АКИЛОВ Г. П.
ДЯТЛОВ В. Н.

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.П.Акилов, В.Н.Дятлов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Ответственный редактор
С.С.Кутателадзе

Новосибирск • 1975

УДК 517

Лекции по математическому анализу, Акилов Г.П., Дятлов В.Н., Новосибирский государственный университет, 1975, 1-160.

Настоящий курс является продолжением лекций, изданных в 1973 г. Материал первой части используется здесь в незначительной мере, основные моменты напоминаются. Для ознакомления с курсом требуется владение основами теории множеств, математического анализа и теории векторных пространств. Продолжение лекций включает элементы теории топологических, равномерных и топологических векторных пространств. Большинство понятий и фактов излагается в общих терминах, основные из них конкретизируются для важнейших частных случаев.

Продолжение лекций рассчитано на студентов второго и третьего курсов математического факультета НГУ.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Продолжение лекций начинается с элементарного введения в теорию топологических и равномерных пространств. Здесь возникают важнейшие понятия, связанные с топологической и равномерной структурами и широко используемые как в анализе, так и за его пределами. К таким, без сомнения, стоит отнести понятие предела соответствия со значениями в топологическом пространстве, компактности множества в топологическом пространстве, непрерывности отображения топологических пространств, равномерной непрерывности отображения равномерных пространств, полноты равномерного пространства и др.

В шестой главе коротко рассматриваются элементы теории векторных пространств и прослеживается связь структуры векторного пространства со структурой топологического пространства. На этом пути возникают топологические векторные пространства, а далее - локально выпуклые и, в частности, нормированные пространства. Выясняются элементарные свойства как самих пространств, так и их отображений, "сохраняющих" заданные структуры.

Коротко о системе ссылок и обозначений. Каждый параграф разбит на пункты; первая цифра в обозначении пункта указывает номер параграфа, в котором этот пункт расположен, вторая - порядковый номер пункта в параграфе. При ссылке на содержание пункта используются указанные обозначения, если требуемый пункт расположен в пределах текущей главы, и перед обозначением пункта добавляется номер главы, если нужный пункт лежит в другой главе.

Нумерация теорем и лемм сквозная в каждом параграфе. После порядкового номера теоремы в скобках указаны номера параграфа и главы, в которых расположена теорема, и эти обозначения служат информацией для ссылок. Если теорема, на которую ссылаются, лежит в текущем параграфе, тогда указывают лишь ее порядковый номер. Некоторые (наиболее важные) теоремы именные, и при ссылке на такие теоремы их место в тексте можно найти, воспользовавшись предметным указателем.

Утверждения, не имеющие фундаментального значения, нумеруются в пределах каждого пункта римскими цифрами. Такие факты именуются предложениями, и при ссылке на них указывают сначала номер предложения, затем, в скобках, номер пункта, в котором лежит требуемое предложение.

Авторы вновь выражают глубокую признательность редактору С.С.Кутателадзе и заведующему кафедрой математического анализа НГУ профессору Ю.Г.Решетняку за то внимание, с которым они отнеслись к настоящим лекциям.

Глава У. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

До сих пор мы занимались изучением свойств отображений, принимающих значения в числовых множествах, и одной из причин успеха в развитии знаний о таких отображениях является, несомненно, то обстоятельство, что для элементов числовых множеств оказалось возможным установить шкалу близости, естественно определить связи между элементами, основанные на их взаимной удаленности. Если обратить внимание на содержание § I из второй главы, можно заметить, что нами было выделено несколько свойств, которыми обладала система окрестностей точки числового множества, и было указано, что в большинстве утверждений о функциях, опирающихся на структуру близости, используются именно эти свойства. Оказывается, что и в других, по некоторым соображениям интересных, множествах можно ввести структуру близости с аналогичными свойствами, и это предопределяет интерес к изучению множеств, наделенных такой структурой, и связанных с ними отображений.

§ I. Основные определения

I.I. В этом пункте мы коротко напомним некоторые определения и факты, связанные с фильтрующимися множествами и фильтрами (см. гл.I, § 3).

Пусть $(X,\leq)$ – упорядоченное множество. Говорят, что $E\subset X$ фильтруется по возрастанию (по убыванию), если для любых $x, y\in E$ можно указать такой $z\in E$, что $x, y\leq z$ (соответственно $z\leq x, y$).

Множество $F\subset X$ называется (убывающим) фильтром в X, если оно фильтруется (по убыванию) и, кроме того, с каждым $x\in F$ содержит сегмент $[x,\rightarrow]=\{y\in X : x\leq y\}$. Аналогично можно дать определение возрастающего фильтра, однако в дальнейшем, за исключением специально оговоренных случаев, под фильтром мы будем понимать убывающий фильтр.

I. Пусть E – фильтрующееся по убыванию множество. Среди фильтров, содержащих E, имеется наименьший.

Напомним, что такой фильтр есть не что иное как объединение $\tilde{E}=\bigcup_{x\in E}[x,\to]$. О фильтре $\tilde{E}$ говорят, что он п о р о ж д е н множеством E. Фильтрующееся множество $E\subset X$, порождающее фильтр $\tilde{E}$, называется б а з и с о м этого фильтра.

Если E – базис фильтра F, то для любого $y\in F$ в E найдется x такой, что $x\leq y$. Справедлив и обратный факт: если E – подмножество в F такое, что для любого $y\in F$ найдется $x\in E$ такой, что $x\leq y$, то E – базис фильтра F.

Пусть F_1, F_2 – фильтры и $F_1\subset F_2$. В этом случае говорят, что фильтр F_1 г р у б е е фильтра F_2, или что фильтр F_2 т о н ь ш е фильтра F_1.

II. Пусть E_1, E_2 – фильтрующиеся множества, порождающие фильтры F_1, F_2 соответственно. Тогда F_2 тоньше, чем F_1 в том и только в том случае, если для любого $x_1\in E_1$ найдется $x_2\in E_2$ такой, что $x_2\leq x_1$.

Из этого предложения очевидным образом можно получить такое.

III. Фильтрующиеся множества E_1, E_2 являются базисами одного и того же фильтра в том и только в том случае, если для каждого элемента одного из множеств E_1, E_2 в другом из этих множеств можно найти элемент, меньший данного.

Обозначим через Φ множество всех фильтров в данном упорядоченном множестве X и упорядочим Φ по включению. Фильтр U, максимальный в множестве Φ, называется у л ь т р а ф и л ь т р о м. Можно показать, что Φ удовлетворяет условию леммы Цорна, поэтому каков бы ни был $F\subset\Phi$, существует ультрафильтр, содержащий F.

В дальнейшем в качестве упорядоченного множества X обычно будет рассматриваться упорядоченная по включению система $\mathcal{P}_0(A)$ всех непустых подмножеств некоторого множества A. В связи с этим напомним, что множество $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{P}_0(A)$ является фильтром в том и только в том случае, если

1) для любых $A_1, A_2\in\mathfrak{A}$ пересечение $A_1\cap A_2$ входит в $\mathfrak{A}$;

2) если $A_1\in\mathfrak{A}$ и $A_1\subset A_2$, то $A_2\in\mathfrak{A}$.

Для фильтров в $\mathcal{P}_0(A)$ докажем следующий факт.

IУ. Пусть $\mathcal{F}$ - фильтр и $\mathcal{U}$ - ультрафильтр в $\mathcal{P}_0(A)$. Предположим, что для любых $F\in\mathcal{F}$, $U\in\mathcal{U}$ пересечение $F\cap U$ непусто. Тогда $\mathcal{F}\subset\mathcal{U}$.

Действительно, совокупность элементов вида $F\cap U$ $(F\in\mathcal{F},\ U\in\mathcal{U})$ фильтруется, и порождаемый ею фильтр $\mathcal{U}_0$ содержит, очевидно, как $\mathcal{F}$, так и $\mathcal{U}$. Поскольку $\mathcal{U}$ - ультрафильтр, то $\mathcal{U}_0=\mathcal{U}$, а тогда $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0\supset\mathcal{F}$.

В частности, беря за $\mathcal{F}$ фильтр всех множеств, содержащих данное непустое множество $V\subset A$, получим, что если $V\bar{\in}\mathcal{U}$, то в $\mathcal{U}$ найдется множество, не пересекающееся с V. Этот результат верен, разумеется, и тогда, когда $V=\emptyset$.

У. Пусть $\mathcal{U}$ - фильтр непустых подмножеств множества A. Тогда $\mathcal{U}$ - ультрафильтр в том и только в том случае, если из того, что $V\cup W\in\mathcal{U}$ $(V, W\subset A)$, следует, что либо $V\in\mathcal{U}$, либо $W\in\mathcal{U}$.

В самом деле, если $\mathcal{U}$ - ультрафильтр и множества V, W ему не принадлежат, то, согласно сказанному выше, найдутся множества U_1, $U_2\in\mathcal{U}$ такие, что $V\cap U_1=W\cap U_2=\emptyset$. Но тогда и $(V\cup W)\cap(U_1\cap U_2)=$ $=\emptyset$, а так как $U_1\cap U_2\in\mathcal{U}$, то $V\cup W\bar{\in}\mathcal{U}$.

Предположим, что условие предложения выполнено, а $\mathcal{U}$ не является ультрафильтром. Обозначив через $\mathcal{U}'$ ультрафильтр, содержащий $\mathcal{U}$, возьмем множество $E\in\mathcal{U}'\setminus\mathcal{U}$. Поскольку $E\cup E'\in\mathcal{U}$, где E' - дополнение множества E, а $E\bar{\in}\mathcal{U}$, то $E'\in\mathcal{U}$. Но тогда $E'\in\mathcal{U}'$, ибо $\mathcal{U}\subset\mathcal{U}'$, следовательно, пересечение $E\cap E'$ также входит в $\mathcal{U}'$, что невозможно, так как $E\cap E'=\emptyset$.

Рассмотрим упорядоченное множество $(X,\leqslant)$ и множество $E\subset X$. Элемент $a\in X$ называется верхней (нижней) границей множества E, если $x\leqslant a$ $(a\leqslant x)$ для всех $x\in E$ (см. пункт I.3.3). Элемент $b\in X$ называется наибольшим (наименьшим) элементом множества E, если $b\in E$ и $x\leqslant b$ $(b\leqslant x)$ при всех $x\in E$. Наименьшая из верхних границ множества E называется точной верхней границей множества E и обозначается через $\sup E$, наибольшая из нижних границ множества E называется точной нижней границей множества E и обозначается через $\inf E$.

Установим два полезных факта, относящихся к точным границам множества в упорядоченном множестве.

УI. Предположим, что каждое подмножество в упорядоченном множестве X имеет точную верхнюю границу. Тогда существует и точная нижняя граница каждого подмножества в X.

Пусть $E\subset X$ и E_i – совокупность нижних границ множества E. По предположению, существует $x=\sup E_i$. Покажем, что $x=\inf E$. Ясно, что x – нижняя граница E. Пусть y – какая-либо другая нижняя граница. Тогда $y\in E_i$, поэтому $y\leq \sup E_i=x$, так что $x= =\inf E$.

УП. Пусть E – произвольное множество в упорядоченном множестве X. Обозначим через $\widetilde{E}$ множество, состоящее из точных верхних границ всех конечных подмножеств из E. Тогда точные верхние границы множеств E и $\widetilde{E}$ существуют или нет одновременно, причем если они существуют, то $\sup E=\sup \widetilde{E}$.

Для доказательства достаточно заметить, что множества верхних границ у множеств E и $\widetilde{E}$ совпадают.

Напомним, что под соответствием F, действующим из множества T в множество X, мы понимаем подмножество F множества $T\times X$. Множество $Pr_I F=\{t\in T: F[t]\neq\emptyset\}$ называется областью определения соответствия F и обозначается через Ω_F. Множество $Pr_{II} E= =\{x\in X: F^{-1}[x]\neq\emptyset\}$ называется множеством значений соответствия F и обозначается через Δ_F.

Если F удовлетворяет условию однозначности, т.е. если в F не входят одновременно упорядоченные пары (t,x_1), (t,x_2) с различными x_1, x_2, то F называется отображением. Отображение обозначают одним из следующих символов: $F: t\mapsto F(t)$, $F: T\to X$, $x=F(t)$, или просто через F. Если $\Omega_F=T$, мы говорим об отображении множества T в множество X.

Данные здесь обозначения незначительно отличаются от принятых в первой книге, однако это вряд ли приведет к недоразумениям.

Иногда отображение $\varphi: \Xi\to X$ множества Ξ в X называют семейством φ элементов множества X и обозначают через $\varphi:\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$, или просто через $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$, где $x_\xi=\varphi(x_\xi)$ $(\xi\in\Xi)$.

I.2. Пусть X – некоторое множество. Отображение τ, сопоставляющее каждому $x\in X$ фильтр $\mathcal{U}_x$ непустых подмножеств в X, называется *предтопологией* на X, если $x\in\mathcal{U}$ при всех $\mathcal{U}\in\mathcal{U}_x$. Упорядоченная пара (X,τ) называется *предтопологическим пространством*, элементы множества X – *точками* этого пространства, множества, входящие в $\mathcal{U}_x$, – *окрестностями* точки x, а $\mathcal{U}_x$ – *фильтром* (или системой) *окрестностей* точки

$x \in X$. Базис фильтра окрестностей точки x называется также **фундаментальной системой окрестностей** точки x.

Хотя предтопологическое пространство было определено как упорядоченная пара (X, τ), обычно с множеством X связывают какую-то одну, "стандартную", предтопологию. В связи с этим мы нередко в обозначении будем опускать указание на предтопологию и говорить о предтопологическом пространстве X.

Допуская вольность речи, о подмножествах множества X, наделенного предтопологией, мы будем говорить как о множествах предтопологического пространства.

Рассмотрим предтопологическое пространство (X, τ). Множество $G \subset X$ называется **открытым**, если оно является окрестностью каждой своей точки, иначе говоря, если $G \in \mathcal{U}_x$ для каждой точки $x \in G$. Обозначим через $\mathcal{O}_\tau(X)$ совокупность всех открытых в предтопологии τ подмножеств множества X. Указания предтопологии или множества X в обозначении системы открытых множеств иногда будут опущены.

ТЕОРЕМА I (I.5). Пусть (X, τ) - предтопологическое пространство. Совокупность $\mathcal{O}_\tau(X)$ обладает следующими свойствами:

I) $\varnothing,\ X \in \mathcal{O}_\tau(X)$;

2) если $G_1, G_2 \in \mathcal{O}_\tau(X)$, то $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{O}_\tau(X)$;

3) если $\{G_\xi\}(\xi \in \Xi)$ - произвольное семейство элементов из $\mathcal{O}_\tau(X)$, то $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathcal{O}_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первого свойства очевидна. Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{O}_\tau(X)$ и $x \in G_1 \cap G_2$. Тогда $x \in G_1$, $x \in G_2$, а поскольку $G_1, G_2 \in \mathcal{U}_x$ и $\mathcal{U}_x$ - фильтр, то $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}_x$, чем доказано второе свойство.

Рассмотрим произвольное семейство $\{G_\xi\}(\xi \in \Xi)$ открытых множеств. Если $x \in \bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi$, то $x \in G_{\xi_0}$ при некотором $\xi_0 \in \Xi$. Но $G_{\xi_0} \in \mathcal{U}_x$, а $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \supset G_{\xi_0}$, следовательно, и $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathcal{U}_x$, так как $\mathcal{U}_x$ - фильтр. Итак, $\bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathcal{O}_\tau(X)$. Теорема доказана.

Предтопология τ на множестве X называется **топологией**, если каждая точка $x \in X$ имеет фундаментальную систему окрестностей, состоящую из открытых (в предтопологии τ) множеств. Иначе говоря, предтопология τ есть топология на X, если для каждых $x \in X$, $V \in \mathcal{U}_x$ найдется $G \in \mathcal{O}_\tau(X)$ такое, что

$G\in\mathfrak{W}_x$, $G\subset V$.

Нередко говорят о топологическом пространстве X, опуская явное указание топологии и лишь подразумевая его. Аналогично, о подмножествах множества X, снабженного топологией, говорят как о множествах топологического пространства X.

Если на X задана топология, говорят, что на X определена топологическая структура, или структура топологического пространства.

ТЕОРЕМА 2 (I.5). Пусть $\mathcal{O}$ - совокупность подмножеств множества X, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\varnothing, X\in\mathcal{O}$;

2) если $G_1, G_2\in\mathcal{O}$, то $G_1\cap G_2\in\mathcal{O}$;

3) если $\{G_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - произвольное семейство элементов из $\mathcal{O}$, то $\bigcup_{\xi\in\Xi} G_\xi\in\mathcal{O}$.

Тогда на X существует единственная топология τ такая, что $\mathcal{O}$ совпадает с совокупностью $\mathcal{O}(X)$ открытых в топологии τ подмножеств множества X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совокупность $\mathcal{O}_x=\{G\in\mathcal{O}: x\in G\}$ непустых подмножеств в X фильтруется по убыванию в силу условия 2. Отображение $\tau: x\mapsto \mathfrak{X}_x\ (x\in X)$, где $\mathfrak{X}_x=\widetilde{\mathcal{O}}_x$ - фильтр, порожденный системой $\mathcal{O}_x$, является, очевидно, предтопологией на X. Непосредственно из определения $\mathfrak{W}_x$ следует, что каждое $G\in\mathcal{O}$ есть окрестность всякой своей точки, т.е. $\mathcal{O}\in\mathcal{O}_\tau(X)$. Обратно, если $G\in\mathcal{O}_\tau(X)$, то, поскольку $G\in\mathfrak{W}_x\ (x\in G)$, а $\mathcal{O}_x$ - фундаментальная система окрестностей точки x, найдется $G_x\in\mathcal{O}$ такое, что $x\in G_x\subset G$. Отсюда, учитывая третье условие, получаем, что $G=\bigcup_{x\in G} G_x\in\mathcal{O}$, следовательно, имеет место включение $\mathcal{O}_\tau(X)\subset\mathcal{O}$, которое вместе с ранее доказанным включением $\mathcal{O}\subset\mathcal{O}_\tau(X)$ дает совпадение $\mathcal{O}$ с $\mathcal{O}_\tau(X)$. Так как $\mathcal{O}_x$ - базис фильтра $\mathfrak{W}_x$ и все множества $G\in\mathcal{O}_x$ открыты, то τ - топология на X. Существование требуемой топологии установлено.

Убедимся в ее единственности. Пусть σ - некоторая другая топология на X, удовлетворяющая условию $\mathcal{O}_\sigma(X)=\mathcal{O}$, и $\mathfrak{M}_x$ - фильтр окрестностей точки $x\in X$ в топологии σ. Для каждой окрестности $V\in\mathfrak{W}_x$ найдется $G\in\mathcal{O}$ такое, что $x\in\mathfrak{M}_x$. Но по условию $G\in\mathcal{O}_\sigma(X)$, так что $G\in\mathfrak{M}_x$ и $V\in\mathfrak{M}_x$, откуда получаем соотношение $\mathfrak{W}_x\subset\mathfrak{M}_x$. Обратно, пусть $U\in\mathfrak{M}_x$. Поскольку

σ - топология, то каждая точка $x \in X$ обладает фундаментальной системой открытых окрестностей, в частности, найдется $G \in \mathcal{O}_\sigma(X) = G$ такое, что $x \in G \subset V$. Совокупность $\mathcal{O}$ - базис фильтра окрестностей точки x в топологии τ, следовательно, $u \in \mathcal{W}_x$ и, с учетом соотношения $\mathcal{W}_x \subset \mathfrak{M}_x$, получаем окончательно $\mathcal{W}_x = \mathfrak{M}_x$. Единственность требуемой топологии установлена, и теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Рассмотрим предтопологию τ на X. В силу теоремы I совокупность $\mathcal{O}_\tau(X)$ открытых в предтопологии τ множеств в X удовлетворяет условиям теоремы 2, следовательно, существует единственная топология $\Phi[\tau]$ на X такая, что $\mathcal{O}_\tau(X) = \mathcal{O}_{\Phi[\tau]}(X)$. Топологию $\Phi[\tau]$ называют топологией, а с с о ц и и р о в а н н о й с данной предтопологией τ на X.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим отображение $x \mapsto \mathcal{U}_x$, сопоставляющее каждому $x \in X$ фильтрующуюся по убыванию систему $\mathcal{U}_x$ непустых подмножеств в X, удовлетворяющую условиям:

I) $x \in U$ для каждых $x \in X$, $U \in \mathcal{U}_x$;

2) если $U \in \mathcal{U}_x$ и $y \in U$, то $U \in \mathcal{U}_y$.

Тогда существует единственная топология μ на X такая, что при каждом $x \in X$ совокупность $\mathcal{U}_x$ будет служить базисом фильтра окрестностей точки x в топологии μ.

В самом деле, из условия I сразу следует, что отображение $\lambda : x \mapsto \mathcal{W}_x \ (x \in X)$, где $\mathcal{W}_x = \widetilde{\mathcal{U}}_x$, является предтопологией на X. Топология $\Phi[\lambda]$, ассоциированная с λ, и есть, очевидно, требуемая, так как, в силу второго условия, все множества из $\mathcal{U}_x$ открыты в λ.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Установленный в теореме факт позволяет задавать топологию на X указанием некоторой системы подмножеств в X, которые оказываются открытыми в задаваемой топологии. Если топология на X вводится таким путем, говорят, что топология на X задана указанием системы открытых множеств.

Рассмотрим несколько примеров.

I. Пусть $X = \mathbb{R}^2$. С каждой точкой $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ свяжем фильтрующуюся по убыванию систему $\mathcal{O}\!\!\iota_z$ подмножеств в $\mathbb{R}^2$ вида $A_r(z) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ |x-u| < r, |y-v| < r, (x-u)\cdot(y-v) = 0\}$, где $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. На координатной плоскости множество $A_r(z)$ представляет собой "крест" с центром в точке z. Отображение $z \mapsto \widetilde{\mathcal{O}\!\!\iota}_z$ является, очевидно, предтопологией на $\mathbb{R}^2$, однако никакая точка $z \in \mathbb{R}^2$ не обладает фундаментальной системой открытых в этой предтопологии окрестностей. Иначе говоря, введенное отображение определяет предтопологию, но не топологию на $\mathbb{R}^2$.

2. Пусть $(X,\leq)$ - линейно упорядоченное множество, не имеющее наибольшего и наименьшего элементов. Возьмем $x\in X$ и рассмотрим совокупность $\mathcal{U}_x=\{U_x\}$ всех открытых промежутков $U_x=\{(\alpha,\beta):\alpha<x<\beta,\alpha,\beta\in X\}$, содержащих x. Система $\mathcal{U}_x$ удовлетворяет, очевидно, условиям замечания 2 к теореме 2, следовательно, на X существует единственная топология, в которой $\mathcal{U}_x$ служит фундаментальной системой окрестностей точки x. Такая топология называется *интервальной*.

Можно определить интервальную топологию и на линейно упорядоченном множестве с наибольшим элементом $\bar{x}\in X$, рассматривая в качестве $\mathcal{U}_{\bar{x}}$ совокупность интервалов $U_{\bar{x}}=\{(\alpha,\bar{x}]:\alpha<\bar{x}\}$ и оставляя прежними системы $\mathcal{U}_x$ для $x\in X, x<\bar{x}$. Аналогичное замечание можно высказать и для линейно упорядоченного множества с наименьшим элементом.

Нетрудно заметить, что ранее определенные (см. гл. Ш, § I) топология числовой прямой и топология расширенной числовой прямой - суть топологии линейно упорядоченных множеств $(\mathbb{R},\leq)$ и $(\overline{\mathbb{R}},\leq)$ соответственно.

По аналогии с интервальной можно определить правую и левую полуинтервальные топологии на X, в которых фильтр окрестностей точки $x\in X$ порожден фильтрующейся по убыванию системой сегментов $[x,\rightarrow]=\{y\in X: x\leq y\}$(соответственно $[\leftarrow,x]=\{y\in X: y\leq x\}$). Линейно упорядоченное множество с полуинтервальной топологией нередко оказывается полезным для построения примеров, подчеркивающих тонкости в понятиях и фактах, относящихся к топологическим пространствам.

3. С каждым множеством X можно связать две в известной мере противоположные топологии. В первом случае в состав $\mathcal{W}_x$ включаются все множества, содержащие $x\in X$, и такая топология носит название *дискретной*. Во втором случае $\mathcal{W}_x$ для любого $x\in X$ состоит из единственного элемента - самого X. Эта топология носит название *вырожденной* или *антидискретной*.

Как мы увидим ниже, эти топологии занимают особое место в множестве всех топологий на множестве X.

1.3. Пусть E - некоторое множество топологического пространства X. Точка $x \in X$ называется **в н у т р е н н е й** точкой множества E, если $E \in \mathcal{W}_x$, т.е. если E - окрестность точки x. Совокупность всех внутренних точек множества E называется его **в н у т р е н н о с т ь ю** и обозначается символом E^o (или $int E$).

Основные свойства внутренности дает следующая

ТЕОРЕМА 3 (1.5). Пусть X - топологическое пространство. Тогда

1) $E^o \subset E$ для любого $E \subset X$;
2) $\varnothing^o = \varnothing$, $X^o = X$;
3) если $E_1 \subset E_2 \subset X$, то $E_1^o \subset E_2^o$;
4) для любых $E_1, E_2 \subset X$ имеет место равенство $(E_1 \cap E_2)^o = E_1^o \cap E_2^o$;
5) для любого $E \subset X$ справедливо $(E^o)^o = E^o$;
6) множество E^o открыто и является наибольшим из открытых множеств, содержащихся в E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $x \in E^o$, то, поскольку $E \in \mathcal{W}_x$, имеем $x \in E$, так что $E^o \subset E$.

2. Соотношение $\varnothing^o = \varnothing$ вытекает из первого пункта теоремы. Далее, если x - любая точка из X, то $X \in \mathcal{W}_x$, ибо $\mathcal{W}_x$ - фильтр, а тогда $x \in X^o$ и $X = X^o$.

3. Пусть $x \in E_1^o$, т.е. $E_1 \in \mathcal{W}_x$. Поскольку $\mathcal{W}_x$ - фильтр и $E_1 \subset E_2$, то $E_2 \in \mathcal{W}_x$, а это означает, что $x \in E_2^o$.

4. Так как $E_1 \cap E_2$ содержится и в E_1, и в E_2, то, согласно пункту 3, $(E_1 \cap E_2)^o \subset E_1^o$, $(E_1 \cap E_2)^o \subset E_2^o$, т.е. $(E_1 \cap E_2)^o \subset E_1^o \cap E_2^o$. Пусть теперь $x \in E_1^o \cap E_2^o$. Это означает, что $E_1 \in \mathcal{W}_x$, $E_2 \in \mathcal{W}_x$ и в силу того, что $\mathcal{W}_x$ - фильтр, имеем $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{W}_x$ или $x \in (E_1 \cap E_2)^o$, откуда $(E_1 \cap E_2)^o = E_1^o \cap E_2^o$.

5. Заметим, что $(E^o)^o \subset E^o$ в силу пункта 1. Пусть $x \in E^o$, т.е. $E \in \mathcal{W}_x$. Так как X - топологическое пространство, найдется открытая окрестность G точки x, содержащаяся в E. В силу третьего условия имеем $G^o \subset E^o$. Открытое множество G служит окрестностью каждой своей точки, следовательно, $G = G^o$, откуда $x \in G \subset E^o$. Но $G \in \mathcal{W}_x$, а поскольку $\mathcal{W}_x$ - фильтр, то и $E^o \in \mathcal{W}_x$, поэтому $x \in (E^o)^o$. Доказанное включение $E^o \subset (E^o)^o$, вместе с установленным ранее соотношением $(E^o)^o \subset E^o$, убеждает нас в справедливости пятого свойства.

6. Поскольку открытость множества E равносильна соотношению

$E^o=E$, то, в силу свойства 5, E^o открыто. Пусть G - открытое множество, содержащееся в E. Тогда $E^o\supset G^o=G$, т.е. E^o - наибольшее открытое множество, содержащееся в E.

Доказательство теоремы закончено.

ТЕОРЕМА 4 (I.5). Пусть X - некоторое множество и $\mathcal{P}(X)$ - совокупность его подмножеств. Рассмотрим отображение $i: \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$, определенное на $\mathcal{P}(X)$ и удовлетворяющее следующим условиям:

I) $i(X)=X$;

2) $i(E)\subset E$ для любого $E\in\mathcal{P}(X)$;

3) если $E_1, E_2\in\mathcal{P}(X)$, то $i(E_1\cap E_2)=i(E_1)\cap i(E_2)$;

4) $i(i(E))=i(E)$ для каждого $E\in\mathcal{P}(X)$.

Существует единственная топология τ на X такая, что внутренность E^o любого $E\in\mathcal{P}(X)$ совпадает с $i(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что совокупность $\mathcal{O}=\{E\in\mathcal{P}(X): i(E)=E\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Первые два условия теоремы 2 следуют непосредственно из условий I-3 настоящей теоремы. Пусть $\{G_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - произвольное семейство подмножеств из $\mathcal{O}$ и $G=\bigcup_{\xi\in\Xi}G_\xi$. Так как, в силу второго условия, $i(G)=G$, достаточно установить включение $i(G)\supset G$. Поскольку $G_\xi\subset G$, то из условия 3 имеем $i(G_\xi)=i(G_\xi\cap G)=i(G_\xi)\cap i(G)$, откуда $i(G_\xi)\subset i(G)$. Но $i(G_\xi)=G_\xi$, следовательно, $G=\bigcup_{\xi\in\Xi}G_\xi=\bigcup_{\xi\in\Xi}i(G_\xi)\subset i(G)$. Итак, мы убедились в выполнении всех условий теоремы 2. Ее результат позволяет заключить о существовании единственной топологии τ на X такой, что $\mathcal{O}=\mathcal{O}_\tau(X)$.

Проверим соотношение $E^o=i(E)$ $(E\in\mathcal{P}(X))$. Действительно, если $x\in E^o$, то $E\in\mathcal{U}_x$, следовательно, существует окрестность $G\in\mathcal{O}_\tau(X)$ точки x такая, что $G\subset E$. Но $G\in\mathcal{O}$, так что $x\in i(G)\subset E$. Тогда имеем

$$x\in i(G)=i(i(G))=i(i(G)\cap E)=i(i(G))\cap i(E)=i(G)\cap i(E)=i(E),$$

откуда $E^o\subset i(E)$. Обратно, пусть $x\in i(E)$. Поскольку $i(i(E))=i(E)$, то $i(E)\in\mathcal{O}=\mathcal{O}_\tau(X)$. Итак, множество $i(E)$ открыто и содержится в E, следовательно, по свойству 6 теоремы 3 получаем $i(E)\subset E^o$. Теорема доказана полностью.

I.4. Пусть E' - дополнение множества E. Точка x называется **граничной** точкой множества E, если она не входит ни в E^o, ни в E'^o. Совокупность всех граничных точек множества E

называется **г р а н и ц е й** E и обозначается символом ∂E или $Fr\,E$. Заметим сразу, что, как видно из определения, граница множества E совпадает с границей его дополнения.

Множество, получающееся из E присоединением всех его граничных точек, называется **з а м ы к а н и е м** множества E и обозначается через $\bar{E}$. Таким образом, $\bar{E}=E\cup\partial E$. Так как, по определению границы, $E\setminus\partial E=E^{o}$, то $E^{o}\cup\partial E=E\cup\partial E=\bar{E}$.

Множества E^{o}, $\partial E(=\partial E')$, E'^{o} попарно не пересекаются. Кроме того, очевидно, $E^{o}\cup\partial E\cup E'^{o}=X$. Отсюда получаем

$$\bar{E}\cap\bar{E'}=(E^{o}\cup\partial E)\cap(E'^{o}\cup\partial E)=(E^{o}\cap E'^{o})\cup\partial E=\partial E, \qquad (1)$$

$$(\bar{E})'=(E^{o}\cup\partial E)'=E'^{o}, \qquad (2)$$

$$E^{o\prime}=E'^{o}\cup\partial E=\overline{(E')}. \qquad (3)$$

Учитывая (1), можно привести следующий критерий **г р а н и ч н о с т и** точки.

I. Точка $x\in X$ является граничной точкой множества E в том и только в том случае, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с E, так и с E'.

Точки, входящие в замыкание $\bar{E}$ множества E, называются точками **п р и к о с н о в е н и я** множества E.

II. Точка $x\in X$ является точкой прикосновения множества E в том и только в том случае, если любая окрестность точки x имеет с E непустое пересечение.

В самом деле, если $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_x$ такова, что $\mathcal{U}\cap E=\emptyset$, то $\mathcal{U}\subset E'$ и E' - окрестность точки x, т.е. $x\in E'^{o}=\bar{E}'$. Обратно, если $x\bar{\in}\bar{E}$, то $\bar{E}'$ - окрестность точки x, не имеющая общих точек с E.

Опираясь на соотношение (2) и теорему 3, нетрудно доказать теорему о свойствах замыкания.

ТЕОРЕМА 5 (1.5). Пусть X - топологическое пространство. Тогда

1) $\bar{E}\supset E$ для любого $E\subset X$;
2) $\bar{\emptyset}=\emptyset$, $\bar{X}=X$;
3) если $E_1\subset E_2\subset X$, то $\bar{E}_1\subset\bar{E}_2$;
4) если $E_1, E_2\subset X$, то $\overline{E_1\cup E_2}=\bar{E}_1\cup\bar{E}_2$;
5) $\overline{(\bar{E})}=\bar{E}$ для любого $E\subset X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Остановимся лишь на доказательстве пунктов 4,5. В силу (2) и соответствующих свойств внутренности имеем

$$(\overline{E_1 \cup E_2})' = (E_1 \cup E_2)'^{o} = (E_1' \cap E_2')^{o} = E_1'^{o} \cap E_2'^{o} = \overline{E_1}' \cap \overline{E_2}' = (\overline{E_1} \cup \overline{E_2})';$$
$$((\overline{E}))' = (\overline{E})'^{o} = (E'^{o})^{o} = E'^{o} = (\overline{E})'.$$

Множество F топологического пространства (X,τ) называется замкнутым, если оно совпадает со своим замыканием, т.е. если $F = \overline{F}$. Совокупность всех замкнутых множеств топологического пространства (X,τ) будем обозначать через $\mathcal{F}_\tau(X)$, или $\mathcal{F}(X)$, или просто через $\mathcal{F}$.

С помощью соотношений (2), (3) можно легко усмотреть связь между открытыми и замкнутыми множествами, выраженную в следующем факте.

III. Множество F топологического пространства замкнуто в том и только в том случае, если его дополнение открыто.

В самом деле, из $F \in \mathcal{F}$ с помощью соотношения (2) следует $F'^{o} = \overline{F}' = F'$, т.е. $F' \in \mathcal{O}$. Обратно, если $F' \in \mathcal{O}$, то, полагая в (3) $E = F'$, имеем $\overline{F} = F$, или $F \in \mathcal{F}$.

Часто, принимая во внимание результат предложения I, свойства замкнутых множеств выводят из свойств открытых и наоборот. Типичный тому пример - следующие ниже теоремы 6 и 7.

ТЕОРЕМА 6 (1.5). Пусть X - топологическое пространство. Тогда

1) $\varnothing, X \in \mathcal{F}(X)$;

2) если $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$, то $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(X)$;

3) для любого семейства $\{F_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов из $F(X)$ множество $F = \bigcap_{\xi \in \Xi} F_\xi$ также входит в $\mathcal{F}(X)$;

4) замыкание $\overline{E}$ множества E является наименьшим замкнутым множеством, содержащим E.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из свойств открытых множеств и предложения III.

ТЕОРЕМА 7 (1.5). Пусть Φ - совокупность подмножеств некоторого множества X, обладающая следующими свойствами:

1) $\varnothing, X \in \Phi$;

2) если $F_1, F_2 \in \Phi$, то и $F_1 \cap F_2 \in \Phi$;

3) для любого семейства $\{F_\xi\}(\xi \in \Xi)$ множеств из Φ выполнено $\bigcap_{\xi \in \Xi} F_\xi \in \Phi$.

Тогда существует единственная топология τ на X такая, что $\Phi = \mathcal{F}_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в том, что совокупность $\mathcal{O} = \{G \subset X : G' \in \Phi\}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, из которой и следует результат настоящей теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Используя теорему 4, легко доказать, что если на $\mathcal{P}(X)$ определено отображение f, действующее в $\mathcal{P}(X)$ и обладающее свойствами

1) $f(\emptyset) = \emptyset$;

2) $f(E) \supset E \quad (E \subset \mathcal{P}(X))$;

3) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2) \qquad (E_1, E_2 \in \mathcal{P}(X))$;

4) $f(f(E)) = f(E)$,

то на X существует единственная топология τ такая, что замыкание $\overline{E}$ любого $E \in \mathcal{P}(X)$ совпадает с $f(E)$. Отображение f называют иногда оператором замыкания на X.

I.5. Множество A топологического пространства X называется п л о т н ы м в множестве $E \subset X$, если $E \subset \overline{A}$. О множестве A, плотном в X, говорят как о в с ю д у п л о т н о м.

I. Если G_1, G_2 - всюду плотные открытые множества пространства X, то $G = G_1 \cap G_2$ также плотно в X.

Действительно, пусть x - произвольная точка из X и V - некоторая ее окрестность. Докажем, что $V \cap G \neq \emptyset$. Можно считать V открытым множеством (иначе мы заменим V на V°). Так как x - точка прикосновения множества G_1, то $V \cap G_1 = \emptyset$. Возьмем $y \in V \cap G_1$. Далее, так как y - точка прикосновения множества G_2, то $(V \cap G_1) \cap G_2 \neq \emptyset$, откуда $V \cap G = \emptyset$. Таким образом, x - точка прикосновения G, т.е. $x \in \overline{G}$ и $\overline{G} = X$ в силу произвольности x.

Множество A топологического пространства X называется н и г д е н е п л о т н ы м, если его замыкание $\overline{A}$ не имеет внутренних точек, иначе, если дополнение его замыкания всюду плотно.

Из предложения I непосредственно вытекает

П. Объединение конечного семейства нигде не плотных множеств нигде не плотно.

В связи с понятием нигде не плотного множества дадим еще одно определение, которое используют в основном для характеристики множеств в метрическом пространстве.

О множестве C топологического пространства X говорят, что оно п е р в о й к а т е г о р и и, если его можно представить в виде объединения не более чем счетного множества нигде не плотных множеств. Множество E называется множеством в т о р о й к а т е г о р и и, если оно не является множеством первой категории.

I.6. Рассматривая множество X_o в топологическом пространстве (X,τ), можно задавать на нем некоторую топологию, связанную с топологией всего пространства. Именно, пусть $x\in X_o$. Обозначим через $\mathcal{W}_x^o$ совокупность всех множеств вида $V\cap X_o$, где $V\in\mathcal{V}_x$. Ясно, что $\mathcal{W}_x^o$ – фильтр в множестве всех непустых подмножеств множества X_o и отображение $\tau_o : x\longmapsto \mathcal{W}_x^o$ $(x\in X_o)$ – топология на X_o. Эту топологию называют топологией, и н д у ц и р о в а н н о й на X_o из X, а топологическое пространство (X_o,τ_o) – п о д п р о с т р а н с т в о м пространства (X,τ). Как обычно в подобных ситуациях, мы будем опускать указатель топологии на X_o и говорить просто о подпространстве X_o топологического пространства X.

I. Множество $\mathcal{U}$ открыто в X_o в том и только в том случае, если его можно представить в виде $\mathcal{U}=G\cap X_o$, где $G\in\mathcal{O}(X)$.

Действительно, согласно определению индуцированной топологии, окрестность W (в пространстве X_o) точки $x\in X_o$ имеет вид $W=V\cap X_o$, где $V\in\mathcal{W}_x$. Следовательно, множество $\mathcal{U}=G\cap X_o$, где G – открытое в X множество, будет окрестностью (в X_o) каждой своей точки, т.е. $\mathcal{U}\in\mathcal{O}(X)$.

Обратно, предположим, что $\mathcal{U}\in\mathcal{O}(X_o)$. Обозначим $G=(X_o'\cup\mathcal{U})^o$. Ясно, что $G\in\mathcal{O}(X)$ и $G\cap X_o\subset(X_o'\cup\mathcal{U})\cap X_o=\mathcal{U}\cap X_o=\mathcal{U}$. Докажем противоположное включение. Возьмем $x\in\mathcal{U}$. Множество $\mathcal{U}$ служит окрестностью (в X_o) точки x и, следовательно, может быть представлено в виде $\mathcal{U}=V\cap X_o$, где $V\in\mathcal{V}_x$. Так как $V=(V\cap X_o)\cup(V\cap X_o')\subset\mathcal{U}\cup X_o'$, то и $\mathcal{U}\cup X_o'$ также является окрестностью точки x, а это означает, что $x\in G$, и тем самым $x\in G\cap X_o$.

II. Множество $Z\subset X_o$ замкнуто в пространстве X_o в том и только в том случае, если существует такое множество $F\in\mathcal{F}(X)$, что $Z=F\cap X$.

Действительно, пусть $Z\in\mathcal{F}(X_o)$. Тогда $X_o\setminus Z\in\mathcal{O}(X_o)$ и, в силу предложения I, существует такое множество $G\in\mathcal{O}(X)$, что $X_o\setminus Z=G\cap X$. Отсюда получаем $Z=X_o\setminus(G\cap X)=G'\cap X_o$, и остается заметить, что $G'\in\mathcal{F}(X)$.

Обратно, если возможно представить множество Z в виде $Z=F\cap X_o$ с $F\in\mathcal{F}(X)$, то дополнение $X_o\setminus Z=F'\cap X_o$ в соответствии с предложением I открыто в X_o, следовательно, Z замкнуто в X_o.

Пусть $E\subset X_0$. Замыкания множества E в пространствах X и X_0 могут, разумеется, отличаться одно от другого. Обозначая первое символом $\bar{E}^X$, а второе — $\bar{E}^{X_0}$, имеем

III. $\bar{E}^{X_0}=\bar{E}^X\cap X_0$.

В самом деле, вследствие предложения II, множество $\bar{E}^X\cap X_0$ замкнуто в X_0 и содержит E. Если $Z\in\mathcal{F}(X_0)$ и $Z\supset E$, то, снова применяя предложение II, можно написать $Z=F\cap X_0$, где $F\in\mathcal{F}(X)$. Так как, очевидно, $F\supset E$, то $\bar{E}^X\subset F$. Следовательно, $Z\supset\bar{E}^X\cap X_0$. Множество $\bar{E}^X\cap X_0$ — наименьшее замкнутое множество пространства X_0, содержащее E. По пункту 4 теоремы 6 это значит, что $\bar{E}^{X_0}=$ $=\bar{E}^X\cap X_0$.

I.7. Обратим внимание на то, что, согласно пунктам I теорем I, 6, пустое множество и все X являются открытыми и замкнутыми одновременно. Спрашивается, бывают ли множества в топологическом пространстве, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми (такие множества обычно называют *открыто-замкнутыми*), отличные от $\varnothing$ и X? Оказывается, что это зависит от свойств топологии пространства X.

Топологическое пространство X называется *связным*, если в нем нет открыто-замкнутых множеств, отличных от $\varnothing$ и X. В противном случае X называется *несвязным*. Примером связного топологического пространства может служить любое множество, наделенное антидискретной топологией, несвязного же — множество, состоящее не менее чем из двух элементов, с дискретной топологией. Более того, дискретное топологическое пространство таково, что в нем всякое множество открыто-замкнуто. Это свойство является характеристическим для дискретной топологии.

I.8. Определение топологического пространства обладает настолько большой общностью, что его условиям удовлетворяют множества, не наделенные фактически никакой структурой, как это будет, например, в случае, когда топология вырождена. Поэтому возникает необходимость в дополнительных требованиях, которые выделяют те или иные классы топологических пространств. Такого рода требования называют обычно аксиомами отделимости.

Топологическое пространство X называют *отделимым* или *T_1-пространством*, если для любых различных точек $x,y\in X$ существует окрестность $\mathcal{U}\in\mathcal{H}_x$, не содержащая y. Иначе говоря, отделимость пространства X означает, что

$\bigcap\limits_{U\in\mathcal{B}_x} U=\{x\}$ для любой точки $x\in X$.

Отделимость может быть охарактеризована и в других терминах.

I. Пространство X отделимо в том и только в том случае, если каждое одноточечное множество в нем замкнуто.

Действительно, если X отделимо, то множество точек прикосновения множества $\{x\}$ состоит лишь из одной точки x, т.е. $\{x\}$ замкнуто. Обратно, если x - любая точка из X и $\{x\}$ замкнуто, а y - отличная от x точка из X, то она не может являться точкой прикосновения множества $\{x\}$, поэтому найдется $U\in\mathcal{U}_x$ такая, что $y\bar{\in} U$.

Основываясь на пункте 2 теоремы 6, можно утверждать, что в отделимом пространстве замкнуты любые конечные множества.

Более сильное по сравнению с отделимостью требование выделяет класс так называемых хаусдорфовых пространств.

Топологическое пространство X называется **хаусдорфовым**, или **T_2-пространством**, если для любых различных точек $x,y\in X$ можно указать окрестности $U\in\mathcal{W}_x$, $V\in\mathcal{W}_y$, не имеющие общих точек.

Ясно, что хаусдорфово пространство отделимо, но не наоборот. Например, если X - бесконечное множество и фильтр окрестностей точки $x\in X$ определен как совокупность всех множеств, содержащих x и имеющих конечное дополнение, то получившееся топологическое пространство отделимо, но не хаусдорфово.

П. Топологическое пространство X хаусдорфово в том и только в том случае, если пересечение всех замкнутых окрестностей произвольной точки $x\in X$ состоит лишь из единственной точки x.

Действительно, если U - окрестность точки x, не пересекающаяся с некоторой окрестностью точки y, то $y\bar{\in}\overline{U}$ (по определению замыкания). Таким образом, если X - хаусдорфово пространство, то у любой точки $x\in X$ найдется замкнутая окрестность, не содержащая любую другую точку $y\in X$. Следовательно, пересечение всех замкнутых окрестностей точки x содержит лишь x.

Обратно, если пересечение всех замкнутых окрестностей точки $x\in X$ состоит только из x, то для любой отличной от x $y\in X$ можно указать замкнутую окрестность U точки x, не содержащую y. Но тогда дополнение U', будучи открытым множеством, является окрестностью каждой своей точки, в частности и точки y. Поскольку $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \emptyset$, а x, y - произвольные различные точки из X, то X - хаусдорфово.

Чтобы сформулировать дальнейшие аксиомы отделимости, нам понадобится полезное и в других отношениях понятие окрестности множества E в X. Под этим понимается всякое множество $\mathcal{U} \subset X$, которое служит окрестностью каждой точки $x \in E$, иначе говоря, окрестность множества E - всякое множество $\mathcal{U}$ в X такое, что $E \subset \mathcal{U}^\circ$. Обозначая через $\mathcal{U}_E$ систему всех окрестностей множества E, можем записать $\mathcal{U}_E = \bigcap_{x \in E} \mathcal{W}_x$. Отсюда, или непосредственно из определения, следует, что если $E \neq \emptyset$, то $\mathcal{U}_E$ является фильтром.

Топологическое пространство X называют T_3-пространством, если каковы бы ни были замкнутое множество $F \subset X$ и точка $y \bar{\in} F$, существуют окрестности $\mathcal{U}$ множества F и V - точки y, пересечение $V \cap \mathcal{U}$ которых пусто.

Заменяя в доказательстве предложения II точку x множеством F, получим следующий результат.

III. Топологическое пространство X является T_3-пространством в том и только в том случае, если пересечение всех замкнутых окрестностей любого замкнутого множества F совпадает с F.

IV. Топологическое пространство X является T_3-пространством в том и только в том случае, если фильтр окрестностей любой точки $x \in X$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.

Действительно, пусть X - T_3-пространство, x - любая точка из X и V - некоторая ее окрестность. Множество $F = V^{\circ\prime} = \overline{V'}$ замкнуто и не содержит точку x. Поэтому, согласно предложению III, найдется замкнутая окрестность W множества F, не содержащая точку x. Множество W' открыто и $x \in W'$, следовательно, $W' \in \mathcal{W}_x$. Тем более $\mathcal{U} = \overline{W'} \in \mathcal{W}_x$. Но так как W - окрестность F, то $W^\circ \supset F$, и, в силу соотношения (3), имеем $V \supset V^\circ = F' \supset W^{\circ\prime} = \overline{W'} = \mathcal{U}$. Таким образом, замкнутые окрестности точки x образуют базис фильтра $\mathcal{W}_x$.

Рассмотрим замкнутое множество $F \subset X$ и точку $x \bar{\in} F$. Поскольку $F' \in \mathcal{W}_x$, найдется замкнутая окрестность $\mathcal{U}$ точки x, содержащаяся в F'. Множество $\mathcal{U}'$ открыто и содержит F, стало быть, $\mathcal{U}'$ - окрестность множества F, не пересекающаяся с окрестностью $\mathcal{U}$ точки x, т.е. X является T_3-пространством.

Отделимое T_3-пространство называют р е г у л я р н ы м. Понятно, что регулярное пространство хаусдорфово. Обратное, вообще говоря, неверно.

И, наконец, последняя аксиома отделимости. Топологическое пространство X называют T_4- п р о с т р а н с т в о м, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств в X существуют их окрестности, также не имеющие общих точек.

Имеет место предложение, аналогичное предложению IУ.

У. Топологическое пространство X является T_4-пространством в том и только в том случае, если фильтр окрестностей любого непустого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.

Действительно, предположим, что X - T_4-пространство, возьмем в нем замкнутое множество F и его окрестность $\mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}^0 \supset F$, то $F_1 = \mathcal{U}^{0\prime} = \overline{\mathcal{U}}'$ замкнуто и не пересекается с F. Поэтому можно найти окрестности $\mathcal{U}_0$ множества F и $\mathcal{U}_1$ - множества F_1, также не пересекающиеся. Поскольку $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1'$, имеем $\overline{\mathcal{U}}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_1'} = \mathcal{U}_1^{0\prime} \subset F_1' = \mathcal{U}^0 \subset \mathcal{U}$. Следовательно, в $\mathcal{U}$ содержится замкнутая окрестность $\overline{\mathcal{U}}_0$ множества F.

Обратно, возьмем замкнутые множества F_1, F_2 с пустым пересечением и положим $G = F_2'$. Поскольку G открыто и содержит F_1, оно является окрестностью множества F_1, следовательно, можно указать замкнутую окрестность $\mathcal{U}_1$ множества F_1, содержащуюся в G. Положив $\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}_1'$, заметим, что $\mathcal{U}_2$ открыто и $\mathcal{U}_2 \supset G' = F_2$. Таким образом, $\mathcal{U}_2$ - окрестность множества F_2, не пересекающаяся с $\mathcal{U}_1$.

Если T_4-пространство X к тому же и отделимо, его называют н о р м а л ь н ы м. Нормальное пространство регулярно. Обратное и здесь не имеет места. Несколько позже будет дана характеристика нормальных топологических пространств, удобная для приложений (теорема Урысона).

В заключение отметим, что, как нетрудно показать, свойства отделимости, хаусдорфовости, регулярности сохраняются при переходе от пространства к подпространству. Этого уже нельзя сказать о нормальности, хотя построить соответствующий пример не так уж и просто.

§ 2. Предел в топологическом пространстве

Рассмотрим соответствие F, действующее из множества T в топологическое пространство X. Наличие в множестве X топологической структуры позволяет говорить о пределе соответствия F по некоторой системе подмножеств в T. В этом параграфе будут приведены соответствующие определения и выведены элементарные следствия из них.

2.I. Начнем с нескольких простых предварительных фактов, в которых не используется топологическая структура в X.

