$, причем при каждом $\lambda\in\Lambda$ существует $\sup\limits_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi = v_\lambda$ и существует $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda = v$. Тогда существует и $\sup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi = v$, т.е.

+) Если Ξ состоит только из двух элементов, например, если $\Xi=\{1,2\}$, то вместо $\sup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$ обычно пишут $x_1\vee x_2$ и $x_1\wedge x_2$ вместо $\inf\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$. Подобным же образом поступают, когда Ξ состоит из трех или более элементов

$$\sup_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\lambda\in\Lambda}(\sup_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi). \qquad (6)$$

При аналогичных предположениях справедливо равенство

$$\inf_{\xi\in\Xi} x_\xi = \inf_{\lambda\in\Lambda}(\inf_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi). \qquad (7)$$

В самом деле, если $\xi\in\Xi$, то при некотором $\lambda\in\Lambda$ будет $\xi\in\Xi_\lambda$. Следовательно, $x_\xi \leq v_\lambda$ и тем более (ведь $v_\lambda \leq v$) $x_\xi \leq v$. Таким образом, v – верхняя граница семейства φ. Пусть b – какая-либо верхняя граница семейства φ. Поскольку $x_\xi \leq b$, для всех $\xi\in\Xi$, то $x_\xi \leq b$ и для $\xi\in\Xi_\lambda$. Значит и $v_\lambda = \sup_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi \leq b$ $(\lambda\in\Lambda)$. Так как это верно для любого $\lambda\in\Lambda$, то $v = \sup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda \leq b$.

Если $\Xi = \Lambda\times M$, то подобно тому, как это сделано в § 2 для объединения (см.соотношение (25) в § 2), из (6) и (7) при соответствующих предположениях можно вывести +)

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} x_{\lambda\mu} = \sup_{\lambda\in\Lambda}(\sup_{\mu\in M} x_{\lambda\mu}), \quad \inf_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} x_{\lambda\mu} = \inf_{\lambda\in\Lambda}(\inf_{\mu\in M} x_{\lambda\mu}). \qquad (8)$$

Если множество A содержится в множестве B $(A\subset B\subset X)$, то $S_A = \bigcap_{x\in A} \sigma[x] \supset \bigcap_{x\in B} \sigma[x] = S_B$ и точно так же $J_A \supset J_B$. Поэтому

У. Если у множеств A и B ($A\subset B$) существуют точные верхние (нижние) границы, то

$$\sup A \leq \sup B \qquad (\inf A \geqslant \inf B). \qquad (9)$$

Добавим к данному множеству $A\subset X$ все те элементы из X, которые предшествуют хотя бы одному из элементов множества A, т.е. образуем объединение $\bigcup_{x\in A} \sigma^{-1}[x] = \sigma^{-1}[A]$ (см. I.2.6). Нетрудно понять, что эта операция не изменяет множества S_A:

$$S_{\sigma^{-1}[A]} = S_A. \qquad (10)$$

В самом деле, поскольку $\sigma^{-1}[A]\supset A$, то, как отмечалось,

---

+) Как ясно из теоремы I(I.I), объединение $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A$ множеств системы $\mathfrak{A}$ подмножеств множества U является точной верхней границей множества $\mathfrak{A}$, если принять $X = \mathcal{P}(U)$ и упорядоченность в X взять в соответствии с примером 2 из 3.I. Точно так же теорема 2(I.I) идентифицирует пересечение и точную нижнюю границу системы $\mathfrak{A}$. Отсюда вытекает, что предложение Ш из I.2.6 и, в частности (25), есть частный случай общих свойств точных границ: (6), (7) и (8).

$S_{\sigma^{-1}[A]} \subset S_A$. С другой стороны, основываясь на результатах из I.2.6, можем написать

$$S_{\sigma^{-1}[A]} = \bigcap_{x \in \sigma^{-1}[A]} \sigma[x] = \bigcap_{\lambda \in A} \Big(\bigcap_{x \in \sigma^{-1}[\lambda]} \sigma[x] \Big).$$

Но в силу предложения II из 3.2 $x \in \sigma^{-1}[\lambda]$ влечет $\sigma[x] \supset \sigma[\lambda]$. Поэтому $\bigcap_{x \in \sigma^{-1}[\lambda]} \sigma[x] \supset \sigma[\lambda]$ и, следовательно, $S_{\sigma^{-1}[A]} \supset \bigcap_{\lambda \in A} \sigma[\lambda] = S_A$.

Аналогично (I0) можно доказать, что

$$J_{\sigma[A]} = J_A. \qquad (II)$$

Равенства (I0) и (II) приводят к следующему предложению.

УI. Точная верхняя граница у множеств A и $\sigma^{-1}[A]$ может существовать только одновременно. При этом, в случае существования,

$$\sup \sigma^{-1}[A] = \sup A. \qquad (I2)$$

При аналогичных предположениях

$$\inf \sigma[A] = \inf A. \qquad (I3)$$

Множество $A \subset X$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, т.е. если существуют элементы $a, b \in X$ такие, что $A \geqslant a$, $A \leqslant b$.

Простейшим примером ограниченного множества является промежуток (говорят также: отрезок, сегмент). Так называется множество

$$[a,b] = \sigma[a] \cap \sigma^{-1}[b] = \{x \in X : a \leqslant x \leqslant b\}, \qquad (I4)$$

где a и b – данные элементы множества X, называемые концами промежутка $[a,b]$. Иногда возникает необходимость рассматривать так называемый открытый промежуток (или интервал) с концами $a, b \in X$:

$$(a,b) = \sigma_0[a] \cap \sigma_0^{-1}[b] = \{x \in X : a < x < b\} \qquad (I5)$$

(здесь σ_0 означает соответствие $\sigma_0 = \sigma \setminus I_X$, так что $\sigma_0[a] = \{x \in X : x > a\}$, а $\sigma_0^{-1}[b] = \{x \in X : x < b\}$). Чтобы избежать путаницы в терминологии, промежуток (I4) обычно называют замкнутым, подчеркивая тем самым его отличие от открытого промежутка (I5).

Иногда целесообразно рассматривать и полуоткрытые промежутки:

$$[a,b)=\sigma[a]\cap\sigma_0^{-1}[b]=\{x\in X: a\leq x<b\},\qquad (a,b]=\sigma_0[a]\cap\sigma^{-1}[b]=\{x\in X: a<x\leq b\}\quad(16)$$

Понятно, что промежуток $[a,b]\neq\varnothing$ в том и только в том случае, когда $a\leq b$, ибо в этом случае $a,b\in[a,b]$. Для промежутков (16) условие $a\leq b$, а для (15) даже и $a<b$ только необходимо для непустоты - если в примере I из 3.I взять $a=1$, $b=2$, то открытый промежуток $(a,b)=\varnothing$.

3.4. Пусть (X,σ) - упорядоченное множество. Рассмотрим множество $Y\subset X$ и введем соответствие $\tau=\sigma\cap Y^2$. Так как $(x,y)\in\tau$ означает, что $x,y\in Y$ и $(x,y)\in\sigma$, то легко проверить, что τ является отношением порядка в Y. О τ говорят, что оно и н д у ц и р о в а н о в Y отношением σ, а упорядоченное множество (Y,τ) называют п о д м н о ж е с т в о м упорядоченного множества (X,σ).

Рассмотрим множество $A\subset Y$. Если обозначить S_A^{τ} и S_A^{σ} множества всех верхних границ A в (Y,τ) и, соответственно, в (X,σ), то очевидно $S_A^{\tau}=Y\cap S_A^{\sigma}$. Отсюда следует, что если A ограничено сверху в (Y,τ), т.е. если $S_A^{\tau}\neq\varnothing$, то A - ограничено сверху и в (X,σ) $(S_A^{\sigma}\neq\varnothing)$. Поскольку $S_A^{\tau}\subset S_A^{\sigma}$, то, понимая под $\sup_\tau A$ и $\sup_\sigma A$ точные верхние границы множества A в (Y,τ) и, соответственно, в (X,σ) - наименьшие элементы множеств S_A^{τ} и S_A^{σ} - будем иметь $\sup_\tau A\geqslant\sup_\sigma A$. При этом, конечно, существование одного из супремумов никак не связано с существованием другого. Впрочем, в одном важном частном случае $\sup_\tau A$ и $\sup_\sigma A$ могут существовать только одновременно.

I. Пусть $Y=\sigma[x]$, где x - данный элемент множества A. Тогда, если непустое множество $A\subset Y$, то $\sup_\tau A$ и $\sup_\sigma A$ существуют или нет одновременно и, в случае существования, $\sup_\tau A=\sup_\sigma A$

Действительно, если $b\in S_A^{\sigma}$, то, поскольку $A\leq b$ и $A\geqslant x$, будет $b\geqslant x$ (здесь-то и используется непустота множества A), т.е. $b\in Y$. Таким образом, $S_A^{\sigma}\subset Y$ и, значит, $S_A^{\tau}=$ $=S_A^{\sigma}$. Разумеется, все сказанное выше об ограниченных сверху множествах с необходимыми изменениями в формулировках справедливо и по отношению к множествам, ограниченным снизу.

3.5. Упорядоченное множество (X,σ) можно интерпретировать как множество X событий, связанных между собой таким образом, что событие x не может наступать раньше, чем осуществятся все события $y \in \sigma^{-1}[x]$ $(y \neq x)$ +). Множество $P_x = \sigma^{-1}[x] \setminus \{x\}$ тем самым состоит из причин (или предпосылок) события x, а множество $Q_x = \sigma[x] \setminus \{x\}$ – из следствий этого события.

В простейшем случае, примером которого служит процесс чтения книги (отдельные события здесь – прочтение первого, второго и так до последнего слова)++), множества P_x и Q_x вместе с событием x исчерпывают все X, так что причинная связь между событиями оказывается неразветвленной, "линейной" цепочкой, "направленной" от более ранних событий к более поздним. Однако о направленности совокупности событий можно говорить и в более общем случае, например, при доказательстве теоремы, состоящего из ряда умозаключений, из которых одни являются следствиями других. При этом, конечно, вовсе не обязательно, чтобы каждое промежуточное умозаключение было следствием всех утверждений, высказанных до него и, в свою очередь, являлось бы предпосылкой всех выводов, сформулированных после+++). Направленность такого процесса обусловлена тем, что для любых событий x и y, хотя бы и не связанных причинно друг с другом, существует событие $z \in X$, имеющее среди своих предпосылок как x, так и y – в разумном доказательстве нет "лишних" умозаключений, которые не использовались бы в конечном выводе.

Любопытно, что в случае "линейной" цепочки можно говорить как о прямой направленности, так и о противоположной. Если же речь идет о разветвленной цепочке, то обратной направленности – к "первопричине" – может и не быть.

"Направленные" множества играют в анализе весьма заметную роль, поскольку с ними связано одно из основных понятий – понятие предела (см. главу II).

Дадим точное определение.

Упорядоченное множество (X, σ) называется л и н е й н о (или с о в е р ш е н н о) у п о р я д о ч е н н ы м, если

+) При такой интерпретации множества (X, σ) его называют иногда с е т е в ы м г р а ф и к о м. Правда, обычно этот термин употребляют лишь в случае конечного множества X.

++) Для большей определенности предположим, что речь идет о чтении без осмысливания – на манер гоголевского Селифана.

+++) Причина, разумеется, предшествует по времени следствию, но не все предшествующее служит причиной последующего.

для любых элементов $x, y \in X$ справедливо одно из двух соотношений: $x \leq y$ $((x,y) \in \sigma)$ или $y \leq x$ $((x,y) \in \sigma^{-1})$; иначе говоря, если $\sigma \cup \sigma^{-1} = X^2$.

Упорядоченное множество (X, σ) называется **направленным вправо** (или **вверх**), если для любых элементов $x, y \in X$ можно указать такой элемент $z \in X$, что $x \leq z$ $((x,z) \in \sigma)$ и $y \leq z$ $((z,y) \in \sigma^{-1})$. Коротко это условие можно записать в виде $\sigma^{-1} \circ \sigma = X^2$.

Если $\sigma \circ \sigma^{-1} = X^2$, т.е. если для любых $x, y \in X$ существует $z \in X$ такой, что $z \leq x, z \leq y$, то говорят, что (X, σ) – **направлено влево** (или **вниз**) +).

Понятно, что линейно упорядоченное множество будет и направленным, причем как вправо, так и влево.

Направленное влево множество $U \subset X$ ++) называется **фильтром** (убывающим) в X, если оно обладает тем свойством, что вместе с каждым своим элементом u содержит множество $\sigma[u]$ всех элементов, следующих за u. Понятно, что последнее условие может быть записано в виде включения:

$$U \supset \bigcup_{u \in U} \sigma[u] = \sigma[U]. \tag{17}$$

Подобным образом может быть определен и возрастающий фильтр +++).

Пусть X – система всех непустых подмножеств какого-либо непустого множества T. Снабдим X отношением порядка – по включению.

1. Система $\mathcal{U} \subset X$ будет фильтром в X тогда и только тогда, когда

1) из $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ вытекает $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$;

2) всякое множество $A \in X$, содержащее хотя бы одно из множеств $A_0 \in \mathcal{U}$, само входит в $\mathcal{U}$.

В самом деле, условие 1) обеспечивает направленность системы $\mathcal{U}$, а условие 2) как раз и означает (17).

+) Направленное множество называют также **фильтрующимся** (**вправо** или **влево**, **по возрастанию** или **по убыванию**).

++) Множество $U \subset X$ называется направленным влево, если снабженное индуцированным в нем из (X, σ) отношением порядка оно оказывается направленным упорядоченным множеством. Подобного рода терминологию мы будем применять и в дальнейшем, но уже без пояснений

+++) Термин "фильтр" происходит из аналогии с системой очистки водопровода, состоящей из последовательности устройств, каждое из которых улавливает частицы данного и всех больших размеров.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ - фильтр, и $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}$ направлена влево, то существует такое множество $A \in \mathcal{U}$, что $A \subset A_1, A_2$. Понятно, что $A \subset A_1 \cap A_2$. Следовательно, по (I7) должно быть $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{U}$.

Заметим, что в первоначальном смысле слово " фильтр" и относилось лишь к случаю, описанному в данном предложении.

Будем опять считать, что (X, σ) - произвольное упорядоченное множество. Рассмотрим направленное влево множество $A \subset X$. Существует фильтр U, содержащий A. В качестве U можно, например, принять множество

$$U_A = \bigcup_{x \in A} \sigma[x] = \sigma[A]. \qquad (I8)$$

Действительно, очевидно, что множество $U_A \supset A$. Если $u_1, u_2 \in U_A$, то существуют элементы $x_1, x_2 \in A$ такие, что $u_i \in \sigma[x_i]$ $(i=1,2)$. Но A - направленное множество, следовательно, найдется $x \in A$, для которого $x \leq x_1, x_2$. Поскольку $x \in U$, множество U - направленное.

Так как $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$ (см. 3.I), то $\sigma[U_A] = \sigma[\sigma[A]] = (\sigma \circ \sigma)[A] \subset \sigma[A] = U_A$, и выполнено (I7).

П. Фильтр U_A - наименьший из фильтров, содержащих направленное влево множество $A \subset X$.

В самом деле, если фильтр $U \supset A$, то в силу (I7) $U \supset \sigma[U] \supset \sigma[A] = U_A$.

О фильтре U_A мы будем говорить, что он п о р о ж д е н множеством A. Направленное влево множество A, порождающее фильтр U, называется б а з и с о м фильтра U.

Одноэлементное множество $A = \{x\}$, очевидно, направленно, поэтому множество $\sigma[x]$ будет фильтром и при этом наименьшим, содержащим данный элемент x.

Один и тот же фильтр может иметь много различных базисов. Чтобы выяснить условия, при которых разные множества A_1 и A_2 порождают один фильтр, дадим следующее определение.

Пусть даны множества (необязательно направленные) $B_1, B_2 \subset X$. Будем говорить, что B_1 к о н ф и н а л ь н о в л е в о относительно B_2, если для каждого $x \in B_2$ пересечение $B_1 \cap \sigma^{-1}[x] \neq \emptyset$, т.е. если для каждого $x \in B_2$ найдется такой $y \in B_1$, что $y \leq x$. Так как (см. I.2.2) $\sigma[B_1] = \{x \in X : B_1 \cap \sigma^{-1}[x] \neq \emptyset\}$, то определение можно коротко записать в виде:

$$B_2 \subset \sigma[B_1]. \tag{19}$$

Аналогично, если

$$B_2 \subset \sigma^{-1}[B_1], \tag{20}$$

то о множестве B_1 говорят, что оно **конфинально вправо** относительно B_2.

Ш. Для того, чтобы направленное влево множество $A \subset U$ порождало фильтр U, необходимо и достаточно, чтобы A было конфинально влево относительно U.

Действительно, в предположении $A \subset U$, из которого на основании предложения П вытекает $U_A \subset U$, равенство $U_A = U$ равносильно включению $U_A = \sigma[A] \supset U$, которое и означает конфинальность множества A относительно U.

IУ. Пусть A_1 и A_2 – направленные влево подмножества множества X. Для того чтобы было $U_{A_1} \supset U_{A_2}$, необходимо и достаточно, чтобы A_1 было конфинально относительно A_2.

В самом деле, включение $U_{A_1} \supset U_{A_2}$, т.е. $\sigma[A_1] \supset \sigma[A_2]$, ввиду того, что $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$, равносильно включению $\sigma[A_1] \supset A_2$.

У. Для того чтобы направленные множества A_1 и A_2 были базисами одного и того же фильтра U, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих множеств было конфинальным влево относительно другого.

Отметим еще один полезный факт. Комбинируя предложения У и УI из 3.3, получаем с помощью (20) и (19)

УI. Если множества B_1 и B_2 имеют точные верхние (нижние) границы и B_1 конфинально вправо (влево) относительно B_2, то

$$\sup B_1 \geqslant \sup B_2 \qquad (\inf B_1 \leq \inf B_2). \tag{21}$$

Пусть V – линейно упорядоченное подмножество множества X и x_0 такой элемент из X, что пересечение $V_0 = V \cap \sigma[x_0] \neq \phi$. Покажем, что V_0 конфинально вправо относительно V. Действительно, если $x \in V \setminus V_0$, то взяв $y \in V_0$, ввиду линейной упорядоченности множества V мы должны будем иметь одно из двух: $x \leq y$ или $x \geqslant y$. Однако второе соотношение невозможно, поскольку оно приводит к неравенству $x \geqslant x_0$ и, значит, к включению $x \in V_0$. Таким образом, $x \leq y$, что можно записать в виде

$x \in \sigma^{-1}[y] \subset \sigma^{-1}[V_0]$. Следовательно, $V \setminus V_0 \subset \sigma^{-1}[V_0]$.

Так как $V_0 \subset \sigma^{-1}[V_0]$, то $V \subset \sigma^{-1}[V_0]$. Поскольку, очевидно, и V конфинально вправо относительно V_0, то $\sigma^{-1}[V] = \sigma^{-1}[V_0]$. Поэтому на основании предложения УI из 3.3. имеем

УП. Множества V и V_0 могут иметь точные верхние границы лишь одновременно. При этом $\sup V = \sup V_0$.

3.6. Во многих случаях из данного множества требуется выделить элемент, обладающий теми или иными экстремальными свойствами, т.е. являющийся максимальным или минимальным, если в X ввести некоторое отношение порядка. При доказательстве существования такого рода объектов оказывается полезным следующий результат.

> ЛЕММА ЦОРНА. Пусть (X, σ) -упорядоченное множество. Если всякая непустая линейно упорядоченная часть $V \subset X$ имеет в X точную верхнюю границу, то, каков бы ни был элемент $a \in X$, в X существует по крайней мере один максимальный элемент, следующий за a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании предложений УП из 3.5 и I из 3.4 множество $\sigma[a]$ так же, как и X, удовлетворяет условиям леммы. Поскольку каждый его максимальный элемент служит максимальным и для X, то можно считать, что $X = \sigma[a]$, т.е. что a - наименьший элемент множества X.

Как и в 3.3, определим соответствие σ_0, полагая $\sigma_0 = \sigma \setminus I_X$. Напомним, что

$$\sigma_0[x] = \sigma[x] \setminus I_X[x] = \sigma[x] \setminus \{x\} = \{y \in X : y > x\} \quad (x \in X). \quad (22)$$

Ясно, что элемент $x \in X$ будет максимальным в том и только в том случае, когда $\sigma_0[x] = \phi$. Предположим, что X не обладает ни одним максимальным элементом, т.е. что для каждого $x \in X$ множество $\sigma_0[x] \neq \phi$. Это означает, что область определения Ω_{σ_0} соответствия σ_0 совпадает с X, и поэтому в силу предложения IУ из I.2.7 существует такое отображение $f \subset \sigma_0$, что $\Omega_f = \Omega_{\sigma_0} = X$. Так как $f(x) \in \sigma_0[x]$ при любом $x \in X$, то вследствие (22) $f(x) > x$.

Множество $A \subset X$ назовем правильным, если

I) $a \in A$;

2) $f[A] \subset A$;

3) каково бы ни было непустое линейно упорядоченное множество $V \subset A$, должно быть $\sup V \in A$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ систему всех правильных множеств. Очевидно, $X \in \mathfrak{A}$, так что $\mathfrak{A} \neq \phi$. Пусть $P = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$. Множество P – правильное: справедливость условий I) и 3) ясна непосредственно, условие 2) вытекает из соотношения (28) § 2 (см. I.2.6):

$$f[P] = f[\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} f[A] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = P.$$

Для доказательства леммы достаточно установить, что P – линейно упорядоченно. Действительно, в этом случае существует $\sup P = u$, причем в силу условия 3) $u \in P$. Следовательно, со - гласно условию 2) $f(u) \in P$, так что $f(u) \leqslant u$. Вместе с тем должно быть $f(u) > u$.

Линейную упорядоченность P докажем в несколько этапов.

Введем множество

$$Q = \{x \in P : f[\sigma_0^{-1}[x] \cap P] \subset \sigma^{-1}[x]\}. \tag{23}$$

Таким образом, $x \in Q$, если, во-первых, $x \in P$ и, во-вторых, из соотношений $y < x$, $y \in P$ вытекает $f(y) \leqslant x$.

Если $x \in Q$, то множество

$$P_x = P \cap (\sigma^{-1}[x] \cup \sigma[f(x)]) = P. \tag{24}$$

Действительно, достаточно убедиться, что $P_x \in \mathfrak{A}$. Условие I) определения правильного множества выполнено очевидным образом. Далее, так как $\sigma^{-1}[x] = \sigma_0^{-1}[x] \cup \{x\}$, $f(x) \in \sigma[f(x)] \cap P$, то в силу (23)

$$f[P_x] = (f[P \cap \sigma_0^{-1}[x]] \cup \{f(x)\}) \cup f[P \cap \sigma[f(x)]] \subset (\sigma^{-1}[x] \cap P) \cup (\sigma[f(x)] \cap P) = P_x,$$

так что соблюдение и условие 2). Наконец, если непустое линейно упорядоченное множество $V \subset P_x$, то в случае, когда пересечение $V \cap \sigma[f(x)] \neq \phi$, будет $\sup V = \sup(V \cap \sigma[f(x)]) \in \in \sigma[f(x)]$ (см. 3.5 предложение УП), а так как $\sup V \in P$, то $\sup V \in P_x$. Если же пересечение $V \cap \sigma[f(x)] = \phi$, то $V \subset \sigma^{-1}[x]$. Следовательно, и $\sup V \in \sigma^{-1}[x]$. Поскольку и на этот раз $\sup V \in P$, то опять имеем $\sup V \in P_x$. Итак, P_x удовлетворяет и условию 3) и тем самым оказывается правильным множеством.

Из (24) вытекает, что для любого $x \in Q$

$$P \cap (\sigma^{-1}[x] \cup \sigma[x]) = P. \qquad (25)$$

В самом деле, ввиду того, что $f(x) > x$, справедливо включение $\sigma[x] \supset \sigma[f(x)]$. Следовательно,

$$P = P \cap (\sigma^{-1}[x] \cup \sigma[f(x)]) \subset P \cap (\sigma^{-1}[x] \cup \sigma[x]) \subset P.$$

Теперь нетрудно доказать, что $Q = P$. Учитывая, что $Q \subset P$, нужно проверить только справедливость соотношения $Q \supset P$, а для этого достаточно убедиться, что $Q \in \mathfrak{A}$.

Так как $\sigma_0^{-1}[a] = \phi$, то $a \in Q$. Установим, что $f[Q] \subset Q$.

Пусть $x \in Q$, $y \in P \cap \sigma_0^{-1}[f(x)]$. В силу (24) должно быть, следовательно, $y \in \sigma[x]$. Если, кроме того, $y \neq x$, т.е. $y \in \sigma_0^{-1}[x]$, то отсюда вытекает (ведь $x \in Q$!), что $f(y) \in \sigma^{-1}[x] \subset \sigma^{-1}[f(x)]$.

Ясно, что и в случае $y = x$ будет $f(y) \in \sigma^{-1}[f(x)]$. Таким образом, $f(x) \in Q$, так что ввиду произвольности $x \in Q$, справедливо включение $f(Q) \subset Q$.

Пусть непустое упорядоченное множество $V \subset Q$. Положим $u = \sup V$. Если $u \in V$, то, понятно, $u \in Q$. Предположим, что $u \bar{\in} V$. Тогда $V \subset \sigma_0^{-1}[u]$ и

$$P \cap \sigma_0^{-1}[u] \subset \bigcup_{x \in V} (\sigma_0^{-1}[x] \cap P), \qquad (26)$$

так как если $y < u$ $(y \in P)$, то y не является верхней границей множества V, и значит, найдется $x \in V$, для которого соотношение $x \leq y$ неверно, а тогда вследствие (25) должно быть $y \in \sigma_0^{-1}[x]$. Используя (26) и (23), будем иметь

$$f[P \cap \sigma_0^{-1}[u]] \subset \bigcup_{x \in V} f[P \cap \sigma_0^{-1}[x]] \subset \bigcup_{x \in V} \sigma^{-1}[x] \subset \sigma^{-1}[u],$$

откуда получаем $u \in Q$.

Поскольку $Q = P$, соотношение (24) выполнено для любого $x \in P$. Значит, если $x, y \in P$, то либо $y \in \sigma^{-1}[x]$, либо $y \in \sigma[x]$, а это и означает, что P – линейно упорядоченное множество.

Лемма полностью доказана.

Применение доказанной леммы приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА I(3.I). Каково бы ни было упорядоченное множество (X, σ) в X существует, по крайней мере, одно максимальное линейно упорядоченное множество A_0, содержащее данное линейно упорядоченное множество $V_0 \subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество всех линейно упорядоченных подмножеств множества X. В $\mathfrak{X}$ введем отношение порядка – по включению. Требуется доказать, что полученное таким образом упорядоченное множество обладает максимальным элементом, следующим за V_0. Проверим, что $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию леммы Цорна. Пусть непустое множество $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$ линейно упорядочено. Примем $U = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$ и покажем, что U линейно упорядочено, т.е. что $U \in \mathcal{X}$. Если $x_1, x_2 \in U$, то найдутся множества $V_1, V_2 \in \mathcal{W}$ такие, что $x_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$. Так как $\mathcal{W}$ – линейно упорядоченная система, то одно из множеств – V_1 или V_2 – содержит другое. Обозначая через V более широкое из этих множеств, будем иметь $x_1, x_2 \in V$, и, принимая во внимание, что V – линейно упорядочено, будем иметь $x_1 \leq x_2$ или $x_2 \leq x_1$. Поскольку $U \in \mathcal{X}$, то $U = \sup \mathcal{W}$ (см. теорему I.(I.I)).

Остается принять в лемме Цорна $a = V_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если под $\mathcal{X}$ понимать множество всех направленных влево подмножеств множества X, то буквально так же, как при доказательстве теоремы, можно проверить, что и в этом случае $\mathcal{X}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Поэтому, каково бы ни было направленное влево множество V_0, существует максимальное направленное влево множество $A_0 \supset V_0$. Нетрудно понять, что A_0 непременно будет фильтром, так как в противном случае фильтр $U_{A_0} = \sigma[A_0]$ был бы существенно более широким, чем A_0, направленным влево множеством.

Доказанная теорема позволяет несколько ослабить условия леммы Цорна. Упорядоченное множество (X, σ) будем называть и н д у к т и в н ы м   в п р а в о, если всякое линейно упорядоченное множество $V \subset X$ ограничено сверху.

ТЕОРЕМА 2(3.I). Если упорядоченное множество (X, σ) индуктивно вправо, то, каков бы ни был элемент $a \in X$ в X существует хотя бы один максимальный элемент, следующий за a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $V_0 = \{a\}$ – линейно упорядочено. Поэтому согласно теореме I в X существует максимальное линейно упорядоченное подмножество A_0, содержащее a. Согласно условию A_0 ограничено сверху. Пусть u – какая-нибудь верхняя граница множества A_0. Множество $A = A_0 \cup \{u\}$ так же, как и A_0, линейно упорядочено, а поскольку $A \supset A_0$, то ввиду максимальности множества A_0, должно быть $A = A_0$, так что $u \in A_0$;

элемент u - наибольший в A_o. Если $x \in X$ и $x \geqslant u$, то x - также верхняя граница множества A_o и, по доказанному, $x \in A_o$. Следовательно, $x = u$ (3.3, предложение I). Таким образом, элемент u - максимальный в X. Остается заметить, что из $a \in A_o$ вытекает $u \geqslant a$.

Теорему 2 мы будем называть в дальнейшем также л е м м о й Ц о р н а.

Мы не останавливаемся на формулировках двойственных определений и утверждений, относящихся к минимальным элементам.

§ 4. Числовые множества

Важность понятия вещественного (часто говорят еще: действительного) числа обусловлена тем, что все рассматриваемые в анализе конкретные множества образованы с помощью принципов § I из множеств вещественных чисел. С другой стороны, связи, которые имеются между вещественными числами, послужили прообразами для многих рассматриваемых в математике структур.

Близость слов "число" и "перечисление" свидетельствует, по-видимому, о том, что первоначально "число" означало лишь результат перечисления, т.е. натуральное число, и лишь впоследствии было осмыслено и как результат всякого измерения - сравнения по какому-либо признаку данного объекта со стандартным эталоном.+)

Исторический процесс развития представления о числе поддается формализации. Можно было бы, отправляясь от множества всех натуральных чисел, используя лишь немногие его свойства, построить теорию вещественных чисел в необходимых для нас пределах. Но хотя это и можно сделать за значительно более короткий срок, чем тот, который понадобился для этой цели человечеству, все же изложение такой конструкции заняло бы достаточно много времени и места. Поэтому мы встанем на тот же путь, который уже проделали в § I, вводя понятие множества. Мы не будем пытаться узнать, как "устроены" вещественные числа, а выясним, или даже лучше сказать, напом-

---

+) Такое представление о числе возникло чрезвычайно давно, еще в доисторическую эпоху. Древнегреческая математика владела, в сущности, понятием иррационального числа - Эвклиду была, например, известна теорема о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата. Тем интереснее тот факт, что понятие отрицательного числа оформилось сравнительно недавно, уже в нашу эру.

ним, что можно с ними делать, т.е. перечислим в виде аксиом нужные нам основные их свойства.

Следует, впрочем, обратить внимание на определенное различие в аксиоматическом подходе к теории множеств и к теории вещественных чисел. В первом случае иной подход вообще представляется неосуществимым, по крайней мере с точки зрения сегодняшней математики, тогда как аксиоматическое описание вещественных чисел совсем необязательно и, больше того, возможно лишь постольку, поскольку читатель обладает известной математической подготовкой, которая только и позволяет ему понять "естественность" формулируемых аксиом. Именно учитывая эту подготовку, мы не будем, как правило, указывать следствий из аксиом, если они относятся к изученному в средней школе материалу.

4.I. Итак, мы исходим из того, что существует множество $\mathbb{R}$, элементы которого называются в е щ е с т в е н н ы м и (или д е й с т в и т е л ь н ы м и) ч и с л а м и, обладающее рядом свойств, к перечислению которых мы и приступаем. Начнем с фиксирования связи между множеством $\mathcal{N}$ всех натуральных чисел и $\mathbb{R}$.

А. I. Каждое натуральное число является и вещественным числом, т.е. $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$.

Следующая группа аксиом вводит арифметические операции в $\mathbb{R}$.

Существует отображение $\sigma: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, называемое с л о ж е н и е м (или операцией сложения). Прежде чем формулировать свойства сложения, укажем на общеизвестное обозначение: если $x, y \in \mathbb{R}$, то вместо $\sigma(x, y)$ пишут $x+y$ и называют это число с у м м о й чисел x и y.

Операция сложения удовлетворяет следующим условиям.

Б. I. Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ имеет место $x+(y+z)=(x+y)+z$ (ассоциативность).

Б. 2. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ имеет место $x+y = y+x$ (коммутативность).

Б. 3. Каковы бы ни были числа $x, y \in \mathbb{R}$ существует единственное $z \in \mathbb{R}$ такое, что $x+z=y$; число z называется р а з н о с т ь ю чисел y и x и обозначается $z=y-x$.

Если для непустого множества X определено отображение $\sigma: X^2 \to X$, удовлетворяющее условиям, подобным Б.I-Б.3, то упорядоченная пара (X, σ) называется к о м м у т а т и в н о й

(или, по имени выдающегося норвежского математика Абеля, **абелевой**) **группой с законом композиции** (или **групповой операцией**) σ. Сам закон композиции часто (но не всегда) называют **сложением**, и так же, как в случае множества $\mathbb{R}$, используют для обозначения $\sigma(x,y)$ символ $x+y$.

Отметим еще, что в описанной ситуации употребительно выражение: " σ наводит (или определяет) в X структуру коммутативной группы".

Систематическое изучение групп относится к курсу алгебры. Мы здесь укажем лишь на одно следствие из аксиом Б.I – Б.3, необходимое для формулировки дальнейших свойств множества $\mathbb{R}$.

I. Пусть (X,σ) – коммутативная группа. Существует единственный элемент $e \in X$, называемый **нейтральным элементом** группы, обладающий тем свойством, что для любого $x \in X$ имеет место $\sigma(x,e) = \sigma(e,x) = x$, т.е. если использовать для обозначения закона композиции знак "+", то $x+e = e+x = x$.

Действительно, для каждого $x \in X$ согласно Б. 3 существует разность $e_x = x-x$. Ясно, что достаточно доказать независимость элемента e_x от x. Пусть $y \in X$. Так как $(x+y)+e_y = x+(y+e_y) = x+y$, то $e_y = e_{x+y}$. Аналогично $e_x = e_{x+y}$, так что $e_y = e_x$.

Нейтральный элемент группы $\mathbb{R}$ +) называется **нулем** и обозначается знаком 0.

Если A и B – подмножества группы X с законом композиции σ, для обозначения которого используется знак "+", то под $A+B$ мы будем понимать множество всех элементов из X, представимых в виде $x+y$, где $x \in A$, $y \in B$. Таким образом, $A+B$ есть ни что иное, как образ $\sigma[A \times B]$ множества $A \times B$ при отображении σ. Если одно из множеств, например A, состоит из единственного элемента: $A = \{x_0\}$, то вместо $\{x_0\}+B$ мы будем писать x_0+B.

Аналогичный смысл имеют обозначения $A-B$, x_0-B, $-B = e-B$ и т.п.

+) Как всегда в подобных случаях, мы, говоря о **группе** $\mathbb{R}$, подразумеваем группу $(\mathbb{R},\sigma)$, где σ – сложение в $\mathbb{R}$.

Используя эту символику, укажем на связь множества $\mathcal{N}$ с групповой операцией в $\mathcal{R}$. Множество $\mathcal{N}$ порождается с помощью операции сложения одним из своих элементов. Точнее говоря,

Б. 4. Существует натуральное число I, называемое **е д и н и ц е й**, такое, что $1+\mathcal{N}\subset\mathcal{N}$, причем, если множество $A\subset\mathcal{R}$ таково, что $1\in A$ и $1+A\subset A$, то $A\supset\mathcal{N}$.

Таким образом, среди множеств $A\subset\mathcal{R}$, содержащих 1 и обладающих тем свойством, что $1+A\subset A$, множество $\mathcal{N}$ - наименьшее.

В частности, если множество $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$ и обладает свойствами, указанными в Б. 4, т.е. если

I) $1\in\mathcal{M}$;

2) из $m\in\mathcal{M}$ вытекает $m+1\in\mathcal{M}$,

то $\mathcal{M}=\mathcal{N}$.

Это утверждение называют обычно **п р и н ц и п о м и н д у к ц и и**. Вот несколько его применений.

П. $\mathcal{N}+\mathcal{N}\subset\mathcal{N}$.

В самом деле, обозначим $\mathcal{M}=\{m\in\mathcal{N}:\mathcal{N}+m\subset\mathcal{N}\}$.
Из аксиомы Б. 4 следует, что $1\in\mathcal{M}$. Далее, если $m\in\mathcal{M}$, то $\mathcal{N}+(m+1)=(\mathcal{N}+m)+1\subset\mathcal{N}+1\subset\mathcal{N}$.
Таким образом, $m+1\in\mathcal{M}$, а тогда в силу принципа индукции $\mathcal{M}=\mathcal{N}$.

Образуем множество $\mathcal{Z}=\mathcal{N}-\mathcal{N}$. Его элементы называются **ц е л ы м и** числами.

Ш. $\mathcal{Z}=\mathcal{N}\cup(-\mathcal{N})\cup\{0\}$.

Действительно, $1\in\mathcal{Z}$ $(1=(1+1)-1)$,

$$\mathcal{Z}+1=(\mathcal{N}-\mathcal{N})+1=(\mathcal{N}+1)-\mathcal{N}\subset\mathcal{N}-\mathcal{N}=\mathcal{Z}.$$

Следовательно, согласно Б. 4 $\mathcal{Z}\supset\mathcal{N}$.

Поскольку $-\mathcal{Z}=-\mathcal{N}+\mathcal{N}=\mathcal{Z}\supset\mathcal{N}$, то $\mathcal{Z}\supset-\mathcal{N}$. Наконец, $0=1-1\in\mathcal{Z}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $z\in\mathcal{Z}$. По определению существуют такие натуральные числа m, n, что $z=n-m$. Предположим сначала, что $m=1$ и докажем, что в этом случае $z\in\mathcal{N}\cup\{0\}$. Если $n=1$, то $z=0\in\mathcal{N}\cup\{0\}$. Пусть для какого-нибудь $n\in\mathcal{N}$ разность $n-1\in\mathcal{N}\cup\{0\}$. Тогда $(n+1)-1=n\in\mathcal{N}\subset\mathcal{N}\cup\{0\}$ и справедливость включения $z\in\mathcal{N}\cup\{0\}$ следует из принципа индукции. Основываясь на доказанном, проверим теперь, что $n-m \in \mathcal{N} \cup (-\mathcal{N}) \cup \{0\}$ верно для любых n, m. Для $m=1$ это уже сделано. Допустим, что указанное соотношение справедливо для некоторого $m \in \mathcal{N}$ и любого $n \in \mathcal{N}$. Тогда если $n-m \in \mathcal{N}$, то по доказанному $n-(m+1)=(n-m)-1 \in \mathcal{N} \cup \{0\}$; если $n-m=0$, то $n-(m-1)= =-1 \in -\mathcal{N}$, и наконец, если $n-m \in -\mathcal{N}$, то $n-(m+1)=-[(m-n)+1] \in -\mathcal{N}$.

Таким образом, во всех случаях $n-(m+1) \in \mathcal{N} \cup (-\mathcal{N}) \cup \{0\}$, и доказательство заканчивается по индукции.

Непустое подмножество A коммутативной группы X называется её **подгруппой**, если $A-A \subset A$ +).

IУ. Множество $\mathcal{Z}$ всех целых чисел является наименьшей подгруппой группы $\mathcal{R}$, содержащей число 1.

Действительно,

$$\mathcal{Z}-\mathcal{Z}=(\mathcal{N}-\mathcal{N})-(\mathcal{N}-\mathcal{N})=(\mathcal{N}+\mathcal{N})-(\mathcal{N}+\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}-\mathcal{N}=\mathcal{Z},$$

так что $\mathcal{Z}$ – подгруппа. В силу Ш $1 \in \mathcal{Z}$. Если A – подгруппа группы $\mathcal{R}$, содержащая 1, то $0=1-1 \in A-A \subset A$. Поэтому $-1=0-1 \in A-A \subset A$. Следовательно, $1+A=A-(-1) \subset A-A \subset A$. Значит, по Б. 4 $A \supset \mathcal{N}$. Но $-\mathcal{N} \subset -A=0-A \subset A-A \subset A$. Поэтому $A \supset \mathcal{N} \cup (-\mathcal{N}) \cup \{0\}$.

У. Пусть $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ – некоторое конечное множество и $x:\alpha_k \to x_{\alpha_k}$ $(k=1,\ldots,n)$ – отображение A в группу $\mathcal{R}$. Пользуясь принципом индукции, определим сумму $S_A=x_{\alpha_1}+\ldots+x_{\alpha_n}$, иначе говоря, определим сумму любого конечного набора элементов из $\mathcal{R}$. Если $A=\varnothing$, положим $S_A=0$. Если $A=\{\alpha\}$ состоит из одного элемента, положим $S_A=x_\alpha$. Предположим, что сумма S_A определена для всех подмножеств в $\mathcal{R}$, состоящих из n элементов. Пусть $A=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\}$ и $x_{\alpha_1},\ldots,x_{\alpha_{n+1}}$ – подмножество в $\mathcal{R}$, содержащее $n+1$ элемент. Возьмём произвольный $\alpha_k \in A$ и положим $S_A=S_{A_k}+x_{\alpha_k}$, где $A_k=A\setminus\{x_{\alpha_k}\}$. Покажем, что такое определение суммы корректно, то есть если α_i – любой отличный от α_k элемент в A, то $S_{A_i}+x_{\alpha_i}$ имеет то же значение S_A. Действительно,

$$S_A=S_{A_k}+x_{\alpha_k}=(S_{A_{k_i}}+x_{\alpha_i})+x_{\alpha_k}=(S_{A_{k_i}}+x_{\alpha_k})+x_{\alpha_i}=S_{A_i}+x_{\alpha_i}$$

+) Нетрудно проверить, что пара (A,τ), где τ –сужение на A^2 групповой операции σ в X, в этом и только в этом случае будет группой.

(здесь $A_{ki} = A \setminus \{\alpha_k, \alpha_i\}$). Итак, мы определили сумму любого конечного множества в $\mathcal{R}$.

Сумму $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_n}$ будем обозначать символом $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ или $\sum_{k=1}^{n} x_{\alpha_k}$.

Заметим, что если $\varphi: A \to B$ – взаимно-однозначное отображение A на некоторое множество B, то $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sum_{\beta \in B} x_{\varphi^{-1}(\beta)}$. Справедливость этого замечания следует непосредственно из определений.

УI. Предположим, что A представлено в виде $A = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$, где $A_i \cap A_j = \phi$, если $i \neq j$. Тогда $s_A = \sum_{k=1}^{m} s_{A_k}$.

Доказательство этого факта предлагаем провести самостоятельно, воспользовавшись принципом индукции.

4.2. Другая арифметическая операция, вместе со сложением определяющая алгебраическую структуру $\mathcal{R}$, называется **у м н о ж е н и е м**. Под умножением понимается отображение $\delta: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ (число $\delta(x,y)$ называется **п р о и з в е д е н и е м** чисел x и y и обозначается xy или $x \cdot y$), которое удовлетворяет следующим условиям.

В. I. Произведение $xy = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел x или y равно нулю.

Если обозначить через $\mathcal{R}_0$ множество всех вещественных чисел отличных от нуля, то из В. I следует, что $\delta[\mathcal{R}_0^2] \subset \mathcal{R}_0$. Поэтому если δ_0 – сужение отображения δ на $\mathcal{R}_0^2$, то $\delta_0: \mathcal{R}_0^2 \to \mathcal{R}_0$.

В. 2. Упорядоченная пара $(\mathcal{R}_0, \delta_0)$ является коммутативной группой, которая называется **м у л ь т и п л и к а т и в н о й г р у п п о й** вещественных чисел (отличных от нуля) +).

Связь между операциями сложения и умножения осуществляется с помощью **д и с т р и б у т и в н о г о** закона:

В. 3. Для любых элементов $x, y, z \in \mathcal{R}$ справедливо равенство

$$(x+y)z = xz + yz.$$

Пусть дано непустое множество X и отображения $\sigma: X^2 \to X$ и $\delta: X^2 \to X$, которые удовлетворяют аксиомам Б.I – Б.3 и В.I – В.3. Тогда тройку (X, σ, δ) называют **п о л е м**, отоб-

---

+) Группу $(\mathcal{R}, \sigma)$, о которой шла речь в 4.I, называют обычно **а д д и т и в н о й г р у п п о й** вещественных чисел.

ражение σ — с л о ж е н и е м , δ — у м н о ж е н и е м . Говорят еще, что отображения σ и δ наводят в X структуру поля. Нейтральный элемент группы (X,σ) называется н у л е м п о л я , а нейтральный элемент мультипликативной группы — е д и н и ц е й п о л я .

Как и всегда, в обозначении поля мы обычно будем опускать указание на операции сложения и умножения — лишь в исключительных случаях с одним и тем же множеством ассоциируются различные структуры поля.

Связь множества $\mathcal{N}$ с операцией умножения описывается следующей аксиомой.

В. 4. Единицей поля $\mathcal{R}$ служит число 1 , так что для любого $x \in \mathcal{R}$ произведение $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

Используя В.3 и В.4 , легко по индукции доказать, что произведение натуральных чисел само будет натуральным числом, а тогда, очевидно, произведение целых является целым.

Число $x \in \mathcal{R}$ называется р а ц и о н а л ь н ы м , если существуют такие целые числа $q \neq 0$ и p , что $qx = p$, т.е. если в обычных обозначениях $x = \frac{p}{q} = pq^{-1}$. Поскольку при любом $\alpha \neq 0$ справедливо равенство $\frac{p}{q} = \frac{\alpha p}{\alpha q}$, можно считать, что $q \in \mathcal{N}$ (если $q \in -\mathcal{N}$ (см.предложение Ш из 4.I), то, взяв $\alpha = -1$, получим $\alpha q \in \mathcal{N}$, и по-прежнему $\alpha p \in \mathcal{Z}$).

Множество всех рациональных чисел с индуцированными в нем из $\mathcal{R}$ операциями сложения и умножения является полем. Используя предложение IУ из 4.I, нетрудно убедиться, что это наименьшее поле, содержащее число 1.

4.3. Множество $\mathcal{R}$ обладает структурой порядка.

Г.I. Существует отношение порядка ω в $\mathcal{R}$ такое, что $(\mathcal{R},\omega)$ — линейно упорядоченное множество.

Число $x \geqslant 0$ называется п о л о ж и т е л ь н ы м , число $y \leqslant 0$ — о т р и ц а т е л ь н ы м . Если, кроме того, $x \neq 0$ $(y \neq 0)$, то о x говорят, что оно с т р о г о п о л о ж и т е л ь н о (y — с т р о г о о т р и ц а т е л ь н о).

Связь структуры порядка и структуры поля обусловлена следующими двумя аксиомами.

Г.2. Если $x,y,z \in \mathcal{R}$ и $x \leqslant y$, то $x+z \leqslant y+z$.

Очевидным образом отсюда следует, что соотношение $x \leqslant y$ равносильно неравенству $y - x \geqslant 0$. Далее, если $x \leqslant y$ и $u \leqslant v$, то $x+u \leq y+v$.

Поскольку $-x-0=0-x$, неравенства $x \geq 0$ и $-x \leq 0$ равносильны.

Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{R}$ и число $u \in \mathbb{R}$.

I. Точные верхние (нижние) границы множеств A и $u+A$ могут существовать лишь одновременно, причем

$$\sup(u+A) = u+\sup A \qquad (\inf(u+A) = u+\inf A) . \tag{1}$$

Действительно, пусть, например, существует $\sup A = v$. Ясно, что для любого $x \in A$ сумма $u+x \leq u+v$. Если число b таково, что $u+x \leq b$ для каждого $x \in A$, то $A \leq b-u$, так что $v=\sup A \leq b-u$, т.е. $u+v \leq b$.
Таким образом, сумма $u+v$ является точной верхней границей множества $u+A$.

Если исходить из существования $\sup(u+A)$, то учитывая, что $A=-u+(u+A)$, по доказанному получаем существование и $\sup A$.

II. Пусть A_1, A_2 - множества, имеющие точные верхние (нижние) границы. Тогда существует

$$\sup(A_1+A_2) = \sup A_1 + \sup A_2 \qquad (\inf(A_1+A_2)=\inf A_1 + \inf A_2) . \tag{2}$$

В самом деле, $A_1+A_2 = \bigcup_{u \in A_1} (u+A_2)$. При этом для каждого $u \in A_1$ существует $\sup(u+A_2) = u+\sup A_2$ и, если обозначить $v_i = \sup A_i$ $(i=1,2)$, существует $\sup_{u \in A_1}(u+v_2) = \sup(v_2+A_1)=v_1+v_2$. По свойству ассоциативности точных границ (см. I.3.3, предложение IУ) при этих условиях существует
$$\sup(A_1+A_2) = \sup_{u \in A_1}(\sup(u+A_2)) = v_1+v_2.$$

Так как $\mathbb{R}$ - линейно упорядоченное множество, то при любом $x \in \mathbb{R}$ числа x и $-x$ "сравнимы" между собой. Наибольшее из этих чисел, $|x| = x \vee (-x)$, называется **абсолютной величиной** (или **модулем**) числа x. Ясно, что если $x \geq 0$, то $|x|=x$; если же $x \leq 0$, то $|x|=-x$. Понятно, что $|x|=|-x|$.

III. Если $x, y \in \mathbb{R}$, то

$$|x+y| \leq |x|+|y| . \tag{3}$$

Действительно, поскольку $x \leq |x|$, $y \leq |y|$, то $x+y \leq |x|+|y|$. Но $-x \leq |x|$, $-y \leq |y|$, так что $-(x+y) \leq |x|+|y|$.
Следовательно, и

$$|x+y| = (x+y) \vee [-(x+y)] \leq |x|+|y|.$$

Из неравенства (3) обычным образом выводится неравенство

$$||x|-|y|| \leq |x-y| \qquad (x, y \in \mathcal{R}). \qquad \textbf{(4)}$$

Г. 3. Если $x, y \in \mathcal{R}$, причем $x > 0$ и $y > 0$, то и произведение $xy > 0$.

Из Г. 3 без труда выводится "правило знаков".

IУ. Если $x > 0$, а $y \leq 0$, то $xy \leq 0$. Если же $x, y \leq 0$, то $xy > 0$.

В самом деле, $xy = -[x(-y)]$, и так как в первом случае $-y > 0$, то $x(-y) \geqslant 0$ и, значит, $xy \leq 0$.

Вторая часть предложения вытекает из равенства $xy = (-x)(-y)$.

Так как $1 = 1 \cdot 1$, то $1 \geqslant 0$. Ввиду того, что в силу аксиомы В.4 $1 \in \mathcal{R}_0$ и, значит, $1 \neq 0$, имеем $1 > 0$. По индукции отсюда получаем, что 1 – наименьшее натуральное число. Действительно, $1 \geqslant 1$, и если какое-либо натуральное число $n \geqslant 1$, то $n+1 \geqslant 1+0 = 1$.

В силу сказанного каждое строго положительное целое число m является натуральным: если бы $m \in -\mathcal{N}$, то $-m \in \mathcal{N}$ и $-m \geqslant 1 > 0$, так что было бы $m < 0$.

У. Пусть m и n – такие целые числа, что $n \leq m \leq n+1$. Тогда либо $m = n$, либо $m = n+1$.

В самом деле, $0 \leq m-n \leq 1$, и если $m-n \neq 0$, то, как было отмечено, $m-n \in \mathcal{N}$. Но в множестве $\mathcal{N}$ число 1 наименьшее. Стало быть $m-n = 1$.

Из У вытекает следующее важное предложение.

УI. Каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Действительно, допустим, что существует непустое множество $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, не обладающее наименьшим элементом. Рассмотрим пересечение $D = \mathcal{J}_{\mathcal{M}} \cap \mathcal{N}$, где через $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, как и в I.3.3, обозначено множество всех нижних границ множества $\mathcal{M}$. Поскольку 1 – наименьшее натуральное число, то $1 \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$, а значит, и $1 \in D$. Пусть $n \in D$. Число n не может входить в состав множества $\mathcal{M}$ – оно было бы тогда его наименьшим элементом. Следовательно, для любого $m \in \mathcal{M}$ должно быть выполнено неравенство $n < m$. Но тогда $n+1 \leq m$, ибо в противном случае $n < m < n+1$, что противоречит предложению У. Таким образом, $n+1 \in \mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ и, следовательно, $n+1 \in D$. Согласно принципу индукции $D=\mathcal{N}$, т.е. $\mathcal{J}_{\mathfrak{M}} \supset \mathcal{N}$. Если m – какой-либо элемент из $\mathfrak{M}$, то $m+1 \in \mathcal{N} \subset \mathcal{J}_{\mathfrak{M}}$. Поэтому $m+1 \leq m$, $1 \leq 0$, что абсурдно.

ТЕОРЕМА I(4.I). Пусть имеется множество X и последовательность $\{\varphi_n\}$ отображений из X в X такая, что $\Omega_{\varphi_{n+1}} \supset \Delta_{\varphi_n}$ для каждого $n \in \mathcal{N}$. Тогда если $x \in \Omega_{\varphi_1}$, то существует единственная последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X такая, что

$$x_1 = x; \quad x_n \in \Omega_{\varphi_n}, \quad x_{n+1} = \varphi_n(x_n) \quad (n \in \mathcal{N}). \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственность последовательности $\{x_n\}$ без труда устанавливается по индукции: если $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ – последовательности, удовлетворяющие (5), то $x_1' = x_1''$ $(=x)$, и если для какого-то $n \in \mathcal{N}$ справедливо равенство $x_n' = x_n''$, то $x_{n+1}' = \varphi_n(x_n') = \varphi_n(x_n'') = x_{n+1}''$.

Докажем существование требуемой последовательности.

Пусть m – положительное целое число. Обозначим через $\mathcal{N}_m$ множество всех натуральных чисел, не превосходящих m. Понятно, что $m \in \mathcal{N}_m$ при любом $m > 0$; при этих же m в силу предложения У $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m-1} \cup \{m\}$. В частности, так как $\mathcal{N}_0 = \phi$, то $\mathcal{N}_1 = \{1\}$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех натуральных чисел m, обладающих тем свойством, что существует отображение $f^{(m)}: k \to x_k^{(m)}$ множества $\mathcal{N}_m$ в X такое, что

$$\begin{aligned} &x_1^{(m)} = x; \quad x_k^{(m)} = f^{(m)}(k) \in \Omega_{\varphi_k} \quad (k \in \mathcal{N}_m), \\ &x_{k+1}^{(m)} = \varphi_k(x_k^{(m)}) \quad (k \in \mathcal{N}_{m-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, $1 \in \mathfrak{M}$ – отображение $f^{(1)} = \{(1, x)\}$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что $m \in \mathfrak{M}$. Так как $x_m^{(m)} \in \Omega_{\varphi_m}$, то существует элемент $x_{m+1}^{(m+1)} = \varphi_m(x_m^{(m)})$, причем $x_{m+1}^{(m+1)} \in \Delta_{\varphi_m} \subset \Omega_{\varphi_{m+1}}$. Поэтому, полагая

$$f^{(m+1)} = f^{(m)} \cup \{(m+1, x_{m+1}^{(m+1)})\}, \tag{7}$$

без труда убедимся, что $f^{(m+1)}$ удовлетворяет (6), так что $m+1 \in \mathfrak{M}$. Отсюда заключаем по индукции, что $\mathfrak{M} = \mathcal{N}$, т.е. что отображение $f^{(m)}$ существует для любого $m \in \mathcal{N}$.

Для каждого данного $m \in \mathcal{N}$ отображение $f^{(m)}$ единственно. Действительно, если $g : \mathcal{N}_m \to X$ – отображение, удовлетворяющее, как и $f^{(m)}$, условиям (6), то в случае $f^{(m)} \neq g$ в силу предложения УI существует наименьшее число $i \in \mathcal{N}_m$, для которого $x_i^{(m)} = f^{(m)}(i) \neq g(i)$. Ясно, что $i > 1$ и, следовательно, $i-1 \in \mathcal{N}_m$. Поскольку $f^{(m)}(i-1) = g(i-1)$, то по (6)

$$x_i^{(m)} = \varphi_{i-1}(x_{i-1}^{(m)}) = \varphi_{i-1}(f^{(m)}(i-1)) = \varphi_{i-1}(g(i-1)) = g(i),$$

что противоречит определению i.

Из единственности $f^{(m)}$ на основании (7) следует, что $f^{(m+1)} \supset f^{(m)}$ при любом $m \in \mathcal{N}$. В частности, $x_m^{(m)} = f^{(m)}(m) = f^{(m+1)}(m) = x_m^{(m+1)}$.

Для $n \in \mathcal{N}$ положим теперь $x_n = x_n^{(n)}$. В силу (6)

$$x_1 = x_1^{(1)} = x; \qquad x_n = x_n^{(n)} \in \Omega_{\varphi_n},$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}^{(n+1)} = \varphi_n(x_n^{(n+1)}) = \varphi_n(x_n^{(n)}) = \varphi_n(x_n) \qquad (n \in \mathcal{N}).$$

Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорему I мы будем называть **принципом построения по индукции**. Если говорить коротко, смысл этой теоремы в том, что для задания последовательности $\{x_n\}$ достаточно указать ее первый элемент x_1 $(=x)$ и "правила перехода" от элемента x_n к элементу x_{n+1} – отображения φ_n.

Обычно применение принципа построения по индукции оформляется так: "зададим $x_1 = x$; предположим, что для некоторого натурального числа n уже определен элемент $x_n \in \Omega_{\varphi_n}$; положим $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$; этим определяется последовательность $\{x_n\} \ldots$"

Можно было бы вывести и более общий принцип построения по индукции, предполагая, что элемент x_{n+1} определяется не только элементом x_n, а зависит от всех элементов x_k $(k \in \mathcal{N}_n)$.

4.4. Важную роль в дальнейшем играет так называемая **аксиома Архимеда**, регламентирующая "распределение" множества всех натуральных чисел в множестве $\mathcal{R}$.

Г.4. Множество $\mathcal{N}$ конфинально вправо относительно множества $\mathcal{R}$.

Это значит (см. I.3.5), что каково бы ни было число $x \in \mathbb{R}$, найдется натуральное число $n > x$. Иначе аксиому Г.4 можно высказать, очевидно, так: множество $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.

Понятно, что множество $-\mathbb{N}$ всех строго отрицательных целых чисел конфинально влево относительно $\mathbb{R}$, так что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел конфинально как вправо, так и влево.

Нетрудно понять, что если число $\varepsilon > 0$, то множество чисел вида $n\varepsilon$ $(n \in \mathbb{N})$ так же, как и само $\mathbb{N}$, конфинально вправо: если $x \in \mathbb{R}$, то найдя натуральное число $n \geqslant \frac{x}{\varepsilon}$, будем иметь, очевидно, $n\varepsilon \geqslant x$.

Перефразировкой этого замечания является следующее предложение.

I. Каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и a, найдется натуральное число m такое, что $\frac{a}{m} < \varepsilon$.

Действительно, найдем натуральное $n \geqslant \frac{a}{\varepsilon}$. Тогда $m = n+1 > n \geqslant \frac{a}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{a}{m} < \varepsilon$.

Если $a \geqslant 0$, то $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{a}{n} = 0$, поскольку, если $\frac{a}{n} \geqslant b$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то согласно I должно быть $b \leq 0$.

ТЕОРЕМА 2(4.I). Если $x, y \in \mathbb{R}$, причем $x < y$, то существует рациональное число r, содержащееся в открытом промежутке (x, y), т.е. удовлетворяющее неравенствам $x < r < y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая в предложении I $a = 1$, $\varepsilon = y - x$, найдем $q \in \mathbb{N}$ так, чтобы было $\frac{1}{q} < y - x$.

Пусть k – какое-либое целое число, не превосходящее x. Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{q} > x - k\}$. Так как $\frac{1}{q} > 0$, то из сказанного ранее вытекает, что $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Согласно предложению УI из 4.3 множество $\mathfrak{M}$ имеет наименьший элемент, который мы обозначим через m. Поскольку $m \in \mathfrak{M}$, имеем $\frac{m}{q} + k > x$. Если, кроме того, $m-1 \in \mathbb{N}$, то $m-1 \bar{\in} \mathfrak{M}$, поэтому $\frac{m-1}{q} + k \leq x$.

Это неравенство в силу выбора k сохраняет силу и при $m=1$, т.е. верно, каково бы ни было m. Учитывая выбор q, имеем тогда

$$\frac{m}{q} + k = \left(\frac{m-1}{q} + k\right) + \frac{1}{q} < x + (y - x) = y.$$

Остается заметить, что число $r = \frac{m}{q} + k$ – рациональное $\left(r = \frac{m+qk}{q}\right)$

Из теоремы 2 получаем

II. Пусть $a, b \in R$. Если $a<b$, то промежуток Δ, у которого левый конец – a, а правый – b, не пуст, причем $a = \inf \Delta$, $b = \sup \Delta$.

В самом деле, по теореме 2 существует число $r \in (a,b)$. Так как во всяком случае $(a,b) \subset \Delta$, то $r \in \Delta$. Стало быть, $\Delta \neq \phi$.

Если $b \in \Delta$, то, очевидно, b – наибольший элемент в Δ, значит $b = \sup \Delta$. Предположим, что $b \bar{\in} \Delta$. Ясно, что и в этом случае b – верхняя граница множества Δ. Обозначим через c какую-либо верхнюю границу этого множества. Понятно, что должно быть $a \leq c$ (в противном случае, взяв какой-нибудь $x \in \Delta$, имели бы $c < a \leq x$). Если $c < b$, то, снова применяя теорему 2, подберем число r так, чтобы было $c < r < b$. Поскольку $a \leq c$, то $r \in (a,b) \subset \Delta$. Следовательно, должно было бы выполняться неравенство $r \leq c$, а не $c < r$. Итак, $c \geqslant b$, а это значит, что $b = \sup \Delta$.

Равенство $a = \inf \Delta$ обосновывается подобным же образом.

4.5. Перечисленные выше аксиомы не обеспечивают "полноту" множества R. Так, например, нет гарантии, что в R можно извлечь квадратный корень из любого положительного числа, хотя с помощью теоремы 2 и можно доказать, что это можно сделать "приближенно", причем со сколь угодно малой погрешностью. Не останавливаясь на точной формулировке последнего высказывания, отметим, что оно порождает несколько странную ситуацию: существуют и притом сколь угодно точные приближения к квадратному корню, тогда как самого корня может и не быть.

Эта ситуация становится невозможной, если потребовать, чтобы R удовлетворяло следующей а к с и о м е п о л н о т ы.

Д . I . Какова бы ни была убывающая (по включению) последовательность $\{\Delta_n\}$ непустых замкнутых промежутков из R, пересечение $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n \neq \phi$.

Для множества R аксиома полноты эквивалентна следующему утверждению, которое обычно удобнее для использования, поскольку оно включает в себя и часть других аксиом, выполняющихся для R, но не имеющих места для произвольного упорядоченного и даже линейно упорядоченного множества.

ТЕОРЕМА 3 (4.I) (Дедекинд). Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю, а ограниченное снизу – точную нижнюю границу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему в части, относящейся к множествам, ограниченным сверху. Пусть $A \neq \phi$ – такое множество. Обозначим через S_A множество всех его верхних границ, через Q_A дополнение (до $\mathbb{R}$) множества S_A. Ни S_A, ни Q_A не пусты; $S_A \neq \phi$ по условию; непустота Q_A вытекает из того, что $A \neq \phi$: взяв какой-нибудь элемент $x \in A$ и найдя согласно замечанию к аксиоме Г.4 (см.4.4) целое число $m \leq x$, будем иметь, очевидно, $m-1 < m \leq x$, $m-1 \in Q_A$.

Пусть $a \in Q_A$. Число a не является верхней границей множества A, поэтому найдется элемент $x \in A$ такой, что $a < x$. Если b – произвольный элемент из S_A – верхняя граница множества A, то $x \leq b$, и, следовательно, $a < b$.

Обозначим через X множество всех замкнутых промежутков вида $[a,b]$, где $a \in Q_A$, $b \in S_A$. Поскольку $a < b$, промежуток $[a,b] \neq \phi$. Рассмотрим какой-либо промежуток $\Delta \in X$. Пусть, например, $\Delta = [a,b]$. Положим $c = \frac{a+b}{2}$. Ясно, что $c \in [a,b]$. При этом справедливо одно (и только одно) из двух соотношений: $c \in S_A$ или $c \in Q_A$, так что либо $[a,c] \in X$, либо $[c,b] \in X$.

Определим на X отображение φ, сопоставляя произвольному промежутку $\Delta \in X$ $(\Delta = [a,b])$ в качестве значения $\varphi(\Delta)$ тот из промежутков $[a,c]$ или $[c,b]$, который содержится в X. Ясно, что при любом $\Delta \in X$ будет $\varphi(\Delta) \subset \Delta$.

Как уже отмечалось в начале доказательства, множества Q_A и S_A не пусты. Возьмем какой-либо элемент $a \in Q_A$ и $b \in S_A$. Согласно теореме о построении по индукции существует последовательность $\{\Delta_n\}$ замкнутых промежутков таких, что

$$\Delta_1 = [a,b]; \quad \Delta_n \in \Omega_\varphi = X, \quad \Delta_{n+1} = \varphi(\Delta_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{8}$$

Так как $\Delta_{n+1} = \varphi(\Delta_n) \subset \Delta_n$, то последовательность $\{\Delta_n\}$ – убывающая (в этом можно без труда убедиться по индукции). Понятно, что последовательность $\{\Delta_n\}$ удовлетворяет и всем другим условиям аксиомы полноты, так что существует $v \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

Покажем, что $v = \sup A$.

Предположим, что $\Delta_n = [a_n, b_n]$ $(n\in\mathcal{N})$. Как ясно из определения φ, при любом $n\in\mathcal{N}$ справедливо равенство $b_{n+1}-a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2}$. Отсюда по индукции легко получаем

$$0< b_n-a_n \le \frac{b-a}{n} \quad (n\in\mathcal{N}). \tag{9}$$

Действительно, поскольку $a_1=a,\ b_1=b$ (см. I.3.3), то (9) тривиально при $n=1$. Если это неравенство соблюдено для какого-либо $n\in\mathcal{N}$, то

$$b_{n+1}-a_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{2} \le \frac{b-a}{2n} \le \frac{b-a}{n+1},$$

так как $2n=n+n \geqslant n+1$.

Рассмотрим произвольные элементы $x\in A$ и $n\in\mathcal{N}$. Ввиду того, что $b_n\in S_A$, будет $x\le b_n = v+(b_n-v)$. Учитывая, что $v\in\Delta_n=[a_n, b_n]$, имеем в силу (9)

$$x\le v+(b_n-a_n)\le v+\frac{b-a}{n},$$

так что $x-v\le \frac{b-a}{n}$. Это неравенство справедливо для любых $n\in\mathcal{N}$, следовательно, $x-v\le \inf\limits_{n\in\mathcal{N}} \frac{b-a}{n}=0$ и $x\le v$, т.е. $v\in S_A$.

Возьмем теперь произвольный элемент $b\in S_A$. Так как $a_n<b$ при любом $n\in\mathcal{N}$, то основываясь на тех же соображениях, что и выше, можем написать

$$b>a_n = v-(v-a_n)\geqslant v-(b_n-a_n)\geqslant v-\frac{b-a}{n} \quad (n\in\mathcal{N}),$$

откуда вытекает, $v-b\le 0$, т.е. $v\le b$ и, стало быть, v – наименьший элемент множества S_A: $v=\sup A$.

Вторая часть теоремы – о множествах, ограниченных снизу, – доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ. Если A – непустое ограниченное множество, то существует наименьший замкнутый содержащий его промежуток Δ, причем $\Delta=[a,b]$, $a=\inf A$, $b=\sup A$.

Другим полезным следствием теоремы Дедекинда является следующее предложение.

I. Если a – положительное число, то существует единственное положительное число v такое, что $v^2=a$. Число v называется квадратным корнем из a и обозначается

$v=\sqrt{a}=a^{1/2}$.

В самом деле, рассмотрим множество $A=\{x\in\mathbb{R} : x\geqslant 0, x^2\leqslant a\}$. Это множество непустое $(0\in A)$ и ограничено сверху: если $a\leqslant 1$, то $x\leqslant 1$ $(x\in A)$; в случае $a>1$ за верхнюю границу множества A можно взять число a. По теореме Дедекинда существует $v=\sup A$. Докажем, что v – искомое. Прежде всего ясно, что $v\geqslant 0$. Предположим, что $v^2\neq a$. Рассмотрим сначала случай $v^2<a$. Если n – натуральное число, то, учитывая, что $\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}$, будем иметь

$$\left(v+\frac{1}{n}\right)^2=v^2+\frac{2v}{n}+\frac{1}{n^2}\leqslant v^2+\frac{2v+1}{n}.$$

Если в соответствии с предложением I из 4.4 выбрать n так, чтобы было $\frac{2v+1}{n}<a-v^2$, то окажется, что $(v+\frac{1}{n})^2\leqslant a$, так что $v+\frac{1}{n}\in A$, что невозможно, поскольку тогда получилось бы $v+\frac{1}{n}\leqslant \sup A=v$.

Случай $v^2>a$ разбирается аналогично. Взяв $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы было $\frac{2v}{n}\leqslant v^2-a$ и $\frac{1}{n}\leqslant v$, можем написать

$$\left(v-\frac{1}{n}\right)^2=v^2-\frac{2v}{n}+\frac{1}{n^2}\geqslant v^2-\frac{2v}{n}\geqslant v^2-(v^2-a)=a.$$

Поэтому, если $x\in A$, то $x^2\leqslant a\leqslant(v-\frac{1}{n})^2$ и, значит, $x\leqslant v-\frac{1}{n}$. Следовательно, должно быть и $v=\sup A\leqslant v-\frac{1}{n}$.

Единственность квадратного корня очевидна.

4.6. При изучении движения "земных" тел в механике обычно предполагают, что свет распространяется мгновенно, т.е. что скорость его распространения "бесконечна". Это допущение обусловлено тем, что хотя на самом деле скорость света и не бесконечна, но столь велика по сравнению со скоростями рассматриваемых тел, что учет этого обстоятельства, значительно усложнив теорию, дал бы эффект, который потерялся бы в погрешностях измерений, сколь бы точно их ни производить.

Таким образом, возможны ситуации, когда одно из рассматриваемых чисел настолько велико по сравнению с остальными, что его можно считать "бесконечным".

Математическим выражением представления о такого рода "бесконечных" числах служат так называемые несобственные числа $+\infty$ –

п л ю с   б е с к о н е ч н о с т ь , и $-\infty$ - м и н у с   б е с к о н е ч н о с т ь .

Вводя новые объекты, $+\infty$ и $-\infty$, мы не будем пытаться дать им конструктивное определение, а поступим так, как не раз уже поступали, рассматривая эти объекты лишь как символы, с которыми можно оперировать по определенным правилам. Чтобы удобнее было сформулировать эти правила, обозначим $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Элементы множества $\bar{\mathbb{R}}$ по-прежнему будем называть в е щ е с т в е н н ы м и   ч и с л а м и , а в тех случаях, когда возможно недоразумение, для обозначения чисел из $\mathbb{R}$ будем использовать термин "конечное вещественное число".

Е.I. В множестве $\bar{\mathbb{R}}$ введено отношение порядка, которое индуцирует в $\mathbb{R}$ отношение ω, рассмотренное в 4.3. При этом $+\infty$ служит наибольшим, а $-\infty$ – наименьшим элементом множества $\bar{\mathbb{R}}$.

Таким образом, можно записать $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Теорема Дедекинда может быть распространена на $\bar{\mathbb{R}}$, причем даже в более удобной формулировке.

I. Всякое множество $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ имеет точные границы (в $\bar{\mathbb{R}}$).

Действительно, если $A = \phi$, то множество S_A всех его верхних границ совпадает с $\bar{\mathbb{R}}$, наименьший элемент которого, $-\infty$, и служит точной верхней границей для A. Аналогично $\inf \phi = +\infty$.

В случае, когда $A \neq \phi$ и ограничено сверху элементом из $\mathbb{R}$, имеем $\sup A = \sup (A \cap \mathbb{R})$, а последний существует по теореме Дедекинда+).

Существование супремума у множества A, которое содержит $+\infty$, очевидно.

Допустим, наконец, что $+\infty \bar{\in} A$, но множество A сверху в $\mathbb{R}$ не ограничено. Это значит, что A не имеет конечных верхних границ, так что S_A сводится к единственному элементу, $+\infty$. Стало быть и в этом случае существует $\sup A = +\infty$.

Каждый промежуток D в произвольном упорядоченном множестве обладает тем свойством, что если $x, y \in D$ и $x \leq y$,

---

+) Возможно, что $A \cap \mathbb{R} = \phi$ и теорема Дедекинда не применима. Но тогда $A = \{-\infty\}$ и опять $\sup A = \sup \phi = -\infty$.

то $[x,y]\subset D$ [+)].

Для множества $\bar{R}$ (но не R) справедливо и обратное утверждение.

II. Пусть множество $D\subset\bar{R}$ обладает тем свойством, что если $x,y\in D$, $x\leq y$, то $[x,y]\subset D$. Тогда существуют числа $a,b\in\bar{R}$ такие, что $a\leq b$ и

$$(a,b)\subset D\subset[a,b], \qquad (10)$$

т.е. D является промежутком с концами a и b.

В самом деле, если $D=\varnothing$, то можно принять за a любое число и положить $b=a$.

Пусть $D\neq\varnothing$. Обозначим $a=\inf D$, $b=\sup D$. Очевидно $a\leq b$ и $D\subset[a,b]$. Возьмем какой-либо элемент $z\in(a,b)$. Так как $z>a$, то z не является нижней границей множества D, и поэтому найдется элемент $x\in D$ такой, что $x<z$. Аналогично можно убедиться, что существует такой $y\in D$, что $z<y$. По условию промежуток $[x,y]\subset D$; а так как $z\in(x,y)\subset[x,y]$, то и $z\in D$ Следовательно, $(a,b)\subset D$.

Арифметические операции - сложение и умножение, - имеющиеся в R, могут быть распространены на $\bar{R}$.

Е. 2. Если $x\in R$, то по определению

$$x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty, \qquad x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty.$$

Далее,

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty, \qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Символы $(+\infty)+(-\infty)$, $(-\infty)+(+\infty)$ не осмысливаются.

Множество $\bar{R}$, снабженное так определенной операцией сложения, уже не образует группы и не только потому, что сложение определено не для всех пар элементов из $\bar{R}$. Гораздо существеннее то обстоятельство, что нарушена аксиома Б.3: если $x,y\in\bar{R}$, причем хотя бы одно из этих чисел равно $+\infty$ или $-\infty$, то разность $y-x$, т.е. такой элемент z, что $x+z=y$, либо вовсе не существует ($x=\pm\infty$, $y\in\bar{R}\setminus\{x\}$), либо существует, но не единственна ($x=y=\pm\infty$). Лишь в случае, когда $y=\pm\infty$, а $x\in R$, число z существует и единственно: $z=y$. Хотя к элементам $y\in R$ и $x=\pm\infty$ аксиома Б.3 не приложима, тем не менее мы положим по определению $y-(\pm\infty)=\mp\infty$. В частности, при $y=0$ $-(\pm\infty)=0-(\pm\infty)=\mp\infty$.

+) Поскольку промежуток $[x,y]\neq\varnothing$ лишь в том случае, когда $x\leq y$, можно было бы не предполагать, что $x\leq y$.

Такое определение позволяет сохранить для $\bar{R}$ некоторые соотношения, выполняющиеся в R. Например, $y-x=y+(-x)$. Впрочем, этот прием отнюдь не избавляет от всех неприятностей, связанных с введением несобственных чисел, поскольку как бы ни определять разность $y-x$, равенство $x+(y-x)=y$ все равно не будет справедливо для всех элементов из $\bar{R}$. Имея в виду указанное обстоятельство, следует быть осторожным, проделывая алгебраические преобразования с числами, среди которых имеются несобственные. Нельзя, например, переносить число из одной части равенства в другую, изменив у него знак на противоположный.

Хотя при том содержательном истолковании несобственных чисел, которое было указано в начале пункта, определение суммы, содержащееся в Е.2, выглядит вполне закономерным, все-таки возможен вопрос, нельзя ли так определить сложение в $\bar{R}$, чтобы это множество стало группой (разумеется, такой, что R остается ее подгруппой). Не слишком глубокий анализ показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен. Чтобы можно было расширить R до группы, надо присоединить к R существенно больше элементов, чем два.

Коль скоро возникает такая ситуация, что при переходе от R к $\bar{R}$ мы теряем столь важное свойство - быть группой, не лучше ли вообще отказаться от введения несобственных чисел? И на этот вопрос следует дать отрицательный, хотя, безусловно, и не столь категорический, ответ. Дело в том, что несобственные числа являются абстракцией неких представлений о действительности и соображения "удобства" или "неудобства" тех или иных понятий в таких случаях не должны стоять на первом и даже вообще на каком-нибудь месте. Кстати сказать, поскольку упомянутые представления связаны исключительно со сравнением величин, несобственные числа оказываются удобным инструментом при изучении отношения порядка - в этом мы могли убедиться на примере предложений I и II.

Конечно, в ситуациях, где по существу встречаются несобственные числа, можно обойтись и без формального их введения, заменив, скажем, $+\infty$ словами "множество всех непустых не ограниченных сверху подмножеств множества R" или какими-нибудь еще. Однако едва ли надо объяснять, что выигрыш от такой замены велик лишь по абсолютной величине.

В заключение несколько слов о распространении на $\bar{R}$ операции умножения.

Е.3. Если $x \in \bar{R}$ и $x>0$, то по определению под произведением $x\cdot(\pm\infty)$ или $(\pm\infty)\cdot x$ понимается $\pm\infty$, если же $x<0$, то $\mp\infty$, т.е. сохраняется "правило знаков". Произведения $0\cdot(\pm\infty)$ и $(\pm\infty)\cdot 0$ считаются равными нулю.

Если правила умножения на число, отличное от нуля, не вызывают возражений, то целесообразность определения $0\cdot(\pm\infty)=0$ может показаться сомнительной. Дело в том, однако, что прямых противопоказаний, какие были, например, в случае $(+\infty)+(-\infty)$, для такого определения нет, а оно делает возможным определить произведение xy для любых $x,y\in\bar{R}$, причем сохраняется аксиома В.4, так что по-прежнему $xy=0$ лишь в том случае, когда один из множителей равен нулю, даже если другой – несобственное число.

Понятно, что однозначное деление в $\bar{R}$, вообще говоря, невозможно. Все же для некоторых случаев мы определим частное $\frac{y}{x}$. Именно, если $y\in R$, то $\frac{y}{\pm\infty}$ будем считать равным нулю. Если $x\in R$, причем $x\neq 0$, то по определению $\frac{\pm\infty}{x}=\frac{1}{x}\cdot(\pm\infty)$. Ясно, что при таком, (как, впрочем, и при всяком другом) способе определения частного основное свойство – $x\cdot\frac{y}{x}=y$ – нарушается. Это надо иметь в виду при различного рода преобразованиях, в которых участвуют несобственные числа.

Символы $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ не осмысливаются. Символ $\frac{y}{0}$ $(y\in R)$, который не осмысливался в R, не осмысливается и в $\bar{R}$. Казалось бы, можно приписать выражению $\frac{y}{0}$ значение $\pm\infty$, но нельзя указать сколько-нибудь разумные соображения для определения знака. Впрочем, если рассматриваются лишь положительные числа, то такие соображения появляются в пользу $+\infty$. Мы, однако, не будем формулировать на этот счет каких-либо правил. Проще в тех немногих случаях, когда возникает подобная обстановка, ввести на время соответствующее соглашение.

4.7. Понятие числа, как уже упоминалось, появилось в связи с процессами измерения различного рода величин, в частности, длины. Это обстоятельство находит отражение в аксиоме, содержащей геометрическое истолкование вещественных чисел.

Рассмотрим какую-либо прямую L. Множество всех точек, лежащих на L, будем обозначать также через L. Возьмем произвольную точку $O\in L$ и отличную от нее точку $E\in L$. Прямая с выделенной на ней упорядоченной парой точек, т.е. упорядоченная тройка

(L, O, E) называется **числовой прямой**. Основанием для такого названия служит следующая аксиома.

Ж.I. Пусть (L, O, E) – числовая прямая. Существует единственное отображение φ множества R на множество L такое, что

I) $\varphi(0)=O$, $\varphi(1)=E$;

2) каковы бы ни были числа $x, y \in R$ $(x<y)$ образ $\varphi[(x,y)]$ открытого промежутка (x, y) при отображении φ совпадает с отрезком прямой L, имеющим концы $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, т.е. с множеством всех точек прямой L, лежащих **между** точками $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ (исключая их самих);

3) если $x, y, u, v \in R$, причем $x<y$, $u<v$ и $y-x=v-u$, то отрезки $\varphi[(x,y)]$ и $\varphi[(u,v)]$ конгруентны+).

Так как при условии $x<y$ промежуток $(x,y)\neq\phi$ (4.4, предложение II), то и образ $\varphi[(x,y)]\neq\phi$. Следовательно, точка $\varphi(x)$ отлична от точки $\varphi(y)$ и, значит, φ – взаимно однозначно.

Понятно также, что если M – отрезок прямой L с концами α и β, то прообраз $\varphi^{-1}[M]$ будет промежутком (u, v), где u – меньшее из чисел $\varphi^{-1}(\alpha)$ и $\varphi^{-1}(\beta)$, а v – большее. Разность $v-u=|\varphi^{-1}(\beta)-\varphi^{-1}(\alpha)|$ называется **длиной** отрезка M.

Образом замкнутого промежутка $[x,y]$ $(x,y\in R,\ x\leq y)$ является **замкнутый отрезок** с концами $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, т.е. множество всех точек прямой L, лежащих между этими точками, включая и их самих. Длина замкнутого отрезка определяется так же, как $|\varphi^{-1}(\beta)-\varphi^{-1}(\alpha)|$, где α, β – концы данного отрезка.

Точка O делит прямую L на два луча. Один из них, L^+, содержит точку E, другой, L^-, не содержит. Если число $x\leq 0$, то $0\in[x,1]$. Следовательно, точка $O=\varphi(0)$ лежит между точками $\alpha=\varphi(x)$ и $E=\varphi(1)$, т.е., если $x\neq 0$, точки α и E лежат по разные стороны от точки O, так что $\alpha\in L^-$ (это верно, конечно, и в случае $x=0$). В частности, точка

+) В средней школе вместо "конгруентные" говорят "равные". В нашем изложении слово "равные" означает тождественные.

$E^- = \varphi(-1) \in L^-$. Заменяя в проведенном рассуждении точку E точкой E^-, получим, что для $x \geqslant 0$ точка $\varphi(x) \in L^+$. Так как φ взаимно однозначно, то из сказанного вытекает следующее:

$$\varphi[\mathbb{R}^-] = L^-, \quad \varphi[\mathbb{R}^+] = L^+ \qquad (\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 0\}, \ \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}).$$

Это делает естественным названия: для L^+ - положительная полуось, для L^- - отрицательная полуось.

Наличие взаимно однозначного отображения φ позволяет отождествить множество $\mathbb{R}$ с числовой прямой. При этом мы получаем возможность, говоря о множестве $\mathbb{R}$, использовать геометрическую терминологию, например, вместо "число" говорить "точка", употреблять слово "между" по отношению к числам и т.д. Многие свойства множества $\mathbb{R}$, если их перенести на числовую прямую, становятся более наглядными. Правда, это относится, главным образом, к свойствам, связанным с отношением порядка.

Отождествление множества $\mathbb{R}$ с числовой прямой делает возможным для обозначения множества $\mathbb{R}$ использовать термин "числовая прямая". При этом за множеством $\bar{\mathbb{R}}$ закрепляется название расширенная числовая прямая.

В I.I.7 было указано, что множество P всех точек данной плоскости можно определенным образом отождествить с произведением $L \times M$ множества всех точек, лежащих на прямой L и, соответственно, на пересекающей прямую L прямой M +).

Выбрав на прямой L пару точек (O_1, E_1), а на M - пару (O_2, E_2), мы превратим L и M в числовые прямые, каждая из которых может быть отождествлена с $\mathbb{R}$. Таким образом, множество P можно истолковать как произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, т.е. как множество всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x, y \in \mathbb{R}$.

Для сокращения изложения введем следующие термины.

Пусть дана плоскость P. Системой координат в P называется упорядоченная пара числовых прямых (L, O_1, E_1) и (M, O_2, E_2) таких, что $L, M \subset P$ и $L \cap M \neq \varnothing$. При этом первая числовая прямая, (L, O_1, E_1), называется

+) Как и выше, мы не делаем различия в обозначении прямой и множества всех точек, на ней лежащих.

о с ь ю а б с ц и с с , вторая, (M, O_2, E_2) – о с ь ю о р д и н а т. Плоскость с выделенной на ней системой координат называется координатной плоскостью.

Чаще других в координатной плоскости рассматривается прямоугольная система координат, когда прямые L и M перпендикулярны. Кроме того, обычно точку пересечения прямых L и M принимают за "нулевую" точку как оси абсцисс, так и оси ординат, так что $O_1 = O_2 = O$. Точка O в этом случае называется н а ч а л о м к о о р д и н а т. Наконец, отрезки OE_1 и OE_2 обычно конгруентны. Ниже, говоря о координатной плоскости, будем предполагать, если только явно не высказано противное, что система координат удовлетворяет обоим указанным выше условиям.

Из сказанного выше следует, что каждая точка координатной плоскости (с произвольной системой координат) определяет и сама определяется парой чисел – к о о р д и н а т а м и данной точки. Первое число пары называется а б с ц и с с о й , второе – о р д и н а т о й данной точки.

Как и всегда, отождествление нетождественных в действительности объектов несет в себе источник возможных недоразумений, поскольку точка на координатной плоскости все-таки не есть пара чисел, а лишь по определенному правилу с о о т в е т с т в у е т паре чисел. Изменив это правило, взяв, например, другую систему координат, мы изменим и способ отождествления.

Пусть F – какое-либо соответствие из R в R, так что $F \subset R^2$. Соответствие F определяет в данной координатной плоскости P +) множество $\Gamma(F)$, называемое г р а ф и к о м соответствия F (на данной координатной плоскости). Так графиком $\Gamma(\omega)$ отношения порядка ω в R будет, как явствует из соображений элементарной геометрии, множество всех точек плоскости P, которые лежат по ту же сторону от биссектрисы первого (и третьего) координатного угла ++), что и единичная точка E_2 оси ординат (рис.5).

+) Систему координат в P мы явно не указываем.

++) Угол между положительными полуосями называется первым, а между отрицательными – третьим координатным углом.

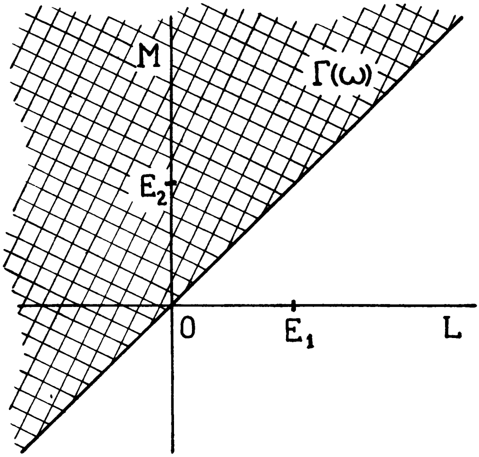

Рис. 5

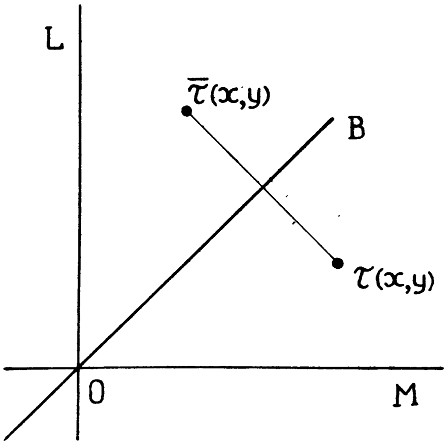

Рис. 6

Наряду с данной системой координат (L, O, E_1), (M, O, E_2) рассмотрим "симметричную" по отношению к ней систему (M, O, E_2), (L, O, E_1), в которой осью абсцисс служит прежняя ось, а осью ординат – ось абсцисс исходной системы. Пусть $\tau(x,y)$ означает ту точку плоскости P, которая имеет координаты (x, y) в исходной системе координат, через $\bar{\tau}(x,y)$ обозначим точку с теми же координатами (x, y), но в симметричной системе координат (рис.6). Нетрудно доказать, что точки $\tau(x,y)$ и $\bar{\tau}(x,y)$ расположены симметрично относительно биссектрисы B первого и третьего координатных углов, что означает, что отрезок, соединяющий эти две точки, пересекает биссектрису B перпендикулярно и делится точкой пересечения на конгруентные отрезки.

Очевидно также, что

$$\bar{\tau}(y,x) = \tau(x,y). \tag{11}$$

Рассмотрим множество $F \subset \mathbb{R}^2$. Понятно, что его график $\Gamma(F)$ зависит не только от самого множества F, но и от системы координат, определяющей координатную плоскость, в связи с чем мы сохраним за ним обозначение $\Gamma(F)$, если речь идет об исходной системе координат, а если имеется в виду симметричная ей система, будем использовать обозначение $\Gamma^*(F)$.

Как же связаны между собой множества $\Gamma(F)$ и $\Gamma^*(F)$? Возьмем произвольную точку $\alpha \in \Gamma^*(F)$. По определению множества $\Gamma^*(F)$ существует пара $(x,y) \in F$ такая, что $\bar{\tau}(x,y) = \alpha$; понятно, что при этом точка $\bar{\alpha} = \tau(x,y) \in \Gamma(F)$. Обратно, если какая-либо точка $\bar{\alpha} \in \Gamma(F)$, то симметричная ей относительно прямой B точка $\alpha \in \Gamma^*(F)$. Таким образом, чтобы перейти от одного из множеств $\Gamma^*(F)$ или $\Gamma(F)$ к другому, нужно заменить каждую точку этого множества ей симметричной относительно B.

Заметим теперь, что

$$\Gamma^*(F) = \Gamma(F^{-1}). \tag{12}$$

Действительно, если $\alpha \in \Gamma^*(F)$, то существует такая пара $(x,y) \in F$, что $\alpha = \bar{\tau}(x,y)$, т.е. в силу (11) $\alpha = \tau(y,x)$. Так как включения $(x,y) \in F$ и $(y,x) \in F^{-1}$ означают одно и то же, то последнее равенство равносильно соотношению $\alpha \in \Gamma(F^{-1})$, , что и доказывает (12).

Следовательно, чтобы построить график $\Gamma(F^{-1})\ (=\Gamma^*(F))$, надо в графике $\Gamma(F)$ заменить каждую точку симметричной ей относительно оси B (рис.7). В частности, график соответствия ω^{-1}

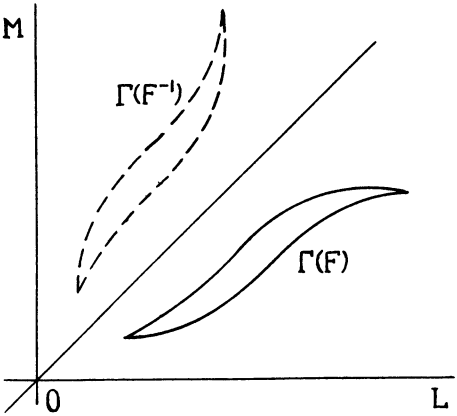

Рис. 7

будет полуплоскостью, содержащей единичную точку оси абсцисс – E_1 (рис.8).

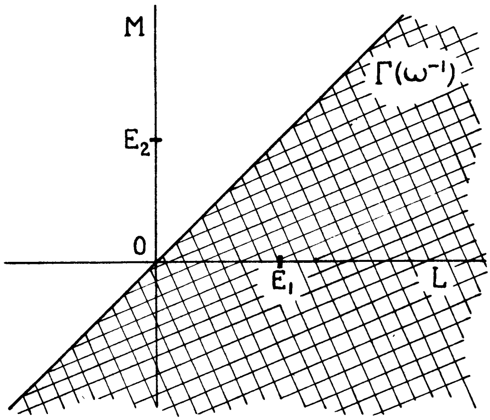

Рис. 8

4.8. В произведении R^2 можно определить структуру поля, причем так, что если естественным образом отождествить множества R и $R \times \{0\}$, то индуцированная в R из R^2 структура совпадает с определенной в 4.I – 4.3.

Пусть $z_k \in R^2$ $(z_k = (x_k, y_k),\ x_k, y_k \in R,\ k = 1,2)$. По определению положим

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2); \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1 y_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)^{+)}. \tag{I3}$$

Легко проверить, что такое определение сложения и умножения наводит в R^2 структуру поля, т.е. что при этом удовлетворяются аксиомы Б.I – Б.5. Не останавливаясь на подробной проверке этого утверждения, отметим лишь, что роль нейтрального элемента группы R^2 (по сложению) играет пара $(0,0)$, временно обозначаемая символом 0; разностью $z_1 - z_2$ служит пара $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$. Единицей поля, т.е. нейтральным элементом мультипликативной группы $R^2 \setminus \{0\}$ является пара (I,0), которую мы, тоже временно, обозначим через 1. Если $z_2 \neq 0$, то частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Обычно, когда множество R^2 рассматривается вместе с определенной выше структурой поля, оно обозначается символом C, а его элементы называются **к о м п л е к с н ы м и ч и с л а м и**.

+) Мы не останавливаемся на истолковании терминов "сумма", "произведение" и.т.п. применительно к элементам из R^2, ввиду очевидной однозначности всякого разумного подхода к этому. Однако мы хотели бы обратить внимание на то, что в равенствах (I3) знак "+" в левой и правой части означает совершенно различное. В правой части он обозначает уже определенную сумму в R, в левой же – вновь определяемую операцию сложения в R^2. Если быть последовательным, следовало бы говорить об отображении $\sigma: (R^2 \times R^2) \to R^2$, которое определяется с помощью (I3): $\sigma(z_1, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$.
Сказанное, разумеется относится и к умножению в R^2.
В дальнейшем нам не раз придется столкнуться с подобными обстоятельствами, когда один и тот же символ в одном и том же рассмотрении понимается в зависимости от контекста в различных смыслах. Обычно это относится к знакам, обозначающим связи между элементами множеств в различных, но однотипных структурах.

Рассмотрим в $\mathcal{C}$ подмножество $\mathcal{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$. Естественно возникающее отображение $\varphi : (x, 0) \to x \quad (x \in \mathbb{R})$ множества $\mathcal{R}$ на $\mathbb{R}$ взаимно однозначно и, что особенно важно, сохраняет структуру поля. Последнее означает, что

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2), \qquad \varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) \cdot \varphi(z_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathcal{R}),$$

так что безразлично, сложить ли (по правилам (I3)) сначала числа $z_1, z_2 \in \mathcal{R}$, а затем найти соответствующий сумме элемент из $\mathbb{R}$, или проделать это по отдельности для каждого слагаемого z_1 и z_2, а уже затем образовать сумму найденных элементов из $\mathbb{R}$. То же относится, конечно, и к произведению. Таким образом, говоря о сумме или произведении элементов из $\mathcal{R}$, можно подразумевать сумму или произведение соответствующих им элементов из $\mathbb{R}$ и наоборот.

Если осуществить указанное отождествление, т.е. условиться вместо $(x, 0)$ $(x \in \mathbb{R})$ писать просто x, в частности, вместо $\mathbb{0}$ писать 0 и вместо $\mathbb{1}$ – 1, то каждое комплексное число $z = (x, y)$ может быть представлено в форме $z = x + yi$, где обозначено $i = (0, 1)$, причем согласно (I3) $i^2 = -1$ +). Вещественное число x называется в е щ е с т в е н н о й, а число y (тоже вещественное) – м н и м о й частью комплексного числа $z = x + yi$. При этом пишут $x = Re\, z$, $y = Im\, z$.