Пусть $\mathfrak{A}$ - фильтрующаяся (по убыванию) система непустых подмножеств в T. Через $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ обозначим совокупность всех множеств вида $F[\mathcal{A}]$ с $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$.

I. Система $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ фильтруется по убыванию.

Действительно, пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\in\mathfrak{A}$. Найдем в $\mathfrak{A}$ такое множество $\mathcal{A}$, что $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$. Тогда

$$F[\mathcal{A}]\subset F[\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2]\subset F[\mathcal{A}_1]\cap F[\mathcal{A}_2]$$

(см. I.2.2), что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\mathfrak{B}$ - фильтрующаяся по убыванию система подмножеств множества X, то, заменяя F на F^{-1}, получим, что $F^{-1}\langle\mathfrak{B}\rangle$ также фильтруется по убыванию.

II. Если F однозначно, причем $\Delta_F=X$ и $\mathfrak{A}$ - фильтр в $\mathfrak{P}(T)$, включающий Ω_F, то $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ - тоже фильтр.

Так как для любого $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ пересечение $\mathcal{A}\cap\Omega_F\in\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ - фильтр в системе непустых подмножеств T, то $\mathcal{A}\cap\Omega_F\neq\varnothing$ и, следовательно, $F[\mathcal{A}]=F[\mathcal{A}\cap\Omega_F]\neq\varnothing$. Пусть $\mathcal{B}$ - такое подмножество в X, что $\mathcal{B}\supset F[\mathcal{A}_0]$ для некоторого $\mathcal{A}_0\in\mathfrak{A}$. Можно считать, что $\mathcal{A}_0\subset\Omega_F$. Тогда $\mathcal{A}=F^{-1}[\mathcal{B}]\supset F^{-1}[F[\mathcal{A}_0]]=\mathcal{A}_0$ и, поскольку $\mathfrak{A}$ - фильтр и $\mathcal{A}_0\in\mathfrak{A}$, то $\mathcal{A}$ также входит в $\mathfrak{A}$. А тогда $\mathcal{B}=\mathcal{B}\cap\Delta_F=$ $=F[F^{-1}[\mathcal{B}]]=F[\mathcal{A}]$, так что $\mathcal{B}\in F\langle\mathfrak{A}\rangle$. Учитывая результат предложения I, получаем, что $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ - фильтр.

III. Если в условиях предложения II $\mathfrak{A}$ - ультрафильтр, то $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ - также ультрафильтр.

Воспользуемся критерием предложения V (I.I). Пусть $E\subset X$. Так как $F^{-1}[E]\cup F^{-1}[E']=F^{-1}[X]=\Omega_F\in\mathfrak{A}$, то по указанному критерию одно из множеств $F^{-1}[E]$, $F^{-1}[E']$ входит в $\mathfrak{A}$. Поэтому если, например, $F^{-1}[E]\in\mathfrak{A}$, то $F[F^{-1}[E]]\in F\langle\mathfrak{A}\rangle$, а тогда, поскольку $E=F[F^{-1}[E]]$, множество E входит в фильтр $F\langle\mathfrak{A}\rangle$, и осталось еще раз воспользоваться упомянутым критерием.

2.2. Рассмотрим множество T, топологическое пространство X, соответствие $F: T \to X$ и фильтрующуюся по убыванию систему $\mathfrak{A}$ подмножеств множества T, обладающую тем свойством, что $A \cap \Omega_F \neq \emptyset$ для любого $A \in \mathfrak{A}$. О таких системах $\mathfrak{A}$ будем говорить, что они з а д е в а ю т Ω_F. В этой ситуации п р е д е л о м с о о т в е т с т в и я F по системе $\mathfrak{A}$ называют элемент x пространства X такой, что фильтр $\widetilde{F\langle\mathfrak{A}\rangle}$, порожденный системой $F\langle\mathfrak{A}\rangle$, тоньше фильтра окрестностей точки x. При этом используют обозначения $x = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, или $F \xrightarrow[\mathfrak{A}]{} x$.

Приведем несколько более детальную формулировку определения. Именно, расшифровав понятие "тоньше", фигурирующее в определении, легко убедиться в том, что равенство $x = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ означает: для любой $U \in \mathfrak{U}_x$ можно указать такое $A \in \mathfrak{A}$, что $F[A] \subset U$. Такая детализация полезна при доказательствах соотношения $x = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ – по произвольной $U \in \mathfrak{U}_x$ мы будем указывать $A \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющее условию $F[A] \subset U$, что оказывается равносильным требуемому соотношению.

Пусть $\mathfrak{B}_x$ – базис фильтра $\mathfrak{U}_x$. Тогда соотношение $x = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ равносильно следующему: для всякой $U \in \mathfrak{B}_x$ можно указать $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $F[A] \subseteq U$. В этой равносильности легко убедиться, используя определение базиса фильтра.

Рассмотрим сужение F_0 соответствия F на подмножество T_0 области определения Ω_F.

I. Если система $\mathfrak{A}$ задевает множество T_0 и существует $x = \lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F_0$, равный x.

Действительно, если $U \in \mathfrak{U}_x$, то найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $F[A] \subset U$. Но $F_0[A] \subset F[A]$, поэтому $F_0[A] \subset U$, что и требовалось.

Довольно ясно, что это предложение не имеет обращения – F_0 может иметь предел по $\mathfrak{A}$, тогда как F такового не имеет. Это может произойти потому, что значения F на тех элементах из $A \cap \Omega_F$, которые не принадлежат Ω_{F_0}, могут не укладываться в некоторые окрестности точки x ни при каком $A \in \mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – фильтр непустых множеств топологического пространства X и F – тождественное соответствие $F: x \mapsto x \ (x \in X)$. Тогда $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как фильтр подмножеств множества Ω_F и говорить о пределе F по $\mathfrak{M}$. Если такой существует и равен x, его называют пределом фильтра $\mathfrak{M}$. сам фильтр $\mathfrak{M}$ называют сходящимся (к x). при этом используют одно из следующих обозначений: $\lim \mathfrak{M} = x$ или $\mathfrak{M} \to x$. Сходимость $\mathfrak{M} \to x$ равносильна тому, что фильтр $\mathfrak{M}$ тоньше фильтра окрестностей точки x, или что всякая окрестность точки x принадлежит фильтру $\mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M}$ лишь фильтрующаяся по убыванию система подмножеств X, будем говорить, что $\mathfrak{M}$ сходится к x (или что x есть предел $\mathfrak{M}$), если фильтр $\widetilde{\mathfrak{M}}$, порожденный $\mathfrak{M}$, сходится к точке x. Обозначения в этом случае используются те же, что и для фильтров.

Мы стали говорить о сходимости фильтров, имея уже определение сходимости соответствий. Можно было поступить иначе - определить сначала сходимость фильтров путем сравнения их с фильтрами окрестностей, затем на этой основе дать определение сходимости соответствий со значениями в X. Так можно поступить по той причине, что система $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ фильтруется по убыванию, и пределом F по $\mathfrak{A}$ можно было назвать предел фильтра $\widetilde{F\langle\mathfrak{A}\rangle}$, порожденного совокупностью $F\langle\mathfrak{A}\rangle$.

Эти подходы немного разнятся по форме, и это различие будет использовано при обсуждении вопросов, связанных со сходимостью,-в зависимости от ситуации, из соображений наглядности и удобства рассуждений и доказательств, мы будем использовать либо предел соответствия, либо предел фильтра.

Укажем, как подходят к определению предела семейства элементов топологического пространства. Пусть $\varphi:\{x_\xi\}\ (\xi\in\Xi)$ - семейство элементов из X, у которого множество индексов Ξ - упорядоченное фильтрующееся (по возрастанию) множество. В дальнейшем, допуская вольность речи, такие семейства будем называть фильтрующимися (по возрастанию). Образуем систему $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ξ вида $\Xi_\lambda=\{\xi\in\Xi : \xi\geqslant\lambda\}$ $(\lambda\in\Xi)$. Нетрудно убедиться в том, что эта система фильтруется по убыванию, а вместе с ней фильтруется по убыванию и система $\mathcal{B}(\varphi)$ подмножеств X вида $\{x_\xi : \xi\geqslant\lambda,\ \lambda\in\Xi\}$. Фильтр $\mathfrak{M}(\varphi)$, порожденный системой $\mathcal{B}(\varphi)$, называют фильтром Фреше семейства $\varphi:\{x_\xi\}\ (\xi\in\Xi)$. Аналогичные определения можно дать и в случае, когда данное семейство фильтруется по убыванию.

Элемент $x \in X$, являющийся пределом соответствия $\varphi: \xi \to x_\xi (\xi \in \Xi)$ по системе $\{\Xi_\lambda\}$ подмножеств Ξ, называют **пределом семейства** $\{x_\xi\}$. В этом случае говорят также, что семейство $\{x_\xi\}$ **сходится** к x, и факт сходимости $\{x_\xi\}$ к x обозначают символом $x = \lim\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$ или $x_\xi \xrightarrow[\xi \in \Xi]{} x$. Если нет надобности выделять, к какому именно элементу сходится семейство, такое семейство просто называют **сходящимся**.

Иначе можно сказать, что $\{x_\xi\}$ сходится к x, если фильтр Фреше этого семейства сходится к x, т.е. если он тоньше фильтра окрестностей точки x. Последнее, как нетрудно убедиться, означает, что для любой окрестности U точки x можно указать такое $\lambda \in \Xi$, что $x_\xi \in U$ при всех $\xi \in \Xi$, $\xi \geqslant \lambda$.

В случае $\Xi = \mathcal{N}$ семейство $\{x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ называют **последовательностью** элементов топологического пространства X, предел $\{x_n\}$ по системе $\mathfrak{N}$ множеств $\mathcal{N}_m = \{n \in \mathcal{N} : n \geqslant m\}$ $(m \in \mathcal{N})$ называют **пределом последовательности** $\{x_n\}$. Для предела последовательности используют те же обозначения, что и для семейства, иногда еще, учитывая специфику системы $\mathfrak{N}$, используют обозначение $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Напомним (см. I.3.5), что подмножество $\Xi_0 \subset \Xi$ называют **конфинальным** (вправо) в Ξ, если для каждого $\xi \in \Xi$ в Ξ_0 можно найти элемент ξ_0, следующий за ξ. Ясно, что если Ξ_0 конфинально множеству Ξ и Ξ фильтруется по возрастанию, то Ξ_0 также фильтруется по возрастанию. Семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_0)$ будем называть **конфинальным подсемейством** данного семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$.

II. Если $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ – фильтрующееся семейство элементов топологического пространства X, сходящееся к x, то к x сходится и любое конфинальное подсемейство данного семейства.

Действительно, пусть $\Xi_0 \subset \Xi$ и Ξ_0 конфинально Ξ. Так как $x_\xi \xrightarrow[\xi \in \Xi]{} x$, то для любой окрестности U точки x найдется такое $\eta \in \Xi$, что $x_\xi \in U$ для всех $\xi \in \Xi$, следующих за η. В силу конфинальности, в Ξ_0 можно указать ξ_0 такое, что $\eta \leqslant \xi_0$. А тогда $x_\lambda \in U$ для всех $\lambda \in \Xi_0$, $\lambda \geqslant \xi_0$, что и требовалось.

Пока мы говорили о пределе соответствия, фильтра, семейства, нисколько не упоминая о его единственности. Оказывается, единственность предела зависит от свойств топологии.

Ш. Для того, чтобы предел любого сходящегося соответствия со значениями в топологическом пространстве X был единственен, необходимо и достаточно, чтобы X было хаусдорфово.

В самом деле, пусть $x=\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, $y=\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ и $x\neq y$. Возьмем непересекающиеся окрестности $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}_x$, $V\in\mathfrak{W}_y$. Тогда по определению предела можно указать такое $A\in\mathfrak{A}$, что $F[A]\subset\mathcal{U}$, $F[A]\subset V$, что невозможно, поскольку $V\cap\mathcal{U}=\varnothing$. Итак, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$ единственен.

Обратно, пусть X не хаусдорфово. Тогда можно указать две различные точки $x, y\in X$, обладающие тем свойством, что любые окрестности $\mathcal{U}, V$ этих точек имеют непустое пересечение. Рассмотрим тождественное на X соответствие F, т.е. $F: x\longmapsto x$ $(x\in X)$, а в качестве $\mathfrak{A}$ возьмем систему $\mathfrak{A}=\{\mathcal{U}\cap V: \mathcal{U}\in\mathfrak{W}_x,\ V\in\mathfrak{W}_y\}$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ фильтруется по убыванию. Так как для любой $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}_x$ имеем $F[\mathcal{U}\cap V]\subset\mathcal{U}$, то $x=\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, аналогично и $y=\lim\limits_{\mathfrak{A}} F$, что противоречит условию единственности предела.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что это предложение можно было сформулировать и в терминах сходимости фильтров. Именно, пространство X является хаусдорфовым в том и только в том случае, если всякий сходящийся фильтр подмножеств X сходится к единственной точке.

Понятно, что в хаусдорфовом пространстве всякое сходящееся фильтрующееся семейство, в частности всякая сходящаяся последовательность, имеет единственный предел. Любопытно, что предположение о единственности предела только у сходящихся последовательностей, вообще говоря, не обеспечивает хаусдорфовости пространства.

2.3. Используя понятие сходимости, можно получить полезное описание точек замыкания $\overline{E}$ множества $E\subset X$.

Говорят, что фильтр $\mathfrak{M}$ з а д е в а е т множество $E\subset X$, если $M\cap E\neq\varnothing$ для каждого $M\in\mathfrak{M}$. В частности, если $E\in\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ задевает E.

I. Пусть E - множество топологического пространства X и $x\in X$. Если $x\in\overline{E}$, то существует фильтр $\mathfrak{M}$, содержащий множество E и сходящийся к x. Наоборот, если сходящийся к точке x фильтр задевает множество E, то $x\in\overline{E}$.

Действительно, пусть $x\in\overline{E}$. Согласно предложению П (I.4) пересечение $V\cap E$ непусто, какова бы ни была окрестность V точки x. Совокупность всех множеств вида $V\cap E$ ($V\in\mathfrak{W}_x$ фильтруется по убыванию и, очевидно, сходится к x. Понятно, что фильтр $\mathfrak{M}$, порожденный этой совокупностью, содержит E.

Рассмотрим теперь какой-либо фильтр $\mathfrak{M}$, задевающий множество E и сходящийся к данной точке x. Любая окрестность V точки x входит в $\mathfrak{M}$, а тогда $V \cap E \neq \emptyset$. С помощью предложения II (I.4) заключаем отсюда, что $x \in \overline{E}$.

Из доказанного вытекает следующий критерий замкнутости множества.

II. Множество E топологического пространства X замкнуто в том и только в том случае, если любой предел каждого сходящегося фильтра, содержащего множество E, входит в E.

В одну сторону результат предложения вытекает непосредственно из предложения I.

Рассмотрим множество E, удовлетворяющее условиям данного предложения. Пусть $x \in \overline{E}$. Согласно предложению I существует фильтр, содержащий множество E и сходящийся к x. По условию $x \in E$. Таким образом, $\overline{E} = E$ и E замкнуто.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если E замкнуто, $\mathfrak{M}$ задевает E и $\mathfrak{M} \to x$, то $x \in E$.

III. Пусть $E \subset X$ и $x \in X$. Если $x \in \overline{E}$, то существует семейство элементов множества E, сходящееся к x. Обратно, если $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ - сходящееся к $x \in X$ семейство элементов множества E, то $x \in \overline{E}$.

В самом деле, если $x \in \overline{E}$, то $U \cap E \neq \emptyset$ для любой $U \in \mathfrak{U}_x$. Образуем семейство элементов из E следующим образом: за Ξ возьмем систему $\mathfrak{U}_x$ всех окрестностей точки x, упорядоченную так, что $V \geqslant U$ означает $V \subset U$, и каждой окрестности $U \in \Xi$ поставим в соответствие произвольным образом выбранную из $U \cap E$ точку x_U. Убедимся в том, что полученное фильтрующееся по возрастанию семейство сходится к x. Действительно, пусть U - произвольная окрестность точки x. Тогда, согласно определению отношения порядка в множестве индексов семейства, для всех $V \geqslant U$ имеем $x_V \in V \subset U$, откуда $x_V \in U$, что и требовалось.

Пусть теперь $\varphi: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$- какое-либо фильтрующееся семейство элементов из E, сходящееся к $x \in X$. Поскольку фильтр Фреше семейства φ задевает множество E и сходится к x, то, согласно предложению I, получаем $x \in \overline{E}$, что и требовалось.

Если $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$- последовательность точек множества E, сходящаяся к точке $x \in X$, можно утверждать, что $x \in \bar{E}$. Однако, если предполагать заранее, что $x \in \bar{E}$, то, вообще говоря, невозможно реализовать x как предел последовательности точек множества E . Однако бывают топологические пространства, в которых такая реализация тем не менее возможна. Именно, если для любой точки прикосновения x любого множества E топологического пространства X можно указать последовательность $\{x_n\}$ точек из E, сходящуюся к x , говорят, что топология пространства X с е к в е н ц и а л ь н а.

Отметим условие, при котором топология на X секвенциальна.

IУ. Если при любом $x \in X$ фильтр $\mathfrak{W}_x$ имеет счетный базис, то топология пространства X секвенциальна.

Этот факт может быть доказан по тому же образцу, что и результат предложения Ш, если только заметить, что в условиях данного предложения для каждой точки $x \in X$ можно построить убывающую последовательность окрестностей, которая будет служить базисом фильтра $\mathfrak{W}_x$ всех окрестностей точки x .

2.4. До сих пор, говоря о пределе соответствия со значениями в топологическом пространстве, мы не предполагали наличия топологии в том множестве, где лежит область определения соответствия, и предел рассматривался просто по фильтрующейся системе подмножеств $\mathfrak{A}$, задевающей область определения данного соответствия. Существенное значение имеет тот случай, когда T также является топологическим пространством и в качестве $\mathfrak{A}$ берется фильтр окрестностей точки из T .

Рассмотрим топологические пространства T и X, и пусть F - соответствие из T в X , а t - точка из Ω_F. Говорят, что F н е п р е р ы в н о в t , если, при условии однозначности F в точке t , существует $\lim\limits_{\mathfrak{W}_t} F$, равный $F(t)$.

В случае, когда пространство X отделимо, в определении непрерывности соответствия F , сохранив условие однозначности F в точке t , можно заранее не требовать выполнения равенства $\lim\limits_{\mathfrak{W}_t} F = F(t)$ - оно будет следовать из существования предела $\lim\limits_{\mathfrak{W}_t} F$. Если топология на X хаусдорфова, то из существования предела $\lim\limits_{\mathfrak{W}_t} F$ следует как однозначность F в точке t , так и равенство $\lim\limits_{\mathfrak{W}_t} F = F(t)$. Отмеченное свойство нетрудно вывести из соответствующих определений.

Пусть F_0 - сужение F на подмножество T_0 области определения Ω_F. Из предложения I (2.2) вытекает

I. Сужение F_0 непрерывного в точке $t\in T_0$ соответствия F непрерывно в точке t .

Рассмотрим подпространство T_0 топологического пространства T и предположим, что $\Omega_F\subset T_0$.

II. Соответствие F непрерывно в точке $t\in\Omega_F$ как соответствие из T_0 в X в том и только в том случае, если оно является непрерывным в точке t как соответствие из T в X .

Действительно, фильтр $\mathfrak{W}_t$ окрестностей точки t в пространстве T_0 состоит из всех множеств вида $U\cap T_0$, где $U\in\mathfrak{W}_t$. Так как $\Omega_F\subset T_0$, то $F[U\cap T_0]=F[U]$ для любого $U\in\mathfrak{W}_t$. Следовательно, $F\langle\mathfrak{W}_t^0\rangle=F\langle\mathfrak{W}_t\rangle$, откуда и вытекает доказываемый факт. Имея в виду установленный результат, мы при изучении непрерывных соответствий ограничимся случаем, когда они определены на всем пространстве T . Лишь отступления от этого правила будут оговариваться. При этом, говоря о непрерывных соответствиях, мы ограничимся рассмотрением отображений, т.е. однозначных соответствий.

Обсудим другие формы определения непрерывности и некоторые свойства непрерывных отображений.

Пусть T, X - топологические пространства и φ - отображение множества T в множество X . Если φ непрерывно в точке $t\in T$, то, согласно данному в 2.2 определению, это означает, что для любой окрестности W точки x можно найти такую окрестность U точки t , что $\varphi[U]\subset W$.

III. Отображение φ непрерывно в точке $t\in T$ в том и только в том случае, если для любой $W\in\mathfrak{W}_x$, где $x=\varphi(t)$, множество $\varphi^{-1}[W]$ является окрестностью точки t .

Действительно, если φ непрерывно в точке t и W - окрестность точки $x=\varphi(t)$, то, поскольку существует такая окрестность U точки t , что $\varphi[U]\subset W$, можно написать $U\subset\varphi^{-1}[\varphi[U]]\subset\varphi^{-1}[W]$, откуда следует, что $\varphi^{-1}[W]$ также является окрестностью точки t .

Обратно, если для произвольной окрестности W точки $x=\varphi(t)$ множество $U=\varphi^{-1}[W]$ служит окрестностью точки t , то, опять же, $\varphi[U]=\varphi[\varphi^{-1}[W]]\subset W$, так что φ непрерывно в точке t .

Отметим, что в обратную сторону предложение остается верным, если рассматривать не все окрестности точки $x=\varphi(t)$, а лишь те, которые входят в какой-либо базис фильтра окрестностей этой точки.

Во избежание возможных недоразумений, укажем еще что из непрерывности φ в точке t не следует, что образ $\varphi[U]$ окрестности U точки t будет окрестностью точки $x=\varphi(t)$.

В терминах сходящихся фильтров определение непрерывности можно сформулировать следующим образом.

IУ. Отображение φ непрерывно в точке $t\in T$ в том и только в том случае, если для любого фильтра $\mathfrak{A}$, сходящегося к t, выполнено $\varphi\langle\mathfrak{A}\rangle\longrightarrow\varphi\langle t\rangle$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}\longrightarrow t$. Это означает, что $\mathfrak{A}$ содержит фильтр $\mathfrak{W}_t$ и, следовательно, $\varphi\langle\mathfrak{A}\rangle\supset\varphi\langle\mathfrak{W}_t\rangle$. Имеем далее $\widetilde{\varphi\langle\mathfrak{A}\rangle}\supset\widetilde{\varphi\langle\mathfrak{W}_t\rangle}$, поэтому, если φ непрерывно в t, т.е. если $\widetilde{\varphi\langle\mathfrak{W}_t\rangle}\supset\mathfrak{W}_x$, где $\mathfrak{W}_x$ – фильтр окрестностей точки $x=\varphi(t)$, то и $\widetilde{\varphi\langle\mathfrak{A}\rangle}\supset\mathfrak{W}_x$. Таким образом, $\varphi\langle\mathfrak{A}\rangle\longrightarrow x=\varphi(t)$.

Обратно, предположим, что соблюдены условия предложения. Поскольку $\mathfrak{W}_t\longmapsto t$, то $\varphi\langle\mathfrak{W}_t\rangle\longmapsto\varphi(t)$, и отображение φ непрерывно в точке t.

Нередко оказывается удобным критерий непрерывности в терминах сходящихся семейств элементов из T.

У. Отображение φ непрерывно в точке $t\in T$ в том и только в том случае, если для всякого фильтрующегося семейства $\{t_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ точек пространства T, сходящегося к точке t, семейство $\{\varphi(t_\xi)\}$ $(\xi\in\Xi)$ сходится к $\varphi(t)$.

Действительно, пусть $\{t_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – такое фильтрующееся семейство элементов из T, что $t_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}t$ и φ непрерывно в t. Если W – произвольная окрестность точки $x=\varphi(t)$, в силу непрерывности φ в t, можно указать такую $U\in\mathfrak{W}_t$, что $\varphi[U]\subset W$. С другой стороны, можно найти такое $\eta\in\Xi$, что $t_\xi\in U$ для $\xi\geqslant\eta$. Тогда $\varphi(t_\xi)\in\varphi[U]\subset W$ и $\varphi(t_\xi)\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}\varphi(t)$.

Обратно, предположим, что $\varphi(t_\xi)\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}\varphi(t)$ для любого семейства $\{t_\xi\}$, сходящегося к t, и рассмотрим произвольную окрестность W точки $x=\varphi(t)$. Обозначим $\varphi^{-1}[W]$ через U. Если $t\,\bar{\in}\,U^{\circ}$, то $t\in U^{\circ\prime}=\overline{U'}$, и на основании критерия Ш (2.3) существует фильтрующееся семейство $\{t_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ точек множества U', сходящееся к t. Так как по условию $\varphi(t_\xi)\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}\varphi(t)=x$, то при некотором $\eta\in\Xi$ имеем $\varphi(t_\xi)\in W$ $(\xi\in\Xi,\ \xi\geqslant\eta)$, поэтому для этих индексов $t_\xi\in\varphi^{-1}[W]=U$. Между тем $t_\xi\,\bar{\in}\,U$ для всех $\xi\in\Xi$. Полученное противоречие показывает, что $t \in U^{\circ}$, т.е. U служит окрестностью точки t . Применение предложения Ш завершает доказательство.

Если топология пространства T секвенциальна, то, как ясно из доказательства, для непрерывности φ в точке t достаточно потребовать выполнение условия предложения $\bar{\text{У}}$ не для всех фильтрующихся семейств, а лишь для последовательностей: если φ преобразует любую сходящуюся к t последовательность $\{t_n\}$ точек пространства T в последовательность $\{\varphi(t_n)\}$, сходящуюся к $\varphi(t)$, то φ непрерывно в точке t .

В качестве применения предложения У укажем следующий факт.

УI. Пусть T, X, Y - топологические пространства и $\varphi: T \to X$, $\psi: X \to Y$. Тогда если φ непрерывно в точке t , а ψ - в точке $x = \varphi(t)$, то суперпозиция $\omega = \psi \circ \varphi$ представляет собой непрерывное в точке t отображение пространства T в пространство Y.

В самом деле, пусть $\{t_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$- такое фильтрующееся семейство точек пространства T , что $\lim\limits_{\xi \in \Xi} t_\xi = t$. Тогда в силу предложения У $x_\xi \xrightarrow[\xi \in \Xi]{} x$ $(x_\xi = \varphi(t_\xi), \xi \in \Xi)$, и на том же основании $\psi(x_\xi) \xrightarrow[\xi \in \Xi]{} \psi(x)$. Но $\psi(x_\xi) = \psi(\varphi(t_\xi)) = \omega(t_\xi)$, и точно так же $\psi(x) = \omega(t)$. Еще раз используя предложение У, заключаем отсюда о непрерывности отображения ω в точке t .

2.5. Об отображении φ топологического пространства T в топологическое пространство X говорят, что оно н е п р е р ы в н о на множестве $E \subset T$, если оно непрерывно в каждой точке множества E . В частности, если $E = T$, то φ называют непрерывным отображением пространства T в пространство X .

ТЕОРЕМА I (2.5). Следующие утверждения равносильны:

I) отображение φ топологического пространства T в топологическое пространство X непрерывно;

2) прообраз $\varphi^{-1}[G]$ любого открытого множества G пространства X является открытым множеством пространства T ;

3) прообраз $\varphi^{-1}[F]$ любого замкнутого множества F пространства X замкнут в пространстве T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим равносильность утверждений 2,3 теоремы. Действительно, если множества $G \in \mathcal{O}(X)$ и $F \in \mathcal{F}(X)$ связаны соотношением $F' = G$, то и $(\varphi^{-1}[F])' = \varphi^{-1}[G]$, поэтому множество $\varphi^{-1}[F]$ замкнуто тогда и только тогда, когда открыто множество $\varphi^{-1}[G]$. Установим теперь равносильность утверждений I, 2.

Пусть φ непрерывно, $G \in \mathcal{O}(X)$, $\mathcal{U} = \varphi^{-1}[G]$, $t \in \mathcal{U}$. Тогда $x = \varphi(t) \in G$, и так как φ непрерывно в точке t, а G, будучи открытым множеством, является окрестностью точки x, то, согласно предложению Ш (2.4), множество $\mathcal{U}$ служит окрестностью точки t. Таким образом, $\mathcal{U}$ - окрестность каждой своей точки, что и означает открытость множества $\mathcal{U}$.

Обратно, возьмем произвольную точку $t \in T$ и какую-либо окрестность W точки $x = \varphi(t)$. Поскольку W^o - открытое множество, то по условию открыто и множество $V_o = \varphi^{-1}[W^o]$. Но так как $x \in W^o$, то $t \in V_o$, следовательно, V_o - окрестность точки t, тем более будет окрестностью этой точки множество $V = \varphi^{-1}[W]$, поскольку $\varphi^{-1}[W] \supset \varphi^{-1}[W^o] = V_o$. Применяя предложение Ш (2.4), заключаем отсюда о непрерывности φ в точке t. Теорема полностью доказана.

Топологические пространства T, X называют **г о м е о м о р ф н ы м и**, если существует такое взаимно-однозначное непрерывное отображение пространства T на пространство X, что обратное отображение также непрерывно. Всякое отображение φ такого рода называют **г о м е о м о р ф и з м о м** пространства T на пространство X.

Ясно, что если пространства T, X гомеоморфны, то гомеоморфными являются и пространства X, T. Из предложения УI (2.4) следует также, что если пространства T, X и, равным образом, пространства X, Y гомеоморфны, то гомеоморфны пространства T, Y.

Пусть T, X - топологические пространства с топологиями $\tau:\{\mathfrak{W}_t\}$ $(t \in T)$ и $\sigma:\{\mathfrak{M}_x\}$ $(x \in X)$ соответственно. Если T, X гомеоморфны, и φ - гомеоморфизм T на X, то, в силу непрерывности отображений φ и $\psi = \varphi^{-1}$, и учитывая предложение П (2.I), можем написать

$$\varphi\langle \mathfrak{W}_t \rangle \supset \mathfrak{M}_x, \quad \psi\langle \mathfrak{M}_x \rangle \supset \mathfrak{W}_t \quad (t \in T,\ x \in X,\ x = \varphi(t)).$$

Поскольку φ - отображение на X, то $\varphi\langle \psi\langle \mathfrak{M}_x \rangle\rangle = \mathfrak{M}_x$, так что

$$\mathfrak{M}_x \subset \varphi\langle \mathfrak{W}_t \rangle \subset \varphi\langle \psi\langle \mathfrak{M}_x \rangle\rangle = \mathfrak{M}_x,$$

т.е. $\varphi\langle \mathfrak{W}_t \rangle = \mathfrak{M}_x$ $(t \in T,\ x = \varphi(t))$ и аналогично $\psi\langle \mathfrak{M}_x \rangle = \mathfrak{W}_t$ $(x \in X,\ t = \psi(x))$

Эти соотношения показывают, что если отождествить каждую точку t пространства T с соответствующей ей при отображении φ точкой $x = \varphi(t)$ пространства X, то отождествятся и фильтры окрестностей соответствующих точек, т.е. при таком отождествлении топологии пространства T и X совпадут.

Таким образом, с точки зрения теории топологических пространств, пространства T и X одинаково устроены. Всякое утверждение (в рамках указанной теории), справедливое для одного пространства, может быть "перенесено" с помощью отображения φ (или ψ) на другое пространство. Это обстоятельство нередко служит основанием для отождествления гомеоморфных пространств. Следует иметь в виду, однако, что такое отождествление "действительно" лишь в пределах теории топологических пространств. Если же иметь в виду и какие-либо иные структуры, кроме топологической, то свойства пространств T и X могут быть, разумеется, совершенно различными.

Вообще, от отождествления гомеоморфных топологических пространств может быть мало пользы, если из множества всех гомеоморфизмов не выделен какой-либо один, "канонический", поскольку в противном случае часто во избежание недоразумений приходится указывать способ отождествления данных пространств, т.е. некоторый гомеоморфизм.

§ 3. Теорема Урысона

Среди всевозможных отображений существенную роль играют вещественные функции, т.е. отображения в числовую прямую $\mathbb{R}$ или в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}}$. Напомним, что если область значений функции лежит в $\mathbb{R}$, то о функции говорят как о конечной функции. На протяжении этого параграфа мы будем заниматься изучением различных свойств вещественных функций и завершим его теоремой Урысона, показывающей, что богатство множества непрерывных вещественных функций зависит от свойств того топологического пространства, на котором они определены.

3.1. Удобным инструментом изучения числовых функций служат так называемые лебеговские множества. Пусть на множестве T задана функция φ и пусть x - некоторое вещественное число. Множества

$$
\begin{aligned}
&\{\varphi < x\} = \varphi^{-1}[(\leftarrow, x)] = \{t\in T: \varphi(t) < x\},\\
&\{\varphi \leq x\} = \varphi^{-1}[[\leftarrow, x]] = \{t\in T: \varphi(t) \leq x\},\\
&\{\varphi > x\} = \varphi^{-1}[(x, \rightarrow)] = \{t\in T: \varphi(t) > x\},\\
&\{\varphi \geq x\} = \varphi^{-1}[[x, \rightarrow]] = \{t\in T: \varphi(t) \geq x\}^{+)}
\end{aligned}
\tag{I}
$$

называются лебеговскими множествами функции φ.

Если для каждого $x\in\bar{\mathbb{R}}$ известно одно из множеств (1), то функцию φ легко восстановить. Однако удобнее использовать несколько более общий факт.

ЛЕММА I. Пусть $X\subset\bar{\mathbb{R}}$. Если $\{U_x\}$ $(x\in X)$ - семейство подмножеств данного множества T, то на T существует функция со свойством

$$\{\varphi < x\} \subset U_x \subset \{\varphi \leq x\} \qquad (x\in X) \tag{2}$$

в том и только в том случае, если семейство $\{U_x\}$ возрастающее, т.е. если $U_x\subset U_y$ для любых $x, y\in X$ таких, что $x\leq y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ - произвольная функция, заданная на T. Обозначим для краткости $G_x=\{\varphi<x\}$, $F_x=\{\varphi\leq x\}$. Поскольку для $x<y$ $(x, y\in\bar{\mathbb{R}})$, очевидно,

$$G_x\subset F_x\subset G_y\subset F_y, \tag{3}$$

то, если φ удовлетворяет (2), имеем $U_x\subset F_x\subset G_y\subset U_y$ $(x<y, x, y\in X)$, что и доказывает первую часть теоремы.

Обратно, пусть семейство $\{U_x\}$ $(x\in X)$ возрастает. Для $t\in T$ положим $A_t=\{x\in X: t\in U_x\}$ и $\varphi(t)=\inf A_t$. Этим соотношением на T определена функция φ (со значениями в $\bar{\mathbb{R}}$). Проверим, что для нее выполнено (2). Действительно, если множество $\{\varphi<x\}$ непусто, т.е. если для некоторых $t\in T$, $x\in X$ будет $\varphi(t)<x$, то, поскольку $\varphi(t)<+\infty$, множество A_t непусто. Следовательно, существует такой элемент $y\in A_t$, что $y\leq x$. Так как $t\in U_y$, то по условию $t\in U_x$, и это доказывает включение $\{\varphi<x\}\subset U_x$. Предположим теперь, что $t\in T$, $x\in X$ связаны соотношением $t\in U_x$. Ввиду того, что оно равносильно включению $x\in A_t$, то $\varphi(t)\leq x$, и доказательство полностью завершено.

+) Напомним, что $(\leftarrow, x)=\{y\in X: y<x\}$, $[\leftarrow, x]=\{y\in X: y\leq x\}$, где X есть $\mathbb{R}$ или $\bar{\mathbb{R}}$. Множества $(x,\rightarrow)$, $[x,\rightarrow]$ определяются аналогично.

Пусть, как и в лемме 1, имеется подмножество X расширенной числовой прямой и два семейства $\{\mathcal{U}_x\}$ $(x\in X)$ и $\{V_x\}$ $(x\in X)$ подмножеств множества T. Пусть, далее, φ и ψ – функции, заданные на T, для которых

$$\{\varphi< x\}\subset \mathcal{U}_x\subset\{\varphi\le x\},\ \{\psi< x\}\subset V_x\subset\{\psi\le x\}\ (x\in X) \quad (4)$$

I. Если $\varphi\le\psi$ +), то $V_y\subset \mathcal{U}_x$ для любых $x,y\in X$ таких, что $y<x$. Обратно, если X плотно в $\bar{\mathbb{R}}$ и для любых $x,y\in X$ таких, что $y<x$, имеем $V_y\subset \mathcal{U}_x$, то $\varphi\le\psi$.

Пусть $\varphi\le\psi$. Вследствие (4) имеем

$$V_y\subset\{\psi\le y\}\subset\{\varphi\le y\}\subset\{\varphi<x\}\subset\mathcal{U}_x\ (x,y\in X,\ y<x).$$

Предположим теперь, что X плотно в $\bar{\mathbb{R}}$ и $V_y\subset \mathcal{U}_x$ для любых $x, y\in X, y<x$. Возьмем $t\in T$. Доказывая неравенство $\varphi(t)\le\psi(t)$, можно считать, что $\psi(t)<+\infty$. Пусть z – вещественное число, большее $\psi(t)$. Так как интервал $(\psi(t), z)$ представляет собой непустое открытое множество в $\bar{\mathbb{R}}$, а X плотно в $\bar{\mathbb{R}}$, то найдется $x\in X\cap(\psi(t),z)$. Заменяя здесь z на x, найдем число $y\in X\cap(\psi(t),x)$. Таким образом, существуют числа x, y, для которых $\psi(t)<y<x<z$. Но тогда

$$t\in\{\psi<y\}\subset V_y\subset \mathcal{U}_x\subset\{\varphi\le x\}\subset\{\varphi<z\},$$

так что $\varphi(t)<z$. В силу произвольности z получаем отсюда, что $\varphi(t)\le\psi(t)$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ I. Если X – плотное в $\bar{\mathbb{R}}$ множество и $\{\mathcal{U}_x\}(x\in X)$ – возрастающее семейство подмножеств множества T, то функция φ, удовлетворяющая соотношениям (2), единственна.

В самом деле, если для функции ψ также соблюдены соотношения, аналогичные (2), то, полагая в I $V_x=\mathcal{U}_x\ (x\in X)$, получим $\varphi\le\psi$ и одновременно – $\psi\le\varphi$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При тех же предположениях относительно X, $\{\mathcal{U}_x\}(x\in X)$ и φ имеем

$$\{\varphi<z\}=\bigcup_{\substack{x\in X\\ x<z}}\mathcal{U}_x\ ,\quad \{\varphi\le z\}=\bigcap_{\substack{x\in X\\ x>z}}\mathcal{U}_x. \quad (5)$$

В самом деле, согласно (3) при $x<z$ $(x\in X)$ имеем $\mathcal{U}_x\subset\{\varphi<z\}$. Обратно, если $\varphi(t)<z$ $(t\in T,\ z\in\bar{\mathbb{R}})$, то в интервале $(\varphi(t),z)$ можно указать число y, входящее в X, и, следовательно, $t\in\{\varphi<x\}\subset\mathcal{U}_x$.

+) Имеется в виду упорядоченность в множестве функций, т.е. $\varphi\le\psi$ означает $\varphi(t)\le\psi(t)$ для всех $t\in T$.

Аналогично проверяется и второе из равенств (5).

3.2. В условиях предыдущего пункта предположим дополнительно, что множество T снабжено топологией - это позволит нам рассматривать непрерывные функции, заданные на T.

Поскольку при любом $x\in\bar{\mathbb{R}}$ множества $(\leftarrow, x)$ и $(x, \rightarrow)$ открыты, а множества $[\leftarrow, x]$ и $[x, \rightarrow]$ замкнуты в $\bar{\mathbb{R}}$, то в случае, когда φ - непрерывная на T функция, множества $\{\varphi< x\}$ и $\{\varphi > x\}$ открыты, а множества $\{\varphi\leq x\}$ и $\{\varphi\geq x\}$ замкнуты. Оказывается, справедлив обратный факт.

I. Пусть X - плотное в $\bar{\mathbb{R}}$ множество. Если заданная на T функция φ обладает тем свойством, что при каждом $x\in X$ множества $\{\varphi< x\}$ и $\{\varphi >x\}$ открыты, то φ непрерывна.

Действительно, пусть W - окрестность точки $z\in\bar{\mathbb{R}}$. Считая z для определенности конечным, найдем включающий точку z интервал $(\alpha,\beta)\subset W$. Поскольку множество X плотно в $\bar{\mathbb{R}}$, а интервалы (α, z) и (z,β)- суть непустые открытые множества в $\bar{\mathbb{R}}$, то оба пересечения $(\alpha, z)\cap X$ и $(z,\beta)\cap X$ непусты, так что существуют такие точки $x_1, x_2\in X$, что $\alpha< x_1< z< x_2<\beta$. В частности, отсюда следует, что $(x_1,x_2)\subset W$. Если $t\in T$, то, принимая $z=\varphi(t)$, имеем $\varphi^{-1}[W]\supset\varphi^{-1}[(x_1, x_2)]=\{\varphi>x_1\}\cap\{\varphi< x_2\}$. Так как пересечение в правой части по условию открыто и содержит точку t, то оно является окрестностью этой точки, следовательно, и $\varphi^{-1}[W]$ служит окрестностью точки t, и функция φ непрерывна в точке t.

Если z бесконечно, то в проведенном выше рассуждении вместо интервала (α,β) надо взять несобственный интервал $(\leftarrow,\beta)$ или $(\alpha,\rightarrow)$.

Множества $\{\varphi>x\}$ и $\{\varphi\leq x\}$ взаимно дополнительны, поэтому открытость первого равносильна замкнутости второго. В связи с этим в условиях предложения I вместо открытости множеств $\{\varphi>x\}$ можно требовать замкнутость множеств $\{\varphi\leq x\}$ для $x\in X$. По тем же соображениям предложение I останется справедливым, и при замене условия открытости множеств $\{\varphi< x\}$ требованием замкнутости множеств $\{\varphi\geq x\}$ $(x\in X)$. Эти рассуждения будут использованы при доказательстве следующего результата.

ЛЕММА 2. Пусть X - плотное в $\bar{\mathbb{R}}$ множество и $\{U_x\}$ $(x\in X)$- семейство множеств данного топологического пространства T. Тогда на T существует непрерывная функция φ, удовлетворяющая соотношениям (2), в том и только в том случае, если

$$\bar{U}_y\subset U_x^o \quad (x,y\in X,\ y< x). \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция φ существует, то при любом $x\in X$ имеем $\{\varphi<x\}\subset \mathcal{U}_x^o\subset \overline{\mathcal{U}}_x\subset\{\varphi\le x\}$ в силу замкнутости множества $\{\varphi\le x\}$ и открытости множества $\{\varphi<x\}$. Поэтому, полагая в I(3.I) $\varphi=\psi$ и принимая в качестве $\mathcal{U}_x$ множества $\mathcal{U}_x^o$ а в качестве V_x - множества $\overline{\mathcal{U}}_x$, придем к (6).

Пусть теперь выполнены условия (6). Наряду с семейством $\{\mathcal{U}_x\}$ $(x\in X)$ рассмотрим еще семейства $\{V_x\}$ $(x\in X)$ и $\{W_x\}$ $(x\in X)$, где $V_x=\mathcal{U}_x^o$, $W_x=\overline{\mathcal{U}}_x$. Условие (6) обеспечивает соблюдение условий леммы I для всех трех семейств, в связи с чем можно утверждать существование таких заданных на T функций φ,ψ,ω, что для каждой из них выполнено соотношение вида (2):

$$\{\varphi<x\}\subset \mathcal{U}_x\subset\{\varphi\le x\},\ \{\psi<x\}\subset V_x\subset\{\psi\le x\},\ \{\omega<x\}\subset W_x\subset\{\omega\le x\}\ (x\in X).$$

Если $y<x$ $(x,y\in X)$, то $\mathcal{U}_y\subset\mathcal{U}_x\subset\overline{\mathcal{U}}_x=W_x$, а $V_y=\mathcal{U}_y^o\subset\mathcal{U}_y\subset\mathcal{U}_x$, и, следовательно, в силу I (3.I) $\omega\le\varphi$ и $\varphi\le\psi$. С другой стороны, переписывая соотношение (6) в виде $W_y\subset V_x$ $(x,y\in X,\ y<x)$, опять с помощью I (3.I) заключаем, что $\psi\le\omega$. Стало быть, $\varphi=\psi=\omega$.

Согласно (5) можем написать

$$\{\varphi<z\}=\{\psi<z\}=\bigcup_{\substack{x\in X\\ x<z}}V_x,\ \{\varphi\le z\}=\{\omega\le z\}=\bigcap_{\substack{x\in X\\ x>z}}W_x\quad (z\in\overline{\mathbb{R}}).$$

Но V_x открыто, а W_x - замкнуто при любом $x\in X$, а тогда $\{\varphi<z\}$ открыто, и $\{\varphi\le z\}$ замкнуто для каждого $z\in\overline{\mathbb{R}}$. Остается применить предыдущее предложение.

ЛЕММА 3. Пусть T - T_4-пространство, F - замкнутое множество в T и $\mathcal{U}$ - открытая окрестность множества F. Тогда существует семейство множеств $\{\mathcal{U}_n^k\}$ $(n=0,1,2,\dots;\ k=0,1,\dots,2^n)$ такое, что

1) $\mathcal{U}_0^0=F$, $\quad \mathcal{U}_0^1=\mathcal{U}$;

2) если $\frac{k}{2^p}=\frac{\ell}{2^m}$, то $\mathcal{U}_p^k=\mathcal{U}_m^\ell$;

3) если $\frac{k}{2^p}<\frac{\ell}{2^m}$, то $\overline{\mathcal{U}_p^k}\subset(\mathcal{U}_m^\ell)^o$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индуктивное построение требуемого семейства множеств. Положим $\mathcal{U}_0^0=F$, $\mathcal{U}_0^1=\mathcal{U}$. Проверим, что множества $\mathcal{U}_0^0$, $\mathcal{U}_0^1$ удовлетворяют второму и третьему условиям. Так как $m=n=0$, то во втором условии должно быть либо $k=\ell=0$, либо $k=\ell=1$, а тогда выполнение второго условия следует из определения множеств $\mathcal{U}_0^0$, $\mathcal{U}_0^1$. С третьим условием дело обстоит аналогично.

Пусть множества $\mathcal{U}_m^k$ определены для всех m, не превосходящих некоторого натурального n. Если $k \le 2^{n+1}$ четно, положим $U_{n+1}^{k} = U_n^{k/2}$. Рассмотрим случай $k = 2s+1 \le 2^{n+1}$ $(0 \le s \le 2^n - 1)$. Так как, согласно предположению, в силу третьего условия леммы имеем $\overline{U_n^s} \subset (U_n^{s+1})^o$, то $(U_n^{s+1})^o$ – окрестность замкнутого множества $\overline{U_n^s}$. Возьмем какую-либо замкнутую окрестность множества $\overline{U_n^s}$, лежащую в $(U_n^{s+1})^o$ и примем ее в качестве множества U_{n+1}^{k} Таким образом,

$$\overline{U_n^s} \subset (U_{n+1}^k)^o \subset U_{n+1}^k = \overline{U_{n+1}^k} \subset (U_n^{s+1})^o. \qquad (7)$$

Убедимся в том, что совокупность $\{U_m^k\}$ $(m \le n+1)$ удовлетворяет второму и третьему условиям леммы. Пусть $p, m \le n+1$. Если $p, m \le n$, второе условие выполнено в силу индуктивного предположения. Допустим, что $p = n+1$, $m \le n$. Из равенства $\frac{k}{2^p} = \frac{\ell}{2^m}$ следует, что k четно, а тогда $U_{n+1}^k = U_n^{k/2} = U_m^\ell$ опять же по индуктивному предположению. Если $p = m = n+1$, то $k = \ell$, и требуемое равенство также выполнено.

Рассмотрим $m, p \le n+1$ и k, ℓ такие, что $\frac{k}{2^p} < \frac{\ell}{2^m}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^p,$ $\ell = 0, 1, \ldots, 2^m)$. Пусть $p = n+1$, $m \le n$. Если k четно, мы приходим к ситуации, подвластной индуктивному предположению. Пусть $k = 2s+1$. Заметим, что в этом случае $\frac{s+1}{2^n} = \frac{k+1}{2^{n+1}} < \frac{\ell}{2^m} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{\ell+1}{2^m}$, откуда $\frac{s+1}{2^n} \le \frac{\ell}{2^m}$. В силу предположения, с учетом соотношения (7) получаем

$$\overline{U_{n+1}^k} \subset (U_n^{s+1})^o \subset \overline{U_n^{s+1}} \subset (U_m^\ell)^o.$$

Аналогично рассматривается и случай $m = n+1$, $p \le n$. Пусть $m = p = n+1$. Если одно из k, ℓ четно, этот случай сводится к рассмотренным. Допустим, что k, ℓ нечетны и $k < \ell$. Тогда $\frac{k}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^{n+1}} \le \frac{\ell-1}{2^{n+1}} < \frac{\ell}{2^{n+1}}$, но $k+1$, $\ell-1$ четны, так что в силу предположения и результатов рассмотренных ситуаций имеем

$$(\overline{U_{n+1}^k}) \subset (U_{n+1}^{k+1})^o \subset \overline{U_{n+1}^{k+1}} \subset (U_{n+1}^{\ell-1})^o \subset \overline{U_{n+1}^{\ell-1}} \subset (U_{n+1}^\ell)^o.$$

Таким образом, согласно принципу индукции требуемое семейство множеств существует.

Вещественное число x называют двоично-рациональным, если оно представимо в виде $x = \frac{k}{2^n}$ с некоторыми целым k и $n = 0, 1, 2, \ldots$

ЛЕММА 4. Множество двоично-рациональных чисел плотно в $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $x \in \mathbb{R}$ и U – некоторая окрестность точки x. Согласно определению топологии на $\mathbb{R}$ можно считать, что $U = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Найдем такое натуральное n, что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Рассмотрим множество $\{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{2^n} < x\} = \mathcal{A}$ и обозначим через ℓ его точную верхнюю границу: $\ell = \sup \mathcal{A}$. Тогда

$\frac{\ell}{2^n} \le x < \frac{\ell+1}{2^n}$, откуда $x - \frac{\ell}{2^n} \le \frac{\ell+1}{2^n} - \frac{\ell}{2^n} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, следовательно, в любой окрестности точки x оказалось возможным найти двоично-рациональное число.

Если $x = +\infty$ и $(a, \to)$ – некоторая окрестность точки x, то в силу принципа Архимеда найдется такое $n \in \mathcal{N}$, что $n > a$, и осталось заметить, что $n = \frac{n}{2^0}$ – двоично-рационально. Случай $x = -\infty$ рассматривается аналогично.

3.3. Доказанные леммы лежат в основе следующего важного факта теории непрерывных функций, известного под названием теоремы Урысона.