Комплексное число $\bar{z} = x - yi$ $(x = Re\, z,\ y = Im\, z)$ называется с о п р я ж е н н ы м по отношению к числу $z = x + yi$. Очевидно

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = Re\, z = Re\, \bar{z}, \qquad \frac{z - \bar{z}}{2i} = Im\, z = -Im\, \bar{z}.$$

Произведение $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ $(z = x + yi)$ представляет собой вещественное положительное число. Поэтому существует число $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ (4.5, предложение I), которое называется м о д у л е м (или а б с о л ю т н о й в е л и ч и н о й) числа z ++).

+) Равенство $z = x + yi$ в подобной записи выглядит так: $z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$.

++) Если $z \in \mathbb{R}$, т.е. если $y = Im\, z = 0$, то модуль $|z| = \sqrt{x^2}$ совпадает с определенной в 4.3 абсолютной величиной числа $z = x$.

На комплексные числа распространяется предложение III из 4.3.

I. Каковы бы ни были комплексные числа z_1 и z_2, справедливо неравенство

$$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|. \qquad (14)$$

В самом деле, поскольку и левая и правая части в (14) положительны, это неравенство справедливо тогда и только тогда, когда $|z_1+z_2|^2 \leq (|z_1|+|z_2|)^2$, т.е. если обозначить $z_k = x_k + y_k i$ $(k=1,2)$, когда

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2 \leq x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2}. \qquad (15)$$

В свою очередь (15) равносильно следующему соотношению:

$$x_1x_2+y_1y_2 \leq \sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}. \qquad (16)$$

Так как, очевидно,

$$(x_1x_2+y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2 =$$

$$=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2 \leq (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$$

и

$$x_1x_2+y_1y_2 \leq |x_1x_2+y_1y_2| = \sqrt{(x_1x_2+y_1y_2)^2},$$

то, следовательно, верно (16), а значит, (15) и (14).

Как и в вещественном случае, из (14) может быть выведено неравенство

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1-z_2|. \qquad (17)$$

Наконец отметим, что

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|. \qquad (18)$$

В самом деле, $|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)\cdot(\overline{z_1z_2})}$. Но легко проверить, основываясь на правилах (13), что $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$. Поэтому

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)(\overline{z}_1\overline{z}_2)} = \sqrt{(z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2)} = \sqrt{z_1\overline{z}_1}\,\sqrt{z_2\cdot\overline{z}_2} = |z_1|\cdot|z_2|.$$

Поскольку C служит лишь иным обозначением для множества R^2, то C можно отождествить с множеством всех точек какой-либо координатной плоскости, которая в такой ситуации получает наименование **к о м п л е к с н о й   п л о с к о с т и** . Ось абсцисс соответствующей системы координат называется при этом **в е щ е с т в е н н о й   о с ь ю** - все точки, лежащие на ней отвечают вещественным числам, ось ординат по аналогичным причинам называется **м н и м о й   о с ь ю** .

Как следует из теоремы Пифагора, $|z|$ $(z \in \mathbb{C})$ равен длине отрезка, соединяющего точку z и точку 0 - начало координат. Сопряженные комплексные числа z и $\bar{z}$ изображаются на комплексной плоскости точками, симметрично расположенными относительно вещественной оси.

§ 5. Конечные и счетные множества

В этом параграфе мы коснемся идеи сравнения множеств по "числу" их элементов. Процесс подсчета числа элементов данного множества A (конечного) состоит при простейшей своей реализации в приписывании элементам множества A последовательных натуральных чисел до тех пор, пока множество A не будет исчерпано. Точнее говоря, дело сводится к построению отображения φ множества A в множество $\mathcal{N}$, которое обладает следующими двумя свойствами:

I) если какое-либо натуральное число $m \in \Delta_\varphi$, а натуральное число $k < m$, то и $k \in \Delta_\varphi$;

2) если $a \in A$ и $m = \varphi(a)$, то $a \in A \setminus \varphi^{-1}[\mathcal{N}_{m-1}]$,

где через $\mathcal{N}_k$ обозначено множество всех натуральных чисел, не превосходящих данное положительное целое число k.

То, что множество A конечно, означает, что процесс перечисления рано или поздно закончится, т.е. что в множестве $\varphi[A]$ имеется наибольшее натуральное число n , которое и называется числом элементов множества A. Условие I) обеспечивает при этом равенство $\Delta_\varphi = \mathcal{N}_n$, а из условия 2) вытекает взаимная однозначность отображения φ.

Понятно, что любое взаимно однозначное отображение $\varphi : A \xrightarrow{на} \mathcal{N}_n$ удовлетворяет условиям I) и 2) и может быть, следовательно, положено в основу процесса пересчета.

Таким образом, когда говорят, что множество A конечно, то это означает, что существует целое положительное число n и взаимно однозначное отображение $\varphi : A \xrightarrow{на} \mathcal{N}_n$.

Далеко не для всякого множества A можно подобрать n ,как указано выше. Этого, например, нельзя сделать, когда $A=\mathcal{N}$ или $A=\mathcal{R}$. Тем самым возникает необходимость расширить "шкалу" множеств-эталонов, присоединив к множествам вида $\mathcal{N}_n$ еще те или иные "стандартные" множества.

5.I. Множества A и B называются эквивалентными или равномощными (в обозначениях: $A\sim B$), если существует взаимно однозначное отображение $\varphi: A \xrightarrow{на} B$.

Ясно, что всегда $A\sim A$: в качестве φ можно взять отображение $I_A: x \to x \ (x\in A)$.

Далее, если $A\sim B$, то $B\sim A$, так как если φ - взаимно однозначное отображение A на B , то φ^{-1} также будет взаимно однозначным отображением B на A.

Наконец, если A, B, C - такие множества, что $A\sim B$ и $B\sim C$, то $A\sim C$, поскольку, обозначая через φ и ψ взаимно однозначные отображения A на B и B на C соответственно и образуя их суперпозицию $\theta=\psi\circ\varphi$, будем иметь взаимно однозначное отображение $\theta: A \xrightarrow{на} C$.

Если о множествах A и B известно, что существует отображение одного из них (скажем, A) на другое - B , то можно утверждать, что B имеет "не больше" элементов , чем A . Точнее говоря,

I. Если φ - отображение множества A на множество B , то B эквивалентно некоторому множеству $A_0\subset A$.

Действительно, применим к соответствию φ^{-1} предложение IУ из I.2.7. Так как $\Omega_{\varphi^{-1}}=\Delta_\varphi=B$, то на основании указанного предложения существует определенное на B отображение $f\subset\varphi^{-1}$. Поскольку $f^{-1}\subset\varphi$, то соответствие f^{-1}, как и φ , однозначно, так что f - взаимно однозначное отображение. Принимая $A_0=\Delta_f$, получим $B\sim A_0$.

Если существует такое целое положительное число m , что множество $A\sim\mathcal{N}_m$, то множество A называется конечным , а m - числом его элементов. В противном случае об A говорят, что оно бесконечно.

Множество A , эквивалентное множеству $\mathcal{N}$, называется счетным.

Термином "не более чем счетное множество" обозначают всякое множество, которое или конечно или счетно.

Отметим следующий очевидный факт: если множества A и B эквивалентны и одно из них конечно (или счетно), то и другое будет конечным (соответственно, счетным).

5.2. Непосредственно из определения не вытекает, что число элементов данного конечного множества определяется этим множеством однозначно. В связи с этим приобретает значение следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть k и m – положительные целые числа. Если $\mathcal{N}_k \sim \mathcal{N}_m$, то $k=m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если одно из чисел k или m равно нулю, то соответствующее множество $\mathcal{N}_k$ или $\mathcal{N}_m$ пусто, а тогда, очевидно, пусто и другое. Поэтому и $k=0$ и $m=0$. Следовательно, продолжая доказательство, можно считать, что $k, m>0$, т.е. что $k, m \in \mathcal{N}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех таких натуральных чисел m, что если при каком-нибудь $k \in \mathcal{N}$ справедливо соотношение $\mathcal{N}_k \sim \mathcal{N}_m$, то $k=m$. Поскольку $\mathcal{N}_1=\{1\}$, а при $k>1$ множество $\mathcal{N}_k$ содержит еще число $k \neq 1$, то $\mathcal{N}_k \sim \mathcal{N}_1$ лишь в том случае, когда $k=1$. Таким образом, $1 \in \mathfrak{M}$.

Пусть какое-либо $m \in \mathfrak{M}$. Докажем, что и $m+1 \in \mathfrak{M}$. Предположим, что натуральное число k таково, что $\mathcal{N}_k \sim \mathcal{N}_{m+1}$. Это значит, что существует взаимно однозначное отображение φ_0 множества $\mathcal{N}_k$ на $\mathcal{N}_{m+1}$. Обозначим $\varphi_0^{-1}(m+1)=r$ и введем отображение ψ множества $\mathcal{N}_k$ на себя, полагая для $j \in \mathcal{N}_k$

$$\psi(j)=\begin{cases} k, & \text{если } j=r \\ r, & \text{если } j=k \\ j, & \text{если } j \neq r, k \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Нетрудно видеть, что отображение ψ взаимно однозначно. Следовательно, будет взаимно однозначной и суперпозиция $\varphi=\varphi_0 \circ \psi$, причем $\Omega_\varphi=\mathcal{N}_k$, а $\Delta_\varphi=\mathcal{N}_{m+1}$. Кроме того, $\varphi(k)= \varphi_0(\psi(k))=\varphi_0(r)=m+1$. Поскольку $\mathcal{N}_k=\mathcal{N}_{k-1} \cup \{k\}$ и $\mathcal{N}_{m+1}=\mathcal{N}_m \cup \{m+1\}$, последнее соотношение дает $\varphi[\mathcal{N}_{k-1}]= \mathcal{N}_m$, так что множества $\mathcal{N}_{k-1}$ и $\mathcal{N}_m$ эквивалентны. Но $m \in \mathfrak{M}$, стало быть, $k-1=m$, т.е. $k=m+1$. А это и означает, что $m+1 \in \mathfrak{M}$.

Согласно принципу индукции $\mathfrak{M}=\mathcal{N}$.

Лемма полностью доказана.

Если множество A эквивалентно множеству $\mathcal{N}_k$ и множеству $\mathcal{N}_m$, то $\mathcal{N}_k \sim \mathcal{N}_m$ и, следовательно, по лемме $k=m$. Таким образом, каждое конечное множество A имеет единственное число элементов, которое мы будем обозначать через μ_A. Ясно, что из эквивалентности конечных множеств A и B вытекает $\mu_A = \mu_B$ и обратно, если $\mu_A = \mu_B$, то $A \sim B$.

Другим важным следствием леммы является

ТЕОРЕМА I(5.I). Если A – конечное множество, а множество $B \subset A$, то B также конечно, причем $\mu_B \leq \mu_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mu_A = m$. Так как $A \sim \mathcal{N}_m$, то существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon A \xrightarrow{на} \mathcal{N}_m$. Множество $\varphi[B] \subset \mathcal{N}_m$ и, очевидно, $\varphi[B] \sim B$. Поэтому, если множество $\varphi[B]$ конечно, то будет конечным и B, причем, как упоминалось, $\mu_B = \mu_{\varphi[B]}$. Это замечание позволяет ограничиться случаем, когда $A = \mathcal{N}_m$.

Если $m=1$, то единственным элементом множества A является число 1. Значит возможны лишь случаи $B = \phi$ или $B=\{1\}=A$, и утверждения теоремы очевидным образом справедливы.

Предположим, что число $m \in \mathcal{N}$ таково, что для множества $A = \mathcal{N}_m$ теорема верна. Докажем, что она верна тогда и в том случае, когда $A = \mathcal{N}_{m+1}$. Пусть $B \subset \mathcal{N}_{m+1}$. Если $B = \mathcal{N}_{m+1}$, доказывать нечего. Если $B \neq \mathcal{N}_{m+1}$, то существует элемент $r \in \mathcal{N}_{m+1} \setminus B$. Полагая в (I) $k = m+1$, устроим взаимно однозначное отображение ψ множества $\mathcal{N}_{m+1}$ на себя такое, что $\psi(r) = m+1$. Ясно, что $m+1 \bar{\in} \psi[B]$, так что в силу предложения У из I.4.4 $\psi[B] \subset \mathcal{N}_m$. Но для множества $\mathcal{N}_m$ теорема верна, следовательно, $\psi[B]$ – конечное множество, причем $\mu_{\psi[B]} \leq m < m+1 = \mu_A$. Так как $\psi[B] \sim B$, то по следствию из леммы $\mu_{\psi[B]} = \mu_B$. По индукции заключаем, что теорема справедлива, каково бы ни было натуральное число m.

Остается заметить, что в случае $m=0$ утверждение теоремы тривиально.

Пусть m, n – целые положительные числа. Отображение $f\colon k \to k+m$ $(k \in \mathcal{N}_n)$ взаимно однозначно отображает множество $\mathcal{N}_n$ на множество $\mathcal{N}_{m+n} \setminus \mathcal{N}_m$ всех натуральных чисел $\nu \in [m+1, m+n]$. Отсюда с помощью теоремы I получаем

I. Если A и B - конечные множества, то объединение $A \cup B$ также конечно, причём

$$\mu_{A \cup B} = (\mu_A + \mu_B) - \mu_{A \cup B} . \qquad (2)$$

Действительно, обозначим $\mu_A = m$, $\mu_B = n$ и предположим сначала, что $A \cap B = \phi$. Множество $A \sim \mathfrak{N}_m$, множество $B \sim \mathfrak{N}_n$ и, следовательно, в силу сделанного выше замечания $B \sim \mathfrak{N}_{m+n} \setminus \mathfrak{N}_m$. Пусть φ-взаимно однозначное отображение A на $\mathfrak{N}_m$, а ψ - множества B на $\mathfrak{N}_{m+n} \setminus \mathfrak{N}_m$. Так как, с одной стороны, $\Omega_\varphi = A$ и $\Omega_\psi = B$ и, с другой стороны, $\Delta_\varphi = \mathfrak{N}_m$ и $\Delta_\psi = \mathfrak{N}_{m+n} \setminus \mathfrak{N}_m$ не имеют общих элементов, то соответствия $\Phi = \varphi \cup \psi$ и $\Phi^{-1} = \varphi^{-1} \cup \psi^{-1}$ будут однозначными (см.I.2.9), иначе говоря, Φ является взаимно однозначным отображением. Но $\Omega_\Phi = \Omega_\varphi \cup \Omega_\psi = A \cup B$, $\Delta_\Phi = \Delta_\varphi \cup \Delta_\psi = \mathfrak{N}_{m+n}$, так что множество $A \cup B$ эквивалентно множеству $\mathfrak{N}_{m+n}$. Отсюда и вытекают в рассмотренном случае все высказанные утверждения.

В общем случае, рассмотрим сначала множества $D = A \cap B$ $C = B \setminus (A \cap B)$ По теореме I они конечны, а так как $C \cap D = \phi$ и $C \cup D = B$, то по доказанному $\mu_B = \mu_C + \mu_D$. Еще раз применяя эти же соображения, но уже к множествам A и C, получим

$$\mu_{A \cup B} = \mu_{A \cup C} = \mu_A + \mu_C = \mu_A + (\mu_B - \mu_D) = (\mu_A + \mu_B) - \mu_{A \cap B} .$$

Предложение I позволяет дополнить результат теоремы I.

II. Если в условиях теоремы 1 $\mu_B = \mu_A$, то $B = A$. Действительно, согласно (2) $\mu_A = \mu_B + \mu_{A \setminus B}$, откуда $\mu_{A \setminus B} = 0$, так что $A \setminus B = \phi$.

5.3. ТЕОРЕМА 2(5.I). Если A - конечное множество, то множество $\mathfrak{P}(A)$ всех его подмножеств также конечно, причем

$$\mu_{\mathfrak{P}(A)} = 2^{\mu_A} \text{+)} .$$

+) Пусть $a \in \mathbb{C}$. Полагая $X = \mathbb{C}$, $\varphi : z \to az$ $(z \in \mathbb{C})$ и применяя теорему I (4.I), построим единственную последовательность $\{x_n\}$ комплексных чисел, удовлетворяющую условиям:

(См.стр.93)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости $\mu_A = n$. Теорема верна, если $n=0$ ($A=\phi$, $\mathcal{P}(A)=\{\phi\}$, следовательно, $\mu_{\mathcal{P}(A)}=1=2^0$) и если $n=1$ (A состоит из единственного элемента, $\mathcal{P}(A)=\{\phi, A\}$). Предположим, что теорема справедлива, если n - данное натуральное число. Докажем, что она верна тогда и в случае, когда $\mu_A = n+1$.

Поскольку $\mu_A>0$, множество $A\neq\phi$. Зафиксируем какой-либо элемент $a\in A$ и рассмотрим множества

$$P_0=\{X\in\mathcal{P}(A):\ a\bar{\in} X\}\ ,\qquad P_1=\{X\in\mathcal{P}(A):\ a\in X\}. \quad (3)$$

Если ввести множество $A_0 = A\setminus\{a\}$, то, очевидно, $P_0=\mathcal{P}(A_0)$, а так как в силу (2) $\mu_A=\mu_{A_0}+\mu_{\{a\}}$, то $\mu_{A_0}=(n+1)-1=n$. Следовательно, в соответствии с предположением $\mu_{P_0}=2^n$.

Определим на P_1 отображение φ, сопоставляя множеству $X\in P_1$ множество $\varphi(X)=X\setminus\{a\}$. Нетрудно понять, что φ взаимно однозначно отображает P_1 на P_0, так что $P_1\sim P_0$. Значит, $\mu_{P_1}=\mu_{P_0}=2^n$. Но множества P_1 и P_0 не пересекаются,

---

+) $$x_1=a\ ,\qquad x_{n+1}=\varphi(x_n)=ax_n \qquad (n\in\mathbb{N}) \qquad (*)$$

Элемент x_n этой последовательности называется n-й с т е п е н ь ю числа a и обозначается $x_n=a^n$. Соотношение $(*)$ записывается при этом в виде $a^{n+1}=a\cdot a^n$ Ясно, что $0^n=0$, $1^n=1$ $(n\in\mathbb{N})$.

Если $a\neq 0$, то принимают по определению $a^0=1$ и для отрицательного целого числа m: $a^m={}^1/a^{-m}$. Если $m\neq -1,\ 0$, то

$$a^{m+1}=\frac{1}{a^{-m-1}}=\frac{a}{a\cdot a^{-m-1}}=\frac{a}{a^{-m}}=a\cdot a^m$$

(понятно, что это равенство остается справедливым и в случае $m=-1$ или $m=0$).

Пусть m - произвольное целое число. Предполагая по-прежнему $a\neq 0$, рассмотрим последовательность $\{z_n\}$, где $z_n=a^{m+n}$. Поскольку

$$a^{-m}z_1=a^{-m}a^{m+1}=\frac{1}{a^m}(a\cdot a^m)=a=x_1\ ,$$

$$a^{-m}z_{n+1}=a^{-m}a^{m+n+1}=a^{-m}(a\cdot a^{m+n})=a\cdot(a^{-m}z_n) \qquad (n\in\mathbb{N}),$$

то ввиду единственности последовательности$(*)$ имеем $a^n=x_n=a^{-m}a^{m+n}$; т.е.

$$a^{m+n}=a^m\cdot a^n. \qquad (\text{*}_{*})$$

По этой формуле, в частности, $a^m=a^{m-n}\cdot a^n$, так что $a^{m-n}=a^m\cdot a^{-n}$. Отсюда следует, что (*_{*}) справедливо и в случае, когда n – строго отрицательное целое число, а так как (*_{*}) выполняется при $n=0$ тривиальным образом,то, стало быть,это соотношение верно при любых целых m и n.

стало быть, согласно (2)

$$\mu_{\mathcal{P}(A)}=\mu_{P_0\cup P_1}=\mu_{P_0}+\mu_{P_1}=2^n+2^n=(1+1)\cdot 2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}.$$

Доказательство теоремы заканчивается применением принципа индукции.

Пусть, как и выше, A – конечное множество $(\mu_A=n)$. Элементы системы $\mathcal{P}(A)$ – подмножества множества A – по теореме I тоже конечные множества, причем, если $X\in\mathcal{P}(A)$, то $\mu_X\leqslant\mu_A=n$. Обозначим $\mathcal{L}^k(A)=\{X\in\mathcal{P}(A):\mu_X=k\}$. Множество $\mathcal{L}^k(A)$, будучи подмножеством конечного множества $\mathcal{P}(A)$, само является конечным. Число элементов его обозначим через C_n^k +).

Пусть, как и в доказательстве теоремы 2, a – фиксированный элемент множества A. Как и там, введем множества (3). Ясно, что

$$\mathcal{L}^k(A)=[\mathcal{L}^k(A)\cap P_0]\cup[\mathcal{L}^k(A)\cap P_1]. \qquad (4)$$

Если обозначить $A_0=A\setminus\{a\}$, то можно записать, очевидно,

$$\mathcal{L}^k(A)\cap P_0=\mathcal{L}^k(A_0). \qquad (5)$$

Далее, понимая под φ определенное выше отображение множества P_1 на P_0 $(\varphi: X\to X\setminus\{a\}\ \ (X\in P_0))$, будем иметь

$$\varphi[\mathcal{L}^k(A)\cap P_1]=\mathcal{L}^{k-1}(A_0). \qquad (6)$$

Учитывая, что $\mu_{A_0}=n$, получим с помощью (4), (5) и (6)

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1} \qquad (n,k\in\mathcal{N}). \qquad (7)$$

Если целое число k заключено между числами 0 и $n=\mu_A$, то множества $\mathcal{L}^k(A)$ и $\mathcal{L}^{n-k}(A)$ эквивалентны – множеству $X\in\mathcal{L}^k(A)$ можно сопоставить его дополнение $X'=A\setminus X$, которое, очевидно, входит в $\mathcal{L}^{n-k}(A)$. Таким образом,

$$C_n^k=C_n^{n-k}. \qquad (8)$$

Отметим, наконец, что в случае $k>n$ из теоремы 1 следует, что $\mathcal{L}^k(A)=\varnothing$, т.е. $C_n^k=0$. Понятно также, что $C_n^0=C_n^n=1$ при любом $n\in\mathcal{N}\cup\{0\}$. На основании этих соображе-

---

+) В обозначении C_n^k можно не указывать зависимость от множества A, поскольку если $A\sim B$, то будут эквивалентными и множества $\mathcal{L}^k(A)$ и $\mathcal{L}^k(B)$, так что число элементов одного совпадает с числом элементов другого.

ний получаем из (7) $C_n^1 = C_{n-1}^1 + 1$ $(n \in \mathfrak{N})$, откуда по индукции выводим $C_n^1 = n$ $(n \in \mathfrak{N})$. Аналогично можно показать, что $C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ $(n \in \mathfrak{N})$.

5.4. Докажем следующее предложение.

I. Если множества A и B конечны, то конечно и их произведение, причем $\mu_{A\times B} = \mu_A \cdot \mu_B$.

В самом деле, если $\mu_A \cdot \mu_B = 0$, т.е. если одно из данных множеств пусто, то пусто и произведение $A\times B$, так что $\mu_{A\times B} = 0$. Следовательно, в дальнейшем можно считать, что $\mu_A \cdot \mu_B > 0$, т.е. что $m = \mu_A$ и $n = \mu_B$ – натуральные числа.

Доказываемое утверждение во всяком случае верно, если $n=1$, так как тогда $A\times B$ очевидным образом эквивалентно множеству A (ведь B состоит из единственного элемента!).

Пусть n – такое натуральное число, что каково бы ни было конечное множество A $(\mu_A = m)$, если $\mu_B = n$, то произведение $A\times B$ конечно, причем $\mu_{A\times B} = m\cdot n$. Рассмотрим множество B с $\mu_B = n+1$. Взяв какой-нибудь элемент $b \in B$, обозначим $B_0 = B \setminus \{b\}$. Так как $A\times B = (A\times B_0) \cup (A\times \{b\})$ и множества $A\times B_0$ и $A\times\{b\}$ не имеют общих элементов, то согласно (2) $\mu_{A\times B} = \mu_{A\times B_0} + \mu_{A\times\{b\}}$. Поскольку $\mu_{B_0} = n$, то по предположению $\mu_{A\times B_0} = mn$. По доказанному $\mu_{A\times\{b\}} = m\cdot 1 = m$. Следовательно, $\mu_{A\times B} = mn + m = m(n+1) = \mu_A \cdot \mu_B$.

Доказательство заканчивается по индукции.

Если при подсчете числа элементов некоторого конечного множества B каждый его элемент "считается" дважды, трижды и т.д., то, чтобы определить μ_B, надо результат подсчета разделить на два, на три и т.д. Оформим это замечание в виде следующей леммы.

ЛЕММА. Пусть A – конечное множество и φ – такое отображение множества A на множество B, что при каждом $b \in B$ множество $\varphi^{-1}[b]$ содержит ровно r элементов $(\mu_{\varphi^{-1}[b]} = r)$, где r – данное натуральное число. Тогда B – конечное множество с числом элементов $\mu_B = \frac{1}{r}\mu_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме I множество B, будучи в силу предложения I из 5.I эквивалентным подмножеству множества A, конечно.

Далее,

$$A=\varphi^{-1}[B]=\bigcup_{b\in B}\varphi^{-1}[b]=\bigcup_{b\in B}A_b \qquad (A_b=\varphi^{-1}[b]). \qquad (9)$$

Множества A_b попарно не пересекаются. Так как $\mu_{A_b}=r$, то существует взаимно однозначное отображение $\varphi_b : A_b \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{N}_r$. Определим отображение $\Phi : A \to A\times\mathcal{N}_r$ следующим образом. Пусть $a\in A$. Существует единственное $b\in B$ такое, что $a\in A_b$ $(b=\varphi(a))$. Положим $\Phi(a)=(b,\varphi_b(a))$. Отображение Φ взаимно однозначно, ибо если

$$\Phi(a')=\Phi(a'')=(b,k) \qquad (b\in B,\ k\in\mathcal{N}_r),$$

то $a',a''\in A_b$ и $\varphi_b(a')=\varphi_b(a'')=k$, откуда ввиду взаимной однозначности отображения φ_b следует $a'=a''$. Так же просто проверить, что $\Delta_\Phi=B\times\mathcal{N}_r$. В самом деле, если $(b,k)\in B\times\mathcal{N}_r$, то для $a=\varphi_b^{-1}(k)$ будем иметь $\Phi(a)=(b,k)$.

Итак, $A\sim B\times\mathcal{N}_r$. Следовательно, в соответствии с предложением II из 5.3 получаем $\mu_A=\mu_{B\times\mathcal{N}_r}=\mu_B\cdot\mu_{\mathcal{N}_r}=r\cdot\mu_B$, что и требовалось доказать.

5.5. Рассмотрим теперь произведение A^m (см. I.2.8), где A - конечное множество, а $m\in\mathcal{N}$. В такой ситуации элементы множества A^m - семейства $\{\alpha_k\}$ $(k\in\mathcal{N}_m)$ элементов множества A - называются (m-буквенными) с л о в а м и , а элементы $\alpha_k\in A$, образующие данное слово, б у к в а м и его, так что α_i - i-я буква слова $\{\alpha_k\}$ $(k\in\mathcal{N}_m)$. Само множество A называется при этом а л ф а в и т о м .

I. Если A - конечное множество, а $m\in\mathcal{N}$, то множество A^m конечно, причем $\mu_{A^m}=(\mu_A)^m$.

В самом деле, нетрудно видеть, что произведение A^{m+1} эквивалентно произведению $A\times A^m$ при любом $m\in\mathcal{N}$. Поскольку $\mu_{A^1}=\mu_A$ и согласно предложению II из 5.3 $\mu_{A^{m+1}}=\mu_A\cdot\mu_{A^m}$, то по индукции заключаем отсюда, что $\mu_{A^m}=(\mu_A)^m$ $(m\in\mathcal{N})$.

Среди всех m-буквенных слов особо выделяются так называемые р а з м е щ е н и я , т.е. взаимно однозначные слова, у которых i-я и j-я буквы совпадают лишь в случае $i=j$. Множество всех m-буквенных размещений мы обозначим через $\mathcal{R}^m(A)$. Понятно, что это множество конечное, причем число его элементов определяется лишь числом элементов алфавита A (разумеется, оно зависит также и от m). Пусть $\mu_A = n > 0$. Обозначим $\mu_{\mathcal{R}^m(A)} = \Lambda_n^m$. Возьмем какое-либо $m \in \mathcal{N}$. "Вычеркивая" из размещения $\sigma \in \mathcal{R}^m(A)$ последнюю m-ю букву, получим размещение $\tau \in \mathcal{R}^{m-1}(A)$. Отображение $\varphi : \sigma \to \tau$ удовлетворяет условиям леммы из 5.4 с $r = n-(m-1)$ (если $\tau \in \mathcal{R}^{m-1}(A)$, то $\varphi^{-1}(\tau)$ состоит из всех размещений $\sigma \in \mathcal{R}^m(A)$, которые получаются из τ "приписыванием" любой из букв алфавита, не участвующей в слове τ; число таких букв и есть $n-(m-1)$). Поэтому

$$\Lambda_n^{m-1} = \frac{1}{n-(m-1)} \Lambda_n^m . \tag{I0}$$

Взяв какой-нибудь элемент $a \in A$, образуем новый алфавит $A_0 = A \setminus \{a\}$. Если по-прежнему $m \in \mathcal{N}$, то множество $\mathcal{R}^m(A)$ распадается в объединение непересекающихся множеств:

$$\mathcal{R}^m(A) = \mathcal{R}^m(A_0) \cup \bar{\mathcal{R}}^m(A), \tag{II}$$

где через $\bar{\mathcal{R}}^m(A)$ обозначено множество всех m-буквенных размещений, в которых участвует буква a. Вычеркивая ее из какого-либо слова $\sigma \in \bar{\mathcal{R}}^m(A)$, мы получим размещение $\tau \in \mathcal{R}^{m-1}(A_0)$ и, следовательно, отображение $f : \bar{\mathcal{R}}^m(A) \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{R}^{m-1}(A_0)$, которое опять удовлетворяет условиям леммы из 5.4, на этот раз с $r = m$ (a могло быть любой буквой размещения σ – от первой до m-й). Учитывая это обстоятельство, можем написать на основании (II) $\Lambda_n^m = \Lambda_{n-1}^m + m\Lambda_{n-1}^{m-1}$ или, привлекая (I0),

$$\Lambda_n^m = [(n-1)-(m-1)]\Lambda_{n-1}^{m-1} + m\Lambda_{n-1}^{m-1} = n\Lambda_{n-1}^{m-1} . \tag{I2}$$

В частности, при $m=n$ получаем

$$\Lambda_n^n = n\Lambda_{n-1}^{n-1} \qquad (n \in \mathcal{N}) . \tag{I3}$$

Λ_n^n – число n-буквенных размещений в алфавите из n элементов, обозначается обычно символом $n!$ (читается: "n-факториал"). Ясно, что 0! = I, I!=I, 2!=I·2 =2, 3! = 3·2! = 6 и т.д. Если $n \in \mathcal{N}$, то на основании (I3) $n!$ можно трактовать как "произведение" всех натуральных чисел из $\mathcal{N}_n$.

Для каждого $k = 0, 1, \ldots$ существует единственная числовая последовательность $\{x_m\}$ такая, что

$$x_1=\Lambda_k^0=1\ , \qquad x_{m+1}=(k+m)x_m \qquad (m\in\mathcal{N}). \qquad (14)$$

Вследствие (12) $\Lambda_{k+m}^m = x_{m+1}$ $(m=0,1,\dots)$. С другой стороны, $x_m=\frac{(k+m-1)!}{k!}$ $(m\in\mathcal{N})$ удовлетворяет всем условиям (14). Поэтому

$$\Lambda_{k+m}^m = x_{m+1} = \frac{(k+m)!}{k!} \qquad (m=0,1,\dots)$$

или, заменяя $k+m$ на n,

$$\Lambda_n^m = \frac{n!}{(k-m)!} \qquad (n\geqslant m;\ m,n=0,1,\dots). \qquad (15)$$

Укажем в заключение связь между числами C_n^m (см. 5.3) и Λ_n^m

Пусть A – конечное множество с $\mu_A=n$. . Устроим отображение φ множества $\mathcal{R}^m(A)$ $(m=0,1,\dots)$ на $\mathcal{L}^m(A)$, сопоставляя размещению $\sigma\in\mathcal{R}^m(A)$ множество всех элементов из A, "участвующих" в слове σ (таким образом, $\varphi(\sigma)=\sigma[\mathcal{N}_m]$). Поскольку для любого $X\in\mathcal{L}^m(A)$ прообраз $\varphi^{-1}[X]$ совпадает с $\mathcal{R}^m(X)$, то φ удовлетворяет условиям леммы из 5.4 с $r=\Lambda_m^m=m!$. Поэтому

$$C_n^m=\mu_{\mathcal{L}^m(A)}=\frac{1}{m!}\mu_{\mathcal{R}^m(A)}=\frac{1}{m!}\Lambda_n^m\ ,$$

так что с учетом (15)

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad (m\leqslant n;\ m,n=0,1,\dots). \qquad (16)$$

5.6. Если множество A таково, что существует множество $B\subset A$, отличное от A , но ему эквивалентное, то A – бесконечное множество. Действительно, в противном случае согласно предложению II из 5.3 соотношение $B\sim A$, т.е. $\mu_B=\mu_A$, влекло бы $B=A$

Отсюда следует, что $\mathcal{N}$, а значит, и всякое другое счетное множество, бесконечно, так как отображение $\varphi: n\to 2n$ $(n\in\mathcal{N})$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{N}$ на не совпадающее с $\mathcal{N}$ множество всех четных чисел.

Следующая теорема показывает, что счетные множества по "количеству" элементов – наименьшие бесконечные множества.

ТЕОРЕМА 3(5.I). Если A – счетное множество, а $B \subset A$, то B не более чем счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, можно считать, что $A = \mathcal{N}$, поскольку всегда существует взаимно однозначное отображение $\varphi : A \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{N}$, так что множество $B \sim \varphi[B]$, и можно доказывать теорему для множества $\varphi[B] \subset \varphi[A] = \mathcal{N}$.

Предположим, что B бесконечно. Если $k \in \mathcal{N}$, то множество $B \setminus \mathcal{N}_k \neq \phi$ (иначе, $B \subset \mathcal{N}_k$ и по теореме I B конечно). Обозначим через m_k наименьший элемент множества $B \setminus \mathcal{N}_k$ (существование этого элемента обеспечивается предложением УI из I.4.5), и пусть $\psi : k \to m_k$ $(k \in \mathcal{N})$. Применяя теорему о построении по индукции (теорема I(4.I)), найдем последовательность $f : \{x_n\}$ натуральных чисел такую, что

$$x_1 = x \; ; \qquad x_{n+1} = \psi(x_n) \qquad (n \in \mathcal{N}), \tag{I7}$$

где через x обозначен наименьший элемент множества B. Ясно, что $x_n \in B$ $(n \in \mathcal{N})$. Для $n=1$ это вытекает из определения x_1. Если же $n > 1$, то в силу (I7) $x_n = \psi(x_{n-1}) \in B \setminus \mathcal{N}_{x_{n-1}} \subset B$.

Таким образом, последовательность f является отображением множества $\mathcal{N}$ в B. Докажем, что f взаимно однозначно и $\Delta_f = B$. Из определения ψ вытекает, что $\psi(k) \bar{\in} \mathcal{N}_k$, т.е. $\psi(k) > k$, так что $x_{n+1} > x_n$. По индукции отсюда получается без труда, что f – строго возрастающее отображение и, следовательно, взаимно однозначно.

Предположим, что $\Delta_f \neq B$. Возьмем элемент $\bar{x} \in B \setminus \Delta_f$. Очевидно, $\bar{x} > x_1$. Если $n \in \mathcal{N}$ таково, что $\bar{x} > x_n$, то $\bar{x} \in B \setminus \mathcal{N}_{x_n}$. Следовательно, $\bar{x} \geqslant \psi(x_n) = x_{n+1}$. Однако, так как $\bar{x} \bar{\in} \Delta_f$, не может быть $\bar{x} = x_{n+1}$. Значит, $\bar{x} > x_{n+1}$. По индукции заключаем, что $\bar{x} > x_n$ для любого $n \in \mathcal{N}$. Также по индукции выводим, что $x_n \geqslant n$ $(n \in \mathcal{N})$. Таким образом, $\bar{x} \geqslant n$ для любого $n \in \mathcal{N}$, что противоречит аксиоме Архимеда.

СЛЕДСТВИЕ. Если A – счетное множество и φ отображение множества A на множество B, то B не более чем счетно.

Действительно, в силу предложения I из 5.I $B \sim A_0 \subset A$.

5.7. Пусть A и B – счетные множества. Тогда и произведение $A\times B$ – счетное множество.

В самом деле, обозначим через φ и соответственно через ψ взаимно однозначное отображение A на $\mathfrak{N}$ и соответственно B на $\mathfrak{N}$. Тензорное произведение $\varphi\otimes\psi$ (см. I.2.9) взаимно однозначно отображает $A\times B$ на $\mathfrak{N}^2$, поэтому достаточно доказать, что будет счетным множество $\mathfrak{N}^2$, т.е. достаточно рассмотреть случай, когда $A=B=\mathfrak{N}$.

Пусть $(p,q)\in\mathfrak{N}^2$. Положим $n=2^{p-1}(2q-1)$ и определим на $\mathfrak{N}^2$ отображение $\phi:(p,q)\to n$. ϕ взаимно однозначно. Если $2^{p'-1}(2q'-1)=2^{p''-1}(2q''-1)$ и $p'\neq p''$, то, считая для определенности $p'<p''$, будет иметь $2^{p''-p'-1}(2q''-1)=q'-\frac{1}{2}$.

В левой части этого равенства целое число, а так как $q'-1<q'-\frac{1}{2}<q'$, то в силу предложения У из I.4.5 $q'-\frac{1}{2}$ – не целое. Следовательно, $p'=p''$. А тогда без труда получаем, что и $q'=q''$.

Множество Δ_ϕ по теореме 3 не более, чем счетно, так что и $\mathfrak{N}^2=\Omega_\phi\sim\Delta_\phi$ не более, чем счетно. Поскольку $\mathfrak{N}^2$, очевидно, бесконечно, оно, следовательно, счетно+).

ТЕОРЕМА 4(5.I). Пусть дано семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ множеств с не более, чем счетным множеством индексов Ξ. Тогда если при каждом $\xi\in\Xi$ множество A_ξ не более, чем счетно, то объединение $A=\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi$ не более, чем счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество Ξ эквивалентно множеству $\mathfrak{N}$ или одному из множеств вида $\mathfrak{N}_m$ $(m=0,1,\dots)$. Заметив, что $A=\bigcup_{k\in\mathfrak{N}}A_{\xi_k}$ или $A=\bigcup_{k\in\mathfrak{N}_m}A_{\xi_k}$, где $f:k\to\xi_k$ – взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{N}$ или $\mathfrak{N}_m$ на Ξ, можем считать, что $\Xi=\mathfrak{N}$ или же $\Xi=\mathfrak{N}_m$. Более того, и последний случай сводится к первому, если для $\xi>m$ $(\xi\in\mathfrak{N})$ принять $A_\xi=\phi$.

Итак, будем считать, что $\Xi=\mathfrak{N}$. Возьмем какое-либо $\xi\in\mathfrak{N}$. Так как множество A_ξ не более, чем счетно, т.е. эквивалентно $\mathfrak{N}$

+) Можно было бы доказать соотношение $\mathfrak{N}^2\sim\mathfrak{N}$ и не прибегая к теореме 3, установив, что $\Delta_\phi=\mathfrak{N}$.

или его подмножеству вида $\mathcal{N}_m$ $(m=0,1,\dots)$, то существует взаимно однозначное отображение φ_ξ множества A_ξ в $\mathcal{N}$. Обозначим через Q множество всех таких пар $(p,q)\in\mathcal{N}^2$, что $q\in\Delta_{\varphi_p}$.

Множество Q, будучи подмножеством счетного в силу предложения I множества $\mathcal{N}^2$, по теореме 3 не более, чем счетно. Если $(p,q)\in$ $\in Q$, то, полагая $\varphi(p,q)=\varphi_p^{-1}(q)$, мы построим отображение φ множества Q в A. На самом деле, однако, $\Delta_\varphi=A$, так как если $a\in A$, то существует такое $\xi\in\mathcal{N}$, что $a\in A_\xi$ и $a=\varphi(p,q)$, где $p=\xi$, а $q=\varphi_\xi(a)$. Согласно следствию из теоремы 3 множество A не более, чем счетно, что и требовалось доказать.

Основываясь на предложении Ш из I.4.I, с помощью доказанной теоремы выводим, что множество $\mathcal{Z}$ всех целых чисел счетно.

Далее, так как всякое рациональное число определяется парой чисел (p,q), где $p\in\mathcal{Z}$, а $q\in\mathcal{N}$, а произведение $\mathcal{Z}\times\mathcal{N}$ согласно I счетно, то и множество всех рациональных чисел - область значений отображения $\varphi:(p,q)\to\frac{p}{q}$ $((p,q)\in\mathcal{Z}\times\mathcal{N})$ - счетно.

5.8. Подобно конечным множествам можно сравнивать по "числу" их элементов и бесконечные множества.

I. Каковы бы ни были множества A и B, в одном из них имеется часть, эквивалентная другой.

Действительно, обозначим через F множество всех взаимно однозначных отображений из A в B. В F введем естественное отношение порядка - по включению, и докажем, что образовавшееся при этом упорядоченное множество удовлетворяет условиям леммы Цорна (теорема 2(3.I)).

Пусть $F_0\subset F$ - непустое линейно упорядоченное множество. Положим $\Phi=\bigcup_{\varphi\in F_0}\varphi$. Имеем (см. I.2.9) $\Phi[x]=\bigcup_{\varphi\in F_0}\varphi[x]$ $(x\in A)$. Пусть $y_1,y_2\in\Phi[x]$. Найдутся $\varphi_1,\varphi_2\in F_0$ так, что $y_i\in\varphi_i[x]$ $(i=1,2)$. Так как F_0 - линейно упорядоченное множество, то либо $\varphi_1\subset\varphi_2$, либо $\varphi_2\subset\varphi_1$. Если, например, $\varphi_2\subset\varphi_1$, то $\varphi_2[x]\subset\varphi_1[x]$ и, следовательно, $y_2\in\varphi_1[x]$. Но φ_1 - отображение, стало быть, образ $\varphi_1[x]$ состоит из единственного элемента. Поэтому $y_1=y_2$, а это значит, что Φ однозначно. Поскольку $\Phi^{-1}=\bigcup_{\varphi\in F_0}\varphi^{-1}$, то точно так же можно показать, что и Φ^{-1} – однозначное соответствие. Таким образом, $\Phi\in F$. Очевидно, $\Phi\supset\varphi$

для любого $\varphi \in F_0$.

Согласно лемме Цорна в F существует максимальный элемент $\bar{\varphi}$, следующий, например, за $\varphi_0 = \phi$. Ясно, что либо $\Omega_{\bar{\varphi}} = A$, либо $\Delta_{\bar{\varphi}} = B$, так как в противном случае можно было бы построить взаимно однозначное отображение $\varphi \supset \bar{\varphi}$ и отличное от $\bar{\varphi}$.

Заметив, что множества $\Omega_{\bar{\varphi}}$ и $\Delta_{\bar{\varphi}}$ эквивалентны, получаем отсюда доказываемый результат.

Среди конечных множеств, как очевидно, нет "универсального"- имеющего наибольшее по сравнению с каждым другим число элементов. Такая же ситуация имеет место и для бесконечных множеств.

П. Каково бы ни было множество A, множество $\mathcal{P}(A)$ не эквивалентно никакой его части.

В самом деле, допустим, что имеется множество $A_0 \subset A$, эквивалентное множеству $\mathcal{P}(A)$. Обозначим через φ взаимно однозначное отображение A_0 на $\mathcal{P}(A)$. Положим $X = \{a \in A_0 : a \bar{\in} \varphi(a)\}$. Ясно, что $X \in \mathcal{P}(A)$. Рассмотрим элемент $x = \varphi^{-1}(X)$. Понятно, что $x \in A_0$, причем $\varphi(x) = X$. Не может быть $x \in X$: по определению X это означало бы $x \bar{\in} \varphi(x) = X$. Но и гипотеза $x \bar{\in} X = \varphi(x)$ приводит, очевидно, к противоречию.

Можно доказать, хотя необходимый для этого аппарат будет развит лишь в следующей главе, что $\mathcal{R} \sim \mathcal{P}(\mathcal{N})$. Отсюда, разумеется, вытекает, что $\mathcal{R}$ - несчетное множество. Мы дадим, однако, независимое от П доказательство этого факта.

ТЕОРЕМА 5(5.I). Множество $\mathcal{R}$ всех вещественных чисел несчетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что существует взаимно однозначное отображение f множества $\mathcal{N}$ на $\mathcal{R}$. Обозначим $f(n) = x_n$ $(n \in \mathcal{N})$.

Рассмотрим какой-либо замкнутый промежуток $\Delta = [a, b]$ $(a, b \in \mathcal{R}, a < b)$. Положим $c = a + \frac{b-a}{3}$, $d = c + \frac{b-a}{3} = a + \frac{2}{3}(b-a)$ и пусть n - данное натуральное число. Обозначив $\Delta^1 = [a, c]$, $\Delta^2 = [c, d]$, $\Delta^3 = [d, b]$, будем иметь $\Delta^1 \cap \Delta^2 \cap \Delta^3 = \phi$, так что, по крайней мере для одного $i = 1, 2, 3$, будет $x_n \bar{\in} \Delta^i$. Через Δ' обозначим тот из промежутков Δ^i, который удовлетворяет этому соотношению и имеет наименьшее i. Если под X понимать множество всех промежутков Δ указанного вида, то, сопоставляя промежутку $\Delta \in X$ промежуток Δ', определим на X отображение φ_n. Ясно, что

$$\varphi_n(\Delta)\in X, \qquad \varphi_n(\Delta)\subset\Delta \quad \text{и} \quad x_n \bar{\in} \varphi_n(\Delta).$$

По теореме о построении по индукции существует последовательность $\{\Delta_n\}$ замкнутых промежутков - элементов множества X - такая, что

$$\Delta_1=[0,1] \qquad \Delta_{n+1}=\varphi_n(\Delta_n) \qquad (n\in\mathcal{N}).$$

Из сказанного выше вытекает, что последовательность $\{\Delta_n\}$ удовлетворяет всем условиям аксиомы полноты (см. I.4.6), так что существует $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\Delta_n$. Так как $x\in\mathcal{R}=\Delta_f$, то существует натуральное число m такое, что $x=f(m)=x_m$. Из определения φ_m между тем следует, что $x=x_m \bar{\in} \Delta_{m+1}=\varphi_m(\Delta_m)$, что противоречит выбору элемента x.

Глава II. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Одним из первых приложений математического анализа – приложений, из которых, собственно говоря, и выросла эта область математики, – было изучение протекающих во времени процессов, т.е. таких систем объектов, состояние которых изменяется с течением времени. При этом предполагается, что состояние данной системы однозначно определено, как только зафиксирован тот или иной момент времени из заранее заданного временного интервала. Таким образом, говоря о процессе, мы имеем дело с отображением упомянутого выше интервала в множество Y всех возможных состояний системы.

При изучении процессов часто возникает вопрос о поведении системы при неограниченном возрастании времени. Не стремится ли она к некоторому "предельному" состоянию? Под этим, в случае положительного ответа, подразумевается, что, начиная с некоторого момента времени, состояние системы в том или ином смысле "мало" отличается от предельного. Чтобы до конца понять это высказывание, надо, очевидно, уточнить содержание слов "мало отличается", т.е. дать точное описание понятия "близости" в множестве Y всех возможных состояний.

На основе указанных представлений в настоящей главе дается определение предела и изучаются его свойства для того случая, когда состояния системы могут быть охарактеризованы одним числовым параметром, т.е. когда за Y может быть принято множество чисел.