ТЕОРЕМА I (3.5). Пусть T – топологическое T_4-пространство. Каковы бы ни были замкнутое множество $F \subset T$ и его окрестность U, существует непрерывная на T функция φ такая, что

$$\varphi(t) = 0 \ (t \in F); \ \varphi(t) = 1 \ (t \in T \setminus U); \ \varphi[T] \subset [0,1]. \qquad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X множество всех двоично-рациональных чисел. Согласно лемме 4 множество X плотно в $\overline{\mathbb{R}}$. Определим семейство $\{U_x\}$ $(x \in X)$, полагая

$$U_x = \begin{cases} \emptyset, & \text{если} \quad x < 0, \\ U_n^k, & \text{если} \quad x = \frac{k}{2^n}, \quad 0 \le x \le 1, \\ T, & \text{если} \quad x > 1, \end{cases}$$

где U_n^k – множества из построенного в лемме 3 семейства. Проверим, что семейство $\{U_x\}$ $(x \in X)$ удовлетворяет условию (6) леммы 2. Возьмем числа $x, y \in X$, $y < x$. Если хотя бы одно из этих чисел не принадлежит отрезку $[0,1]$, то (6) выполняется тривиальным образом, поэтому рассмотрим лишь случай $0 \le y < x \le 1$. Пусть $y = \frac{k}{2^n}$, $x = \frac{\ell}{2^m}$. Из второго и третьего условий леммы 3, с учетом определения семейства $\{U_x\}$, имеем $\overline{U_y} = \overline{U_n^k} \subset (U_m^\ell)^o = U_x^o$. Применяя лемму 2, убеждаемся в существовании непрерывной на T функции, для которой соблюдены соотношения (2). Так как $U_x = \emptyset$ для $x < 0$ $(x \in X)$, а $U_x = T$ при $x > 1$ $(x \in X)$, то согласно (5) $\{\varphi < 0\} = \emptyset$ и $\{\varphi \le 1\} = T$, следовательно, все значения функции φ лежат в промежутке $[0,1]$. Если $t \in F$, то $t \in U_0 \subset \{\varphi \le 0\}$, поэтому $\varphi(t) = 0$. Так как, с другой стороны, $U_1 \supset \{\varphi < 1\}$, то вне множества U_1, тем более вне U, все значения функции φ равны единице.

Итак, функция φ удовлетворяет требованиям теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если F - замкнутое множество, а $\mathcal{U}$ - его окрестность, то непрерывную на T функцию φ, удовлетворяющую (8), будем называть у р ы с о н о в с к о й функцией пары $(F, \mathcal{U})$.

Покажем, что справедлив факт, обратный результату теоремы, т.е. из существования урысоновской функции для любой пары $(F, \mathcal{U})$ можно заключить, что T является T_4-пространством. Действительно, если F - произвольное замкнутое множество, $\mathcal{U}$ - какая-либо его окрестность и φ - урысоновская функция пары $(F, \mathcal{U})$, то множество $V = \{\varphi \le \frac{1}{2}\}$ замкнуто и его внутренность содержит множество $\{\varphi < \frac{1}{2}\}$, которое, в свою очередь, содержит F. Таким образом, V является замкнутой окрестностью множества F. Поскольку, очевидно, $V \subset \mathcal{U}$, то этим доказано, что фильтр окрестностей множества F имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. Отсюда на основании предложения УI (I.8) заключаем о том, что T есть T_4-пространство.

Теорему Урысона иногда бывает удобнее использовать в несколько иной формулировке.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть F_0, F_1 - непересекающиеся замкнутые множества топологического T_4-пространства T. Тогда существует непрерывная на T функция φ такая, что

$$\varphi(t) = 0 \quad (t \in F_0); \quad \varphi(t) = 1 \, (t \in F_1); \quad \varphi[T] \subset [0,1]. \tag{9}$$

В самом деле, дополнение $\mathcal{U}$ множества F_1 открыто и содержит F_0, стало быть, $\mathcal{U}$ - окрестность множества F_0. Урысоновская функция пары $(F_0, \mathcal{U})$, очевидно, удовлетворяет соотношениям (9).

В нормальном пространстве одноточечные множества замкнуты, поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Если F - замкнутое множество нормального топологического пространства T и точка $t_0 \in T$ не принадлежит множеству F, то существует непрерывная на T функция φ такая, что

$$\varphi(t) = 0 \quad (t \in F); \quad \varphi(t_0) = 1; \quad \varphi[T] \subset [0,1]. \tag{10}$$

Отделимое топологическое пространство, обладающее тем свойством, что для любого замкнутого множества F и точки $t_0 \bar{\in} F$ существует непрерывная на T функция φ, для которой имеют место соотношения (10), называется в п о л н е р е г у л я р н ы м. Результат следствия 2 означает, что нормальное пространство вполне регулярно. Следует иметь в виду, что обратное неверно.

Рассуждая так же, как и в замечании к доказанной теореме, нетрудно убедиться в том, что вполне регулярное пространство регулярно. Однако и в этом случае обратное неверно: как можно показать, существуют регулярные пространства, на которых нельзя задать никакой непрерывной функции, кроме постоянной.

Пусть имеется некоторое множество T и класс Φ функций, заданных на T. Множества $E_1, E_2 \subset T$ называются **функционально отделимыми** с помощью класса Φ, если существует функция $\varphi \in \Phi$ и число r такие, что одно из множеств E_1, E_2 содержится в множестве $\{\varphi < r\}$, а другое – в $\{\varphi \geq r\}$. Если в этом определении заменить множество $\{\varphi < r\}$ множеством $\{\varphi < s\}$, где $s < r$, то говорят о **строго функционально отделимых** (с помощью класса Φ) множествах E_1, E_2.

Из следствия I вытекает строгая функциональная отделимость с помощью класса всех непрерывных (или только ограниченных непрерывных) функций непересекающихся замкнутых множеств топологического T_4-пространства.

§ 4. Сравнение топологий

4.I. Рассмотрим некоторое множество X и две топологии λ и τ на нем. Пусть I – тождественное отображение множества X на себя, т.е. $I(x) = x$ для любого $x \in X$. Если I непрерывно как отображение пространства (X, λ) на пространство (X, τ), то говорят, что топология λ **сильнее** топологии τ (или что топология τ слабее λ), и пишут $\lambda \geq \tau$ (или $\tau \leq \lambda$).

Обозначим через $\mathfrak{W}_x^\lambda$ и $\mathfrak{W}_x^\tau$ фильтры окрестностей точки x в топологии λ и τ соответственно.

I. Топология λ сильнее топологии τ в том и только в том случае, если для любого $x \in X$ выполнено $\mathfrak{W}_x^\lambda \supset \mathfrak{W}_x^\tau$.

Действительно, достаточно заметить, что для каждого множества $V \subset X$ имеем $I^{-1}[V] = V$.

Из I вытекает, в частности, что если пространство (X, τ) отделимо или хаусдорфово, то при $\lambda \geq \tau$ таким же будет и пространство (X, λ).

С помощью предложения IУ (2.4) получаем

П. Топология λ сильнее топологии τ в том и только в том случае, если каждый фильтр, сходящийся в пространстве (X, λ) к некоторой точке $x \in X$, сходится к этой же точке и в пространстве (X,τ).

Аналогично с помощью предложения У (2.4) доказывается

Ш. Топология λ сильнее топологии τ в том и только в том случае, если каждое фильтрующееся семейство точек из X, сходящееся в пространстве (X,λ) к какой-либо точке, сходится к этой же точке и в пространстве (X,τ).

Привлекая, наконец, результат теоремы I (2.5), получаем следующий критерий.

IУ. Топология λ сильнее топологии τ в том и только в том случае, если $\mathcal{O}_\lambda(X) \supset \mathcal{O}_\tau(X)$ или если $\mathcal{F}_\lambda(X) \supset \mathcal{F}_\tau(X)$.

Обозначим через $\mathcal{T}(X)$ совокупность всех топологий на множестве X.

ТЕОРЕМА I (4.5). Отношение "τ слабее λ" $(\tau,\lambda \in \mathcal{T}(X))$ является отношением порядка в множестве $\mathcal{T}(X)$. При этом каждое множество $\mathcal{L} \subset \mathcal{T}(X)$ имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость первой части теоремы очевидным образом вытекает из предложения I.

Приступая к доказательству второй части, отметим прежде всего, что, как непосредственно ясно из определения, дискретная топология $\bar{\tau}$ и вырожденная (антидискретная) топология τ_0 на X служат наибольшим и соответственно наименьшим элементами множества $\mathcal{T}(X)$. Из этого замечания, в частности, следует, что теорема верна, если $\mathcal{L} = \emptyset$. Предположим поэтому, что $\mathcal{L} \neq \emptyset$, и через $\mathcal{W}_x^\tau$ обозначим фильтр окрестностей точки x в пространстве (X,τ).

Покажем прежде всего, что существует точная верхняя граница каждого конечного множества $\mathcal{L} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ топологий на X. Для каждого $x \in X$ образуем систему $\mathcal{L}_x$ всевозможных пересечений $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$, где $V_k \in \mathcal{W}_x^{\tau_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$. Поскольку пересечение двух множеств из $\mathcal{W}_x^\tau$ снова входит в $\mathcal{W}_x^\tau$, этим же свойством будет обладать и система $\mathcal{L}_x$. Точка x принадлежит каждому из множеств системы $\mathcal{L}_x$, следовательно, отображение $\lambda: x \mapsto \mathcal{W}_x$, где $\mathcal{W}_x = \widetilde{\mathcal{L}}_x$ – фильтр, порожденный системой $\mathcal{L}_x$, представляет собой предтопологию на X. Убедимся в том, что λ – топология на X. Пусть $\mathcal{O}_x^\tau$ – совокупность всех открытых в топологии τ окрестностей точки x и $\mathcal{O}_x = \{G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n : G_k \in \mathcal{O}_x^{\tau_k}, k=1,2,\dots,n\}$. Множества из системы $\mathcal{O}_x$ открыты в предтопологии λ. В самом деле, для множества $G_\kappa \in \mathcal{O}_x^{\tau_\kappa}$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$ имеем $G_\kappa \in \bigcap_{t \in G_\kappa} \mathcal{W}_t^{\tau_\kappa}$, следовательно, если $t \in G = \bigcap_{\kappa=1}^{n} G_\kappa$, то $G_\kappa \in \mathcal{W}_t$, тем самым $G \in \mathcal{W}_t$. Последнее означает, что $G \in \bigcap_{t \in G} \mathcal{W}_t$, так что каждое множество $G \in \mathcal{O}_x$ открыто. Множества системы $\mathcal{O}_x$ составляют, понятно, базис фильтра $\mathcal{W}_x$, следовательно, λ — топология на X. Непосредственно из определения λ ясно, что $\mathcal{W}_x^\lambda = \mathcal{W}_x \supset \mathcal{L}_x \supset \mathcal{W}_x^{\tau_\kappa}$, так что $\tau_\kappa \leq \lambda$ $(\kappa = 1, 2, \dots, n)$. Если топология $\mu \in \mathcal{T}(X)$ такова, что $\tau_{\kappa_n} \leq \mu$ и $V_\kappa \in \mathcal{W}_x^{\tau_\kappa}$ $(x \in X,\ \kappa = 1, 2, \dots, n)$, то $V_\kappa \in \mathcal{W}_{x}^{\mu}$, следовательно, $V = \bigcap_{\kappa=1}^{n} V_\kappa \in \mathcal{W}_x^\mu$ и $\mathcal{W}_x^\lambda \subset \mathcal{W}_x^\mu$, т.е. $\lambda \leq \mu$. Итак, доказано, что $\lambda = \sup\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$.

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{E}}$ множество топологий на X, состоящее из точных верхних границ всех конечных подмножеств множества $\mathcal{E}$. Поскольку точные верхние границы множеств $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ совпадают (см. предложение УП (I.I)), достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{E}$ фильтруется по возрастанию. В этом предположении обозначим $\mathcal{W}_x = \bigcup_{\tau \in \mathcal{E}} \mathcal{W}_x^\tau$ и $\mathcal{O}_x = \bigcup_{\tau \in \mathcal{E}} \mathcal{O}_x^\tau (x \in X)$. Пусть $V_1, V_2 \in \mathcal{W}_x$, т.е. пусть $V_1 \in \mathcal{W}_x^{\tau_1}$, $V_2 \in \mathcal{W}_x^{\tau_2}$ $(\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{E})$. Поскольку можно найти такую топологию $\tau \in \mathcal{E}$, что $\tau \geq \tau_1, \tau_2$, то $V_1, V_2 \in \mathcal{W}_x^\tau$, поэтому $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{W}_x^\tau \subset \mathcal{W}_x$. Если $V_0 \in \mathcal{W}_x$ и $V \supset V_0$, то, найдя такое $\tau \in \mathcal{E}$, что $V_0 \in \mathcal{W}_x^\tau$, получим $V \in \mathcal{W}_x^\tau \subset \mathcal{W}_x$. Таким образом, $\mathcal{W}_x$ — фильтр. Очевидно, $\mathcal{O}_x$ является базисом этого фильтра, при этом для множества $G \in \mathcal{O}_x$ существует такое $\tau \in \mathcal{E}$, что $G \in \mathcal{O}_x^\tau$, так что $G \in \bigcap_{t \in G} \mathcal{W}_t^\tau \subset \bigcap_{t \in G} \mathcal{W}_t$. Из сказанного выше вытекает, что семейство $\lambda : \{\mathcal{W}_x\} (x \in X)$ является топологией на X, причем, очевидно, более сильной, чем любая топология из $\mathcal{E}$. Если теперь μ — какая-либо верхняя граница $\mathcal{E}$, то $\mathcal{W}_x^\mu \supset \mathcal{W}_x^\tau$ $(x \in X, \tau \in \mathcal{E})$, в связи с чем $\mathcal{W}_x^\mu \supset \mathcal{W}_x = \mathcal{W}_x^\lambda$. Следовательно, $\mu \geq \lambda$ и $\lambda = \sup \mathcal{E}$.

Для доказательства существования точной нижней границы множества $\mathcal{E}$ достаточно заметить, что, по доказанному, каждое множество в $\mathcal{T}$ имеет точную верхнюю границу, и сослаться на предложение УI (I.2).

Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть $\mathcal{L}_y$ — некоторая совокупность фильтров непустых подмножеств множества X. Заметим, что пересечение $\mathcal{L} = \bigcap_{\mathcal{W} \in \mathcal{L}_y} \mathcal{W}$ фильтров из $\mathcal{L}_y$ — всегда фильтр, который, как нетрудно понять, представляет собой точную нижнюю границу совокупности $\mathcal{L}_y$ в множестве всех фильтров непустых подмножеств в X: $\mathcal{L} = \inf \mathcal{L}_y$. Об объединении $\vartheta = \bigcup_{\mathcal{W} \in \mathcal{L}_y} \mathcal{W}$ уже нельзя сказать, что оно является фильтром, поскольку система ϑ может не фильтроваться. Дополним поэтому совокупность ϑ, присоединив к ней всевозможные пересечения $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ $(V_n \in \mathcal{W}_n, \mathcal{W}_k \in \mathcal{L}_y, n=1,2,\ldots,n)$ множеств, входящих в конечные подмножества $\{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_n\}$ множества $\mathcal{L}_y$, и полученную систему обозначим через $\tilde{\vartheta}$. Понятно, что если $\mathcal{L}_y$ ограничено сверху, то $\tilde{\vartheta}$ – фильтр, представляющий собой точную верхнюю границу совокупности $\mathcal{L}_y$ в множестве всех фильтров непустых подмножеств множества X : $\tilde{\vartheta} = \sup \mathcal{L}_y$.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}_x$, состоящее из фильтров окрестностей точки $x \in X$ в множестве $\mathcal{E}$ топологий на X. Понятно, что отображения $\lambda : x \mapsto \sup \mathcal{E}_x$, $\sigma : x \mapsto \inf \mathcal{E}_x$, где $\sup \mathcal{E}_x$, $\inf \mathcal{E}_x$ – точные границы в множестве фильтров непустых подмножеств множества X, являются предтопологиями на X. Исходя из доказательства теоремы, нетрудно понять, что λ всегда топология на X, при этом $\sup \mathcal{E}_x = \mathcal{W}_x^{\sup \mathcal{E}}$, где $\mathcal{W}_x^{\sup \mathcal{E}}$ – фильтр окрестностей точки x в топологии $\sup \mathcal{E}$ Нельзя, однако, утверждать, что σ – также топология на X, т.е. фильтр $\inf \mathcal{E}_x$ может не обладать базисом, состоящим из открытых в предтопологии σ множеств. В этом случае справедливо лишь включение $\inf \mathcal{E}_x \supset \mathcal{W}_x^{\inf \mathcal{E}}$, которое может оказаться строгим. Можно показать, что $\inf \mathcal{E}$ есть топология, ассоциированная с предтопологией σ.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В соответствии с доказательством теоремы и замечанием I, пересечения $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ $(V_k \in \mathcal{W}_x^{\tau_k}, \tau_k \in \mathcal{E}, k=1,2,\ldots,n)$ окрестностей точки x в топологиях, входящих во всевозможные конечные подмножества $\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ множества $\mathcal{E}$, составляют базис фильтра окрестностей точки x в топологии $\lambda = \sup \mathcal{E}$. Фильтр окрестностей $\mathcal{W}_x^\lambda$ точки x в топологии λ получается как $\mathcal{W}_x^\lambda = \bigcup_{\tau \in \tilde{\mathcal{E}}} \mathcal{W}_x^\tau$ $(x \in X)$.

4.2. Вновь рассмотрим два топологических пространства: (T,τ) и (X,λ). Пусть $\mu : \{\mathcal{W}_x^\mu\} (x \in X)$ и $\rho : \{\mathcal{W}_t^\rho\} (t \in T)$ – некоторые топологии на множествах X и T соответственно. Если $\mu \leq \lambda$, а $\rho \geq \tau$, то, по определению, тождественное отображение I_x множества X в себя непрерывно как отображение пространства (X,λ) в пространство (X,μ), а I_T – тождественное отображение множества T в себя – непрерывно как отображение пространства (T,ρ) в пространство (T,τ). Поэтому если φ – непрерывное отображение пространства (T,τ) в пространство (X,λ), то суперпозиция $\varphi = I_x \circ \varphi \circ I_T$ непрерывна как отображение пространства (T,ρ) в пространство (X,μ). Иными словами, усиление топологии на T и ослабление на X не нарушает свойства отображения φ быть непрерывным. Более полная информация о топологиях на T и X, сохраняющих непрерывность данного отображения, содержится в следующих двух утверждениях.

ЛЕММА I. Пусть φ - отображение множества T в множество X. Какова бы ни была топология $\lambda\in\mathcal{T}(X)$, в множестве $\mathcal{E}$ всех топологий $\rho\in\mathcal{T}(T)$, обладающих тем свойством, что φ - непрерывное отображение пространства (T,ρ) в пространство (X,λ), существует наименьшая τ. При этом для любого $x\in X$ совокупность $\varphi^{-1}\langle\mathfrak{M}_x^\lambda\rangle(x=\varphi(t))$ является базисом фильтра окрестностей точки t в топологии τ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}=\mathcal{G}_\lambda(X)$ - система открытых в топологии λ множеств в X. Рассмотрим совокупность $\varphi^{-1}\langle\mathcal{G}\rangle=$ $=\{\varphi^{-1}[G]:G\in\mathcal{G}\}$. В силу свойств отображений, установленных в § 2 главы I (см. там соотношения (27), (29)), множество $\varphi^{-1}\langle\mathcal{G}\rangle$, так же как и $\mathcal{G}$, выдерживает операции пересечения конечного числа элементов и объединения произвольного семейства элементов. На основании теоремы 2 (I.5) существует единственная топология τ такая, что совокупность $\varphi^{-1}\langle\mathcal{G}\rangle$ совпадает с системой $\mathcal{G}_\tau(T)$ открытых в τ множеств. При этом фильтр окрестностей точки $t\in T$ порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\mathcal{U}_t$ множеств из $\varphi^{-1}\langle\mathcal{G}\rangle$, содержащих t.

Докажем, что $\tau\in\mathcal{E}$. Возьмем произвольную точку $t\in T$, и пусть $W\in\mathfrak{M}_x^\lambda(x=\varphi(t))$. Внутренность W^o множества W является окрестностью точки x, так что по определению $\varphi^{-1}[W^o]\in\mathcal{U}_t\subset\mathfrak{W}_t^\tau$. Более широкое множество $\varphi^{-1}[W]$ подавно входит в $\mathfrak{W}_t^\tau$. Согласно критерию Ш (2.4) φ - непрерывное в точке t отображение пространства (T,τ) в пространство (X,λ). Ввиду произвольности точки t это означает, что $\tau\in\mathcal{E}$. Из сказанного следует также, что если $x=\varphi(t)$, то совокупность $\varphi^{-1}\langle\mathfrak{M}_x^\lambda\rangle$ служит базисом фильтра $\mathfrak{W}_t^\tau$.

Если теперь ρ - произвольная топология из $\mathcal{E}$, то, снова применяя предложение Ш (2.4), можем написать $\varphi^{-1}\langle\mathfrak{M}_x^\lambda\rangle\subset\mathfrak{M}_t$ $(t\in T, x=\varphi(t))$, следовательно, $\mathfrak{W}_t^\tau\subset\mathfrak{W}_t^\rho$, что ввиду предложения I(4.I) равносильно соотношению $\tau\leq\rho$. Лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. С учетом сказанного в начале этого пункта утверждение леммы можно было записать в виде $\tau=\inf\mathcal{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построенную в лемме I топологию τ называют прообразом топологии λ при отображении φ. Иногда также говорят, что топология τ на T получена переносом топологии λ посредством отображения $\varphi: T \to X$.

Аналогичный лемме I результат получается, если зафиксировать топологию на множестве T.

ЛЕММА 2. Пусть φ - отображение множества T в множество X. Какова бы ни была топология τ на T, в множестве $\mathcal{E}$ всех топологий $\mu \in \mathcal{T}(X)$, обладающих тем свойством, что φ - непрерывное отображение пространства (T,τ) в пространство (X,μ), существует наибольший элемент λ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda = \sup \mathcal{E}$ и докажем, что $\lambda \in \mathcal{E}$.

Пусть $t \in T$, $x = \varphi(t)$, $W \in \mathfrak{M}_x^\lambda$. Согласно замечанию 2 к теореме I существуют топологии $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathcal{E}$ и множества $W_k \in \mathfrak{M}_x^{\mu_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ такие, что $W \supset \bigcap_{k=1}^{n} W_k$. Поэтому $\varphi^{-1}[W] \supset \varphi^{-1}[\bigcap_{k=1}^{n} W_k] = \bigcap_{k=1}^{n} \varphi^{-1}[W_k]$. Но множества $\varphi^{-1}[W_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$- окрестности точки t (в пространстве (T,τ)), стало быть, и их пересечение - также окрестность этой точки, тем более этим свойством обладает более широкое множество $\varphi^{-1}[W]$. Итак, φ непрерывно в точке t и, значит, на всем T. Таким образом, $\lambda \in \mathcal{E}$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В случае, когда область значений φ совпадает с X, можно показать, что $\mathfrak{M}_x^\lambda = \varphi \langle \mathfrak{W}_{\varphi^{-1}[x]} \rangle$, где через $\mathfrak{W}_E$ $(E \subset T)$ обозначен фильтр окрестностей множества E (см. пункт I.8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построенную в лемме 2 топологию λ называют образом топологии τ при отображении φ. О топологии λ говорят также как о топологии, полученной переносом на X топологии τ посредством отображения φ.

Следующая теорема дает удобный в ряде случаев способ введения топологии на множестве T.

ТЕОРЕМА 2 (4.5). Пусть $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ - семейство топологических пространств и $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$- семейство отображений данного множества T в X_ξ. Среди всех таких топологий ρ на множестве T, что каждое отображение φ_ξ непрерывно как отображение из (T,ρ) в X_ξ, существует слабейшая τ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi \in \Xi$. Согласно лемме I на T можно указать топологию τ_ξ, слабейшую из таких топологий ρ на T, что φ_ξ - непрерывное отображение (T,ρ) в X_ξ. Если теперь $\tau = \sup_{\xi \in \Xi} \tau_\xi$, то в силу замечания к лемме I все отображения φ_ξ из (T,τ) в X_ξ $(\xi \in \Xi)$ непрерывны. Если же топология $\rho \in \mathcal{T}(T)$ такова, что каждое отображение φ_ξ из (T,ρ) в X_ξ непрерывно, то по лемме I $\rho > \tau_\xi$, следовательно, $\rho \geqslant \sup_{\xi\in\Xi} \tau_\xi = \tau$, так что топология τ – искомая.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если учесть результат леммы I, то, согласно замечанию 2 к теореме I, можно утверждать, что фильтр окрестностей (в топологии τ) точки $t\in T$ имеет базис, состоящий из всех множеств вида $\bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}^{-1}[W_k]$, где $n\in \mathcal{N}$, $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ – произвольные элементы множества Ξ, а W_k – окрестность (в пространстве X_{ξ_k}) точки $x_k = \varphi_{\xi_k}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Опираясь вместо леммы I на лемму 2, можно доказать теорему, аналогичную теореме 2 о существовании топологии на множестве X, сильнейшей из тех, при которых все данные отображения φ_ξ топологических пространств T_ξ в X непрерывны. Точную формулировку этой теоремы и ее несложное доказательство предоставим читателю.

О топологии, определенной на множестве T с помощью теоремы 2, будем говорить, что она п о р о ж д а е т с я семейством отображений $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$.

4.3. Опираясь на указанный в предыдущем пункте способ задания топологии, опишем конструкцию произведения топологических пространств. Прежде всего напомним определение произведения множеств. Пусть $\{X_t\}$ $(t\in T)$ – семейство произвольных множеств. Образуем множество $S=\bigcup_{t\in T} X_t$ и рассмотрим отображение $x: T\to S$, обладающее тем свойством, что при каждом $t\in T$ выполнено $x(t)\in X_t$. Совокупность $\mathcal{X}$ всех таких отображений называется п р о и з в е д е н и е м данного семейства (или множеств данного семейства) и обозначается символом $\prod_{t\in T} X_t$. Если $T=\{1,2,\ldots,n\}$, то для обозначения произведения применяют символ $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ или $\prod_{k=1}^{n} X_k$, если же $T=\mathcal{N}$, то произведение обозначают через $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$. В случае же $X_t = X$ при всех $t\in T$, т.е. если все "сомножители" одинаковы, то произведение обозначается через X^T – это есть, таким образом, совокупность всех отображений множества T в множество X. При $T=\{1,2,\ldots,n\}$ вместо $X^{\{1,2,\ldots,n\}}$ пишут просто X^n, а в случае, когда $T=\mathcal{N}$, используют обозначение X^∞.

Элементы произведения $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$ можно, разумеется, трактовать и как семейства элементов объединения S. Если $x\in\mathcal{X}$, то, обозначая $x(t)=x_t$, можно сказать, что x – это такое семейство $\{x_t\}$ $(t\in T)$ элементов из S, что $x_t\in X_t$ при любом $t\in T$. Эта точка зрения особенно удобна, если $T=\{1,2,\ldots,n\}$ или когда

$T=\mathcal{N}$. В первом случае элементами произведения служат всевозможные наборы вида $(x_1, x_2, .., x_n)$, $x_k \in X_k$ $(k=1,2,...,n)$, во втором – последовательности $\{x_k\}$ $(x_k \in X_k,\ k \in \mathcal{N})$.

Если $x \in \mathscr{X} = \prod_{t \in T} X_t$, то элемент x_t из X_t называется к о о р д и н а т о й элемента x с индексом t (или, в соответствующих случаях, с номером t).

Из принципа выбора (см. принцип УШ в 1.1.4) следует, что если $X_t \neq \emptyset$ для каждого $t \in T$, то и $\prod_{t \in T} X_t \neq \emptyset$. Понятно, что если хотя бы одно из множеств X_t $(t \in T)$ пусто, таким же будет и произведение $\prod_{t \in T} X_t$.

Пусть $T_0 \subset T$. Наряду с произведением $\mathscr{X} = \prod_{t \in T} X_t$ рассмотрим произведение $\mathscr{X}_0 = \prod_{t \in T_0} X_t$. Возьмем произвольный элемент $x \in \mathscr{X}$ и обозначим через x_0 сужение отображения x на T_0. Ясно, что $x_0 \in \mathscr{X}_0$. Сопоставляя элементу x элемент x_0, мы получим отображение P_{T_0} произведения $\mathscr{X}$ в произведение $\mathscr{X}_0$, которое называется п р о е к ц и е й (с множеством индексов T_0).

Если T_0 состоит из единственного элемента t_0, то $\mathscr{X}_0 = X_{t_0}$, и проекция P_{T_0} (она в этом случае обозначается просто через P_{t_0}) сопоставляет элементу $x \in \mathscr{X}$ его координату с индексом t_0.

Предположим теперь, что каждое из множеств X_t рассматриваемого семейства снабжено топологией. Пользуясь теоремой 2 (4.5), определим топологию на произведении $\mathscr{X} = \prod_{t \in T} X_t$ как слабейшую из топологий, относительно которых все проекции P_t $(t \in T)$ непрерывны. Если через $\mathfrak{M}_y^t$ обозначить фильтр окрестностей точки $y \in X_t$ $(t \in T)$, то согласно замечанию к теореме 2 (4.5) множества вида

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} P_{t_k}^{-1}[W_k] \quad (n \in \mathcal{N},\ t_k \in T,\ W_k \in \mathfrak{M}^{t_k}_{P_{t_k}(x)},\ k=1,2,...,n) \tag{1}$$

образуют базис фильтра окрестностей точки $x \in \mathscr{X}$. Поскольку, очевидно, $P_{t_k}^{-1}[W_k] = \prod_{t \in T} U_t$, где U_t есть X_t, если $t \neq t_k$, и W_k, если $t = t_k$, то

$$V = \prod_{t \in T} U_t \qquad (U_t = X_t,\ t \neq t_k;\ U_{t_k} = W_k,\ k=1,2,...,n). \tag{2}$$

Понятно, что если в (1) или (2) под $\mathfrak{M}_y^t$ понимать лишь базис фильтра окрестностей точки $y \in X_t$, то множества указанного вида образуют базис фильтра окрестностей точки x.

Множество $\mathscr{X}$ с указанной топологией называется п р о и з в е д е н и е м семейства $\{X_t\}$ $(t \in T)$ топологических пространств, или просто произведением топологических пространств X_t $(t \in T)$.

Установим некоторые свойства произведения топологических пространств. Сохраняя прежние обозначения, имеем

I. Пусть $\mathfrak{M}$ - фильтр в произведении $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$ семейства $\{X_t\}$ $(t\in T)$ топологических пространств и $x\in\mathcal{X}$. Тогда $\mathfrak{M}\to x$ в том и только в том случае, если $P_t\langle\mathfrak{M}\rangle\to P_t(x)$ при каждом $t\in T$.

Из $\mathfrak{M}\to x$ следует сходимость соответствующих фильтров в каждом из X_t $(t\in T)$ в силу непрерывности проекций P_t.

Пусть $W\in\mathfrak{W}^t_{P_t(x)}$ при некотором $t\in T$. Если условие предложения выполнено, то, поскольку $P_t\langle\mathfrak{M}\rangle$ - фильтр, имеем $W\in P_t\langle\mathfrak{M}\rangle$. Следовательно, в $\mathfrak{M}$ существует такое множество E, что $W=$ $=P_t[E]$. Но тогда $P_t^{-1}[W]\supset E$ и, значит, $P_t^{-1}[W]\in\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что и множество V вида (I) входит в фильтр $\mathfrak{M}$, а это означает, что $\mathfrak{M}\to x$.

Аналогично доказывается и следующее предложение.

II. В условиях предложения I фильтрующееся семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ элементов пространства $\mathcal{X}$ сходится к точке $x\in\mathcal{X}$ в том и только в том случае, если $P_t(x_\xi)\to P_t(x)$ при любом $t\in T$.

В одну сторону предложение доказывается снова ссылкой на непрерывность отображений P_t.

Рассмотрим какую-либо окрестность V точки x вида (I). Если условие предложения выполнено, то для каждого $k=1,2,\dots,n$ можно подобрать $\xi_k\in\Xi$ так, что $P_{t_k}(x_\xi)\in W_k$ для $\xi\geq\xi_k$ $(\xi\in\Xi)$. Пусть $\xi_0\in\Xi$ таково, что $\xi_0\geq\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$. Если $\xi\geq\xi_0$, то $x_\xi\in P_{t_k}^{-1}[W_k]$ при всех $k=1,2,\dots,n$. Стало быть, $x_\xi\in V$ для этих же ξ, что означает сходимость семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ к x.

III. Если при каждом $t\in T$ пространство X_t хаусдорфово, то произведение $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$ также хаусдорфово.

В самом деле, пусть $\mathfrak{M}$ - фильтр в $\mathcal{X}$, сходящийся к точкам x_1, x_2 пространства $\mathcal{X}$. В силу предложения I $P_t\langle\mathfrak{M}\rangle\to P_t(x_1)$ и $P_t\langle\mathfrak{M}\rangle\to P_t(x_2)$ при каждом $t\in T$. Так как пространства X_t хаусдорфовы, то на основании замечания к предложению III (2.2) имеем $P_t(x_1)=P_t(x_2)$ для любого $t\in T$. Отсюда $x_1=x_2$, а тогда, снова опираясь на указанное замечание, можно заключить, что $\mathcal{X}$ хаусдорфово.

В качестве примера рассмотрим множество F_M всех функций (в том числе принимающих бесконечные значения), определенных на некотором фиксированном множестве M. Согласно определению множество F_M можно записать в виде $\overline{\mathbb{R}}^M$. Снабдим $\overline{\mathbb{R}}^M$ топологией произведения. Если $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - фильтрующееся семейство элементов из $\overline{\mathbb{R}}^M$, то, в соответствии с предложением II, $x_\xi \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} x$ в том и только в том случае, если $P_t(x_\xi)=x_\xi(t) \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} x(t)=P_t(x)$ для каждого $t\in M$. В связи с этим обстоятельством топологию произведения на $\overline{\mathbb{R}}^M$ называют топологией поточечной (или покоординатной) сходимости.

Все сказанное о $\overline{\mathbb{R}}^M$ можно повторить и о пространстве $\mathbb{R}^M$, элементами которого являются всевозможные конечные функции, заданные на M. Топология произведения на $\mathbb{R}^M$ совпадает, очевидно, с топологией, индуцированной из $\overline{\mathbb{R}}^M$

Если $M=\{1,2,\dots,n\}$, то $\mathbb{R}^M$ превращается в $\mathbb{R}^n$. Топология покоординатной сходимости на $\mathbb{R}^n$ называется евклидовой. Если $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и α_k, β_k - такие вещественные числа, что $x_k\in(\alpha_k,\beta_k)$, то произведение $\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k,\beta_k)$ +) - окрестность точки x. Понятно, что множество всех открытых параллелепипедов, содержащих данную точку $x\in\mathbb{R}^n$, является базисом фильтра окрестностей точки x в евклидовой топологии.

Наряду с пространством $\mathbb{R}^M$ всех конечных вещественных функций на M, можно рассматривать и пространство $\mathbb{C}^M$ всех комплекснозначных функций, заданных на M, с топологией произведения. Ясно, что и в этом случае сходимость будет поточечной.

§ 5. Компактные множества в топологическом пространстве

Обычно, говоря о компактности множества в топологическом пространстве X, требуют хаусдорфовости последнего. Обратим внимание читателя на то, что большинство сведений о компактных множествах не используют предположения хаусдорфовости, и по этой причине нами будет рассматриваться компактность в топологическом пространстве без наложения требований к пространству, выраженных в аксиомах отделимости.

5.1. Пусть C - множество в топологическом пространстве X. Систему $\mathcal{U}$ подмножеств множества X называют покрытием множества C, если $C\subset\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}}U$. Покрытие $\mathcal{U}$ называется открытым, если оно состоит из открытых множеств, иначе, если $\mathcal{U}\subset\mathcal{G}(X)$.

+) Это произведение обычно называют (открытым) параллелепипедом или прямоугольником.

Множество $C\subset X$ называется к о м п а к т н ы м, если в любом его открытом покрытии содержится конечное покрытие.

Иногда бывает удобно использовать несколько более общее по форме определение компактности.

I. Пусть C - множество в X. Рассмотрим семейство $\{\mathcal{U}_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ множеств пространства X, удовлетворяющее условию: для каждой точки $x\in C$ найдется $\xi\in\Xi$ такое, что $\mathcal{U}_\xi\in\mathcal{W}_x$. Тогда C компактно в том и только в том случае, если в Ξ существует такое конечное подмножество Θ, что семейство $\{\mathcal{U}_\xi\}(\xi\in\Theta)$ удовлетворяет тому же условию, что и исходное семейство.

Для доказательства достаточно заметить, что совокупность всех множеств вида $\mathcal{U}^{\circ}_{\xi}$ $(\xi\in\Theta)$ является открытым покрытием множества C.

Непосредственно из определения компактности вытекает

II. Если C_1, C_2 - компактные множества пространства X, то $C=C_1\cup C_2$ также компактно.

Действительно, открытое покрытие $\mathcal{U}$ множества C является открытым покрытием каждого из множеств C_1, C_2. Следовательно, существуют конечные $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}$ такие, что $C_1\subset\bigcup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}_1}\mathcal{U}$, $C_2\subset\bigcup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}_2}\mathcal{U}$. Ясно, что $\mathcal{U}_1\cup\mathcal{U}_2$ служит покрытием множества C, очевидно, конечным.

Следует отметить, что пересечение $C_1\cap C_2$ компактных множеств C_1, C_2 компактным может не оказаться.

Для вывода других свойств компактных множеств нам понадобится определение компактности, сформулированное на языке замкнутых множеств.

> ТЕОРЕМА I (5.5). Множество C в топологическом пространстве X компактно в том и только в том случае, если какова бы ни была совокупность $\mathcal{L}$ замкнутых множеств, фильтрующаяся по убыванию и такая, что $C\cap\bigcap\limits_{F\in\mathcal{L}}F=\varnothing$, существует множество $F_0\in\mathcal{L}$, для которого $C\cap F_0=\varnothing$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть C - компактное множество и $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям теоремы. Обозначим через $\mathcal{U}$ совокупность всех таких множеств $\mathcal{U}\subset X$, что $\mathcal{U}'\in\mathcal{L}$. Так как $C\subset(\bigcap\limits_{F\in\mathcal{L}}F)'=\bigcup\limits_{F\in\mathcal{L}}F'=\bigcup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{U}}\mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ является открытым покрытием множества C, ибо все $\mathcal{U}\in\mathcal{U}$ открыты. Следовательно, найдутся множества $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2,\dots,\mathcal{U}_n$ такие, что $C\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}\mathcal{U}_k$, а это соотношение можно записать в виде $C\cap\bigcap\limits_{k=1}^{n}\mathcal{U}'_k=\varnothing$. Но $\mathcal{U}'_k\in\mathcal{L}$ и, так как $\mathcal{L}$ фильтруется по убыванию, найдется множество $F_0\in\mathcal{L}$, содержащееся в каждом $\mathcal{U}'_k$, т.е. $F_0\subset\bigcap\limits_{k=1}^{n}\mathcal{U}'_k$.

Поэтому $C \cap F_0 = \varnothing$.

Обратно, пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие множества C. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{U}}$ совокупность всех множеств вида $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $U_k \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Ясно, что $\widetilde{\mathcal{U}}$ также является открытым покрытием множества C и, кроме того, $\widetilde{\mathcal{U}}$ фильтруется по возрастанию. Следовательно, совокупность $\mathcal{L}$ всех множеств $F \subset X$ таких, что $F' \in \widetilde{\mathcal{U}}$, фильтруется по убыванию, а так как $\bigcap_{F \in \mathcal{L}} F = \bigcap_{U \in \widetilde{\mathcal{U}}} U' = (\bigcup_{U \in \widetilde{\mathcal{U}}} U)' \subset C'$, то $C \cap \bigcap_{F \in \mathcal{L}} F = \varnothing$. Согласно условиям теоремы существует $F_0 \in \mathcal{L}$, для которого $F_0 \cap C = \varnothing$, иначе, $C \subset F_0' = U_0$. Но $U_0 \in \widetilde{\mathcal{U}}$, т.е. $U_0 = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n$, где $U_k \in \mathcal{U}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), следовательно, совокупность $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ служит открытым покрытием множества C, содержащемся в $\mathcal{U}$, и C компактно. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если заранее известно, что множество C замкнуто, то условие теоремы в части достаточности можно несколько ослабить. Точнее, в этом случае, если пересечение любой фильтрующейся по убыванию совокупности непустых замкнутых подмножеств множества C непусто, то C компактно.

Сформулируем некоторые следствия доказанной теоремы.

III. Пусть C — компактное множество в X и ϑ — фильтрующаяся по убыванию совокупность замкнутых его подмножеств. Тогда, какова бы ни была окрестность U множества $\Phi = \bigcap_{F \in \vartheta} F$, существует такое $F_0 \in \vartheta$, что $F_0 \subset U$. В частности, если $\Phi = \varnothing$, то среди множеств совокупности ϑ имеется пустое.

Заметив, что окрестность U можно считать открытой, обозначим через ϑ_0 совокупность всех множеств вида $E = F \setminus U = F \cap U'$ ($F \in \vartheta$). Поскольку $\bigcap_{E \in \vartheta_0} E = U' \cap \bigcap_{F \in \vartheta} F = U' \cap \Phi = \varnothing$, система ϑ_0 удовлетворяет условиям теоремы I, следовательно, существует множество $F_0 \in \vartheta$ такое, что $F_0 \cap U' = C \cap (F_0 \cap U') = \varnothing$, т.е. $F_0 \subset U$.

Нередко оказывается полезным следующий признак компактности множества.

IV. Множество C топологического пространства X компактно в том и только в том случае, если любой ультрафильтр $\mathcal{U}$, содержащий множество C, сходится к некоторой точке $x \in C$.

Пусть C компактно и $\mathcal{U}$ — ультрафильтр, содержащий C. Пусть $A_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} \bar{A}$. Если $A_0 \cap C = \varnothing$, то, поскольку $\{\bar{A}\}$ ($A \in \mathcal{U}$) фильтруется по убыванию, по теореме I для некоторого $A \in \mathcal{U}$ имеем $C \cap \bar{A} = \varnothing$, что противоречит определению фильтра, так как $\bar{A}$ и C входят в $\mathcal{U}$. Пусть $x \in A_0 \cap C$, $V \in \mathcal{W}_x$, $A \in \mathcal{W}$. Так как $x \in \bar{A}$, то согласно предложению II (I.4) $V \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Учитывая, что $\mathcal{U}$ - ультрафильтр, заключаем отсюда, что $V \in \mathcal{U}$ (см. У (I.I)), так что $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{U}$, т.е. $\mathcal{U} \to x$.

Обратно, пусть соблюдены условия предложения и ϑ-такая фильтрующаяся по убыванию совокупность замкнутых множеств, что $F \cap C \neq \emptyset$ для каждого $F \in \vartheta$. Совокупность всех множеств вида $F \cap C$ с $F \in \vartheta$ также фильтруется по убыванию, так что существует фильтр, а, следовательно, ультрафильтр (обозначим его через $\mathcal{U}$), включающий все множества указанного вида. Так как, очевидно, $C \in \mathcal{U}$, то по условию найдется точка $x \in C$, к которой сходится ультрафильтр $\mathcal{U}$. Взяв произвольные множество $F \in \vartheta$ и окрестность $V \in \mathcal{W}_x$ и принимая во внимание соотношения $F \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{U}$, получаем, что $F \cap V \neq \emptyset$. Значит, ввиду замкнутости множества F будет $x \in F$. Следовательно, $x \in F \cap C$ и $\bigcap_{F \in \vartheta} F \cap C \neq \emptyset$. Применение теоремы I завершает доказательство.

Дадим пример применения предложения IУ.

У. Если C - компактное множество пространства X и C_0 - замкнутое подмножество множества C, то C_0 также компактно.

В самом деле, пусть $\mathcal{U}$ - ультрафильтр, содержащий множество C_0. Так как и подавно $C \in \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ сходится к некоторой точке $x \in C$. Но C_0 замкнуто и $C_0 \in \mathcal{U}$, поэтому согласно П (2.3) $x \in C_0$, так что оказывается возможным применение предложения IУ, откуда следует компактность множества C_0.

УI. В хаусдорфовом пространстве X всякое компактное множество замкнуто.

Действительно, пусть C компактно и $x \bar{\in} C$. Так как X хаусдорфово, то, в силу предложения Ш (I.8), пересечение множества $\mathcal{L}$ всех замкнутых окрестностей точки x состоит из единственной точки x, следовательно, $C \cap \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V = \emptyset$. Таким образом, $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям теоремы I, так что должна существовать окрестность $V \in \mathcal{L}$ точки x, не пересекающаяся с C, а это означает, что дополнение C' открыто, а множество C, таким образом, замкнуто.

Свойство множества быть компактным имеет абсолютный характер - оно не зависит от того, в каком пространстве рассматривается данное множество.

УП. Пусть X_0 - подпространство пространства X и $C \subset X_0$. Тогда C компактно в X_0 в том и только в том случае, если C компактно в X.

Действительно, пусть C компактно в X и $\mathfrak{V}_0$ - фильтрующаяся по убыванию совокупность замкнутых в X_0 множеств такая, что $C\cap\bigcap_{F\in\mathfrak{V}_0}F=\emptyset$. Каждому множеству F соотнесем его замыкание $\overline{F}$ в пространстве X. Поскольку $F=\overline{F}\cap X_0$ (предложение Ш (I.6)), то

$$C\cap\bigcap_{F\in\mathfrak{V}_0}\overline{F}=(C\cap X_0)\cap\bigcap_{F\in\mathfrak{V}_0}\overline{F}=C\cap\bigcap_{F\in\mathfrak{V}_0}(X_0\cap\overline{F})=C\cap\bigcap_{F\in\mathfrak{V}_0}F=\emptyset.$$

На основании теоремы I получаем, что существует такое $F_0\in\mathfrak{V}_0$, что $C\cap\overline{F}_0=\emptyset$. Тем более $C\cap F_0=\emptyset$.

Доказательство того, что из компактности C в X_0 следует компактность C в X, можно провести аналогично.

Множество E в топологическом пространстве X называется относительно компактным, если компактно его замыкание.

УШ. Если X_0 - замкнутое подмножество пространства X и $E\subset X_0$, то E относительно компактно в X_0 в том и только в том случае, если E относительно компактно в X.

В самом деле, в силу замкнутости X_0 замыкание $\overline{E}$ множества E в пространстве X совпадает с его замыканием в X_0. Поскольку $\overline{E}\subset X_0$, применимо предложение I.

Заметим, что без предположения замкнутости X_0 лишь из относительной компактности E в X_0 вытекает относительная компактность E в X, но не наоборот.

Топологическое пространство X называется компактным, если множество всех его точек компактно, т.е. если X компактно в себе.

IX. Компактное хаусдорфово пространство X нормально.

Докажем сначала, что компактное хаусдорфово пространство регулярно. Принимая во внимание предложение IУ (I.8), достаточно доказать, что фильтр $\mathfrak{W}_x$ окрестностей произвольной точки $x\in X$ обладает базисом, состоящим из замкнутых множеств. Пусть $V\in\mathfrak{W}_x$ и $\mathfrak{V}$ - совокупность всех замкнутых окрестностей точки x. Тогда $\bigcap_{U\in\mathfrak{V}}U=\Phi=\{x\}\subset V$ на основании предложения П (I.8), так что в силу предложения Ш(5.I) найдется множество $U\in\mathfrak{V}$, содержащееся в V.

Опираясь на доказанный факт и заменяя в проведенном рассуждении ссылки на предложения IУ (I.8) и П (I.8) ссылками на предложения У (I.8) и Ш (I.8) соответственно, придем к требуемому результату.

5.2. Очередной пункт этого параграфа посвятим рассмотрению компактных множеств в случае, если X есть $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$. Именно, установим критерий компактности множества в таком пространстве, известный под названием теоремы Больцано-Вейерштрасса. Прежде – несколько предварительных фактов.

I. Пусть $\varphi:\{x_\xi\}\ (\xi\in\Xi)$ – непустое фильтрующееся по возрастанию семейство элементов пространства X. Тогда если φ возрастает и ограничено сверху (в X), то существует $\lim\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi=\sup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$, если же φ убывает и ограничено снизу (в X), также существует $\lim\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi = \inf\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$.

Если Ξ фильтруется по убыванию, то, наоборот, убывающее семейство сходится к $\sup\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$, а возрастающее – к $\inf\limits_{\xi\in\Xi} x_\xi$.

Это предложение было обосновано в § 4 главы II (см. теорему I (4.2)).

II. Пусть E – непустое множество пространства X. Если E ограничено сверху (снизу), то $\sup E\in\overline{E}$ $(\inf E\in\overline{E})$.

Действительно, предположим сначала, что $a=\sup E$ конечен и не входит в E, т.е. что a не является точкой прикосновения множества E. Тогда можно указать $\varepsilon>0$ такое, что $E\cap(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)=\varnothing$. Но в таком случае точка $a-\varepsilon$, так же как и a, является верхней границей множества E, очевидно, строго меньшей, чем a.

Если $a=+\infty$, доказательство можно провести аналогично, используя определение окрестности точки $+\infty$.

III. Всякое непустое компактное множество в X имеет наибольший и наименьший элементы.

В самом деле, допустим, что непустое компактное множество $C\subset X$ не имеет наибольшего элемента. Тогда совокупность множеств вида $(\leftarrow,x)=\{y\in X: y<x\}\ (x\in C)$ является открытым покрытием множества C: для любого $c\in C$ найдется такое $x\in C$, что $c<x$, и, следовательно, $c\in(\leftarrow,x)$. Вследствие компактности C существует конечное множество $C_0\subset C$ такое, что $C\subset\bigcup\limits_{x\in C_0}(\leftarrow,x)$. Так как C_0 – непустое конечное множество в X, то в C_0 есть наибольший элемент v. Тогда $C\subset(\leftarrow,v)$, что невозможно, поскольку $v\in C_0\subset C$, а между тем $v\notin(\leftarrow,v)$.

Аналогично доказывается существование наименьшего элемента.

ТЕОРЕМА 2 (5.5). Непустое множество $C\subset X$ компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто и ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если C компактно, то, поскольку X хаусдорфово, множество C замкнуто (предложение VI (5.1)) и, по предыдущему предложению, ограничено.

Пусть теперь C – замкнутое ограниченное множество. Учитывая замечание к теореме I, достаточно доказать, что любая фильтрующаяся по убыванию совокупность ϑ непустых замкнутых подмножеств множества C имеет непустое пересечение.

Так как каждое $F\in\vartheta$ непусто и ограничено, то существуют $u_F=\inf F$ и $v_F=\sup F$, причем $u_F, v_F\in F$. Возьмем множества $F_1,F_2\in\vartheta$ и подберем $F\in\vartheta$ так, что $F\subset F_1, F_2$. Тогда $u_{F_1}\leq u_F\leq v_F\leq v_{F_2}$. Отсюда следует, в частности, что семейство $\{u_F\}(F\in\vartheta)$ убывающее и ограничено сверху, следовательно, существует $\lim\limits_{F\in\vartheta} u_F$. Если F_0 – произвольное множество из ϑ и $F\subset F_0$, то $u_F\in F\subset F_0$. Семейство $\{u_F\}$ $(F\in\vartheta, F\subset F_0)$, будучи конфинальным семейству $\{u_F\}(F\in\vartheta)$, сходится к x. Кроме того, $x\in F_0$ в силу замкнутости F_0. Следовательно, $\bigcap\limits_{F\in\vartheta} F\neq\emptyset$.

В заключение еще раз напомним, что в этом пункте под X понималось одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$, снабженных интервальной топологией.

Отметим еще, что условие ограниченности в случае, когда X – расширенная числовая прямая, всегда выполнено, так что пространство $\overline{\mathbb{R}}$ компактно.

5.3. Следующий результат является обобщением хорошо известной теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, в связи с чем мы и его будем также называть теоремой Вейерштрасса.

ТЕОРЕМА 3 (5.5). Пусть φ – непрерывное отображение топологического пространства T в топологическое пространство X. Если C – компактное в T множество, то образ $\varphi[C]$ компактен в X.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}$ – открытое покрытие множества $K=\varphi[C]$. Рассмотрим совокупность $\mathcal{G}$ всех множеств вида $\varphi^{-1}[U]$ $(U\in\mathcal{U})$. Согласно теореме I множества, входящие в $\mathcal{G}$, открыты, а так как

$$C\subset\varphi^{-1}[\varphi[C]]=\varphi^{-1}[K]\subset\varphi^{-1}\Big[\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\Big]=\bigcup_{U\in\mathcal{U}}\varphi^{-1}[U]=\bigcup_{H\in\mathcal{G}} H,$$

то $\mathcal{G}$ является открытым покрытием множества C. Пусть $\mathcal{G}_0$ – конечное покрытие множества C, содержащееся в $\mathcal{G}$. Для каждого $H\in\mathcal{G}_0$ найдем такое $U\in\mathcal{U}$, что $H=\varphi^{-1}[U]$, и совокупность всех таких множеств обозначим через $\mathcal{U}_0$. Тогда

$$K=\varphi[C]\subset\varphi\Big[\bigcup_{H\in\mathcal{G}_0} H\Big]=\bigcup_{H\in\mathcal{G}_0}\varphi[H]=\bigcup_{U\in\mathcal{U}_0}\varphi[\varphi^{-1}[U]]\subset\bigcup_{U\in\mathcal{U}_0} U.$$

Следовательно, $\mathcal{U}_0$ также является покрытием множества K, очевидно, конечным, так что K компактно.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть T - топологическое пространство. Непрерывная на T функция (со значениями в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$) имеет на каждом компактном множестве $C\subset T$ наибольшее и наименьшее значения.

Для доказательства достаточно сослаться на то, что компактное множество в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$ имеет наибольший и наименьший элементы, и воспользоваться доказанной теоремой.

СЛЕДСТВИЕ 2. Конечная функция φ, непрерывная на топологическом пространстве T, ограничена на каждом компактном множестве $C\subset T$.

Достаточно заметить, что $\varphi[C]$, будучи компактным множеством на числовой прямой, ограничено.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если топологическое пространство X обладает тем свойством, что существует непрерывное отображение некоторого компактного пространства T на X, то оно также компактно.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если φ - взаимно однозначное непрерывное отображение компактного пространства T на хаусдорфово пространство X, то обратное отображение φ^{-1} также непрерывно, т.е. φ является гомеоморфизмом пространства T на пространство X.

Обозначим $\psi=\varphi^{-1}$. Если F - замкнутое множество пространства T, то оно компактно, и значит компактен образ $\varphi[F]$. Будучи компактным, последнее множество замкнуто в X. Но $\varphi[F]=\psi^{-1}[F]$, так что прообраз (при отображении ψ) любого замкнутого множества пространства T замкнут в X, следовательно, φ^{-1} непрерывно.

5.4. Следующий широко известный факт носит название теоремы Тихонова.

ТЕОРЕМА 4 (5.5). Пусть $\{X_t\}$ $(t\in T)$ - семейство топологических пространств и $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$. Если при каждом $t\in T$ множество C_t компактно в пространстве X_t, то $C=\prod_{t\in T} C_t$ компактно в $\mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}$ - ультрафильтр в T, содержащий множество C. Согласно предложениям II (2.I), III(2.I) совокупность $P_t\langle\mathcal{U}\rangle$ - ультрафильтр в X_t, причем $C_t=P_t[C]\in P_t\langle\mathcal{U}\rangle$. На основании предложения IV (5.I) существует такая точка $x_t\in C_t$, что $P_t\langle\mathcal{U}\rangle\to x_t$. Полагая $x=\{x_t\}(t\in T)$, в соответствии с предложением I (4.3), имеем $\mathcal{U}\to x$. По определению $x\in C$, следовательно, доказанная сходимость в силу IУ (5.I) влечет компактность C.

СЛЕДСТВИЕ I. Множество $C\subset\overline{\mathbb{R}}^M$ компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто.

Действительно, по теореме 2 (5.5) пространство $\overline{\mathbb{R}}$ компактно, а в силу доказанной теоремы будет компактным и пространство $\overline{\mathbb{R}}^M$. Остается лишь применить предложение У (5.I).

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество C в $\mathbb{R}^M$ компактно в том и только в том случае, если оно замкнуто и ограничено.

Действительно, пусть C - компактное множество в $\mathbb{R}^M$. Считая $C\neq\varnothing$, рассмотрим функции

$$u:t\to\inf P_t[C],\quad v:t\mapsto\sup P_t[C]\qquad(t\in M).$$

Так как по теореме Вейерштрасса множество $P_t[C]$ компактно в $\mathbb{R}$, оно ограничено в $\mathbb{R}$, а это означает, что функции u, v конечны, т.е. что $u, v\in\mathbb{R}^M$. Но $u\leqslant x\leqslant v$, каков бы ни был $x\in C$. Замкнутость множества C есть следствие предложения УI (5.I).

Обратно, пусть C - замкнутое ограниченное множество. Если функции u, v - нижняя и верхняя границы множества C, то $C\subset\prod_{t\in M}[u(t),v(t)]=[u,v]$. Но, в силу теоремы 2 (5.5), при любом t множество $[u(t),v(t)]$ компактно в $\mathbb{R}$, а тогда, по доказанной теореме, компактно и множество $[u,v]$. Будучи замкнутым подмножеством компактного множества, C компактно (см. предложение У (5.I)).

Утверждение следствия 2 называют обычно теоремой Больцано-Вейерштрасса.

§ 6. Равномерные пространства

Задание топологии на некотором множестве X позволяло судить о близости точек из X к какой-либо данной точке. С другой стороны, при изучении предела числового соответствия мы уже сталкивались с ситуациями, в которых надо было оценивать близость двух элементов, не фиксируя никакого из них. Так было, например, при рассмотрении сходящихся в себе числовых соответствий. На этом пути можно придти к такой структуре на множестве X, называемой равномерной структурой, в которой можно говорить о взаимной близости элементов из X. Цель введения равномерной структуры не ограничивается возможностью рассмотрения аналогов сходящихся в себе числовых соответствий. В рамках этой структуры возникают важнейшие понятия анализа, такие, как полнота, равномерная непрерывность, равномерная сходимость и т.п. Настоящим параграфом мы приступаем к изложению элементов теории равномерных пространств.

6.1. Рассмотрим множество X. Фильтр $\mathcal{U}$ в системе непустых подмножеств произведения $X^2=X\times X$ называется **равномерностью** на X, если он удовлетворяет следующим трем условиям:

1) каждое $V\in\mathcal{U}$ содержит **диагональ** $\Delta=\{(x,x): x\in X\}$ произведения X^2, т.е. $\Delta\subset V$ $(V\in\mathcal{U})$;

2) с каждым $V\in\mathcal{U}$ в фильтр $\mathcal{U}$ входит симметричное V множество V^{-1};

3) для любого $V\in\mathcal{U}$ найдется $U\in\mathcal{U}$ такое, что $U\circ U\subset V$ +).

Фильтр $\mathcal{U}$ называют также **фильтром окружений диагонали** (в X^2) или, если достаточно ясно, о чем идет речь, просто фильтром окружений. Каждое $V\in\mathcal{U}$ называется **окружением диагонали** в X^2 или просто окружением (в X^2). Если на некотором множестве X задана равномерность, говорят, что на X **задана равномерная структура**, или **структура равномерного пространства**.

Упорядоченная пара $(X,\mathcal{U})$, где X - множество, а $\mathcal{U}$ - равномерность на X, называется **равномерным пространством** с равномерностью $\mathcal{U}$. В дальнейшем, как обычно в подобных ситуациях, мы нередко будем опускать указания равномерности и говорить просто о равномерном пространстве X, если, конечно, такая вольность речи не приведет к недоразумениям.

Укажем два простых примера равномерных пространств. Пусть X - некоторое множество. Фильтр $\mathcal{U}$ в X^2, включающий в себя все подмножества X^2, содержащие диагональ, удовлетворяет, очевидно,

---

+) Напомним, что множества из $X\times X$ — суть соответствия, действующие из X в X. При этом диагональ Δ есть не что иное, как тождественное отображение множества X на себя, V^{-1} - обратное к V соответствие: $V^{-1}=\{(x,y):(y,x)\in V\}$ и $W\circ U$ - суперпозиция соответствий U, W, именно, $W\circ U$ есть множество пар (x,y) таких, что существует $z\in X$, для которого $(x,z)\in U, (z,y)\in W$. Подробнее о соответствиях см. в § 2 главы I.

всем условиям определения равномерности. Такая равномерность на X называется д и с к р е т н о й равномерностью. С другой стороны, в качестве фильтра окружений можно взять $\mathcal{W}=\{X^2\}$ – фильтр, состоящий из единственного множества X^2. Эту равномерность на X называют а н т и д и с к р е т н о й, или вырожденной.

При рассмотрении некоторых вопросов бывает удобно использовать не весь фильтр $\mathcal{W}$ окружений диагонали, а некоторый его базис. Такой базис удовлетворяет, понятно, всем трем условиям определения равномерности. Нетрудно доказывается и обратный результат, сформулированный в следующем предложении.

I. Пусть $\mathcal{B}$ – фильтрующаяся (по убыванию) совокупность подмножеств множества X^2, удовлетворяющая условиям I–3 определения равномерности. Тогда существует единственная равномерность $\mathcal{W}$ на X, для которой $\mathcal{B}$ служит базисом.

Не лишне отметить такой факт.

П. Фильтр $\mathcal{W}$ окружений диагонали Δ в X^2 обладает базисом, состоящим из симметричных множеств, т.е. таких, что $V=V^{-1}$.

Для доказательства достаточно заметить, что для любого $V\in\mathcal{W}$ множество $V\cap V^{-1}$ симметрично, входит в $\mathcal{W}$ и содержится в V.

Из условия 3 определения равномерности на X по индукции можно получить

Ш. Для любых $V\in\mathcal{W}$ и натурального n найдется $U\in\mathcal{W}$ такое, что $U\circ U\circ\ldots\circ U\subset V$, где слева в последнем включении стоит суперпозиция n экземпляров множества U.

Действительно, пусть n – некоторое натуральное число. Если $n=2^k$ $(k\in\mathbb{N})$, то требуемое окружение U получим сразу из третьего условия. Пусть n не является степенью двойки. Возьмем $m\in\mathbb{N}$ такое, что $n<2^m$, и найдем $U\in\mathcal{W}$, для которого $U\circ U\circ\ldots$ $\ldots\circ U\subset V$, где слева стоит суперпозиция 2^m окружений U. Тогда имеем

$$\underbrace{U\circ U\circ\ldots\circ U}_{n}=\underbrace{U\circ U\circ\ldots\circ U\circ\Delta\circ\ldots\circ\Delta}_{2^m}\subset\underbrace{U\circ U\circ\ldots\circ U}_{2^m}\subset V,$$

так что и в этом случае нужное окружение существует.

Каждой точке x равномерного пространства $(X,\mathcal{W})$ сопоставим фильтр $\mathcal{W}_x$, состоящий из множеств $V[x]=\{y\in X:(x,y)\in V\}$ $(V\in\mathcal{W})$ – сечений соответствий V из $\mathcal{W}$.

IУ. Семейство $\tau:\{\mathcal{W}_x\}$ $(x\in X)$ – топология на X.

Покажем вначале, что $\mathcal{W}_x$ – фильтр, каждое из множеств которого содержит точку x. Действительно, если $V[x]\in\mathcal{U}_x$, то из первого условия определения равномерности следует, что $(x,x)\in V$, так что $x\in V[x]$. Далее, пусть $V_1[x], V_2[x]\in\mathcal{U}_x$. Тогда, поскольку $V_1\cap V_2\in\mathcal{U}$, из соотношения $V_1[x]\cap V_2[x]=(V_1\cap V_2)[x]$ следует включение $V_1[x]\cap V_2[x]\in\mathcal{U}_x$. Осталось проверить, что если $\mathcal{U}=V[x]\in\mathcal{U}_x$ и $W\supset\mathcal{U}$, то $W\in\mathcal{U}_x$. Это свойство легко усмотреть из соотношений $W=((X\times W)\cup V)[x]$ и $(X\times W)\cup V\supset V$.

Итак, доказано, что $\{\mathcal{U}_x\}$ $(x\in X)$ - предтопология на X. Убедимся в существовании фундаментальной системы открытых окрестностей каждой точки $x\in X$. Для этого достаточно показать, что внутренность $\mathcal{U}^o$ каждого $\mathcal{U}=V[x]$ из $\mathcal{U}_x$ также входит в $\mathcal{U}_x$. Действительно, согласно условию 3 найдется $W\in\mathcal{U}$ такое, что $W\circ W\subset V$. Пусть $y\in W[x]$. Тогда $W[y]\subset\mathcal{U}$, так что каждая точка $y\in W[x]$ входит в $\mathcal{U}$ с некоторой своей окрестностью, поэтому $W[x]\subset\mathcal{U}^o$, следовательно, $\mathcal{U}^o\in\mathcal{U}_x$. Предложение доказано.

Топология τ называется **топологией равномерного пространства** $(X,\mathcal{U})$ или топологией, **ассоциированной с равномерностью** $\mathcal{U}$ на X, или просто **равномерной топологией** на X. Топология равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ будет обозначаться, как правило, через $\tau(\mathcal{U})$.

Если $\mathcal{L}$ - базис равномерности $\mathcal{U}$, то совокупность $\{V[x]: V\in\mathcal{L}\}$ составляет базис фильтра окрестностей точки x в топологии $\tau(\mathcal{U})$.

Понятно, что топология дискретной равномерности суть дискретная топология, с антидискретной равномерностью ассоциируется вырожденная топология.

Говоря о свойствах топологического пространства с равномерной топологией, мы будем нередко допускать вольность речи и говорить о них как о свойствах равномерного пространства. Например, выражение "отделимое равномерное пространство X", или "компактное равномерное пространство X" надо понимать так: "топологическое пространство X с равномерной топологией отделимо", или соответственно "топологическое пространство с равномерной топологией компактно". Такая терминология вряд ли приведет к недоразумениям - равномерная топология целиком и полностью определяется заданием равномерной структуры, и из контекста обычно ясно, о чем идет речь в том или ином случае.

Оказывается, что топология равномерного пространства обладает некоторой квалификацией в смысле аксиом отделимости.

У. Равномерное пространство X - всегда T_3-пространство.

В силу предложения IУ (1.8) достаточно показать, что фильтр окрестностей любой точки $x \in X$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств. Пусть $V[x] \in \mathcal{W}_x$. Найдем симметричное окружение W такое, что $W \circ W \subset V$, и покажем, что $\overline{W[x]} \subset V[x]$. Действительно, рассмотрим $y \in \overline{W[x]}$. Так как любая окрестность точки y имеет с $W[x]$ непустое пересечение, то, в частности, $W[y] \cap W[x] \neq \emptyset$. Возьмем $z \in W[y] \cap W[x]$. Тогда $(x,z) \in W$, $(y,z) \in W$, но W симметрично, следовательно, $(z,y) \in W$ и $(x,y) \in W \circ W \subset V$. Отсюда получаем, что $y \in V[x]$, т.е. $\overline{W[x]} \subset V[x]$.

Топология равномерного пространства далеко не всегда отделима. Точнее, имеет место следующее предложение

IУ. Равномерное пространство отделимо в том и только в том случае, если $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} V = \Delta$.

Действительно, предположим, что $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} V = \Delta$, и возьмем две точки x, y из X. Соотношение $y \in V[x]$ для любого $V \in \mathcal{W}$ означает, что $(x,y) \in V$ $(V \in \mathcal{W})$, или $(x,y) \in \bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} V$, откуда $x = y$ и $\tau(\mathcal{W})$ отделима.

Обратно, пусть $\tau(\mathcal{W})$ отделима, но $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} V \neq \Delta$. Тогда найдутся точки $x, y \in X$ такие, что $x \neq y$ и $x, y \in V$ для любого $V \in \mathcal{W}$. Это же означает, что $y \in V[x]$ $(V \in \mathcal{W})$, а это противоречит предположению отделимости топологии $\tau(\mathcal{W})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из последних двух предложений следует, что отделимое равномерное пространство регулярно, в частности хаусдорфово.

Равномерная структура на множестве X порождает равномерную топологию на X. Из доказанных предложений можно придти к выводу, что не всякая топология на X является топологией некоторой равномерности - для этого она должна обладать некоторой квалификацией. Топологическое пространство (X, μ) называется р а в н о м е р и з у е м ы м, если на X можно задать равномерность $\mathcal{W}$ так, что μ совпадет с топологией, ассоциированной с равномерностью $\mathcal{W}$.

Отметим, что одна и та же топология на X может оказаться ассоциированной с разными равномерностями на X. Мы уже рассудили, что не всякое топологическое пространство равномеризуемо.

Полное описание равномеризуемых пространств отложим до следующего параграфа (теорема 3 (7.5)).

6.2. Остановимся на одном исключительно важном примере равномерного пространства. Его значение обусловлено тем, что близость элементов этого пространства можно оценивать с использованием естественной "шкалы" - множества положительных вещественных чисел.

Пусть X - некоторое множество. Конечная вещественная функция ρ, заданная на произведении X^2, называется **метрикой** на X, если выполнены следующие условия:

1) $\rho(x,y) \geq 0$ для любых $x, y \in X$; $\rho(x,y)=0$ в том и только в том случае, если $x=y$;

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ для любых $x,y\in X$ (свойство симметричности метрики);

3) каковы бы ни были элементы x,y,z из X, имеет место соотношение (называемое неравенством треугольника)

$$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y). \tag{1}$$

Если ρ - метрика на X и $x,y\in X$, то число $\rho(x,y)$ называется **расстоянием** между элементами x и y (или от x до y). Упорядоченная пара (X,ρ) называется **метрическим пространством**. Говорят также, что метрика ρ определяет на X структуру метрического пространства. В дальнейшем, если не оговорено противного, метрика на каком-либо множестве будет обозначаться буквой ρ +).

Пусть ρ - метрика на X. Из (1) по индукции следует

$$\rho(x_0,x_n)\leq\sum_{k=1}^{n}\rho(x_{k-1},x_k)\quad(x_0,x_1,\dots,x_n\in X). \tag{2}$$

Далее,

$$|\rho(x,y)-\rho(u,v)|\leq\rho(x,u)+\rho(y,v)\quad(x,y,u,v\in X). \tag{3}$$

Действительно, в силу условия 2 определения метрики можно считать, что $\rho(x,y)\geq\rho(u,v)$. А тогда, на основании соотношения (2), имеем

$$|\rho(x,y)-\rho(u,v)|=\rho(x,y)-\rho(u,v)\leq\rho(x,u)+\rho(u,v)+$$
$$+\rho(v,y)-\rho(u,v)=\rho(x,u)+\rho(y,v).$$

+) Как и выше в подобных случаях, метрика ρ фигурирует в обозначениях метрического пространства лишь тогда, когда без этого возможны недоразумения.

Множество $B_r = \{(x,y)\in X^2 : \rho(x,y)\leq r\}$ $(r\in\mathbb{R}, r>0)$ называют (замкнутым) **цилиндром** $(\text{в} X)$ диаметра r, а множество $\mathring{B}_r = \{(x,y)\in X^2 : \rho(x,y)<r, r>0\}$ – открытым **цилиндром** диаметра r.

Совокупность $\{B_r\}$ $(r\in\mathbb{R}, r>0)$ цилиндров в X, очевидно, фильтруется по убыванию. Из симметричности метрики ρ следует, что каждое B_r – симметричное множество. Далее, из неравенства треугольника можно вывести соотношение $B_{\frac{r}{2}} \circ B_{\frac{r}{2}} \subset B_r$, так что, согласно предложению I (6.I), система $\{B_r\}$ $(r>0)$ служит базисом некоторой равномерности на X, которую называют **равномерностью метрического пространства** (X,ρ), или **метрической равномерностью** на X.

Понятно, что равномерность метрического пространства обладает счетным базисом – в качестве такого можно взять, например, совокупность цилиндров $\{B_{\frac{1}{n}}\}$ $(n\in\mathbb{N})$ с диаметрами $\frac{1}{n}$.

В каждом метрическом пространстве можно ввести связанную с метрикой топологию, именно топологию, ассоциированную с равномерностью метрического пространства. Такую топологию называют **топологией метрического пространства** (X,ρ), или метрической топологией. Фильтр окрестностей точки $x\in X$ в этой топологии порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\{B_r[x]\}$ $(r>0)$. Множество $B_r[x]$ называется (замкнутым) **шаром** с центром в x и радиуса r. Нетрудно понять, что совокупность $\{\mathring{B}_r[x]\}$ $(r>0)$ **открытых шаров** с центром в x радиуса r также образуют базис фильтра окрестностей точки x в топологии метрического пространства X.

Можно отметить также, что для каждой точки $x\in X$ совокупность $\{B_{\frac{1}{n}}[x]\}$ $(n\in\mathbb{N})$ шаров с центром в x радиуса $\frac{1}{n}$ образуют счетный базис фильтра окрестностей точки x. То же можно сказать и о системе $\{\mathring{B}_{\frac{1}{n}}[x]\}$ $(n\in\mathbb{N})$ открытых шаров с центром в x. Отсюда, в частности, следует, что топология метрического пространства X секвенциальна.

В качестве примера метрического пространства укажем числовое множество $\mathcal{R}$, т.е. $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$. Равномерность на $\mathcal{R}$, порожденная метрикой ρ, будет рассматриваться как стандартная. Стандартная равномерность на $\mathcal{R}$ порождена, таким образом, фильтрующейся по убыванию системой множеств в $\mathcal{R}^2$ вида $\{(x,y)\in\mathcal{R}^2: |x-y|\leq r\}$, где $r\in\mathcal{R}$, $r>0$. Ясно, что совокупность множеств $\{(x,y)\in\mathcal{R}^2: |x-y|\leq \frac{1}{n}\}(n\in\mathcal{N})$ также служит базисом введенной равномерности. Впредь, говоря о равномерности пространства $\mathcal{R}$, мы будем иметь в виду именно эту равномерность на $\mathcal{R}$.

Отметим еще один пример. Пусть X - некоторое множество. Функция ρ, сопоставляющая паре $(x,y)\in X^2$ число 1, если $x\neq y$, и число 0 в случае $x=y$, является, очевидно, метрикой на X, которая называется д и с к р е т н о й, а метрическое пространство (X,ρ) - дискретным. Легко проверить, что топология и равномерность дискретного метрического пространства дискретны.

Равномерность метрического пространства довольно удобно устроена, ибо взаимную близость пар элементов такого пространства можно оценивать с помощью положительных вещественных чисел. Это преимущество равномерности метрического пространства естественно влечет следующее определение. Пусть $\mathcal{U}$ - равномерность на множестве X. Если на X можно задать метрику ρ такую, что $\mathcal{U}$ совпадает с равномерностью метрического пространства (X,ρ), то равномерность $\mathcal{U}$ называют м е т р и з у е м о й, а равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ - м е т р и з у е м ы м. Известно, что не всякая равномерность на X метризуема. Следующая теорема дает критерий метризуемости равномерного пространства.

ТЕОРЕМА 1 (6.5). Равномерное пространство метризуемо в том и только в том случае, если оно отделимо и фильтр окружений обладает счетным базисом.

Мы не станем доказывать эту теорему, ибо в настоящей книге она не будет использована, и, кроме того, известное нам доказательство - довольно кропотливое и краткостью не отличается. Желающие могут ознакомиться с доказательством по книгам, посвященным общей топологии, либо подумать над ним самостоятельно.

6.3. Пусть $(X,\mathcal{U})$ - равномерное пространство и $\tau=\tau(\mathcal{U})$ топология, ассоциированная с равномерностью $\mathcal{U}$. Зададим на X^2 топологию произведения топологических пространств (X,τ) и обсудим свойства фильтра окружений относительно введенной на X^2 топологии. Сначала докажем один вспомогательный факт, полезный в техническом отношении.

1. Если V_1, V_2, V_3 - подмножества в X^2, то

$$V_1 \circ V_2 \circ V_3 = \bigcup_{(x,y)\in V_2} V_3^{-1}[x] \times V_1[y].$$

В самом деле, соотношение $(u, v) \in V_1 \circ V_2 \circ V_3$ означает, что найдется $(x, y) \in V_2$, для которого $(u, x) \in V_3$, $(y, v) \in V_1$. Последнее же равносильно включениям $u \in V_3^{-1}[x]$, $v \in V_1[y]$, или $(u, v) \in V_3^{-1}[x] \times V_1[y]$. Итак, мы получили, что соотношение $(u, v) \in V_1 \circ V_2 \circ V_3$ равносильно включению $(u, v) \in V_3^{-1}[x] \times V_1[y]$ для некоторого $(x, y) \in V_2$, а это и означает справедливость предложения.

СЛЕДСТВИЕ. Множество $V \circ U \circ V$, где $U \subset X^2$, $V \in \mathcal{U}$, является окрестностью (в X^2) множества U.

Для доказательства достаточно заметить, что $V^{-1}[x] \times V[y]$ $((x, y) \in U)$ – окрестность в X^2 точки (x, y).

П. Замыкание множества $A \subset X^2$ задается соотношением $\bar{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V \circ A \circ V$, где $\mathcal{L}$ – система всех симметричных окружений диагонали в X^2.

Действительно, если $(x, y) \in \bar{A}$, то (x, y) входит в любую окрестность множества A, в частности $(x, y) \in V \circ A \circ V$ для каждого $V \in \mathcal{L}$, т.е. $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V \circ A \circ V$.

Обратно, пусть $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V \circ A \circ V$. Это означает, что для любого $V \in \mathcal{L}$ найдется $(u, v) \in A$ такая, что $(x, u) \in V$, $(v, y) \in V$. В силу симметричности V последние соотношения равносильны таким: $u \in V[x]$, $v \in V[y]$, или $[u, v] \in V[x] \times V[y]$. Осталось заметить, что множества $V[x] \times V[y]$ $(V \in \mathcal{L})$ образуют базис фильтра окрестностей точки (x, y), откуда следует, что пересечение любой окрестности точки (x, y) с множеством A непусто. Итак, $(x, y) \in \bar{A}$.

СЛЕДСТВИЕ I. Замыкание диагонали совпадает с пересечением фильтра окружений диагонали, т.е. $\bar{\Delta} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

В самом деле, согласно доказанному предложению имеем $\bar{\Delta} = \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V \circ \Delta \circ V$. Но $V \circ \Delta \circ V = V \circ V$, и осталось лишь заметить, что в силу условия 3 определения равномерности суперпозиции $V \circ V$ всевозможных окружений образуют базис фильтра окружений. Так что $\bar{\Delta} = \bigcap_{V \in \mathcal{L}} V \circ V = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Равномерная топология τ на X отделима в том и только в том случае, если $\bar{\Delta} = \Delta$.

Действительно, пусть τ отделима и $(x, y) \in \bar{\Delta}$. Из следствия I получаем, что $y \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[x]$. Но τ отделима, следовательно, $y = x$, откуда $(x, y) = (x, x) \in \Delta$ и $\bar{\Delta} = \Delta$.

Обратно, если $\bar{\Delta} = \Delta$ и $y \in \bigcap_{V \in \mathcal{U}} V[x]$, то $(x, y) \in \bar{\Delta} = \Delta$, так что $y = x$, следовательно, топология τ отделима.

III. Открытые в X^2 окружения образуют базис фильтра окружений.

Действительно, пусть $V \in \mathcal{W}$. Найдем симметричное окружение такое, что $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subset V$. В силу следствия из предложения I множество $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$ – окрестность окружения $\mathcal{U}$, следовательно, внутренность V^o множества V содержит $\mathcal{U}$ и является, таким образом, окружением диагонали, содержащимся в V, очевидно, открытым.

IУ. Замкнутые в X^2 окружения образуют базис фильтра окружений $\mathcal{W}$.

В самом деле, взяв $V \in \mathcal{W}$, найдем симметричное окружение $\mathcal{U}$ такое, что $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subset V$. Пусть $(x,y) \in \overline{\mathcal{U}}$. Тогда, поскольку $\mathcal{U}[x] \times \mathcal{U}[y]$ – окрестность точки (x,y), то $(\mathcal{U}[x] \times \mathcal{U}[y]) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. Выберем $(u,v) \in (\mathcal{U}[x] \times \mathcal{U}[y]) \cap \mathcal{U}$. Тогда $(x,u) \in \mathcal{U}$, $(y,v) \in \mathcal{U}$, $(u,v) \in \mathcal{U}$, и, в силу симметричности $\mathcal{U}$, имеем $(x,y) \in \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subset V$, так что $(x,y) \in V$. Тем самым мы доказали включение $\overline{\mathcal{U}} \subset V$, и осталось лишь заметить, что $\overline{\mathcal{U}}$ – замкнутое окружение диагонали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказанного предложения и следствия к предложению II можно сделать вывод, что замыкание диагонали можно реализовать как пересечение всех замкнутых (в X^2) окружений.

Из результата предложения III следует, что всякое окружение диагонали является ее окрестностью. Следует иметь в виду, что обратное, вообще говоря, неверно, т.е. не всякая окрестность диагонали есть ее окружение. Однако в некоторых случаях этот факт имеет место.

У. Фильтр окружений диагонали компактного равномерного пространства X совпадает с фильтром ее окрестностей.

Действительно, пусть $\mathcal{U}$ – окрестность диагонали. Сечение $\mathcal{U}^o[x]$ внутренности $\mathcal{U}^o$ множества $\mathcal{U}$ данной точкой $x \in X$ открыто и содержит точку x, следовательно, множество $\mathcal{U}^o[x]$ служит окрестностью точки x. Поэтому существует такое окружение диагонали V_x, что $\mathcal{U}^o[x] = V_x[x]$. Но согласно следствию I из предложения II имеем $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} V = \bar{\Delta}$, откуда $V[x] \supset \bar{\Delta}[x]$ для любого $V \in \mathcal{W}$. В частности, $\mathcal{U}^o[x] = V_x[x] \supset \bar{\Delta}[x]$. Поскольку это соотношение справедливо для каждого $x \in X$, можем написать $\mathcal{U}^o \supset \bar{\Delta}$, так что $\mathcal{U}$ является окрестностью и замыкания $\bar{\Delta}$ диагонали Δ. Но $\bar{\Delta}$, будучи замкнутым множеством компактного пространства X^2, компактно, и так как $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{W}} \overline{V} = \bar{\Delta} \subset \mathcal{U}$, то, по предложению III (5.I), найдется $W \in \mathcal{W}$ такое, что $\overline{W} \subset \mathcal{U}$. Отсюда следует, что $\mathcal{U}$ – окружение.

Остановимся на рассмотрении топологических свойств цилиндров и шаров в равномерности метрического пространства (X, ρ).

ЛЕММА. Метрика $\rho : (x,y) \mapsto \rho(x,y)$ непрерывна на X^2, снабженном топологией произведения.

Пусть (x_0, y_0) - точка из X^2. Возьмем произвольно положительное число ε. Шары $B_{\varepsilon/2}[x_0]$, $B_{\varepsilon/2}[y_0]$ являются окрестностями точек x_0, y_0, соответственно и, по определению топологии в произведении $X \times X$, множество $B_{\varepsilon/2}[x_0] \times B_{\varepsilon/2}[y_0]$ - окрестность точки (x_0, y_0). Для элементов (x, y) из этой окрестности с учетом неравенства (3) имеем

$$|\rho(x_0,y_0)-\rho(x,y)| \le \rho(x_0,x)+\rho(y_0,y) \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что и означает непрерывность ρ в точке $(x_0,y_0)\in X^2$. Лемма доказана.

Из этой леммы и из критерия непрерывности отображения топологических пространств (см. теорему I (2.5)) получаем топологические свойства цилиндров.

УI. Замкнутый цилиндр является замкнутым множеством, открытый цилиндр - открытым множеством в X^2, снабженном топологией произведения.

Из топологических свойств цилиндров можно получить топологические свойства шаров.

УП. Замкнутый шар - замкнутое множество, открытый шар - открытое множество в метрической топологии.

Результат предложения следует непосредственно из предложения УI и определений шаров.

ЗАМЕЧАНИЕ. Не надо думать, что замыкание открытого шара $\overset{\circ}{B}_r[x]$ всегда совпадает с соответствующим замкнутым шаром $B_r[x]$.

§ 7. Отображения равномерных пространств

В свое время мы обсуждали свойства так называемых непрерывных отображений топологических пространств, грубо говоря, отображений, "согласованных" с топологической структурой. Здесь пойдет речь об отображениях равномерных пространств, которые согласованы со структурой равномерного пространства.

7.I. Пусть $(T, \mathfrak{M})$, $(X, \mathfrak{U})$ - равномерные пространства, $f : T \to X$ - отображение, действующее из T в X. Это отображение порождает отображение $\hat{f}: T^2 \to X^2$, определенное на $\Omega_f \times \Omega_f$ и действующее по правилу $\hat{f}: (s,t) \mapsto (f(s), f(t))$. Отображение f называется **равномерно непрерывным**, если $\widetilde{\hat{f}\langle \mathfrak{M} \rangle} \supset \mathfrak{W}$ +). Данное определение можно было высказать и так: f равномерно непрерывно, если для любого $V \in \mathfrak{W}$ найдется $W \in \mathfrak{M}$ такое, что $\hat{f}[W] \subset V$. В частности, если f определено на всем T, равномерная непрерывность равносильна следующему: для каждого окружения $V \in \mathfrak{W}$ прообраз $\hat{f}^{-1}[V]$ есть окружение из $\mathfrak{M}$. В терминах, относящихся к самому отображению f, свойство равномерной непрерывности f означает, что для любого $V \in \mathfrak{W}$ найдется $W \in \mathfrak{M}$ такое, что из $(s,t) \in W$ следует $(f(s), f(t)) \in V$.

Заметим, что в определении равномерной непрерывности, а также в его разновидностях, вместо фильтров $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{W}$ можно рассматривать какие-либо их базисы.

I. Пусть $\sigma = \tau(\mathfrak{M})$, $\mu = \tau(\mathfrak{W})$ – топологии равномерностей $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{W}$ соответственно. Тогда всякое равномерно непрерывное отображение $f: (T, \mathfrak{M}) \to (X, \mathfrak{W})$ непрерывно как отображение топологического пространства (T, σ) в топологическое пространство (X, μ).

Докажем непрерывность f в каждой точке $t \in \Omega_f$. Пусть $V[x]$ – окрестность точки $x = f(t)$. Согласно условию предложения найдется окружение $W \in \mathfrak{M}$ такое, что $\hat{f}[W] \subset V$. Убедимся в том, что $f[W[t]] \subset V[x]$. В самом деле, если $s \in W[t] \cap \Omega_f$, то $(t,s) \in W$, а тогда $(f(t), f(s)) \in V$, или $f(s) \in V[f(t)] = V[x]$. Итак, $f[W[t]] \subset$ $\subset V[x]$, и в силу произвольности $V[x]$ отображение f непрерывно в точке t.

Обратное утверждение, вообще говоря, не имеет места. Укажем один важный случай, известный под названием теоремы Кантора, когда обратное заключение все же выполнено.

ТЕОРЕМА I (7.5). Пусть $(T, \mathfrak{M})$, $(X, \mathfrak{W})$ – равномерные пространства и T компактно. Тогда всякое непрерывное на T отображение f, действующее в X, равномерно непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности отображения f и из определения топологии в произведении топологических пространств следует, что отображение $\hat{f}: (s,t) \mapsto (f(s), f(t))$ также непрерывно в каждой точке $(s,t) \in T^2$. Пусть $V \in \mathfrak{W}$ – окружение диагонали $\mathcal{D}$ в X^2. Согласно предложению III (6.3) найдется открытое окруже-

---

+) Напомним, что $\hat{f}\langle \mathfrak{M} \rangle = \{\hat{f}[V] : V \in \mathfrak{M}\}$ и $\widetilde{\hat{f}\langle \mathfrak{M} \rangle}$ – фильтр, порожденный фильтрующейся по убыванию совокупностью $\hat{f}\langle \mathfrak{M} \rangle$.

ние $\mathcal{U}\in\mathcal{W}$, содержащееся в V. Замыкание $\bar{\mathcal{D}}$ диагонали $\mathcal{D}$ в X^2 содержится в любом окружении, в частности $\bar{\mathcal{D}}\subset\mathcal{U}$. Так как $\hat{f}$ непрерывно, то, по теореме I (2.5), прообраз $\hat{f}^{-1}[\bar{\mathcal{D}}]$ – замкнутое в T^2 множество, причем $\Delta\subset \hat{f}^{-1}[\bar{\mathcal{D}}]$, откуда $\bar{\Delta}\subset \hat{f}^{-1}[\bar{\mathcal{D}}]\subset \hat{f}^{-1}[\mathcal{U}]$. Вновь привлекая теорему I (2.5), можем заметить, что множество $\hat{f}^{-1}[\mathcal{U}]$ открыто, следовательно, $\hat{f}^{-1}[\mathcal{U}]$ – окрестность замыкания диагонали в T^2. Из предложения У (6.3) получаем, что $\hat{f}^{-1}[\mathcal{U}]$ – окружение из $\mathcal{M}$. Равномерная непрерывность f установлена.

Детализируем определение равномерной непрерывности в случае, когда T и X – метрические пространства. Обозначим через ρ,η метрики на T, X соответственно. Учитывая, что цилиндры $B_\delta = \{(s,t)\in T^2 : \rho(s,t)\le\delta\}$ и $B_\varepsilon=\{(x,y)\in X^2 : \eta(x,y)\le\varepsilon\}$ образуют базисы метрических равномерностей на T и X, можно сказать, что равномерная непрерывность $f: T\to X$ означает: для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любых $s,t\in T$, удовлетворяющих условию $\rho(s,t)\le\delta$, следует $\eta(f(s),f(t))\le\varepsilon$. Нетрудно понять, что в любом из последних неравенств нестрогое неравенство можно заменить строгим.

Пусть $f:(T,\rho)\to(X,\eta)$. Если существует такое положительное вещественное число L, что $\eta(f(s),f(t))\le L\cdot\rho(s,t)$ для любых $s,t\in T$, то говорят, что f у д о в л е т в о р я е т у с л о в и ю Л и п ш и ц а (с константой L). Всякое удовлетворяющее условию Липшица отображение $f:(T,\rho)\to(X,\eta)$ равномерно непрерывно: в качестве δ в определении равномерно непрерывного отображения метрических пространств можно взять, очевидно, $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$. Отметим, что не каждое равномерно непрерывное отображение $f:T\to X$ удовлетворяет условию Липшица.

7.2. Аналогично тому, как сравнивались топологии на некотором множестве, можно сравнивать и равномерные структуры на данном множестве.

Пусть $\mathcal{W}_1,\mathcal{W}_2$ – две равномерности на некотором множестве X. Говорят, что равномерность $\mathcal{W}_1$ с и л ь н е е равномерности $\mathcal{W}_2$ (или что $\mathcal{W}_2$ с л а б е е $\mathcal{W}_1$), если тождественное отображение $I: x\mapsto x\ (x\in X)$ равномерно непрерывно как отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{W}_1)$ на равномерное пространство $(X,\mathcal{W}_2)$. Понятно, что $\mathcal{W}_1$ сильнее $\mathcal{W}_2$ в том и только в том случае, если $\mathcal{W}_1\supset\mathcal{W}_2$, поэтому для обозначения сравнения равномерностей мы не будем вводить новых символов.

Если $\tau(\mathcal{W}_1)$, $\tau(\mathcal{W}_2)$ – топологии, ассоциированные с равномерностями $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$ соответственно и $\mathcal{W}_1 \supset \mathcal{W}_2$, то $\tau(\mathcal{W}_1) \geqslant \tau(\mathcal{W}_2)$. Действительно, для каждого $x \in X$ должно быть $\mathcal{W}_1[x] \supset \mathcal{W}_2[x]$, а это и означает, что $\tau(\mathcal{W}_1) \geqslant \tau(\mathcal{W}_2)$.

Дискретная равномерность на X сильнее любой другой равномерности на X, поскольку фильтр окружений в дискретной равномерности состоит из всех подмножеств в X^2, содержащих диагональ. Понятно, что антидискретная равномерность на X – самая слабая из равномерностей на этом множестве. Более того, оказывается, свойства введенного отношения порядка в множестве равномерностей и в остальном аналогичны свойствам рассмотренного ранее отношения порядка в множестве всех топологий на X.

ТЕОРЕМА 2 (7.5). Пусть $\mathcal{E}$ – некоторое множество равномерностей на X. Тогда в совокупности всех равномерностей на X существуют $\sup \mathcal{E}$ и $\inf \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{E}$ состоит из конечного числа равномерностей: $\mathcal{E} = \{\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_n\}$. Образуем совокупность $\mathcal{W}$ подмножеств X^2 вида $V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$ $\{V_1 \in \mathcal{W}_1, \ldots, V_n \in \mathcal{W}_n\}$. Поскольку каждое из $\mathcal{W}_i$ фильтруется по убыванию, $\mathcal{W}$ также фильтруется по убыванию. Убедимся в том, что фильтр $\widetilde{\mathcal{W}}$, порожденный $\mathcal{W}$, есть равномерность на X. Для этого в силу предложения I (6.I) достаточно показать, что $\mathcal{W}$ удовлетворяет всем условиям определения равномерности. Пусть $V_1 \in \mathcal{W}_1, \ldots, V_n \in \mathcal{W}_n$, $V = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$. Так как каждое V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ содержит диагональ Δ в X^2, то $\Delta \subset V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$. Далее, поскольку с каждым из V_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в $\mathcal{W}_i$ входит и симметричное V_i множество V_i^{-1}, то из соотношения $(V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n)^{-1} = V_1^{-1} \cap V_2^{-1} \cap \ldots \cap V_n^{-1}$ следует, что $V^{-1} \in \mathcal{W}$. Наконец, воспользовавшись третьим условием определения равномерности (см. пункт 6.I), найдем такие $U_1 \in \mathcal{W}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{W}_n$, что $U_i \circ U_i \subset V_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, как нетрудно показать,

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) \circ \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \circ U_i)$$

и $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{W}$, так что

$$U \circ U = \bigcap_{i=1}^{n} (U_i \circ U_i) \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i = V.$$

Проведенные рассуждения показывают, что $\widetilde{\mathcal{W}}$ – равномерность на

X. Кроме того, так как $X^2 \in \mathfrak{W}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ и $V_i = V_i \cap X^2$ для любого $V_i \in \mathfrak{W}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, то фильтр $\widetilde{\mathfrak{W}}$ тоньше каждого из фильтров $\mathfrak{W}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, следовательно, $\widetilde{\mathfrak{W}}$ – верхняя граница множества $\mathcal{E}$. Рассмотрим некоторую верхнюю границу $\mathfrak{M}$ множества $\mathcal{E}$. Поскольку $\mathfrak{M}$ сильнее равномерностей $\mathfrak{W}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, то $V_i \in \mathfrak{M}$ для любого $V_i \in \mathfrak{W}_i$, а тогда и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \mathfrak{M}$. Последнее соотношение показывает, что фильтр $\widetilde{\mathfrak{W}}$, порожденный системой $\mathfrak{W} = \{V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n :$ $V_1 \in \mathfrak{W}_1, \dots, V_n \in \mathfrak{W}_n\}$, грубее фильтра $\mathfrak{M}$, откуда следует, что $\widetilde{\mathfrak{W}}$ – точная верхняя граница множества $\mathcal{E}$.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ – произвольное множество равномерностей на X. Если $\mathcal{E} = \varnothing$, то точной верхней границей множества $\mathcal{E}$ служит, очевидно, вырожденная равномерность. Предположим, что $\mathcal{E}$ непусто. Рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{E}}$, состоящее из точных верхних границ всевозможных конечных подмножеств множества $\mathcal{E}$. Множества $\mathcal{E}$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеют точные верхние границы одновременно, причем $\sup \mathcal{E} = \sup \widetilde{\mathcal{E}}$, но $\widetilde{\mathcal{E}}$ фильтруется по возрастанию. Таким образом, нам достаточно доказать, что существует точная верхняя граница множества $\mathcal{E}$ в предположении, что $\mathcal{E}$ фильтруется по возрастанию. Устроим объединение $\Phi = \bigcup\limits_{\mathfrak{W} \in \mathcal{E}} \mathfrak{W}$ фильтров из $\mathcal{E}$. Для любых $V_1, V_2 \in \Phi$ найдутся такие $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2 \in \mathcal{E}$, что $V_1 \in \mathfrak{W}_1$, $V_2 \in \mathfrak{W}_2$, а поскольку $V_1, V_2 \in \mathfrak{W}'$, где $\mathfrak{W}'$ – содержащая как $\mathfrak{W}_1$, так и $\mathfrak{W}_2$ равномерность на X, то $V_1 \cap V_2 \in \Phi$, следовательно, Φ фильтруется по убыванию. Покажем, что Φ удовлетворяет всем условиям определения равномерности. Действительно, включение $V \in \Phi$ означает, что $V \in \mathfrak{W}$ для некоторого $\mathfrak{W} \in \mathcal{E}$, следовательно, $\Delta \subset V$. Кроме того, вместе с V в $\mathfrak{W}$ входит и V^{-1}, поэтому $V^{-1} \in \Phi$. Наконец, можно указать такое $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}$, что $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subset V$, и по определению Φ имеем $\mathcal{U} \in \Phi$. Получили, что Φ – равномерность на X. Из определения Φ непосредственно следует, что Φ служит верхней границей множества $\mathcal{E}$. Если $\mathfrak{M}$ – другая верхняя граница множества $\mathcal{E}$, то $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{M}$ для всех $\mathfrak{W} \in \mathcal{E}$, откуда $\Phi = \bigcup\limits_{\mathfrak{W} \in \mathcal{E}} \mathfrak{W} \subset \mathfrak{M}$, следовательно, Φ – точная верхняя граница множества $\mathcal{E}$.

Для доказательства существования точной нижней границы множества $\mathcal{E}$ достаточно сослаться на предложение УI (I.2).

Теорема доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из соотношения $\sup \mathcal{E} = \sup \widetilde{\mathcal{E}}$ и из построения точной верхней границы конечного множества равномерностей следует, что в $\sup \mathcal{E}$ входят такие подмножества $V \subset X^2$, для которых можно указать конечный набор множеств $V_1, V_2, \dots, V_n$ $(V_i \in \mathfrak{W}_i, \mathfrak{W}_i \in \mathcal{E},$

$i=1,2,\dots,n$), пересечение которых содержится в V : $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \subset V$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathscr{E}$ – некоторое множество равномерностей на X и $\mathscr{U} = \sup \mathscr{E}$. Тогда топология $\tau(\mathscr{U})$ равномерности $\mathscr{U}$ есть точная верхняя граница множества топологий $\tau(\mathscr{M})$, ассоциированных с равномерностями $\mathscr{M} \in \mathscr{E}$. Иначе, $\tau(\mathscr{U}) = \sup\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} \tau(\mathscr{M})$.

Таким образом, мы наблюдаем некоторую перестановочность операций взятия точной верхней границы и перехода к ассоциированной топологии – безразлично, то ли сначала найти точную верхнюю границу множества равномерностей $\mathscr{E}$, а затем перейти к ассоциированной с этой границей топологии, либо сначала перейти к ассоциированной топологии для каждой равномерности из множества $\mathscr{E}$, а затем найти точную верхнюю границу полученного множества топологий. Результат в обоих случаях получится один и тот же.

Докажем сформулированное замечание. Так как множества $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n$ ($V_i \in \mathscr{U}_i$, $\mathscr{U}_i \in \mathscr{E}$, $i=1,2,\dots,n$) образуют базис равномерности $\mathscr{U}$, то множества

$$(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n)[x] = V_1[x] \cap V_2[x] \dots \cap V_n[x] \quad (x \in X,\ V_i \in \mathscr{U}_i,\ \mathscr{U}_i \in \mathscr{E},\ i=1,2,\dots,n)$$

образуют базис фильтра окрестностей точки $x \in X$ в топологии $\tau(\mathscr{U})$. Но эта же совокупность подмножеств в X составляет и базис фильтра окрестностей в топологии $\sup\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} \tau(\mathscr{M})$ (см. замечание 2 к теореме I (4.5), так что $\tau(\mathscr{U}) = \sup\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} (\mathscr{M})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Нетрудно убедиться в том, что $\inf \mathscr{E} \subset \bigcap\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} \mathscr{M}$, причем, вообще говоря, $\inf \mathscr{E} \neq \bigcap\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} \mathscr{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Имеет место соотношение $\tau(\inf \mathscr{E}) \leq \inf\limits_{\mathscr{M}\in\mathscr{E}} \tau(\mathscr{M})$; можно привести пример, когда последнее неравенство строгое.

Доказательства третьего и четвертого замечаний предлагаем читателю провести самостоятельно.

Доказанная теорема позволяет задавать на некотором множестве равномерную структуру требованием равномерной непрерывности некоторого семейства отображений, действующих в равномерное пространство. Приведем точные определения и факты.

Пусть $f: T \to X$ отображает множество T в равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$. В силу теоремы I существует слабейшая из равномерностей на T, в которых отображение f равномерно непрерывно. Такая равномерность $\mathscr{M}$ называется п р о о б р а з о м равномерности $\mathscr{U}$ при отображении f. Из требований равномерной непрерывности отображения f следует, что множества $f^{-1}[V]$

$(V\in\mathcal{W})$ должны входить в $\mathcal{M}$. Совокупность $f^{-1}\langle\mathcal{W}\rangle=\{\hat{f}^{-1}[V]:V\in\mathcal{W}\}$ фильтруется по убыванию, что следует из соотношения $\hat{f}^{-1}[V_1]\cap\hat{f}^{-1}[V_2]\subset\hat{f}^{-1}[V_1\cap V_2]$ $(V_1,V_2\in\mathcal{W})$. Из определений ясно, что прообразом равномерности $\mathcal{W}$ при отображении f является равномерность $\mathcal{M}=\widetilde{f^{-1}\langle\mathcal{W}\rangle}$, порожденная фильтрующейся по убыванию системой $f^{-1}\langle\mathcal{W}\rangle$.

Рассмотрим топологию $\tau(\mathcal{M})$, ассоциированную с $\mathcal{M}$. Базис фильтра окрестностей точки $t\in T$ в этой топологии составляют множества $W[t]$, где $W=\hat{f}^{-1}[V]\in\mathcal{M}$, $V\in\mathcal{W}$. Но, по определению, $W=\{(t,s)\in T^2:(f(t),f(s))\in V\}$, так что $W[t]=\{s\in T:f(s)\in\in V[f(t)]\}$, иначе говоря, $W[t]=f^{-1}[V[x]]$, где $(x=f(t))$, а система множеств вида $f^{-1}[V[x]]$ $(V\in\mathcal{W})$ - суть базис фильтра окрестностей точки t в топологии, слабейшей из всех топологий на T, в которых отображение f непрерывно. Итак, доказано следующее предложение.

I. Топология на T, ассоциированная с прообразом равномерности $\mathcal{W}$ при отображении $f:T\to X$, совпадает со слабейшей из топологий на T, относительно которых f непрерывно.

Рассмотрим равномерное пространство $(X,\mathcal{W})$, некоторое подмножество X_o в X и отображение $I:x\mapsto x$, заданное на X_o. Среди всех равномерностей на X_o, относительно которых отображение равномерно непрерывно, найдем слабейшую $\mathcal{W}_o$, удовлетворяющую этому свойству. Упорядоченная пара $(X_o,\mathcal{W}_o)$ называется п о д п р о с т р а н с т в о м равномерного пространства $(X,\mathcal{W})$. В этой ситуации о равномерности $\mathcal{W}_o$ говорят как о равномерности на X_o, индуцированной равномерностью $\mathcal{W}$ на X. Фильтр окружений диагонали в этой равномерности состоит из множеств $X_o^2\cap V$, где V пробегает фильтр $\mathcal{W}$.

Топология $\tau(\mathcal{W}_o)$, ассоциированная с равномерностью $\mathcal{W}_o$ подпространства $\mathcal{W}$, совпадает, очевидно, с топологией подпространства X_o топологического пространства $(X,\tau(\mathcal{W}))$.