§ I. Топологическая структура на числовой прямой и на комплексной плоскости

I.I. Чтобы говорить о пределе соответствия в одно из множеств $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{R}}$, $\mathbb{C}$, определим, какие из точек этих множеств считаются близкими к элементу y. Поскольку понятие близости для элементов из $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ совершенно аналогичны, будем обозначать через Y одно из этих множеств.

Для каждой пары точек x, y из Y можно указать длину отрезка, соединяющего эти точки, и естественно считать точку z находящейся к x ближе чем y, если длина отрезка с концами x и z меньше длины отрезка с концами x и y. Число $|x-y|$ называют расстоянием между точками x,y из Y.

Число $|x-y|$ называют расстоянием между точками x,y из Y.

Выделим в Y подмножества $B(y,r)=\{z\in Y : |z-y|<r,\ r\in\mathbb{R},\ r>0\}$, и о точках из $B(y,r)$ будем говорить, что они близки к y на расстояние меньше чем r. Хотя, как будет показано ниже, множеств такого вида уже достаточно для определения предела соответствия со значениями в Y, удобно расширить систему подмножеств из Y, об элементах которых можно судить, насколько они близки к $y\in Y$.

Подмножество $\mathcal{U}$ элементов из Y назовём о к р е с т н о с т ь ю $y\in Y$, если найдётся такое вещественное $r>0$, что $B(y,r)\subset\mathcal{U}$. Систему всех окрестностей точки y будем обозначать $\mathcal{H}_y$.

Для точек из $\bar{\mathbb{R}}$, не совпадающих с $+\infty$ и $-\infty$, определение окрестности такое же, как и для точек из Y. Окрестностью же точки $+\infty$ ($-\infty$) будем считать всякое $\mathcal{U}\subset\bar{\mathbb{R}}$, для которого существует $r\in\bar{\mathbb{R}}$ такое, что $\{y\in\bar{\mathbb{R}} : y>r\}\subset\mathcal{U}$.

Сформулируем несколько полезных свойств окрестностей точки y из Y.

I. Если $\mathcal{U}_0\in\mathcal{H}_y$ и $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, то $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_y$.

Действительно, так как $\mathcal{U}_0\in\mathcal{H}_y$, найдется такое вещественное $r>0$, что $B(y,r)\subset\mathcal{U}_0$. Поскольку $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$, то и подавно $B(y,r)\subset\mathcal{U}$, а это и означает, что $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_y$.

П. Элемент y принадлежит любой из своих окрестностей.

Возьмём произвольную окрестность $\mathcal{U}$ точки y и найдем вещественное $r>0$ такое, что $B(y,r)\subset\mathcal{U}$. Так как $|y-y|=0$, то

$|y-y|<r$ и $y\in B(y,r)$, тем самым $y\in U$.

III. Если $U_1, U_2 \in \mathscr{H}_y$, то $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{H}_y$.

Пусть r_1 и r_2 – те числа, для которых $B(y,r_1)\subset U_1$, $B(x,r_2)\subset U_2$. Тогда $B(x,r)$, где $r=\min(r_1,r_2)$, будет входить в U_1 и U_2 одновременно, то есть $B(y,r)\subset U_1\cap U_2$.

Свойства I – III показывают, что система окрестностей является фильтром относительно естественного порядка.

Непосредственно из определения окрестности видно, что множества $B(y,r)$ входят в $\mathscr{H}_y$. Если x – отличная от y точка из $B(y,r)$, можно указать такое $r_0>0$, что $B(x,r_0)\subset$ $\subset B(y,r)$ (в качестве r_0 можно взять любое вещественное число, удовлетворяющее неравенству $0<r_0<r-|y-x|$).
Тем самым $B(y,r)$ является окрестностью точки x и мы фактически доказали свойство

IV. Если $U\in\mathscr{H}_y$, то найдётся $U_0\in\mathscr{H}_y$, содержащаяся в U и являющаяся окрестностью любой своей точки.

Следующее свойство, называемое хаусдорфовостью, выглядит так.

V. Пусть y_1, y_2 – различные точки из Y. Тогда найдутся $U_1\in\mathscr{H}_{y_1}$, $U_2\in\mathscr{H}_{y_2}$ такие, что $U_1\cap U_2=\phi$.

Если $r\in\mathbb{R}$ такое, что $0<r<\frac{|y_1-y_2|}{2}$, то можно взять $U_1=B(y_1,r)$, $U_2=B(y_2,r)$. Эти множества являются окрестностями точек y_1, y_2 и не пересекаются.

Свойства I – V справедливы и для окрестностей точек $+\infty$, $-\infty$ из $\overline{\mathbb{R}}$. Доказательства их мало отличаются от доказательств свойств I – V, поэтому предоставим читателю возможность проделать их самостоятельно.

Множество V будем называть проколотой окрестностью точки $y\in Y$, если $V\cup\{y\}\in\mathscr{H}_y$. Заметим, что любая окрестность точки y является и проколотой окрестностью. Систему проколотых окрестностей точки y будем обозначать $\overset{\circ}{\mathscr{H}}_y$. Нетрудно проверить, что для проколотых окрестностей выполняются свойства, аналогичные I – V.

I.2. При определении и исследовании предела соответствия в множество Y используются лишь свойства I – V окрестностей точки y из Y. По этой причине можно было определить систему окрестностей $\mathscr{H}_y$ как совокупность подмножеств из Y, удовлетворяющую условиям I – V. Так и поступают, когда имеют дело с множеством произвольной природы. Если в некотором множестве X каждой точке x из X указана система подмножеств, удовлетворяющая условиям I – У, то соответствие $\mathcal{T}: x \to \mathcal{H}_x$ из X в систему всех подмножеств из X называют (хаусдорфовой) топологией в X, а упорядоченную пару $(X,\mathcal{T})$ (где $\mathcal{T}$ – некоторая топология в X), называют (хаусдорфовым) топологическим пространством.

На протяжении этой главы мы ограничимся лишь рассмотрением множеств $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ с определенной выше топологией, поскольку они являются пока единственными примерами топологических пространств. Читатель может заметить, что большинство фактов, изложенных в этой главе, имеют общую формулировку и справедливы для любого хаусдорфова топологического пространства.

§ 2. Основные определения и общие теоремы

Приведя в предыдущем параграфе точное описание понятия "близости", мы получили возможность придать точный смысл словам "стремится к некоторому предельному состоянию", то есть дать определение предела соответствия в множество $\mathbb{R}$, или $\bar{\mathbb{R}}$, или $\mathbb{C}$.

На протяжении этого параграфа буквой Y будем обозначать одно из множеств $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$, ибо многие определения и теоремы, здесь сформулированные, справедливы для всех трех множеств.

2.I. Пусть F – соответствие из X в Y и $\mathfrak{A}$ – фильтрующаяся по убыванию (относительно порядка по включению) система непустых подмножеств из Ω_F. Число y из Y назовём пределом соответствия F по системе $\mathfrak{A}$ подмножеств из Ω_F, если для любого $U \in \mathcal{H}_y$ найдётся такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F[A] \subset U$. Этот факт будем обозначать так: $y = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$.

В этом параграфе, как правило, через F будем обозначать соответствие из X в Y и $\mathfrak{A}$ – фильтрующуюся по убыванию системы подмножеств из Ω_F.

Заметим, что система $\{F[A]\}$ $(A \in \mathfrak{A})$ подмножеств из Y фильтруется по убыванию. В самом деле, если рассмотреть два множества $F[A_1]$, $F[A_2]$ $(A_1, A_2 \in \mathfrak{A})$, то, поскольку $\mathfrak{A}$ фильтруется, можно найти такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F[A] \subset F[A_1]$ и $F[A] \subset F[A_2]$. Обозначим $F\{\mathfrak{A}\} = \{B : \exists\, A \in \mathfrak{A},\ F[A] \subset B\}$.

Система $F\{\mathfrak{A}\}$ – фильтр. Проверка выполнения условий фильтра труда не представляет, поэтому её опустим. Используя фильтр $F\{\mathfrak{A}\}$, определение предела F по системе $\mathfrak{A}$ можно сформулировать так: $y \in Y$ является пределом соответствия F по системе $\mathfrak{A}$, если фильтр $F\{\mathfrak{A}\}$ тоньше фильтра окрестностей точки y. Действительно, если $y = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ в смысле первого определения, то, взяв произвольно $U \in \mathcal{H}_y$, найдем $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F[A] \subset U$, а это и означает, что U входит в $F\{\mathfrak{A}\}$, то есть $F\{\mathfrak{A}\}$ мажорирует $\mathcal{H}_y$. Обратно, по определению порядка в системе фильтров в Y, всякий элемент U из $\mathcal{H}_y$ входит и в $F\{\mathfrak{A}\}$, тем самым найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $F[A] \subset U$ и $y = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ в смысле первого определения.

Хотя в определении предела участвует система $\mathcal{H}_y$ всех окрестностей точки y, при выяснении, является ли y пределом F по $\mathfrak{A}$, достаточно ограничиться так называемой **фундаментальной системой окрестностей** y, то есть такой подсистемой $\mathcal{B}_y$ окрестностей точки y, что для любого $U \in \mathcal{H}_y$ найдётся $V \in \mathcal{B}_y$, содержащаяся в U. Если внимательно взглянуть на определение окрестности, можно заметить, что система подмножеств из Y вида $B(y,r)$ $(r>0)$ – фундаментальная система окрестностей точки y из Y. Учитывая, что для любого вещественного $r>0$ найдется $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{n} < r$, можно сказать, что система подмножеств из Y вида $B(y, \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$ – также фундаментальная система окрестностей точки y.

Сделаем ещё одно полезное замечание, доказательство которого следует непосредственно из определения. Предположим, что система $\mathfrak{A}$ такова, что можно указать одноэлементное множество $\{a\}$, являющееся наименьшим элементом системы $\mathfrak{A}$. Тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, равный $F[a]$.

2.2. В первой главе были выделены однозначные соответствия (функции) как наиболее часто встречающийся частный случай соответствия. В дальнейшем мы будем иметь дело, как правило, с функциями, область определения которых – числовое множество (или подмножество топологического пространства). Особую роль будут играть предельные свойства таких функций по фильтру окрестностей (иногда по фильтру проколотых окрестностей) некоторой точки, связанной с областью определения. Нередко оудут встречаться и функции с фильтрующейся по возрастанию областью определения (обычно мы будем их называть семействами). Поэтому посмотрим, как будут выглядеть соответствующие частные случаи определения предела соответствия.

I. Пусть F – соответствие из X в Y, где X – одно из множеств $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$ (оно может не совпадать с Y). Можно было ограничиться рассмотрением однозначного соответствия, однако специфика однозначности никак пока не используется, а потому такого требования на F накладывать не будем.

Чтобы говорить о пределе F по фильтру проколотых окрестностей точки x_0 из X, мы должны быть уверены в непустоте множеств $\Omega_F \cap U$ $(U \in \dot{\mathcal{H}}_{x_0})$. Точку x_0 из X назовём *точкой сгущения* X_0, подмножества X, если любая проколотая окрестность этой точки имеет с X_0 непустое пересечение. Заметим, что точка сгущения скорее связана с расположением точек из X_0, чем с ними самими. Можно привести примеры таких множеств, точки сгущения которых в них входят, и таких, у которых единственная точка сгущения, и та им не принадлежит. Есть множества, не имеющие точек сгущения.

Пусть x_0 – точка сгущения Ω_F. Система $\mathcal{M} = \{V : V = U \cap \Omega_F, U \in \dot{\mathcal{H}}_{x_0}\}$ подмножеств X является фильтром, поэтому можно говорить о пределе F по $\mathcal{M}$. Если такой существует, то он называется пределом соответствия F в точке x_0 и обозначается $\lim\limits_{\dot{\mathcal{H}}_{x_0}} F$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} F[x]$.

Аналогично обстоит дело и с пределом по фильтру окрестностей $\mathcal{H}_x$. Точку x_0 из X назовём *точкой прикосновения* множества X_0, если любая $U \in \mathcal{H}_{x_0}$ имеет с X_0 непустое пересечение. Ясно, что все точки из X_0 являются его точками прикосновения. Среди элементов из X, но не содержащихся в X_0, точками прикосновения X_0 будут точки сгущения X_0 и только они (это нетрудно увидеть, если сравнить определения точек сгущения и прикосновения X_0).

Пусть x_0 – точка прикосновения Ω_F. В случае существования предела F по системе $\mathcal{U} = \{U : U = V \cap \Omega_F, \ V \in \mathcal{H}_{x_0}\}$ соответствие F называется *непрерывным* в точке x_0. Причина такого названия кроется в следующем: если $x_0 \in \Omega_F$ и $y = \lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} F$, то $y = F[x_0]$ (предел F по системе $\mathcal{U}$ обозначим $\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} F$ или $\lim\limits_{x \to x_0} F[x]$). В самом деле, в случае несправедливости последнего равенства, найдём [+]) окрестность V из $\mathcal{H}_y$, не пересекающуюся с $F[x_0]$. Поскольку $y = \lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} F$, есть $U \in \mathcal{U}$ такое, что $F[U] \subset V$. Так как $x_0 \in U$, приходим к выводу, что $F[x_0] \subset F[U] \subset V$, и получаем желаемое противоречие. Отметим, что непрерывное в x_0 соответствие однозначно в этой точке. В тех случаях, когда точка x_0 прикосновения $\mathcal{Q}_F$ в него не входит, всякое F, имеющее предел по $\mathcal{U}$ (совпадающий с пределом F по $\mathcal{H}$), непрерывно в x_0.

Учитывая, что система $\{B(y,r)\}$ $(r>0)$ подмножеств из Y есть фундаментальная система окрестностей точки y, дадим ещё один вид определения предела соответствия из X в Y. Пусть W – произвольная окрестность y и вещественное $\varepsilon>0$ таково, что $B(y,\varepsilon) \subset W$. Так как $B(y,\varepsilon) \in \mathcal{H}_y$, найдётся $U \in \dot{\mathcal{H}}_{x_0}$, для которой $F[U \cap \mathcal{Q}_F] \subset B(y,\varepsilon)$. Можно считать, что U имеет вид $\{x \in X : 0 < |x - x_0| < \delta\}$ (ибо всегда можно найти проколотую окрестность такого вида, содержащуюся в U). Если мы сможем гарантировать, что для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что $F[x] \subset B(y,\varepsilon)$ для точек $x \in \mathcal{Q}_F$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, то предыдущее рассуждение показывает, что тогда y является пределом F по $\dot{\mathcal{H}}_{x_0}$. То же самое можно сказать и о пределе по $\mathcal{H}_{x_0}$, только в этом случае в качестве U надо взять множество $B(x_0, \delta)$.

3. Рассмотрим семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, где Ξ – фильтрующееся по возрастанию множество. Тогда система подмножеств Ξ вида $A_\xi = \{\eta \in \Xi : \eta > \xi\}$ фильтруется по убыванию. Если существует предел f по системе $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, то он называется п р е д е л о м с е м е й с т в а f по фильтрующемуся (по возрастанию) множеству Ξ, и обозначается $\lim\limits_{\xi \in \Xi} f_\xi$, а сам факт сходимости f к $y \in Y$ записывается так: $f_\xi \xrightarrow[\xi \in \Xi]{} y$.

Учитывая, что в A_ξ входят все $\eta \in \Xi$, следующие за ξ, можно привести такую формулировку сходимости f к y: число y является пределом семейства $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, если для любой $U \in \mathcal{H}_y$ найдётся $\xi \in \Xi$ такое, что для всех $\eta > \xi$ справед-

---

+) Существование такой окрестности гарантирует свойство У из (П.I.0).

ливо $f_\eta \in \mathcal{U}$. Вспомнив, что система $\mathcal{B}=\{B(y,\varepsilon)\}$ $(\varepsilon>0)$ - фундаментальная система окрестностей точки y, можно сказать: $y=\lim\limits_{\xi\in\Xi} f_\xi$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\xi\in\Xi$, что для всех $\eta>\xi$ выполнено $|y-f_\eta|<\varepsilon$. Последняя форма формулировки факта $f_\xi \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} y$ наиболее распространена, и читатель, возможно, с ней уже встречался (по крайней мере в случае $\Xi=\mathcal{N}$).

В частности, если $\Xi=\mathcal{N}$, то $\{f_n\}$ $(n\in\mathcal{N})$ есть последовательность, и $\lim\limits_{n\in\mathcal{N}} f_n$ называют пределом последовательности f_n. Все формы определения сходимости семейств без труда формулируются и для последовательностей. Факт сходимости f_n к y будем обозначать $f_n \xrightarrow[n\in\mathcal{N}]{} y$, или $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$, или $y=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

2.3. Для выяснения, имеет ли однозначное соответствие $f\subset X\times Y$ (где X пока одно из $R, \bar{R}, C$) число y из Y своим пределом в x_0 - точке сгущения Ω_f, полезно, наряду с определением предела f в x_0, иметь некоторый критерий существования предела и равенства $y=\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} f$. Сформулированные ниже две теоремы позволяют свести дело к рассмотрению предельных свойств совокупности последовательностей.

ТЕОРЕМА I(2.2). Пусть x_0 - точка сгущения Ω_f и $\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$-семейство элементов из $\Omega_f\setminus\{x_0\}$ с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов, сходящееся к x_0.+) Тогда, если существует $\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} f=\ell$, то $f(x_\alpha)\xrightarrow[\alpha\in A]{}\ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V\in\mathcal{H}_\ell$. Найдем $\mathcal{U}_0\in\mathcal{H}_{x_0}$, для которой $f[\mathcal{U}_0\cap\Omega_f]\subset V$ и обозначим $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0\cup\{x_0\}$. Поскольку $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_{x_0}$ и $x_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{} x_0$, существует такое $\alpha_0\in A$, что для $\alpha>\alpha_0$ справедливо $x_\alpha\in\mathcal{U}$. Так как $x_\alpha\in\Omega_f\setminus\{x_0\}$, то $x_\alpha\in\mathcal{U}_0\cap\Omega_f$, и $f[x_\alpha]\in V$ для всех $\alpha>\alpha_0$, а это и означает, что $f(x_\alpha)\xrightarrow[\alpha\in A]{}\ell$.

ТЕОРЕМА I′(2.2). Пусть x_0 - точка сгущения Ω_f. Предположим, что существует $\ell\in Y$ такой, что для любой последовательности $\{x_n\}$ $(n\in\mathcal{N})$ элементов из $\Omega_f\setminus\{x_0\}$, сходящейся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к ℓ. Тогда $\ell=\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} f$.

+) Существование такого семейства гарантируется тем, что x_0 - точка сгущения Ω_f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V \in \mathcal{H}_\ell$. Обозначим $\mathcal{U}_n = \{x \in \Omega_f : 0 < |x - x_0| < \frac{1}{n}\}$. Предположим, что среди $\mathcal{U}_n$ нет ни одного такого, что $f[\mathcal{U}_n] \subset V$, то есть для каждого $n \in \mathfrak{N}$ найдется y_n, входящий в $f[\mathcal{U}_n]$ и не принадлежащий V. Пусть $x_n \in \mathcal{U}_n$ таков, что $y_n = f(x_n)$. Поскольку $\{\mathcal{U}_n\}$ – фундаментальная система проколотых окрестностей точки x_0, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0. Отсюда, по условию, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. А это означает, что в окрестности V точки ℓ должны содержаться все $f(x_n)$, где n больше некоторого n_1, что противоречит выбору последовательности $\{y_n\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование однозначности f наложено по той причине, что в противном случае $\{f(x_\alpha)\}$ $(\alpha \in A)$ не является семейством. Эти теоремы, с незначительными изменениями в формулировках, могут быть доказаны и без требования однозначности.

2.4. Вернёмся к общему случаю и рассмотрим F – соответствие из X в Y, где Y – то же, что и раньше, а X произвольно.

ТЕОРЕМА 2(2.4). Если $x_1 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, $x_2 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, то $x_1 = x_2$. Иначе говоря, предел F по $\mathfrak{A}$ единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U} \in \mathcal{H}_{x_1}$, $V \in \mathcal{H}_{x_2}$ такие, что $\mathcal{U} \cap V = \phi$ (они существуют по свойству У топологии в Y). Тогда найдутся $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, для которых $F[A_1] \subset \mathcal{U}$, $F[A_2] \subset V$. Поскольку $\mathfrak{A}$ фильтруется по убыванию, в $\mathfrak{A}$ есть множество A, содержащееся в A_1 и A_2 одновременно. Так как $A \subset A_1 \subset A_2$, то $F[A] \subset F[A_1 \cap A_2] \subset F[A_1] \cap F[A_2] = \phi$, что противоречит включению $A \subset \Omega_F$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Можно показать, что единственность предела F по $\mathfrak{A}$ равносильна выполнению свойства У топологии в Y.

2. Если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ – две различные фильтрующиеся по убыванию системы подмножеств из Ω_F, то пределы F по $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ совпадать вовсе не обязаны.

3. Эту теорему, как и все следующие теоремы этого параграфа, можно переформулировать для всех описанных частных случаев.

2.5. Предположим, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$. Если теперь $\mathfrak{B}$ – ещё одна система подмножеств из Ω_F, то как она должна быть связана с $\mathfrak{A}$, чтобы существовал предел F по $\mathfrak{B}$, равный $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$? Оказывается, что $\mathfrak{B}$ должна быть конфинальной влево относительно $\mathfrak{A}$. В этом случае $\mathfrak{B}$ фильтруется по убыванию и, кроме того, фильтр $\tilde{\mathfrak{B}} = \{B \subset X : \exists B_0 \in \mathfrak{B},\ B_0 \subset B\}$, порождённый системой $\mathfrak{B}$, содержит $\mathfrak{A}$ и, тем самым, тоньше фильтра $\tilde{\mathfrak{A}}$. Это можно было положить в основу определения конфинальности и говорить, что $\mathfrak{B}$ конфинальна влево относительно фильтрующейся по убыванию системы $\mathfrak{A}$, если $\tilde{\mathfrak{B}}$ тоньше $\tilde{\mathfrak{A}}$.

I. Пусть $\mathfrak{B}$ – система подмножеств $\mathcal{D}_F$, конфинальная влево относительно $\mathfrak{A}$, и существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = \ell$. Тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{B}} F$, также равный ℓ.

Действительно, пусть $\mathcal{U}$ – произвольная окрестность ℓ и $A \in \mathfrak{A}$ таково, что $F[A] \subset \mathcal{U}$. В силу конфинальности $\mathfrak{B}$ относительно $\mathfrak{A}$ найдётся $B \in \mathfrak{B}$ такое, что $B \subset A$, а тогда $F[B] \subset F[A] \subset \mathcal{U}$, откуда $\lim\limits_{\mathfrak{B}} F = \ell$.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Предположим, что $\mathcal{D}_F$ лежит в одном из $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}, \mathbb{C}$. Пусть x_0 – точка сгущения $\mathcal{D}_F$. Поскольку система проколотых окрестностей конфинальна влево относительно системы окрестностей точки x_0, доказанное предложение позволяет утверждать, что из существования предела F по $\mathcal{H}_{x_0}$ следует существование $\lim\limits_{\dot{\mathcal{H}}_{x_0}} F$, равного $\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} F$. Обратное, вообще говоря, неверно.

2. Пусть $F: X \to Y$ (X – одно из $\mathbb{R}, \bar{\mathbb{R}}$) и x_0 – точка сгущения $\mathcal{D}_F$. Рассмотрим множества $X_0^- = \mathcal{D}_F \cap [-\infty, x_0)$ и $X_0^+ = \mathcal{D}_F \cap (x_0, +\infty]$. Можно показать, что x_0 –точка сгущения по крайней мере для одного из X_0^-, X_0^+. Будем предполагать, что x_0 – точка сгущения X_0^- и X_0^+ одновременно. Обозначим тогда F^- и F^+ сужения F на X_0^- X_0^+. Можно говорить о пределах F^+ и F^- по $\dot{\mathcal{H}}_{x_0}$. Если они существуют, то называются **п р е д е л а м и   с п р а в а   и   с л е в а** соответствия F в точке x_0 и обозначаются $\lim\limits_{x_0+0} F$ и $\lim\limits_{x_0-0} F$, или $F[x_0+0]$ и $F[x_0-0]$. Эти пределы могут существовать даже тогда, когда нет предела самого соответствия в точке x_0, но если он есть, то есть и $F[x_0+0], F[x_0-0]$, равные $\lim\limits_{\dot{\mathcal{H}}_{x_0}} F$. Докажем, что верно и обратное: если $\ell = F[x_0+0] = F[x_0-0]$, то существует $\lim\limits_{\dot{\mathcal{H}}_{x_0}} F$, и он равен общему значению пределов слева и справа. В самом деле, возьмём произвольную $V \in \mathcal{H}_\ell$ и найдём положительное δ такое, что образы при соответствиях F^-, F^+ множеств $\mathcal{U}^- = \{x \in \mathcal{D}_F : 0 < |x - x_0| < \delta\} \cap [-\infty, x_0)$ и $\mathcal{U}^+ = (x_0, +\infty] \cap \{x \in \mathcal{D}_F : 0 < |x - x_0| < \delta\}$

содержатся в V. Так как $F[u^+ \cup u^-] = F^+[u^+] \cup F^-[u^-]$ и $u^+ \cup u^- = u \in \mathcal{H}_{x_0}$, то $F[u] \subset V$, откуда в силу произвольности V имеем $l = \lim\limits_{\mathcal{X}_{x_0}} F$.

2.6. Следующая теорема даёт возможность исследовать предельные свойства F, используя такие отображения, о которых заранее известно, что они имеют 0 пределом по $\mathfrak{A}$. В этом случае достаточно лишь показать, что u "мажорирует" F, а это иногда оказывается нетрудно сделать.

Если $F: X \to Y$, то через $|F|$ обозначим такое соответствие, что $|F|[x] = \{|z| : z \in F[x],\ x \in \Omega_F\}$.

ТЕОРЕМА 3(2.2) (принцип мажорирования). Пусть $F: X \to Y$. Предположим, что существует такое отображение $u: X \to Y$, что

I) $|F|[x] \leq u(x) \qquad (x \in \Omega_F)$

2) $\lim\limits_{\mathfrak{A}} u = 0$

Тогда $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B(0, \varepsilon)$ – произвольное множество из фундаментальной системы окрестностей нуля. По предположению, найдётся $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $u[A] \subset B(0, \varepsilon)$. Так как $|F|[x] \leq u(x)$, то для $x \in A$ справедливо $|F|[x] \leq \varepsilon$, то есть $F[A] \subset B(0, \varepsilon)$, и тем самым $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = 0$.

2.7. Поставим такой вопрос: если F – вещественное соответствие и $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F > 0$, то можно ли сказать, что F положительно на некоторых A из $\mathfrak{A}$? Ответ на него даёт следующая

ТЕОРЕМА 4(2.2) (о сохранении знака). Пусть F – соответствие из X в $\bar{\mathbb{R}}$. Предположим существование $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = l$. Тогда для любого вещественного числа p меньшего l можно указать такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F[A] > p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = (p, +\infty]$. Это окрестность точки l. По определению предела F по $\mathfrak{A}$ существует такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F[A] \subset V$, а это и означает, что $F[A] > p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогично можно доказать, что если $q > l$, то найдется $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F[A] < q$.

Соответствие $F: X \to Y$ назовём **ограниченным**, если $|F|[\Omega_F]$ – ограниченное множество в $\mathbb{R}$, то есть существует такое $M \in \mathbb{R}$, что $|F|[x] \leq M$ для всех $x \in \Omega_F$.

I. В предположениях предыдущей теоремы и при условии конечности ℓ можно найти такое $A\in\mathfrak{A}$, что F ограничено на A (это означает, что сужение F на A ограничено).

Покажем вначале, что если $\ell=\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, то $|\ell|=\lim\limits_{\mathfrak{A}}|F|$. Пусть $V=\{|z|:\big||\ell|-|z|\big|<\varepsilon\}$ - элемент фундаментальной системы окрестностей $|\ell|$. Множество $V_1=\{y\in Y:|y-\ell|<\varepsilon\}$ - окрестность ℓ, поэтому найдётся такое $A\in\mathfrak{A}$, что $F[A]\subset V_1$. В силу неравенства $\big||z|-|\ell|\big|\le|z-\ell|$, имеем $\big||F|[x]-|\ell|\big|<\varepsilon$ для x из A, тем самым $|\ell|=\lim\limits_{\mathfrak{A}}|F|$.

Пусть k - положительное вещественное число. Так как $|\ell|<$ $<|\ell|+k$ по теореме о сохранении знака найдётся такое $A\in\mathfrak{A}$, что $|F|[A]<|\ell|+k$, и если обозначить $M=|\ell|+k$, то последнее неравенство есть не что иное, как ограниченность F на A.

2.8. Пусть E_1, E_2 - подмножества из Y. Будем обозначать

$E_1+E_2=\{z:z=y_1+y_2,\ y_1\in E_1,\ y_2\in E_2\}$, $E_1\cdot E_2=\{z:z=y_1\cdot y_2,\ y_1\in E_1,\ y_2\in E_2\}$.

В частности, если E_2 состоит из единственного элемента ℓ, то E_1+E_2 обозначают просто $E_1+\ell$, аналогично поступают с $E_1\cdot E_2$ (см.I.4.I).

I. Пусть $F:X\to Y$, ℓ - элемент из Y. Образуем соответствие $G:x\to F[x]-\ell$ из Ω_F в Y. Тогда $\lim\limits_{\mathfrak{A}}F=\ell$ в том и только в том случае, когда $\lim\limits_{\mathfrak{A}}G=0$.

Если $V\in\mathcal{K}_0$, то $V+\ell$ - окрестность точки ℓ, значит найдётся $A\in\mathfrak{A}$ такое, что $F[A]\subset V+\ell$. Нетрудно понять, что в этом случае $F[A]-\ell\subset V$ и тем самым $\lim\limits_{\mathfrak{A}}G=0$.

Доказательство обратного факта аналогичное.

ТЕОРЕМА 5(2.2). Пусть F, F_1, F_2 - три соответствия из X в Y с общей областью определения X_0, такие, что $F[x]\subset F_1[x]\pm F_2[x]$, и сумма в правой части имеет смысл. Предположим существование пределов $\ell_1=\lim\limits_{\mathfrak{A}}F_1$, $\ell_2=\lim\limits_{\mathfrak{A}}F_2$. Тогда существует предел $\ell=\lim\limits_{\mathfrak{A}}F$ и $\ell=\ell_1\pm\ell_2$ (если правая часть равенства имеет смысл).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если $\ell_2=\lim\limits_{\mathfrak{A}}F_2$, то $-\ell_2=\lim\limits_{\mathfrak{A}}(-F_2)$, где $-F_2$ - такое соответствие, что $-F_2[x]=$ $=\{y:-y\in F_2[x]\}$, поэтому достаточно доказать теорему только для суммы соответствий.

Вначале обоснуем следующий факт: если V – произвольная окрестность точки $\ell=\ell_1+\ell_2$, то найдутся $V_1\in\mathcal{H}_{\ell_1}$, $V_2\in\mathcal{H}_{\ell_2}$ такие, что $V\supset V_1+V_2$. Рассмотрим три возможных случая: I) ℓ_1,ℓ_2 конечны; 2) одно из ℓ_1,ℓ_2 бесконечно; 3) ℓ_1,ℓ_2 равны бесконечности одного знака. Итак, пусть ℓ_1,ℓ_2 конечны и V – произвольная окрестность $\ell=\ell_1+\ell_2$.
По определению окрестности, существует такое $\delta>0$, что $V_0=\{z\in Y:|z-\ell|<\delta\}\subset V$. Обозначим $V_1=\{z\in Y:|z-\ell_1|<\frac{\delta}{2}\}$, $V_2=\{z\in Y:|z-\ell_2|<\frac{\delta}{2}\}$ и докажем, что $V_1+V_2=V_0$. Действительно, возьмём точку y из V_0 и положим $y_1=\frac{y+\ell_1-\ell_2}{2}$, $y_2=\frac{y+\ell_2-\ell_1}{2}$.
Во-первых, $y=y_1+y_2$ и, во-вторых, $y_1\in V_1$, $y_2\in V_2$. Последнее проверяется следующим образом: $|y_1-\ell_1|=\left|\frac{y+\ell_1-\ell_2}{2}-\ell_1\right|=\left|\frac{z-\ell_1-\ell_2}{2}\right|=$
$=\frac{1}{2}|y-(\ell_1+\ell_2)|=\frac{1}{2}|y-\ell|<\frac{\delta}{2}$.
Аналогично можно проверить для y_2. Таким образом, справедливо включение $V_0\subset V_1+V_2$. Обратно, если $y_1\in V_1$; $y_2\in V_2$, то
$|y_1+y_2-\ell|=|y_1+y_2-\ell_1-\ell_2|\le|y_1-\ell_1|+|y_2-\ell_2|<\delta$,
то есть $V_1+V_2\subset V_0$. Окрестности V_1,V_2 точек ℓ_1,ℓ_2 как раз таковы, что $V\supset V_1+V_2$.

Предположим, что $Y=\bar{\mathbb{R}}$ и $\ell_1=+\infty$, ℓ_2 конечно. В этом случае $\ell=+\infty$. Пусть V – окрестность точки ℓ, и обозначим V_0 окрестность ℓ вида $\{y\in Y: y>n,\ n\in\mathbb{R}\}$, содержащуюся в V. В качестве V_1 и V_2 возьмём множества $\{z\in\bar{\mathbb{R}}: z>n+r-\ell_2\}$ и $B(\ell_2,r)=\{z\in\mathbb{R}:-r+\ell_2<z<r+\ell_2\}$ $(r\in\mathbb{R})$.
Тогда если $y_1\in V_1$, $y_2\in V_2$, то $y_1+y_2>n+r-\ell_2-r+\ell_2=n$ и $y_1+y_2\in V_0$.

Третий случай – ℓ_1,ℓ_2 равны бесконечности одного знака, рассматривается аналогично второму.

Если $V\in\mathcal{H}_\ell$ произвольно, найдём V_1,V_2 такие, что $V_1+V_2\subset V$. По условию, существуют $A_1,A_2\subset\mathfrak{A}$, для которых $F_1[A_1]\subset V_1$, $F_2[A_2]\subset V_2$, а тогда для $A\in\mathfrak{A}$, содержащегося в $A_1\cap A_2$, справедливо $F_1[A]+F_2[A]\subset F_1[A_1]+$ $+F_2[A_2]\subset V$, откуда F имеет предел по $\mathfrak{A}$, равный ℓ.

Обратим внимание читателя на то, что при использовании этой теоремы (а это нам придётся делать довольно часто) необходимо тщательно соблюдать выполнение всех условий теоремы. Как правило, такая проверка не является сложной, и по этой причине мы будем её иногда опускать, однако пренебрежение каким-либо условием может привести к совершенно абсурдным выводам.

2.9. В этом пункте мы докажем теорему, позволяющую находить предел произведения конечного числа соответствий, если известен предел каждого из сомножителей.

ТЕОРЕМА 6(2.2). Пусть F, F_1, F_2 – три соответствия в Y, определенные на множестве X_0 в X такие, что $F[x] \subset \subset F_1[x] \cdot F_2[x]$ $(x \in X_0)$.
Предположим существование конечных пределов $\ell_1 = \lim_{\mathfrak{A}} F_1$ и $\ell_2 = \lim_{\mathfrak{A}} F_2$ по фильтрующейся влево системе $\mathfrak{A}$ подмножеств из X_0. Тогда существует $\ell = \lim_{\mathfrak{A}} F$ и $\ell = \ell_1 \cdot \ell_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО разобьём на три части. Предположим вначале, что F_2 – постоянное соответствие, то есть для всех $x \in X_0$ $F_2[x] = \{\ell_2\}$, и $\ell_2 \neq 0$. Пусть $V \in \mathcal{H}_\ell$. Найдём такое $\delta > 0$, что $V_0 = \{y \in Y : |y - \ell| < \delta\} \subset V$. По условию теоремы, для окрестности $V_1 = \{z \in \in Y : |z - \ell_1| < \frac{\delta}{|\ell_2|}\}$ точки ℓ_1 найдётся $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F_1[A] \subset V_1$. Покажем, что $F[A] \subset V$. Действительно, $F[A] \subset \subset \ell_2 \cdot F_1[A] \subset \ell_2 \cdot V_1 = V_0 \subset V$, что и требовалось.

Пусть теперь $\ell_1 = 0$, а F_2 – ограниченное соответствие. Убедимся, что в этом случае $\lim_{\mathfrak{A}} F = 0$. По определению ограниченного соответствия, существует такое положительное M из R, что для любых $x \in X_0$ и $z \in F_2[x]$ справедливо неравенство $|z| \leq M$. Возьмём произвольную окрестность V нуля в Y и найдём $\delta > 0$ такое, что $V_0 = \{z \in Y : |z| < \delta\} \subset V$. Тогда, по предположению, для окрестности $V_1 = \{y \in Y : |y| < \delta/M\}$ нуля в Y найдётся такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F_1[A] \subset V_1$. Поэтому для $x \in A$ справедливо $|F|[x] = |F_1|[x] \cdot \cdot |F_2|[x] < \frac{\delta}{M} \cdot M = \delta$, следовательно, $F[A] \subset V_0 \subset V$ и это показывает, что $\lim F = 0$.

Рассмотрим общий случай. Поскольку F_2 имеет конечный предел, найдётся такое $A \in \mathfrak{A}$, что сужение F_2 на A ограничено. Отметив справедливость равенства $F_1[x] \cdot F_2[x] = (F_1[x] - \ell_1) \cdot \cdot F_2[x] + \ell_1 \cdot F_2[x]$, через G_1 обозначим соответствие, принимающее одно значение ℓ_1, а через G_2 – такое, что $G_2[x] = \{F_1[x] - \ell_1\}$.
По предложению I из пункта 8, существует $\lim_{\mathfrak{A}} G_2$, и он равен нулю.

Тогда из первой части доказательства замечаем, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} G_1 \cdot F_2 = l_1 \cdot l_2$, из второй – существование $\lim\limits_{\mathfrak{A}} G_1 \cdot F_2 = 0 \cdot l_2 = 0$ и, воспользовавшись предыдущей теоремой, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = \lim\limits_{\mathfrak{A}} G_2 \cdot F_2 + \lim\limits_{\mathfrak{A}} G_1 \cdot F_2 = l_1 \cdot l_2$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Теорема остаётся справедливой, если один из пределов l_1 или l_2 бесконечен, а другой не равен нулю (он также может равняться бесконечности).

2. К этой теореме можно сделать такое же замечание о существенности условий, что и к предыдущей.

3. Две последние теоремы справедливы для любого конечного числа соответствий. Это нетрудно показать последовательным применением теоремы о пределе суммы (произведения) двух соответствий.

ТЕОРЕМА 7(2.2). Пусть F, F_1, F_2 – три соответствия в Y, определенные на множестве X_0 в X такие, что $F[x] \subset \dfrac{F_1[x]}{F_2[x]}$ $(x \in X_0)$ и F_2 не принимает нулевых значений. Предположим существование конечных пределов $l_1 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_1$, $l_2 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_2$ по фильтрующейся влево системе $\mathfrak{A}$ подмножеств из X_0, причём $l_2 \neq 0$. Тогда существует $l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ и $l = \dfrac{l_1}{l_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря теореме 6(2.2) достаточно доказать теорему, когда $F_1 : x \longmapsto 1$ $(x \in X_0)$. Выберем $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $|l_2 - F_2[A]| < \dfrac{|l_2|}{2}$. Отсюда $\dfrac{|l_2|}{2} < |F_2[A]|$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдём содержащееся в A множество A_0 такое, что $|l_2 - F_2[A_0]| < \dfrac{|l_2|^2 \cdot \varepsilon}{2}$. Таким образом, для $A_0 \in \mathfrak{A}$ получаем

$$\left|\frac{1}{l_2} - \frac{1}{F_2[A_0]}\right| = \frac{|F_2[A_0] - l_2|}{|l_2 \cdot F_2[A_0]|} < \frac{2}{|l_2|^2} \cdot |F_2[A_0] - l_2| < \varepsilon ,$$

то есть

$$\left|\frac{1}{l_2} - F[A_0]\right| \subset \left|\frac{1}{l_2} - \frac{1}{F_2[A_0]}\right| \subset B(0,\varepsilon)$$

и

$$\lim_{\mathfrak{A}} F = \frac{1}{l_2} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ. См. замечания 2,3 к предыдущей теореме.

§ 3. Вещественные соответствия

Этот параграф посвящён, как это следует из названия, предельным свойствам соответствий со значениями в $\mathbb{R}$. Множество вещественных чисел имеет по сравнению с $\mathbb{C}$ то преимущество, что порядок в нём заметно удобнее в обращении. Поэтому сама собой напрашивается мысль: а что если, говоря о комплексном соответствии, свести дело к вещественным? Во многих вопросах (по крайней мере тех, которые не связаны с полной упорядоченностью области значений F) это оказывается возможным, и такому сведению посвящена самая первая теорема этого параграфа.

3.1. Пусть F – соответствие со значениями в $\mathbb{C}$. Свяжем с ним два вещественных соответствия F_1, F_2, $\Omega_{F_1} = \Omega_{F_2} = \Omega_F$, $F_1 : x \mapsto \mathrm{Re}\, F[x]$, $F_2 : x \mapsto \mathrm{Im}\, F[x]$.

ТЕОРЕМА 1(3.2). Для справедливости равенства $l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ необходимо и достаточно, чтобы $l_1 = \mathrm{Re}\, l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_1$, $l_2 = \mathrm{Im}\, l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что поскольку l – точка комплексной плоскости, l_1 и l_2 принадлежат $\mathbb{R}$.

Пусть $l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$. Докажем, что в этом случае $l_1 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_1$, $l_2 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F_2$. Для этого возьмем произвольные $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ и рассмотрим $B(l_1, \varepsilon_1)$, $B(l_2, \varepsilon_2)$. Множество $B = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x \in B(l_1, \varepsilon_1),\ y \in B(l_2, \varepsilon_2)\}$ – окрестность l, поэтому найдётся такое $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F[A] \subset B$, откуда $\mathrm{Re}\, F[A] \subset \mathrm{Re}\, B = B(l_1, \varepsilon_1)$, $\mathrm{Im}\, F[A] \subset \mathrm{Im}\, B = B(l_2, \varepsilon_2)$, и требуемое $A \in \mathfrak{A}$ найдено.

Обратно, рассмотрим шары $B(l_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$, $B(l_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})$. Очевидно, что $U = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x \in B(l_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}),\ y \in B(l_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})\}$ – окрестность точки l, содержащаяся в $B(l, \varepsilon)$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$ таково, что

$$F_1[A] \subset B(l_1, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}), \qquad F_2[A] \subset B(l_2, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}).$$

Тогда если $z = x + iy$ – точка из $F[A]$, то $|z - l| = \sqrt{(x - l_1)^2 + (y - l_2)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$, и тем самым $F[A] \subset B(l, \varepsilon)$.

3.2. Убедившись в возможности заменять комплексное соответствие двумя вещественными, перейдём к рассмотрению вещественных соответствий.

Назовём соответствие $F: X \to \bar{R}$ **положительным**, если множество $F[x] \cap \bar{R}^+$ непусто при любом $x \in \mathcal{D}_F$.

I. Если F – положительное соответствие, имеющее ℓ пределом по $\mathfrak{A}$, то $\ell \geq 0$.

Пусть, вопреки утверждению, $\ell < 0$. Взяв любое вещественное число p, удовлетворяющее неравенству $\ell < p < 0$ и применив теорему о сохранении знака, получим, что есть такое $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F[A] < 0$, а это противоречит положительности F.

В обратную сторону это предложение, вообще говоря, неверно – нельзя сказать, что если $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F > 0$, то F положительно (во всей области определения). Однако совсем нетрудно доказать существование такого $A_1 \in \mathfrak{A}$, что $F[A_1] > 0$ (тем самым $F[A] > 0$ для всех $A \in \mathfrak{A}$, содержащихся в A_1).

Следствие. Пусть F_1, F_2 – соответствия из X в $\bar{R}$ с общей областью определения X_0. Если разность $F_1[x] - F_2[x] = \{y - z : y \in F_1[x], z \in F_2[x], x \in X_0\}$ положительна и существуют $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F_1 = \ell_1$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F_2 = \ell_2$, то $\ell_1 - \ell_2 \geq 0$.

Для доказательства достаточно применить предложение I и воспользоваться теоремой о пределе разности.

Это следствие называют, как правило, теоремой о предельном переходе в неравенстве. Причина такого названия становится совсем ясной при рассмотрении однозначных соответствий: если можно сказать, что $F_1(x) \leq F_2(x)$ для $x \in X_0$, тогда для пределов справедливо такое же неравенство.

3.3. ТЕОРЕМА 2 (3.2). (Принцип сжатой переменной). Пусть $F: X \to R$. Для существования конечного предела F по $\mathfrak{A}$, равного ℓ, необходимо и достаточно, чтобы существовали два отображения u, v с областью определения $\mathcal{D}_F$ такие, что

1) $u(x) \leq F[x] \leq v(x)$ для всех $x \in \mathcal{D}_F$;
2) $\lim\limits_{\mathfrak{A}} u = \lim\limits_{\mathfrak{A}} v = \ell$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F = \ell$. Рассмотрим два отображения $v: x \mapsto \sup F[x]$, $u: x \mapsto \inf F[x]$ и докажем, что u, v удовлетворяют требованиям теоремы. Возьмём произвольно $U \in \mathcal{K}_\ell$. Можно указать такое $\varepsilon > 0$, что множество $B = \{y \in R : |y - \ell| \leq \varepsilon\}$ содержится в U. Найдём $A \in \mathfrak{A}$, для которого $F[A] \subset B$. Так как $\sup F[A]$ и $\inf F[A]$ принадлежат B ,то $v[A]\subset B$, $u[A]\subset B$, тем самым $v[A]\subset U$, $u[A]\subset U$, и необходимость доказана.

Для доказательства достаточности представим F в следующей форме: $F[x]=(F[x]-u(x))+u(x)$ (это означает, что любой $y\in F[x]$ представим в виде $y=(y-u(x))+u(x)$), и рассмотрим соответствие $F-u: x\mapsto F[x]-u(x)$. Из условий имеем $0\le F[x]-u(x)\le v(x)-u(x)$.(*) Пусть $B(0,\varepsilon)$ – произвольный элемент фундаментальной системы $\mathcal{B}$ окрестностей нуля. Тогда $B(0,\varepsilon/2)+l$ – окрестность l, и найдётся такое $A\in\alpha$, что $u[A]\subset B(0,\varepsilon/2)+l$, $v[A]\subset B(0,\varepsilon/2)+l$.

Из неравенства (*) получим $F[A]-u[A]\subset B(0,\varepsilon)$, значит существует $\lim\limits_{\alpha}(F-u)$, равный 0 . Воспользовавшись теоремой о пределе суммы, запишем $\lim\limits_{\alpha} F=\lim\limits_{\alpha}[(F-u)+u]=\lim\limits_{\alpha}(F-u)+\lim\limits_{\alpha} u=0+l=l$, и теорема полностью доказана.

Эта теорема является довольно мощным инструментом для работы с пределами. Как правило, имеется в запасе совокупность отображений, о которых заранее известно, каков их предел по α . А тогда доказательство того, что $l=\lim\limits_{\alpha} F$, сводится к доказательству соответствующих неравенств.

§ 4. Верхний и нижний пределы

Конструкция так называемых верхнего и нижнего пределов вещественного соответствия, излагаемая в этом параграфе, даёт возможность сформулировать критерий сходимости F к l , позволяет легко доказать один из самых важных и широко применяемых критериев сходимости – так называемый критерий Коши. Правда, он не даёт гарантии того, что $\lim\limits_{\alpha} F$ равен в точности l , однако позволяет судить о существовании предела. Заключительную часть параграфа мы посвятим исследованию семейств. Хотя, как правило, понятие верхнего и нижнего пределов даются только для последовательностей, изложение общего случая не влечёт значительных трудностей, однако даёт более обширное поле для приложений.

4.I. Прежде чем определить верхний и нижний пределы вещественного соответствия, сформулируем теорему, которая важна сама по себе и пригодится нам в недалёком будущем.

Семейство $\{x_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ назовём убывающим, если из $\alpha_1\le\alpha_2$ следует $x_{\alpha_1}\geqslant x_{\alpha_2}$, и возрастающим, если для $\alpha_1 \leq \alpha_2$ выполнено $x_{\alpha_1} \leq x_{\alpha_2}$. Семейство $\{x_\alpha\}$ будем называть монотонным, если оно либо возрастает, либо убывает. Семейство $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ называется строго убывающим (строго возрастающим), если для $\alpha_1 < \alpha_2$ выполнено $x_{\alpha_1} > x_{\alpha_2}$ $(x_{\alpha_1} < x_{\alpha_2})$, и наконец, строго монотонным, если оно либо строго убывает, либо строго возрастает.

ТЕОРЕМА I(4.2). Пусть $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ – монотонное семейство с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов A. Тогда существует $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$, равный $\sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$, если семейство возрастает, и $\inf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$, если убывает.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ – возрастающее семейство и предположим, что $\ell = \sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ конечно. Возьмём произвольно $V \in \mathcal{H}_\ell$ и найдём $\ell_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ $(\ell_0 \neq \ell)$ такое, что $[\ell_0, \ell] \subset V$. Так как ℓ – точная верхняя граница $\{x_\alpha\}$, есть $\alpha_0 \in A$, для которого $x_{\alpha_0} > \ell_0$. Теперь, если $\alpha \geqslant \alpha_0$, то, по предложению, $x_\alpha \geqslant x_{\alpha_0} > \ell_0$ откуда $x_\alpha \in [\ell_0, \ell]$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$, тем самым $x_\alpha \in V$ $(\alpha \geqslant \alpha_0)$ и $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = \sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$.

Если $\ell = +\infty$, доказательство в точности такое же, но ℓ_0 надо взять из $\mathbb{R}$. В случае $\ell = -\infty$ всё семейство тождественно равно $-\infty$ и доказывать нечего.

Для убывающего семейства доказательство проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЯ. I.Существование предела монотонного семейства можно гарантировать и в том случае, когда A фильтруется по убыванию, но он окажется равным $\inf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ для возрастающего и $\sup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ для убывающего семейства.

2.Предположим, что все элементы $\{x_\alpha\}$ конечны и A фильтруется по возрастанию. Если $\{x_\alpha\}$ возрастает и ограничено сверху (убывает и ограничено снизу), то $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ конечен. В случае фильтрования A по убыванию предел конечен для возрастающих ограниченных снизу и убывающих ограниченных сверху семейств.

3. Пусть $f: \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ и x_0 – точка сгущения для $\Omega_f \cap [-\infty, x_0)$ и $\Omega_f \cap (x_0, +\infty]$ одновременно. Если f возрастает в Ω_f, то существуют $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, равные $\sup\{f(x) : x \in \Omega_f \cap [-\infty, x_0)\}$ и $\inf\{f(x) : x \in \Omega_f \cap (x_0, +\infty]\}$ соответственно. Аналогичное можно сказать, если f убывает.

4.2. Пусть F – вещественное соответствие и $\mathfrak{A}$ – фильтрующаяся по убыванию система подмножеств из Ω_F. С F свяжем два семейства $u_A = \inf_{x\in A} F[x]$ и $v_A = \sup_{x\in A} F[x]$ $(A\in\mathfrak{A})$. Отметим, во-первых, что для любого $A\in\mathfrak{A}$ справедливо $u_A \le F[A] \le v_A$. Во-вторых, если A, B – элементы из $\mathfrak{A}$ и $A\subset B$, то $u_A \geq u_B$, $v_A \le v_B$. Тем самым u_A – убывающее, v_A – возрастающее семейства. В силу предыдущей теоремы, существуют $\lim_{A\in\mathfrak{A}} u_A$, $\lim_{A\in\mathfrak{A}} v_A$, которые называются **нижним** и **верхним** **пределами** соответствия F и обозначаются $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} F$, $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} F$ (или $\lim_{A\in\mathfrak{A}} \inf_A F$, $\lim_{A\in\mathfrak{A}} \sup_A F$).

Если существует $\lim_{\mathfrak{A}} F$, то он оказывается связанным с верхним и нижним пределами следующим образом: $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} F \le \lim_{\mathfrak{A}} F \le \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} F$.

Используя верхний и нижний пределы, можно сформулировать критерий сходимости F к числу λ.

ТЕОРЕМА 2(4.2). Для существования $\lim_{\mathfrak{A}} F$, равного λ, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} F = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} F = \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $l = \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} F$, $L = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} F$ и предположим, что $l = L = \lambda$ конечно. Возьмём $B(\lambda,\varepsilon)\in\mathcal{B}_\lambda$ и найдём $A\in\mathfrak{A}$ такое, что $u_A\in B(\lambda,\varepsilon)$, $v_A\in B(\lambda,\varepsilon)$. Вспомнив определение u_A, v_A, приходим к выводу, что $F[A]\subset B(\lambda,\varepsilon)$, откуда, в силу произвольности ε, заключаем: $\lim_{\mathfrak{A}} F = \lambda$.

Если $l = L = \lambda = \pm\infty$, то в доказательстве вместо $B(\lambda,\varepsilon)$ надо взять множество $B(+\infty,\varepsilon) = \{y\in\bar{R} : y>\varepsilon\}$ или $B(-\infty,\varepsilon) = \{y\in\bar{R} : y<\varepsilon\}$.

Докажем необходимость. Пусть $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_\lambda$ – произвольно. Обозначим через ε такое число, для которого $\bar{B} = \{y\in R : |y-\lambda|\le\varepsilon\}$ (если λ конечно, или $\bar{B} = \{y\in R : y>\varepsilon\}$ для $\lambda = +\infty$, или $\bar{B} = \{y\in R : y<\varepsilon\}$, если $\lambda = -\infty$) содержится в $\mathcal{U}$. Так как $\lambda = \lim_{\mathfrak{A}} F$, найдётся $A\in\mathfrak{A}$ такое, что $F[A]\subset\bar{B}$, тем самым $u_A\in\bar{B}$, $v_A\in\bar{B}$. Если $A_1\in\mathfrak{A}$ содержится в A, то $\lambda-\varepsilon\le u_{A_1}\le v_{A_1}\le\lambda+\varepsilon$ (в случае конечного λ), откуда $u_{A_1}\in\bar{B}$, $v_{A_1}\in\bar{B}$ и равенство $\lim_{A\in\mathfrak{A}} u_A = \lim_{A\in\mathfrak{A}} v_A = \lambda$ доказано. При $\lambda = +\infty$ имеем $\varepsilon\le u_{A_1}\le v_{A_1}\le+\infty$; при $\lambda=-\infty$ имеем $-\infty\le u_{A_1}\le v_{A_1}\le\varepsilon$, и всё равно $u_{A_1}\in\bar{B}$, $v_{A_1}\in\bar{B}$, а это позволяет сделать тот же вывод, что и для конечного λ.

4.3. Исследуя предельные свойства соответствия F, не всегда легко узнать, к какому λ оно сходится. И не всегда есть необходимость знать значение $\lim\limits_{\mathfrak{a}} F$. Во многих вопросах достаточно иметь гарантию того, что такое λ существует, не указывая его конкретно. А существование предела возможно утверждать, не имея его значения. Такую возможность даёт излагаемый ниже критерий Коши существования предела F по $\mathfrak{a}$.

Вначале некоторые определения. Рассмотрим произведение $\Omega_F \times \times \Omega_F$ и выделим в нем систему $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathfrak{a},\ A_2 \in \mathfrak{a}\}$ подмножеств, причём $A_1 \times A_2 = \{(x,y) \in \Omega_F \times \Omega_F : x \in A_1,\ y \in A_2\}$. В $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ введём отношение порядка $A_1 \times A_2 < B_1 \times B_2$ в том и только том случае, если $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$. Относительно введенного порядка $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ фильтруется по убыванию. На множестве $\Omega_F \times \Omega_F$ определим соответствие $G : (x,y) \longmapsto F[x]-F[y]$ и назовём F с х о д я щ и м с я в с е б е, если $\lim\limits_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} G = 0$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3(4.2). (Критерий Коши) Для существования конечного $\lim\limits_{\mathfrak{a}} F$ необходимо и достаточно, чтобы F сходилось в себе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\ell = \lim\limits_{\mathfrak{a}} F$. Пусть $B(0,\varepsilon)$ – произвольный шар из $\mathfrak{B}$. По условию, найдётся такое $A \in \mathfrak{a}$, что $F[A]-\ell \subset B(0,\varepsilon)$. Если теперь $A_1, A_2 \subset A$, то $G[A_1 \times A_2] =$

$$= F[A_1]-F[A_2] = F[A_1]-\ell+\ell-F[A_2] \subset B(0,\varepsilon)+B(0,\varepsilon) = B(0,2\varepsilon),$$

чем доказано равенство $\lim\limits_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} G = 0$.

Предположим, что $\lim\limits_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}} G = 0$ и покажем справедливость равенства $L = \overline{\lim\limits_{\mathfrak{a}}}\, F = \underline{\lim\limits_{\mathfrak{a}}}\, F = \ell$. Пусть вновь $B(0,\varepsilon) \in \mathfrak{B}$. Найдём A_1, A_2 из $\mathfrak{a}$, для которых $F[A_1]-F[A_2] \subset B(0,\varepsilon)$, а это означает следующее: $-\varepsilon \leq F[A_1]-F[A_2] \leq \varepsilon$ или $y-\varepsilon \leq F[A_1] \leq y+\varepsilon$, где y – произвольный элемент из $F[A_2]$. Для любого $A \subset A_1$ имеем тем самым

$$y-\varepsilon \leq \inf F[A] \leq \sup F[A] \leq y+\varepsilon,$$

откуда $y-\varepsilon \leq \ell \leq L \leq y+\varepsilon$ (по теореме о предельном переходе в неравенстве). Из последнего неравенства без особого труда получается такое $0 \leq L-\ell \leq 2\varepsilon$, и произвольность ε даёт желаемое равенство.

Чаще всего мы будем использовать критерий Коши для исследования сходимости семейств и последовательностей. Выясним поэтому, как будет выглядеть определение сходимости в себе для этого частного случая.

Рассмотрим семейство $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов A. Система $\mathfrak{A}$ будет состоять из множеств вида $A_\beta = \{\alpha \in A : \alpha \geqslant \beta\}$, где $\beta \in A$. Элемент из произведения $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ определяется парой (β_1, β_2), где $\beta_1, \beta_2 \in A$, и имеет вид $A_{\beta_1} \times A_{\beta_2} = \{(\alpha, \gamma) \in A \times A : \alpha \geqslant \beta_1, \gamma \geqslant \beta_2\}$.
Сходимость семейства $g : A \times A \to R$ к нулю означает следующее: для любой U - окрестности нуля в R, найдутся такие β_1, β_2 из A, что как только $\alpha \geqslant \beta_1$, $\gamma \geqslant \beta_2$, так сразу $g(\alpha, \gamma) \in U$.
Можно ограничиться одним $\beta \in A$, и тогда из $\alpha \geqslant \beta$, $\gamma \geqslant \beta$ должно следовать $g(\alpha, \gamma) \in U$. Взяв в качестве g семейство $\{x_\alpha - x_\gamma\}$ $((\alpha, \gamma) \in A \times A)$ и рассматривая лишь окрестности из фундаментальной системы $\mathcal{L}$ окрестностей нуля, получим, что семейство $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ сходится в себе, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\alpha_0 \in A$, что $|x_\alpha - x_\beta| < \varepsilon$ для всех α, β, следующих за α_0.

4.4. Ограничиваясь рассмотрением семейств, можно привести интересные и полезные факты о верхнем и нижнем пределах. Один из них посвящён реализации $\varliminf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ и $\varlimsup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ как пределов некоторых последовательностей, другой - возможности выделить сходящуюся последовательность из любой последовательности, третий - связи $\varliminf\limits_{\alpha \in A_0} x_\alpha$ и $\varlimsup\limits_{\alpha \in A_0} x_\alpha$ (где A_0 - некоторое конфинальное относительно A множество) с верхним и нижним пределами самого семейства.

Прежде всего переделаем определение верхнего и нижнего пределов, приспособив его к случаю, когда F - семейство. Пусть $\{x_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ - семейство с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов. Когда мы говорили о пределе такого семейства, то имели в виду предел по системе $\mathfrak{A} = \{A_\beta\}$ $(\beta \in A)$, где $A_\beta = \{\alpha \in A : \alpha \geqslant \beta\}$. Тем самым, чтобы определить $\varlimsup\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$ и $\varliminf\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$, нужно выделить семейства $v_{A_\beta} = \sup\limits_{\alpha \in A_\beta} x_\alpha$ и $u_{A_\beta} = \inf\limits_{\alpha \in A_\beta} x_\alpha$, множество индексов которых $\mathfrak{A}$. Но можно рассматривать эти семейства и как отображения из A в R, ибо каждое $A_\beta \in \mathfrak{A}$ определяется элементом β из A. В этом смысле мы получаем два семейства $v:\beta \mapsto \sup\limits_{\alpha\in A_\beta} x_\alpha$, $u:\beta\mapsto \inf\limits_{\alpha\in A_\beta} x_\alpha$, определенные на фильтрующемся по возрастанию множестве A. Кроме того, семейство $\{u_\alpha\}$ - возрастающее, $\{v_\alpha\}$ – убывающее. В самом деле, если $\alpha_1,\alpha_2\in A$ и $\alpha_1\le\alpha_2$, то $A_{\alpha_1}\supset A_{\alpha_2}$, а $\sup\limits_{\alpha\in A_{\alpha_1}} x_\alpha \geqslant \sup\limits_{\alpha\in A_{\alpha_2}} x_\alpha$, последнее означает, что $v_{\alpha_1}\geqslant v_{\alpha_2}$; аналогично можно рассмотреть и семейство $\{u_\alpha\}$.

По теореме о пределе монотонного семейства, справедливы равенства $\lim\limits_{\alpha\in A} v_\alpha = \inf\limits_{\alpha\in A} v_\alpha$, $\lim\limits_{\alpha\in A} u_\alpha = \sup\limits_{\alpha\in A} u_\alpha$, откуда верхний и нижний пределы $\{x_\alpha\}$ оказываются равными $\inf\limits_{\alpha\in A} v_\alpha$, $\sup\limits_{\alpha\in A} u_\alpha$ соответственно. Это можно записать еще и так:

$$\overline{\lim_{\alpha\in A}}\, x_\alpha = \inf_{\alpha\in A}\sup_{\beta\geqslant\alpha} x_\beta , \qquad \underline{\lim_{\alpha\in A}}\, x_\alpha = \sup_{\alpha\in A}\inf_{\beta\geqslant\alpha} x_\beta .$$

4.5. Очередная теорема выражает критерий того, что число λ является верхним пределом семейства $\{x_\alpha\}$.

ТЕОРЕМА 4 (4.2). Для справедливости равенства $\lambda=\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$ необходимо и достаточно выполнения двух условий:

1) для любых $\lambda'<\lambda$ и $\alpha_0\in A$ есть $\alpha\geqslant\alpha_0$, для которого $x_\alpha>\lambda$;

2) каково бы ни было $\lambda''>\lambda$, найдётся $\beta_0\in A$ такое, что $x_\alpha<\lambda''$ для всех $\alpha\geqslant\beta_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим необходимость для случая конечного λ. Если $\lambda=\pm\infty$, то одно из условий тривиально и доказательство проводится аналогично.

Пусть $\lambda=\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$ и $\lambda'<\lambda$, $\alpha_0\in A$ – произвольны. Поскольку $\lambda=\inf\limits_{\beta\in A} v_\beta$, то $v_\beta\geqslant\lambda>\lambda'$, в частности $v_{\beta_0}= =\sup\limits_{\alpha\geqslant\beta_0} x_\alpha>\lambda'$. Число λ' не является верхней границей множества $\{x_\alpha:\alpha\geqslant\alpha_0\}$, то есть неравенство $x_\alpha\le\lambda'$ выполнено не для всех $\alpha\geqslant\alpha_0$, значит найдётся α , следующее за α_0, для которого $x_\alpha>\lambda'$, чем доказано выполнение первого условия.

Чтобы убедиться в необходимости второго, возьмём любое $\lambda''>\lambda$ и вспомним, что $\lambda=\inf\limits_{\beta\in A} v_\beta$, поэтому есть β_0 , для которого $v_{\beta_0}<\lambda''$. Поскольку $v_{\beta_0}=\sup\limits_{\alpha\geqslant\beta_0} x_\alpha$, то для всех $\alpha\geqslant\beta_0$ верно неравенство $x_\alpha\le v_{\beta_0}$, откуда $x_\alpha\le\lambda''$, что и требовалось.

Докажем достаточность. Предположим, что $\lambda>-\infty$ и возьмём произвольные $l<\lambda$ и $\alpha_0\in A$. Согласно первому условию, можно найти $\alpha\geqslant\alpha_0$, для которого $x_\alpha>\lambda'$. Так как $\alpha_0\in A$ произвольно, то $v_\beta > \lambda'$ для всех $\beta \in A$, откуда $L = \overline{\lim\limits_{\alpha \in A}}\, x_\alpha \geqslant \lambda'$, и, так как λ' – любое меньшее λ число, получаем $L \geqslant \lambda$. При $\lambda = -\infty$ это неравенство, в чём нетрудно убедиться, также будет справедливо. Если же $\lambda = +\infty$, тогда и $L = +\infty$, и достаточность будет доказана, даже без привлечения второго условия (которое в этом случае тривиально).

Пусть $\lambda < +\infty$ и предположим, что $L > \lambda$. Возьмём любое λ'', лежащее между λ и L, и найдём $\beta_0 \in A$ такое, что $x_\alpha \leqslant \lambda''$ для всех $\alpha \geqslant \beta_0$. Отсюда $\sup\limits_{\alpha \geqslant \beta_0} x_\alpha \leqslant \lambda''$. Так как $L = \inf\limits_{\beta \in A} \sup\limits_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha$, а точная нижняя граница не превышает любого из элементов этого множества, получаем, что $L \leqslant \sup\limits_{\alpha \geqslant \beta_0} x_\alpha$, а это в свою очередь не больше чем λ''; и пришли к противоречию с тем, что $L > \lambda'' > \lambda$. Теорема полностью доказана.

4.6. Перейдем к изложению намеченного. Покажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5 (4.2). Пусть $L = \overline{\lim\limits_{\alpha \in A}}\, x_\alpha$. Существует последовательность индексов $\{\alpha_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\alpha_n \in A$, обладающая свойствами:

I) $\{\alpha_n\}$ возрастает;

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\alpha_n} = L$.

Если в A нет наибольшего элемента, то в условии I) можно потребовать строгого возрастания последовательности $\{\alpha_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на предыдущей теореме. Рассмотрим случай, когда L конечно. Возьмём две произвольные последовательности $\{\lambda_n'\}$, $\{\lambda_n''\}$, обладающие свойствами

$$\lambda_n' < L < \lambda_n'' \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n' = \lim_{n \to +\infty} \lambda_n'' = L$$

и будем строить $\{\alpha_n\}$ по индукции. Так как $\lambda_1'' > L$, можно найти такое β_0, что $x_\alpha < \lambda_1''$ для всех $\alpha \geqslant \beta_0$. По λ_1' и β_0 найдём $\alpha_1 \geqslant \beta_0$, для которого $x_{\alpha_1} > \lambda_1'$, чем получим такое α_1, что $\lambda_1' < x_{\alpha_1} < \lambda_1''$.

Допустим, что построено α_n, и попытаемся сделать индуктивный шаг.

Если в теореме 5 положить $\lambda'' = \lambda''_{n+1}$, то можно найти β_0 со свойством $x_\alpha < \lambda''_{n+1}$ для всех $\alpha \geqslant \beta_0$. Можно считать, что $\beta_0 \geqslant \alpha_n$. Более того, если в A нет наибольшего элемента, то знак неравенства можно поменять на строгий. Положим теперь $\lambda' = \lambda'_{n+1}$ и (согласно теореме 5) найдём $\alpha_{n+1} \geqslant \beta_0$ такое, что $x_{\alpha_{n+1}} \geqslant \lambda'_{n+1}$. Кроме того, $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$, ибо $\beta_0 > \alpha_n$. Получаем последовательность $\{\alpha_n\}$, которая удовлетворяет условиям: I) $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \ldots$ (если в A нет последнего элемента, то $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1} < \ldots$); 2) $\lambda'_n \leqslant x_{\alpha_n} \leqslant \lambda''_n$.

Осталось лишь воспользоваться теоремой о сжатом соответствии, и можно сказать, что теорема для случая конечного L доказана.

Если же $L = \pm\infty$, то доказательство проводится так же, но в этом случае одна из $\{\lambda'_n\}$, $\{\lambda''_n\}$ тождественно равна плюс или минус бесконечности (в зависимости от того, какой бесконечности равно L).

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ и предположим, что она ограничена. Тем самым $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} x_n$ конечны. Множество $\mathcal{N}$ не имеет последнего элемента, поэтому можно указать последовательность индексов $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$ такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = L$. Последовательность $z_n = x_{k_n}$ называют п о д п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю $\{x_n\}$. Иначе говоря, подпоследовательность - это суперпозиция x_n $(n \in \mathcal{N})$ и строго возрастающей последовательности k_n $(n \in \mathcal{N})$ натуральных чисел. В этих терминах сформулируем уже доказанное следствие из теоремы 5.

ТЕОРЕМА 6(2.4) (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, имеющую конечный предел.

Заметим, что хотя понятие верхнего и нижнего пределов было введено лишь для вещественных соответствий, теорема Больцана-Вейерштрасса верна и в комплексном случае. Действительно, пусть $\{x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ - ограниченная последовательность комплексных чисел. С ней можно связать две вещественных последовательности $x'_n = \mathcal{R}e\, x_n$, $x''_n = \mathcal{I}m\, x_n$. Тогда равенство $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ равносильно тому, что $l' = \mathcal{R}e\, l = \lim\limits_{n\to+\infty} x'_n$, $l'' = \mathcal{I}m\, l = \lim\limits_{n\to+\infty} x''_n$.

Последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ также ограничены, и к каждой из них применима теорема Больцано-Вейерштрасса. Выделим из $\{x'_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x'_{k_n}\}$ и рассмотрим $\{y_n\}$ такую, что $y_n = x''_{k_n}$. Пусть $\{y_{n_i}\}$ $(i \in \mathcal{N})$ -

– сходящаяся подпоследовательность $\{y_n\}$. Тогда $x'_{k_{n_i}}$ $(i\in\mathcal{N})$ – требуемая подпоследовательность последовательности $\{x'_n\}$, с другой стороны $\{x'_{k_{n_i}}\}$ также будет сходящейся, ибо $\{k_{n_i}\}$ конфинально в $\mathcal{N}$ (согласно определению подпоследовательности), и есть возможность воспользоваться предложением I(П.2.5).

4.7. Из того, что мы наметили, осталось лишь выяснить, как связаны $\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$, $\underline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$ с верхним и нижним пределами сужения $\{x_\alpha\}$ на $A_0\subset A$, конфинальное относительно A. Эту связь даёт

ТЕОРЕМА 7(4.2). Пусть $A_0\subset A$ и конфинально относительно A. Тогда

$$\underline{\lim_{\alpha\in A}}\, x_\alpha \le \underline{\lim_{\alpha\in A_0}}\, x_\alpha \le \overline{\lim_{\alpha\in A_0}}\, x_\alpha \le \overline{\lim_{\alpha\in A}}\, x_\alpha .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\beta\in A_0$, то $(A_0)_\beta=\{\alpha\in A_0:\alpha\succ\beta\}\subset A_\beta$, поэтому для любого такого β мы вправе написать $v'_\beta=\sup\limits_{\alpha\in(A_0)_\beta} x_\alpha\le v_\beta$. Поскольку A_0 конфинально относительно A, то существует $\lim\limits_{\beta\in A_0} v_\beta$, равный $\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$, и перейдя в последнем неравенстве к пределу, получим $\lim\limits_{\beta\in A_0} v'_\beta\le\lim\limits_{\beta\in A_0} v_\beta$, откуда $\overline{\lim\limits_{\alpha\in A_0}}\, x_\alpha\le\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$. Неравенство между нижними пределами получается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Само семейство $\{x_\alpha\}$ может и не иметь предела, однако таковой может существовать у сужения $\{x_\alpha\}$ на A_0. В этом случае $\underline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha\le\lim\limits_{\alpha\in A_0} x_\alpha\le\overline{\lim\limits_{\alpha\in A}}\, x_\alpha$.

§ 5. Суммирование числовых семейств

Этим параграфом мы начинаем построение новой конструкции – суммы числового семейства. Пока речь пойдёт об определении и общих свойствах суммы, не зависящих от того, в каком из множеств $\mathcal{R}$ или $\mathcal{C}$ лежат значения семейства. Будем поэтому через Y обозначать одно из указанных множеств.

5.I. Рассмотрим семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ со значениями в Y и подумаем, нельзя ли "найти сумму" этого семейства? Если Ξ

конечно, это уже было проделано в I-й главе. Но условие конечности Ξ было настолько существенным, что пытаться поступить аналогично в случае бесконечного Ξ просто бессмысленно. Естественно поэтому сделать какой-нибудь предельный переход, но его надо провести так, чтобы, когда Ξ конечно, получалась сумма в уже известном смысле.

Заметим, что в Ξ не предполагалось никакой структуры порядка, а для осуществления предельного перехода надо иметь семейство с фильтрующимся множеством индексов. Порядок можно ввести в системе подмножеств из Ξ – по включению. Кроме того, если ограничиться системой конечных подмножеств Ξ, которую мы будем обычно обозначать $\mathcal{P}_f(\Xi)$ или, короче, $\mathfrak{a}$, то она оказывается фильтрующейся по возрастанию. Остаётся теперь вспомнить, что можно определить сумму семейства с конечным множеством индексов, и становится более или менее ясно, как следует провести предельный переход. Каждому $\theta \in \mathcal{P}_f(\Xi)$ поставим в соответствие сумму $s_\theta = \sum_{\xi\in\theta} x_\xi$. Тем самым получаем числовое семейство $\{s_\theta\}$ $(\theta\in\mathfrak{a})$ с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов $\mathfrak{a}$. Если существует $\lim_{\theta\in\mathfrak{a}} s_\theta = s$, его мы и назовём **с у м м о й** семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$, а о семействе будем говорить, что оно **и м е е т с у м м у** (равную s). Заметим, что не исключена возможность бесконечной суммы. Если $\lim_{\theta\in\mathfrak{a}} s_\theta$ конечен, семейство $\{x_\xi\}$ назовём **с у м м и р у е м ы м**.

То же самое определение суммы семейства годится и тогда, когда значения его лежат в $\bar{R}$, надо лишь исключить возможность появления среди значений семейства бесконечностей разных знаков. Имея в виду это замечание, в дальнейшем будем под Y понимать одно из R, $\bar{R}$, C.

Определение суммы семейства перманентно, то есть если Ξ конечно, нам безразлично каким способом находить сумму – индуктивно (как это делалось в первой главе) или переходя к пределу. Дело в том, что когда Ξ конечно, $\mathfrak{a}$ имеет наибольший элемент – само Ξ, а в этом случае (как было замечено в § 2) $\lim_{\theta\in\mathfrak{a}} s_\theta$ просто совпадает со значением s_Ξ.

Поскольку $\mathfrak{a}$ – система всех конечных подмножеств Ξ и сумма конечного числа элементов из Y определяется однозначно, в силу единственности предела s_θ по $\mathfrak{a}$ у семейства может быть лишь одна сумма.

Сформулируем теперь общие свойства суммы числового семейства.

5.2. Рассмотрим два числовых семейства $\{x_\xi\}$ и $\{y_\xi\}$ с общим множеством индексов Ξ. Пусть кроме них даны два (комплексных) числа α, β. Образуем новое семейство $\{z_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ следующим образом: $z_\xi = \alpha\cdot x_\xi + \beta y_\xi$ $(\xi\in\Xi)$.

I. В предположении, что семейства $\{x_\xi\}$ и $\{y_\xi\}$ суммируемы и s', s'' – их суммы, таковым будет и семейство $\{z_\xi\}$, при этом выполняется равенство $s = \alpha s' + \beta s''$, где s – сумма семейства $\{z_\xi\}$.

Сформулированное предложение называют свойством линейности суммы семейства. Доказывается оно непосредственно из определения: если $\theta\in\mathfrak{A}$, то $s_\theta = \alpha s'_\theta + \beta s''_\theta$ и, воспользовавшись теоремой о пределе суммы, $s = \alpha s' + \beta s''$.

Заметим, что это свойство остаётся справедливым, если s', s'' бесконечны ($\{x_\xi\}, \{y_\xi\}$ принимают значения в $\overline{\mathbb{R}}$), но сумма $\alpha s' + \beta s''$ имеет смысл.

5.3. Пусть, кроме множества Ξ, имеется эквивалентное ему H. Обозначим φ отображение, осуществляющее эту эквивалентность, то есть взаимно однозначное отображение H на Ξ. Образуем семейство $\{x_{\varphi(\eta)}\}$ $(\eta\in H)$ – суперпозицию $x\circ\varphi$ отображений φ и x.

I. Семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ и $\{x_{\varphi(\eta)}\}$ $(\eta\in H)$ имеют сумму одновременно и одну и ту же.

Возьмём какое-либо конечное подмножество θ из H и обозначим $Q = \varphi[\theta]$. В силу взаимной однозначности φ, множество Q входит в $\mathcal{P}_f(\Xi)$ и содержит столько же элементов, сколько и θ. Просуммировав элементы $\{x_\xi\}$ $(\xi\in Q)$, получаем $s'_Q = \sum_{\xi\in Q} x_\xi = \sum_{\eta\in\theta} x_{\varphi(\eta)} = s_\theta$, откуда $s'_Q = s_\theta$ для всех $\theta\in\mathcal{P}_f(H)$. Если теперь $U\in\mathcal{H}_s$ (где s – сумма семейства $\{x_{\varphi(\eta)}\}$ $(\eta\in H)$), а θ_0 – такое конечное подмножество из H, что $\sum_{\eta\in\theta_0} x_{\varphi(\eta)}\subset U$, то это же самое включение справедливо для суммы $\sum_{\xi\in Q_0} x_\xi$ $(Q_0 = \varphi[\theta_0])$, и θ_0 – искомый элемент из $\mathcal{P}_f(\Xi)$. Обратное проверяется аналогично.

5.4. В прошлом параграфе был доказан критерий Коши сходимости соответствия. Мы будем часто использовать этот критерий в вопросах суммирования семейств. Непосредственная его формулировка несколько неудобна, и нам придётся привести иную форму этого критерия, весьма близкую к первоначальной.

Пусть $\{x_\xi\}$ – произвольное семейство со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Покажем, что свойство семейства иметь конечную сумму равносильно следующему: для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\theta_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $|\sum_{\xi\in\theta} x_\xi| < \varepsilon$ для каждого конечного θ, не пересекающегося с θ_0. В самом деле, пусть $\{s_\theta\}$ сходится. Это означает, что по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $\theta_0 \in \mathfrak{A}$, что для любых θ_1, θ_2 из $\mathfrak{A}$, содержащих θ_0, выполнено неравенство $|s_{\theta_1} - s_{\theta_2}| < \varepsilon$. Возьмём любое $\theta \in \mathfrak{A}$, не пересекающееся с θ_0 и положим $\theta_1 = \theta_0 \cup \theta$, $\theta_2 = \theta_0$. Тогда $s_{\theta_1} = s_{\theta_0} + s_\theta$ (так как $\theta_0 \cap \theta = \varnothing$) и $|s_\theta| = |s_{\theta_1} - s_{\theta_2}| < \varepsilon$.

Обратно, взяв $\varepsilon>0$, найдём $\theta_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что для любого $\theta\in\mathfrak{A}$, $\theta\cap\theta_0 = \varnothing$ справедливо $|s_\theta| < \varepsilon$. Если теперь θ_1, θ_2 содержит θ_0, обозначим $\theta' = \theta_1 \setminus \theta_0$, $\theta'' = \theta_2 \setminus \theta_0$. Множества θ', θ'' не задевают θ_0, поэтому $|s_{\theta'}| < \varepsilon$, $|s_{\theta''}| < \varepsilon$. Заметив, что $s_{\theta_1} = s_{\theta'} + s_{\theta_0}$, $s_{\theta_2} = s_{\theta''} + s_{\theta_0}$, имеем $|s_{\theta_1} - s_{\theta_2}| = |s_{\theta'} - s_{\theta''}| < 2\varepsilon$, что и требовалось.

Благодаря изложенной форме критерия Коши, можно сразу и довольно просто получить интересные следствия.

1. Допустим, что в самом Ξ имеется отношение порядка, Ξ фильтруется по возрастанию и в Ξ нет последнего элемента. Тогда если $\{x_\xi\}$ суммируемо, то $\lim_{\xi\in\Xi} x_\xi = 0$.

Возьмём произвольный шар $B(0,\varepsilon)$ радиуса ε и найдём $\theta_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что $|s_\theta| < \varepsilon$ как только $\theta \cap \theta_0 = \varnothing$. Так как в Ξ нет последнего элемента, и оно фильтруется по возрастанию, можно найти ξ_0, мажорирующее θ_0. Тогда все $\xi \geqslant \xi_0$ не пересекаются с θ_0, поэтому $x_\xi \in B(0,\varepsilon)$.

2. Пусть $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – числовое семейство и $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi_0)$– его сужение на $\Xi_0 \subset \Xi$. Предположим, что само семейство имеет сумму. В этом случае сужение также имеет сумму.

Зададимся положительным числом ε и найдём по нему соответствующее $\theta_0 \in \mathfrak{A}$. Если θ_0 не пересекается с Ξ_0, тогда всё ясно. В противном случае требуемым элементом $\widehat{\theta}$ из $\mathcal{P}_f(\Xi_0)$ является $\theta_0 \cap \Xi_0$. Действительно, если $\theta \in \mathcal{P}_f(\Xi_0)$ и $\theta\cap\theta_0 = \varnothing$, то, поскольку $\theta \in \mathfrak{A}$ и $\theta \cap \widehat{\theta} = \varnothing$, имеем $|s_\theta| < \varepsilon$.

5.5. Ранее отмечалось, что в случае конечного Ξ сумма $\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi$ ассоциативна. Опираясь на этот факт, докажем аналогичное свойство суммы для бесконечных Ξ.

Разобьём Ξ на систему $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ непересекающихся подмножеств так, что $\Xi=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\Xi_\lambda$. Если само семейство суммируемо, то и сужение его на каждое Ξ_λ также суммируемо. Обозначим $s_\lambda=\sum_{\xi\in\Xi_\lambda}x_\xi$. Таким образом, можно говорить о числовом семействе $\{s_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$.

ТЕОРЕМА I(5.2). Предположим, что $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ суммируемо. Тогда $\{s_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ также суммируемо и

$$s=\sum_{\xi\in\Xi}x_\xi=\sum_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\xi\in\Xi_\lambda}x_\xi .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $s=\lim_{\theta\in\mathfrak{A}}s_\theta$, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\theta_0\in\mathfrak{A}$, что как только $\theta\supset\theta_0$ и $\theta\in\mathfrak{A}$, так сразу $|s-\sum_{\xi\in\theta}x_\xi|<\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $\Lambda_0=\{\lambda\in\Lambda:\theta_0\cap\Xi_\lambda\neq\varnothing\}$

и возьмём произвольное $H\in\mathfrak{P}_f(\Lambda)$, содержащее Λ_0. Пусть n – число элементов в H. Так как $s_\eta=\sum_{\xi\in\Xi_\eta}x_\xi$, найдутся такие $\theta_\eta\in\mathfrak{P}_f(\Xi_\eta)$, что, во-первых, $|s_\eta-\sum_{\xi\in\theta_\eta}x_\xi|<\frac{\varepsilon}{2n}$, и во-вторых, $\theta_\eta\supset\theta_0\cap\Xi_\eta$. Тогда $\theta=\bigcup_{\eta\in H}\theta_\eta\supset\theta_0$. Поэтому, в силу ассоциативности конечных сумм $|s-\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}|<\varepsilon/2$. Теперь, учитывая, что $|\sum_{\eta\in H}s_\eta-$ $-\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}|<\varepsilon/2$, сравнительно просто проводится следующая оценка:

$$|s-\sum_{\eta\in H}s_\eta|=|s-\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}+\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}-\sum_{\eta\in H}s_\eta|\leq$$

$$\leq|s-\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}|+|\sum_{\eta\in H}s_{\theta_\eta}-\sum_{\eta\in H}s_\eta|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon .$$

Поскольку H из $\mathfrak{P}_f(\Lambda)$ было взято произвольным, содержащим Λ_0, последняя оценка показывает, что Λ_0 – искомое конечное подмножество Λ.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Теорема была доказана в предположении, что семейство $\{x_\xi\}$ суммируемо, то есть имеет смысл левая часть в равенстве $\sum_{\xi\in\Xi}x_\xi=\sum_{\lambda\in\Lambda}s_\lambda$. Это условие существенно, ибо если, отбросив его, предположить существование и конечность правой части, то теорема просто становится неверной. Чтобы продемонстрировать это, достаточно привести, по крайней мере, один противоречащий пример.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ $(n\in\mathfrak{N})$, определённую следующим образом:

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad n = 2k-1 \\ -1, & \text{если} \quad n = 2k \end{cases} \qquad (k \in \mathfrak{N}).$$

Очевидно, что она не суммируема. Между тем, если $\Xi_\lambda = \{2\lambda-1, 2\lambda\}$, где λ – натуральное число, то $\mathfrak{N} = \bigcup_{\lambda\in\mathfrak{N}} \Xi_\lambda$, $\Xi_{\lambda_1} \cap \Xi_{\lambda_2} = \phi$ при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $s_\lambda = 0$ при всех $\lambda \in \mathfrak{N}$, отсюда $\sum_{\lambda\in\mathfrak{N}} s_\lambda = 0$.

2. Если Ξ разбивается на конечное число подмножеств (то есть Λ конечно), то можно утверждать и обратное: из суммируемости семейств $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_\lambda)$ и существования $s = \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ следует суммируемость $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и равенство $\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$.

Действительно, пусть n – число элементов в Λ. Так как каждое $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_\lambda)$ суммируемо, по $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\hat{\theta}_\lambda \in \mathfrak{P}_f(\Xi_\lambda)$, что $|s_\lambda - s_{\theta_\lambda}| < \varepsilon/n$ для любых конечных $\theta_\lambda \supset \hat{\theta}_\lambda$. Тогда $\theta_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \hat{\theta}_\lambda$ – конечное подмножество Ξ, и если $\theta \in \mathfrak{P}_f(\Xi)$ – произвольное, содержащее θ_0, то

$$|s - \sum_{\xi\in\theta} x_\xi| = |\sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda - \sum_{\xi\in\theta} x_\xi| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} |s_\lambda - s_{\theta_\lambda}| < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon,$$

где $\theta_\lambda = \Xi_\lambda \cap \theta$ – конечное подмножество Ξ_λ, содержащее $\hat{\theta}_\lambda$.

3. Предположим, что множество Ξ индексов семейства $\{x_\xi\}$ есть произведение двух множеств Λ и M. Разобьём его на непересекающиеся подмножества $\Xi_\lambda = \{\lambda\} \times M$, где $\lambda \in \Lambda$. Понятно, что $\Xi = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Xi_\lambda$.

Будем считать $\{x_\xi\}$ суммируемым. Тогда, благодаря доказанной теореме, можно написать $\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\in\Lambda} (\sum_{\mu\in M} x_{\lambda\mu})$.

Множества Λ и M равноправны, поэтому, поменяв их местами, получим, что

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\mu\in M} (\sum_{\lambda\in\Lambda} x_{\lambda\mu}).$$

Вследствие второго замечания, если, например, Λ конечно, можно отбросить условие суммируемости $\{x_\xi\}$, потребовав всё же суммируемость $\{x_{\lambda\mu}\}$ $(\mu \in M)$ при каждом $\lambda \in \Lambda$ и существование $\sum_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ (где $s_\lambda = \sum_{\mu\in M} x_{\lambda\mu}$). В этом случае $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемо, справедливо равенство $\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\in\Lambda} (\sum_{\mu\in M} x_{\lambda\mu})$, однако менять порядок суммирования уже нельзя (Λ и M далеко не равноправны).

§ 6. Суммирование вещественных семейств

Будем рассматривать только те семейства $\{x_\xi\}$ область значений которых лежит в $\bar{R}$. Для них, конечно, справедливы все свойства, изложенные в § 5. Попытаемся использовать специфику порядка в $\bar{R}$, чтобы получить различные характеристики суммирования вещественных семейств, которые могут быть неверны в общем случае.

6.I. Напомним, что семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ называется положительным, если $x_\xi \geqslant 0$ при всех $\xi \in \Xi$. Для таких семейств сумму их можно находить следующим способом: рассмотреть $\{s_\theta\}$ $(\theta \in \mathfrak{A})$ и образовать $\sup\limits_{\theta \in \mathfrak{A}} s_\theta$. Это число и будет суммой $\{x_\xi\}$. Убедиться в этом нетрудно. Если θ_1, θ_2 – элементы из $\mathfrak{A}$ и $\theta_1 \subset \theta_2$, то $s_{\theta_1} \leq s_{\theta_2}$, поскольку все x_ξ положительны. Таким образом, $\{s_\theta\}$ – возрастающее семейство, а для него выполняется $\lim\limits_{\theta \in \mathfrak{A}} s_\theta = \sup\limits_{\theta \in \mathfrak{A}} s_\theta$.

I. Пусть $\{x_\xi\}$, $\{y_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ – два положительных семейства, такие что, $x_\xi \leq y_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$, кроме, возможно, некоторого конечного Ξ_0. Тогда если $\{y_\xi\}$ суммируемо, таковым будет и $\{x_\xi\}$.

В самом деле, возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём такое конечное θ_0, что $\sum\limits_{\xi \in \theta} y_\xi < \varepsilon$ для всех $\theta \in \mathfrak{A}$, не пересекающихся с θ_0. Тогда если $\theta_1 \in \mathfrak{A}$, $\theta_1 \cap (\theta_0 \cup \Xi_0) = \phi$, то $\sum\limits_{\xi \in \theta_1} x_\xi \leq \sum\limits_{\xi \in \theta_1} y_\xi < \varepsilon$, и из конечности $\theta_0 \cup \Xi$ следует суммируемость $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$

Недавно мы доказали свойство ассоциативности суммы семейства в предположении, что само семейство суммируемо. В том случае, когда $\{x_\xi\}$ положительно, можно отказаться от этого предположения.

ТЕОРЕМА I(2.6). Пусть $\{x_\xi\}$ – положительное семейство. Тогда

$$s = \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi \Big)$$

(в обозначениях теоремы I(2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{x_\xi\}$ положительно, таким будет и $\{s_\lambda\}$, и нам не надо беспокоиться о существовании $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ – она всегда есть (равная, возможно, $+\infty$).

Заметив это, возьмём какое-либо конечное $\theta\in\Xi$ и представим его в виде $\theta=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\theta_\lambda$, где $\theta_\lambda=\theta\cap\Xi_\lambda$. В силу ассоциативности для конечных сумм, $s_\theta=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_{\theta_\lambda}$ и, вследствие положительности $\{s_\lambda\}$, $s_\theta\le\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$. Поскольку это неравенство справедливо для любого $\theta\in\mathfrak{A}$, получаем $s=\sup\limits_{\theta\in\mathfrak{A}} s_\theta\le\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$.

Когда s конечно, семейство $\{x_\xi\}$ суммируемо и $s=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ по теореме I(2.5), если же $s=+\infty$, то $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} s_\lambda$ не может быть больше s, значит они равны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для ассоциативности суммы нужно потребовать либо суммируемости, либо положительности семейства.

6.2. Вместе с семейством $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ рассмотрим семейство $\{|x_\xi|\}$ $(\xi\in\Xi)$, составленное из модулей значений первого, и будем называть $\{x_\xi\}$ абсолютно суммируемым, если $\{|x_\xi|\}$ суммируемо.

ТЕОРЕМА 2(2.6) Суммируемость семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ равносильна его абсолютной суммируемости. Иначе говоря, семейства $\{x_\xi\}$ и $\{|x_\xi|\}$ будут суммируемы или нет одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{|x_\xi|\}$ суммируемо и зададимся $\varepsilon>0$. Согласно критерию Коши, найдётся $\theta_0\in\mathfrak{A}$ такое, что $\sum\limits_{\xi\in\theta}|x_\xi|<\varepsilon$, как только $\theta\cap\theta_0=\varnothing$, $\theta\in\mathfrak{A}$. Это же θ_0 годится и для $\{x_\xi\}$, потому что $\left|\sum\limits_{\xi\in\theta}x_\xi\right|\le\sum\limits_{\xi\in\theta}|x_\xi|$, откуда $\left|\sum\limits_{\xi\in\theta}x_\xi\right|<\varepsilon$.

Пусть теперь $\{x_\xi\}$ суммируемо и снова $\varepsilon>0$ произвольно. Найдём $\theta_0\in\mathfrak{A}$, для которого выполняется $\left|\sum\limits_{\xi\in\theta}x_\xi\right|<\varepsilon$, как только $\theta\in\mathfrak{A}$ и $\theta\cap\theta_0=\varnothing$. Разобьём θ на две части $\theta^+=\{\xi\in\theta: x_\xi\geqslant 0\}$ и $\theta^-=\{\xi\in\theta: x_\xi<0\}$. Понятно, что $\theta^+\cap\theta^-=\varnothing$ и $\theta=\theta^+\cup\theta^-$. Значит $\sum\limits_{\xi\in\theta}|x_\xi|=\sum\limits_{\xi\in\theta^+}|x_\xi|+\sum\limits_{\xi\in\theta^-}|x_\xi|$. Так как $|x_\xi|=-x_\xi$ для ξ из θ^- и $|x_\xi|=x_\xi$ для ξ из θ^+, получаем

$$\sum_{\xi\in\theta}|x_\xi|=s_{\theta^+}-s_{\theta^-}\le|s_{\theta^+}|+|s_{\theta^-}|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЯ I. Эта теорема верна и в том случае, когда x_ξ лежат в комплексной плоскости. То, что из абсолютной суммируемости следует суммируемость, получается так же, как и в доказательстве теоремы. Чтобы показать обратное, запишем $x_\xi = x'_\xi + ix''_\xi \quad (\xi \in \Xi)$. Семейство $\{x_\xi\}$ суммируемо или нет одновременно с семействами $\{x'_\xi\}$, $\{x''_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, поэтому, применив к ним теорему, имеем их абсолютную суммируемость. В силу неравенства $|x_\xi| \leq |x'_\xi| + |x''_\xi|$ семейство $\{|x_\xi|\}$ мажорируется суммируемым семейством $\{|x'_\xi| + |x''_\xi|\}$ и, ввиду его положительности, оно также суммируемо.

2. Пусть $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ суммируемо. Обозначим $\bar{s} = \sum_{\xi \in \Xi} |x_\xi|$. Тогда, что ясно из доказательства теоремы, $s \leq \bar{s}$.

Рассмотрим два семейства: $\{x_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, $\{y_\mu\}$ $(\mu \in M)$. Предположим, что они либо положительны, либо суммируемы, и образуем новое семейство $z_{\lambda\mu} = x_\lambda \cdot y_\mu$, определённое на $\Lambda \times M$. Оказывается, что оно имеет сумму s, равную $s' \cdot s''$, где $s' = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$, $s'' = \sum_{\mu \in M} y_\mu$.

Предположим вначале, что $\{x_\xi\}$ и $\{y_\xi\}$ положительны. Тогда $\{z_{\lambda\mu}\}$ имеет сумму. Используя свойства ассоциативности и линейности суммы семейства, получим

$$s = \sum_{(\lambda,\mu) \in \Lambda \times M} z_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda \in \Lambda, \mu \in M} x_\lambda y_\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \sum_{\mu \in M} y_\mu = s' \cdot s''.$$

Если s', s'' к тому же конечны, то s тоже конечна.

Случай суммируемых семейств сводится к рассмотренному благодаря теореме 2. Равенство $s = s' \cdot s''$ получается так же, как и для положительных семейств.