Пусть $\{(X_\xi,\mathcal{W}_\xi)\}(\xi\in\Xi)$ - семейство равномерных пространств и $\{f_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - семейство отображений, определенных на некотором множестве T и таких, что $f_\xi:T\to X_\xi$ $(\xi\in\Xi)$.

II. На T существует слабейшая из равномерностей, в которых каждое отображение f_ξ равномерно непрерывно.

Действительно, обозначим через $\mathcal{M}_\xi$ прообраз при отображении f_ξ $(\xi\in\Xi)$ равномерности $\mathcal{W}_\xi$ и покажем, что равномерность $\mathcal{M}=$

$=\sup_{\xi\in\Xi}\mathfrak{W}_\xi$ – искомая. Так как $\mathfrak{W}$ сильнее, чем $\mathfrak{W}_\xi$ $(\xi\in\Xi)$, то отображения $f_\xi:(T,\mathfrak{W})\to(X_\xi,\mathfrak{W}_\xi)$ равномерно непрерывны. Если $\mathfrak{W}'$ – некоторая равномерность на T, относительно которой все f_ξ равномерно непрерывны, то, по определению $\mathfrak{W}_\xi$, имеем $\mathfrak{W}_\xi\subset\mathfrak{W}'$; следовательно, $\mathfrak{W}=\sup_{\xi\in\Xi}\mathfrak{W}_\xi\subset\mathfrak{W}'$, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из замечания I к теореме 2 следует, что множества вида $\bigcap_{k=1}^{n} f_{\xi_k}^{-1}[V_k]$ $(k=1,2,\dots,n,\ V_k\in\mathfrak{W}_{\xi_k},\ \xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\in\Xi)$ образуют базис фильтра окружений в равномерности $\mathfrak{W}$, поскольку множества $f_\xi^{-1}[V_\xi]$ $(\xi\in\Xi,\ V_\xi\in\mathfrak{W}_\xi)$ составляют базис фильтра окружений в равномерности $\mathfrak{W}_\xi$ на T, слабейшей из равномерностей на T, обеспечивающих равномерную непрерывность отображения $f_\xi:T\to X_\xi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обозначим через σ_ξ слабейшую из топологий на T, в которых отображение f_ξ $(\xi\in\Xi)$ непрерывно, и через σ – слабейшую из топологий на T, в которых все отображения f_ξ $(\xi\in\Xi)$ непрерывны. Из предложения I и замечания 2 к теореме 2 получаем, что

$$\tau(\mathfrak{W})=\tau(\sup_{\xi\in\Xi}\mathfrak{W}_\xi)=\sup_{\xi\in\Xi}\tau(\mathfrak{W}_\xi)=\sup\sigma_\xi=\sigma.$$

7.3. Основываясь на теореме I, установим критерий равномеризуемости топологического пространства. Напомним, что топологическое пространство (X,τ) называется равномеризуемым, если на X можно задать равномерность $\mathfrak{W}$ так, что τ совпадет с топологией равномерности $\mathfrak{W}$. Введем еще одно определение: топологическое пространство (X,τ) называется T_3^+-п р о с т р а н с т в о м, если для каждой точки $x\in X$ и любой окрестности U этой точки в топологии τ существует урысоновская функция пары $(\{x\},U)$, т.е. такая непрерывная на X вещественная функция φ, что $\varphi(x)=0$, $\varphi(y)=1$ для y из дополнения U', и $\varphi[X]\subset[0,1]$. Отделимое T_3^+ – пространство называется вполне регулярным.

ТЕОРЕМА 3 (7.5). Топологическое пространство (X,τ) равномеризуемо в том и только в том случае, если (X,τ) – T_3^+– пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим, как обычно, через $C(X,\mathbb{R})$ множество всех непрерывных на X вещественных функций. Согласно предложению II (7.2) на X существует равномерность $\mathfrak{W}$ – слабейшая из равномерностей, в каждой из которых равномерно непрерывна любая $f\in C(X,\mathbb{R})$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что топология $\tau(\mathfrak{W})$, ассоциированная с $\mathfrak{W}$, совпадает с τ. Так как

τ обеспечивает непрерывность всех функций из $C(X,\mathbb{R})$, а согласно замечанию 2 к предложению II $\tau(\mathcal{W})$ – слабейшая из топологий, удовлетворяющих этому свойству, то $\tau(\mathcal{W}) \leq \tau$.

Докажем, что для каждой $x \in X$ любая ее окрестность $\mathcal{U}$ в топологии τ является окрестностью этой точки и в топологии $\tau(\mathcal{W})$. Найдем непрерывную на X функцию φ такую, что $\varphi(x) = 0$, $\varphi(s) = 1$ при $s \in \mathcal{U}'$ и $\varphi[X] \subset [0,1]$. Множество $\{\varphi < 1\}$ содержится в $\mathcal{U}$, причем $x \in \{\varphi < 1\} \subset \mathcal{U}$. Поскольку $\mathcal{W}$ – слабейшая из равномерностей, обеспечивающих равномерную непрерывность функций из $C(X,\mathbb{R})$, то, в частности, φ равномерно непрерывна, следовательно, непрерывна в топологии $\tau(\mathcal{W})$. Отсюда получаем, что множество $\{\varphi < 1\}$ открыто в топологии $\tau(\mathcal{W})$, и поскольку $x \in \{\varphi < 1\} \subset \mathcal{U}$, то $\mathcal{U}$ – окрестность точки x в топологии τ, а это означает справедливость соотношения $\tau \leq \tau(\mathcal{W})$. Учитывая доказанное ранее неравенство $\tau(\mathcal{W}) \leq \tau$, заключаем, что $\tau = \tau(\mathcal{W})$.

СЛЕДСТВИЕ I. Всякое нормальное топологическое пространство равномеризуемо.

СЛЕДСТВИЕ 2. Компактное хаусдорфово пространство X равномеризуемо, причем единственным образом.

Действительно, компактное хаусдорфово пространство нормально (см. предложение IX (5.I)), так что равномеризуемо. Единственность равномерности на X следует из результата предложения У (6.3): фильтр окружений в рассматриваемом случае полностью определяется топологией на X^2, тем самым топологией в X.

Требование хаусдорфовости пространства X в следствии 2 существенно. Например (см. пункт I.8), если в бесконечном множестве X фильтр окрестностей точки $x \in X$ определен как совокупность всех множеств, содержащих x и имеющих конечное дополнение, то получившееся при этом пространство, как нетрудно понять, компактно, однако не равномеризуемо. Действительно, будь X равномеризуемым, оно, как отделимое равномерное пространство, было бы хаусдорфовым, однако X свойством хаусдорфовости не обладает.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Построенная в доказательстве теоремы равномерность $\mathcal{W}$ на X обладает таким свойством: каждая непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, поэтому естественно, что если X было снабжено равномерной структурой $\mathcal{M}$, то равномерность $\mathcal{W}$ оказывается сильнее, чем $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{W}$ – сильнейшая из равномерностей, порождающих данную топологию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательстве теоремы можно было ограничиться рассмотрением подмножества в $C(X,\mathbb{R})$, состоящего из всех ограниченных функций (или даже со значениями в $[0,1]$), однако при одной и той же заданной топологии τ на X мы получали бы различные равномерности на X.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве конкретного примера того, что одна топология может оказаться ассоциированной с разными равномерностями, приведем числовую прямую: стандартная топология на $\mathbb{R}$ ассоциирована, очевидно, как со стандартной равномерностью, так и с равномерностью, индуцированной из $\overline{\mathbb{R}}$ +), тогда как последняя слабее стандартной. Заметим, кстати, что тождественное отображение $I: \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ непрерывно, но не равномерно непрерывно.

7.4. Рассмотрим семейство $\{X_t, \mathcal{U}_t\}$ $(t \in T)$ равномерных пространств и образуем произведение $\mathscr{X} = \prod_{t \in T} X_t$ множеств данного семейства ++). На $\mathscr{X}$ существует равномерность $\mathcal{U}$, слабейшая из всех равномерностей на $\mathscr{X}$, относительно которых каждая проекция $P_t: \mathscr{X} \to X_t$ равномерно непрерывна. Эта равномерность на $\mathscr{X}$ называется т и х о н о в с к о й р а в н о м е р н о с т ь ю. Из замечания 2 к предложению П (6.2) следует, что тихоновская топология σ на X совпадает с $\tau(\mathcal{U})$.

Тихоновская равномерность устроена аналогично тому, как устроена тихоновская топология.

I. Множества $\bigcap_{k=1}^{n} \hat{P}_{t_k}^{-1}[V_k]$, где $V_k \in \mathcal{U}_{t_k}$; $k=1,2,\ldots,n$; $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n \in T$, составляют базис фильтра окружений в тихоновской равномерности на $\mathscr{X}$.

Результат предложения следует непосредственно из замечания к предложению I (7.2).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если $\mathscr{L}_t$ - базис равномерности $\mathcal{U}_t$ $(t \in T)$, то, понятно, множества $\bigcap_{k=1}^{n} \hat{P}_{t_k}^{-1}[V_k]$, где $V_k \in \mathscr{L}_{t_k}$, $t_k \in T$, $k=1,2,\ldots,n$, также образуют базис фильтра окружений в тихоновской равномерности на $\mathscr{X}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В тихоновской равномерности близость точек $\varphi, \psi \in \mathscr{X}$ определяется, таким образом, конечным набором $t_1, t_2, \ldots,$ t_n элементов из T и фильтрами окружений $\mathcal{U}_{t_k}$ $(k=1,2,\ldots,n)$

+) Поскольку $\overline{\mathbb{R}}$ компактно (см. теорему 2 (5.5)), то равномерность на $\overline{\mathbb{R}}$ однозначно определяется топологией на $\overline{\mathbb{R}}$.

++) Читатель, желающий вспомнить конструкцию произведения семейства множеств, может обратиться к § 4 настоящей главы.

в каждом из $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$. Учитывая, что включение $(\varphi,\psi)\in \in \bigcap_{k=1}^{n} \hat{P}_{t_k}^{-1}[V_k]$ означает одновременное выполнение включений $(\varphi(t_k),\varphi(t_k))\in V_k$ ($k=1,2,\dots,n$, $V_k\in\mathcal{W}_{t_k}$), можно было сказать, что окружение в $\mathcal{X}$, определяемое конечным набором $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset T$ и окружениями $V_1\in\mathcal{W}_{t_1}, V_2\in\mathcal{W}_{t_2},\dots,V_n\in\mathcal{W}_{t_n}$ $(n\in\mathcal{N})$, состоит из всевозможных пар (φ,ψ) элементов произведения $\mathcal{X}$, у которых заданные проекции $P_{t_k}(\varphi)$, $P_{t_k}(\psi)$ образуют пару $(P_{t_k}(\varphi),P_{t_k}(\psi))$, попадающую в заданное окружение V_k ($k=1,2,\dots,n$), остальные же проекции могут быть какими угодно.

П. Произведение $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$ не более чем счетного числа метризуемых пространств $(X_t,\mathcal{W}_t)$ также метризуемое.

Действительно, поскольку каждое из X_t $(t\in T)$ метризуемо, то, согласно теореме I (6.5), X_t отделимо и фильтр $\mathcal{W}_t$ имеет счетный базис $\mathcal{L}_t$. Пространство $\mathcal{X}$ отделимо как произведение отделимых пространств. Далее, согласно замечанию I к предыдущему предложению, множества вида $\bigcap_{k=1}^{n} \hat{P}_{t_k}^{-1}[V_k]$ ($V_k\in\mathcal{L}_{t_k}$, $t_k\in T$, $k=1,2,\dots,n$) составляют базис тихоновской равномерности на $\mathcal{X}$, а совокупность таких множеств, как нетрудно видеть, не более чем счетна. Применение теоремы I (6.5) завершает доказательство.

7.5. Рассмотрим случай, когда все сомножители в произведении $\mathcal{X}=\prod_{t\in T} X_t$ совпадают, т.е. когда $X_t=X$ $(t\in T)$ и $\mathcal{W}_t=\mathcal{W}$. Тогда произведение $\mathcal{X}$ есть множество X^T всех отображений множества T в множество X. О тихоновской равномерности на X^T говорят также как о с л а б о й р а в н о м е р н о с т и. Базис фильтра окружений в слабой равномерности образуют множества, состоящие из пар отображений (φ,ψ) таких, что в фиксированном конечном множестве точек из T значения этих функций попадают в некоторое окружение диагонали в X^2, значения же в остальных точках множества T могут быть произвольными.

Поскольку топология слабой равномерности суть тихоновская топология на X^T, то сходимость фильтра $\mathfrak{A}$ подмножеств из X^T в слабой равномерности равносильна сходимости при каждом $t\in T$ фильтра $\mathfrak{A}_t=\{A_t\}$, где $A_t=\{\varphi(t):\varphi\in A\}$ $(A\in\mathfrak{A}, t\in T)$. По этой причине сходимость в тихоновской равномерности называют обычно п о к о о р д и н а т н о й (или поточечной) сходимостью. Аналогичные выводы можно сделать и о сходимости фильтрующихся семейств элементов из X^T, а также о сходимости соответствий со значениями в X^T(во всех этих случаях подразумевается сходимость в топологии слабой равномерности на X^T).

Определим на X^T еще одну равномерную структуру. С каждым окружением $V \in \mathcal{W}$ свяжем множество $\widetilde{V} = \{(\varphi, \psi) \in X^T \times X^T : \psi \circ \varphi^{-1} \subset V\}$ в $X^T \times X^T$ и проверим, что $\{\widetilde{V} : V \in \mathcal{W}\}$ фильтруется по убыванию и удовлетворяет всем условиям определения равномерности. В самом деле, свойство фильтрования следует из соотношения $\widetilde{V_1 \cap V_2} = \widetilde{V_1} \cap \widetilde{V_2}$. Так как для любого $\varphi \in X^T$ суперпозиция $\varphi \circ \varphi^{-1}$ представляет собой тождественное отображение, иначе, содержится в диагонали в X^2, то $\varphi \circ \varphi^{-1} \subset V$ для любого $V \in \mathcal{W}$, следовательно, $(\varphi, \varphi) \in \widetilde{V}$, так что $\widetilde{V}$ содержит диагональ в $X^T \times X^T$. Второе условие равномерности может быть получено из очевидного соотношения $(\widetilde{V})^{-1} = \widetilde{V^{-1}}$. Далее, для окружения $V \in \mathcal{W}$ найдем $U \in \mathcal{W}$ такое, что $U \circ U \subset V$. Пусть $(\varphi, \psi) \in \widetilde{U} \circ \widetilde{U}$. Это означает, что существует отображение $\chi : T \to X$ такое, что $(\varphi, \chi) \in \widetilde{U}$ и $(\chi, \psi) \in \widetilde{U}$, или что $\chi \circ \varphi^{-1} \subset U, \psi \circ \chi^{-1} \subset U$. А тогда $\psi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ \varphi^{-1} \subset U \circ U \subset V$, и поскольку отображение $\chi^{-1} \circ \chi$ содержит диагональ Δ в T^2, то $\psi \circ \varphi^{-1} \subset V$, следовательно, $(\varphi, \psi) \in \widetilde{V}$. Итак, мы убедились в том, что для совокупности $\{\widetilde{V} : V \in \mathcal{W}\}$ выполнены все условия определения равномерности.

Равномерность $\{\widetilde{V}\}$ $(V \in \mathcal{W})$, порожденная системой $\{\widetilde{V} : V \in \mathcal{W}\}$, называется с и л ь н о й равномерностью на X^T. Иногда эту равномерность называют также р а в н о м е р н о й.

Исходя из определения суперпозиции, можно утверждать, что соотношение $\psi \circ \varphi^{-1} \subset V$ означает включение $(\varphi(t), \psi(t)) \in V$ для всех $t \in T$. Здесь можно усмотреть различие слабой и сильной равномерностей: на X^T- слабая равномерность определялась окружениями, состоящими из пар (φ, ψ), таких, что $(\varphi(t), \varphi(t)) \in V$ лишь для элементов t из некоторого конечного подмножества в T, тогда как сильная характеризуется окружениями $\widetilde{V}$, состоящими из пар (φ, ψ), для которых $(\varphi(t), \psi(t)) \in V$ для всех $t \in T$ (здесь V - некоторое заданное окружение диагонали в X^2). Заметим, что если множество T конечно, то слабая и сильная равномерности на X^T в этом случае совпадают. В общем случае можно сказать, что сильная равномерность на X^T сильнее слабой равномерности: если $(\varphi(t), \psi(t)) \in V$ при всех $t \in T$, то $(\varphi(t), \psi(t)) \in V$ и для t из каждого конечного подмножества T_0 в T.

Из-за различия в общем случае сильной и слабой равномерностей на X^T сходимости в этих равномерностях, естественно, также различны. Продемонстрируем это на примере сходящихся семейств. Пусть $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – фильтрующееся семейство элементов из X^T. Предположим, что семейство $\{\varphi_\xi\}$ сходится к φ в сильной равномерности на X^T. Факт такой сходимости будем обозначать символом $\varphi_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\rightrightarrows} \varphi$ и говорить о ней как о равномерной (относительно множества T) сходимости семейства $\{\varphi_\xi\}$ к φ. Сходимость $\varphi_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\rightrightarrows} \varphi$ означает, что для каждого $\widetilde{V}$ $(V\in\mathcal{W})$ можно указать такое $\xi_0\in\Xi$, что $\varphi_\xi\in\widetilde{V}[\varphi]$ для всех $\xi\in\Xi, \xi\geqslant\xi_0$. Так как включение $\varphi_\xi\in\widetilde{V}[\varphi]$ равносильно тому, что $(\varphi_\xi(t),\varphi(t))\in V$ для всех $t\in T$, то факт сходимости $\varphi_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\rightrightarrows} \varphi$ можно сформулировать так: для любого $V\in\mathcal{W}$ найдется $\xi_0\in\Xi$ такое, что $(\varphi_\xi(t), \varphi(t))\in V$ для всех $t\in T$ и для всех $\xi\in\Xi$, $\xi\geqslant\xi_0$. Напомним для сравнения, что сходимость $\varphi_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\longrightarrow} \varphi$ в слабой равномерности означает, что для любого $V\in\mathcal{W}$ и любого $t\in T$ найдется $\xi_0\in\Xi$ такой, что $(\varphi_\xi(t),\varphi(t))\in V$ для всех $\xi\in\Xi, \xi\geqslant\xi_0$. Таким образом, во втором случае индекс ξ_0 может меняться с изменением t, однако, если оказалось возможным найти одно ξ_0, пригодное для всех t из T, то имеет место равномерная сходимость семейства φ_ξ к φ.

Вскроем содержание равномерной сходимости семейства $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ отображений, действующих на множестве T и принимающих значения в метрическом пространстве (X,ρ). Фильтр окружений метрической равномерности порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью цилиндров $B_r=\{(x,y)\in X^2: \rho(x,y)\leqslant r,\ r>0\}$. Сходимость $\varphi_\xi \underset{\xi\in\Xi}{\rightrightarrows} \varphi$ означает, что для любого цилиндра B_ε $(\varepsilon>0)$ найдется индекс $\xi_0\in\Xi$ такой, что $(\varphi_\xi(t),\varphi(t))\in B_\varepsilon$ для всех $\xi\in\Xi,\xi\geqslant\xi_0$, $t\in T$. Это же можно сказать и так: для любого $\varepsilon>0$ найдется $\xi_0\in\Xi$ такой, что $\rho(\varphi_\xi(t),\varphi(t))\leqslant\varepsilon$ для всех $\xi\in\Xi, \xi\geqslant\xi_0$, $t\in T$. Соотношение $\rho(\varphi_\xi(t), \varphi(t))\leqslant\varepsilon$ равносильно, очевидно, такому: $R(\varphi,\varphi_\xi)=\sup\limits_{t\in T}\rho(\varphi_\xi(t),\varphi(t))\leqslant\varepsilon$. Отсюда можно усмотреть, что равномерная сходимость фильтрующегося семейства $\{\varphi_\xi\}(\xi\in\Xi)$ к отображению φ означает сходимость к нулю числового семейства $\{R(\varphi,\varphi_\xi)\}(\xi\in\Xi)$. Предлагаем читателю для сравнения вспомнить определение равномерной сходимости последовательности функций, изложенное в § I главы Ш (пункт Ш (I.2)).

Рассмотрим множества S,T, топологическое пространство X и отображение $F: S\times T\longrightarrow X$. Пусть $\mathcal{O}\!\mathcal{l}, \mathcal{L}$ – фильтры непустых подмножеств S,T соответственно. Можно рассматривать вместо фильтров фильтрующиеся по убыванию семейства подмножеств в S,T. Фиксируя элемент $s \in S$ (или соответственно $t \in T$), мы получаем отображение $F_s : t \mapsto F(s,t)$ (соответственно $F^{(t)}: s \mapsto F(s,t)$) множества T в X (S в X). Предположим, что при каждом $s \in S$ ($t \in T$) существует $\lim\limits_{\mathcal{B}} F_s$ ($\lim\limits_{\mathfrak{A}} F^{(t)}$). Определим отображения $f: s \mapsto \lim\limits_{\mathcal{B}} F_s$, $\varphi: t \mapsto \lim\limits_{\mathfrak{A}} F^{(t)}$ ($s \in S$, $t \in T$). Можно говорить о пределе отображения f по фильтру $\mathfrak{A}$ и о пределе отображения φ по фильтру $\mathcal{B}$. Так мы получаем пределы $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim\limits_{\mathfrak{A}} [\lim\limits_{\mathcal{B}} F]$ и $\lim\limits_{\mathcal{B}} \varphi = \lim\limits_{\mathcal{B}} [\lim\limits_{\mathfrak{A}} F]$, называемые п о в т о р н ы м и пределами соответствия F по фильтрам $\mathfrak{A}, \mathcal{B}$. Можно ли считать, что эти пределы совпадают? Вообще говоря, нет. Однако известно, что ответ на поставленный вопрос положителен при некоторых дополнительных условиях, указанных в следующей ниже теореме, называемой теоремой Стокса-Зайделя.

ТЕОРЕМА 4 (7.5). Пусть S, T - некоторые множества, $\mathfrak{A}$, $\mathcal{B}$ - фильтры непустых подмножеств в S, T соответственно, $(X, \mathcal{W})$ - равномерное пространство, F - отображение из $S \times T$ в X. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) существуют пределы $\lim\limits_{\mathfrak{A}} F^{(t)} = \varphi(t)$, $\lim\limits_{\mathcal{B}} F_s = f(s)$ при каждом $t \in T$, $s \in S$ соответственно;

2) существует предел $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \Phi = \varphi$ отображения $\Phi: s \mapsto F(s,t)$, действующего в пространство X^T с сильной равномерностью;

3) существует $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim\limits_{\mathfrak{A}} [\lim\limits_{\mathcal{B}} F]$.

Тогда существует $\lim\limits_{\mathcal{B}} [\lim\limits_{\mathfrak{A}} F]$ и имеет место равенство $\lim\limits_{\mathcal{B}} [\lim\limits_{\mathfrak{A}} F] = \lim\limits_{\mathfrak{A}} [\lim\limits_{\mathcal{B}} F]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $x_0 = \lim\limits_{\mathfrak{A}} f = \lim\limits_{\mathfrak{A}} [\lim\limits_{\mathcal{B}} F]$. Мы должны доказать, что для любой окрестности $V[x_0]$ ($V \in \mathcal{W}$) точки x_0 существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $\varphi[B] \subset V[x_0]$. Найдем симметричное окружение $U \in \mathcal{W}$, для которого $U \circ U \circ U \subset V$. Согласно второму условию, для окружения $\tilde{U}$ в сильной равномерности на X^T можно указать $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $\Phi[A] \subset \tilde{U}[\varphi]$. Последнее соотношение означает, что для любого $s \in A$ выполнено $(\varphi, \Phi(s)) \in \tilde{U}$ или, учитывая определение Φ, для любых $s \in A$ и $t \in T$ имеет место $(\varphi(t), F(s,t)) \in U$, а в силу симметричности U имеем

$$(F(s,t), \varphi(t)) \in U \qquad (s \in A, t \in T). \tag{1}$$

Из условия 3 вытекает существование такого $A_0 \in \mathfrak{A}$, что для всех элементов $s \in A_0$ справедливо

$$(x_0, f(s)) \in U, \tag{2}$$

причем можно считать $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A}$ (иначе в обоих случаях надо было рассмотреть пересечение $\mathscr{A}_0 \cap \mathscr{A}$). По первому условию существует $\lim\limits_{\mathscr{B}} F_s$ для любого $s \in S$, откуда следует, что найдется множество $B \in \mathscr{B}$ (зависящее, вообще говоря, от выбора точки s), для элементов t которого выполнено включение

$$(f(s),\ F(s,t)) \in \mathcal{U} \qquad (t \in B). \tag{3}$$

Из соотношений (I), (2), (3) следует, что $(x_0, \varphi(t)) \in \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U}$ для $t \in B$, а поскольку $\mathcal{U} \circ \mathcal{U} \circ \mathcal{U} \subset V$, то $(x_0, \varphi(t)) \in V$ $(t \in B)$, или $\varphi[B] \subset V[x_0]$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть T – топологическое пространство, $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ – фильтрующееся семейство отображений, действующих из T в отделимое равномерное пространство X. Предположим, что все отображения φ_ξ непрерывны в некоторой точке $t_0 \in T$ и, кроме того, существует $\lim\limits_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi = \varphi$ в слабой равномерности на X^T. Если можно указать окрестность $\mathcal{U}$ точки t_0 такую, что семейство сужений отображений φ_ξ на $\mathcal{U}$ сходится к сужению φ на $\mathcal{U}$ в сильной равномерности на пространстве X^T, тогда предельная функция φ непрерывна в точке t_0.

В условиях доказанной теоремы возьмем $S = \Xi$, $\mathscr{A} = \{[\xi, \to]\}$ и в качестве $\mathscr{B}$ – фильтр $\mathfrak{W}_{t_0}$ окрестностей точки t_0. Определим отображение $F: (\xi, t) \mapsto \varphi_\xi(t)$ и проверим, что в данном случае выполнены все условия теоремы. В самом деле, поскольку все φ_ξ непрерывны в t_0, то при каждом $\xi \in \Xi$ существует $\lim\limits_{\mathfrak{W}_{t_0}} F_\xi = \varphi_\xi(t_0)$. Согласно предположению, при каждом $t \in T$ существует $\lim\limits_{\mathscr{A}} \varphi_\xi(t) = \lim\limits_{\mathscr{A}} F^{(t)} = \varphi(t)$. Существование повторного предела $\lim\limits_{\mathscr{A}} [\lim\limits_{\mathscr{B}} F] = \lim\limits_{\xi \in \Xi} [\lim\limits_{\mathfrak{W}_{t_0}} \varphi_\xi(t)]$ обеспечивает непрерывность φ_ξ в t_0 и наличие предела $\lim\limits_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(t_0)$. Кроме того, существует предел $\lim\limits_{\xi \in \Xi} \Phi(\xi, t) = \varphi(t)$ отображения $\Phi: \xi \mapsto F_\xi$, действующего из Ξ в пространство $X^{\mathcal{U}}$. Таким образом, можно воспользоваться результатом доказанной теоремы, из которой следует, что существует $\lim\limits_{\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t}} [\lim\limits_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(t)]$, где $\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t_0}$ – фильтр окрестностей точки t_0 в подпространстве $\mathcal{U} \subset T$, а также имеет место равенство $\lim\limits_{\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t_0}} [\lim\limits_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(t)] = \lim\limits_{\xi \in \Xi} [\lim\limits_{\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t_0}} \varphi_\xi(t)]$, откуда

$$\lim_{\mathfrak{W}_{t_0}} [\varphi(t)] = \lim_{\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t_0}} [\lim_{\xi \in \Xi} \varphi_\xi(t)] = \lim_{\xi \in \Xi} [\lim_{\mathfrak{W}^{\mathcal{U}}_{t_0}} \varphi_\xi(t)] = \lim_{\xi \in \Xi} [\varphi_\xi(t_0)] = \varphi(t_0).$$

Поскольку $\mathcal{U}$ – окрестность точки t_0 в топологии пространства T, а X – отделимое пространство, последнее равенство и означает непрерывность отображения φ в точке t_0. Следствие доказано.

§ 8. Полные равномерные пространства

Говоря во второй главе о пределах числовых соответствий, мы установили критерий сходимости таких соответствий, называемый критерием Коши. Достоинство этого критерия заключается в том, что он позволяет судить о наличии предела у данного соответствия по "внутренним" свойствам самого соответствия, тогда как если пользоваться определением предела, необходимо заранее "угадать" значение предела.

В формулировке критерия Коши существенно используется равномерность на числовой прямой. К сожалению, подобный критерий сходимости в произвольном равномерном пространстве уже не имеет места. Тем более важным оказывается изучение того класса пространств, для которых справедлив указанный критерий. Такие пространства называются полными. Перейдем к формальному описанию полных пространств.

8.1. Рассмотрим равномерное пространство $(X, \mathcal{W})$ и некоторое окружение диагонали $V \in \mathcal{W}$. Множество $\mathcal{A} \subset X$ называют *малым порядка* V, если произведение $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ содержится в V.

В случае, когда X снабжено равномерностью метрического пространства (X, ρ), множество $\mathcal{A}$ мало порядка $\mathcal{B}_r$, где $\mathcal{B}_r$ – цилиндр радиуса r, если $\sup\limits_{x,y \in \mathcal{A}} \rho(x,y) \leq r$. Число $diam_\rho \mathcal{A} = \sup\limits_{(x,y) \in \mathcal{A}} \rho(x,y)$ называют *диаметром* множества $\mathcal{A}$ [+], так что малость $\mathcal{A}$ порядка $\mathcal{B}_r$ означает просто, что $diam\, \mathcal{A} \leq r$; т.е. что любые две точки множества $\mathcal{A}$ отстоят одна от другой на расстоянии, не превосходящее r.

Пусть $\mathfrak{A}$ – фильтр непустых подмножеств равномерного пространства X. Образуем фильтр $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ подмножеств в $X \times X$, включив в него множества, содержащие произведение $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ для некоторого $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Фильтр $\mathfrak{A}$ называется *сходящимся в себе*, или фильтром Коши, или фундаментальным фильтром, если $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ тоньше фильтра окружений: $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \supset \mathcal{W}$. Таким образом, фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе, если для любого $V \in \mathcal{W}$ найдется такое $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, что $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \subset V$. Иначе можно сказать, что фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе, если он содержит множества сколь угодно малого порядка.

+) Поскольку значения метрики ρ лежат в пространстве $[0, +\infty)$, то в случае $\mathcal{A} = \varnothing$ естественно принять $diam\, \varnothing = \sup\limits_{[0,+\infty)} \varnothing = 0$.

Определение сходимости в себе естественным образом распространяется и на случай, когда $\mathfrak{A}$ - фильтрующееся по убыванию множество.

I. Фильтр $\mathfrak{A}$ непустых подмножеств в X, сходящийся к некоторой точке $x\in X$, сходится в себе.

В самом деле, пусть V - произвольное окружение диагонали и U - такое симметричное окружение, что $U\circ U\subset V$. В силу сходимости $\mathfrak{A}\to x$ найдется $A\in\mathfrak{A}$, для которого $A\subset U[x]$. Тогда $A\times A\subset U[x]\times U[x]\subset \bigcup_{z\in X} U[z]\times U[z]=U\circ U\subset V$ (см. предложение I (6.3)), следовательно, фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ - фильтры непустых подмножеств в X. Будем говорить, что фильтры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ з а ц е п л я ю т с я (или зацепляют друг друга), если пересечение $A\cap B$ непусто для любых $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{B}$. Таким образом, фильтры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ зацепляют друг друга, если существует фильтр более тонкий, чем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т.е., иными словами, в множестве всех фильтров существует верхняя граница двухэлементного множества $\{\mathfrak{A},\mathfrak{B}\}$.

II. Предположим, что фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе, а фильтр $\mathfrak{B}$ сходится к некоторой точке $x\in X$ и зацепляет фильтр $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{A}\to x$.

Рассмотрим произвольное окружение $V\in\mathfrak{W}$ и найдем такое симметричное окружение $U\in\mathfrak{W}$, что $U\circ U\circ U\subset V$. По условию существует $A\in\mathfrak{A}$ малое порядка U, т.е. $A\times A\subset U$. Так как $A\in\mathfrak{A}$ и (в силу сходимости $\mathfrak{B}\to x$) выполняется $U[x]\in\mathfrak{B}$, то по условию $A\cap U[x]\neq\emptyset$. Но тогда

$$U[x]\times A=(A\times A)\circ(U[x]\times U[x])\subset U\circ(U\circ U)\subset V$$

и, следовательно,

$$A=(U[x]\times A)[x]\subset V[x],$$

так что $V[x]\in\mathfrak{A}$. Таким образом, фильтр окрестностей точки x содержится в $\mathfrak{A}$, что и означает сходимость $\mathfrak{A}\to x$.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть C - компактное множество и $\mathfrak{A}$ - сходящийся в себе фильтр, содержащий множество C. Тогда существует точка $x\in C$ такая, что $\mathfrak{A}\to x$.

Рассмотрим фильтрующуюся по убыванию совокупность $\mathfrak{A}_C=\{A\cap C: A\in\mathfrak{A}\}$. Расширим фильтр $\mathfrak{A}_C$, порожденный $\mathfrak{A}_C$, до ультрафильтра, который обозначим через $\mathfrak{B}$. Так как $A\cap C\in\mathfrak{B}$ $(A\in\mathfrak{A})$, то $C\in\mathfrak{B}$, а тогда, в силу предложения IУ (5.I), найдется точка $x\in C$ такая, что $\mathfrak{B}\to x$. Но, очевидно, $\mathfrak{B}$ содержит и тем более зацепляет фильтр $\mathfrak{A}$, следовательно, $\mathfrak{A} \to x$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$ таков, что $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \neq \emptyset$. Тогда $\mathfrak{A}$ сходится к любой точке $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$. В частности, если X отделимо, тогда для сходящегося в себе фильтра $\mathfrak{A}$ либо $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \emptyset$, либо пересечение $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ сводится к единственной точке x, причем $\mathfrak{A} \to x$.

Для доказательства достаточно указать на то обстоятельство, что одноточечное множество в X компактно, следовательно, множество $\{y\}$, где y - произвольная точка из $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$, можно взять в качестве C в следствии I.

СЛЕДСТВИЕ 2. Фильтр окрестностей $\mathcal{W}_x$ произвольной точки x равномерного пространства $(X, \mathcal{W})$ является минимальным элементом в множестве сходящихся в себе фильтров. Иначе, если $\mathfrak{A}$ сходится в себе и $\mathfrak{A} \subset \mathcal{W}_x$, то $\mathfrak{A} = \mathcal{W}_x$.

Результат следствия 2 следует непосредственно из замечания.

Равномерное пространство X называется полным, если всякий сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$ непустых подмножеств множества X сходится к некоторой точке из X.

Из следствия I к предложению II сразу следует, что компактное равномерное пространство X полно. Докажем, что числовая прямая $\mathbb{R}$ со стандартной равномерностью также полна. В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ - сходящийся в себе фильтр непустых подмножеств в $\mathbb{R}$. Тогда найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $A \times A \subset B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq 1\}$. Возьмем в A некоторый элемент x. Для $y \in A$ имеем $|x-y| \leq 1$, или $x-1 \leq y \leq x+1$, иначе говоря, $A \subset [x-1, x+1]$, а тогда и $[x-1, x+1] \in \mathfrak{A}$. Замкнутый промежуток $[x-1, x+1]$ числовой прямой компактен, откуда, в силу следствия I к предложению II, получаем, что $\mathfrak{A}$ сходится к некоторой точке из $\mathbb{R}$, а это, в силу произвольности $\mathfrak{A}$, и означает полноту числовой прямой.

III. Пусть X_0 - замкнутое подмножество полного равномерного пространства X. Тогда X_0, наделенное индуцированной из X равномерностью, также полно.

Пусть $\mathfrak{A}_0$ - сходящийся в себе фильтр непустых множеств равномерного пространства X_0. Построим сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}_0}$ непустых подмножеств в X. В силу полноты X найдется $x \in X$ такая, что $\mathfrak{A} \to x$, в частности, $\mathfrak{A}_0$ сходится к x как базис фильтра $\mathfrak{A}$. По построению $\mathfrak{A}$ множество X_0 входит в $\mathfrak{A}$, следовательно, $x \in X_0$ (см. предложение I (2.3)). Итак, $\mathfrak{A}_0$ сходится к точке $x \in X_0$, что и означает полноту X_0.

IУ. Пусть X – отделимое равномерное пространство. Тогда всякое его полное подпространство X_0 замкнуто.

Если $\mathfrak{A}$ – фильтр, включающий множество X_0 и сходящийся к некоторой точке $x \in X$, то след $\mathfrak{A}_{X_0} = \{A \cap X_0 : A \in \mathfrak{A}\}$ фильтра $\mathfrak{A}$ на X_0 фильтруется по убыванию. Фильтр $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{X_0}$ тоньше фильтра $\mathfrak{A}$, и так как $\mathfrak{A} \to x$, то и $\mathfrak{B} \to x$, стало быть, $\mathfrak{B}$ сходится в себе. Из условий предложения, поскольку $X_0 \in \mathfrak{B}$, следует, что $\mathfrak{B}$ сходится к какой-то точке из X_0, а из отделимости получаем, что этот предел фильтра $\mathfrak{B}$ должен совпадать с x, откуда $x \in X_0$, следовательно, X_0 замкнуто.

Рассмотрим множество T, равномерное пространство X, соответствие $F: T \to X$ и фильтр $\mathfrak{A}$ непустых подмножеств множества T, задевающий Ω_F. Соответствие F называется с х о д я щ и м с я в с е б е по фильтру $\mathfrak{A}$, если фильтрующееся по убыванию множество $F\langle\mathfrak{A}\rangle = \{F[A] : A \in \mathfrak{A}\}$ сходится в себе. Очевидно, что всякое соответствие F, сходящееся по фильтру $\mathfrak{A}$, сходится в себе по этому фильтру. Справедливость обратного утверждения регламентирована в следующем предложении.

У. Если X – полное равномерное пространство, то всякое сходящееся в себе по фильтру $\mathfrak{A}$ соответствие F сходится по $\mathfrak{A}$ к некоторой точке из X.

Доказательство следует непосредственно из определений.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если фильтр $\mathfrak{A}$ таков, что $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \cap \Omega_F \neq \varnothing$, то в последнем предложении требование полноты излишне. В самом деле, в этом случае $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} F[A] \neq \varnothing$ и сходящееся в себе по $\mathfrak{A}$ соответствие F сходится к любой точке из $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} F[A]$, в силу замечания к предложению П.

Фильтрующееся семейство $\varphi: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов равномерного пространства X называется с х о д я щ и м с я в с е б е, если оно сходится в себе по фильтру $\mathfrak{A} = \{A_\lambda\}$ подмножеств Ξ, где $A_\lambda = [\lambda, \to]$. Свойство семейства сходиться в себе равносильно, очевидно, такому: для любого окружения V можно указать такое $\lambda \in \Xi$, что $(x_\xi, x_\eta) \in V$ для всех $\xi, \eta \in \Xi$, $\xi, \eta \geq \lambda$. Ясно, что сходящееся семейство сходится в себе, а если X – полное равномерное пространство, то верно и обратное: всякое сходящееся в себе семейство элементов из X сходится к некоторой точке пространства X.

VI. Пусть $\varphi:\{x_\xi\}(\xi\in\Xi)$ – сходящееся в себе фильтрующееся семейство элементов из X и Ξ_0 конфинально множеству Ξ. Тогда если семейство $\varphi_0:\{x_\xi\}(\xi\in\Xi)$ сходится, то φ также сходится.

Действительно, если Ξ конфинально множеству Ξ, то фильтр Фреше $\mathcal{F}$ семейства φ содержится в фильтре Фреше $\mathcal{F}_0$ семейства φ_0. Так как фильтр $\mathcal{F}$ сходится в себе, а фильтр $\mathcal{F}_0$ сходится, то из предложения II получаем, что фильтр $\mathcal{F}$ также сходится, что и требовалось.

Оказывается, о полноте пространства X можно судить, рассматривая свойства сходящихся в себе семейств.

VII. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ полно в том и только в том случае, если всякое сходящееся в себе семейство элементов из X сходится к некоторой точке этого пространства.

В одну сторону справедливость предложения уже установлена.

Обратно, предположим, что всякое сходящееся в себе семейство элементов из X сходится к некоторой точке пространства X. Рассмотрим сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$ непустых подмножеств в X и введем в $\mathfrak{A}$ отношение порядка, считая $\mathcal{A}_1\leq\mathcal{A}_2$, если $\mathcal{A}_1\supset\mathcal{A}_2$ $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\in\mathfrak{A})$. При таком отношении порядка множество $\mathfrak{A}$ фильтруется по возрастанию. В каждом из $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ выберем по точке $x_\mathcal{A}$ и образуем фильтрующееся семейство $\varphi:\{x_\mathcal{A}\}$ $(\mathcal{A}\in\mathfrak{A})$ элементов из X. Докажем, что φ сходится в себе. Пусть $V\in\mathcal{U}$. Тогда можно указать $\mathcal{A}_0\in\mathfrak{A}$ такое, что $\mathcal{A}_0\times\mathcal{A}_0\subset V$. Если теперь $\mathcal{A}_0\leq\mathcal{A},\mathcal{B}$ $(\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathfrak{A})$, то $\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\mathcal{A}_0\times\mathcal{B}_0\subset V$, следовательно, $(x_\mathcal{A},x_\mathcal{B})\in V$–сходимость в себе семейства φ установлена. Согласно условию существует $\lim\limits_{\mathcal{A}\in\mathfrak{A}} x_\mathcal{A}=x$. Покажем, что $\mathfrak{A}\to x$. Действительно, соотношение $x=\lim\limits_{\mathcal{A}\in\mathfrak{A}} x_\mathcal{A}$ означает, что фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств $B_\mathcal{A}=\{x_{\mathcal{A}'}:\mathcal{A}\leq\mathcal{A}'\}$ сходится к x, следовательно, и фильтр $\mathcal{L}=\widetilde{\{B_\mathcal{A}\}}$ $(\mathcal{A}\in\mathfrak{A})$ также сходится к x. Если $\mathcal{A}$ – некоторое множество из $\mathfrak{A}$, то $\mathcal{A}\supset B_\mathcal{A}$, поэтому $\mathcal{A}\in\mathcal{L}$, и фильтр $\mathfrak{A}$ тоньше фильтра $\mathcal{L}$. Значит $\mathfrak{A}$, так же как и $\mathcal{L}$, сходится к x. Предложение доказано.

Равномерное пространство X называется с е к в е н ц и а л ь н о п о л н ы м, если всякая сходящаяся в себе последовательность его элементов сходится к некоторой точке из X.

Ясно, что полное равномерное пространство секвенциально полно. В некоторых случаях полнота оказывается равносильной секвенциальной полноте.

VIII. Метрическое пространство (X,ρ) полно в том и только в том случае, если оно секвенциально полно.

Достаточно доказать лишь, что из секвенциальной полноты данного метрического пространства следует его полнота. Пусть $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - сходящееся в себе семейство элементов пространства X. Множества $\Xi_k=\{\lambda\in\Xi:\rho(x_\xi,x_\eta)\leq\frac{1}{k};\ \xi,\eta\in\Xi;\ \xi,\eta\geq\lambda\}$ непусты для каждого $k\in\mathcal{N}$. Выберем произвольно $\lambda_1\in\Xi_1$. Предположим, что для некоторого натурального n мы выбрали $\lambda_1\in\Xi_1,\lambda_2\in\Xi_2,\ldots,\lambda_n\in\Xi_n$ так, что $\lambda_1\leq\lambda_2\leq,\ldots,\leq\lambda_n$. В множестве Ξ_{n+1} возьмем некоторое $\bar\lambda\in\Xi_{n+1}$. Так как Ξ фильтруется по возрастанию, в нем есть элемент, следующий за λ_n, $\bar\lambda$. Такого рода элемент возьмем в качестве λ_{n+1}. Имеем тогда $\lambda_{n+1}\in\Xi_{n+1}$ (в силу определения λ_{n+1} и множества Ξ_{n+1}), кроме того, $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\ldots\leq\lambda_{n+1}$. Согласно принципу построения по индукции получаем последовательность $\{\lambda_n\}$, причем такую, что $\rho(x_{\lambda_m},x_{\lambda_k})\leq\frac{1}{n}$, если только $\lambda_m,\lambda_k\geq\lambda_n$. Из последних соотношений можно заключить, что последовательность $\{x_{\lambda_n}\}$ $(n\in\mathcal{N})$ сходится в себе, а тогда, в силу секвенциальной полноты X, существует $\lim\limits_{n\in\mathcal{N}} x_n=x$.

Докажем сходимость всего семейства $\{x_\xi\}$, $(\xi\in\Xi)$ к элементу x. По произвольному положительному числу ε найдем $n\in\mathcal{N}$ такой, что $\frac{1}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}$ и $\rho(x_{\lambda_k},x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ при всех $k\geq n$. Для $\xi\in\Xi$, $\xi\geq\lambda_k$ имеем

$$\rho(x,x_\xi)\leq\rho(x,x_{\lambda_n})+\rho(x_{\lambda_n},x_\xi)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

откуда и следует, что $x_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}x$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат последнего предложения останется справедливым и в случае, когда X - равномерное пространство, у которого фильтр окружений имеет счетный базис +).

8.2. Рассмотрим отображение $f:Y\to X$, действующее из равномерного пространства $(Y,\mathcal{W})$ в равномерное пространство $(X,\mathcal{V})$. Напомним, что через $\hat f$ мы обозначаем отображение $\hat f:Y^2\to X^2$,

$$\hat f:(s,t)\mapsto(f(s),f(t)).$$

I. Пусть $\theta\subset Y^2$. Тогда $\hat f[\theta]=f\circ\theta\circ f^{-1}$.

Действительно, из предложения I (6.3) имеем

$$f\circ\theta\circ f^{-1}=\bigcup_{(x,y)\in\theta}f[x]\times f[y]=\hat f[\theta],$$

что и требовалось.

II. Пусть f - равномерно непрерывное отображение, действующее из равномерного пространства Y в равномерное пространство X, и $\mathfrak{A}$ - сходящийся в себе фильтр непустых подмножеств в Y, задеваю-

+) Это замечание по существу относится лишь к неотделимым равномерным пространствам, так как отделимое равномерное пространство со счетным базисом метризуемо.

щий Ω_f. Тогда $f\langle\mathfrak{A}\rangle$ сходится в себе в пространстве X.

Действительно, в силу равномерной непрерывности f для произвольного окружения $V\in\mathcal{V}$ найдется $\Theta\in\mathcal{W}$ такое, что $\hat{f}[\Theta]\subset V$. Так как $\mathfrak{A}$ сходится в себе, то существует $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$, для которого $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\subset\Theta$. Тогда соотношения

$$f[\mathcal{A}]\times f[\mathcal{A}]=\hat{f}[\mathcal{A}\times\mathcal{A}]=f\circ(\mathcal{A}\times\mathcal{A})\circ f^{-1}\subset f\circ\Theta\circ f^{-1}=\hat{f}[\Theta]\subset V$$

показывают, что $f\langle\mathfrak{A}\rangle=\{f[\mathcal{A}]:\mathcal{A}\in\mathfrak{A}\}$ – сходящаяся в себе фильтрующаяся по убыванию совокупность непустых подмножеств в X.

ТЕОРЕМА I (8.5). Пусть $\mathcal{X}$ – произведение семейства равномерных пространств $\{X_t\}$ $(t\in T)$, снабженное тихоновской равномерностью. Если при каждом $t\in T$ пространство X_t – полное, то $\mathcal{X}$ – также полное равномерное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, поскольку все проекции $P_t:\mathcal{X}\to X_t$ равномерно непрерывны, то образ $P_t\langle\mathfrak{A}\rangle$ сходящегося в себе фильтра непустых подмножеств в $\mathcal{X}$ представляет собой сходящуюся в себе фильтрующуюся по убыванию совокупность непустых подмножеств в X_t $(t\in T)$. В силу полноты X_t найдется точка $x_t\in X_t$ $(t\in T)$ такая, что $P_t\langle\mathfrak{A}\rangle\to x_t$. Из критерия сходимости фильтра в произведении топологических пространств (см. предложение I (4.3)) получаем, что $\mathfrak{A}$ сходится к точке $x\in\mathcal{X}$, имеющей проекции $x_t\in X_t$ $(t\in T)$. Полнота пространства $\mathcal{X}$ установлена.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть X – полное равномерное пространство. Наделим множество X^T всех отображений некоторого множества T в X слабой равномерностью. Тогда X^T – полное равномерное пространство.

СЛЕДСТВИЕ 2. Множество $\mathbb{R}^T(\mathbb{C}^T)$ всех числовых функций на множестве T, снабженное тихоновской равномерностью, представляет собой полное равномерное пространство.

Остается пока открытым вопрос о полноте равномерного пространства всех отображений множества T в полное равномерное пространство, снабженного сильной равномерностью. Следующей теоремой этот вопрос будет замкнут.

ТЕОРЕМА 2 (8.5). Пусть $(X,\mathcal{V})$ – полное равномерное пространство и T – некоторое множество. Зададим на X^T сильную равномерную структуру. Тогда X^T – полное равномерное пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сходящееся в себе фильтрующееся семейство $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ элементов из X^T и покажем, что оно сходится к некоторому отображению φ в топологии сильной равномерности на X^T.

Из сходимости в себе семейства $\{\varphi_\xi\}$ в сильной равномерности на X^T следует, что это семейство сходится в себе и в слабой равномерности на X^T, а тогда по теореме I можно заключить, что существует отображение $\varphi \in X^T$ такое, что $\varphi_\xi \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} \varphi$ в топологии произведения на X^T, иначе говоря, $\varphi_\xi(t) \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} \varphi(t)$ для каждого $t\in T$. Покажем, что φ_ξ сходится к φ и в топологии сильной равномерности на X^T. Пусть W – окружение диагонали в сильной равномерности на X^T. Поскольку совокупность $\{\widetilde{V}\}$, где V – замкнутое симметричное окружение диагонали в равномерности на X, является базисом сильной равномерности на X^T, то можно считать, что $W=\widetilde{V}$ для некоторого замкнутого симметричного окружения $V\in\mathfrak{W}$. Так как $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ сходится в себе, то существует $\lambda\in\Xi$ такое, что $(\varphi_\xi,\varphi_\eta)\in\widetilde{V}$ для всех $\xi,\eta\in\Xi$, $\xi,\eta\geqslant\lambda$, иначе говоря, $(\varphi_\xi(t),\varphi_\eta(t))\in V$ для $\xi,\eta\geqslant\lambda$, и для всех $t\in T$, или $\varphi_\eta(t)\in V[\varphi_\xi(t)]$ $(\xi,\eta\geqslant\lambda, t\in T)$. Поскольку при каждом $t\in T$ существует $\lim\limits_{\xi\in\Xi}\varphi_\xi(t)=\varphi(t)$, то существует и $\lim\limits_{\eta\in\Xi_\lambda}\varphi_\eta(t)=\varphi_0(t)$ сужения семейства $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ на конфинальное множеству Ξ подмножество $\Xi_\lambda=\{\eta\in\Xi:\eta\geqslant\lambda\}$, причем $\varphi_0(t)=\varphi(t)$ (см. предложение II (2.3)). Так как V замкнуто в X^2, то $V[\varphi_\xi(t)]$ замкнуто в X, следовательно, $\varphi(t)\in V[\varphi_\xi(t)]$, и, с учетом симметричности V, получаем $(\varphi(t),\varphi_\xi(t))\in V$ для всех $t\in T$, откуда $(\varphi,\varphi_\xi)\in\widetilde{V}$. Итак, $\varphi_\xi\in\widetilde{V}[\varphi]$ для всех $\xi\in\Xi$, $\xi\geqslant\lambda$, что и означает сходимость $\varphi_\xi \xrightarrow[\xi\in\Xi]{} \varphi$ в сильной равномерности на X^T.