§ 7. Числовые ряды

7.I. Рассмотрим суммируемое числовое семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и выясним, насколько много в нём "существенных" членов ?

I. Предположим, что $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ – суммируемое семейство. Тогда множество $\Xi_0 = \{\xi \in \Xi : x_\xi \neq 0\}$ не более чем счётно.

Благодаря теореме об абсолютной суммируемости, достаточно рассмотреть случай положительного семейства. Обозначим $\Xi_n = \{\xi \in \Xi : x_\xi \geq \frac{1}{n}\}$.

Число элементов этого множества не может быть больше $n \cdot \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi$, поэтому оно конечно. Остаётся лишь заметить, что $\Xi_0 = \bigcup_{n=1} \Xi_n$ и объединение не более чем счетного числа конечных множеств также не более чем счётно.

Итак, множество ненулевых членов в суммируемом семействе не более чем счётно. Обозначим φ взаимно однозначное отображение Ξ_0 на $\mathcal{N}$ (или его конечное подмножество, если Ξ конечно). Вместо семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ можно рассмотреть $\{x_{\varphi^{-1}(n)}\}$ $(n \in \mathcal{N})$, и они будут суммируемы или нет одновременно (см.6.I). Таким образом, среди числовых семейств естественно выделяются такие, у которых множество индексов $\mathcal{N}$. С практической точки зрения удобно рассматривать предел $\{S_\theta\}$ не по системе всех конечных подмножеств $\mathcal{N}$, а по некоторой её конфинальной подсистеме. Теряя при этом справедливость некоторых фактов, мы получаем весьма полезную конструкцию - суммы ряда. Прежде всего дадим соответствующие определения и сформулируем общие свойства.

Пусть $\{x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ - числовая последовательность. Обозначим через $\mathcal{N}_m$ множество $\{n \in \mathcal{N} : n \leq m\}$ и через S_m сумму $\sum_{n \in \mathcal{N}_m} x_n$. Система $\{\mathcal{N}_m\}$ $(m \in \mathcal{N})$ содержится в $\mathcal{P}_f(\mathcal{N})$ и фильтруется по возрастанию. Если последовательность $\{x_n\}$ рассматривается с целью обсудить существование $\lim_{n \to \infty} S_n$ и, возможно, найти этот предел, в этом случае мы будем называть её р я д о м (с общим членом x_n) и обозначать $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Суммы S_n называют ч а с т и ч н ы м и с у м м а м и р я д а. Говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и м е е т с у м м у, равную S, если $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, и что р я д с х о д и т с я, если S конечна (в противном случае р я д р а с х о д и т с я). Сумму ряда обозначают, как и сам ряд, символом $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Возникающая при этом двусмысленность в обозначениях, как правило, не приводит к недоразумениям, поэтому мы будем пользоваться установившимися обозначениями и терминологией.

Бывает удобно рассматривать предельные свойства $\{S_m\}$, беря в качестве $\mathcal{N}_m$ множество $\{n \in \mathcal{N} : k \leq n \leq m\}$, где k - некоторый фиксированный элемент из $\mathcal{N}$. Ряд в этом случае будем обозначать через $\sum_{\ell=k}^{\infty} x_\ell$. Можно также в качестве $\mathcal{N}_m$ брать $\{n \in \mathcal{N} : n \leq m\} \cup \{0\}$, и такой ряд обозначим через $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Понятно, что свойства ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходиться или иметь сумму равносильны таковым для любого из рядов $\sum_{n=k}^{\infty} x_n \quad (k=0,1,2,\dots)$.

Согласно критерию Коши (см. 4.3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится тогда и только тогда, когда по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $N\in\mathbb{N}$, что $\left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right|<\varepsilon$ для произвольных $m>n>N$.

Отметим связь между суммой ряда и суммой последовательности. Если существует $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = s$, то существует $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, равная s. Обратное справедливо для абсолютно сходящихся рядов – так называются ряды, у которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ сходится. В самом деле, из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ следует существование конечной суммы последовательности $\{|x_n|\}$ $(n\in\mathbb{N})$ (поскольку все её члены положительны). Можно теперь сказать, что $\{x_n\}$ суммируема (по теореме 2(2.6)), а равенство сумм даёт теорема 7(2.4), ибо $\lim\limits_{\theta\in\mathcal{P}_f(\alpha)^\theta} s_\theta = \lim\limits_{\theta\in\mathcal{P}_f(\alpha)^\theta} s_\theta$.

Если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится, но не наоборот; можно привести простые примеры сходящихся рядов, у которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ расходится.

7.2. Как и при рассмотрении других общих конструкций, встаёт вопрос: если есть конкретный ряд, каким образом выяснить, сходится он или нет? Пока в нашем распоряжении ничего кроме определения и критерия Коши нет. Ниже мы докажем несколько теорем, которые именуются признаками сходимости, позволяющих судить о сходимости ряда, зная лишь его общий член и не прибегая к составлению каких-либо конечных сумм.

Начнём с небольшого замечания, которое фактически является признаком сходимости ряда (его называют признаком сравнения). Рассмотрим два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ и предположим существование $n_0\in\mathbb{N}$ такого, что $|x_n|\le|y_n|$ при $n\geqslant n_0$. Тогда если $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ абсолютно сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ также абсолютно сходится.

Проверить это можно, например, воспользовавшись критерием Коши. Взяв $\varepsilon>0$, найдём N такой, что, во-первых, $\sum_{k=m}^{n} |y_k|<\varepsilon$ при $n>m>N$, и, во-вторых, выполняется уже неравенство $|x_n|<$ $<|y_n|$ $(n>N)$ (всегда можно добиться выполнения второго требования, увеличив, если это необходимо, номер N). Тогда $\sum_{k=m}^{n} |x_k|\le$ $\le\sum_{k=m}^{n} |y_k|<\varepsilon$, и этот же N годится в критерии Коши применительно к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$.

Этот признак, как правило, полагается в основу других признаков абсолютной сходимости ряда. Для доказательства же расходимости ряда удобно использовать следующее соображение: если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (ср. 5.4.I). Таким образом ряд, для которого не выполнено последнее равенство, сходиться не может и (по определению) является расходящимся.

Первые два признака основаны на сравнении с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, называемым геометрической прогрессией, который абсолютно сходится если $|x|<1$, и сумма его равна $\frac{x}{1-x}$. (Доказательство этого факта предоставляется читателю.)

ТЕОРЕМА I(7.2). (Признак Коши) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ - числовой ряд. Составим последовательность $\{c_n\}$, $c_n = \sqrt[n]{|x_n|}$ и обозначим $c = \overline{\lim_{n\to\infty}} c_n$. Если $c<1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, при $c>1$ - расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $c<1$ и возьмём любое $x \in \in \mathcal{R}$, удовлетворяющее неравенству $c<x<1$. Начиная с некоторого номера n_0 выполняется $c_n < x$, отсюда $(c_n)^n < x^n$ и $|x_n| < x^n$. Заметив, что ряд с общим членом x^n абсолютно сходится, остаётся применить признак сравнения с $y_n = x^n$.

Рассмотрим случай $c>1$. По теореме 4(2.5) для бесконечного множества индексов выполняется неравенство $c_n > 1$, тем самым $|x_n| > 1$ для тех же индексов, и последовательность $\{x_n\}$ не может сходиться к нулю.

ТЕОРЕМА 2 (7.2) (признак Даламбера). Предположим, что $x_n \neq 0$ $(n \in \mathcal{N})$ Образуем последовательность $\{d_n\}$ $\left(d_n = \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\right)$ и обозначим $d = \underline{\lim_{n\to\infty}} d_n$, $\mathcal{D} = \overline{\lim_{n\to\infty}} d_n$.

Если $\mathcal{D}<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ абсолютно сходится, если $d>1$ - расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{D}<1$ и x - число, лежащее строго между $\mathcal{D}$ и 1. Тогда, начиная с некоторого n_0, выполняются неравенства $d_n < x$. Элементарное применение индукции даёт $|x_n| < |x_{n_0}| \cdot x^{n-n_0}$ $(n>n_0)$, и, заметив, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n_0}| \cdot x^{n-n_0}$ абсолютно сходится, получили возможность использовать признак сравнения с $y_n = |x_{n_0}| \cdot x^{n-n_0}$.

Предположим теперь, что $d>1$. Можно указать такое n_0, что $|x_{n+1}|>|x_n|$ при $n>n_0$. Последовательность $\{|x_n|\}$ $(n>n_0)$ — строго возрастающая, и все $|x_n|$ отличны от нуля. Тем самым $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|\neq 0$ (так как если $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, то $\sup\limits_{n>n_0}|x_n|=0$ и $|x_n|=0$ при $n>n_0$), а это указывает на расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$.

Доказанные признаки были посвящены абсолютной сходимости ряда. В отличие от них, следующий признак абсолютной сходимости не гарантирует.

ТЕОРЕМА 3 (2.7) (признак Абеля-Дирихле). Рассмотрим две числовые последовательности $\{\alpha_k\}$, $\{u_k\}$, удовлетворяющие следующим условиям: $\{\alpha_k\}$ состоит из вещественных, неотрицательных чисел, убывает и имеет пределом ноль; последовательность $\{\sigma_m\}$ частичных сумм $\sigma_m=\sum\limits_{k=1}^{m}u_k$ ограничена сверху. При этих предположениях ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k u_k$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся критерием Коши. Взяв $\varepsilon>0$, попытаемся найти $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что при $n>m>n_0$ выполняется $|s_n-s_m|<\varepsilon$ (здесь $s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i u_i$).

Оценим разность $s_n-s_m=\sum\limits_{k=m+1}^{n}\alpha_k u_k$. Заметив, что $u_k=\sigma_k-\sigma_{k-1}$, и обозначив $\sigma_0=0$, $B=\sup\limits_{m\in\mathbb{N}}\sigma_m$, имеем

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k u_k\Big|=\Big|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k(\sigma_k-\sigma_{k-1})\Big|=\Big|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\sigma_k-\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\sigma_{k-1}\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\sigma_k-\sum_{k=m}^{n-1}\alpha_{k+1}\sigma_k\Big|=\Big|\alpha_n\cdot\sigma_n-\alpha_{m+1}\cdot\sigma_m+\sum_{k=m+1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\sigma_k\Big|\le$$

$$\le\alpha_n\cdot|\sigma_n|+\alpha_{m+1}\cdot|\sigma_m|+\sum_{k=m+1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\cdot|\sigma_k|\le$$

$$\le B\cdot\Big[\alpha_n+\alpha_{m+1}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})\Big]=2B\cdot\alpha_{m+1}.$$

Из приведённой оценки сразу видно, что $\{S_m\}$ сходится в себе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если S – сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$, то для неё справедлива оценка $|S| \leq B \cdot \alpha_1$ – она легко получается предельным переходом из $|S_m| \leq B \cdot \alpha_1$, а это было установлено в доказательстве теоремы. В частности, если $u_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathcal{N})$ и $0 \leq \sigma_m \leq B$, то $0 \leq S \leq B \cdot \alpha_1$.

Применим эту теорему к случаю $u_k = (-1)^{k-1}$. Ясно, что σ_m ограничены единицей, поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \alpha_k$, у которого $\{\alpha_k\}$ монотонно убывает и $\lim\limits_{k \to \infty} \alpha_k = 0$, сходится, причём $0 \leq S \leq \alpha_1$.

Это следствие называют теоремой Лейбница.

7.3. Докажем ещё один полезный факт.

I. (Лемма о разбиении положительного числа.) Пусть Ξ – не более чем счётное множество и ε – строго положительное число. Тогда существует числовое семейство $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ такое, что

1) $\varepsilon_\xi > 0$ при всех $\xi \in \Xi$;

2) $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi = \varepsilon$.

Если Ξ конечно и n – число его элементов, то можно положить $\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon}{n}$, и получим требуемое семейство. Рассмотрим случай бесконечного Ξ. Обозначим через φ взаимно однозначное отображение Ξ на $\mathcal{N}$ (иначе говоря, перенумеруем элементы Ξ) и положим $\varepsilon_\xi = \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(\xi)}}$. Первое условие леммы, очевидно, выполнено. Чтобы найти $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \varepsilon_\xi$, воспользуемся I(5.3). Обозначим $\psi = \varphi^{-1}$, тогда

$$\sum_{\xi \in \Xi} \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(\xi)}} = \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{\varepsilon}{2^{\varphi(\varphi^{-1}(n))}} = \varepsilon \cdot \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{2^n} = \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon ,$$

поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Таким образом, $\{\varepsilon_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ удовлетворяет и второму условию.

7.4. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ – два абсолютно сходящихся ряда и S', S'' – их суммы. Поскольку $\{x_\lambda\}$, $\{y_\mu\}$ $(\lambda, \mu \in \mathcal{N})$ – суммируемые последовательности, то по П.6.2 $S = S' \cdot S'' = \sum\limits_{\lambda \in \mathcal{N}} x_\lambda \cdot \sum\limits_{\mu \in \mathcal{N}} y_\mu = \sum\limits_{(\lambda,\mu) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}} x_\lambda \cdot y_\mu$. Обозначим $\Xi_\nu = \{(\lambda,\mu) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} : \lambda + \mu = \nu, \quad \nu \in \mathcal{N}\}$.

Ясно, что $\{\Xi_\nu\}$ $(\nu \in \mathcal{N})$ – система непересекающихся подмножеств в $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ такая, что $\bigcup\limits_{\nu \in \mathcal{N}} \Xi_\nu = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. По теореме I (5.2) имеем $\sum\limits_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_\lambda \cdot y_\mu = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} \Big(\sum\limits_{(\lambda,\mu)\in\Sigma_\nu} x_\lambda y_\mu\Big) = \sum\limits_{\nu\in\mathbb{N}} u_\nu$, где $u_\nu = \sum\limits_{(\lambda,\mu)\in\Sigma_\nu} x_\lambda y_\mu$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **произведением** рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$. Заметим, что мы доказали такое предложение:

I. Произведение абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходится.

§ 8. Степенные ряды

8.I. Пусть z – любое комплексное число и $\{a_n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ – числовая последовательность. Обозначим $x_n = a_n \cdot z^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ называют **степенным**, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда. Оказывается, можно указать сравнительно простую область на плоскости, для точек z которой имеет место сходимость ряда $\sum a_n z^n$.

ТЕОРЕМА I (8.2) Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – степенной ряд. Тогда существует единственное число R, $0 \leq R \leq +\infty$, называемое радиусом сходимости данного ряда, и обладающее тем свойством, что если $|z| < R$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ абсолютно сходится, а при $|z| > R$ – расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся признаком Коши сходимости числового ряда. Составим $c_n = \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \sqrt[n]{|a_n|}$ и обозначим $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Если $|z| < R$, то $|z| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ и, по признаку Коши, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ абсолютно сходится. Если $|z| > R$, тот же признак даёт расходимость ряда, и существование требуемого числа доказано.

Предположим, что нашлось два числа R_1, R_2, удовлетворяющих всем условиям теоремы. Если $R_1 < R_2$, то для точек z из множества $\{z\in\mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2\}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ сходится и расходится одновременно, чего быть не может, и, тем самым, радиус круга сходимости единствен.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае ничего нельзя сказать о поведении ряда при $|z| = R$.

Рассмотрим два степенных ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ и образуем новый ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$, где $u_k = \sum\limits_{\lambda=0}^{k} a_\lambda z^\lambda \cdot b_{k-\lambda} z^{k-\lambda} = z^k \cdot \sum\limits_{\lambda=0}^{k} a_\lambda b_{k-\lambda}$.

Обозначив $c_k=\sum_{\lambda=0}^{k} a_\lambda b_{k-\lambda}$, убедимся, что произведение двух степенных рядов – снова степенной ряд с коэффициентами c_k. Если R', R'' – радиусы сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, то при $|z| < R' \wedge R''$ оба ряда сходятся абсолютно, тем самым и $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ также абсолютно сходится. Итак, радиус сходимости произведения степенных рядов не меньше, чем $R' \wedge R''$.

8.2. Рассмотрим несколько примеров. Образуем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Признак Даламбера даёт абсолютную сходимость этого ряда при любом $z \in \mathbb{C}$. Введём специальные обозначения для его суммы $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Таким образом получаем функцию, называемую экспонентой, определённую на всём $\mathbb{C}$ и со значениями тоже в $\mathbb{C}$. Определим ещё две функции

$$\sin : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad \cos : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

(сходимость соответствующих рядов легко получить воспользовавшись признаком Даламбера) и выясним некоторые элементарные свойства этих функций:

[0] $\qquad \exp(z_1+z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2 \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}).$

Так как произведение в правой части сходится, надо лишь его немного преобразовать. Рассмотрим коэффициенты $u_k = \sum_{\lambda=0}^{k} \frac{z_1^\lambda}{\lambda!} \cdot \frac{z_2^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}$. Можно по индукции доказать (предлагаем проделать), что $u_k = \frac{(z_1+z_2)^k}{k!}$, а это и требовалось.

[1] $\qquad \cos z + i \sin z = \exp(iz).$

[2] $\qquad \cos z - i \sin z = \exp(-iz).$

Эти равенства получаются непосредственно из определений. Сложив последние равенства, получим

[3] $\qquad \cos z = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2},$

а взяв разность –

[4] $\qquad \sin z = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i},$

и наконец, из [0] имеем

[5] $\qquad \exp(-iz)\cdot\exp(iz) = \exp(0) = 1.$

Отметим ещё несколько свойств функций $\sin$ и $\cos$. Рассмотрим

$\sin(z_1+z_2)$ $(z_1, z_2 \in \mathbb{C})$. Из [4] имеем

[5] $$\sin(z_1+z_2) = \frac{\exp(iz_1+iz_2)-\exp(-iz_1-iz_2)}{2i} = \frac{\exp(iz_1)\cdot\exp(iz_2)-\exp(-iz_1)\exp(-iz_2)}{2i} =$$

$$= \frac{\exp(iz_1)\cdot\exp(-iz_2)-\exp(-iz_1)\exp(-iz_2)+\exp(iz_1)\exp(iz_2)-\exp(-iz_1)\exp(iz_2)}{2\cdot 2i} +$$

$$+\frac{\exp(-iz_1)\exp(iz_2)+\exp(iz_1)\exp(iz_2)-\exp(-iz_1)\exp(-iz_2)-\exp(iz_1)\exp(-iz_2)}{2\cdot 2i} =$$

$$= \frac{\exp(iz_1)-\exp(-iz_1)}{2i}\cdot\frac{\exp(-iz_2)+\exp(iz_2)}{2} + \frac{\exp(-iz_1)+\exp(iz_1)}{2}\cdot\frac{\exp(iz_2)-\exp(-iz_2)}{2i} =$$

$= \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$.

Аналогично можно доказать

[6] $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$,

[7] $\sin z_1 - \sin z_2 = 2\cdot\sin\frac{z_1-z_2}{2}\cdot\cos\frac{z_1+z_2}{2}$,

[8] $\cos z_1 - \cos z_2 = -2\sin\frac{z_1-z_2}{2}\cdot\sin\frac{z_1+z_2}{2}$.

и некоторые другие формулы.

Докажем, что функция $\exp$ в нуль не обращается. В самом деле, предположим, что есть такое $z\in\mathbb{C}$, что $\exp(z)=0$. Тогда, в силу [0], $\exp(\frac{z}{2})=0, \dots, \exp(\frac{z}{2^n})=0$ $(n\in\mathbb{N})$, поэтому можно указать такую последовательность $\{z_n\}$, что $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\exp(z_n)=0$. Воспользовавшись определением экспоненты, имеем такую оценку:

$$|\exp(z)-1| \le \sum_{n=1}^{\infty}|z^n| = \frac{|z|}{1-|z|}$$

(если $|z|<1$). Так как $\lim\limits_{z\to 0}\frac{|z|}{1-|z|}=0$, получаем $\lim\limits_{z\to 0}\exp z=1$, в частности, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp(z_n)=1$ (где z_n – построенная последовательность). Но последний предел не может быть единицей, так как $\exp(z_n)=0$ $(n\in\mathbb{N})$, и получили противоречие.

Глава III. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ I. Равномерная сходимость последовательности непрерывных функций.

Во второй главе мы уже встречались с определением непрерывности числовой функции в точке прикосновения области её определения. Коротко напомним возникавшую ситуацию.

I.I. Предположим, что области определения и значений функции f лежат в числовых множествах. Обозначим, для краткости, через X область определения f и через Y - то числовое множество, в котором лежат значения f. Если x - точка прикосновения X, то в случае существования предела $\ell = \lim\limits_{\mathcal{U}_x} f$ (где $\mathcal{U}_x = \{U : U = V \cap X,$

$V \in \mathcal{H}_x$) мы говорили, что f непрерывна в x. Далее было замечено, что если $x \in X$, то $f(x) = \lim\limits_{\mathcal{U}_x} f$.

Для точек из X последнее равенство равносильно нашему определению непрерывности и зачастую его-то и принимают за определение непрерывности f в x. Но для точек прикосновения X, в нём не лежащих, такое равенство становится бессмысленным.

Заметим, что данное определение непрерывности годится и в том случае, когда значения f лежат в $\bar{R}$ - важно лишь, чтобы существовал соответствующий предел (возможно, бесконечный). Однако чаще всего рассматривается непрерывность конечнозначных функций. Мы, как правило, также будем исключать возможность бесконечных значений f (каждое нарушение этого правила будет отмечено). С учётом сказанного сделаем ещё одно замечание.

Так как $\mathcal{B}_\ell = \{B(\ell,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ и $\mathcal{B}_x = \{B(x,\delta) : \delta > 0\}$ являются

фундаментальными системами окрестностей точек ℓ и x, а в вопросах сходимости достаточно рассматривать окрестности из $\mathcal{B}_\ell$ и $\mathcal{B}_x$, определение непрерывности f в x можно записать в следующей широко используемой форме: функция f непрерывна в x – точке прикосновения X, если найдется $\ell \in Y$ такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ (зависящее от ε и x) такое, что $|f(y) - \ell| < \varepsilon$ для всех $y \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \delta$. Когда $x \in X$, то $\ell = f(x)$.
В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, непрерывность f в точках из её области определения и пользоваться наиболее удобной в возникающей ситуации формой определения непрерывности.

Из соответствующих результатов теории пределов можно сделать вывод о непрерывности суммы, произведения конечного числа функций в точках из пересечения их областей определения, и отношения двух функций в тех точках, где функция, стоящая в знаменателе, не обращается в нуль.

I. Рассмотрим функции f, g и пусть x_0 – точка прикосновения Ω_f, а $y_0 = f(x_0)$ – точка прикосновения Ω_g. Тогда если f, g непрерывны в x_0, y_0 соответственно, то $h = g \circ f$ непрерывна в x_0.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу непрерывности g найдётся такое $\eta > 0$, что $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ при $|y - y_0| < \eta$ и $y \in \Omega_g$.
С другой стороны, в силу непрерывности f, по η можно указать такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(x_0)| < \eta$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \in \Omega_f$.
А тогда $|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, $x \in \Omega_h$, то есть h непрерывна в x_0.

Функцию f, непрерывную во всех точках множества X_0, содержащегося в Ω_f, будем называть *непрерывной на* X_0. Если же f не является непрерывной на X_0, говорят, что она *разрывна* и точки x из X_0, где нарушается непрерывность f, называют *точками разрыва* функции f.

Обсудим ещё такой вопрос. Пусть функция f является сужением на Ω_f некоторой функции $\bar{f}$ с более широкой областью определения $\Omega_{\bar{f}}$ и пусть $\bar{f}$ непрерывна в некоторой точке x из Ω_f. Тогда f также непрерывна в x. А можно ли утверждать обратное, то есть следует ли из непрерывности f в x такое же свойство функции $\bar{f}$?

Вообще говоря, этого утверждать нельзя, однако если x есть внутренняя точка Ω_f относительно $\Omega_{\bar f}$ (это означает, что найдётся $V\in\mathcal{H}_x$ такая, что $V\cap\Omega_{\bar f}\subset\Omega_f$), то непрерывность f в x влечет непрерывность $\bar f$ в этой точке. Эти факты следуют непосредственно из определения непрерывности.

В качестве примеров непрерывных функций можно назвать целые рациональные функции, то есть имеющие вид $z\mapsto\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ и дробно рациональные - функции вида $z\mapsto\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big/\sum_{j=0}^{m} b_j z^j$ $\left(z\in\{y\in X:\sum_{j=0}^{m} b_j y^j\neq 0\}\right)$.

I.2. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ и допустим, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{f_n}\neq\emptyset$. Пусть $X\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{f_n}$. Предположив, что в каждой точке x из X существует $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, определим функцию $f:x\mapsto\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x\in X)$. Спрашивается, будет ли f непрерывна на X, если все f_n обладали этим свойством? Ответ на этот вопрос отрицателен - например, последовательность $\{x^n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ на множестве $[0,1]$ имеет своим пределом разрывную функцию

$f:x\mapsto\begin{cases}0,\text{если} & x<1\\ 1,\text{если} & x=1.\end{cases}$ Причина такого явления в том, что "скорость" сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ разная для разных x. Однако, потребовав более квалифицированной сходимости $\{f_n\}$ к f, можно добиться того, что f станет непрерывной (если, конечно, все f_n были непрерывны).

Пусть A - некоторое подмножество в $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{f_n}$ и f - функция, область определения которой содержит A. Говорят, что $\{f_n\}$ с х о д и т с я р а в н о м е р н о к f на A и обозначают $f_n\rightrightarrows f$, если последовательность $\{\rho_n\}$, $\rho_n=\sup\{|f(x)-f_n(x)|:x\in A\}$ сходится к нулю.

Заметим, что из равномерной сходимости f_n к f на A следует сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в каждой точке x из A. Это нетрудно понять, если учесть, что $|f(x)-f_n(x)|\leq\rho_n$ $(x\in A)$ и $\lim_{n\to\infty}\rho_n=0$.

Укажем еще одно определение равномерной сходимости, равносильное данному. Последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на A к f, если для всякого $\varepsilon>0$ можно указать такое $N\in\mathbb{N}$ (зависящее только от ε), что $|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$ для $n\geqslant N$ и любого $x\in A$. Здесь легко проследить "квалификацию" равномерной сходимости по сравнению со сходимостью в каждой точке. Она выражается в том, что при равномерной сходимости N никак не зависит от точек из A, то есть оно в равной мере применимо в любой точке из A.

I. (Критерий Коши.) Последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на A в том и только том случае, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $n\in\mathbb{N}$, что $|f_n(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ при $m,n\geq N$ и любом $x\in A$.

Действительно, пусть $f_n \rightrightarrows f$ на A. Тогда по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $n\in\mathbb{N}$, что $|f(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$ для $n\geq N$ и любого x из A. В силу неравенства $|f_n(x)-f_m(x)|\leq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|$ имеем $|f_n(x)-f_m(x)|\leq 2\varepsilon$ для $m,n\geq N$ и любого x из A.

Обратно, поскольку $\{f_n(x)\}$ сходится в себе при любом x из A, то, по критерию Коши (теорема 3(4.2)) существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x\in A)$. Определим на A функцию $f: x\longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и докажем, что $f_n \rightrightarrows f$. По $\varepsilon>0$ выберем N так, что при $m,n\geq N$ и любом $x\in A$ выполнено $|f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$. Переходя в последнем равенстве к пределу по m, получаем $|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ при любом $n\geq N$ и любом x из A. Тем самым $f_n \rightrightarrows f$ на A.

ЗАМЕЧАНИЕ. Последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдётся $N\in\mathbb{N}$ такое, что $\rho_{m,n}=\sup\limits_{x\in A}|f_m(x)-f_n(x)|\leq\varepsilon$ при $m,n\geq N$.

ТЕОРЕМА I(I.3) (Стокс–Зайдель). Рассмотрим последовательность $\{f_n\}$ такую, что $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{f_n}\neq\varnothing$ и пусть X – некоторое подмножество в $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\Omega_{f_n}$. Предположим, что в каждой точке x из X существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и обозначим $f: x\longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x\in X)$. Пусть в некоторой точке x_0 из X все f_n непрерывны и существует $V\in\mathcal{H}_{x_0}$ такая, что на $A=V\cap X$ последовательность $\{f_n\}$ сходится к f равномерно. Тогда f непрерывна в x_0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим разность

$$|f(x)-f(x_0)|\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|.$$

Так как $f_n \rightrightarrows f$ на A, по любому $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для $n\geq N$ и любого $x\in A$. Взяв некоторое $n\geq N$, вследствие непрерывности f_n в x_0 по ε можно найти такой содержащийся в V шар $B(x_0,\delta_n)$, что $|f_n(x)-f_n(x_0)|<\varepsilon$ для $x\in B(x_0,\delta_n)\cap X$. Таким образом, $|f(x)-f(x_0)|<3\varepsilon$ при $x\in B(x_0,\delta_n)\cap X$ и, в силу произвольности

ε, функция f непрерывна в x_0.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно заметить, что теорема верна и для семейств $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ функций, где Ξ – произвольное фильтрующееся по возрастанию множество.

Рассмотрим последовательность функций $\{f_n\}$ с общей областью определения X и образуем последовательность $\{S_n\}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Если в каждой точке x некоторого подмножества X_0 в X существует конечный $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, то говорят, что (функциональный) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится на X_0, а функцию $S: x \mapsto \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ называют суммой ряда. Если же на некотором подмножестве A в X_0 имеет место $S_n \rightrightarrows S$, то говорят, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к S равномерно на A. В случае сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ на некотором B, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ называют абсолютно сходящимся на B.

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ можно указать такой абсолютно сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, что на некотором множестве C имеет место $|f_n| \le |\alpha_n|$ $(n \in \mathbb{N})$, то говорят, что ряд $\sum f_n$ равномерно ограничен на C.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ составлен из непрерывных на X функций и равномерно ограничен на некотором подмножестве C в X_0. Тогда S непрерывна на C.

Действительно, пусть $x \in C$ и V – любая окрестность точки x. Поскольку $\mathcal{D} = V \cap C \subset C$, а для точек x из C имеем $|f_n(x)| \le |\alpha_n|$, то

$$|S_n(x) - S(x)| = \Big|\sum_{\ell=n+1}^{\infty} f_\ell(x)\Big| \le \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |f_\ell(x)| \le \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |\alpha_\ell|$$

и $\sup_{x\in C} |S_n(x) - S(x)| \le \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |\alpha_\ell|$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$ сходится, то последовательность $\{\beta_n\}$, $\beta_n = \sum_{\ell=n+1}^{\infty} |\alpha_\ell|$ сходится к нулю, поэтому $S_n \rightrightarrows S$ на $\mathcal{D}$, тем самым S непрерывна в x.

2. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ $(x \in \mathbb{C})$ с ненулевым радиусом R круга сходимости. Сумма $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ этого ряда непрерывна в круге $\{x : |x| < R\}$.

В самом деле, в любом замкнутом круге $\{x : |x| \le r\}$, где $r < R$, имеем оценку $|a_n x^n| \le |a_n| \cdot r^n$, и поскольку $\sum |a_n| \cdot r^n$ сходится, то f непрерывна в любом замкнутом круге с центром в 0 и радиусом меньше R. Осталось заметить, что $B(0,R) =$

$= \bigcup\limits_{0<r<R} \bar{B}(0,r)$, и можно заключить справедливость высказанного факта.

Аналогично можно доказать, что сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$ с ненулевым радиусом сходимости, непрерывна в круге сходимости.

§ 2. Непрерывность вещественных функций на числовой прямой

В этом параграфе будут рассмотрены свойства непрерывных функций, области определения и значений которых лежат в (расширенной) числовой прямой.

2.I. ТЕОРЕМА I(2.3) (Коши). Пусть на замкнутом промежутке+) $[a,b]$ задана непрерывная функция f. Обозначим $f(a)=A$, $f(b)=B$ и предположим, что $A<B$. Тогда для любого $C\in[A,B]$ найдётся $c\in[a,b]$ такое, что $f(c)=C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество $E=\{x\in[a,b] : f(x)\leq C\}$. Оно непусто (например, $a\in E$). Обозначим $c=\sup E$ и докажем, что $f(c)=C$. Заметим прежде всего, что если $C=B$, то $c=b$, а если $C<B$, то $c<b$ и $c\in\mathbb{R}$. Допустим, что $f(c)\neq C$ и рассмотрим два случая (считая $C<B$).

I. Пусть $f(c)<C$. Тогда, в силу непрерывности f, теоремы о сохранении знака и того, что $c<b$, найдётся такое $\delta>0$, что $f(x)<C$ для $x\in B(c,\delta)$ и $B(c,\delta)\subset[a,b]$, а это противоречит определению c.

2. Если $f(c)>C$, то вновь можно указать такое $\delta>0$, что $f(x)>C$ в промежутке $[c-\delta, c]$, тем самым $\sup E\leq c-\delta$, и получили противоречие.

СЛЕДСТВИЕ. Если f непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)$, $f(b)$ имеют разные знаки, то найдётся $c\in[a,b]$ такая, что $f(c)=0$.

Так как $f(a)$, $f(b)$ разных знаков, можно взять $C=0$ и применить теорему Коши.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{D}$, подмножество в $\bar{\mathbb{R}}$, обладает тем свойством, что если $x,y\in\mathcal{D}$, $x\leq y$, то $[x,y]\subset\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{D}$ – промежуток,+) то есть $(\alpha,\beta)\subset\mathcal{D}\subset[\alpha,\beta]$, где $\alpha=\inf\mathcal{D}$, $\beta=\sup\mathcal{D}$.

+) Из рассмотрения не исключаются и несобственные промежутки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения α, β сразу выполнено включение $\mathcal{D} \subset [\alpha, \beta]$. Пусть $x \in (\alpha, \beta)$. Покажем, что $x \in \mathcal{D}$. Так как $\alpha < x < \beta$, то найдутся y, z из $\mathcal{D}$ такие, что $x < z \leq \beta$ и $\alpha \leq y < x$. Тогда $x \in [y, z]$, и поскольку $y, z \in \mathcal{D}$, то $[y, z] \subset \mathcal{D}$, откуда $x \in \mathcal{D}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2(2.3). Пусть функция f непрерывна в некотором промежутке X. Тогда $\mathcal{D} = f[X]$ – снова промежуток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{D}$ удовлетворяет условиям леммы, то есть если $A, B \in \mathcal{D}$, $A \leq B$, то $[A, B] \subset \mathcal{D}$. Пусть $A = f(a)$, $B = f(b)$ и предположим, что $a \leq b$. Возьмём любую точку C из $[A, B]$. По теореме Коши, в $[a, b]$ найдётся точка c такая, что $f(c) = C$. Так как a, b входят в X и X – промежуток, то $c \in X$ и $f(c) \in \mathcal{D}$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Промежуток $\mathcal{D}$ может оказаться и несобственным, даже если X конечен (привести соответствующий пример).

ТЕОРЕМА 3(2.3) (Вейерштрасс). Пусть $X = [a, b]$ – замкнутый конечный промежуток и f – непрерывная на X функция со значениями в $\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{D} = f[X]$ – снова замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2, $\mathcal{D}$ является промежутком. Требуется лишь показать, что он замкнут, то есть $\sup \mathcal{D} \in \mathcal{D}$ и $\inf \mathcal{D} \in \mathcal{D}$. Последнее же означает, что в X найдутся по крайней мере две точки x_1, x_2 такие, что $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ для всех x из X.

Обозначим $E = \{x \in [a, b] : f(x) \geq f(y)\ ,\ y \in [a, x]\}$. Во-первых, E не пусто, поскольку $a \in E$, и, во-вторых, ограничено, ибо $E \subset [a, b]$. Поэтому $c = \sup E$ конечно, лежит в $[a, b]$, в точке c функция f определена и непрерывна. Докажем, что $c \in E$. Предположим противное, то есть $c \bar{\in} E$. Тогда в промежутке $[a, c)$ найдётся точка y_0, для которой $f(c) < f(y_0)$, $c \neq a$, так как $a \in E$, поэтому промежуток $[a, c)$ не пуст. Возьмём $\varepsilon > 0$ такое, что $f(c) < f(y_0) - \varepsilon$. В силу непрерывности f можно указать такой замкнутый шар $\bar{B}(c, \delta)$, для точек которого остаётся справедливым неравенство $f(x) < f(y_0) - \varepsilon$ $(x \in \bar{B}(c, \delta))$. Заметим, что $y_0 < c - \delta$. Далее, поскольку $c = \sup E$ и c не входит в E, найдётся такое x из E, что $c - \delta \leq x < c$. По определению E имеем $f(y_0) \leq f(x)$, ибо $y_0 \in [a, x]$. С другой стороны, $f(y_0) > f(x) + \varepsilon$, откуда $f(x) + \varepsilon < f(x)$ – получили противоречие.

Докажем теперь, что $f(x) \leq f(c)$ для всех x из $[a,b]$. Пусть это неверно, то есть найдётся $z \in [a,b]$, в которой $f(z) > f(c)$. Возьмём некоторое ε, лежащее строго между 0 и $f(z)-f(c)$ и рассмотрим множество $G=\{x \in [a,b] : f(x) \geqslant f(c)+\varepsilon\}$. Оно не пусто, так как $z \in G$. Обозначим $c'=\inf G$. Можно доказать (аналогично I-й части доказательства), что $c' \in G$, то есть $f(c') \geqslant f(c)+\varepsilon$. Точка c' лежит строго справа от c ибо $c \in E$. Если взять $y<c'$, то $y \bar{\in} G$ в силу определения c'. А тогда $f(y)<f(c)+\varepsilon<f(c')$ для всех $y \in [a,c']$. Тем самым $c' \in E$ и $c' \leq c$. Но, как было замечено, $c'>c$. Полученное противоречие завершает доказательство той части теоремы, где речь идёт о принадлежности $\mathcal{D}$ числа $\sup \mathcal{D}$. Как читатель, вероятно, уже догадался, оставшуюся часть теоремы мы предлагаем ему доказать самостоятельно.

СЛЕДСТВИЯ. I. Непрерывная на замкнутом конечном промежутке функция достигает наибольшего и наименьшего значений.

2. Непрерывная на замкнутом конечном промежутке функция ограничена.

2.2. Заметим, что свойство функции переводить промежуток в промежуток, будучи необходимым для её непрерывности, вообще говоря, не является достаточным. В следующей теореме, однако, указан класс функций, в котором это свойство также и достаточно.

ТЕОРЕМА 4(2.3). Пусть f – определённая на промежутке X монотонная функция. Тогда если $\mathcal{D}=f[X]$ – также промежуток, то f непрерывна на X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что f возрастает (для убывающей доказывается аналогично). Пусть $x_0 \in X$, $y_0=f(x_0) \in \mathcal{D}$, и предположим, что y_0 не совпадает с концами $\mathcal{D}$ (тем самым $y_0 \in \mathbb{R}$). Так как $\mathcal{D}$ – промежуток, можно найти такое $\varepsilon>0$, что $y_0-\varepsilon$, $y_0+\varepsilon$ входят в $\mathcal{D}$. Тогда в X найдутся x', x'', для которых $f(x')=y_0-\varepsilon$, $f(x'')=y_0+\varepsilon$. При этом, в силу возрастания f, имеем $x'<x_0<x''$, и промежуток $U=[x',x'']$ – окрестность x_0, содержащаяся в X. Если теперь $x \in U$, то

$$f(x_0)-\varepsilon=f(x') \leq f(x) \leq f(x'')=f(x_0)+\varepsilon,$$

откуда $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in U$. Таким образом, $f(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и f непрерывна в x_0.

В случае совпадения y_0 с одним из концов $\mathcal{D}$, доказательство проводится аналогично с очевидными изменениями.

ТЕОРЕМА 5(2.3). Пусть на промежутке X задана непрерывная строго монотонная функция f. Тогда f взаимно однозначна и обратная ей функция g с областью определения $\mathcal{D}=\Delta_f$ непрерывна и строго монотонна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай строго возрастающей функции. Она взаимно однозначна, поскольку если x', x'' – различные точки из X, то, считая для определённости, $x'<x''$, будем иметь $f(x')<f(x'')$. Покажем, что g строго возрастает. Действительно, возьмём две точки y', y'' из $\mathcal{D}$ такие, что $y'<y''$, и предположим, что $g(y')\geqslant g(y'')$. Тогда $x'=g(y')$ и $x''=g(y'')$ входят в Ω_f. По предположению, $x'\geqslant x''$, а в силу монотонности f, имеем $f(x')\geqslant f(x'')$. Осталось заметить, что $f(x')=y'$, $f(x'')=y''$, и получили противоречие.

Итак, g – строго возрастает и промежуток $\mathcal{D}$ переводит в промежуток X. По теореме 4 она непрерывна.

Если f сторого убывает, доказательство проводится аналогично.

2.3. Рассмотрим непрерывную функцию со значениями в $\mathbb{C}$. Пусть E – некоторое подмножество в Ω_f. Число

$$\omega(f,E)=\sup\{|f(x')-f(x'')| : (x',x'')\in E\times E\}$$

назовём **колебанием** функции f на множестве E.

ТЕОРЕМА 6(2.3). Пусть f – непрерывная функция на замкнутом конечном промежутке $[a,b]$ числовой прямой, принимающая значения в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $n\in\mathbb{N}$, что $\omega(f,\Delta_k^n)\leqslant\varepsilon$, где

$$\Delta_k^n=\left[a+\frac{k-1}{n}(b-a),\quad a+\frac{k}{n}(b-a)\right]\qquad (k=1,2,\dots,n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что для некоторого ε не нашлось n, удовлетворяющего условиям теоремы. Тем самым для любого $n\in\mathbb{N}$ найдётся k между 1 и n такое, что $\omega(f,\Delta_k^n)>\varepsilon$, то есть в промежутке Δ_k^n есть пара точек x_n', x_n'', для которых $|f(x_n')-f(x_n'')|>\varepsilon$. Выясним, какими свойствами обладают последовательности $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$. Во-первых, x_n', x_n'' входят в Δ_k^n, поэтому $|x_n'-x_n''|<\frac{b-a}{n}$. Во-вторых, x_n', $x_n''\in[a,b]$, и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, из них можно выделить сходящиеся подпоследо-

вательности $\{x'_{n_k}\}$, $\{x''_{n_k}\}$. Обозначим $x_0=\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}$. Этот элемент входит в $[a,b]$ в силу замкнутости промежутка. Докажем, что из $\{x''_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к x_0. В самом деле, рассмотрим $\{x''_{n_k}\}$ и запишем члены этой последовательности в виде $x''_{n_k}=x'_{n_k}+(x''_{n_k}-x'_{n_k})$. Как было отмечено, $|x'_{n_k}-x''_{n_k}|\le\frac{b-a}{n_k}$, а поскольку последовательность $\{n_k\}$ индексов возрастает, то $n_k\geqslant k$ и $|x'_{n_k}-x''_{n_k}|\le\frac{b-a}{k}$.
Отсюда $\lim\limits_{k\to\infty}(x''_{n_k}-x'_{n_k})=0$. Осталось воспользоваться теоремой о пределе суммы последовательностей, и мы получим, что $\lim\limits_{k\to\infty} x'_{n_k}=x_0$.

Так как f непрерывна, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k})=f(x_0)$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k}))=0$, а с другой стороны, $|f(x'_{n_k})-f(x''_{n_k})|>\varepsilon$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Пусть $\{\Delta_k\}$ – конечное семейство непересекающихся промежутков такое, что $\bigcup\limits_k \Delta_k=[a,b]$. Функция φ, заданная на $[a,b]$, называется к у с о ч н о - п о с т о я н н о й, если она постоянна на каждом из соответствующих открытых промежутков Δ_k.

СЛЕДСТВИЯ. I. Если f удовлетворяет условиям доказанной теоремы, то для любого $\varepsilon>0$ найдётся такая кусочно-постоянная функция φ, что $|f(x)-\varphi(x)|\le\varepsilon$ $(x\in[a,b])$.

По $\varepsilon>0$ найдём такое $n\in\mathbb{N}$, что $\omega(f,\Delta_k^n)\le\varepsilon$ и определим функцию φ следующим образом: выберем внутри каждого из Δ_k^n по точке c_k и, если точка x попала внутрь некоторого Δ_k^n, положим $\varphi(x)=c_k$, в концах же промежутков будем считать φ, совпадающей с f. Так определённая функция φ кусочно-постоянна. Требуемое свойство $|f(x)-\varphi(x)|\le\varepsilon$ обеспечивается построением функции φ.

2. Для любой непрерывной на замкнутом конечном промежутке функции можно указать равномерно сходящуюся к ней на этом промежутке последовательность кусочно-постоянных функций.

В справедливости этого факта легко убедиться используя предыдущее следствие.

§ 3. Элементарные функции

В этом параграфе будет создан некоторый запас функций, используя которые можно будет иллюстрировать работу и применение аппарата дифференцирования и интегрирования, развиваемых в следующей главе.

3.1. Нами уже были рассмотрены целая и рациональная функции, то есть получаемые из тождественного отображения $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$ с помощью операций сложения, умножения, деления соответственно.

Рассмотрим функцию $f: x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$; на промежутке $[0;\infty]$ она строго возрастает как произведение строго возрастающих положительных функций. По теореме 5(2.3), существует обратная к ней функция g, заданная на $\Delta_f = [0,\infty]$. Значения g заполняют весь промежуток $[0,+\infty]$, поэтому она непрерывна. Эту функцию называют корнем n-й степени и обозначают $g: y \mapsto \sqrt[n]{y}$ (или $g(y) = y^{1/n}$). Из свойств этой функции отметим такое: $\sqrt[n]{y \cdot z} = \sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z}$ (или $g(yz) = g(y) \cdot g(z)$).

Пока мы рассмотрели функцию g лишь для положительных n. Если $n < 0$, то $f: x \mapsto x^n$ определена на $(0,+\infty)$, строго убывает и $\Delta_f = (0,+\infty)$. Таким образом, обратная к ней – существует, непрерывна и строго убывает.

Можно определить теперь степенную функцию с рациональным показателем $r = \frac{p}{q}$ так: $x^r = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$ $(x \in (0,+\infty))$. Для неё сохраняется свойство $(x \cdot y)^r = x^r \cdot y^r$. Иными словами можно сказать, что x^r отображает $(0,+\infty)$ на себя и сохраняет произведение. Иногда ещё говорят, что $f: x \mapsto x^r$ есть изоморфизм группы $(0,+\infty)$ по умножению на себя (или автоморфизм).

3.2. Рассмотрим две группы: $\mathbb{R}$ с операцией сложения и $(0,+\infty)$ с операцией умножения, и займёмся изучением гомоморфизмов первой группы во вторую, то есть таких отображений $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$, что $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ $(x,y \in \mathbb{R})$. Если на f не накладывать никаких дополнительных условий, то таких гомоморфизмов чрезвычайно много. Однако, ограничиваясь лишь непрерывными, мы заметно сужаем выделенный класс, наложение ещё одного требования сводит его к единственному элементу.

ТЕОРЕМА I(3.3). Каково бы ни было $a>0$, существует единственная непрерывная функция f на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

I) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \qquad (x,y\in\mathbb{R})$;

2) $f(1)=a$.

Эта функция называется показательной с основанием a.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция, удовлетворяющая условиям теоремы, существует и докажем её единственность. Отметим ряд свойств этой функции, вытекающих из первого и второго условий теоремы.

I. $f(0)=1$. Действительно, положим $x=0,\ y=1$, тогда $f(0+1)=f(0)\cdot f(1)$, откуда $a=f(0)\cdot a$ и $f(0)=1$.

2. Докажем, что f не принимает нулевых значений. Предположим, что всё же нашлась такая точка x в $\mathbb{R}$, что $f(x)=0$. Тогда поскольку $f(0)=f(x-x)=f(x)\cdot f(-x)$, имеем $f(0)=0$, а с другой стороны было показано, что $f(0)=1$. Заметим заодно, что $f(x)=1/f(-x)\ (x\in\mathbb{R})$.

3. Докажем, что для n из $\mathbb{N}$, x из $\mathbb{R}$ справедливо $f(nx)=[f(x)]^n$ (*). Доказательство проведём по индукции. При $n=1$ равенство (*) очевидно. Пусть оно верно при некотором n из $\mathbb{N}$. Тогда $f((n+1)x)=f(x)\cdot f(nx)=f(x)\cdot[f(x)]^n=[f(x)]^{n+1}$, что и требовалось.