8.3. Пусть T, X – два топологических пространства и $f_0: T\to X$ – отображение, определенное и непрерывное на плотном в T подмножестве T_0. Спрашивается, можно ли найти такое отображение $f: T\to X$, определенное и непрерывное на T, что f совпадет с f_0 на T_0. Иначе говоря, всегда ли возможно непрерывное распространение на T отображения, непрерывного на плотном подмножестве в T? Нетрудно построить пример, показывающий, что ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Ниже мы укажем условия, при которых такое распространение возможно, а пока – одно предложение вспомогательного характера.

I. Пусть T, X – хаусдорфовы топологические пространства и f, g – отображения, определенные и непрерывные на T и принимающие значения в X. Тогда множество $E=\{t\in T: f(t)=g(t)\}$ замкнуто в T.

Возьмем некоторую точку $t\in\overline{E}$ и обозначим через $\mathfrak{M}_t$ фильтр ее окрестностей. Так как $\mathcal{U}\cap E=\varnothing$ для каждой окрестности $\mathcal{U}$ точки t и $\mathfrak{M}_t$ - фильтр, то совокупность $\{E\cap\mathcal{U}\}(\mathcal{U}\in\mathfrak{M}_t)$ состоит из непустых подмножеств в T и фильтруется по убыванию. Из непрерывности f, g имеем

$$f(t)=\lim_{\mathfrak{M}_t} f=\lim_{\mathfrak{A}_t} f,\quad g(t)=\lim_{\mathfrak{M}_t} g=\lim_{\mathfrak{A}_t} g,$$

где $\mathfrak{A}_t=\widetilde{\{E\cap\mathcal{U}\}}(\mathcal{U}\in\mathfrak{M}_t)$. Но $f[E\cap\mathcal{U}]=g[E\cap\mathcal{U}]\,(\mathcal{U}\in\mathfrak{M}_t)$, следовательно, $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}_t\rangle}$ и $\widetilde{g\langle\mathfrak{A}_t\rangle}$ имеют общий базис, поэтому $f(t)=g(t)$ в силу единственности предела. Итак, $t\in E$, что и означает замкнутость E.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях предложения I отображения f, g совпадают на плотном множестве $T_0\subset T$, то $f=g$.

Действительно, множество $E=\{t\in T: f(t)=g(t)\}$ замкнуто и содержит T_0, следовательно, $E\supset\overline{T_0}=T$, откуда $f(t)=g(t)\ (t\in T)$, что и требовалось.

ТЕОРЕМА 3 (8.5). Пусть $(T,\mathfrak{M}), (X,\mathfrak{W})$ - равномерные пространства, причем X отделимо и полно. Тогда всякое отображение f_0, заданное и равномерно непрерывное на плотном в T множестве T_0, может быть единственным образом продолжено до отображения f, заданного и равномерно непрерывного на всем T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что требуемое распространение существует. Поскольку $\mathfrak{M}_t$ задевает область определения T_0 отображения f_0, то в силу непрерывности f должно быть $f(t)=\lim_{\mathfrak{M}_t} f=\lim_{\mathfrak{M}_t} f_0$ для любого $t\in T$, так что если возможно хотя бы непрерывное распространение с плотного множества $T_0\subset T$, то оно по значениям отображения f_0 определяется единственным образом: $f(t)=\lim_{\mathfrak{M}_t} f_0$.

Покажем, что в условиях теоремы существует $\lim_{\mathfrak{M}_t} f_0$ для любого $t\in T$. Фильтр $\mathfrak{M}_t$ сходится к t, следовательно, сходится в себе и, ввиду плотности T_0 в T, задевает множество T_0, так что, согласно предложению II' (8.2), фильтрующаяся по убыванию система $f_0\langle\mathfrak{M}_t\rangle$ сходится в себе. Из полноты пространства X следует сходимость $f_0\langle\mathfrak{M}_t\rangle$ к некоторой точке из X, а из отделимости X - единственность предела.

Убедимся в равномерной непрерывности распространения $f: t\mapsto \lim_{\mathfrak{M}_t} f_0$ отображения f. Пусть V - произвольное окружение из равномерности $\mathfrak{W}$ на X. Найдем симметричное окружение $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}$ такое, что $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V$. Так как f_0 равномерно непрерывно, то существует $W\in\mathfrak{M}$, для которого $\hat{f}_0[W]\subset\mathcal{U}$, причем в силу предложения Ш (6.3) окружение W можно считать открытым (в T^0 с топологией произведения). Убедимся в том, что для $(s,t)\in W$ выполнено $(f(s), f(t))\in V$ – это и будет означать равномерную непрерывность f. Поскольку W открыто, точка (s,t) входит в W вместе с некоторой окрестностью, иначе говоря, существует $W_0\in\mathfrak{M}$ такое, что $W_0[s]\times W_0[t]\subset W$. Далее, из определения f следует существование окружений $W_1, W_2\in\mathfrak{M}$, для которых $f_0[W_1[t]]\subset\mathcal{U}[f(t)]$, $f_0[W_2[s]]\subset\mathcal{U}[f(s)]$, причем можно считать, что $W_1, W_2\subset W_0$. Обозначим $W_3=W_1\cap W_2$. Если $s_0, t_0\in W_3[t]\cap T_0$, где пересечение непусто в силу плотности T_0 в T, тогда $f_0(t_0)\in\mathcal{U}[f(t)]$, или $(f(t), f(t_0))\in\mathcal{U}$, аналогично $(f(s), f(s_0))\in\mathcal{U}$. Так как $W_3\subset W_0$, а $W_0[s]\times W_0[t]\subset W$, то $(f_0(s_0), f_0(t_0))\in\mathcal{U}$, и поскольку $s_0, t_0\in T_0$, то $(f(s_0), f(t_0))\in\mathcal{U}$. Итак, с учетом симметричности $\mathcal{U}$, мы получили соотношения $(f(s), f(s_0))\in\mathcal{U}$, $(f(s_0), f(t_0))\in\mathcal{U}$, $(f(t_0), f(t))\in\mathcal{U}$, откуда $(f(s), f(t))\in V$, и равномерная непрерывность f доказана.

§ 9. Вполне ограниченные множества в равномерном пространстве

Возможность оценки взаимной близости элементов равномерного пространства позволяет выяснять степень отклонения одного множества равномерного пространства от другого. Особое место занимают множества, "мало" отклоняющиеся от конечных – они тесно связаны с компактными множествами, и в терминах такого рода множеств удобно формулируются критерии компактности множества в важных функциональных пространствах. Все это дает основание подробнее рассмотреть такие множества.

9.I. Пусть $(X,\mathfrak{W})$ – равномерное пространство. Множество $E\subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого $V\in\mathfrak{W}$ существует конечная система $\mathcal{R}=\{E_1, E_2,\dots, E_n\}$ $(n\in\mathcal{N})$ подмножеств X такая, что $E_k\times E_k\subset V$ $(k=1,2,\dots,n)$ и $E\subset\bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Иначе говоря, множество $E\subset X$ вполне ограничено, если существует его конечное покрытие множествами малыми любого порядка.

В определении вполне ограниченного множества можно считать множества системы $\mathcal{R}$ попарно не пересекающимися и, кроме того, такими, что $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, ибо из любого конечного покрытия $\mathcal{R}$ множества E можно сконструировать конечное покрытие множества E, состоящее из множеств, по крайней мере столь же малых, сколь множества первоначального покрытия, но уже попарно не пересекающихся и в объединении дающих в точности множество E (проверку такого свойства покрытий предоставим читателю).

К определению вполне ограниченного множества можно подойти несколько иначе. Для этого дадим еще одно определение. Пусть $E\subset X$ и $V\in\mathcal{U}$. Множество $\mathcal{A}\subset X$ называется V-с е т ь ю для E, если $E\subset V[\mathcal{A}]=\bigcup\limits_{x\in\mathcal{A}} V[x]$, т.е. если E можно покрыть определяемыми одним окружением V окрестностями $V[x]$ точек $x\in\mathcal{A}$. Иначе, $\mathcal{A}$ есть V- сеть для E, если для любого $y\in E$ найдется $x\in\mathcal{A}$ такое, что $(x,y)\in V$.

Если (X,ρ) - метрическое пространство, а $V=B_\varepsilon$ - цилиндр радиуса $\varepsilon>0$, то B_ε-сеть называют просто ε-сетью. Таким образом, множество $\mathcal{A}\subset X$ есть ε-сеть для $E\subset X$, если для любого $y\in E$ можно указать $x\in\mathcal{A}$ так, что $\rho(x,y)\leq\varepsilon$. Можно сказать также, что $\mathcal{A}$ есть ε-сеть для E, если E можно покрыть шарами радиуса ε с центрами в точках из $\mathcal{A}$.

I. Множество E в равномерном пространстве X вполне ограничено в том и только в том случае, если для любого $V\in\mathcal{U}$ существует конечная V-сеть для E.

В самом деле, если E - вполне ограниченное множество в X и $V\in\mathcal{U}$, то существует конечное семейство $\{E_k\}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ такое, что $E_k\times E_k\subset V$ и $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, и можно считать, что E_k $(k=1,2,\ldots,n)$ непусты. В каждом из E_k выберем какую-либо точку $x_k\in E_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и покажем, что конечное множество $K=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ является V-сетью для E. Действительно, так как $E_{k}\times E_k\subset V$, то и $\{x_k\}\times E_k\subset V$, или $E_k\subset V[x_k]$. Поскольку $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, то $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n} V[x_k]$, следовательно, K есть конечная V-сеть для E.

Обратно, для произвольного $V\in\mathcal{U}$ найдем симметричное $U\in\mathcal{U}$ такое, что $U\circ U\subset V$. Обозначим через L конечную U-сеть для E. Тогда $E\subset\bigcup\limits_{x\in L} U[x]$, и, с учетом симметричности U, имеем $U[x]\times U[x]\subset U\circ U\subset V$, следовательно, совокупность $\{U[x]\}$ $(x\in L)$ - конечное покрытие $E\subset X$ множествами малыми порядка V, откуда, в силу произвольности $V\in\mathcal{U}$, можно заключить о том, что E вполне ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Построенная в доказательстве предложения V-сеть содержится в E.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно ослабить условия доказанного предложения в части достаточности. Точнее, если для каждого $V\in\mathcal{W}$ существует вполне ограниченная V-сеть для E, то E – вполне ограничено.

Действительно, взяв $V\in\mathcal{W}$, найдем симметричное $\mathcal{U}\in\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V$. Построим вполне ограниченную $\mathcal{U}$-сеть $\mathcal{A}$ для E. Так как $\mathcal{A}$ вполне ограничено, то, по доказанному, существует конечная $\mathcal{U}$-сеть K для $\mathcal{A}$. Тогда

$$E\subset \mathcal{U}[\mathcal{A}]\subset \mathcal{U}[\mathcal{U}[K]]=(\mathcal{U}\circ\mathcal{U})[K]\subset V[K],$$

откуда следует, что конечное множество K является V-сетью для E, следовательно, E вполне ограничено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказанном предложении можно рассматривать V-сети для V не из всего фильтра $\mathcal{W}$, а лишь из какого-нибудь его базиса, например только замкнутые, или, в случае метрического пространства, только ε-сети.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Множества E и $\bar{E}$ вполне ограничены одновременно.

Это замечание следует непосредственно из предыдущего и из результата доказанного предложения.

9.2. Вполне ограниченные множества в равномерном пространстве оказываются тесно связанными с компактными, и такая связь устанавливается в следующем факте, носящем название теоремы Хаусдорфа.

ТЕОРЕМА I (9.5). Для относительной компактности +) множества E в равномерном пространстве $(X,\mathcal{W})$ необходимо, а если X полно, то и достаточно, чтобы E было вполне ограниченным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть E относительно компактно, т.е. $\bar{E}$ компактно в X. Установим существование конечной V-сети для E, каково бы ни было окружение $V\in\mathcal{W}$. Так как сечение $V[x]$ при каждом $x\in\bar{E}$ является окрестностью точки x, то из компактности $\bar{E}$, с учетом предложения I (5.I), следует

+) Напомним (см. пункт 5.I), что множество E в топологическом пространстве X называется относительно компактным, если его замыкание $\bar{E}$ компактно.

существование такого конечного множества $K \subset \bar{E}$, что $\bar{E} \subset \bigcup_{x \in K} V[x] = V[K]$. Поскольку V – произвольное окружение из $\mathcal{W}$, то $\bar{E}$ вполне ограничено, а тогда и E также вполне ограничено.

Достаточность. Пусть X – полное равномерное пространство и E – вполне ограниченное множество в X. Рассмотрим ультрафильтр $\mathcal{U}$ непустых подмножеств в X, включающий множество $\bar{E}$, и докажем, что $\mathcal{U}$ сходится в себе. Возьмем некоторое окружение $V \in \mathcal{W}$. Так как $\bar{E}$, так же как и E, вполне ограничено, то найдется конечное семейство $\{E_K\}$ $(K = 1, 2, \ldots, n)$ непустых подмножеств в X, для которого $\bar{E} \subset \bigcup_{K=1}^{n} E_K$ и $E_K \times E_K \subset V$ $(K = 1, 2, \ldots, n)$. Поскольку $\bar{E} \in \mathcal{U}$, то $\bigcup_{K=1}^{n} E_K \in \mathcal{U}$. Согласно предложению У (I.I) в семействе $\{E_K\}$ $(K = 1, 2, \ldots, n)$ найдется множество E_i, входящее в ультрафильтр $\mathcal{U}$. Но $E_i \times E_i \subset V$, так что, в силу произвольности $V \in \mathcal{W}$, ультрафильтр $\mathcal{U}$ сходится в себе. Пространство X по условию полно, следовательно, существует точка $x \in X$ такая, что $\mathcal{U} \to x$, а поскольку $\bar{E} \in \mathcal{U}$, то $x \in \bar{E}$. Предложение IУ (5.I) позволяет сделать вывод о компактности множества $\bar{E}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нередко бывает так, что само пространство X неполное, но существует полное отделимое его подпространство X_0, содержащее E. Тогда результат теоремы Хаусдорфа в части достаточности сохраняется.

Действительно, будучи полным и отделимым, X_0 замкнуто, и так как по доказанному E относительно компактно в X_0, то в силу предложения УШ (5.I) оно относительно компактно и в X.

9.3. Установим полезный во многих отношениях критерий относительной компактности множества в метрическом пространстве, называемый теоремой Больцано-Вейерштрасса.

ТЕОРЕМА 2 (5.9). Множество E в метрическом пространстве (X, ρ) относительно компактно в том и только в том случае, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества E можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке из X, т.е. можно указать такую возрастающую последовательность $\{n_K\}$ натуральных чисел, что последовательность $\{x_{n_K}\}$ $(K \in \mathbb{N})$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E относительно компактно. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ точек из E. Определим на X функцию $f: \mapsto \varliminf_{n \to \infty} \rho(x, x_n)$. Согласно теореме 5 (2.4) достаточно доказать существование такого $x \in X$, что $f(x) = 0$. Предположим, что $f(x)>0$ для всех $x\in X$. Из относительной компактности E следует, что замыкание $\overline{E}$ можно покрыть конечным множеством открытых шаров $\overset{\circ}{B}_{r_x}[x]$ с центрами из некоторого конечного множества $K\subset\overline{E}$ и радиуса $r_x=\frac{1}{2}f(x)<f(x)$. Возьмем какой-либо элемент $x\in K$. Так как $r_x=\frac{1}{2}f(x)<\varliminf_{n\to\infty}\rho(x,x_n)$, то, в силу теоремы 4 (4.2) +), существует $n_x\in\mathbb{N}$ такое, что $\rho(x,x_k)>r_x$, или $x_n\notin\overset{\circ}{B}_{r_x}[x]$ для всех натуральных $n\geq n_x$. Обозначим $n_0=\max_{x\in K} n_x$. Если $n\geq n_0$, то $x_n\notin\bigcup_{x\in K}\overset{\circ}{B}_{r_x}[x]$. Полученное соотношение противоречит тому, что $x_n\in E$ при всех $n\in\mathbb{N}$, следовательно, случай $f(x)>0$ при всех $x\in X$ невозможен.

Обратно, предположим, что из всякой последовательности точек множества $E\subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, однако E не является относительно компактным.

Покажем вначале, что при высказанных предположениях подпространство $\overline{E}$ метрического пространства X полно. В самом деле, пусть $\{y_n\}$ – сходящаяся в себе последовательность элементов из $\overline{E}$. Так как шары $B_{\frac{1}{n}}[y_n]\ (n\in\mathbb{N})$ имеют непустое пересечение с E, для каждого натурального n в E найдется элемент x_n такой, что $\rho(x_n,y_n)\leq\frac{1}{n}$. Нетрудно понять, что последовательность $\{x_n\}$, так же как и $\{y_n\}$, сходится в себе:

$$\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m)+\rho(y_m,x_m)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\rho(y_n,y_m).$$

Так как по условию из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то по предложению УI (8.I) сама последовательность $\{x_n\}$ сходится. Из оценки $\rho(y_n,x)\leq\rho(y_n,x_n)+\rho(x_n,x)$ следует, что $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$. Полнота $\overline{E}$ установлена (см. предложение УШ (8.I)).

Если множество E не является относительно компактным в X, тогда по теореме Хаусдорфа (с учетом замечания к ней) E не вполне ограничено. Последнее означает, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для любого конечного множества $K\subset E$ найдется элемент $x\in E$, для которого $\rho(x,y)\geq\varepsilon$ при всех $y\in K$. Отсюда, в частности, следует, что E непусто. Возьмем в E какой-либо элемент x_1 и предположим, что мы построили конечное множество $K_n=\{x_1,$

+) Хотя упомянутая теорема имела отношение к верхнему пределу, формулировка и доказательство соответствующего результата для нижнего предела вполне аналогичны формулировке и доказательству теоремы 4 (4.2).

$x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ элементов из E, для которых $\rho(x_i, x_k) \geqslant \varepsilon$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k\}$. Взяв в качестве K множество K_n, найдем элемент $x_{n+1} \in E$ такой, что $\rho(x_{n+1}, x_k) \geqslant \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Из принципа построения по индукции можно заключить о существовании последовательности $\{x_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ точек множества E, обладающей свойством: $\rho(x_n, x_\ell) \geqslant \varepsilon$ при всех $k, \ell \in \mathcal{N};\ k \neq \ell$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ $(k \in \mathcal{N})$. Так как $\{x_{n_k}\}$ сходится, то она сходится в себе, следовательно, должно найтись такое $K_0 \in \mathcal{N}$, что $\rho(x_{n_i}, x_{n_k}) < \varepsilon$ при всех натуральных $i, k \geqslant K_0$, а это противоречит определению последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

9.4. Рассмотрим произвольное множество T, равномерное пространство $(X, \mathcal{W})$ и множество X^T всех отображений из T в X, снабженное сильной равномерностью. Отображение $\varphi \in X^T$ называют в п о л н е   о г р а н и ч е н н ы м, если множество $\Delta\varphi$ вполне ограничено. Совокупность всех вполне ограниченных отображений множества T в X обозначим через $\mathcal{M}(T, X)$, или просто через $\mathcal{M}$. Если $x = \mathbb{R}$, то используют обозначение $\mathcal{M}(T, \mathbb{R}) = \mathcal{M}_T$. Очевидно, что множество $\mathcal{M}_T$ состоит из всех ограниченных на T функций.

I. **Множество $\mathcal{M}(T; X)$ замкнуто в пространстве X^T (с сильной равномерностью).**

Убедимся в том, что множество значений $\Delta\varphi_0$ отображения $\varphi_0 \in \overline{\mathcal{M}}$ вполне ограничено. Пусть V – симметричное окружение диагонали в равномерности на X. Окрестность $\widetilde{V}[\varphi_0]$ отображения φ_0 имеет с $\mathcal{M}$ непустое пересечение. Возьмем $\varphi \in \mathcal{M} \cap \widetilde{V}[\varphi_0]$. Тогда $(\varphi_0, \varphi) \in \widetilde{V}$, или $\varphi \circ \varphi_0^{-1} \subset V$, а ввиду симметричности V имеем также $\varphi_0 \circ \varphi^{-1} \subset V$. Поскольку $I \subset \varphi^{-1} \circ \varphi$, где I – тождественное отображение T на себя, то $\varphi_0 \subset \varphi_0 \circ I \subset \varphi_0 \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \subset V \circ \varphi$. Отсюда получаем следующее соотношение:

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_0[T] \subset V \circ \varphi[T] = V[\varphi[T]] = V[\Delta\varphi].$$

Таким образом, $\Delta\varphi$ является V-сетью для $\Delta\varphi_0$, и так как $\Delta\varphi$ вполне ограничено, то согласно замечанию 2 к предложению I (9.I) будет вполне ограничено и $\Delta\varphi_0$. Предложение доказано.

II. **Отображение $\varphi \in X^T$ вполне ограничено в том и только в том случае, если для любого $V \in \mathcal{W}$ существует конечное семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ попарно не пересекающихся подмножеств множества T такое, что $T = \bigcup_{k=1}^{n} T_k$ и $\varphi[T_k] \times \varphi[T_k] \subset V$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.**

Действительно, пусть $\varphi\in\mathcal{M}$ и V – произвольное окружение из $\mathcal{W}$. Из полной ограниченности множества $\Delta\varphi$ следует существование такого конечного семейства $\{E_K\}$ $(K=1,2,\dots,n)$ попарно не пересекающихся подмножеств в X, что $\Delta\varphi=\bigcup_{K=1}^{n}E_K$ и $E_K\times E_K\subset V$. Множества $T_K=\varphi^{-1}[E_K]$ таковы, что

$$T_i\cap T_j=\emptyset\ \ (i=1,2,\dots,n;\ i\neq j),\ \bigcup_{K=1}^{n}T_K=T$$

и

$$\varphi[T_K]\times\varphi[T_K]\subset V,$$

так что семейство $\{T_K\}$ $(K=1,2,\dots,n)$ – требуемое.

Обратно, обозначим $E_K=\varphi[T_K]$ $(K=1,2,\dots,n)$. Тогда

$$\bigcup_{K=1}^{n}E_K=\bigcup_{K=1}^{n}\varphi[T_K]=\varphi[T]=\Delta\varphi$$

и, если выполнены условия предложения, Δ_φ – вполне ограничено.

ТЕОРЕМА 3 (9.5). Пусть X – полное равномерное пространство. Множество $\mathcal{E}\subset\mathcal{M}(T,X)$ относительно компактно в сильной равномерности в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

I) существует компактное множество $C\subset X$ такое, что $\Delta_\varphi\subset C$ для всех $\varphi\in\mathcal{E}$;

2) для любого $V\in\mathcal{W}$ существует конечное семейство $\{T_K\}$ $(K=1,2,\dots,n)$ подмножеств T такое, что $T=\bigcup_{K=1}^{n}T_K$ и $\varphi[T_K]\times\varphi[T_K]\subset V$ для всех $\varphi\in\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{E}$ – компактное множество в $\mathcal{M}(T,X)$. Рассмотрим множество $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}}\Delta\varphi$ и докажем, что оно относительно компактно. Относительно компактное множество по теореме Хаусдорфа вполне ограничено. Взяв произвольно $\mathcal{U}\in\mathcal{W}$, выберем в $\mathcal{E}$ конечную $\widetilde{\mathcal{U}}$-сеть $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\}$. Каждое из множеств $\Delta\varphi_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ вполне ограничено, а поскольку $\mathcal{M}(T,X)$, будучи замкнутым множеством полного пространства X^T, само является полным равномерным пространством, то, вновь по теореме Хаусдорфа, $\Delta\varphi_i$ относительно компактно. Следовательно, множество $\mathcal{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta\varphi_i$ также относительно компактно. Отсюда и из теоремы Хаусдорфа можно заключить о том, что $\mathcal{A}$ вполне ограничено.

Убедимся в том, что $\mathcal{A}$ представляет собой $\mathcal{U}$-сеть для $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}}\Delta\varphi$. В самом деле, пусть $\varphi\in\mathcal{E}$. Так как $\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\}$ есть $\widetilde{\mathcal{U}}$-сеть для $\mathcal{E}$, найдется отображение φ_i $(1\leq i\leq n)$ такое, что $(\varphi_i,\varphi)\in\widetilde{\mathcal{U}}$, и, с учетом определения $\widetilde{\mathcal{U}}$, получаем $\varphi\subset\mathcal{U}\circ\varphi_i$. Отсюда следует, что

$$\Delta_\varphi \subset \mathcal{U}[\varphi_i[T]] = \mathcal{U}[\Delta\varphi_i] \subset \mathcal{U}[A]$$

для каждого $\varphi \in \mathcal{E}$, тем самым $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}} \Delta_\varphi \subset \mathcal{U}[A]$. Мы установили, что вполне ограниченное множество A является $\mathcal{U}$-сетью для $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}} \Delta_\varphi$. Учитывая замечание I к предложению I (9.I), можно сделать вывод о том, что $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}} \Delta_\varphi$ вполне ограничено, а по теореме Хаусдорфа оно относительно компактно, стало быть, компактное множество $C = \overline{\bigcup_{\varphi\in\mathcal{E}} \Delta_\varphi}$ удовлетворяет первому условию теоремы.

Проверим выполнение второго условия. Пусть $V \in \mathfrak{W}$ и $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}$ – такое симметричное окружение, что $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\circ\mathcal{U} \subset V$. Найдем в множестве $\mathcal{E}$ конечную $\widetilde{\mathcal{U}}$-сеть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$. Для каждого из φ_i $(i=1,2,\dots,n)$ построим разбиение $\{T_j^i\}$ $(i=1,2,\dots,k;\ j=1,2,\dots,m_i)$ множества T на попарно не пересекающиеся подмножества такие, что $\varphi_i[T_j^i]\times\varphi_i[T_j^i] \subset \mathcal{U}$. Совокупность множеств вида

$$T_{j_1}^1 \cap T_{j_2}^2 \cap \dots \cap T_{j_k}^k \quad (k=1,2,\dots,n,\ j_e = 1,2,\dots,m_e)$$

образуют новое конечное разбиение $\{T_q\}$ $(q=1,2,\dots,N)$ множества T, причем из определения этого разбиения следует, что $\varphi_i[T_j]\times\varphi_i[T_j] \subset \mathcal{U}$ для всех $i=1,2,\dots,k$; $j=1,2,\dots,N$.

Для отображения $\varphi\in\mathcal{E}$ можно указать такое φ_i $(1\le i\le k)$, что $(\varphi,\varphi_i)\in\widetilde{\mathcal{U}}$, т.е. что $\varphi \subset \mathcal{U}\circ\varphi_i$. Тогда, принимая во внимание, что $\varphi^{-1} \subset \varphi_i^{-1}\circ\mathcal{U}$, с учетом предложения I (8.2) получаем

$$\varphi[T_j]\times\varphi[T_j] = \hat{\varphi}[T_j^2] = \varphi\circ T_j^2\circ\varphi^{-1} \subset \mathcal{U}\circ\varphi_i\circ T_j^2\circ\varphi_i^{-1}\circ\mathcal{U} \subset$$
$$\subset \mathcal{U}\circ(\varphi_i[T_j]\times\varphi_i[T_j])\circ\mathcal{U} \subset \mathcal{U}\circ\mathcal{U}\circ\mathcal{U} \subset V.$$

Последнее соотношение показывает, что разбиение $\{T_q\}$ $(q=1,2,\dots,N)$ требуемое.

Предположим теперь, что множество $\mathcal{E}\subset M(T,X)$ удовлетворяет обоим условиям теоремы и установим полную ограниченность множества $\mathcal{E}$ – этого, в силу полноты пространства $M(T,X)$, достаточно для доказательства относительной компактности множества $\mathcal{E}$.

Пусть V – произвольное окружение из $\mathfrak{W}$. Найдем $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}$ такое, что $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V$, и конечное семейство $\{T_k\}$ $(k=1,2,\dots,n)$ подмножеств множества T, для которых $\varphi[T_k]\times\varphi[T_k]\subset\mathcal{U}$ при всех $\varphi\in\mathcal{E}$, $k=1,2,\dots,n$, причем множества из этого семейства можно считать непустыми и попарно не пересекающимися. Так как C компактно и, тем самым, вполне ограничено, существует конечная $\mathcal{U}$-сеть для C.

Рассмотрим произведение K^n. Поскольку множества семейства $\{T_K\}$ попарно не пересекаются, каждый элемент $z=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K^n$ порождает отображение $\varphi_z=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(T_k\times\{x_n\})$, причем, очевидно, $\varphi_z\in M(T,X)$. Обозначим $\mathcal{R}=\{\varphi_z\}$ $(z\in K^n)$. Выберем из каждого T_K по элементу $t_K\in T_K$. Поскольку $\varphi(t_K)\subset\Delta_\varphi\subset C$, а K представляет собой конечную $\mathcal{U}$-сеть для C, то в K найдется элемент x_K такой, что $(x_K,\varphi(t_K))\in\mathcal{U}$. Проделав эту процедуру для всех $K=1,2,\dots,n$, получим точку $z=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in K^n$. Сравним значения $\varphi_z(t)$ и $\varphi(t)$ на каждом элементе $t\in T$. Так как $T_i\cap T_j=\emptyset$ при $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots,n$, то существует единственное K такое, что $t\in T_K$. В силу определения φ_z получаем $\varphi_z(t)=x_K$. Из выбора $z\in K^n$ следует, что $(\varphi_z(t),\varphi(t_K))\in\mathcal{U}$, а поскольку

$$(\varphi(t_K),\varphi(t))\subset\varphi[T_K]\times\varphi[T_K]\subset\mathcal{U},$$

то $(\varphi_z(t),\varphi(t))\subset\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V$. Последнее соотношение имеет место при каждом $t\in T$, следовательно, $(\varphi_z,\varphi)\in\tilde{V}$, откуда можно сделать вывод о том, что $\mathcal{R}$ - конечная $\tilde{V}$-сеть для $\mathcal{E}$, и множество $\mathcal{E}$ вполне ограничено. Теорема доказана.

Рассмотрим топологические пространства T, X и совокупность $C(T,X)$ всех непрерывных отображений из T в X.

Ш. Если X - отделимое равномерное пространство, то множество $C(T,X)$ замкнуто в пространстве X^T (с сильной равномерностью).

Действительно, пусть $\varphi_0\in\overline{C(T,X)}$. Тогда существует фильтрующееся семейство $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ элементов из $C(T,X)$, сходящееся к φ_0 в топологии сильной равномерности на X^T. Согласно следствию из теоремы 4 (5.7) отображение φ_0 непрерывно на T, т.е. $\varphi_0\in C(T,X)$, следовательно, $C(T,X)$ замкнуто в X^T.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если X - полное отделимое равномерное пространство, то $C(T,X)$ - также полное в равномерности, индуцированной сильной равномерностью на X^T.

Достаточно заметить, что в условиях замечания X^T- полное равномерное пространство, следовательно, $C(T,X)$ полно как замкнутое множество полного равномерного пространства.

IУ. Если T - компактно, а X - полное отделимое равномерное пространство, то $C(T,X)\subset M(T,X)$.

В самом деле, по теореме 3 (5.5) образ $f[T]$ компактного множества T при непрерывном отображении $f\in C(T,X)$ компактен, а по теореме I (5.9) множество $f[t]$ вполне ограничено, так что $f\in \mathcal{M}(T,X)$, следовательно, $C(T,X)\subset \mathcal{M}(T,X)$.

Очередной факт, называемый теоремой Арцела – Асколи, содержит критерий компактности множества в пространстве непрерывных отображений равномерных пространств.

ТЕОРЕМА 4 (5.9). Пусть $(T,\mathfrak{M})$, $(X,\mathfrak{W})$ – равномерные пространства, причем T – компактно, а X – отделимо и полно. Множество $\mathcal{E}\subset C(T,X)$ относительно компактно в сильной равномерности в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:

I) существует компактное множество $C\subset X$ такое, что $\Delta_\varphi\subset C$ при всех $\varphi\in\mathcal{E}$;

2) для каждого окружения V из $\mathfrak{W}$ существует окружение $W\in\mathfrak{M}$ такое, что $\hat{\varphi}[W]\subset V$ при всех $\varphi\in\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $\mathcal{E}$ компактно в $C(T,X)$, а $C(T,X)\subset \mathcal{M}(T,X)$, то $\bar{\mathcal{E}}$ компактно в $\mathcal{M}(T,X)$, так что существование компактного множества C, удовлетворяющего условию I, следует из теоремы 3.

Для проверки второго условия возьмем $V\in\mathfrak{W}$ и найдем $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}$ такое, что $\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V$. Используя полную ограниченность множества $\mathcal{E}$, найдем конечное подмножество $\mathcal{K}$ в $C(T,X)$, являющееся $\tilde{\mathcal{U}}$-сетью для $\mathcal{E}$. Так как, по теореме Кантора, каждое отображение $\psi\in\mathcal{K}$ равномерно непрерывно, существует окружение $W_\psi\in\mathfrak{M}$ такое, что $\hat{\psi}[W_\psi]\subset\mathcal{U}$. Рассмотрим окружение $W=\bigcap_{\psi\in\mathcal{K}} W_\psi$. Поскольку $\mathcal{K}$ есть $\tilde{\mathcal{U}}$-сеть для $\mathcal{E}$, то для любого $\varphi\in\mathcal{E}$ можно указать $\psi\in\mathcal{K}$ так, что $\varphi\in\tilde{\mathcal{U}}[\psi]$, или $\varphi\circ\psi^{-1}\subset\mathcal{U}$, откуда $\varphi\subset\mathcal{U}\circ\psi$. Из определения W, с учетом предложения I (8.2), получаем соотношение

$$\hat{\varphi}[W]\circ\varphi\circ W\circ\varphi^{-1}\subset\mathcal{U}\circ\psi\circ W_\psi\circ\psi^{-1}\circ\mathcal{U}\subset\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\circ\mathcal{U}\subset V,$$

которое показывает, что W – требуемое во втором условии окружение.

Пусть теперь выполнены оба условия теоремы. Проверим, что в этом случае выполнены и условия теоремы 3. Нетрудно заметить, что в обоих теоремах первые условия совпадают, поэтому приступим сразу к проверке второго условия. Рассмотрим окружение $V\in\mathfrak{W}$. Из второго условия теоремы следует существование такого $W\in\mathfrak{M}$, что $\varphi[W]\subset V(\varphi\in\mathcal{E})$. Так как T компактно, то множество его точек вполне ограничено. Согласно определению вполне ограниченного множества можно T разбить на конечное число попарно не пересекающихся подмножеств $\{T_k\}$ $(k=1,2,\dots,n)$ так, что $T_k\times T_k\subset W$. Тогда

$$\varphi[T_k]\times\varphi[T_k]=\hat{\varphi}[T_k^2]\subset\varphi[W]\subset V,$$

следовательно, конечное семейство $\{T_k\}$ $(k=1,2,\dots,n)$ удовлетворяет второму условию теоремы 3.

Итак, мы убедились в выполнении условий теоремы 3, из которой следует, что множество $\mathcal{E}$ компактно в $M(T,X)$. Поскольку $\mathcal{E}\subset C(T,X)\subset M(T,X)$, то $\mathcal{E}$ компактно и в $C(T,X)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть (T,ρ) - компактное метрическое пространство. Поскольку цилиндры B_ε $(\varepsilon>0)$ образуют базис фильтра окружений в равномерности метрического пространства, для справедливости второго условия теоремы достаточно выполнения условия

$2'$) для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $|\varphi(s)-\varphi(t)|\leq\varepsilon$ при всех $\varphi\in\mathcal{E}$; $s,t\in T$, у которых $\rho(s,t)\leq\delta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $X=\mathbb{R}$ со стандартной равномерностью, то, поскольку замкнутый промежуток числовой прямой компактен, условие I теоремы следует из

I') Существует $L>0$ такое, что $|\varphi(t)|\leq L$ для всех $\varphi\in\mathcal{E}$, $t\in T$.

Глава VI. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ I. Векторные пространства

I.I. В этом параграфе весьма кратко будут изложены элементы теории векторных пространств, используемые нами в дальнейшем. Мы предполагаем, что читатель знаком с определениями векторного пространства, подпространства векторного пространства, линейной комбинации элементов векторного пространства, линейной оболочки множества и линейной независимости множества в векторном пространстве. Читателю, не владеющему такими понятиями, рекомендуем обратиться к соответствующей литературе, небольшой список которой помещен в конце текста.

Почти все факты, сформулированные в этом и следующем параграфах, мы не доказываем, и этот пробел читатель может либо восполнить самостоятельно, либо опять же воспользоваться литературой.

Отметим некоторые обозначения. Пусть E,F - множества в векторном пространстве X. Под суммой множеств E,F понимают множество $E+F=\{x+y: x\in E, y\in F\}$. Если $E=\{x\}$, то вместо $\{x\}+F$ будем обычно писать $x+F$. Аналогичный смысл имеют обозначения $E-F$, $E-y$, $-E$. Если A - произвольное множество скаляров и $E\subset X$, то $AE=\{\alpha x: \alpha\in A, x\in E\}$. При $A=\{\alpha\}$ вместо $\{\alpha\}E$ будем просто писать αE и использовать аналогичные символы в других случаях.

Произведение векторных пространств $\{X_t\}$ $(t\in T)$, будучи снабженным покоординатными операциями суммы и умножения на скаляр, в случае, когда поле скаляров одно и то же для всех сомножителей X_t $(t\in T)$, представляет собой векторное пространство. Если, в частности, каждое из X_t $(t\in T)$ совпадает с полем скаляров $\mathcal{R}$, получим, что множество $\mathcal{R}^T$ всех отображений данного множества T в поле $\mathcal{R}$ является векторным пространством над полем $\mathcal{R}$. Операции сложения и умножения на скаляр определяются в $\mathcal{R}^T$ так:

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t); \quad (\alpha x)(t)=\alpha x(t) \quad (x,y\in\mathcal{R}^T, \alpha\in\mathcal{R}, t\in T). \tag{1}$$

Если поле скаляров $\mathcal{R}$ есть либо поле $\mathbf{R}$ вещественных чисел, либо поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, тогда как само векторное пространство $\mathcal{R}^T$, так и любое его подпространство называют *функциональным* векторным пространством.

Напомним, что линейная оболочка множества E в векторном пространстве X совпадает с множеством X_0 всех элементов из X, представимых в виде

$$x=\sum_{u\in\theta}\alpha_u u, \tag{2}$$

где θ - произвольное конечное подмножество E, а $\{x_n\}$ $(u\in\theta)$ - произвольное семейство скаляров.

1.2. Если в определении линейного множества наложить на коэффициенты α и β линейной комбинации $\alpha x+\beta y$ те или иные ограничения, то этим будут выделены разнообразные классы множеств, играющих соответствующую роль в теории векторных пространств.

Рассмотрим векторное пространство X над полем $\mathcal{R}$. Предположим, что в произведении $\mathcal{R}^2$ выделено множество Γ, содержащее пару $(1,0)$ и обладающее свойством симметрии: если $(\alpha,\beta)\in\Gamma$, то и $(\beta,\alpha)\in\Gamma$. Множество E в пространстве X будем называть *Γ-множеством*, если вместе с элементами x,y множество E содержит любую их линейную комбинацию $\alpha x+\beta y$ с такими коэффициентами, что $(\alpha,\beta)\in\Gamma$.

Если Γ состоит только из пар $(1,0)$ и $(0,1)$, то Γ-множество - это произвольное множество пространства X. В другом крайнем случае, когда $\Gamma=\mathcal{R}^2$, класс непустых Γ-множеств совпадает с классом линейных множеств.

Понятно, что линейное множество будет Γ-множеством при любом Γ, и, вообще, если $\Gamma_0\supset\Gamma$, то Γ_0-множество является также и Γ-множеством.

Пересечение любого семейства Γ-множеств само будет Γ-множеством, поэтому, каково бы ни было множество E в данном векторном пространстве X, существует наименьшее Γ-множество, содержащее E. Это Γ-множество называется *Γ-оболочкой* множества E и обозначается символом $H_\Gamma(E)$[+].

+) При конкретных Γ могут применяться и другие термины вместо "Γ-оболочка" и другие символы для ее обозначения.

Поскольку линейная оболочка $\mathcal{L}(E)$ множества E является и Γ-множеством, содержащим E, то $H_\Gamma(E)\subset\mathcal{L}(E)$.

Отметим еще такие факты:

I. Если E_1, E_2 – произвольные Γ-множества векторного пространства X и λ,μ – произвольные скаляры, то множество $E=\lambda E_1+\mu E_2$ также является Γ-множеством.

II. Пусть $\mathfrak{A}$ – фильтрующаяся по возрастанию совокупность Γ-множеств в векторном пространстве X. Тогда $\hat{E}=\bigcup_{E\in\mathfrak{A}} E$ – также Γ-множество в X.

Конкретные классы Γ-множеств мы рассмотрим, предполагая, что поле скаляров R совпадает с $\mathbb{R}$ или с $\mathbb{C}$.

Пусть сначала Γ есть множество всех таких пар $(\alpha,\beta)\in R^2$, что $\alpha+\beta=1$. В этом случае Γ-множества называются а ф ф и н н ы м и. Аналогично изменяются и другие термины. Аффинную оболочку множества $E\subset X$ будем обозначать через $\mathcal{A}ff(E)$.

III. Если Z – аффинное множество, $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – конечное семейство его элементов, а $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – такое семейство скаляров, что

$$\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi=1, \tag{3}$$

то линейная комбинация $\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi x_\xi$ входит в Z.

Действительно, в силу (3) множество Ξ непусто. Если, кроме того, число n его элементов равно единице, то доказываемое утверждение очевидно. Допустим, что оно справедливо для всех $n\le m$, где m – данное натуральное число, и рассмотрим случай, когда Ξ имеет $m+1$ элемент. Поскольку $m+1>1$, среди элементов множества Ξ найдется такой элемент ξ_0, что $\alpha_{\xi_0}\ne 1$. Тогда, полагая $\Xi_0=\Xi\setminus\{\xi_0\}$, имеем

$$\sum_{\xi\in\Xi}\frac{\alpha_\xi}{1-\alpha_{\xi_0}}=(1-\alpha_{\xi_0})^{-1}\sum_{\xi\in\Xi_0}\alpha_\xi=(1-\alpha_{\xi_0})^{-1}(1-\alpha_{\xi_0})=1,$$

так что, в силу предположения, $\sum_{\xi\in\Xi_0}\frac{\alpha_\xi}{1-\alpha_{\xi_0}}x_\xi\in Z$. Но тогда по определению аффинного множества

$$(1-\alpha_{\xi_0})\sum_{\xi\in\Xi}\frac{\alpha_\xi}{1-\alpha_{\xi_0}}x_\xi+\alpha_{\xi_0}x_{\xi_0}=\sum_{\xi\in\Xi}\alpha_\xi x_\xi\in Z.$$

IV. Аффинная оболочка множества E векторного пространства X состоит из всех таких элементов $x\in\mathcal{L}(E)$, для которых в представлении (2) выполнено

$$\sum_{u\in\Theta}\alpha_u=1 \tag{4}$$

В самом деле, согласно предложению III, множество Z всех таких элементов содержится в $\mathcal{A}ff(E)$. Докажем, что Z – аффинное множество. Пусть

$$x=\sum_{u\in\theta_1}\alpha_u u, \quad y=\sum_{u\in\theta_2}\beta_u u \qquad (\theta_1,\theta_2\subset E; \sum_{u\in\theta_1}\alpha_u=\sum_{u\in\theta_2}\beta_u=1)$$

– произвольные элементы из Z. Добавляя, если нужно, к одной и другой линейным комбинациям слагаемые с нулевыми коэффициентами, можно добиться того, что множество θ_1 будет совпадать с θ_2. Понятно, что при таком преобразовании условие (4) не нарушится. Обозначая $\theta=\theta_1=\theta_2$ и беря такие скаляры α,β, что $\alpha+\beta=1$, можем написать

$$\alpha x+\beta y=\alpha\sum_{u\in\theta}\alpha_u u+\beta\sum_{u\in\theta}\beta_u u=\sum_{u\in\theta}(\alpha\alpha_u+\beta\beta_u)u.$$

Но

$$\sum_{u\in\theta}(\alpha\alpha_u+\beta\beta_u)=\alpha\sum_{u\in\theta}\alpha_u+\beta\sum_{u\in\theta}\beta_u=\alpha+\beta=1.$$

Следовательно, $\alpha x+\beta y\in Z$. Поскольку $Z\supset E$, то, будучи аффинным, множество Z содержит и $\mathcal{A}ff(E)$, т.е. с учетом установленного ранее совпадает с $\mathcal{A}ff(E)$.

Класс аффинных множеств простым образом связан с классом линейных множеств.

V. Если X_0 – линейное множество в векторном пространстве X и $x_0\in X$, то множество $Z=x+X_0$ – аффинное.

VI. Если Z – аффинное множество в векторном пространстве X и $x_0\in Z$, то множество $X_0=Z-x_0$ – линейно.

Пусть E состоит из двух элементов u,v. Аффинная оболочка множества E называется п р я м о й, проходящей через u и v. В соответствии с предложением IV соотношение $x\in\mathcal{A}ff(E)=\mathcal{A}ff(u,v)$ равносильно тому, что x можно представить в виде $x=\alpha u+(1-\alpha)v$ при некотором $\alpha\in R$. Заметим, что такое представление единственно.

Рассмотрим теперь $\Gamma=\{(\alpha,\beta)\in R^2: |\alpha|+|\beta|\le 1\}$. В этом случае непустое Γ-множество называется а б с о л ю т н о в ы п у к л ы м. Поскольку всякое абсолютно выпуклое множество содержит нулевой элемент, то существует наименьшее абсолютно выпуклое множество, содержащее данное множество E. Оно называется а б с о л ю т н о в ы п у к л о й о б о л о ч к о й множества E и обозначается через $aco(E)$.

VII. Элемент x векторного пространства X принадлежит абсолютно выпуклой оболочке множества E в том и только в том случае, если x можно представить в виде линейной комбинации (2) с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству

$$\sum_{u\in\theta} |\alpha_u| \leq 1. \tag{5}$$

УШ. Если V - абсолютно выпуклое множество, то

$$\mathcal{L}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV. \tag{6}$$

Заметим, что вместо (6) можно было написать $\mathcal{L}(V) = \sum_{\alpha\in R} \alpha V$.

Следующий класс Γ-множеств получается, если за Γ принять множество $\{(\alpha,\beta)\in R^2 : \alpha\beta = 0, |\alpha|+|\beta| \leq 1\}$. Непустое Γ-множество в этом случае называется у р а в н о в е ш е н н ы м. Уравновешенность множества S векторного пространства X означает, как ясно из определения, что $S \neq \varnothing$ и при любом $\alpha\in R$, таком, что $|\alpha| \leq 1$ и $x\in S$ произведение αx входит в S, иными словами, что $\alpha S \subset S$ ($\alpha\in R$, $|\alpha| \leq 1$). Если E - непустое множество пространства X, то Γ-оболочка множества E, как легко проверить, совпадает с объединением $\bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha E$.

Следующий класс Γ-множеств получается при Γ, состоящем из всех таких пар $(\alpha,\beta)\in R^2$, что α и β - вещественные неотрицательные числа и $\alpha+\beta = 1$. Такое Γ-множество в векторном пространстве X называется в ы п у к л ы м. Понятно, что каждое абсолютно выпуклое множество выпукло. По тем же соображениям и произвольное аффинное множество является выпуклым. В рассматриваемом случае Γ-оболочка множества $E\subset X$ называется в ы п у к л о й о б о л о ч к о й множества E и обозначается символом $co(E)$.

IX. Элемент x векторного пространства X принадлежит выпуклой оболочке $co(E)$ множества $E\subset X$ в том и только в том случае, если x можно представить в виде линейной комбинации (2) с вещественными неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{u\in\theta} \alpha_u = 1. \tag{7}$$

X. Если V - выпуклое множество, α, β - вещественные неотрицательные скаляры, то

$$\alpha V + \beta V = (\alpha+\beta)V. \tag{8}$$

XI. Множество векторного пространства абсолютно выпукло в том и только в том случае, если оно выпукло и уравновешено.

Пусть u и v - различные элементы векторного пространства X. Выпуклая оболочка $co(u,v)$ называется о т р е з к о м с концами u и v. Согласно предложению IX каждый элемент $x\in co(u,v)$

допускает представление в виде

$$x = \alpha u + (1-\alpha)v \qquad (\alpha \in R,\ 0 \leq \alpha \leq 1). \qquad (9)$$

Поскольку отрезок $co(u,v)$ содержится в прямой $\mathcal{A}ff(u,v)$, проходящей через u, v, то представление (9) единственно.

Следующий рассматриваемый нами класс Γ-множеств возникает при Γ, состоящем из всех пар вещественных неотрицательных чисел. Непустое Γ-множество в этом случае называется к о н у с о м (или, говорят еще, в ы п у к л ы м к о н у с о м), а наименьший конус, содержащий данное множество, к о н и ч е с к о й о б о л о ч к о й этого множества. Коническая оболочка какого-либо множества состоит из всевозможных линейных комбинаций элементов этого множества с вещественными неотрицательными коэффициентами.

Если x - отличный от нулевого элемент векторного пространства X, то коническая оболочка одноэлементного множества $\{x\}$ называется л у ч о м, проходящим через x. Он, очевидно, состоит из всех элементов вида αx, где α - произвольный вещественный неотрицательный скаляр. Коническая оболочка произвольного выпуклого множества $E \subset X$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{\alpha \geq 0} \alpha E$.

Отметим, что хотя формально определения выпуклого множества и конуса имеют смысл как в случае $R = \mathbb{R}$, так и при $R = \mathbb{C}$, по существу эти понятия представляют интерес лишь для вещественного случая ($R = \mathbb{R}$). Для таких пространств имеет место, например, следующий факт.

XII. Пусть E - конус в векторном пространстве X над полем вещественных чисел. Линейная оболочка $\mathcal{L}(E)$ множества E состоит из всех элементов $x \in X$, представимых в виде разности элементов из E.

Последний из рассматриваемых конкретных классов Γ-множеств получается при $\Gamma = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1\}$. Множество из этого класса называется к о н и ч е с к и м о т р е з к о м.

XIII. Множество $E \subset X$ представляет собой конический отрезок в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нулевой элемент.

§ 2. Линейные отображения векторных пространств

Рассматривая отображения одного векторного пространства в другое, естественно выделить такой класс отображений, которые "сохраняют" структуру векторного пространства. В этом параграфе мы приведем элементарные сведения о такого рода отображениях, сохранив при этом лаконичность изложения на уровне, принятом в предыдущем параграфе.

2.I. Пусть X и Y - векторные пространства над одним и тем же полем скаляров R. Отображение $\mathcal{A}: X \longrightarrow Y$ называется л и н е й н ы м о п е р а т о р о м из X в Y (или действующим из X в Y), если $\Omega_{\mathcal{A}}$ - линейное множество и для любых $x, y \in \Omega_{\mathcal{A}}$ и $\alpha, \beta \in R$ имеет место равенство

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y). \qquad (I)$$

В случае, когда пространство Y совпадает с полем скаляров R, вместо "линейный оператор" говорят обычно "линейный функционал".

Учитывая, что область определения линейного оператора - линейное множество, можно считать (именно так мы и будем делать), что рассматриваемый линейный оператор определен на всем данном пространстве.

Множество всех линейных операторов, определенных на векторном пространстве X и принимающих значения в векторном пространстве Y, очевидно, представляет собой линейное множество в векторном пространстве всех отображений множества X в Y, так что само является векторным пространством, которое будет обозначено символом $L(X, Y)$.

I. Пусть X, Y - векторные пространства над полем R и $\mathcal{A}$ - отображение множества X в Y. Тогда $\mathcal{A} \in L(X,Y)$ в том и только в том случае, если множество $\mathcal{A} = \{(x,y) \in X \times Y : y = \mathcal{A}(x)\}$ линейно в произведении $X \times Y$ векторных пространств X, Y.

Множество $\mathcal{A}$ иногда называют также графиком отображения $\mathcal{A}$, и в этих терминах можно сказать, что линейность отображения $\mathcal{A} \in Y^X$ равносильна линейности его графика в произведении $X \times Y$.

П. Если $\mathcal{A} \in L(X,Y)$ и E - Γ-множество пространства X, то образ $\mathcal{A}[E]$ является Γ-множеством в пространстве Y. Точно так же, если F - Γ-множество пространства Y, то прообраз $\mathcal{A}^{-1}[F]$ - Γ-множество в пространстве X.

Ш. Пусть X, Y - векторные пространства над полем R. Если E - множество в векторном пространстве X и $\mathcal{A} \in L(X, Y)$, то $\mathcal{A}[H_\Gamma(E)] = H_\Gamma(\mathcal{A}[E])$.

Поскольку множество, состоящее из единственного нулевого элемента пространства Y, линейно, то линеен и его прообраз $\mathcal{A}^{-1}[\mathit{0}]$, который называется я д р о м линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается иногда символом $\ker\mathcal{A}$.

IУ. Оператор $\mathcal{A}\in L(X,Y)$ взаимно однозначен в том и только в том случае, если его ядро состоит из единственного, нулевого, элемента. Если указанное условие выполнено, обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}$ также является линейным оператором, область определения которого, вообще говоря, не совпадает с Y.

Рассмотрим множество E в векторном пространстве X. Пусть Y - векторное пространство с тем же полем скаляров $\mathcal{R}$, что и у X, и φ - отображение множества E в множество Y. Поставим вопрос о том, при каких условиях существует линейный оператор из $\mathcal{L}(E)$ в Y, являющийся распространением отображения φ? Ответом на поставленный вопрос служит следующий факт.

ТЕОРЕМА I (2.6). Для существования линейного оператора $\mathcal{A}:\mathcal{L}(E)\overset{\circ}{\longrightarrow}Y$ такого, что $\mathcal{A}(x)=\varphi(x)$ для любого $x\in E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного подмножества θ множества E и семейства скаляров $\{\alpha_x\}$ $(x\in\theta)$ таких, что $\sum\limits_{x\in\theta}\alpha_x x=\mathbb{O}$, было выполнено $\sum\limits_{x\in\theta}\alpha_x\varphi(x)=\mathbb{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в достаточности условия. Заметим, что $\mathcal{L}(E)$ можно считать совпадающим с X. Имея в виду возможность представления элемента $x\in X$ в виде $x=\sum\limits_{u\in\theta}\alpha_u u$, где θ - конечное подмножество множества E, а $\{\alpha_u\}(u\in\theta)$ - семейство скаляров, определим соответствие $\mathcal{A}:X\longrightarrow Y$, полагая

$$\mathcal{A}=\{(x,y)\in X\times Y : y=\sum_{u\in\theta}\alpha_u\varphi(u)\}.$$

Докажем однозначность $\mathcal{A}$. Действительно, пусть $(x,y_1)\in\mathcal{A}$, $(x,y_2)\in\mathcal{A}$ и $x=\sum\limits_{u\in\theta}\alpha_u u$, $x=\sum\limits_{u\in\theta_1}{}'\beta_u u$ - два представления элемента x в виде (2) из § I, при этом, как нетрудно понять, можно считать, что $\theta=\theta_1$. Тогда $y_1=\sum\limits_{u\in\theta}\alpha_u\varphi(u)$, $y_2=\sum\limits_{u\in\theta}\beta_u\varphi(u)$. Так как $\mathbb{O}=\sum\limits_{u\in\theta}(\alpha_u-\beta_u)u$, то $\mathbb{O}=\sum\limits_{u\in\theta}(\alpha_u-\beta_u)\varphi(u)$ по условию, следовательно, $y_1=y_2$ и $\mathcal{A}$ - однозначное соответствие.

Установим линейность $\mathcal{A}$. Пусть $x_1=\sum\limits_{u\in\theta}\alpha_u u$, $x_2=\sum\limits_{u\in\theta_1}\beta_u u$, $\alpha,\beta\in\mathcal{R}$. Считая, как и прежде, $\theta=\theta_1$, имеем

$$\mathcal{A}(\alpha x_1+\beta x_2)=\sum_{u\in\theta}(\alpha\alpha_u+\beta\beta_u)\varphi(u)=\sum_{u\in\theta}\alpha\alpha_u\varphi(u)+\sum_{u\in\theta}\beta\beta_u\varphi(u)=\alpha\mathcal{A}(x_1)+\beta\mathcal{A}(x_2),$$

так что $\mathcal{A}$ линеен. Учитывая, что проверка необходимости тривиальна, доказательство теоремы будем считать законченным.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Линейное распространение $\mathcal{A}$ отображения φ с данного множества E единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если E - линейно независимое множество в пространстве X , то условие теоремы, очевидно, выполнено. В частности, если E - базис X , то всякое отображение φ распространимо с E на X до линейного оператора.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество значений построенного в теореме оператора $\mathcal{A}$ совпадает с линейной оболочкой $\mathcal{L}(\varphi[E])$ множества $\varphi[E]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если отображение φ взаимно однозначно и множества $E\subset X$ и $\varphi[E]$ линейно независимы, то оператор $\mathcal{A}$ взаимно однозначен.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Образ $\mathcal{A}[X]$ конечномерного пространства X при линейном отображении $\mathcal{A}: X \longrightarrow Y$ имеет конечную размерность, не превосходящую размерности пространства X .

СЛЕДСТВИЕ I. Конечномерные векторные пространства одинаковой размерности изоморфны.

СЛЕДСТВИЕ 2. Векторное n-мерное пространство X над полем $\mathcal{R}$ изоморфно пространству $\mathcal{R}^n$.

Пусть X - конечномерное векторное пространство над полем $\mathcal{R}$ и E - его базис. Положим $Y=\mathcal{R}^E$, а в качестве φ возьмем отображение, сопоставляющее элементу $v\in E$ элемент y_v канонического базиса пространства $\mathcal{R}^E$: $y_v(v)=1,\ y_v(u)=0\ (u\in E,\ u\neq v)$. Линейное распространение Φ отображения φ называется *координатным отображением* (по базису E), значение $\Phi(x)$ - *семейством* (или столбцом) *координат* элемента $x\in X$ и, наконец, скаляр $\Phi(x)(v)$ - соответствующей базисному элементу v *координатой* элемента x. Координатное отображение представляет собой изоморфизм пространства X на пространство $\mathcal{R}^E$. Отображение Λ , обратное к Φ , называют *каноническим вложением* пространства $\mathcal{R}^E$ в пространство X .

Если за X взять теперь пространство $\mathcal{R}^T$, где T - непустое конечное множество, а за E - канонический базис пространства $\mathcal{R}^T$, то, отождествляя соответствующие элементы множества T и базиса E , получим, что φ - тождественное отображение. Следовательно, будет тождественный и координатный изоморфизм.

2.2. Важную в теории векторных пространств конструкцию, с которой связаны многие конкретные пространства, играющие большую роль в приложениях, представляет собой так называемое фактор-пространство.

Рассмотрим произвольное множество X . Множество $\sigma\subset X^2$ называется *отношением эквивалентности* в X , если

I) $(x,x)\in\sigma$ для любого $x\in X$ (свойство рефлексивности);

2) каковы бы ни были $x,y\in X$, соотношения $(x,y)\in\sigma$ и $(y,x)\in\sigma$ равносильны (свойство симметричности);

3) если $x,y,z\in X$, $(x,y)\in\sigma$, $(y,z)\in\sigma$, то $(x,z)\in\sigma$ (свойство транзитивности).

Обычно, когда дано отношение эквивалентности σ , вместо $(x,y)\in\sigma$ пишут $x\sim y$ или, более подробно, $x\sim y\ (mod\,\sigma)$ и говорят при этом, что элементы x и y эквивалентны (по модулю σ). Отношение эквивалентности является, таким образом, "частичным тождеством", когда отождествление элементов происходит по какому-либо одному из многих признаков, которыми обладают элементы рассматриваемого множества.

Пусть σ - отношение эквивалентности в множестве X . Возьмем произвольный элемент $x\in X$ и обозначим через $[x]$ совокупность всех элементов из X , эквивалентных данному: $[x]=\{y\in X : y\sim x\}$. Основываясь на свойствах симметричности и транзитивности, заключаем, что любые два элемента из множества $[x]$ эквивалентны. Из условия рефлексивности вытекает, что $x\in[x]$.

Эквивалентные элементы x_1 и x_2 определяют одно и то же множество $[x_1]=[x_2]$. Если множества $[x_1],[x_2]$ $(x_1,x_2\in X)$ различны, то $[x_1]\cap[x_2]=\varnothing$.

Совокупность всех множеств вида $[x]$ ($x\in X$) образует разбиение данного множества X : различные элементы из данной совокупности не пересекаются, и объединение всех таких множеств совпадает с X . Эта совокупность называется ф а к т о р - м н о ж е с т в о м множества X по отношению эквивалентности σ и обозначается через X/σ (или через $X(mod\,\sigma)$). Элементы фактор-множества называют обычно к л а с с а м и э к в и в а л е н т н о с т и, поскольку они состоят из элементов, попарно эквивалентных. Отображение φ , сопоставляющее элементу $x\in X$ класс эквивалентности $[x]$, содержащий элемент x , называется к а н о н и ч е с к и м о т о б р а ж е н и е м множества X на фактор-множество X/σ .

Пусть f - отображение множества X в некоторое множество Y . Свяжем с f отношение эквивалентности σ_f в множестве X , полагая по определению $x_1\sim x_2\ (mod\,\sigma_f)$, если $f(x_1)=f(x_2)$. Фактор-множество X/σ_f состоит, очевидно, из множеств вида $f^{-1}[y]$, где y - произвольный элемент из множества значений отображения f .

Этим способом можно задать любое отношение эквивалентности в X, достаточно в качестве f взять каноническое отображение φ множества X на фактор-множество X/σ.

Рассмотрим множество X с отношением эквивалентности σ и отображение f множества X в некоторое множество Y. Поставим вопрос: когда отображение f можно "перенести" с X на фактор-множество X/σ? Точнее говоря, когда существует отображение f_σ фактор-множества X/σ в Y такое, что

$$f = f_\sigma \circ \varphi, \tag{2}$$

где φ - каноническое отображение множества X на фактор-множество? Отображение f_σ, связанное с f соотношением (2), называется **снижением** f на фактор-множество, а f - **подъемом** отображения f_σ с фактор-множества X/σ на X.

Снижение f_σ отображения f единственно, так как для произвольного $[x] \in X/\sigma$, взяв $x \in [x]$, будем иметь $[x] = \varphi(x)$, и, следовательно, $f_\sigma([x]) = f(x)$ - правая часть здесь не зависит от f_σ. Также непосредственно из определения следует, что множества значений отображений f_σ и f совпадают.

I. Отображение f имеет снижение f_σ на фактор-множество X/σ в том и только в том случае, если $\sigma \subset \sigma_f$, т.е. если для любых элементов $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 \sim x_2 \pmod{\sigma}$, выполнено $f(x_1) = f(x_2)$.

П. В условиях предложения I снижение f_σ взаимно однозначно в том и только в том случае, если $\sigma = \sigma_f$, т.е. если соотношения $x_1 \sim x_2 \pmod{\sigma}$ и $f(x_1) = f(x_2)$ равносильны.

Допустим теперь, что в множестве X введена структура векторного пространства. Будем говорить, что отношение эквивалентности σ в X согласовано со структурой векторного пространства, если соблюдены следующие два условия:

I) для любых элементов $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ таких, что $x_i \sim y_i$ $(i = 1, 2)$, имеет место $x_1 + x_2 \sim y_1 + y_2$;

2) если $x, y \in X$, $\alpha \in R$ и $x \sim y$, то $\alpha x \sim \alpha y$.

Ш. Пусть X - векторное пространство. Если отношение эквивалентности σ в X согласовано со структурой векторного пространства, то множество $X_0 = \{x \in X : x \sim \Theta\}$ линейно. При этом $x \sim y$ в том и только в том случае, если $x - y \in X_0$.

IУ. Если X_0 - линейное множество в векторном пространстве X, то множество $\sigma = \{(x, y) \in X^2 : x - y \in X_0\}$ является отношением эквивалентности в X, согласованным со структурой векторного пространства.

Заметим, что в условиях предложения IУ множество всех элементов, эквивалентных нулевому, совпадает с X_0 .

Предложения Ш и IУ показывают, что все согласованные со структурой векторного пространства отношения эквивалентности исчерпываются описанными в предложении IУ. В связи с этим мы вместо обозначения X/σ для фактор-множества будем использовать символ X/X_0, где X_0 - линейное множество, определяющее отношение эквивалентности σ .

Рассмотрим векторное пространство X , его подпространство X_0 и фактор-множество X/X_0. В фактор-множестве X/X_0 можно ввести структуру векторного пространства, связанную со структурой векторного пространства X . В качестве условия согласования структур в пространствах X и X/X_0 мы выдвинем требование линейности канонического отображения φ - этим, как можно показать, алгебраические операции в X/X_0 определяются однозначно. При этом сумма элементов $[x_1]$ и $[x_2]$ определяется как класс эквивалентности, который содержит сумму представителей классов $[x_1]$ и $[x_2]$. Оказывается, что произвол в определении суммы исключен. Аналогично обстоит дело и с умножением на скаляр: произведение $\alpha[x]$ есть тот класс эквивалентности, который содержит произведение αx , где x - какой-либо представитель класса $[x]$.

Условимся о терминологии. Фактор-множество X/X_0 , снабженное определенными выше операциями сложения и умножения на скаляр, будем называть ф а к т о р - п р о с т р а н с т в о м пространства X по подпространству X_0 . Каноническое отображение φ пространства X на фактор-пространство X/X_0 будет называться в дальнейшем к а н о н и ч е с к и м г о м о м о р ф и з м о м. Снижение отображения $f: X \longrightarrow Y$ на X/X_0 будем обозначать через f_{X_0}.

ТЕОРЕМА 2(2.6). Пусть X - векторное пространство, X_0 - его подпространство, $\mathcal{A}$ - линейный оператор, определенный на X , со значениями в векторном пространстве Y . Для того, чтобы оператор $\mathcal{A}$ допускал снижение $\mathcal{A}_{X_0}$ на фактор-пространство X/X_0, необходимо и достаточно, чтобы $X_0 \subset \mathcal{A}^{-1}[\Theta] = \ker \mathcal{A}$. Если это условие выполнено, то $\mathcal{A}_{X_0}$ будет линейным оператором.

Снижение $\mathcal{A}_{X_0}$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $X_0 = \ker \mathcal{A}$.

Доказательство этого факта, так же, как и всех других, сформулированных в этом параграфе, мы оставим читателю.

§ 3. Распространение линейных функционалов

В этом параграфе будет установлен фундаментальный факт о линейных функционалах, утверждающий о возможности мажорированного распространения линейного функционала с подпространства векторного пространства на все пространство. Условия мажорирования будут высказаны с использованием вещественных функций, связанных с выпуклыми множествами векторного пространства. Вначале мы рассмотрим элементарные свойства таких функций, тем более, что их роль в анализе не ограничивается использованием в теоремах о распространении.

Напомним, что в качестве поля скаляров $\mathcal{R}$ мы берем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

3.1. Пусть X - векторное пространство над полем $\mathcal{R}$.

ТЕОРЕМА I (3.6). Для любого конического отрезка C в X существует единственная функция $p: X \to \overline{\mathbb{R}}$, принимающая неотрицательные значения и такая, что

$$\{p<t\} \subset tC \subset \{p \le t\} \qquad \text{(I)}$$

для любого $t>0$. Эта функция называется ф у н к ц и о н а л о м М и н к о в с к о г о (множества C) +).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим семейство $\{\mathcal{U}_t\}$ $(t\in\mathbb{R})$ подмножеств X следующим образом:

$$\mathcal{U}_t = \begin{cases} tC, & \text{если } t>0 \\ \varnothing, & \text{если } t\le 0 \end{cases} .$$

и покажем, что это семейство удовлетворяет условиям теоремы I(6.5), а именно, проверим, что $\{\mathcal{U}_t\}$ $(t\in\mathbb{R})$ - возрастающее.

Так как $\mathbb{O}\in C$ (см. предложение XШ (I.3)), то, используя выпуклость C, для $x\in C$ и $0\le\alpha\le 1$ получаем $\alpha x = \alpha x + (1-\alpha)\mathbb{O}\in C$. Пусть $t_1, t_2\in\mathbb{R}$ и $t_1<t_2$. Если $t_1\le 0$, то включение $\mathcal{U}_{t_1}\subset\mathcal{U}_{t_2}$ очевидно. Рассмотрим поэтому случай $t_1>0$. Возьмем произвольно $x\in t_1 C$ и запишем его в виде $x=t_1x'=t_2\left(\frac{t_1}{t_2}x'\right)$, где $x'\in C$. Поскольку $0<\frac{t_1}{t_2}\le 1$, то по доказанному вместе с x' в множество C входит и элемент $\frac{t_1}{t_2}x'$, откуда $x=t_2\left(\frac{t_1}{t_2}x'\right)\in t_2 C$, и включение $\mathcal{U}_{t_1}\subset\mathcal{U}_{t_2}$ установлено.

Воспользовавшись леммой I (3.5), заключаем, что существует функция p_0, удовлетворяющая соотношению $\{p_0<t\}\subset\mathcal{U}_t\subset\{p_0\le t\}$ $(t\in\mathbb{R})$,

---

+) Иногда p называют также к а л и б р о в о ч н о й ф у н к ц и е й множества C.

а поскольку $\mathbb{R}$ плотно в $\overline{\mathbb{R}}$, на основании следствия I упомянутой леммы такая функция единственна. Так как $\{p_0<t\}=\{p_0\le t\}=\varnothing=\mathcal{U}_t$ для каждого $t\le 0$, из доказанного без труда вытекает существование и единственность положительной функции, удовлетворяющей (I).

Функционал Минковского множества C при условиях на множество C, фигурирующих в теореме, может, вообще говоря, принимать значение $+\infty$. Ниже мы сформулируем условие, которое обеспечит конечность функционала Минковского. Для этого нам потребуется введение некоторых понятий.

Пусть E – множество в векторном пространстве X. Говорят, что множество $S\subset X$ п о г л о щ а е т множество E, если можно указать вещественное $\varepsilon>0$ такое, что $\alpha E\subset S$ при всех α, у которых $|\alpha|\le\varepsilon$. Если $E=\{x\}$ состоит из единственной точки x и S поглощает E, то в этом случае говорят, что S поглощает точку x. Множество S, поглощающее каждую точку $x\in X$, называют п о г л о щ а ю щ и м.

I. Рассмотрим векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и предположим, что выпуклое множество $\mathcal{D}\subset X$ удовлетворяет условию: для любого $x\in X$ можно указать $z>0$ такое, что $zx\in\mathcal{D}$. Тогда $\mathcal{D}$ – поглощающее множество.

В самом деле, возьмем $z_1, z_2>0$ так, что $z_1x\in\mathcal{D}$, $z_2x\in\mathcal{D}$, и обозначим $z=\min(z_1,z_2)$. Очевидно, $\mathbb{0}\in\mathcal{D}$, а тогда, в силу выпуклости $\mathcal{D}$, имеем $\lambda(z_1x)+(1-\lambda)\mathbb{0}\in\mathcal{D}$, $\lambda(-z_2x)+(1-\lambda)\mathbb{0}\in\mathcal{D}$ $(0\le\lambda\le 1)$, откуда $\beta x\in\mathcal{D}$ при $|\beta|\le z$, следовательно, $\mathcal{D}$– поглощающее множество.

II. Пусть X – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Предположим, что абсолютно выпуклое множество $\mathcal{D}\subset X$ и точка $x\in X$ таковы, что для некоторого $z>0$ выполнено $zx\in\mathcal{D}$. Тогда множество $\mathcal{D}$ поглощает точку x.

Заметим, прежде всего, что поскольку $\mathcal{D}$ абсолютно выпукло, то $\mathbb{0}\in\mathcal{D}$. Далее, если $zx\in\mathcal{D}$, то, опять же в силу абсолютной выпуклости $\mathcal{D}$, получаем, что $\lambda zx\in\mathcal{D}$ при $|\lambda|\le 1$. Следовательно, $\beta x\in\mathcal{D}$, где $\beta=\lambda z$, $|\beta|\le z$, тем самым $\mathcal{D}$ поглощает точку x.

III. Функционал Минковского выпуклого поглощающего множества C принимает конечные значения.

Согласно следствию 2 из леммы 1 (3.5) мы должны доказать, что $\bigcup\limits_{t\ge 0} tC=X$. В самом деле, если x - произвольный элемент множества X, то, поскольку C – поглощающее, найдется $\alpha>0$ такое, что $\beta x\in C$ при всех таких β, у которых $|\beta|\le\alpha$. В частности, $\alpha x\in C$, откуда $x\in\frac{1}{\alpha}C$, следовательно, $x\in\bigcup\limits_{t\ge 0} tC$.

В следующем предложении будут установлены основные свойства функционала Минковского.

IУ. Пусть p – функционал Минковского некоторого конического отрезка C. Тогда

1) $p(x)\geqslant 0$ для всех $x\in X$;

2) p положительно однороден, т.е. $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ для всех $x\in X$ и $\alpha\geqslant 0$;

3) p субаддитивен, т.е. $p(x+y)\leqslant p(x)+p(y)$ для любых $x,\ y\in X$.

Первое свойство следует непосредственно из определения. Проверим второе свойство. Пусть сначала $\alpha=0$. Так как $\{p\leqslant 0\}=\bigcap\limits_{t>0}\mathcal{U}_t=\bigcap\limits_{t>0}tC$ и $\mathbb{O}\in tC$, то $\mathbb{O}\in\{p\leqslant 0\}$, или $p(\mathbb{O})\leqslant 0$, что вместе с соотношением $p(\mathbb{O})\geqslant 0$ дает $p(\mathbb{O})=0$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha>0$. Определим функцию q, полагая $q: x\to\frac{1}{\alpha}p(\alpha x)$, и докажем, что q является функционалом Минковского множества C. Для $t>0$ из неравенства $\frac{1}{\alpha}p(\alpha x)<t$ следует $p(\alpha x)<\alpha t$, поэтому $\alpha x\in\alpha tC$, откуда $x\in tC$, чем доказано включение $\{q<t\}\subset tC$ для $t>0$.

Для доказательства соотношения $tC\subset\{q\leqslant t\}$ возьмем точку $x\in\{q>t\}$. Тогда $p(\alpha x)>\alpha t$ и $\alpha x\bar{\in}\alpha tC$, откуда $x\bar{\in}tC$, т.е. $tC\subset\{q\leqslant t\}$.

В силу единственности функционала Минковского получаем $p(x)=\frac{1}{\alpha}p(x)$, т.е. требуемое равенство: $\alpha\,p(x)=p(\alpha x)$.

Приступая к доказательству последнего свойства, рассмотрим произвольные элементы x, y из X. Обозначим $p(x)=\tau'$, $p(y)=\tau''$ и возьмем какие-либо $t', t''\in\mathbb{R}$ так, что $t'>\tau'$, $t''>\tau''$. Тогда $x\in t'C$, $y\in t''C$, и имеет место равенство

$$\frac{1}{t'+t''}(x+y)=\frac{t'}{t'+t''}\;\frac{1}{t'}\,x+\frac{t''}{t'+t''}\quad\frac{1}{t''}\,y.$$

Но $\frac{t'}{t'+t''},\ \frac{t''}{t'+t''}>0$, $\frac{t'}{t'+t''}+\frac{t''}{t'+t''}=1$, и так как множество C выпукло, то $\frac{1}{t'+t''}(x+y)\in C$ т.е. $x+y\in(t'+t'')\,C$, следовательно, $p(x+y)\leqslant\leqslant t'+t''$. В силу произвольности $t',\ t''$ получаем $p(x+y)\leqslant\tau'+\tau''=$ $=p(x)+p(y)$. Предложение доказано.

Оказывается, свойства функционала Минковского, отмеченные в последнем предложении, полностью его характеризуют. Точнее, имеет место следующий факт.

У. Пусть q – вещественная функция, принимающая положительные значения и обладающая свойствами положительной однородности и субаддитивности. Тогда множества $C_0=\{q<1\}$, $C_1=\{q\leq 1\}$ выпуклы, и $\mathbb{O}\in C_0$. Функция q представляет собой функционал Минковского любого выпуклого множества C, удовлетворяющего соотношению $C_0\subset C\subset C_1$.

Пусть $x,y\in C_0$ и скаляры α,β таковы, что $\alpha,\beta\geq 0$, $\alpha+\beta=1$. Покажем, что $\alpha x+\beta y\in C_0$. Действительно, поскольку $x,y\in C_0$, то из свойств функционала q следует, что

$$q(\alpha x+\beta y)\leq \alpha q(x)+\beta q(y)<\alpha+\beta=1.$$

Аналогично доказывается и выпуклость множества C_1. Включение $\mathbb{O}\in C_0$ очевидно.

Убедимся в том, что q является функционалом Минковского любого выпуклого множества C, где $C_0\subset C\subset C_1$, т.е. убедимся в справедливости соотношения

$$\{q<t\}\subset tC\subset\{q\leq t\}$$

для $t>0$. Пусть $x\in X$ и $t\in\mathbb{R}$ таковы, что $q(x)<t$. Тогда $q(\frac{1}{t}x)=$ $=\frac{1}{t}q(x)<1$, откуда $\frac{1}{t}x\in C_0\subset C$, следовательно, $x\in tC$.

Возьмем теперь x и t такие, что $q(x)>t>0$. В этом случае $tq(\frac{1}{t}x)=q(t\frac{1}{t}x)=q(x)>t$, а тогда $q(\frac{1}{t}x)>1$ и $\frac{1}{t}x\bar{\in}C_1$. Из включения $C\subset C_1$ следует $\frac{1}{t}x\bar{\in}C$, откуда $x\bar{\in}tC$. Итак, $tC\subset\{q\leq t\}$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в условиях предложения функция q конечна, то множества C_0, C_1 поглощающие.

В самом деле, пусть x - произвольная точка из X. Возьмем $\delta>0$ так, что $\delta q(x)<1$. Тогда $q(\delta x)=\delta q(x)<1$, следовательно, $\delta x\in C_0$, и, в силу предложения П, множество C_0 поглощает точку x, а в силу произвольности x - является поглощающим множеством. Этим свойством обладает также и множество C_1, поскольку $C_0\subset C_1$.

Положительно однородную субаддитивную функцию p на X называют **сублинейным функционалом** на X. Результат последнего предложения означает, что положительный сублинейный функционал p на X представляет собой функционал Минковского любого такого выпуклого множества C, что $\{p<1\}\subset C\subset$ $\subset\{p\leq 1\}$.

Пусть p - положительный сублинейный функционал и r - строго положительное число. Множество $S_r^{(p)}=\{p\leq r\}$ называется (замкнутым) **шаром** радиуса r, соответствующим функционалу p +).

+) Указание на функционал p иногда будет опущено.

Множество $\overset{o}{S}{}_r^{(p)} = \{p < 1\}$ называется **открытым шаром** радиуса r, соответствующим функционалу p. Причины такой терминологии станут яснее несколько позже.

Для $x \in S_r$ из положительной однородности p следует $p(\frac{1}{r}x) = \frac{1}{r}p(x) \le 1$, так что $x \in rS_1$. Обратно, если $y \in rS_1$, то $\frac{1}{r}p(y) = p(\frac{1}{r}y) \le 1$, откуда $y \in S_r$. Таким образом,

$$S_r = rS_1 \qquad (r > 0). \tag{2}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для открытых шаров.

Рассмотрим положительные сублинейные функционалы p, q. Поскольку p, q являются функционалами Минковского множеств $S_1^{(p)}$, $S_1^{(q)}$, то, как следует из предложения I (У.3.I) и определения функционала Минковского, соотношение $p(x) \le q(x)$ $(x \in X)$ равносильно включению $S_1^{(p)} \supset S_1^{(q)}$. Понятно, что в последнем рассуждении замкнутые шары можно заменить открытыми.

Говорят, что функционал q **мажорирует** функционал p, и записывают это в виде $p \prec q$ или $q \succ p$, если можно указать такое число $K > 0$, что $p(x) \le Kq(x)$ для всех $x \in X$. Функционалы p, q называют **эквивалентными**, если $p \prec q$ и $q \prec p$; при этом используют обозначение $p \sim q$.

Учитывая, что Kq – положительный сублинейный функционал, непосредственно из определений и соотношения (2) получаем справедливость такого факта.

УI. Функционал q мажорирует функционал p в том и только в том случае, если найдется число $r > 0$ такое, что $S_1^{(p)} \supset S_r^{(q)}$.

Функционал Минковского абсолютно выпуклого множества обладает более сильным по сравнению с положительной однородностью свойством.

УII. Функционал Минковского p абсолютно выпуклого множества C удовлетворяет соотношению

$$p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) \tag{3}$$

для всех $\alpha \in R$, $x \in X$.

Для $\alpha = 0$ свойство (3) очевидно. Пусть $\alpha \ne 0$. Рассмотрим функцию $q: x \longmapsto \frac{1}{|\alpha|}p(\alpha x)$ и покажем, что q – функционал Минковского множества C. Действительно, если $q(x) < t$ $(x \in X,\ t \in R)$, то $p(\alpha x) < |\alpha| t$, откуда $\alpha x \in |\alpha| t C$ и $\frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{t}x \in C$. В силу уравновешенности множества C (см. пункт I.2) получаем $\frac{1}{t}x \in C$, или $x \in tC$.

Пусть теперь $x \bar{\in} \{q \le t\}$, т.е. $p(\alpha x) > t|\alpha|$. Тогда $\alpha x \bar{\in} t|\alpha| C$ и

$\frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{t}x\bar{\in}C$. Отсюда и из уравновешенности C следует, что $\frac{|\alpha|}{\alpha}\frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{1}{t}x\bar{\in}C$, или $\frac{1}{t}x\bar{\in}C$, и, наконец, $x\bar{\in}tC$. Таким образом, $tC\subset\{q\le 1\}$, следовательно, q - функционал Минковского множества C. Из свойства единственности такого функционала имеем равенство $p(x)=\frac{1}{|\alpha|}p(\alpha x)$ $(x\in X, \alpha\in R, \alpha\ne 0)$, что и требовалось.

УШ. Если положительная субаддитивная функция p такова, что $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$, то множества $\overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}=\{p<1\}$, $S_1^{(p)}=\{p\le 1\}$ абсолютно выпуклы.

Нехитрое доказательство этого факта читатель без труда восстановит самостоятельно.

Вещественная субаддитивная функция p на X, удовлетворяющая условию (3), называется **полунормой** на X. Таким образом, функция p - полунорма на X, если она обладает свойствами

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x) \qquad (\alpha\in R,\ x\in X) \tag{3}$$

$$p(x+y)\le p(x)+p(y) \qquad (x,y\in X). \tag{4}$$

Нетрудно понять, что одновременное выполнение соотношений (3), (4) равносильно справедливости неравенства

$$p(\alpha x+\beta y)\le|\alpha|p(x)+|\beta|p(y) \qquad (\alpha,\beta\in R,\ x,y\in X). \tag{5}$$

Из определения полунормы сразу следует ее положительность: $0=p(x-x)\le p(x)+p(-x)=2p(x)$. Таким образом, полунорма, будучи положительным сублинейным функционалом, является функционалом Минковского любого такого выпуклого множества C, что $\overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}\subset C\subset S_1^{(p)}$, где $\overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}$, $S_1^{(p)}$ - открытый и замкнутый шары, отвечающие полунорме p.

Как следует из предложения УШ, шары $\overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}$, $S_1^{(p)}$ - абсолютно выпуклые множества.

Среди полунорм на X выделяют обладающие свойством

$$X_p=p^{-1}[\mathbb{O}]=\{x\in X: p(x)=0\}=\{\mathbb{O}\}. \tag{6}$$

Полунорму, удовлетворяющую соотношению (6), называют **нормой** на X. Иначе можно сказать, что нормой является такая полунорма p, у которой равенство $p(x)=0$ возможно лишь при $x=\mathbb{O}$.

3.2. Здесь мы докажем одну из центральных теорем функционального анализа, известную под названием теоремы Банаха о распространении линейного функционала с подпространства векторного пространства.

ТЕОРЕМА 2 (3.6). Пусть X - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и X_0 - подпространство в X.

Предположим, что на X задан сублинейный функционал p, а на X_0 – линейный функционал f_0 такие, что

$$f_0(x) \le p(x) \qquad (x \in X_0).$$

Тогда существует линейный функционал f, определенный на всем X, служащий распространением функционала f_0 (т.е. $f(x) = f_0(x)$ для $x \in X_0$) и такой, что

$$f(x) \le p(x) \qquad (x \in X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда X является "элементарным" расширением подпространства X_0, т.е. когда найдется элемент $x_0 \in X$ такой, что всякий $x \in X$ представим в виде $x = \alpha x_0 + x'$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $x' \in X_0$. Отметим, что если $x_0 \bar{\in} X_0$, то такое представление единственно. В самом деле, если $x = \alpha x_0 + x' = \beta x_0 + x''$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x', x'' \in X_0)$ и $\alpha = \beta$, то $x' = x''$, а если $\alpha \ne \beta$, то $x_0 = \frac{1}{\alpha - \beta}(x'' - x)$, что невозможно, поскольку $x_0 \bar{\in} X_0$.

В предположении $x_0 \bar{\in} X_0$ для рассматриваемого случая докажем существование функционала f, удовлетворяющего требованиям теоремы.

Пусть x', x'' – два элемента из X_0. Так как

$$f_0(x') + f_0(x'') = f_0(x' + x'') \le p(x' + x'') \le p(x' + x_0) + p(x'' - x_0),$$

то имеет место неравенство

$$-p(x'' - x_0) + f_0(x'') \le p(x' + x_0) - f_0(x'),$$

из которого следует

$$\sup_{x'' \in X_0} [-p(x'' - x_0) + f_0(x'')] \le \inf_{x' \in X_0} [p(x' + x_0) - f_0(x')].$$

Возьмем произвольно число m, удовлетворяющее неравенствам

$$\sup_{x'' \in X_0} [-p(x'' - x_0) + f(x'')] \le m \le \inf_{x' \in X_0} [p(x' + x_0) - f_0(x')], \tag{5}$$

и определим на X функционал

$$f : x \mapsto \alpha m + f_0(x') \quad (x = \alpha x_0 + x' \in X).$$

Чтобы проверить его линейность, возьмем два элемента $x = \alpha x_0 + x'$, $y = \beta y_0 + y'$ пространства X и рассмотрим значение f на линейной комбинации $z = \lambda x + \mu y$ элементов x, y. Поскольку

$$\lambda x + \mu y = \lambda(\alpha x_0 + x') + \mu(\beta x_0 + y') = (\lambda\alpha + \mu\beta)x_0 + \lambda x' + \mu y',$$

то

$$f(z) = (\alpha\lambda + \mu\beta)m + \lambda f_0(x') + \mu f_0(y') =$$

$$= \lambda(\alpha m + f_0(x')) + \mu(\beta m + f_0(y')) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

и f линеен.

Докажем, что для любого $x \in X$ выполнено неравенство $f(x) \le p(x)$. Пусть $x = \alpha x_0 + x'$. Если $\alpha = 0$, то $x = x'$, и требуемое неравенство содержится в условиях теоремы. Предположим, что $\alpha>0$. Тогда, представив x в виде $x=\alpha(x_0+\frac{1}{\alpha}x')$, в силу соотношения (5) имеем

$$f(x)=\alpha(m+f_0(\tfrac{1}{\alpha}x'))\leq\alpha(p(x_0+\tfrac{1}{\alpha}x')-f_0(\tfrac{1}{\alpha}x')+f_0(\tfrac{1}{\alpha}x'))=p(x).$$

В случае же $\alpha<0$, опять в силу (5), получаем

$$f(x)=-\alpha(f_0(\tfrac{1}{-\alpha}x')-m)\leq-\alpha(f_0(\tfrac{1}{-\alpha}x')+p(\tfrac{1}{\alpha}x-x_0)-f_0(\tfrac{1}{-\alpha}x'))=p(x),$$

т.е. неравенство $f(x)\leq p(x)$ выполнено для любого $x\in X$.

Снимем теперь условие, поставленное в начале доказательства, т.е. будем считать X_0 произвольным подпространством в X. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество функционалов f, каждый из которых задан на некотором подпространстве в X, является распространением функционала f_0, и для точек $x\in\Omega_f$ имеет место неравенство $f(x)\leq p(x)$. Покажем, что в $\mathcal{F}$ входит функционал, областью определения которого служит все X.

Введем в $\mathcal{F}$ отношение порядка, именно, будем считать $f'\geq f''$, если f' является распространением f''. Убедимся в том, что упорядоченное множество $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям леммы Цорна. Пусть $\mathcal{F}_0$ – непустое линейно упорядоченное подмножество множества $\mathcal{F}$. Определим соответствие $\hat{f}$ из X в $\mathbb{R}$ соотношением $\hat{f}=\bigcup_{f\in\mathcal{F}_0}f$ и покажем, что $\hat{f}$ – верхняя граница множества $\mathcal{F}_0$. Для этого мы должны показать, что $\hat{f}\in\mathcal{F}$, т.е. проверить однозначность, линейность $\hat{f}$ и выполнение неравенства $\hat{f}(x)\leq p(x)$ $(x\in\Omega_{\hat{f}})$.

Предположим, что $\lambda_1,\lambda_2\in\hat{f}[x]$ $(x\in\Omega_{\hat{f}})$. По определению $\hat{f}$ это означает, что существуют функционалы $f_1, f_2\in\mathcal{F}_0$ такие, что $\lambda_1=f_1(x)$, $\lambda_2=f_2(x)$. Так как $\mathcal{F}_0$ – линейно упорядоченное множество, то один из функционалов f_1, f_2 является распространением другого, а тогда $f_1(x)=f_2(x)$, т.е. $\lambda_1=\lambda_2$ и $\hat{f}$ однозначно.

Далее, поскольку каждое из множеств $f=\{(x,f(x)):f\in\mathcal{F}_0, x\in\Omega_f\}$ линейно, а совокупность всех таких множеств фильтруется по возрастанию, то, в силу предложения П (I.2), множество $\hat{f}=\bigcup_{f\in\mathcal{F}_0}f$ линейно, следовательно, функционал $\hat{f}$ линеен.

Для доказательства неравенства $\hat{f}(x)\leq p(x)$, взяв $x\in\Omega_{\hat{f}}$, найдем функционал $f\in\mathcal{F}_0$ такой, что $\hat{f}(x)=f(x)$, и заметим, что для f требуемое неравенство выполнено, а тогда $\hat{f}(x)=f(x)\leq p(x)$.

Итак, $\hat{f}$ – верхняя граница множества $\mathcal{F}_0$, тем самым $\mathcal{F}$ удовлетворяет лемме Цорна (см. пункт I (3.6)), а тогда, согласно результату этой леммы, в $\mathcal{F}$ существует максимальный элемент $\hat{\hat{f}}$, мажорирующий f_0. Покажем, что $\hat{\hat{f}}$ - искомый функционал. Для этого, учитывая определение $\mathcal{F}$, достаточно убедиться в том, что $\Omega_{\hat{\hat{f}}}=X$. Предположим, что это не так, и, взяв $x_0\in X\setminus\Omega_{\hat{\hat{f}}}$, воспользуемся первой частью доказательства теоремы, из которой следует, что $\hat{\hat{f}}$ можно распространить с сохранением всех условий теоремы на подпространство в X, более широкое чем $\Omega_{\hat{\hat{f}}}$, а это противоречит максимальности $\hat{\hat{f}}$. Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема, с некоторыми изменениями в формулировке, остается справедливой и в случае, если X - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Учитывая, что $\mathbb{R}$ можно считать содержащимся в $\mathbb{C}$, с пространством $(X,\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$ свяжем пространство $(X,\mathbb{R})$ над полем $\mathbb{R}$, в котором групповую операцию сложения оставим прежней, а в качестве операции умножения на скаляр возьмем сужение на $\mathbb{R}\times X$ соответствующей операции в $(X,\mathbb{C})$.

Пусть f - комплекснозначный линейный функционал на $(X,\mathbb{C})$. Он определяет линейный функционал $\varphi: x\mapsto \operatorname{Re} f(x)$ на пространстве $(X,\mathbb{R})$. Оказывается, функционал f можно однозначно восстановить по φ.

ЛЕММА I. Пусть φ - линейный функционал на $(X,\mathbb{R})$. Существует единственный линейный функционал f на $(X,\mathbb{C})$ такой, что $\varphi(x)=\operatorname{Re} f(x)$ $(x\in X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из φ, определим на $(X,\mathbb{C})$ функционал f соотношением

$$f: x\mapsto \varphi(x)-i(\varphi(ix)).$$

Для доказательства его линейности достаточно отметить справедливость следующего равенства:

$$f(ix)=\varphi(ix)-i\varphi(-x)=i(\varphi(x)-i\varphi(ix))=if(x).$$

ЛЕММА 2. Пусть f - линейный функционал на $(X,\mathbb{C})$ и p - полунорма на этом пространстве. Тогда $|f(x)|\le p(x)$ $(x\in X)$ в том и только в том случае, если $\varphi(x)\le p(x)$ $(x\in X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В одну сторону утверждение леммы очевидно. Обратно, предположим, что $\varphi(x)\le p(x)$ $(x\in X)$, и рассмотрим значение f на некотором элементе $x\in X$. Если $f(x)=0$, результат леммы вновь очевиден, поэтому предположим, что $f(x)\ne 0$. Обозначим $\theta=\frac{|f(x)|}{f(x)}$. Тогда $|f(x)|=\theta f(x)$, т.е. значения $\theta f(x)=f(\theta x)$ вещественны, тем самым $|f(x)|=f(\theta x)=\varphi(\theta x)$. Из данного в условии леммы неравенства получаем

$$|f(x)|=f(\theta x)=\varphi(\theta x)\le p(\theta x)=|\theta|p(x),$$
и остается лишь заметить, что $|\theta|=1$.

Следующий факт, как и теорема 2, носит название теоремы Банаха о распространении линейного функционала. Эти теоремы разнятся тем, что теорема 2 имеет место в случае векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, тогда как следующая теорема справедлива также и в случае, если рассматривается векторное пространство над полем комплексных чисел.

ТЕОРЕМА 3 (3.6). Пусть X - векторное пространство над полем R вещественных или комплексных чисел, X_0- подпространство в X. Предположим, что на X_0 задан линейный функционал f_0, а на X - полунорма p такие, что
$$|f_0(x)|\le p(x) \qquad (x\in X_0).$$
Тогда существует линейный функционал f, определенный на всем X, служащий распространением функционала f_0 и такой, что
$$|f(x)|\le p(x) \qquad (x\in X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, тогда результат теоремы очевидным образом следует из теоремы 2. Ограничимся поэтому рассмотрением того случая, когда X - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Определим на $(X_0,\mathbb{R})$ линейный функционал $\varphi_0=\mathrm{Re}\, f_0$. В силу леммы 2 имеем $|\varphi_0(x)|\le p(x)$, тем более $\varphi_0(x)\le p(x)$. Согласно теореме 2 существует вещественный линейный функционал φ, определенный на $(X,\mathbb{R})$, являющийся распространением φ_0 и такой, что $\varphi(x)\le p(x) (x\in X)$. Воспользовавшись леммой 1, построим по φ функционал f на $(X,\mathbb{C})$ и докажем, что f есть распространение f_0. Действительно, если $x\in X_0$, то $ix\in X_0$, и
$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix)=f_0(x).$$
Кроме того, в силу леммы 2 имеем
$$|f(x)|\le p(x),$$
так что f - требуемый функционал, и доказательство теоремы завершено.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X - векторное пространство над полем R и p - полунорма на X. Для любого элемента $x_0\in X$ существует такой линейный функционал f, что $f(x_0)=p(x_0)$ и $|f(x)|\le p(x)$ для всех $x\in X$.

Действительно, рассмотрим векторное подпространство $X_0=\{\lambda x_0\}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ в X и определим на X_0 линейный функционал f_0, полагая $f_0(\lambda x_0)=\lambda\cdot p(x_0)$. Поскольку для $x=\lambda x_0\in X_0$ имеем $|f_0(x)|=|\lambda|p(x_0)=$ $=p(\lambda x_0)=p(x)$, то согласно теореме Банаха существует линейный функционал f на X, служащий распространением f_0 и удовлетворяющий соотношению $|f(x)|\le p(x)$ $(x\in X)$. Осталось заметить, что $f(x_0)=p(x_0)$, и следствие доказано.

§ 4. Топологические векторные пространства

4.I. Рассмотрим векторное пространство X над полем $\mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ – по-прежнему одно из множеств $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что на X задана топология τ. Снабдим множества $X\times X$ и $\mathcal{R}\times X$ топологией произведения, где $\mathcal{R}$ берется со "стандартной" топологией. В этой ситуации топология τ называется л и н е й н о й (или согласованной со структурой векторного пространства), если операции суммы $(x,y)\mapsto x+y$ и умножения на скаляр $(\alpha,x)\mapsto\alpha x$ непрерывны. Упорядоченная пара (X,τ), в которой τ – линейная топология, называется т о п о л о г и ч е с к и м в е к т о р н ы м п р о с т р а н с т в о м +).

Как и прежде, допуская вольность речи и опуская явное указание топологии τ, мы нередко будем говорить о топологическом векторном пространстве X.

Рассмотрим топологическое векторное пространство X и векторное подпространство X_0 в X. Операции сложения и умножения на скаляр в подпространстве X_0 непрерывны относительно индуцированных из $X\times X$ и $\mathcal{R}\times X$ топологий на $X_0\times X_0$ и $\mathcal{R}\times X_0$ (см. П (5.2.4)), так что линейная топология на X индуцирует на векторное подпространство X_0 линейную топологию. Векторное подпространство X_0 с индуцированной из X топологией называется п о д п р о с т р а н с т в о м топологического векторного пространства X.

Приведем несколько несложных фактов, вытекающих непосредственно из условий согласования топологической и векторной структур в X.

I. Пусть x_0 – произвольный элемент топологического векторно-

---

+) Иногда используют термин "л и н е й н о е т о п о л о г и ч е с к о е п р о с т р а н с т в о".

го пространства X. Тогда сдвиг $f_{x_0}: x \mapsto x_0 + x$ на x_0 – гомеоморфизм X на себя. В частности, если $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}_0$, то $x_0 + \mathcal{U} \in \mathfrak{W}_{x_0}$.

II. Для каждого ненулевого $\alpha \in R$ гомотетия $g_\alpha: x \mapsto \alpha x$ – гомеоморфизм пространства X на себя. В частности, если $\mathcal{U}$ – окрестность некоторой точки $x \in X$, то $\alpha\mathcal{U}$ – окрестность точки αx.

Результаты первых предложений следуют непосредственно из определений и предложения III (5.2.4).

Из предложения I следует, что линейная топология на X полностью определяется заданием фильтра (или базиса фильтра) окрестностей какой-либо фиксированной точки. Обычно в качестве такой точки берут $\mathbb{O}$, в связи с чем уместно ввести особое обозначение для фильтра окрестностей нуля. Этот фильтр мы будем обозначать просто через $\mathfrak{W}$, опуская индекс $\mathbb{O}$.

III. В топологическом векторном пространстве фильтр окрестностей нуля состоит из поглощающих множеств.

Действительно, фиксируем $x \in X$ и, используя непрерывность отображения $\alpha \mapsto \alpha x$ в точке $\alpha = 0$, по произвольной окрестности $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}$ найдем $\tau > 0$ такое, что $\alpha x \in \mathcal{U}$ для $\alpha \in R$, у которых $|\alpha| \le \tau$. Отсюда $x \in \beta\mathcal{U}$, если $|\beta| \ge \tau^{-1}$, т.е. $\mathcal{U}$ – поглощающее множество.

IV. Для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}$ найдется $V \in \mathfrak{W}$ такая, что $V + V \subset \mathcal{U}$.

В самом деле, так как отображение $(x, y) \mapsto x + y$ непрерывно в точке $(\mathbb{O}, \mathbb{O})$, можно указать окрестности V_1, V_2 нуля такие, что $V_1 + V_2 \subset \mathcal{U}$. Система $\mathfrak{W}$ фильтруется по убыванию, поэтому, взяв V так, что $V \subset V_1 \cap V_2$, имеем $V + V \subset V_1 + V_2 \subset \mathcal{U}$, что и требовалось.

V. Для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathfrak{W}$ и натурального n найдется $V \in \mathfrak{W}$ такая, что $V + V + \ldots + V \subset \mathcal{U}$, где в сумме участвует n слагаемых.

Действительно, если $n = 2^k$ $(k \in \mathbb{N})$, то сформулированный факт легко получить, применяя принцип индукции и предложение IV. Пусть теперь n – натуральное число, не являющееся степенью двойки. Возьмем $m \in \mathbb{N}$ так, что $n < 2^m$, и найдем $V \in \mathfrak{W}$, для которой $\underbrace{V + V + \ldots + V}_{2^m} \subset \mathcal{U}$. Если $x \in \underbrace{V + V + \ldots + V}_{n}$, т.е. если $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$, то поскольку $\mathbb{O} \in V$, а x можно представить в виде $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \mathbb{O} + \ldots + \mathbb{O}$ (в правой части 2^m слагаемых), получаем, что $x \in \underbrace{V + V + \ldots + V}_{2^m}$, откуда $\underbrace{V + V + \ldots + V}_{n} \subset \underbrace{V + V + \ldots + V}_{2^m} \subset \mathcal{U}$.

что и требовалось.

VI. В топологическом векторном пространстве X существует базис фильтра $\mathfrak{W}$, состоящий из уравновешенных множеств.

Действительно, пусть $\mathcal{U}$ - произвольная окрестчость нуля в X. Используя непрерывность отображения $(\alpha,x)\mapsto \alpha x$ в точке $(0,\mathbb{O})$, найдем окрестность $V\in\mathfrak{W}$ и число $r>0$ такие, что $\alpha V\subset \mathcal{U}$ для всех α, у которых $|\alpha|\le r$. Отсюда $rV\subset\beta\mathcal{U}$ для β таких, что $|\beta|\ge 1$, следовательно, $rV\subset W=\bigcap\limits_{|\beta|\ge 1}\beta\mathcal{U}$, и так как $rV\in\mathfrak{W}$, то W - также окрестность нуля. Покажем, что W - уравновешенное множество. Пусть $x\in W$ и $0<|\lambda|\le 1$. По определению W точка x входит в $\frac{\beta}{\lambda}\mathcal{U}$ для всех β, у которых $|\beta|\ge 1$, т.е. $\lambda x\in\beta\mathcal{U}\ (|\lambda|\le 1, |\beta|\ge 1)$, откуда $\lambda x\in\bigcap\limits_{|\beta|\ge 1}\beta\mathcal{U}=W$, так что W - уравновешенная окрестность нуля, содержащаяся в $\mathcal{U}$.