Из (*), между прочим, следует, что $f(x)>0\ (x\in\mathbb{R})$. В самом деле, $f(x)=[f(\frac{x}{2})]^2\geqslant 0$ и, поскольку $f(x)\neq 0$, получаем, что $f(x)>0$ для любого x из $\mathbb{R}$.

4. Покажем, что $f(t)=a^t$ для любого рационального t. Из свойства 3, взяв $x=1$, имеем $f(n)=a^n\ (n\in\mathbb{N})$. Если n — целое отрицательное число, то $f(n)=f(-(-n))=\frac{1}{f(-n)}=\frac{1}{a^{-n}}=a^n$, то есть равенство $f(n)=a^n$ выполнено для любого целого n.

Рассмотрим рациональные числа вида $x=\frac{1}{q}$, где $q\in\mathbb{N}$. Тогда $[f(\frac{1}{q})]^q=f(1)=a$ и, поскольку $a>0$, то $f(\frac{1}{q})=a^{1/q}$, или $f(x)=a^x$.

Пусть $t=\frac{p}{q}$. Тогда $a^p=f(p)=[f(\frac{p}{q})]^q$, откуда $a^{p/q}=f(\frac{p}{q})$, что и требовалось.

При любом рациональном положительном r имеем $f(r)>1$, если $a>1$ и $f(r)<1$, если $a<1$. Это свойство непосредственно следует из свойств монотонности показательной функции.

Займёмся теперь доказательством единственности. Предположим, что кроме f есть еще одна функция g, удовлетворяющая всем условиям теоремы. Рассмотрим разность $h=f-g$. Поскольку функция g будет обладать всеми отмеченными свойствами функции f, то h в рациональных точках обращается в нуль. Докажем, что $h(x)=0$ для всех $x\in R$. Предположим противное, и пусть x_0 – та точка из R, в которой $h(x_0)\neq 0$. Так как h непрерывна, найдётся шар $B(x_0,\delta)$, в точках которого h в нуль не обращается. С другой стороны, в $B(x_0,\delta)$ имеются и рациональные числа, в которых h, по доказанному, равна 0. Полученное противоречие доказывает несостоятельность нашего предположения, то есть $f(x)-g(x)=0$ при всех $x\in R$. Единственность доказана.

Приступая к доказательству существования, заметим прежде всего, что достаточно его провести для случая $a>1$. Если это будет доказано, то для $a<1$ просто положим $f(x)=\frac{1}{g(x)}$, где g – такая функция, что $g(0)=\frac{1}{a}$. Легко проверить, что f обладает всеми требуемыми свойствами.

В процессе доказательства единственности было установлено существование функции φ, определённой в рациональных точках и удовлетворяющей обоим условиям теоремы.

Обозначим $Q_x=\{t: t\leq x,\ t$ – рационально$\}$, $S_x=\{\tau: \tau\geq x,\ \tau$ – рационально$\}$ и для x из R положим $f(x)=\sup\limits_{t\in Q_x}\varphi(t)$. Если x – рационально, то $f(x)=\varphi(x)$. Кроме того, для $x_1<x_2$ $(x_1,x_2\in R)$ имеем $Q_{x_1}\subset Q_{x_2}$, и монотонное возрастание φ даёт такое же свойство функции f. Будем доказывать, что так определённая функция f удовлетворяет всем условиям теоремы.

Для доказательства непрерывности f нам понадобится такой факт: $f(x)=\inf\limits_{\tau\in S_x}\varphi(\tau)$ $(x\in R)$. Обозначим $\bar f(x)=\inf\limits_{\tau\in S_x}\varphi(\tau)$. Так как для любых $t\in Q_x$, $\tau\in S_x$ имеем $t\leq\tau$, то $\varphi(t)\leq\varphi(\tau)$, поэтому $f(x)\leq\bar f(x)$. Оценим сверху разность $\bar f(x)-f(x)$. Вначале установим одно вспомогательное неравенство: $a^{1/n}-1\leq\frac{a-1}{n}$ для любых $a\in R$ $(a>1)$, $n\in N$. Действительно, по индукции легко доказать, что для любого неотрицательного вещественного α и целого положительного n справедливо $1+n\alpha\leq(1+\alpha)^n$. Отсюда, подставив вместо α число $\frac{\alpha}{n}$, имеем $1+\alpha\leq(1+\frac{\alpha}{n})^n$ и, воспользовавшись монотонностью степенной функции, $(1+\alpha)^{1/n}\leq 1+\frac{\alpha}{n}$. Записав теперь a в виде $a=1+\alpha$ $(\alpha\geq 0)$, получаем $a^{1/n}\leq 1+\frac{a-1}{n}$, что и требовалось.

Возьмём два рациональных числа t, τ такие, что $t \le \tau \le t+\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ и проведём следующую оценку:

$$\varphi(\tau)-\varphi(t)=a^t(a^{\tau-t}-1) \le a^t \cdot (a^{1/n}-1) \le \varphi(t)\cdot\frac{a-1}{n}.$$

Теперь если t, τ таковы, что $x-\frac{1}{2n} \le t \le x \le \tau \le x+\frac{1}{2n}$, то из проведённой оценки получаем

$$0 \le \bar{f}(x)-f(x) \le \varphi(\tau)-\varphi(t) \le \varphi(t)\cdot\frac{a-1}{n} \le f(x)\cdot\frac{a-1}{n}$$

и, в силу произвольности n, $\bar{f}(x)-f(x)=0$, то есть $\bar{f}(x)=f(x)$.

Докажем ещё одно неравенство. Возьмём $n \in \mathbb{N}$ и вещественное δ из промежутка $(0, \frac{1}{2n})$ и докажем, что для любых x, x_0 из $\mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0| \le \delta$, справедливо $|f(x)-f(x_0)| \le f(x_0)\cdot\frac{a-1}{n}$. Рассмотрим два возможных случая: $x \le x_0$, $x_0 \le x$. В первом из них найдём два рациональных числа t, τ такие, что $x_0-\frac{1}{2n} \le t \le x \le x_0 \le \tau \le x_0+\frac{1}{2n}$. Так как в этом случае $f(x)-f(x_0)$ отрицательна, то

$$|f(x)-f(x_0)|=f(x_0)-f(x) \le \varphi(\tau)-\varphi(t) \le \varphi(t)\cdot\frac{a-1}{n} \le f(x_0)\cdot\frac{a-1}{n}.$$

Второй случай рассматривается аналогично.

Зададимся положительным числом ε и найдём такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(x_0)\cdot\frac{a-1}{n} \le \varepsilon$. Тогда если δ – любое число из промежутка $(0, \frac{1}{2n})$, то для точек x из шара $B(x_0, \delta)$ имеем $|f(x)-f(x_0)| \le f(x_0)\cdot\frac{a-1}{n} \le \varepsilon$. Непрерывность f доказана.

Так как второе условие теоремы, очевидно, выполнено, осталось доказать лишь, что f удовлетворяет первому. Если x, y рациональны, то, согласно определению f, имеем $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Пусть x, y – любые две точки из $\mathbb{R}$. В каждом из промежутков $[x, x+\frac{1}{n}]$, $[y, y+\frac{1}{n}]$ $(n \in \mathbb{N})$ выберем по рациональной точке t_n, τ_n соответственно. Полученные таким образом последовательности $\{t_n\}$, $\{\tau_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = x$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = y$. Так как t_n, τ_n рациональны, то $f(t_n+\tau_n)=f(t_n)\cdot f(\tau_n)$ и, воспользовавшись непрерывностью f и одним из свойств предела, получаем $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Теорема останется справедливой, если требование непрерывности заменить монотонностью.

2. Обычно обозначается $f(x)=a^x$ и первое условие теоремы выглядит так: $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$.

СЛЕДСТВИЯ. I. Пусть a, b – положительные вещественные числа и $k\in\mathbb{R}$. Тогда $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$, $(a^k)^x=a^{kx}$.

Действительно, рассмотрим функцию $h: x\mapsto a^x\cdot b^x$. Обозначим $c=a\cdot b$. Функция h непрерывна на $\mathbb{R}$ и для неё, очевидно, выполнены равенства $h(x+y)=h(x)\cdot h(y)$, $h(1)=c$. Согласно доказанной теореме, $h(x)=c^x$, откуда $a^x\cdot b^x=(a\cdot b)^x$.

Второе из требуемых соотношений доказывается аналогично рассмотрением функции $g: x\mapsto a^{kx}$.

2. Рассмотрим определённую в конце главы 2 главы функцию exp. Её сужение на $\mathbb{R}$ непрерывно, принимает вещественные значения и удовлетворяет условиям теоремы, причём во втором в качестве a фигурирует число $e=exp(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Таким образом, для всех вещественных x имеем $exp(x)=e^x$.

3. Пусть a – положительное вещественное число, не равное 1. Тогда a^x строго монотонна, непрерывна и определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$, поэтому существует обратная к ней, также непрерывная и строго монотонная функция, определённая на $(0, +\infty)$. Эту функцию называют л о г а р и ф м и ч е с к о й с о с н о в а н и е м a и обозначают $\log_a x$ $(x\in(0,+\infty))$. Если в качестве основания фигурирует число e, используют более короткое обозначение $\ln x$.

3.3. Во второй главе были введены тригонометрические функции

$$\sin: z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos: z\mapsto\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\qquad (z\in\mathbb{C})$$

и получены некоторые их свойства, вытекающие непосредственно из определения. Согласно следствию из теоремы Стокса-Зайделя, эти функции непрерывны во всей области определения.

Рассмотрим сужение их на $\mathbb{R}$ и оценим значения $\cos$, $\sin$ в концах интервала $[0,2]$ следующим образом:

$$1-\frac{x^2}{2}\leq\cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24};\quad x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\quad (x\in[0,2]).$$

Так как $\cos 0 = 1$, а $\cos 2 \le -\frac{1}{3} < 0$, по теореме Коши внутри промежутка $[0,2]$ есть точка θ, в которой $\cos\theta = 0$. Докажем, что такая точка в промежутке $[0,2]$ единственна. Для этого вначале найдём $\sin\theta$. Из формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ видно, что $\sin\theta$ может быть равен либо 1, либо -1. Но поскольку $\sin x \geqslant 0$ в $[0,2]$, то $\sin\theta = 1$. Далее, соотношения [5], [6] из 2.8 нам дают

$$\begin{aligned} \cos(x+\theta) &= \cos x \cdot \cos\theta - \sin x \cdot \sin\theta = -\sin x, \\ \sin(x+\theta) &= \sin x \cdot \cos\theta + \cos x \cdot \sin\theta = \cos x. \end{aligned} \qquad (*)$$

Осталось лишь заметить, что $\sin x < 0$ в промежутке $[-2,0)$, и первое из равенств $(*)$ показывает, что $\cos x > 0$ в промежутке $[\theta-2, \theta]$, поэтому других корней в промежутке $[0,\theta]$ функция $\cos$ не имеет.

Нетрудно заметить, что $\sin$ обращается в нуль в точках $0, 2\theta, \ldots, 2\theta n$, а $\cos$ – в точках $\theta, 3\theta, \ldots, (2n+1)\theta$ $(n \in \mathbb{Z})$, то есть корни этих функций расположены на числовой прямой на расстоянии 2θ. Это число обозначают, как правило, через π.

Напомним, что функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется периодической, если можно указать такое число $T > 0$, что $f(x+T) = f(x)$ для всех x из $\mathbb{R}$. Из равенств $(*)$ легко получаются такие: $\sin(x+2\pi) = \sin x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, поэтому функции $\sin, \cos$ – периодические с периодом 2π. Так как любое $y \in \mathbb{R}$ может быть представлено в виде $y = x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, где $x \in [0, 2\pi]$, при выяснении свойств функций $\sin$, $\cos$ можно ограничиться промежутком $[0, 2\pi)$.

Исследуем монотонность тригонометрических функций на промежутке $[0,2\pi)$. Разобьём его на четыре промежутка: $[0, \pi/2]$, $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ и рассмотрим разности $\sin x' - \sin x''$, $\cos x' - \cos x''$, когда x', x'' лежат в одном из выделенных промежутков. Пусть x', x'' лежат в $[0, \frac{\pi}{2}]$ и $x' > x''$. Тогда, в силу равенства $\sin x' - \sin x'' = 2\sin\frac{x'-x''}{2} \cdot \cos\frac{x'+x''}{2}$ (см. П.8.2, формула [7]), имеем $\sin x' - \sin x'' > 0$, поскольку $\frac{x'-x''}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\frac{x'+x''}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, а в этом промежутке $\sin, \cos$ строго положительны, то есть $\sin$ строго возрастает в промежутке $[0, \frac{\pi}{2}]$. Используя равенство [8] из П.8.2, можно убедиться в том, что $\cos$ строго убывает в этом промежутке.

Проводя аналогичные предыдущему рассуждения, можно показать, что тригонометрические функции обладают следующими свойствами монотонности:

в $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ функции $\sin, \cos$ строго убывают;

в $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ функция $\sin$ строго убывает, а $\cos$ - строго возрастает;

в $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ функции $\sin, \cos$ строго возрастают.

Используя выведенные свойства и периодичность тригонометрических функций, можно сказать, что $\sin$ является строго возрастающей в промежутках $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi]$ и строго убывающей - в $[-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi, \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbb{Z})$, а $\cos$ строго возрастает в промежутках $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi]$ и строго убывает - в $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Полученные свойства монотонности тригонометрических функций дают возможность определить обратные к сужениям этих функций на соответствующие промежутки. Именно, функцию, обратную к сужению $\sin$ на промежуток $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, обозначают $\arcsin$. При этом $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, монотонно возрастает и непрерывна. Аналогично, обратную к сужению $\cos$ на промежуток $[0,\pi]$ функцию обозначают $\arccos$, при этом $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ монотонно убывает и непрерывна. Понятно, что существуют обратные к сужениям $\sin, \cos$ и на другие промежутки. Выделение же конкретных промежутков исключительно дело договорённости.

Кроме рассмотренных тригонометрических функций можно определить, например, такие: $tg : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ $(\Omega_{tg} = \mathbb{R} \setminus \{x : \cos x = 0\})$,

$$ctg : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\Omega_{ctg} = \mathbb{R} \setminus \{x : \sin x = 0\}).$$

Исследование этих функций может быть проведено на основании полученных свойств функций $\sin, \cos$. Полагая, что читатель уже в достаточной мере владеет развитым здесь аппаратом, предоставляем ему возможность проявить свои знания.

Глава IУ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ I. Определение и общие свойства дифференциала и производной

I.I. Рассмотрим функцию f, действующую из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$; и пусть x_0 – некоторая точка из Ω_f. Попытаемся приблизить значения функции f вблизи x_0 значениями функций, более или менее просто устроенных, в надежде установить какие-либо свойства функции f. Точный смысл слов "приблизить" и "просто устроенных" будет выяснен по ходу изложения.

Все рассмотрения будем проводить для точки x_0, являющейся точкой сгущения Ω_f (иначе трудно говорить о приближении). Более того, ради простоты, предположим, что Ω_f – промежуток (принципиальная сторона всех построений от такого допущения не пострадает).

Одни из самых простых функций – постоянные. Поэтому для начала будем искать такую функцию $\varphi: x \mapsto c$, чтобы разность $\xi(x) = f(x) - \varphi(x)$ удовлетворяла условию $\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} \xi(x) = 0$. Конечно, не для всякой f можно подобрать такую φ, но если это удалось сделать, то говорят, что f приближается в точке x_0 постоянной функцией φ. Естественно считать, что самое точное приближение – в самой точке x_0, то есть что $\xi(x_0) = 0$. Нетрудно понять, что в этом случае непрерывные в точке x_0 и только они приближаются в x_0 постоянной функцией вида $\varphi: x \mapsto f(x_0)$.

Итак, приближение постоянными функциями ничего нового по сравнению с непрерывностью не даёт. Рассмотрим поэтому более обширный класс, именно функции вида $\psi: x \mapsto f(x_0) + B(x - x_0)$, но ограничимся сначала прежним характером приближения, то есть лишь требованием $\lim\limits_{\mathcal{H}_{x_0}} (f(x) - \psi(x)) = 0$ (I). Тогда оказывается, что не имело смысла расширять запас используемых функций - в самом деле, ничего нового, кроме свойства непрерывности f в x_0, мы не получим, ибо всякая непрерывная в x_0 функция приближается функцией ψ, у которой $B=0$; обратно, если $\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} (f(x)-\psi(x))=0$, то $\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} f(x)=f(x_0)$ и f непрерывна в x_0. Можно заметить, что, в частности, коэффициент B при таком подходе к аппроксимации однозначно определить невозможно. Таким образом, возникла возможность говорить о приближении более "квалифицированном", чем прежнее. Более или менее разумный шаг в повышении качества приближения - потребовать дополнительно, чтобы разность $\eta(x)=f(x)-\psi(x)$ была мала по сравнению с $x-x_0$, точнее, чтобы

$$\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} \frac{\eta(x)}{x-x_0}=0. \qquad (2)$$

Если для функции f нашлась такая функция $\psi: x \mapsto f(x_0)+B(x-x_0)$, что выполнены условия (I),(2), говорят, что f д и ф ф е р е н ц и р у е м а в x, функцию $\eta \mapsto B\cdot\eta$ $(\eta \in \mathbb{R})$ называют д и ф ф е р е н ц и а л о м, а коэффициент B - п р о и з в о д н о й функции f в точке x_0. Для дифференциала и производной функции f в x_0 используют обозначения $df(x_0)$, $f'(x_0)$ (соответственно).

Непосредственно из определения следует, что дифференцируемая в x_0 функция непрерывна в этой точке - этот факт заложен в самой форме аппроксимирующей функции и требованиях аппроксимации. Однако обратное, как показывают совсем простые примеры, неверно, то есть не всякая непрерывная в x_0 функция дифференцируема в этой точке. Таким образом, расширив класс используемых для приближения функций и повысив "качество" приближения, мы оказались среди функций, более квалифицированных по сравнению с непрерывными.

Займёмся рассмотрением элементарных свойств дифференцируемых функций. Заметим, что такая функция может быть представлена в виде $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\eta(x)$, где $\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} \frac{\eta(x)}{x-x_0}=0$. Перепишем это равенство: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\frac{\eta(x)}{x-x_0}$ $(x \neq x_0)$ и перейдем к пределу по системе проколотых окрестностей точки x_0. Тогда $f'(x_0)=\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, откуда производная, а тем самым и дифференциал функции f, единственны.

Равенство $f'(x_0)=\lim_{\mathcal{X}_{x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, из которого находится $f'(x_0)$, нередко и принимают за определение производной. Это удобно тем, что можно говорить о производной даже в том случае, когда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ бесконечен. Однако по определению, f дифференцируема в x_0 лишь тогда, когда этот предел конечен.

Определяя производную как значение соответствующего предела, можно рассматривать односторонние пределы. В этом случае говорят об односторонних производных, именно, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0-0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ называют левой производной (или производной слева) функции f в точке x_0 и обозначают $f'_л(x_0)$, а $\lim\limits_{\substack{x \to x_0+0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ – соответственно правой производной (или производной справа) f в x_0 и обозначают $f'_п(x_0)$. Ясно, что если существует $f'(x_0)$, то существуют равные ей односторонние производные. Обратное можно утверждать лишь, когда $f'_л(x_0), f'_п(x_0)$ совпадают.

Если функция f имеет производную (дифференцируема) во всех точках некоторого множества X_0 в Ω_f, говорят, что f имеет производную (дифференцируема) на X_0. Заметим, что при этом на X_0 можно определить функцию $f' : x \mapsto f'(x)$ и говорить о производной на X_0 как функции на этом множестве.

Предположим, что f' дифференцируема в точках некоторого интервала $[a, b]$. Производную функции f' называют второй производной функции f и обозначают f''. Аналогично можно определить производные третьего, четвёртого, и более высоких порядков. Производную n-го порядка (n -ю производную) обозначают через $f^{(n)}$.

I.2.Эта часть параграфа посвящена правилам нахождения производной в x_0 суммы, произведения, частного и суперпозиции двух функций, если производные каждой функции в этой точке известны.

I. Рассмотрим функции u, v и точку x_0 – внутреннюю для областей определения u, v одновременно. Если u, v дифференцируемы в x_0, то $u \pm v$ также дифференцируема в x_0 и $(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$.

Действительно, поскольку u, v дифференцируемы в x_0, имеют место равенства

$$u(x) - u(x_0) = u'(x_0)\cdot(x-x_0) + q_u(x), \quad v(x)-v(x_0) = v'(x_0)(x-x_0) + q_v(x),$$

где $\lim\limits_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{q_u(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{q_v(x)}{x-x_0} = 0$. Складывая (вычитая) их, получим

$$(u \pm v)(x) - (u \pm v)(x_0) = (u'(x_0) \pm v'(x_0)) \cdot (x - x_0) + (q_u(x) \pm q_v(x)),$$

что и требовалось.

2. В условиях предложения I справедливы равенства

$$(u \cdot v)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0); \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)\,v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{(v(x_0))^2}$$

(последнее при условии $v(x_0) \neq 0$).

В самом деле, $\lim\limits_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{(uv)(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} =$

$$= \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{(uv)(x) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} + \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{u(x_0)\,v(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} v(x) \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} u(x_0) \cdot \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0).$$

Выведем правило дифференцирования отношения двух функций. Согласно определению,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{\left(\frac{u}{v}\right)(x) - \left(\frac{u}{v}\right)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{1}{v(x)\,v(x_0)} \cdot \frac{u(x)\,v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{1}{v(x)\,v(x_0)} \left[\frac{u(x)\,v(x_0) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{x - x_0} + \frac{u(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0)\,v(x)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{1}{v(x)\,v(x_0)} \left[v(x_0) \cdot \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} - u(x_0) \cdot \lim_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} \right],$$

а это и требовалось. Предложение полностью доказано.

3. Пусть функции u, v и точка x_0 таковы, что x_0 – внутренняя точка Ω_u, а $u(x_0)$ – внутренняя точка Ω_v. Предположим, что u, v дифференцируемы в точках x_0, $u(x_0)$ соответственно. Тогда суперпозиция $v \circ u$ функций u, v дифференцируема в x_0 и производная $(v \circ u)'(x_0)$ может быть найдена как $(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \cdot v'(u(x_0))$.

Если в любой окрестности V из $\dot{\mathcal{X}}_{x_0}$ есть точка x, в которой $u(x) = u(x_0)$, то, с одной стороны, $u'(x_0) = 0$, а с другой $(v \circ u)'(x_0) = \lim\limits_{\dot{\mathcal{X}}_{x_0}} \frac{v(u(x)) - v(u(x_0))}{x - x_0} = 0$, тем самым предложение справедливо.

Пусть некоторой окрестности $V \in \dot{\mathcal{X}}_{x_0}$ нет таких точекх x, что $u(x) = u(x_0)$. Тогда

$$(v_0 u)'(x_0)=\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{x-x_0}=\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}\cdot\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}.$$

По условию предел $\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ существует и равен $u'(x_0)$. Заметим, что $x\mapsto\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}$ есть суперпозиция $y: x\mapsto u(x)$ и $h: y\mapsto \frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}$ (здесь обозначено $y_0=u(x_0)$). Функция h не определена в y_0, но если мы её доопределим как $h(y_0)=v'(y_0)$, то эта функция становится непрерывной в y_0. Так как функция u непрерывна в x_0, то суперпозиция $h\circ u$ непрерывна в x_0 (см.Ш.I.I), отсюда предел $\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}$ существует и равен $v'(u(x_0))$, и предложение доказано.

4. Пусть u – непрерывная строго монотонная функция, заданная на промежутке Δ, имеющая производную в точке x_0 этого промежутка. Тогда существует производная $(u^{-1})'$ обратной функции u^{-1} в $y_0=u(x)$, при этом, если $u'(x_0)\neq 0$, то $(u^{-1})'(y_0)=\frac{1}{u'(x_0)}$. В случае же $u'(x_0)=0$ справедливо $(u^{-1})'(y_0)=\pm\infty$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция u.

Предположим, что $u'(x_0)\neq 0$ и, обозначив $u^{-1}=v$ рассмотрим

$$\lim_{\mathring{x}_{y_0}}=\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}=\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{v(u(x))-v(u(x_0))}{u(x)-u(x_0)}=\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{x-x_0}{u(x)-u(x_0)}=\frac{1}{u'(x_0)}.$$

Равенство же $u'(x_0)=0$ означает, что $\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}=0$, при этом если u возрастает, то $\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}>0$, если убывает, то $\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}<0$. Отсюда $\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{x-x_0}{u(x)-u(x_0)}$ равен $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от вида монотонности u.

I.3. Хотя мы, как правило, будем иметь дело с функциями, определёнными в $\mathbb{R}$ (или $\bar{\mathbb{R}}$), не лишне указать на возможность определения произв́одной и дифференциала функции из $\mathbb{C}$.

Пусть z_0 – внутренняя точка области определения функции f, действующей из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Если найдётся функция $\varphi: z\mapsto f(z_0)+B(z-z_0)$ такая, что $\lim_{\mathring{x}_{z_0}}\frac{f(z)-\varphi(z)}{z-z_0}=0$, то говорят, что f д и ф ф е р е н ц и р у е м а в z_0 функцию $\psi:\eta\mapsto B\cdot\eta$ называют д и ф ф е р е н ц и а л о м, а коэффициент B – п р о и з в о д н о й функции f в точке z_0. Можно заметить, что $B=f'(z_0)=\lim_{\mathring{x}_{x_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. В доказательствах предложений I – 3 из I.2

никак не использовалась специфика $\mathbb{R}$, и они также справедливы в комплексном случае. Этого нельзя сказать о предложении 4.

Мы умышленно не упомянули о дифференцировании функции из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{R}$. Конечно, и в этом случае можно дать аналогичные определения производной и дифференциала, однако окажется, что если такая функция дифференцируема в некоторой точке x_0 , то производная её в этой точке равна нулю. Это и является причиной того, что случай $f: C \to \mathbb{R}$ обычно не рассматривается.

§ 2. Теорема о конечном приращении

2.I. Пусть f – числовая функция с областью определения Ω_f, лежащей в числовом множестве. Будем говорить, что эта функция обладает некоторым свойством (например, непрерывна, дифференцируема, и т.п.) в основном на множестве $X \subset \Omega_f$, если можно указать не более чем счётное подмножество E в X такое, что выделенное свойство присуще функции f во всех точках из $X \setminus E$. В частности, E может быть и пустым, иначе, если какое-то свойство f выполнено на всём X , то тем более и в основном.

ТЕОРЕМА I(2.4) (о знаке приращения). Пусть на промежутке $[a,b]$ числовой прямой задана вещественная непрерывная функция f , имеющая производную в основном на $[a,b]$. Тогда если $f'(x) \le 0$ также в основном на $[a,b]$, то $f(b)-f(a) \le 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через E_1 такое не более чем счётное подмножество в $[a,b]$, что $f'(x)$ существует для x из $[a,b] \setminus E_1$, и через E_2 – такое снова не более чем счетное подмножество в $[a,b]$, что $f'(x) \le 0$ для x и $[a,b] \setminus E_2$. Пусть $E = E_1 \cup E_2$.

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно лемме о разложении положительного числа (см. П.7.3) существует такое семейство $\{\varepsilon_t\}$ $(t \in E)$, что $\varepsilon = \sum_{t \in E} \varepsilon_t$ и $\varepsilon_t > 0$ $(t \in E)$. Обозначим через ψ_t функцию, определённую на $\mathbb{R}$ соотношением

$$\psi_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le t \\ \varepsilon_t, & \text{если } x > t \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

и положим $\psi(x) = \sum_{t \in E} \psi_t(x)$. Докажем, что определённая на $\mathbb{R}$ этим равенством функция ψ непрерывна слева в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Действительно, если $x_0 \bar{\in} E$, то каждая из функций ψ_t непрерывна в этой точке, а семейство $\{\psi_t\}$ $(t\in E)$ равномерно суммируемо, поскольку $|\psi_t(x)| = \psi_t(x) = \varepsilon_t$ $(x\in\mathbb{R})$. Следовательно, применимо замечание к теореме Стокса-Зайделя, на основании которого и можно заключить о непрерывности ψ в точке x_0. Если же $x_0\in E$, то $\psi(x)=\psi_{x_0}(x)+\sum\limits_{t\in E,\, t\neq x_0}\psi_t(x)$ и по доказанному второе слагаемое непрерывно, а ψ_{x_0}, очевидно, непрерывна слева.

Обозначим $A=\{x\in[a;b]: f(x)-f(a)\leq \varphi(x)-\varphi(a)\}$, где $\varphi: x\mapsto \psi(x)+\varepsilon x$ $(x\in[a,b])$. Очевидно, $a\in A$, так что $A\neq\emptyset$. Положим $x_0=\sup A$. Поскольку при любом $n=1,2,\ldots$ будет $x_0-\frac{1}{n}<x_0$, то по определению точной верхней границы в A найдётся такая точка x_n, что $x_0-\frac{1}{n}\leq x_n\leq x_0$. Понятно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Ввиду того, что $x_n\in A$, имеем $f(x_n)-f(a)\leq \varphi(x_n)-\varphi(a)$ $(n\in\mathbb{N})$. $(*)$
Но, по доказанному, ψ, а стало быть и φ, непрерывна слева. Значит, переходя в $(*)$ к пределу, получим $f(x_0)-f(a)\leq\varphi(x_0)-\varphi(a)$, $(\substack{*\\*})$ то есть $x_0\in A$.

Предположим, что $x_0<b$ и $x\notin E$. Последнее означает, что в точке x_0 существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0\\ x\neq x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\leq 0<\varepsilon$.

Следовательно, по теореме о сохранении знака для точек x, достаточно близких к x_0, имеем $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq\varepsilon$. Беря, в частности, здесь в качестве x какую-либо точку x_1 большую x_0, получим

$f(x_1)-f(x_0)\leq\varepsilon(x_1-x_0)$ и с учётом $(\substack{*\\*})$

$$f(x_1)-f(a)=f(x_1)-f(x_0)+f(x_0)-f(a)\leq\varepsilon(x_1-x_0)+\varphi(x_0)-\varphi(a)\leq$$
$$\leq\varphi(x_1)-\varphi(x_0)+\varphi(x_0)-\varphi(a)=\varphi(x_1)-\varphi(a),$$

откуда $x_1\in A$, что противоречит неравенству $x_1>x_0$.

Докажем, что и гипотеза $x_0<b,\ x_0\in E$ также невозможна. Действительно, в этом случае ввиду непрерывности функции f в достаточно малой окрестности U точки x_0 должно выполняться неравенство $f(x)-f(x_0)\leq\varepsilon_{x_0}$. Но для $x>x_0$ имеем $\varepsilon_{x_0}\leq\psi(x)-\psi(x_0)\leq$ $\leq\varphi(x)-\varphi(x_0)$, так что для $x\in U$ и $x>x_0$ будем $f(x)-f(x_0)\leq$ $\leq\varphi(x)-\varphi(x_0)$, и мы оказываемся в ситуации, уже рассмотренной выше.

Итак, мы доказали, что

$$f(b)-f(a)\leq\psi(b)-\psi(a)+\varepsilon(b-a)\leq\varepsilon(1+b-a),$$

откуда, в силу произвольности ε, получаем $f(b)-f(a)\le 0$.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Предположим, что $[a,b]$ – промежуток расширенной числовой прямой и f – функция на этом промежутке, удовлетворяющая всем условиям теоремы I. Тогда $f(b)-f(a)\le 0$.

Достаточно рассмотреть случай, например, $b=+\infty$, $a\in\mathbb{R}$. Пусть $\{b_n\}$ – возрастающая неограниченная последовательность точек из $\mathbb{R}$. Тогда $[a,b]=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,b_n]$, и на каждом из $[a,b_n]$ справедлива теорема I, то есть $f(b_n)-f(a)\le 0$. В силу непрерывности f имеем $f(b)-f(a)=\lim_{n\to\infty}(f(b_n)-f(a))$, и по теореме о сохранении знака получаем требуемый результат.

2. Из доказательства теоремы I можно увидеть, что фактически мы использовали наличие у f конечной правой производной в основном на $[a,b)$. Можно было потребовать, чтобы f была дифференцируема слева в основном на $(a,b]$.

СЛЕДСТВИЯ. I (теорема о конечном приращении, вещественный случай). Пусть f,g – дифференцируемые на $[a,b]$ вещественные функции такие, что $f'(x)\le g'(x)$ $(x\in[a,b])$. Тогда $f(b)-f(a)\le$ $\le g(b)-g(a)$.

Рассмотрим функцию $h=g-f$. Она удовлетворяет всем условиям теоремы I, причём $h'(x)\ge 0$ $(x\in[a,b])$, поэтому $h(b)-h(a)\ge 0$, что и требовалось.

2. Пусть f удовлетворяет условиям теоремы I, и $m\le f'(x)\le M$ $(m,M\in\mathbb{R})$ для x из $[a,b]$. Тогда $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$.

В самом деле, обозначив $h:x\mapsto mx$, $g:x\mapsto Mx$, имеем $h'(x)\le f'(x)\le g'(x)$ $(x\in[a,b])$, а далее применяем теорему.

ТЕОРЕМА 2(2.4) (о конечном приращении, случай комплексной функции вещественного переменного). Пусть f, комплексная и g, вещественная – непрерывные на $[a,b]\subset\mathbb{R}$ функции такие, что существуют $f'(x)$, $g'(x)$ в точках промежутка $[a,b]$ и $|f'(x)|\le g'(x)$ $(x\in[a,b])$. Тогда $|f(b)-f(a)|\le g(b)-g(a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $|f(b)-f(a)|=0$, то теорема верна, ибо $g'(x)\ge 0$ $(x\in[a,b])$ и, согласно теореме о знаке приращения, имеем $g(b)-g(a)\ge 0$.

Пусть $|f(b)-f(a)|>0$. Обозначим $f(b)-f(a)=re^{i\alpha}$ и рассмотрим функцию $F:x\mapsto e^{-i\alpha}f(x)$. Так как

$$F(b)-F(a)=e^{-i\alpha}(f(b)-f(a))=e^{-i\alpha}\cdot r\cdot e^{i\alpha}=r=|f(b)-f(a)|,$$

а справа в равенстве стоит вещественное число, приращение $F(b)-$ $-F(a)$ совпадает с $u(b)-u(a)$ – приращением вещественной части u функции F. Нетрудно убедиться в том, что $u'(x)\le |F'(x)|$, а с другой стороны, F удовлетворяет условиям теоремы, поэтому $u'(x)\le g'(x)$ $(x\in[a,b])$. Из теоремы 2 получаем $u(b)-u(a)\le g(b)-g(a)$, и осталось лишь заметить, что $u(b)-u(a)=|f(b)-f(a)|$.
Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ комплексная функция, дифференцируемая в точках x из $[a,b]$. Предположим, что $|f'(x)|\le M$ $(x\in[a,b])$. Тогда $|f(b)-f(a)|\le M(b-a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Без сомнения, теорема 2 и следствие из неё справедливы и в том случае, когда значения f лежат в $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 4(2.4). Пусть f – комплексная функция в открытом круге U комплексной плоскости, всюду в нём дифференцируемая. Предположим, что $|f'(x)|\le M$. Тогда $|f(b)-f(a)|\le M\cdot|b-a|$ для любых a,b из U.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На отрезке $[0,1]$ определим комплексную функцию $g:t\to a+t(b-a)$, рассмотрим функцию $h=f\circ g$, при этом $h(1)-h(0)=f(b)-f(a)$ и $h'(t)=(b-a)\cdot f'(g(t))$. Так как значения g лежат в круге U, то $|h'(t)|\le M(b-a)$, поэтому, согласно теореме 3, имеем $|f(b)-f(a)|=|h(1)-h(0)|\le M\cdot|b-a|\cdot 1$, что и требовалось.

2.2. Выясним, с какими свойствами производной связаны монотонность и постоянство функции.

I. (Признак монотонности.) Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ $(a,b\in\mathbb{R})$ функция, дифференцируемая в основном на $[a,b]$. Тогда f возрастает (убывает) в том и только том случае, если $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ в основном на $[a,b]$.

Если f – возрастающая, то $f(x)-f(x_0)\ge 0$ для $x-x_0>0$, поэтому $f'(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\ne x_0}}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ для всех точек x_0, где существует $f'(x_0)$.

Пусть функция имеет неотрицательную производную в основном на $[a,b]$. Возьмём произвольный промежуток $[c,d]$, лежащий в $[a,b]$. Согласно теореме о знаке приращения (или замечанию к ней), имеем $f(d)-f(c)\ge 0$, тем самым f возрастает.

Случай убывающей функции рассматривается аналогично.

2.(Признак постоянства.) Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ функция, дифференцируемая в основном на $[a,b]$. Тогда f постоянна в том и только том случае, если $f'(x)=0$ в основном на $[a,b]$.

Пусть f постоянна. Тогда $f(x)-f(y)=0$ для любых x,y из $[a,b]$, поэтому $f'(x)=0$ $(x\in[a,b])$.

Обратно, пусть $f'(x)=0$ в основном на $[a,b]$. Это означает, что в основном на $[a,b]$ выполнены одновременно два неравенства: $f'(x)\geqslant 0$, $f'(x)\leqslant 0$. Если c,d – произвольные точки из $[a,b]$ то, считая $c<d$ и применяя теорему о знаке приращения, имеем $f(d)-f(c)\geqslant 0$, $f(d)-f(c)\leqslant 0$, откуда получаем требуемое.

§ 3. Свойства дифференцируемых функций

В этом параграфе рассматриваются свойства вещественных функций, область определения которых лежит в $\mathbb{R}$. Некоторые из предлагаемых фактов верны и для комплексных функций, но они немногочисленны и будут особо оговорены.

3.I. Рассмотрим функцию f с областью определения Ω_f. Точку x_0 из Ω_f назовём точкой *локального максимума (минимума)* функции f, если можно найти такую $V\in\mathcal{H}_{x_0}$, что $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$ для всех точек x из $V\cap\Omega_f$. О функции f в этом случае говорят, что она имеет в x_0 *локальный максимум (минимум)*. Если в x_0 функция имеет локальный максимум или минимум, говорят, что f имеет в x_0 *локальный экстремум*, а точку x_0 называют *точкой локального экстремума функции* f. Слово "локальный" мы будем иногда опускать если это не может вызвать недоразумений.

Напомним, что значение функции в некоторой точке x_0 из Ω_f называют *наибольшим (наименьшим)* значением функции f, если $f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$ для всех x из Ω_f. Ясно, что наибольшее (наименьшее) значение f является и локальным максимумом (минимумом). Обратное же, как показывают простые примеры, неверно.

Напомним, что мы в вопросах дифференцирования договорились рассматривать функции, определённые на промежутке.

ТЕОРЕМА I(3.4) (Ферма). Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ функция, дифференцируемая в точке x_0 из (a,b). Если x_0 – точка локального экстремума, то $f'(x_0)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_0 – точка локального максимума функции f. Так как в некоторой V из $\mathcal{H}_{x_0}$ (можно считать $V\subset(a,b)$) имеем $f(x)\le f(x_0)$, то отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ неотрицательно для x из $V\cap(-\infty,x_0)$ и неположительно для x из $V\cap(x_0,+\infty)$. Отсюда $\lim\limits_{\substack{x\to x_0-0\\ x\ne x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0+0\\ x\ne x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$, поэтому $f'(x_0)=0$.

Если x_0 – точка локального минимума функции f, доказательство проводится аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть f – дифференцируемая на $[a,b]$ функция. Тогда если a – точка максимума, то $f'(a)\le 0$, если минимума, то $f'(a)\ge 0$. Аналогично если b – точка максимума, то $f'(b)\ge 0$, если минимума, то $f'(b)\le 0$.

Доказательство следует непосредственно из определений и теоремы о сохранении знака.

ТЕОРЕМА 2(3.4) (Дарбу). Пусть f – дифференцируемая на $[a,b]$ функция. Тогда для любого λ, лежащего между $f'(a)$, $f'(b)$, найдётся точка x_0 из $[a,b]$ такая, что $f'(x_0)=\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f'(a)>\lambda>f'(b)$ и рассмотрим функцию $g: x\longmapsto f(x)-\lambda x$. Она дифференцируема в $[a,b]$, при этом $g'(a)=f'(a)-\lambda>0$, $g'(b)=f'(b)-\lambda<0$. Из замечания к теореме Ферма легко получить, что наибольшего значения эта функция достигает во внутренней точке x_0 промежутка $[a,b]$. А тогда по теореме Ферма имеем $g'(x_0)=0$, или $f'(x_0)=\lambda$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 3(3.4) (Ролль). Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ дифференцируемая внутри этого промежутка функция такая, что $f(a)=f(b)$. Тогда в (a,b) найдется точка x_0, в которой $f'(x_0)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $f(a)=f(b)$ легко получить, что f достигает либо наибольшего, либо наименьшего значения во внутренней точке x_0 промежутка. А тогда, применяя теорему Ферма, получаем требуемый результат.

ТЕОРЕМА 4(3.4) (Коши). Пусть f, g – непрерывные на $[a,b]$ функции, дифференцируемые внутри этого промежутка. Тогда в (a,b) найдётся точка c такая, что

$$[f(b)-f(a)]\cdot g'(c)=[g(b)-g(a)]\cdot f'(c).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на промежутке $[a,b]$ функцию

$$h: x \mapsto [f(b)-f(a)]\cdot[g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)]\cdot[f(x)-f(a)].$$

Она непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема внутри него. При этом $h(a)=h(b)=0$, следовательно, в силу теоремы Ролля, в (a,b) найдётся точка c такая, что $h'(c)=0$, откуда вытекает требуемое равенство.

СЛЕДСТВИЕ (теорема Лагранжа). Пусть f – непрерывная на $[a,b]$ функция, дифференцируемая внутри этого промежутка. Тогда в (a,b) найдётся точка c такая, что $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство получается применением теоремы Коши с функцией $g: x \mapsto x$.

ТЕОРЕМА 6 (3.4). Пусть f – функция на $[a,b]$, дифференцируемая во всех точках из $(a,b]$. Предположим, что существует $\lim\limits_{x\to a} f'(x)=c$. Тогда f имеет в a правую производную, равную c.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по формуле Лагранжа имеем $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(u(x))$, где $a<x$ и $u(x)\in(a,x)$. Переходя к пределу по $\dot{\mathcal{X}}_a$, получим $f'_n(a)=\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}} f'(u(x))=c$, поскольку $\lim\limits_{x\to a+0} u(x)=a$.

3.3. ТЕОРЕМА 7(3.4). Пусть f, g – вещественные, дифференцируемые на $[a,b]$ функции и $f(a)=f(b)=0$. Тогда если существует $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=c$, то существует $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f(x)}{g(x)}$, равный c.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из формулы Коши.

ТЕОРЕМА 8(3.4). Пусть f, g – вещественные, дифференцируемые на $[a,b]$ функции такие, что $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}} g(x)=+\infty$. Тогда если существует $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=c$, то существует и $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f(x)}{g(x)}$, равный c.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\overline{\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}=\underline{\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

В самом деле, пусть c – любое большее a число. Тогда, используя теорему Коши, имеем

$$\overline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}=\overline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\overline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f'(u(x))}{g'(u(x))}\leq\sup_{y\in(a,c]}\frac{f'(y)}{g'(y)},$$

где $u(x)$ – некоторая точка промежутка (x,c). Проведя аналогичную оценку для нижнего предела, получим

$$\inf_{y\in(a,c]}\frac{f'(y)}{g'(y)}\leq\underline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\overline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\sup_{y\in(a,c]}\frac{f'(y)}{g'(y)}.$$

Отсюда, следуя определению верхнего и нижнего пределов,

$$\underline{\lim_{\substack{y\to a+0\\ y\neq a}}}\frac{f'(y)}{g'(y)}\leq\underline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\overline{\lim_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\overline{\lim_{\substack{y\to a+0\\ y\neq a}}}\frac{f'(y)}{g'(y)},$$

а существование $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}} f'(x)/g'(x)$ обеспечивает равенство верхнего и нижнего пределов, стоящих на концах предыдущего равенства. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Не лишне указать, что теоремы 7,8 не допускают обращения, то есть из существования $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f(x)}{g(x)}$ ещё не следует существование равного ему $\lim\limits_{x\to a+0,\, x\neq a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Теоремы 7,8 называют правилом Лопиталя раскрытия неопределённостей.

3. Если $f'(a)=g'(a)=0$, а функции f,g дважды дифференцируемы, можно воспользоваться теоремой 7 применительно к функциям f', g'. Этот процесс можно повторять до тех пор, пока либо кончатся свойства дифференцируемости f или g, либо окажется существующим $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\ x\neq a}}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$. Аналогичное замечание можно высказать и к теореме 8.

§ 4. Формула Тейлора

В начале этой главы было отмечено, что класс дифференцируемых функций уже класса непрерывных. Понятно, что функций, имеющих вторую производную, меньше, чем дифференцируемых. Дифференцируемые функции отличались от непрерывных возможностью локального приближения полиномами первой степени. Естественно возникают вопросы:

можно ли функцию, имеющую n производных, локально аппроксимировать полиномом n-й степени и равносильна ли такая возможность наличию n-й производной ? Ответ на первый из них дают теоремы этого параграфа; второй же положительного ответа не имеет, например, функция

$$f: x \mapsto \begin{cases} x^3 \cdot \cos\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

второй производной в нуле не имеет, однако приближается в этой точке полиномом второй степени с достаточно высокой точностью: $\lim\limits_{\mathring{V}_{x_0}} \frac{f(x)}{x^2} = 0$.

4.I. Итак, приступим к освещению первого вопроса.

ТЕОРЕМА I(4.4). Пусть функция f, определённая на (a,b), имеет n производных в некоторой окрестности V точки x_0 из (a,b). Тогда имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r(x),$$

где $\lim\limits_{\mathring{V}_{x_0}} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разность $r: x \mapsto f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Поскольку производные этой функции, до порядка n включительно, равны нулю, то нам достаточно доказать, что если некоторая функция r имеет нулевые производные в точке x_0 до n-го порядка,то $\lim\limits_{\mathring{V}_{x_0}} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$. При $n=1$ это утверждение следует непосредственно из определения производной. В предположении его справедливости для некоторого n докажем, что оно верно и для $n+1$. Итак, пусть $r(x_0) = r'(x_0) = \ldots = r^{(n+1)}(x_0) = 0$. Тогда, по правилу Лопиталя (теорема 7(3.4))имеем $\lim\limits_{\mathring{V}_{x_0}} \frac{r(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \lim\limits_{\mathring{V}_{x_0}} \frac{r'(x)}{(n+1)(x-x_0)^n}$, и теорема доказана, поскольку предел в правой части равенства обращается в нуль по индуктивному предположению.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанную теорему называют локальной формулой Те́йлора, или формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Согласно этой формуле, функцию f, имеющую n производных в точке x_0, можно с высокой точностью приблизить в окрестности этой точки полиномом n-й степени.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть f имеет на промежутке $[a,b]$ производные до n-го порядка и x - такая точка из (a,b), что $f'(x) = \ldots$ $\ldots = f^{(k)}(x) = 0$, а $f^{(k+1)}(x)$ отлично от нуля $(k<n)$.

Тогда если k нечётно, то x - точка локального экстремума (минимума, если $f^{(k+1)}(x)>0$, и максимума, если $f^{(k+1)}(x)<0$). В том случае, когда k чётно, x не является точкой локального экстремума.

Действительно, пусть k нечетно и $f^{(k+1)}(x)>0$. По теореме I имеем $f(y)=f(x)+\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}(y-x)^{k+1}+\varphi(y)$, где $\lim\limits_{\mathcal{X}_x}\frac{\varphi(y)}{(y-x)^{k+1}}=0$. Взяв в качестве ε число $\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}$, можно указать такое $\delta>0$, что $|\varphi(y)|<\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}(y-x)^{k+1}$ для y, удовлетворяющих неравенству $|y-x|<\delta$. Тогда $f(y)-f(x)=(y-x)^{k+1}\cdot\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}-\frac{\varphi(y)}{(x-y)^{k+1}}\right)$, а поскольку $k+1$ чётно, то $f(y)-f(x)>0$, тем самым x - точка локального минимума.

Оставшаяся часть следствия доказывается аналогично.

Свойства функции, указанные в этом следствии, фактически определяются свойствами полинома, приближающего f в окрестности x. Естественно поэтому, что если степень $k+1$ этого полинома чётна, то x - точка экстремума, вид которого зависит от знака коэффициента при x^{k+1} ; если же эта степень нечётна, то соответствующий полином, а вместе с ним и f, в точке x экстремума не имеют.

4.2. ТЕОРЕМА 2(4.4). Пусть f имеет на промежутке $[a,b]$ производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда для любого x из $[a,b]$ можно указать в $[a,x)$ такое ξ, что

$$f(x)=f(a)+\sum_{l=1}^{n}\frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - произвольная точка промежутка $(a,b]$. Найдём такое число c, что $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+$ $+c(x-a)^{n+1}$ и докажем, что c имеет требуемый вид. Для этого рассмотрим функцию $g: t\longrightarrow f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-a)^k-c\,(x-t)^{n+1}$ и заметим, что $g(a)=g(x)=0$. Вычислим производную функции g:

$$g'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+(n+1)\cdot c\cdot(x-t)^n=$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+c\cdot(n+1)(x-t)^n.$$

По теореме Ролля в (a,x) найдётся такая ξ, для которой $g'(\xi)=0$, и нетрудно увидеть, что ξ – требуемая точка.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Результат доказанной теоремы называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Нетрудно заметить, что эта теорема является в некотором смысле обобщением теоремы Лагранжа.

2. Некоторые применения формулы Тейлора будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 5. Дифференцирование рядов

5.I. Напомним, что последовательность $\{s_n\}$ функций равномерно на X_0 сходится к s, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, зависящее только от ε, что $|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$ для всех точек x из X_0 и для всех $n\geqslant N$.

ТЕОРЕМА I(5.4). Пусть $\{s_n\}$ – последовательность вещественных функций, дифференцируемых в основном на промежутке $[a,b]$ в R такая, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$ $(x\in[a,b])$ и, кроме того, $\{s_n'\} \rightrightarrows f$ в основном на $[a,b]$. Тогда s дифференцируема в основном на $[a,b]$ и её производная равна f (в основном на $[a,b]$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon>0$ произвольно. Согласно критерию Коши (см. Ш.I.2), для достаточно больших m,n в основном на $[a,b]$ выполнено $|s_n'(x)-s_m'(x)|<\varepsilon$. По теореме о конечных приращениях

$$\left|\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h} - \frac{s_m(x+h)-s_m(x)}{h}\right| \leqslant \varepsilon$$

(здесь h таково, что $x+h\in[a,b]$), то есть

$$-\varepsilon+\frac{s_m(x+h)-s_m(x)}{h} \leqslant \frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h} \leqslant \varepsilon+\frac{s_m(x+h)-s_m(x)}{h} \qquad (x\in[a,b]).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(y)=s(y)$, переходя в этом неравенстве к пределу по n, получим

$$-\varepsilon+\frac{s_m(x+h)-s_m(x)}{h} \leqslant \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \leqslant \varepsilon+\frac{s_m(x+h)-s_m(x)}{h}$$

и, поскольку h не зависит от m,n, можно перейти к пределу по h:

$$-\varepsilon + s_m'(x) \le \varliminf_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le \varepsilon + s_m'(x)$$

в тех точках x из $[a,b]$, где существуют $s_m'(x)$ для всех $m\in\mathbb{N}$. Нетрудно понять, что множество точек x из $[a,b]$, где нет $s_k'(x)$, хотя бы у одной s_k, не более чем счётно, то есть последнее неравенство выполнено в основном на $[a,b]$. Из этого неравенства переходом к пределу по m в основном на $[a,b]$ имеем

$$-\varepsilon + f(x) \le \varliminf_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le \varepsilon + f(x),$$

откуда, в силу произвольности ε,

$$f(x) \le \varliminf_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le \varlimsup_{\substack{h\to 0\\ h\ne 0}} \frac{s(x+h)-s(x)}{h} \le f(x).$$

Тем самым верхний и нижний пределы по $h\to 0$ отношения $\frac{s(x+h)-s(x)}{h}$ совпадают в основном на $[a,b]$ и равны $f(x)$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. В условиях теоремы можно было требовать сходимости $\{s_n(x)\}$ лишь в какой-нибудь одной точке x из $[a,b]$.

Действительно, если y – отличная от x точка в $[a,b]$, то

$$|s_n(y)-s_m(y)| = |s_n(y)-s_n(x)+s_n(x)-s_m(x)+s_m(x)-s_m(y)| =$$

$$= |s_n(y)-s_m(y)+s_n(x)-s_m(x)+s_m(x)-s_n(x)| \le$$

$$\le |(s_n-s_m)(y)-(s_n-s_m)(x)| + |s_n(x)-s_m(x)|,$$

и второе слагаемое может быть сделано сколь угодно малым за счёт сходимости $\{s_k(x)\}$, первое же – по теореме о конечном приращении и благодаря равномерной сходимости последовательности $\{s_n'\}$.

2. Эту теорему называют теоремой о предельном переходе под знаком дифференциала, и её результат записывают в таком виде: $(\lim\limits_{n\to\infty} s_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} s_n'$.

СЛЕДСТВИЯ. I. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)$ – функциональный ряд, сходящийся в точках x промежутка $[a,b]$. Доказанная теорема в применении к последовательности частичных сумм этого ряда и даёт условия, при которых $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\right)'$.

2. Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ – степенной ряд и R – отличный от нуля радиус сходимости этого ряда. Тогда в круге $B(x_0,R)$ функция $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ дифференцируема и $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-x_0)^{n-1}$.

Это следствие называют теоремой о дифференцировании степенного ряда.

Пусть R' – радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n (x-x_0)^{n-1}$. Так как $|a_n(x-x_0)^n| \le |n \cdot a_n (x-x_0)^n|$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-x_0)^n$ имеет R' радиусом круга сходимости, то $R' \le R$.

Чтобы показать справедливость противоположного неравенства, возьмём любую точку x из $B(x_0,R)$ и убедимся в том, что $x \in B(x_0,R')$. Вставим между R и $|x-x_0|$ число r. В силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$ последовательность $\{a_n r^n\}$ ограничена. Пусть L – её верхняя граница. Тогда

$$n \cdot |a_n| \cdot |x-x_0|^{n-1} = n \cdot |a_n| \cdot r^n \cdot \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{r} \le \frac{L}{r} \cdot n \cdot \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^{n-1},$$

и так как ряд $\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left|\frac{x-x_0}{r}\right|^n$ сходится (в чём нетрудно убедиться с помощью признака Даламбера), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot |a_n| \cdot |x-x_0|^{n-1}$ также сходится, то есть $x \in B(x_0, R')$.

Для завершения доказательства следствия осталось лишь заметить, что степенной ряд сходится равномерно в любом замкнутом круге $\bar{B}(x_0, r')$, где $r' < R$, и воспользоваться доказанной теоремой.

Используя последнее следствие, можно выписать производные функций, введённых в прошлой главе: $(\exp x)' = \exp(x)$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, и т.д.

5.2. Только что мы убедились в том, что функция f, определённая на промежутке (a,b) в R и в окрестности каждой точки x_0 из (a,b), представимая в виде $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, имеет производные любого порядка (иначе говоря, бесконечно дифференцируема). А нельзя ли заключить обратное, то есть если f бесконечно дифференцируема на (a,b) и $x_0 \in (a,b)$, существует ли последовательность $\{a_n(x_0)\}$, $n=0,1,\ldots$ такая, что $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ в некоторой окрестности точки x_0 ? Оказывается, что нет. Прежде чем рассмотреть соответствующий пример, заметим, что если для f нашлась $\{a_n(x_0)\}$, то $a_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, в чём нетрудно убедиться последовательным дифференцированием f в x_0. А теперь определим функцию $g: x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$ ($x \in \mathbb{R}$). Она имеет в нуле производные любого порядка, причём все они равны нулю, а функция ненулевая в любой окрестности нуля, то есть в этом случае последовательность $\{a_n(0)\}$ указать невозможно. Тем не менее, можно выделить условие на функцию f, в случае выполнения которого гарантируется представление f в виде суммы ряда.

ТЕОРЕМА 2(5.4). Пусть f бесконечно дифференцируема на (a,b). Предположим, что существует постоянная A такая, что $|f^{(n)}(x)| \leq A^n \cdot n^n$ $(x \in (a,b))$. Тогда для любого $x_0 \in (a,b)$ можно указать такое R, что f имеет вид

$$f: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

для $x \in B(x_0, R) \cap (a,b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см.2(4.4)), в промежутке $[x_0, x)$ (где $x \in (x_0, b)$) можно указать такое ξ, что

$$r_{n-1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-x_0)^n .$$

По условию имеем $|r_{n-1}(x)| \leq \frac{A^n n^n}{n!} \cdot |x-x_0|^n$. Так как $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, то $\frac{x^n}{n!} < e^x$ при $x>0$, откуда

$$\frac{A^n \cdot n^n}{n!} \cdot |x-x_0|^n < (A \cdot e \cdot |x-x_0|)^n.$$

Пусть R таково, что $A \cdot e \cdot |x-x_0| < 1$ при $|x-x_0| < R$. Тогда $\lim_{n\to\infty} r_{n-1}(x) = 0$ для таких x, то есть $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (x-x_0)^k$, если $|x-x_0| < R$.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Справедливо и утверждение обратное к сформулированному в теореме.

2. В качестве числа R, фигурирующего в формулировке теоремы, можно взять любое R, удовлетворяющее неравенству $0<R<\frac{1}{A \cdot e}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим функцию $f: x \mapsto (x+1)^{\alpha}$ $(x, \alpha \in \mathbb{R})$. Её производные легко находятся: $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. Обозначим $\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ через C_{α}^{k} и образуем ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_{\alpha}^{k} x^{k}$. По признаку Даламбера (см. 2(7.2)) этот ряд сходится абсолютно при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Можно показать (попытайтесь проделать это)[x], что f удовлетворяет условиям предыдущей теоремы с $R=1$. Из этого можно сделать вывод, что при $|x|<1$ функция f представима в виде ряда $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^{k}$.

§ 6. Функции промежутка

Этот параграф можно считать преддверием к определению интеграла. Здесь мы выделим важный класс функций - заданных на ориентированных промежутках числовой прямой - и обсудим некоторые их свойства.

6.1. Под **ориентированным промежутком** мы будем понимать упорядоченную пару элементов из $\mathbb{R}$. Ориентированный промежуток будем обозначать символом $\langle a,b\rangle$, где a, b - соответственно первый и второй элементы пары (a,b). Каждому $\langle a,b\rangle$ поставим в соответствие его **носитель** $|\langle a,b\rangle|$ следующим образом:

$$|\langle a,b\rangle| = \begin{cases} [a,b], & \text{если } a \le b, \\ [b,a], & \text{если } b \le a. \end{cases}$$

Множество всех ориентированных промежутков обозначим через $\mathcal{D}$.

Пусть промежутки $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle$ таковы, что $b=c$. Тогда промежуток $\langle a,d\rangle$ называется **суммой** промежутков $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$, при этом используется обозначение $\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a,d\rangle$. Если $\langle a,b\rangle \in \mathcal{D}$, то, по определению, $-\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$. Обратим внимание на то, что, во-первых, сумма не всегда определена и, во-вторых, нет коммутативности.

Как правило, мы будем рассматривать такие лишь промежутки $\langle a,b\rangle$, у которых a, b лежат в некотором фиксированном промежутке I числовой прямой. Совокупность всех таких промежутков $\langle a,b\rangle$ обозначим через $\mathcal{D}_I$.

Числовую функцию Φ, областью определения которой является

x) В § 7 это будет получено из других соображений.

некоторое подмножество в $\mathcal{D}_I$, будем называть **функцией (ориентированного) промежутка** и говорить о Φ как о функции, заданной на $\mathcal{D}_I$. Функцию Φ назовём **аддитивной**, если для любых $\langle a,b\rangle$, $\langle b,c\rangle$ таких, что a, b, c лежат в I, выполнено соотношение

$$\Phi(\langle a,c\rangle) = \Phi(\langle a,b\rangle) + \Phi(\langle b,c\rangle).$$

Приведём пример аддитивной функции промежутка. Пусть H – числовая функция, определённая в точках промежутка I. С ней можно связать функцию, заданную на $\mathcal{D}_I$. Эта функция, обозначим её $[H]$, получается из H следующим образом: $[H](\langle a,b\rangle) = H(b) - H(a)$ $(\langle a,b\rangle \in I)$. Докажем аддитивность $[H]$. Действительно, если $a,b,c \in I$, то

$$[H](\langle a,b\rangle) + [H](\langle b,c\rangle) = H(b) - H(a) + H(c) - H(b) = [H](\langle a,c\rangle).$$

1. Пусть Φ – аддитивная функция, заданная на $\mathcal{D}_I$. Тогда $\Phi(\langle a,a\rangle)=0, \Phi(\langle b,a\rangle) = -\Phi(\langle a,b\rangle)$ для любых a, b из I.

Доказательство следует непосредственно из определений.

2. Всякая аддитивная функция, заданная на $\mathcal{D}_I$, порождается функцией, определённой на I.

Действительно, пусть Φ задана на $\mathcal{D}_I$ и x_0 – некоторая точка в I. Определим $H: x \mapsto -\Phi(\langle x,x_0\rangle)$ $(x \in I)$. Тогда

$$[H](\langle a,b\rangle) = H(b) - H(a) = -\Phi(\langle b,x_0\rangle) + \Phi(\langle a,x_0\rangle) = \Phi(\langle a,b\rangle),$$

что и требовалось.

Таким образом, оказывается, что рассмотренный выше пример универсален в том смысле, что все аддитивные функции промежутка получаются из функции точки указанным в нём способом.

3. Пусть H_1, H_2 – функции, определённые на I. Тогда $[H_1] - [H_2] = [H_1 - H_2]$.

В самом деле, если $a, b \in I$, то

$$([H_1] - [H_2])(\langle a,b\rangle) = [H_1](\langle a,b\rangle) - [H_2](\langle a,b\rangle) = H_1(b) - H_1(a) - H_2(b) + H_2(a) =$$

$$= (H_1 - H_2)(b) - (H_1 - H_2)(a) = [H_1 - H_2](\langle a,b\rangle).$$

4. Пусть H_1, H_2 – такие определённые на I функции, что $[H_1] = [H_2]$. Тогда разность $H_1 - H_2$ постоянна.

Действительно, имеем $0 = [H_1] - [H_2] = [H_1 - H_2]$, то есть

H_1-H_2 порождает нулевую функцию на $\mathcal{D}_I$. Предположим, что в I нашлись x, y, для которых $(H_1-H_2)(x)\neq(H_1-H_2)(y)$. Но тогда $[H_1-H_2](\langle x,y\rangle)\neq 0$, что невозможно.

Таким образом, функции, определённые на I и порождающие аддитивную функцию промежутка Φ на $\mathcal{D}_I$, отличаются одна от другой на константу. Указанный факт позволяет задавать функцию промежутка, используя одну функцию точки (произвольную среди всей совокупности функций, порождающих Φ). Иначе, вопрос о нахождении функции промежутка сводится к нахождению одной из функций, её порождающих. Это соображение в дальнейшем будет неоднократно использовано.

6.2. Пусть Φ – функция промежутка, заданная на $\mathcal{D}_I$. Будем говорить, что она *непрерывна* в точке x из I, если $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(\langle x,x+h\rangle)=0$.

I. Пусть функции Φ, H таковы, что $[H]=\Phi$. Тогда Φ непрерывна в x из I в том и только том случае, если H непрерывна в x.

Действительно, поскольку $\Phi(\langle x,x+h\rangle)=H(x+h)-H(x)$, то Φ непрерывна в x тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{h\to 0}(H(x+h)-H(x))=0$, что и требовалось.

В случае существования $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0}\dfrac{\Phi(\langle x,x+h\rangle)}{h}$ назовём его *плотностью* Φ в точке x и будем обозначать символом $d\Phi(x)$.

2. Пусть Φ, H таковы, что $[H]=\Phi$. Тогда Φ имеет плотность в точке $x\in I$ в том и только том случае, если H дифференцируема в x. При этом $H'(x)=d\Phi(x)$.

Доказательство очевидно.

3. Пусть Φ – аддитивная функция промежутка, заданная на $\mathcal{D}_I$ и непрерывна в точке x из I. Тогда $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(\langle a,x+h\rangle)=\Phi(\langle a,x\rangle)$ $(a\in I)$.

В самом деле, по аддитивности Φ имеем $\Phi(\langle a,x+h\rangle)=$ $=\Phi(\langle a,x\rangle)+\Phi(\langle x,x+h\rangle)$ и, в силу непрерывности, $\lim\limits_{h\to 0}\Phi(\langle x, x+h\rangle)=0$.

5.3. Рассматривая функции промежутка, мы ограничивались такими ориентированными промежутками $\langle a,b\rangle$, что $a,b\in\mathbb{R}$. Можно совершенно так же дать определение ориентированного промежутка и его носителя и в том случае, когда a, b – точки из $\bar{\mathbb{R}}$. Пусть Φ – функция, заданная на $\mathcal{D}_I$, где $I\subset\bar{\mathbb{R}}$. В этом случае также можно говорить об аддитивности и непрерывности Φ, оставляя в силе прежние определения. Разве что нужно добавить, что Φ непрерывна в точке $+\infty$, если $\lim_{x\to+\infty} \Phi(\langle x,+\infty\rangle)=0$. Но вот говорить о плотности Φ в бесконечной точке мы не можем. Это и есть единственное отличие бесконечного случая от конечного.

§ 7. Определение и общие свойства интеграла

7.I. Пусть f – числовая функция, определённая на промежутке I в $\bar{\mathbb{R}}$. Аддитивная функция Φ, заданная на $\mathcal{P}$ называется **неопределённым интегралом** функции f, если выполнены следующие условия:

I) Φ непрерывна на I;

2) в основном на I существует $d\Phi$ равная f +).

Тот факт, что Φ есть неопределённый интеграл от f, записывают в виде $\Phi=\int f$ (или $\Phi=\int f(x)\,dx$). Последнее обозначение оказывается особенно удобным в тех случаях, когда f является функцией более чем одного переменного и надо выделить, по какой из переменных ведётся интегрирование. Иногда для неопределённого интеграла будем использовать обозначение $\int_I f$ с целью подчеркнуть, на каком промежутке проводится интегрирование.

Функции f, для которых можно указать неопределённый интеграл, назовём **интегрируемыми** (на I). Интеграл, полученный по излагаемой здесь схеме, будем называть (в отличие от других) **интегралом Ньютона**.

Если $\langle a,b\rangle$ – некоторый элемент $\mathcal{P}_I$, то значение Φ на $\langle a,b\rangle$ называют **определённым интегралом** f на промежутке $\langle a,b\rangle$ и обозначают $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пусть H – определённая на I функция такая, что $\Phi=\partial[H]$, где $\Phi=\int f$. Тогда H называется **первообразной** функции f. Заметим, что H является первообразной функции f в том и только том случае, если

I) H непрерывна на I;

2) в основном на I существует $H'(x)$, равная $f(x)$.

+) Напомним, что некоторое свойство функции выполнено в основном на I, если можно указать не более чем счётное множество E в I такое, что свойство справедливо в точках из $I\setminus E$.

Кроме того, первообразных функций f много, однако все они отличаются одна от другой на константу. Понятно, что знание хотя бы одной первообразной f позволяет полностью определить её интеграл.

ТЕОРЕМА I(7.4). Пусть f интегрируема. Тогда её интеграл единствен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\Phi_1 = \int f$, $\Phi_2 = \int f$, и докажем, что $\Phi_1 = \Phi_2$. Обозначим через E_1, E_2 такие не более чем счётные подмножества I, что $d\Phi_1(x) = f(x)$ для $x \in I \setminus E_1$, $d\Phi_2(x) = f(x)$ для $x \in I \setminus E_2$. Рассмотрим разность $\Psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Пусть H – такая функция на I, что $[H] = \Psi$. Во-первых, H непрерывна и, во-вторых, $H'(x) = 0$ для точек $x \in I \setminus (E_1 \cup E_2)$. Тогда, согласно признаку постоянства функции (см. IУ.2.2) H постоянна на I, поэтому $\Psi = 0$, то есть $\Phi_1 = \Phi_2$.

I. Пусть f_1, f_2 – интегрируемые на I функции, λ, μ – числа. Тогда функция $f = \lambda f_1 + \mu f_2$ интегрируема, при этом

$$\int(\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda \cdot \int f_1 + \mu \cdot \int f_2 .$$

Возьмём первообразные H_1, H_2 функций f_1, f_2 и создадим сумму $H = \lambda H_1 + \mu H_2$. Она непрерывна на I, кроме того, её производная H' равна $\lambda f_1 + \mu f_2$ в основном на H. Тем самым H – первообразная f, при этом

$$\lambda \int_a^b f_1 + \mu \int_a^b f_2 = \lambda \cdot (H_1(b) - H_1(a)) + \mu (H_2(b) - H_2(a)) =$$
$$= \lambda H_1(b) + \mu H_2(b) - (\lambda H_1(a) + \mu H_2(a)) = H(b) - H(a) = \int_a^b f$$

для любых $a, b \in I$, что и требовалось.

7.2. ТЕОРЕМА 2(7.4). Пусть f – вещественная интегрируемая на I функция такая, что $f \geqslant 0$ в основном на I. Тогда если $a, b \in I$, $a \leq b$, то $\int_a^b f \geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – первообразная f. Тогда, по условию, $H'(x) \geqslant 0$ в основном на I и, по признаку монотонности, H – возрастающая. Тем самым $\int_a^b f = H(b) - H(a) \geqslant 0$.

СЛЕДСТВИЯ. I. Пусть f_1, f_2 – такие вещественные интегрируемые на I функции, что $f_1 \leq f_2$ в основном на I. Тогда для любых a, b из I таких, что $a \leq b$, выполнено $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$.

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 2 и предложения I.

2. Пусть f – интегрируемая на I функция и $\langle a,b\rangle$ – некоторый элемент из $\mathcal{P}_I$. Предположим, что $m \le f(x) \le M$ $(m,M \in \mathbb{R})$ в основном на $\overline{|\langle a,b\rangle|}$. Тогда $m \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le M$ +).

Заметим прежде всего, что если h – постоянная на I функция, то есть $h(x)=c$ $(x \in I)$, то $\int_a^b h = c\cdot(b-a)$ для любого $\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}_I$. Далее, применяя следствие I к неравенству $f_1(x) \le f(x) \le f_2(x)$, где $f_1 : x \longmapsto m$, $f_2 : x \longmapsto M$ $(x \in \overline{|\langle a,b\rangle|})$, получаем

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f \le M\cdot(b-a),$$

что и требовалось.

3. Пусть f, h – интегрируемые на I функции, причём h неотрицательна на I, а f непрерывна на некотором промежутке $[\alpha,\beta]$ $(\alpha \le \beta)$, лежащем в I. Тогда существует γ такое, что $\int_\alpha^\beta f\cdot h = f(\gamma)\cdot\int_\alpha^\beta h$.

Обозначим соответственно через m, M наименьшее и наибольшее значения f на промежутке $[\alpha,\beta]$. Так как $h(x) \ge 0$ $(x \in [\alpha,\beta])$, то $m\cdot h(x) \le f(x)\cdot h(x) \le M\cdot h(x)$, и по предыдущему следствию имеем $m\cdot\int_\alpha^\beta h \le \int_\alpha^\beta f\cdot h \le M\cdot\int_\alpha^\beta h$. Если $h=0$ в основном на $[\alpha,\beta]$, то $\int_\alpha^\beta f\cdot h = \int_\alpha^\beta h = 0$, и утверждение справедливо. Если же $h(x)>0$ для более чем счётного подмножества в $[\alpha,\beta]$, то $\int_\alpha^\beta h > 0$, откуда

$$m \le \frac{\int_\alpha^\beta f\cdot h}{\int_\alpha^\beta h} \le M.$$

Так как m, M – значения функции f и она непрерывна, то в некоторой точке γ из $[\alpha,\beta]$ она принимает значение $f(\gamma) = \frac{\int_\alpha^\beta f\cdot h}{\int_\alpha^\beta h}$, а это и требовалось.

4. Пусть f – интегрируемая на I функция и Φ – её интеграл. Если в точке x из I функция f непрерывна, то $d\Phi(x) = f(x)$. То есть плотность Φ в точке x равна $f(x)$.

Мы должны, задавшись произвольным $\varepsilon>0$, найти такое $\delta>0$, что $\left|\frac{\Phi(\langle x, x+h\rangle)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon$, если только $|h|<\delta$. В силу непрерывности f, по ε можно найти такое δ, что $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$ для $|h|<\delta$ или $-\varepsilon + f(x) \le f(x+h) \le \varepsilon + f(x)$. Обозначив $m = f(x)-\varepsilon$,

---

+) Напомним, что $\overline{|\langle a,b\rangle|}$ – замыкание носителя промежутка $\langle a,b\rangle$, то есть $\overline{|\langle a,b\rangle|} = \begin{cases} [a,b], & \text{если } a \le b \\ [b,a], & \text{если } b \le a. \end{cases}$

$M=f(x)+\varepsilon$ и применяя следствие 2, получаем $m\le\frac{\Phi(\langle x,x+h\rangle)}{h}\le$ $\le M(|h|<\delta)$. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 3(7.4). Пусть f – (комплексная), g – вещественная интегрируемые на I функции такие, что $|f|\le g$ в основном на I. Тогда если $a,b\in I$, $a\le b$, то $|\int_a^b f|\le\int_a^b g$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[H]=\int f$, $[L]=\int g$, то есть $H'(x)=$ $=f(x)$, $L'(x)=g(x)$ в основном на I. Тогда, по условию, $|H'(x)|\le$ $\le L'(x)$ в основном на I, и, в силу теоремы 2(2.4), имеем $|H(b)-H(a)|\le L(b)-L(a)$ для любых a,b из I таких, что $a\le b$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема, конечно, справедлива и в том случае, когда f принимает вещественные значения.

7.3. В этом пункте речь пойдёт о способах нахождения неопределённых интегралов.

ТЕОРЕМА 4(7.4). Пусть f – интегрируемая на I функция и H – её первообразная. Пусть есть также такие промежуток J и функция φ, что

I) φ непрерывна на J и $\varphi[J]\subset I$;

2) φ дифференцируема в основном на J;

3) $\varphi^{-1}[E]=E_1$ не более чем счётно

(здесь E – такое подмножество в I, что $H'(x)=f(x)$ для $x\in I\setminus E$).

Обозначим $h=(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Тогда $\int_\alpha^\beta h=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$ $(\alpha,\beta\in J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим непрерывную на J функцию $G=$ $=H\circ\varphi$. Из условий теоремы можно усмотреть, что G дифференцируема в основном на J, и $G'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ в тех точках t из J, где она существует. Таким образом, G –первообразная для h и $\int_\alpha^\beta h=G(\beta)-G(\alpha)=H(\varphi(\beta))-H(\varphi(\alpha))=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эту теорему называют формулой замены переменной в определённом интеграле.

ТЕОРЕМА 5(7.4). Пусть u,v функции, определённые в основном на I такие, что

I) существует непрерывная на I функция H такая, что $H=u\cdot v$ в основном на I;

2) в основном на I функции u,v дифференцируемы;

3) на I существует один из интегралов $\int u'v$, $\int uv'$.

Тогда существует и второй из этих интегралов, при этом

$$\int uv' = [H] - \int u'v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция $u'v$ интегрируема на I и обозначим $\int u'v = [L]$. Рассмотрим разность $G = H - L$. Эта функция непрерывна на I, ибо H, L непрерывны. Так как $H' = u'v + uv'$ в основном на I, то функция G дифференцируема в основном на I и $G'(x) = u(x)\cdot v'(x)$ Итак, G – первообразная для $u\cdot v$, поэтому $[G] = [H-L] = [H] - [L]$, а это и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат доказанной теоремы называют формулой интегрирования по частям.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть f имеет на I конечные производные, до порядка n включительно, и x_0, x – точки из I. Тогда

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

В самом деле, при $n=1$ требуемое равенство имеет вид $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'$ и выполнено по определению интеграла. Пусть оно выполнено для некоторого $k < n$. Тогда, применяя доказанную теорему с $u : t \mapsto f^{(k)}(t)$, $v : t \mapsto -\frac{1}{k}(x-t)^k$ $(t \in I)$, получим

$$\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt = \frac{1}{k} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt$$

и, подставляя в равенство

$$\frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\,dt = f(x) - f(x_0) - \left(f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\right),$$

получаем следующее: $-\frac{1}{k!} f^{(k)}(x-x_0)^k + \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,dt =$

$$= f(x) - f(x_0) - \left(f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}\right).\ .$$

То есть, предположив справедливость требуемого равенства для некоторого $k<n$ мы убедились, что оно верно и для $k+1$.

Доказанное следствие называют формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вернёмся к рассмотрению функции $f : x \mapsto (1+x)^{\alpha}$ (см. 5.2) и оценим разность $r_n(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$, используя предыдущее следствие. Запишем её в виде

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)\cdot(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n dt=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n x^n d\theta=$$

$$=\alpha\cdot C_{\alpha-1}^n\cdot x^n\cdot\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n d\theta .$$

Отсюда, поскольку $\frac{1-\theta}{1+\theta x}\le 1$ при $-1<x<1$, имеем

$$|r_n(x)|\le|\alpha|\cdot C_{\alpha-1}^n\cdot|x|^n\cdot\int_0^1 (1+\theta x)^{\alpha-1}\,d\theta.$$

Нетрудно убедиться в том, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_{\alpha-1}^n\cdot|x|^n=0$ при $|x|<1$, тем самым и $\lim\limits_{n\to\infty}|r_n(x)|=0$. Итак, при $|x|<1$ и любых $\alpha\in\mathbb{R}$ функция f представима в виде суммы ряда.

§ 8. Условия существования интеграла

До сих пор мы вели речь об интегрируемых функциях, не касаясь вопроса о том, какие свойства функции гарантируют их интегрируемость. Далее будет показано, что непрерывные функции интегрируемы, и этого обстоятельства вполне достаточно во многих случаях, поэтому мы не будем заниматься выяснением обширности класса интегрируемых функций, тем более что задача эта, по-видимому, удовлетворительного решения не имеет.

8.I. Прежде всего, сделаем одно очевидное замечание. Пусть f интегрируема на I и I_0 – содержащийся в I промежуток. Тогда f интегрируема на I_0 и её интеграл по I_0 – сужение на I_0 интеграла по I.

I. Пусть функция f интегрируема на промежутках I_1, I_2. Предположим, что $I=I_1\cup I_2$ – промежуток и $I_1\cap I_2\ne\varnothing$. Тогда f интегрируема на I.

Рассмотрим случай, когда $I_1\cap I_2=x_0$ – точка. Среди первообразных функции f на промежутках I_1, I_2 выберем такие H_1, H_2, что $H_1(x_0)=H_2(x_0)$, и определим функцию H на I следующим образом:

$$H:x\mapsto\begin{cases}H_1(x), \text{если } x\in I_1,\\ H_2(x), \text{если } x\in I_2.\end{cases}$$

Так определённая H непрерывна и является первообразной функции f на промежутке I.

Тот случай, когда $I_1\cap I_2$ состоит более чем из одной точки, легко сводится к рассмотренному.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $x_0, x_1, \dots, x_n$ – конечный набор точек промежутка $[a,b]$ такой, что $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. и функция f интегрируема на каждом $[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\dots,n-1)$. Тогда f интегрируема на I.

Доказательство получается многократным применением предложения I.

2. Пусть функция f интегрируема на любом замкнутом промежутке, содержащемся в I. Тогда f интегрируема на I.

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА I(8.4). Пусть $I=[a,b)$ и f – функция, определённая в основном на I и интегрируемая на этом промежутке. Предположим, что существуют такие точка α из I и функция F, определённая в основном на $I_0=[\alpha,b)$, что F интегрируема на $\bar{I}_0=[\alpha,b]$ и, кроме того, $|f(x)|\leq F(x)$ в основном на I_0. Тогда функция f интегрируема на $\bar{I}=[a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $[H]=\int_I f$, $[L]=\int_{I_0} F$. Мы должны доказать существование функции $\bar{H}$, являющейся первообразной для функции f на $\bar{I}$.

Докажем прежде всего, что существует $\lim\limits_{\mathscr{H}_b} H$. Пусть $\beta,\gamma\in I_0$, $\beta<\gamma$. Так как $|f(x)|\leq F(x)$ в основном на I_0, то $\left|\int_\beta^\gamma f\right|\leq\int_\beta^\gamma F$, или $|H(\gamma)-H(\beta)|\leq L(\gamma)-L(\beta)$. Если $\gamma<\beta$, то $|H(\gamma)-H(\beta)|\leq L(\beta)-L(\gamma)$, то есть для любых β,γ из I_0 справедливо $|H(\gamma)-H(\beta)|\leq|L(\gamma)-L(\beta)|$ (*).

Поскольку L – первообразная для F на $[\alpha,b]$, то L непрерывна на $\bar{I}_0$, тем самым $\lim\limits_{\mathscr{H}_b} L=L(b)$. Согласно критерию Коши (теорема 3(4.2)), для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность $V\in\mathscr{H}_b$, что $|L(x')-L(x'')|<\varepsilon$ для $x',x''\in V$.
Но тогда, в силу (*), $|H(x')-H(x'')|<\varepsilon$ для тех же x', x'' и, вновь по критерию Коши, существует $\lim\limits_{\mathscr{H}_b} H$. Рассмотрим теперь функцию $\bar{H}: x\mapsto\begin{cases}H(x), & \text{если } x\in I,\\ \lim\limits_{\mathscr{H}_b} H, & \text{если } x=b.\end{cases}$ Эта функция непрерывна,

и в основном на I выполнено $H'(x)=f(x)$, то есть $\bar{H}$ – первообразная для f на $\bar{I}$. Таким образом, f интегрируема на $\bar{I}$ и $\int_{\bar{I}} f=[H]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл $\int_{\bar{I}} f$ функции f из предыдущей теоремы называют **несобственным** интегралом.

7.2. ТЕОРЕМА 2(8.4). Пусть $\{f_n\}$ – последовательность функций, определённых в основном на промежутке I в $\mathbb{R}$. Предположим, что

I) f_n интегрируема на I и $\int f_n = [H_n]$ $(n \in \mathbb{N})$;

2) существует в основном на I функция f такая, что $f_n \rightrightarrows f$ в основном на I.

Тогда для любых $\alpha, \beta \in I$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\alpha^\beta f_n$, причём

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n = \int_\alpha^\beta f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу предложения 2 можно I считать замкнутым. Пусть $I = [a, b]$. Рассмотрим первообразные $H_n : y \to \int\limits_a^y f_n$. Так как

$$|H_n(y) - H_m(y)| = \left|\int_a^y f_n - \int_a^y f_m\right| = \left|\int_a^y (f_n - f_m)\right| \le \rho(f_n, f_m) \cdot |y - a|$$

(здесь $\rho(f_n, f_m) = \sup\limits_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)|$), то $\{H_n(y)\}$ сходится в каждой точке y из I. Обозначим $H : x \to \lim\limits_{n\to\infty} H_n(x)$.

Согласно условию 2 теоремы, последовательность $\{H_n'\}$ сходится равномерно в основном на $[a, b]$ к функции f. А тогда мы оказываемся в условиях теоремы I(5.4), из которой следует, что H дифференцируема в основном на $[a, b]$ и её производная в основном на $[a, b]$ равна f, то есть H – первообразная функции f. Последнее же означает, что

$$\int_\alpha^\beta f = H(b) - H(a) = \lim_{n\to\infty} \int_a^\beta f_n - \lim_{n\to\infty} \int_a^\alpha f_n = \lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta f_n$$

для любых α, β из I. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3(8.4). Непрерывная на промежутке I в $\mathbb{R}$ функция интегрируема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $I = [a, b]$ – замкнутый промежуток. Так как постоянная функция интегрируема на I то, по замечанию к предложению I(8.I), всякая кусочно-постоянная на I функция интегрируема. Для доказательства теоремы осталось лишь указать, что в силу следствия 2 к теореме 6(2.3), существует последовательность $\{f_n\}$ кусочно-постоянных функций, равномерно на I сходящаяся к f, и воспользоваться предыдущей теоремой.

8.3. ТЕОРЕМА 4(8.4). Пусть I – замкнутый промежуток в $\mathcal{R}$, на нём определена непрерывная функция f и Φ – аддитивная функция на $\mathcal{P}_I$. Предположим, что существуют три числовых семейства $\{m_\Delta\}, \{M_\Delta\}, \{\xi_\Delta\}$ $(\Delta \in \mathcal{P}_I)$ такие, что

1) для любого Δ из $\mathcal{P}_I$ имеют место неравенства

$$m_\Delta \leq \frac{\Phi(\Delta)}{\lambda(\Delta)} \leq M_\Delta; \quad m_\Delta \leq f(\xi_\Delta) \leq M_\Delta \quad (\xi_\Delta \in |\bar{\Delta}|)^{+)};$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon, \quad \text{если } |\lambda(\Delta)| \leq \delta.$$

Тогда $\Phi = \int_I f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi = [H]$. Нам достаточно доказать, что $H'(x) = f(x)$ $(x \in I)$. Обозначим $\Delta = \langle x, x+h \rangle$ и, задавшись положительным числом ε, будем оценивать разность

$$\left| \frac{H(x+h)-H(x)}{h} - f(x) \right| \leq \left| \frac{H(x+h)-H(x)}{h} - f(\xi_\Delta) \right| + |f(\xi_\Delta) - f(x)| \quad (\xi_\Delta \in |\bar{\Delta}|).$$

Заметим, что из первого условия теоремы следует неравенство

$$\left| \frac{H(x+h)-H(x)}{h} - f(\xi_\Delta) \right| \leq M_\Delta - m_\Delta,$$

а в силу второго можно найти такое δ_1, что $M_\Delta - m_\Delta < \varepsilon$ при $|h| < \delta_1$. Привлекая теорему 6 (2.3), найдём $\delta_2 > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при $|x' - x''| < \delta_2$ $(x', x'' \in I)$. Тогда для h, удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta = min(\delta_1, \delta_2)$, выполнено

$$\left| \frac{H(x+h)-H(x)}{h} - f(x) \right| \leq 2\varepsilon,$$

что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть I – замкнутый промежуток в $\mathcal{R}$. Предположим, что непрерывная на I функция f и аддитивная функция Φ, заданная на $\mathcal{P}_I$, таковы, что

$$\inf_{x \in |\bar{\Delta}|} f(x) \leq \frac{\Phi(\Delta)}{\lambda(\Delta)} \leq \sup_{x \in |\bar{\Delta}|} f(x)$$

для любого $\Delta \in \mathcal{P}_I$. Тогда $\Phi = \int_I f$.

---

x) Через λ здесь обозначена функция промежутка, порождённая функцией $h : x \to x$ $(x \in I)$.

Для доказательства построим три семейства $\{m_\Delta\}$, $\{M_\Delta\}$, $\{\xi_\Delta\}$ $(\Delta\in\mathcal{D}_I)$, о которых идёт речь в условиях теоремы. Положим $m_\Delta = \inf_{x\in|\bar\Delta|} f(x)$, $M_\Delta = \sup_{x\in|\bar\Delta|} f(x)$, ξ_Δ – произвольное число из $|\bar\Delta|$.

Ясно, что первое условие теоремы удовлетворено. Выполнение же второго непосредственно следует из теорем Кантора и Вейерштрасса (см. следствие I к теореме 3(2.3) и теорему 6(2.3).

ТЕОРЕМА 5(8.4). Пусть I – замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$, на нём определена непрерывная функция f и на $\mathcal{D}_I$ задана аддитивная функция Φ. Предположим, что существуют два семейства $\{\xi_\Delta\}$, $\{r_\Delta\}$ такие, что

I) $\Phi(\Delta) = f(\xi_\Delta)\cdot\lambda(\Delta) + r_\Delta$ $\quad(\xi_\Delta\in|\bar\Delta|,\ \Delta\in\mathcal{D}_I)$;

2) по любому $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что $\left|\frac{r(\Delta)}{\lambda(\Delta)}\right|\le\varepsilon$ при $|\lambda(\Delta)|\le\delta$.

Тогда $\Phi = \int_I f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно провести аналогично доказательству теоремы 4.

§ 9. Некоторые применения интеграла

9.I. Пусть $F: I\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, где I – замкнутый промежуток в $\mathbb{R}$. Для каждого t точка $F(t)$ есть пара (x,y), где $x,y\in\mathbb{R}$. Тем самым на I определены две функции: $\varphi: t\to x$ и $\psi: t\to y$ $(t\in I)$. Если φ,ψ непрерывны, то пару (F,I) назовём **п у т ё м**. Обозначим, для краткости, значение $F(t)$ через z_t. Если $I=[a,b]$, то z_a – начало, z_b – конец пути (F,I). Путь, у которого $z_a = z_b$, называют **з а м к н у т ы м**.

Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_n$ – конечный набор точек из I, причём $a=t_0\le t_1\le\ldots\le t_n=b$. Такой набор будем в дальнейшем называть **р а з б и е н и е м** промежутка I. Обозначим $V(\tau,I)=\sum_{i=1}^{n}\rho(z_{t_{i-1}}, z_{t_i})$, где $\tau=(t_0,\ldots,t_n)$, а $\rho(z',z'')$ – расстояние между z', z''.

ЛЕММА. Пусть разбиения τ,τ' таковы, что τ' получается из τ добавлением ещё одной точки. Тогда $V(\tau,I)\le V(\tau',I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точку разбиения τ', не лежащую в τ, обозначим через t' и предположим, что $t_{i-1}\le t'\le t_i$. Тогда в $V(\tau,I)$

и $V(\tau',I)$ все слагаемые, кроме одного, окажутся одинаковыми, причём в $V(\tau,I)$ таковым окажется слагаемое $\rho(x_{t_{i-1}}, x_{t_i})$, а в $V(\tau',I)$ – такое : $\rho(x_{t_{i-1}}, x_{t'}) + \rho(x_{t'}, x_{t_i})$. Но, по известному свойству расстояния, $\rho(x_{t_{i-1}}, x_{t_i}) \le \rho(x_{t_{i-1}}, x_{t'}) + \rho(x_{t'}, x_{t_i})$, тем самым, $V(\tau,I) \le V(\tau',I)$, что и требовалось.

Длиной пути (F,I) назовём число $s_I = \sup\limits_{\tau}\{V(\tau,I)\}$, где супремум берётся по всевозможным разбиениям промежутка I. Если s_I конечно, путь (F,I) назовём спрямляемым. Путь (F,I_0), где I_0 – замкнутый промежуток в I, назовём сужением пути (F,I) на I_0.

I. Сужение спрямляемого пути (F,I) на любой содержащийся в I замкнутый промежуток спрямляемо.

Доказательство очевидно.

Определим на $\mathcal{D}_I$ функцию

$$s:\Delta \longrightarrow \begin{cases} s_{[\alpha,\beta]}, & \text{если } \Delta = \langle\alpha,\beta\rangle \quad \alpha<\beta \\ -s_{[\beta,\alpha]}, & \text{если } \Delta = \langle\alpha,\beta\rangle \quad \alpha>\beta \end{cases} \quad (\alpha,\beta\in I).$$

Ясно, что если (F,I) спрямляем, то s ограничена.

ТЕОРЕМА I(9.4). Функция s аддитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Delta_1 = \langle a,b\rangle$, $\Delta_2 = \langle b,c\rangle$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ $(a,b,c\in I)$.

Можно считать, что $a<b<c$. Возьмём разбиение τ_1 промежутка $|\overline{\Delta_1}|$, разбиение τ_2 промежутка $|\overline{\Delta_2}|$ и составим из них разбиение $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ промежутка $|\overline{\Delta}|$. Ясно, что $V(\tau_1, |\overline{\Delta_1}|) + V(\tau_2, |\overline{\Delta_2}|) \le s(\Delta)$. Отсюда для любого τ_1 справедливо, $V(\tau_1, |\overline{\Delta_1}|) \le s(\Delta) - V(\tau_2, |\overline{\Delta_2}|)$, поэтому $s(\Delta_1) \le s(\Delta) - V(\tau_2, |\overline{\Delta_2}|)$. Аналогично, $V(\tau_2, |\overline{\Delta_2}|) \le s(\Delta) - s(\Delta_1)$, и окончательно $s(\Delta_1) + s(\Delta_2) \le s(\Delta)$. (*)

Ещё проще получить противоположное неравенство. Поскольку $V(\tau, |\overline{\Delta}|) = V(\tau_1, |\overline{\Delta_1}|) + V(\tau_2, |\overline{\Delta_2}|)$, то $V(\tau, |\overline{\Delta}|) \le s(\Delta_1) + s(\Delta_2)$, отсюда $s(\Delta) \le s(\Delta_1) + s(\Delta_2)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2(9.4). Предположим, что φ, ψ дифференцируемы на I Тогда $s(I) = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\rho(x_{t_{i-1}}, x_{t_i}) = \sqrt{(\varphi(t_{i-1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i-1}) - \psi(t_i))^2}$$

(по определению расстояния в R^2), применяя теорему Лагранжа к функциям φ, ψ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$, имеем

$$\rho(z_{t_{i-1}}, z_{t_i}) = \sqrt{(\varphi'(\lambda_i))^2 + (\psi'(\mu_i))^2} \cdot (t_i - t_{i-1}) \qquad (\lambda_i, \mu_i \in (t_{i-1}, t_i)).$$

Введём следующие обозначения:

$$k_\Delta = \inf_{t\in|\bar\Delta|} \varphi'(t), \qquad \ell_\Delta = \inf_{t\in|\bar\Delta|} \psi'(t), \qquad K_\Delta = \sup_{t\in|\bar\Delta|} \varphi'(t),$$

$$L_\Delta = \sup_{t\in|\bar\Delta|} \psi'(t), \qquad m_\Delta = \sqrt{k_\Delta^2 + \ell_\Delta^2}, \qquad M_\Delta = \sqrt{K_\Delta^2 + L_\Delta^2}.$$

Тогда $\quad m_\Delta \cdot (t_i - t_{i-1}) \le \rho(z_{t_{i-1}}, z_{t_i}) \le M_\Delta \cdot (t_i - t_{i-1})$.

Просуммировав почленно эти неравенства по i, получаем $m_\Delta \cdot \lambda(\Delta) \le V(\tau, |\bar\Delta|) \le M_\Delta \cdot \lambda(\Delta)$, откуда $m_\Delta \cdot \lambda(\Delta) \le s(\Delta) \le M_\Delta \cdot \lambda(\Delta)$ и, наконец, $m_\Delta \le \frac{s(\Delta)}{\lambda(\Delta)} \le M_\Delta$. Кроме того, из определения m_Δ, M_Δ ясно, что $m_\Delta \le f(\xi_\Delta) \le M_\Delta$ для любой точки ξ_Δ из $|\Delta|$.

Воспользовавшись неравенством $\sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2} \le \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2}$ (доказательство которого предлагаем провести самостоятельно), получим

$$M_\Delta - m_\Delta = \sqrt{K_\Delta^2 + L_\Delta^2} - \sqrt{k_\Delta^2 + \ell_\Delta^2} \le \sqrt{(K_\Delta - k_\Delta)^2 + (L_\Delta - \ell_\Delta)^2}.$$

Далее, применяя теорему Кантора к функциям φ', ψ', мы по любому $\varepsilon > 0$ можем выбрать $\delta > 0$ так, что $K_\Delta - k_\Delta \le \varepsilon$, $L_\Delta - \ell_\Delta \le \varepsilon$, как только $|\lambda(\Delta)| \le \delta$, а тогда $M_\Delta - m_\Delta \le \varepsilon \cdot \sqrt{2}$.

Итак, мы показали, что находимся в условиях теоремы 4(7.4). Воспользовавшись её результатом, получаем

$$s(I) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Глеб Павлович Акилов
Владимир Николаевич Дятлов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Новосибирский государственный университет

Редактор А.К. Лаврова

Подписано в печать I8.I0.73 г. МН 08923
Бумага 60x84, I/I6. Объем I2,5 п.л. Тираж 600
Заказ 844 Цена 60 коп.

Ротапринт НГУ 630090, Новосибирск, 90

Цена 60 коп.