Из непрерывности векторных операций, учитывая предложение V (5.2.4), получаем

VII. Если $\{x_\xi\}$, $\{y_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ - фильтрующиеся семейства элементов из X такие, что $x_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}x$, $y_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}y$, и α,β - произвольные скаляры, то $\alpha x_\xi+\beta y_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}\alpha x+\beta y$.

Исходя из того, что каждую точку замыкания множества в X можно реализовать как предел сходящегося семейства элементов данного множества (см. предложение III (5.2.3)), и привлекая определение Γ-множества, нетрудно убедиться в справедливости следующего факта.

VIII. Замыкание $\bar{E}$ произвольного Γ-множества E в топологическом векторном пространстве X также является Γ-множеством.

Линейная топология на векторном пространстве может оказаться неотделимой. Посмотрим, как отделимость топологического векторного пространства X может быть сформулирована в терминах фильтра окрестностей нуля.

IX. Замыкание $X_0=\overline{\{\mathbb{O}\}}$ линейно и совпадает с множеством $\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathfrak{W}}\mathcal{U}$. Топологическое векторное пространство X отделимо в том и только в том случае, если $X_0=\{\mathbb{O}\}$.

Линейность X_0 следует непосредственно из предложения VIII.

Пусть $x\in\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathfrak{W}}\mathcal{U}$. Возьмем окрестность $V\in\mathfrak{W}$. Так как V - также окрестность нуля, то $x\in(-V)$, или $-x\in V$. А тогда $\mathbb{O}=x+(-x)\in x+V$, следовательно, $x\in X_0$.

Обратно, если $x\bar{\in}\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathfrak{W}}\mathcal{U}$, то существует замкнутая окрестность $V\in\mathfrak{W}$ такая, что $x\bar{\in}V$, а это означает, что $x\bar{\in}X_0$.

Если X отделимо, то $X_0 = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{W}} \mathcal{U} = \{\mathbb{O}\}$ (см. пункт 5.1.3). Обратно, если $x_0 = \{\mathbb{O}\}$ и $\mathcal{W}_x$ – фильтр окрестностей некоторой точки $x \in X$, тогда $\bigcap_{V \in \mathcal{W}_x} = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{W}} (x + \mathcal{U}) = x + \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{W}} = \{x\}$, так что X отделимо.

Оказывается, свойства линейной топологии τ на X, установленные в предложениях I, Ш, IУ, УI, являются характеристическими. Точнее, имеет место следующий факт.

ТЕОРЕМА I (4.6). Пусть $\mathcal{W}$ – фильтр множеств в векторном пространстве X, удовлетворяющий условиям:

1) для любого $V \in \mathcal{W}$ найдется $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$;

2) всякое множество $W \in \mathcal{W}$ поглощающее,

3) существует базис фильтра $\mathcal{W}$, состоящий из уравновешенных множеств.

Тогда отображение $\tau : x \mapsto x + \mathcal{W}$, где $x + \mathcal{W} = \{x + \mathcal{U} : \mathcal{U} \in \mathcal{W}\}$, является линейной топологией на X. При этом фильтр окрестностей нуля совпадает с $\mathcal{W}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем, что τ – топология. Так как $\mathcal{W}_x = x + \mathcal{W}$, очевидно, является фильтром и $x \in W$ для любого $W \in \mathcal{W}_x$ в силу условия 2, то отображение τ – предтопология. Убедимся в существовании фундаментальной системы открытых окрестностей каждой точки $x \in X$. Для этого достаточно показать, что внутренность V^o любой окрестности V точки $x \in X$ – также окрестность точки x. Имея в виду определение предтопологии τ, достаточно ограничиться рассмотрением окрестностей точки $\mathbb{O} \in X$. Пусть $V \in \mathcal{W}$. Исходя из условия I, найдем $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$ такое, что для $x \in \mathcal{U}$ имеет место включение $x + \mathcal{U} \subset \mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$. Так как каждая точка $x \in \mathcal{U}$ входит в V вместе с окрестностью $x + \mathcal{U}$, то x – внутренняя точка множества V, а поскольку внутренность V^o есть совокупность всех внутренних точек из V, то $\mathcal{U} \subset V^o$. Так как $\mathcal{W}$ – фильтр и $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, то $V^o \in \mathcal{W}$. Итак, τ – топология.

Убедимся в непрерывности векторных операций. Пусть x_0, y_0 – данные точки из X и W – произвольная окрестность точки $x_0 + y_0$. Так как $W = x_0 + y_0 + V$, где $V \in \mathcal{W}$, и, согласно условию I, найдется $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, для которой $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$, то

$$x_0 + y_0 + \mathcal{U} + \mathcal{U} = (x_0 + \mathcal{U}) + (y_0 + \mathcal{U}) \subset x_0 + y_0 + V \subset W,$$

что и означает непрерывность операции сложения $(x, y) \mapsto x + y$ в пространстве X.

Из первого условия теоремы, рассуждая так же, как при доказательстве предложения У, можно вывести, что для любых $W \in \mathcal{W}$ и

$n \in \mathcal{N}$ найдется множество $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$ такое, что $\underbrace{\mathcal{U}+\mathcal{U}+\ldots+\mathcal{U}}_{n} \subset W$. В частности, если $V \in \mathcal{W}$ и λ – некоторый скаляр, то можно указать $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, для которой $\lambda \mathcal{U} \subset V$. Действительно, выберем натуральное n так, что $|\lambda| \leq n$, и найдем уравновешенное $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, удовлетворяющее условию $\underbrace{\mathcal{U}+\mathcal{U}+\ldots+\mathcal{U}}_{n} \subset V$. Тогда

$$\lambda \mathcal{U} = n\left(\frac{\lambda}{n}\mathcal{U}\right) \subset n\mathcal{U} \subset \mathcal{U}+\mathcal{U}+\ldots+\mathcal{U} \subset V,$$

так что $\mathcal{U}$ – требуемая окрестность.

Приступим теперь к доказательству непрерывности операции умножения на скаляр. Пусть $\lambda_0 \in R$, $x_0 \in X$ фиксированы и V – некоторая окрестность нуля в топологии τ. Найдем $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, для которой $\mathcal{U}+\mathcal{U}+\mathcal{U} \subset V$. В силу условия 3 окрестность $\mathcal{U}$ можно считать уравновешенной. Представим разность $\lambda x - \lambda_0 x_0$ в виде

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0 + (\lambda-\lambda_0)(x-x_0).$$

Найдем $W \in \mathcal{W}$, обладающую свойством $\lambda_0 W \subset \mathcal{U}$. Из второго условия теоремы следует, что найдется такое $\varepsilon > 0$, что $(\lambda-\lambda_0)x_0 \in \mathcal{U}$ при всех $\lambda-\lambda_0$, для которых $|\lambda-\lambda_0| \leq \varepsilon$. Можно считать $\varepsilon \leq 1$. Поскольку $\mathcal{U}$ – уравновешенное множество, а $|\lambda-\lambda_0| \leq 1$, то $(\lambda-\lambda_0)(x-x_0) \in \mathcal{U}$, если только $x-x_0 \in \mathcal{U}$. Итак, мы показали, что для $\lambda \in R$, $x \in X$, удовлетворяющих соотношениям $|\lambda-\lambda_0| \leq \varepsilon$, $x-x_0 \in \mathcal{U}$, имеет место включение $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in \mathcal{U}+\mathcal{U}+\mathcal{U} \subset V$, которое и убеждает нас в непрерывности операции умножения на скаляр. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если на векторном пространстве X заранее задана топология τ и мы хотим выяснить, является ли она линейной, то для этого можно воспользоваться доказанной теоремой – мы должны предварительно проверить инвариантность τ относительно сдвигов, т.е. проверить, можно ли фильтр $\mathcal{W}_x$ окрестностей точки x получить как $\mathcal{W}_x = x + \mathcal{W}$, и если это так, то далее должна уже следовать проверка выполнения условий теоремы, где роль $\mathcal{W}$ играет фильтр окрестностей нуля пространства (X, τ).

УШ. Пусть $\mathcal{E}$ – множество линейных топологий на X. Тогда топология $\tau = \sup \mathcal{E}$ также линейна.

Отметим, прежде всего, что, в силу теоремы I (4.5), точная верхняя граница существует, каково бы ни было $\mathcal{E}$. Докажем ее линейность. Убедимся сначала в том, что результат предложения справедлив, если $\mathcal{E}$ – конечно. Пусть $\mathcal{E} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ $(n \in \mathcal{N})$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$. Согласно строению топологии $\tau = \sup\{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$ (см. замечание 2 к теореме I (4.5)), фильтр $\mathcal{W}_x$ окрестностей точки x в топологии τ

порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\mathcal{B}_x$, состоящей из всевозможных множеств вида $V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$, где V_k принадлежат $\mathcal{W}_x^{\tau_k}$ – фильтру окрестностей точки x в топологии $\tau_k (k=1,2,\ldots,n)$. Исходя из сказанного, найдем окрестности $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \mathcal{U}_n$ точки x соответственно в топологиях $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ такие, что $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$. Тогда, в силу линейности топологий $\tau_k (k=1,2,\ldots,n)$, имеем $x+\mathcal{U}_k \in \mathcal{W}^{\tau_k} (k=1,2,\ldots,n)$, откуда

$$x+\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_n = (x+\mathcal{U}_1) \cap (x+\mathcal{U}_2) \cap \ldots \cap (x+\mathcal{U}_n) \in \mathcal{W}_x,$$

а поскольку $x+\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_n \subset x+\mathcal{U}$, то и $x+\mathcal{U} \in \mathcal{W}_x$. Итак, инвариантность топологии относительно сдвигов установлена.

Привлекая определение базиса $\mathcal{B}_x$ фильтра $\mathcal{W}_x$, сравнительно просто проверить все три условия теоремы I. Мы остановимся лишь на проверке первого из них, остальные два доказываются аналогично.

Пусть V – произвольная окрестность нуля в топологии τ. Найдем $V_k \in \mathcal{W}^{\tau_k} (k=1,2,\ldots,n)$ такие, что $\bigcap_{k=1}^{n} V_k \subset V$. В силу линейности топологий τ_k и результата предложения IУ найдутся $\mathcal{U}_k \in \mathcal{W}^{\tau_k}$ такие, что $\mathcal{U}_k + \mathcal{U}_k \subset V_k$. Обозначив $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{U}$, получаем, что с одной стороны $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$, а с другой $\mathcal{U}+\mathcal{U} \subset \bigcap_{k=1}^{n} (\mathcal{U}_k + \mathcal{U}_k) \subset V$, что и требовалось.

Пусть теперь $\mathcal{E}$ – произвольное множество линейных топологий на X. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{E}}$ множество топологий на X, состоящее из точных верхних границ всевозможных конечных подмножеств множества $\mathcal{E}$. Как было установлено, совокупность $\widetilde{\mathcal{E}}$ так же, как и $\mathcal{E}$, состоит из линейных топологий. Осталось лишь отметить, что, согласно замечанию 2 к теореме I (4.5), $\mathcal{W}_x^{\tau} = \bigcup_{\sigma \in \widetilde{\mathcal{E}}} \mathcal{W}_x^{\sigma} (x \in X)$, и проверка линейности топологии τ и выполнения всех условий теоремы I становится настолько простой, что мы предоставляем читателю возможность проделать это самостоятельно.

4.2. Присутствие в X топологии, согласованной со структурой векторного пространства, позволяет некоторым регулярным способом задавать на X равномерную структуру.

Пусть (X,τ) – топологическое векторное пространство. С каждой окрестностью нуля $\mathcal{U}$ пространства X свяжем подмножество $W_{\mathcal{U}}$ в X^2 вида $W_{\mathcal{U}} = \{(x,y) \in X^2 : x-y \in \mathcal{U}\}$. Очевидно, что диагональ $\Delta \subset W_{\mathcal{U}}$ для каждой окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{W}$. Если $\mathcal{U}$ – уравновешенная окрестность нуля в X, то вместе с точкой $x-y$ в $\mathcal{U}$ входит и точка $y-x$. Отсюда следует, что $W_{\mathcal{U}} = W_{\mathcal{U}}^{-1}$ в случае уравновешенного $\mathcal{U}$. Отметим еще, что если $\mathcal{U}, V \in \mathcal{W}$ и $\mathcal{U} \subset V$, то $W_{\mathcal{U}} \subset W_V$. Из этого соотношения и свойства $\mathfrak{W}$ фильтроваться по убыванию следует, что $\{W_{\mathcal{U}}\}$ $(\mathcal{U}\in\mathfrak{W})$ также фильтруется по убыванию.

Покажем, что $W_{\mathcal{U}}\circ W_{\mathcal{U}}\subset W_{\mathcal{U}+\mathcal{U}}$. В самом деле, пусть $(x;z)\in W_{\mathcal{U}}\circ W_{\mathcal{U}}$. Тогда найдется элемент $y\in X$ такой, что $(x,y)\in W_{\mathcal{U}}, (y,z)\in W_{\mathcal{U}}$, или $x-y\in\mathcal{U}$, $y-z\in\mathcal{U}$, откуда $(x-y)+(y-z)=x-z\in\mathcal{U}+\mathcal{U}$, следовательно, $(x,z)\in W_{\mathcal{U}+\mathcal{U}}$.

Для произвольной окрестности $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}$ найдем $\mathcal{U}_1\in\mathfrak{W}$ такое, что $\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}$. Тогда, по доказанному, $W_{\mathcal{U}_1}\circ W_{\mathcal{U}_1}\subset W_{\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_1}\subset W_{\mathcal{U}}$. Последним соотношением завершена проверка того, что фильтрующаяся по убыванию совокупность $\{W_{\mathcal{U}}\}(\mathcal{U}\in\mathfrak{W})$ удовлетворяет всем условиям определения равномерности на X, так что $\mathfrak{M}=\{W_{\mathcal{U}}\}(\mathcal{U}\in\mathfrak{W})$ - равномерность на X. Заметим, что, как следует непосредственно из определения $\mathfrak{M}$, топология $\tau(\mathfrak{M})$ равномерности $\mathfrak{M}$ совпадает с заданной линейной топологией τ на X. Равномерность $\mathfrak{M}$ называют (стандартной) равномерностью топологического векторного пространства (X,τ). Если не оговорено противоположного, с топологическим векторным пространством связывается стандартная равномерность.

Таким образом, в рамках топологических векторных пространств можно говорить о всех понятиях и фактах, возникающих при рассмотрении равномерных пространств. В частности, топологическое векторное пространство всегда T_3^+- пространство, а если топология τ отделима, то (X,τ)- вполне регулярное пространство.

Учитывая, что T_3^+-пространство является также и T_3-пространством (см. пункт У.3.3), и привлекая предложение У из пункта У (I.8), можно заключить о справедливости следующего факта.

I. В топологическом векторном пространстве фильтр $\mathfrak{W}$ обладает базисом, состоящим из замкнутых множеств.

4.3. Пусть (X,τ) (Y,σ) - топологические векторные пространства и $\mathcal{A}:X\to Y$. Естественно, что наиболее подробную информацию мы можем получить о таких отображениях $\mathcal{A}$, которые согласованы со структурами топологического и векторного пространств одновременно. В этом пункте будут установлены лишь элементарные свойства такого рода отображений.

Предположим, что X,Y - векторные пространства над одним полем скаляров R и τ, σ - линейные топологии на X,Y соответственно. Линейное отображение $\mathcal{A}:X\to Y$, непрерывное относительно топологий τ, σ, называют линейным непрерывным оператором, действующим из X в Y. Область определения $\Omega_{\mathcal{A}}$ - всегда линейное множество в векторном пространстве X. Учитывая еще и результат предложения II (5.2.4), мы будем считать отображение $\mathcal{A}$ заданным на всем X. Лишь отступления от этого правила будут отмечены. Множество всех линейных непрерывных операторов, определенных на X и действующих в Y, будем обозначать символом $\mathcal{L}(X,Y)$.

Оказывается, при проверке непрерывности линейного оператора достаточно проверять это свойство лишь в какой-либо одной точке из X. Как правило, в качестве такой точки выбирают нулевой элемент векторного пространства X.

I. Линейное отображение $\mathcal{A}: X \to Y$ непрерывно на X в том и только в том случае, если оно непрерывно в точке $\mathbb{O} \in X$.

Если $\mathcal{A}$ непрерывно на X, то, в частности, $\mathcal{A}$ непрерывно и в точке $\mathbb{O} \in X$.

Обратно, предположим, что линейное отображение $\mathcal{A}$ непрерывно в точке $\mathbb{O} \in X$, и рассмотрим некоторый ненулёвой элемент $x \in X$. Пусть $\mathcal{U} = y + W$ - какая-либо окрестность точки $y = \mathcal{A}(x)$. Поскольку $\mathcal{A}$ непрерывно в нуле, найдется окрестность нуля V в X такая, что $\mathcal{A}[V] \subset W$. Тогда для элементов $x + v \in x + V$ имеем

$$\mathcal{A}(x+v) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(v) = y + \mathcal{A}(v) \in y + W,$$

откуда $\mathcal{A}[x+V] \subset y + W$, что и означает непрерывность $\mathcal{A}$ в точке $x \in X$.

Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Рассмотрим отображение

$$\mathcal{A} = \alpha \mathcal{A}_1 + \beta \mathcal{A}_2 : x \longmapsto \alpha \mathcal{A}_1(x) + \beta \mathcal{A}_2(x).$$

Из согласования топологии на Y со структурой векторного пространства и непрерывности суперпозиции следует, что отображение $\mathcal{A}$ непрерывно в нуле. Только что доказанный факт позволяет заключить о непрерывности $\mathcal{A}$ на всем X. Таким образом, $\mathcal{L}(X,Y)$ - линейное множество в векторном пространстве $L(X,Y)$ всех линейных отображений, переводящих X в Y, следовательно, само является векторным пространством.

Множество E топологического векторного пространства Y называется о г р а н и ч е н н ы м, если E поглощается каждой окрестностью нуля в Y. Отображение $\mathcal{A}: X \to Y$ называется о г р а н и ч е н н ы м, если образ $\mathcal{A}[B]$ каждого ограниченного множества B в X представляет собой ограниченное множество в Y.

II. Линейный непрерывный оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ ограничен.

В самом деле, пусть $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ - фильтры окрестностей нуля в пространствах X, Y, соответственно и $E=\mathcal{A}[B]$, где B – ограниченное множество в X. Покажем, что E поглощается какой угодно окрестностью $W\in\mathfrak{W}$. Из непрерывности $\mathcal{A}$ следует существование такой $V\in\mathcal{V}$, что $\mathcal{A}[V]\subset W$. Так как B ограничено, найдется $\varepsilon>0$ такое, что $\alpha B\subset V$ при всех $\alpha\in R$, у которых $|\alpha|\leq\varepsilon$. Тогда $\alpha\mathcal{A}[B]=\mathcal{A}[\alpha B]\subset\mathcal{A}[V]\subset W$ для тех же $\alpha\in R$, следовательно, E поглощается окрестностью W, тем самым представляет собой ограниченное множество в Y.

Следует иметь в виду, что не всякое линейное ограниченное отображение непрерывно.

Ш. Линейный непрерывный оператор $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(X,Y)$ равномерно непрерывен.

Действительно, пусть $V\in\mathfrak{W}$ и $W_V=\{(u,v)\in Y^2: u-v\in V\}$ – окружение диагонали в Y^2, порожденное окрестностью V. Поскольку $\mathcal{A}$ непрерывен, найдется окрестность $\mathcal{U}\in\mathcal{V}$ такая, что $\mathcal{A}[\mathcal{U}]\subset V$. Для точек $(x,y)\in W_{\mathcal{U}}$, т.е. таких, что $x,y\in X$, $x-y\in\mathcal{U}$, имеем $\mathcal{A}(x-y)\in V$, или $\mathcal{A}(x)-\mathcal{A}(y)\in W_V$. Последнее соотношение показывает, что $(\mathcal{A}(x), \mathcal{A}(y))\in W_V$, откуда и следует равномерная непрерывность оператора $\mathcal{A}$.

Рассмотрим совокупность Y^X всех отображений топологического векторного пространства X в топологическое векторное пространство Y и снабдим Y^X сильной равномерностью $\mathcal{L}_y$.

IУ. Множество $\mathcal{L}(X,Y)$ замкнуто в Y^X в топологии, ассоциированной с равномерностью $\mathcal{L}_y$ на Y^X.

В самом деле, пусть $\{\mathcal{A}_\xi\}(\xi\in\Xi)$ – фильтрующееся семейство элементов множества $\mathcal{L}(X,Y)$, сходящееся к $\mathcal{A}\in Y^X$. Из следствия к теореме 4 (7.5) следует, что $\mathcal{A}$ непрерывно, а из предложения УП (4.I) вытекает линейность отображения $\mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(X,Y)$, чем и установлена замкнутость $\mathcal{L}(X,Y)$ в Y^X.

СЛЕДСТВИЕ. Если Y – полное пространство, то $\mathcal{L}(X,Y)$ также полно в равномерности, индуцированной сильной равномерностью на Y^X.

Для доказательства достаточно сослаться на предложения IУ и Ш (У.8.I).

Пусть X – топологическое векторное пространство и X_0 – его подпространство. Если проектор P на X_0 непрерывен, тогда говорят, что X есть т о п о л о г и ч е с к а я   с у м м а подпространств $X_0=X_P$ и X_Q, где $Q=I-P$. Необходимым, но не достаточным условием непрерывности проектора является замкнутость подпространства X_P. Подробное обсуждение условий, гарантирующих непрерывность проектора, опирается на технику и факты, не представленные в настоящем тексте.

4.4. Пусть X, Y – векторные пространства над одним полем скаляров $\mathcal{R}$ и $\mathcal{A}\in L(X,Y)$ – линейный оператор.

I. Предположим, что на Y задана линейная топология σ и оператор $\mathcal{A}$ определен на всем X. Тогда на X существует линейная топология τ, слабейшая из топологий на X, относительно которых оператор $\mathcal{A}$ непрерывен.

Обозначим через $\mathfrak{W}$ фильтр окрестностей нуля в топологии σ и рассмотрим фильтрующуюся по убыванию совокупность $\mathcal{A}^{-1}\langle\mathfrak{W}\rangle$. Убедимся в том, что фильтр $\mathfrak{V}=\mathcal{A}^{-1}\widetilde{\langle\mathfrak{W}\rangle}$ удовлетворяет условиям теоремы I (4.6).

Пусть $V\in\mathfrak{V}$ и $\mathcal{U}=\mathcal{A}^{-1}[W]\,(W\in\mathfrak{W})$ содержится в V. Найдем такую окрестность $W_1\in\mathfrak{W}$, что $W_1+W_1\subset W$. Тогда $\mathcal{A}^{-1}[W_1]+\mathcal{A}^{-1}[W_1]\subset\subset\mathcal{A}^{-1}[W_1+W_1]\subset\mathcal{A}^{-1}[W]=\mathcal{U}\subset V$, так что первое условие теоремы I (4.6) выполнено.

Возьмем множество $\mathcal{U}=\mathcal{A}^{-1}[W]\in\mathfrak{V}$ и точку $x\in X$. Обозначим $y=\mathcal{A}(x)$ и найдем такое $\varepsilon>0$, что $\alpha y\in W$ для всех $\alpha\in\mathcal{R}$, у которых $|\alpha|\leq\varepsilon$. Тогда для тех же α имеем $\alpha x\in\mathcal{U}$, следовательно, $\mathcal{U}$ – поглощающее множество.

Аналогично проверяется и существование базиса фильтра $\mathfrak{V}$, состоящего из уравновешенных множеств. Таким образом, отображение $\tau: x\longmapsto x+\mathfrak{V}$ – линейная топология на X, которая, как нетрудно понять, самая слабая из линейных топологий на X, обеспечивающих непрерывность оператора $\mathcal{A}$.

Аналогично тому, как было доказано предложение I, можно показать справедливость и такого факта.

II. Предположим, что на X задана линейная топология λ и оператор $\mathcal{A}$ действует на все Y. Тогда на Y существует линейная топология μ, сильнейшая из топологий, обеспечивающих непрерывность оператора $\mathcal{A}$.

Понятно, что фильтр окрестностей нуля в топологии μ порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\mathcal{A}\langle\mathfrak{V}\rangle$, где через $\mathfrak{V}$ обозначен фильтр окрестностей нуля в топологии λ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сам факт переноса топологии с одного из рассмотренных векторных пространств на другое с помощью отображения $\mathcal{A}$ следует из результатов пункта У.4.2, так что в предложениях I, II на самом деле говорится о том, что топология, полученная переносом линейной топологии с помощью линейного оператора, также линейна.

Применим предложение II для задания топологии в фактор-пространстве векторного пространства.

Пусть X - векторное пространство над полем P и X_0 - его подпространство. Обозначим, как и прежде, через X/X_0 фактор-пространство X по X_0 и через $\varphi: X \to X/X_0$ - канонический гомоморфизм. Предположим, что на X задана линейная топология τ. Воспользовавшись предложением II, определим на X/X_0 линейную топологию τ/X_0 - сильнейшую из топологий на X/X_0, относительно которых канонический гомоморфизм φ непрерывен. Эта топология называется ф а к т о р - т о п о л о г и е й на X/X_0. Базис фильтра окрестностей нуля в фактор-топологии образуют множества вида $\varphi[U]$ $(U \in \mathcal{W})$.

Оказывается, канонический гомоморфизм φ относительно фактор-топологии обладает, кроме непрерывности, еще некоторой квалификацией, отраженной в следующем предложении.

III. **Образ** открытого множества при отображении $\varphi: (X,\tau) \to (X/X_0, \tau/X_0)$ открыт.

Действительно, пусть $G \in \mathcal{O}(X,\tau)$ и $G_0 = \varphi[G]$. Возьмем $[x] \in G_0$ и покажем, что $[x]$ лежит в G_0 вместе с некоторой окрестностью. Обозначим через x такой элемент из G, что $[x] = \varphi(x)$. Поскольку G открыто, найдется $U \in \mathcal{W}$, для которой $x + U \subset G$. Но тогда $\varphi(x) + \varphi[U] = \varphi[x+U] \subset \varphi[G] = G_0$, и осталось лишь заметить, что $\varphi[U] \in \mathcal{W}_0$, где $\mathcal{W}_0$ - фильтр окрестностей нуля в пространстве $(X/X_0, \tau/X_0)$.

Рассмотрим топологическое векторное пространство (Y,μ) с тем же полем скаляров P, что и у X, и линейный оператор $A \in L(X,Y)$. Предположим, что существует снижение $A_{X_0}: X/X_0 \to Y$ оператора A на фактор-пространство X/X_0.

IУ. Оператор A_{X_0} непрерывен в том и только в том случае, если непрерывен оператор A.

В самом деле, поскольку $A = A_{X_0} \circ \varphi$, то из непрерывности A_{X_0} следует непрерывность оператора A как суперпозиции непрерывных операторов (см. предложение IУ (У.5.2)).

Предположим теперь, что A непрерывен. Возьмем произвольную окрестность нуля W в пространстве Y. В силу непрерывности A найдется такая окрестность $U \in \mathcal{W}$, что $A[U] \subset W$. Тогда $A_{X_0}[\varphi[U]] = A[U] \subset W$, и, поскольку $\varphi[U]$ - окрестность нуля в X/X_0, то

$\mathscr{A}_{X_0}$ непрерывен.

Отделимость фактор-пространства зависит от свойств множества X_0.

У. Фактор-топология τ/X_0 отделима в том и только в том случае, если X_0 замкнуто в X.

Действительно, если τ/X_0 отделима, то всякое одноточечное множество в X/X_0 замкнуто (см. предложение I (У.3.I)). В частности, множество, состоящее из нулевого элемента, замкнуто в X/X_0. А тогда $X_0 = \varphi^{-1}[\mathbb{O}]$ замкнуто в X как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении (см. теорему I (5.5)).

Обратно, пусть X_0 замкнуто в X и $[x]$ - ненулевой элемент в X/X_0. Возьмем $x \in [x]$. Тогда $[x] = x + X_0$. Так как $[x] \neq \mathbb{O}$, то класс $[x]$ не пересекается с X_0, следовательно, $x \bar{\in} X$. В силу замкнутости X_0 найдется уравновешенная окрестность $V \in \mathfrak{W}$ такая, что $(x+V) \cap X_0 = \emptyset$. Покажем, что $[x] \in \varphi[V]$. Действительно, предположим, что $[x] \bar{\in} \varphi[V]$. Пусть $u \in X$ - такой элемент, что $[x] = \varphi(u)$. Тогда $x - u \in X_0$. Но поскольку V - уравновешенное множество, то вместе с u в V входит и элемент $-u$. Следовательно, $x - u \in x + V$, а это противоречит соотношению $(x+V) \cap X_0 = \emptyset$. Предложение доказано.

§ 5. Локально выпуклые пространства

Среди всех топологических векторных пространств особую роль играют так называемые локально выпуклые пространства. Их значение объясняется в основном тем, что в таких пространствах предполагается существование в известной мере обширного набора выпуклых окрестностей нуля, а с последним обстоятельством тесно связано "количество" линейных непрерывных функционалов на данном топологическом векторном пространстве. Разговор же о функциональном анализе содержателен, пожалуй, лишь в том случае, если на рассматриваемом топологическом векторном пространстве определен хотя бы один ненулевой линейный непрерывный функционал.

5.I. Линейная топология τ на векторном пространстве X называется л о к а л ь н о в ы п у к л о й, если фильтр $\mathfrak{W}$ окрестностей нуля в этой топологии имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых множеств. Топологическое векторное пространство, топология которого локально выпукла, называется л о к а л ь н о в ы п у к л ы м.

Если X - топологическое векторное пространство над полем $\mathbb{R}$

вещественных чисел, то для локальной выпуклости можно требовать лишь наличия базиса фильтра окрестностей нуля, состоящего из выпуклых (необязательно абсолютно) множеств. Действительно, если V - выпуклая окрестность нуля, то $-V$ - также выпуклая окрестность нуля, а тогда $V\cap(-V)$ является уже абсолютно выпуклой окрестностью нуля, содержащейся в V.

Из определений индуцированной топологии следует, что подпространство локально выпуклого пространства - локально выпукло.

Фактор-топология τ/X_0 в фактор-пространстве X/X_0 локально выпуклого пространства X оказывается также локально выпуклой. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что множества $\varphi[U]$, где $U\in\mathfrak{W}$, образуют базис фильтра окрестностей нуля в топологии τ/X_0, и заметить, что если U абсолютно выпуклое множество, то его образ $\varphi[U]$ при линейном отображении φ на X/X_0 сохранит указанные свойства.

I. Пусть $\mathcal{E}$ - произвольное множество локально выпуклых топологий на X. Тогда топология $\sup\mathcal{E}$ локально выпукла.

Отметим прежде всего, что, согласно предложению УШ (4.I), топология $\mu=\sup\mathcal{E}$ линейна.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{E}$ конечно. Пусть $\mathcal{E}=\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n\}$. В этой ситуации фильтр $\mathfrak{W}_x^{\mu}$ окрестностей точки x порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью множеств вида $V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_n$, где $V_k\in\mathfrak{W}_x^{\tau_k}$, $k=1,2,\ldots,n$. Так как каждая из топологий τ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ локально выпукла, то V_k можно считать абсолютно выпуклым (иначе мы заменим данные окрестности на содержащиеся в них абсолютно выпуклые). Пересечение $V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_n$ абсолютно выпуклых множеств $V_1,V_2,\ldots,V_n$ также абсолютно выпукло, тем самым μ имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых множеств.

Если $\mathcal{E}$ - произвольное множество локально выпуклых топологий на X, то, в силу замечания 2 к теореме I (I.5), имеем $\mathfrak{W}^{\mu}=\bigcup_{\sigma\in\tilde{\mathcal{E}}}\mathfrak{W}^{\sigma}$, где $\tilde{\mathcal{E}}$ - множество топологий на X, состоящее из точных верхних границ всевозможных конечных подмножеств множества $\mathcal{E}$. Но, как было показано, все топологии в множестве $\tilde{\mathcal{E}}$ локально выпуклы, откуда очевидным образом следует, что $\mu=\sup\mathcal{E}=\sup\tilde{\mathcal{E}}$ также локально выпукла.

П. Функционал Минковского всякой выпуклой окрестности нуля топологического векторного пространства X непрерывен.

Действительно, пусть V - выпуклая окрестность нуля в пространстве X и p - функционал Минковского множества V. Используя свойство субаддитивности функционала p, для любых $x, y \in X$ имеем

$$p(x) \leq p(y) + p(x-y), \quad p(y) \leq p(x) + p(y-x),$$

откуда

$$|p(x) - p(y)| \leq max(p(x-y), p(y-x)).$$

Если теперь ε - некоторое положительное число, а x - фиксированный элемент из X, то, взяв $y \in x + \varepsilon(V \cap (-V))$, имеем $y - x \in \varepsilon V$, $y - x \in -\varepsilon V$, а поскольку $\varepsilon V \subset \{p \leq \varepsilon\}$, то $p(y-x) \leq \varepsilon$, $p(x-y) \leq \varepsilon$, так что и $max(p(x-y), p(y-x)) \leq \varepsilon$. Следовательно, $|p(y) - p(x)| \leq \varepsilon$ для любого $y \in x + \varepsilon(V \cap (-V))$, что и означает непрерывность функционала p.

Рассмотрим абсолютно выпуклое поглощающее множество C в векторном пространстве X. Обозначим через $\mathfrak{W}$ фильтр, порожденный фильтрующейся по убыванию системой множеств $\{zC : z > 0\}$ в X. Каждое множество $zC\ (z > 0)$ - поглощающее и уравновешенное, следовательно, фильтр $\mathfrak{W}$ обладает базисом из поглощающих уравновешенных множеств. Далее, если $V \in \mathfrak{W}$ и zC таково, что $zC \subset V$, то, обозначив $\mathcal{U} = \frac{1}{2}C$, получим $\mathcal{U} + \mathcal{U} \subset V$. Итак, мы убедились в том, что фильтр $\mathfrak{W}$ удовлетворяет всем условиям теоремы I (4.6), так что $\tau_C : x \mapsto x + \mathfrak{W}\ (x \in X)$ - линейная топология на X, очевидно, локально выпуклая. Множество C служит окрестностью нуля в топологии τ_C, и понятно, что τ_C - слабейшая из линейных топологий, обладающих этим свойством. Таким образом, нами доказано предложение

Ш. Для каждого абсолютно выпуклого поглощающего множества C в векторном пространстве X существует слабейшая из линейных топологий на X, в которых C является окрестностью нуля. Эта топология, обозначаемая через τ_C, локально выпукла, и фильтр $\mathfrak{W}$ окрестностей нуля в ней порожден системой множеств $\{zC : z > 0\}$.

Заметим, кстати, что функционал Минковского p_C множества C представляет собой непрерывную в топологии τ_C полунорму на X. Понятно, что если p - какая-либо полунорма на X, то локально выпуклая топология τ_C, где $\{p < 1\} \subset C \subset \{p \leq 1\}$, суть слабейшая из линейных топологий, обеспечивающих непрерывность p. Фильтр окрестностей нуля в этой топологии порожден системой $S_z^{(p)}$ шаров, отвечающих полунорме p.

IУ. Пусть $\mathfrak{A}$ – заданная совокупность абсолютно выпуклых поглощающих множеств векторного пространства X. Среди всевозможных линейных топологий, в каждой из которых все множества совокупности $\mathfrak{A}$ являются окрестностями нуля, существует слабейшая. Эта топология локально выпукла.

В самом деле, определим $\hat{\tau}$ как $\hat{\tau}=\sup\limits_{C\in\mathfrak{A}}\tau_C$. Из предложения I следует локальная выпуклость $\hat{\tau}$. Если теперь τ – некоторая топология, удовлетворяющая условиям предложения, то, как следует из определения τ_C, имеем $\tau\geqslant\tau_C$, так что $\tau\geqslant\hat{\tau}=\sup\limits_{C\in\mathfrak{A}}\tau_C$. Предложение доказано.

Из определения топологии $\tau=\sup\limits_{C\in\mathfrak{A}}\tau_C$ следует, что фильтр окрестностей нуля в этой топологии порожден фильтрующейся по убыванию системой всевозможных конечных пересечений

$$\{z_1C_1\cap z_2C_2\cap\ldots\cap z_nC_n\}\ (z_1,z_2,\ldots z_n>0,\ C_1,C_2,\ldots,C_n\in\mathfrak{A}).$$

Принимая во внимание, что

$$z(C_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_n)=zC_1\cap zC_2\cap\ldots\cap zC_n\subset z_1C_1\cap z_2C_2\cap\ldots\cap z_nC_n,$$

где $0<z<\min(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, получаем, что фильтрующаяся по убыванию совокупность

$$\{zC_1\cap C_2\cap\ldots\cap C_n\}\quad(z>0,\ C_k\in\mathfrak{A},\quad k=1,2,\ldots,n)$$

также порождает фильтр окрестностей нуля в топологии $\hat{\tau}$.

Ясно, что функционал Минковского p_C каждого множества $C\in\mathfrak{A}$ непрерывен.

Рассмотрим какую-либо совокупность $\mathfrak{M}$ полунорм на векторном пространстве X. Упорядоченная пара $(X,\mathfrak{M})$ называется м у л ь т и н о р м и р о в а н н ы м п р о с т р а н с т в о м, а совокупность $\mathfrak{M}$ – м у л ь т и н о р м о й на X. Если $\mathfrak{M}$ состоит из единственной нормы p, тогда (X,p) называется н о р м и р о в а н н ы м п р о с т р а н с т в о м. В случае, когда в $\mathfrak{M}$ входит счетное число норм, пространство $(X,\mathfrak{M})$ называют с ч е т н о - н о р м и р о в а н н ы м.

Если в предложении IУ в качестве системы $\mathfrak{A}$ взять совокупность множеств $\{p<1\}$ $(p\in\mathfrak{M})$, то слабейшая из линейных топологий на X, в которых все множества данной совокупности являются окрестностями нуля, обладает, очевидно, тем свойством, что она слабейшая из линейных топологий на X, в которых все полунормы из мультинормы $\mathfrak{M}$ непрерывны. Эта топология называется т о п ологией мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$, или топологией, ассоциированной с мультинормой $\mathfrak{M}$, и обозначается, как правило, через $\tau_{\mathfrak{M}}$. Из замечаний к предложению IV следует, что фильтр окрестностей нуля в топологии мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$ порожден конечными пересечениями шаров $\{S_z^{(p_1)} \cap S_z^{(p_2)} \cap \ldots \cap S_z^{(p_n)}\}$ $(z>0, p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathfrak{M})$, отвечающих полунормам из $\mathfrak{M}$. Можно сказать также, что окрестность нуля в $\tau_{\mathfrak{M}}$ – такое множество V, что $S_z^{(p_1)} \cap S_z^{(p_2)} \cap \ldots \cap S_z^{(p_n)} \subset V$ для некоторых $z>0$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathfrak{M}$. Если мультинорма $\mathfrak{M}$ фильтруется, т.е. с каждым конечным подмножеством $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ включает полунорму, мажорирующую все полунормы из множества $\mathfrak{M}'$, то, как следует из определений и предложения VI (3.I), фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}$ мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$ обладает базисом, состоящим из множеств $zS_1^{(p)}$ $(z>0, p \in \mathfrak{M})$.

Всякое локально выпуклое пространство X мультинормируемо, т.е. на X можно задать мультинорму так, что топология соответствующего мультинормированного пространства совпадет с исходной локально выпуклой топологией. В качестве такой мультинормы можно взять, например, совокупность всех непрерывных на X полунорм. Впредь, говоря о мультинорме в локально выпуклом пространстве, мы будем предполагать, что ассоциированная с ней топология есть топология данного локально выпуклого пространства.

Понятно, что если только X не сводится к единственному, нулевому, элементу, то на X можно указать много мультинорм, приводящих к одной и той же локально выпуклой топологии.

Пусть $(X, \mathfrak{M})$ – мультинормированное пространство и X_0 – подпространство векторного пространства X. Совокупность $\mathfrak{M}_0$ сужений на X_0 полунорм из $\mathfrak{M}$ называется сужением мультинормы $\mathfrak{M}$ на X_0, а пара $(X_0, \mathfrak{M}_0)$ – подпространством мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$. Нетрудно понять, что топология пространства $(X_0, \mathfrak{M}_0)$ совпадает с топологией, индуцированной на X_0 топологией пространства $(X, \mathfrak{M})$. Отсюда, в частности, следует, что на подпространстве локально выпуклого пространства всегда есть мультинорма, состоящая из полунорм, распространимых до полунорм на X с сохранением непрерывности.

Особо подчеркнем, что если пространство X – нормированное, то среди непрерывных распространений на X нормы на X_0 есть норма исходного пространства.

Исходя из связи мультинормированных и локально выпуклых пространств, в рамках теории мультинормированных пространств можно говорить о топологических понятиях и фактах, имея в виду соответствующее понятие или факт относительно ассоциированной с данной мультинормой топологии. Например, можно говорить о замкнутых и открытых множествах в мультинормированном пространстве, о сходящихся семействах элементов мультинормированного пространства и т.п., каждый раз подразумевая замкнутость или открытость множеств или сходимость в топологии мультинормированного пространства. Если мы говорим о каком-то топологическом свойстве (например, отделимости) мультинормы, надо понимать это так, что топология, ассоциированная с данной мультинормой, обладает этим свойством.

Выясним, как в терминах мультинормы формулируются некоторые определения и утверждения, связанные с локально выпуклыми пространствами.

Пусть $\mathfrak{M}$ – мультинорма на векторном пространстве X и $\tau_{\mathfrak{M}}$ – ассоциированная с ней топология.

У. Пространство $(X, \mathfrak{M})$ отделимо в том и только в том случае, если для любого ненулевого элемента $x \in X$ можно указать такую полунорму $p \in \mathfrak{M}$, что $p(x) > 0$.

Предположим, что $\mathfrak{M}$ отделима. Тогда $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{W}} = \{\mathbb{O}\}$, где $\mathcal{W}$ – фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}$. Если $x \in X$ таков, что $p(x) = 0$ для любой $p \in \mathfrak{M}$, тогда x входит в любую окрестность нуля, следовательно, $x = \mathbb{O}$.

Обратно, если для каждого ненулевого $x \in X$ можно указать такую $p \in \mathfrak{M}$, что $p(x) > 0$, тогда $\bigcap\limits_{p \in \mathfrak{M}, \, \varepsilon > 0} S_\varepsilon^{(p)} = \{\mathbb{O}\}$, откуда и вытекает отделимость $(X, \mathfrak{M})$.

Пусть $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ – мультинормы на X. Говорят, что $\mathfrak{M}_1$ м а ж о р и р у е т $\mathfrak{M}_2$ (и обозначают символом $\mathfrak{M}_1 \succ \mathfrak{M}_2$ или $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_1$), если для любой полунормы $q \in \mathfrak{M}_2$ можно указать полунорму $p \in \mathfrak{M}_1$ такую, что $q \prec p$. Если каждая из мультинорм $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ мажорирует

+) Отметим, что отношение "$\prec$" между мультинормами обладает, очевидно, свойствами рефлексивности и транзитивности. Такого рода отношение называют отношением предпорядка.

другую, такие мультинормы называют эквивалентными и обозначают через $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$.

Привлекая предложения I (У.4.I) и УI (3.1), нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

УП. Мультинорма $\mathfrak{M}_1$ мажорирует мультинорму $\mathfrak{M}_2$ в том и только в том случае, если ассоциированная с $\mathfrak{M}_1$ топология сильнее топологии, ассоциированной с $\mathfrak{M}_2$.

СЛЕДСТВИЕ. Мультинормы $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ эквивалентны в том и только в том случае, если ассоциированные с ними топологии совпадают.

Укажем теперь, как в терминах мультинормы формулируются сходимость и сходимость в себе семейств элементов из X.

УШ. Фильтрующееся семейство $\varphi: \{x_\xi\} (\xi \in \Xi)$ элементов из $(X, \mathfrak{M})$ сходится к точке $x \in X$ в том и только в том случае, если $p(x_\xi - x) \underset{\xi \in \Xi}{\to} 0$ для каждой полунормы $p \in \mathfrak{M}$.

IX. Сходимость в себе фильтрующегося семейства φ равносильна тому, что для любой полунормы $p \in \mathfrak{M}$ семейство $\{p(x_\xi - x_\eta)\}$ $((\xi, \eta) \in \Xi \times \Xi)$ сходится к нулю по фильтрующемуся вправо множеству $\Xi \times \Xi$, снабженному покоординатным отношением порядка.

Справедливость последних предложений следует непосредственно из соответствующих определений.

X. Множество $E \subset X$ ограничено в том и только в том случае, если $\sup p[E] < +\infty$ для любой полунормы $p \in \mathfrak{M}$.

Действительно, пусть E - ограниченное множество в X. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon E \subset V$, поэтому для $x \in E$ имеем $p(\varepsilon x) = \varepsilon p(x) \le 1$. Таким образом, $p(x) \le \frac{1}{\varepsilon}$ для $x \in E$, стало быть, $\sup p[E] \le \frac{1}{\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь окрестность $r S_1^{(p)} \in \mathfrak{W}$ $(p \in \mathfrak{M}, r > 0)$ и докажем, что E поглощается любой окрестностью такого вида. Действительно, согласно условия предложения, $\lambda = \sup p[E] < +\infty$, а тогда $E \subset \{p \le \lambda\} = \lambda S_1^{(p)}$, отсюда $\frac{r}{\lambda} E \subset r S_1$, и, учитывая, что $r S_1$ - абсолютно выпуклое множество, из предложения П (3.I) получаем, что множество $r S_1$ поглощает любую точку множества E.

Рассмотрим, кроме X, еще одно мультинормированное пространство $(Y, \mathfrak{M}')$ и обозначим через $\tau_{\mathfrak{M}'}$ ассоциированную с $\mathfrak{M}'$ топологию на Y. Пусть $\mathcal{A}$ - линейный оператор, переводящий X в Y.

XIУ. Для непрерывности оператора $\mathcal{A}: (X, \mathfrak{M}) \to (Y, \mathfrak{M}')$ достаточно, а если $\mathfrak{M}$ фильтруется, то и необходимо, чтобы для любой полунормы $q \in \mathfrak{M}'$ можно было указать полунорму $p \in \mathfrak{M}$ и положительное вещественное число $M_{p,q}$ такие, что

$$q(A(x)) \le M_{p,q}\, p(x) \qquad (2)$$

для всех $x \in X$.

В самом деле, пусть A непрерывен и q – произвольная полунорма из $\mathfrak{M}'$. По окрестности $S_1^{(q)}$ нуля в Y найдем окрестность нуля $U \in \mathfrak{U}$ в X такую, что $A[U] \subset S_1^{(q)}$. Так как $\mathfrak{M}$ фильтруется, то найдется такая полунорма p из $\mathfrak{M}$, что $S_r^{(p)} \subset U$ для некоторого $r > 0$ -, тем более $A[S_r^{(p)}] \subset A[U] \subset S_1^{(q)}$.

Пусть $x \in X$. Рассмотрим сначала случай $p(x) = 0$. Предположим, что $q(A(x)) = a \neq 0$. Тогда для шара $S_{\frac{a}{2}}^{(q)}$ найдется окрестность U нуля в X такая, что $A(u) \in S^q$, или $q(A(u)) \le \le \frac{1}{2}a$ для всех $u \in U$. Поскольку $p(x) = 0$, то $x \in U$, так что с одной стороны $q(A(x)) = a$, а с другой – $q(A(x)) \le \frac{1}{2}a$, откуда следует, что предположение $q(A(x)) \neq 0$ несостоятельно. Итак, соотношение $q(A(x)) \le M_{p,q}\, p(x)$ установлено в случае, когда $p(x) = 0$.

Предположим теперь, что $p(x) \neq 0$. Тогда $\frac{r}{p(x)} x \in S_r^{(p)}$, поэтому $A\left(\frac{r}{p(x)} x\right) \in S_1^{(q)}$, или $q\left(A\left(\frac{r}{p(x)} x\right)\right) \le 1$, откуда $q(A(x)) \le \le \frac{1}{r} p(x)$, что и требовалось.

Докажем достаточность условия. Для этого покажем, что прообраз $A^{-1}[S_r^{(q)}]$ каждого шара $S_r^{(q)}$ ($q \in \mathfrak{M}'$, $r > 0$) содержит некоторую окрестность нуля в X. Найдем полунорму $p \in \mathfrak{M}$ такую, что $q(A(x)) \le M_{p,q}\, p(x)$. Возьмем любое число c, удовлетворяющее неравенству $0 < c < \frac{r}{M_{p,q}}$. Тогда для $x \in S_c^{(p)}$ имеем $p(x) \le c$, откуда $q(A(x)) \le M_{p,q}\, c = c$, т.е. $A(x) \in S_r^{(q)}$, так что $x \in A^{-1}[S_r^{(q)}]$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Понятно, что в условиях предложения можно требовать существования непрерывной полунормы p, удовлетворяющей соотношению (I).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Критерий, высказанный в предложении XIУ, можно было сформулировать, понятно, и так: линейный оператор $A: (X, \mathfrak{M}) \to (Y, \mathfrak{M}')$ непрерывен в том и только в том случае, если для любой полунормы $q \in \mathfrak{M}'$ суперпозиция $q \circ A$ представляет собой непрерывную полунорму на X.

5.2. Рассмотрим фактор-пространство X/X_0 векторного пространства X по подпространству X_0. Пусть p – полунорма на

X. Поскольку шар $S_1^{(p)}$ – абсолютно выпуклое поглощающее множество в X, этими же свойствами будет обладать и множество $Q=\varphi[S_1^{(p)}]$ как образ множества $S_1^{(p)}$ при линейном отображении φ, действующем на X/X_0, следовательно, функционал Минковского $\tilde{p}$ множества $Q=\varphi[S_1^{(p)}]$ представляет собой полунорму на X/X_0, называемую ф а к т о р - п о л у н о р м о й полунормы p.

Установим связь полунормы p с ее фактор-полунормой.

I. Пусть p – полунорма на X и $\tilde{p}$ – ее фактор-полунорма. Тогда

$$\tilde{p}([x]) = \inf_{x\in[x]} p(x). \tag{2}$$

Действительно, если $x\in[x]$ и t – некоторое строго большее, чем $p(x)$ число, то $x\in\{p<t\}\subset tS_1^{(p)}$, значит, $[x]=\varphi(x)\in\varphi[tS_1^{(p)}]=tQ$. Тем самым, $\tilde{p}([x])\le t$, и ввиду произвольности t должно быть $\tilde{p}([x])\le p(x)$.

Подразумевая теперь под t произвольное число, строго большее чем $\tilde{p}([x])$, можем написать, что $[x]\in tQ=\varphi[tS_1^{(p)}]$, так что найдется $x_0\in tS_1^{(p)}$ такой, что $[x]=\varphi(x_0)$. Поскольку $tS_1^{(p)}=S_t^{(p)}=\{p\le t\}$, то $p(x_0)\le t$, тем более $\inf_{x\in[x]} p(x)\le t$, и, стало быть, вновь используя произвольность t, будем иметь $\inf_{x\in[x]} p(x)\le\tilde{p}([x])$. С учетом сказанного ранее это неравенство равносильно (2).

Полунорма $\tilde{p}$, вообще говоря, не является нормой даже в том случае, когда p – норма.

XII. Если p – норма на X, тогда полунорма $\tilde{p}$ является нормой в том и только в том случае, если X_0 замкнуто в нормированном пространстве (X,p).

Действительно, пусть $\tilde{p}$ – норма. Если $x_0\bar{\in}X_0$, то $\varphi(x_0)\ne\mathbb{O}$, следовательно, $\tilde{p}(\varphi(x_0))\ne 0$, т.е. $\inf_{x\in[x_0]} p(x)>0$, откуда $p(x_0)>0$. Окрестность $x_0+\{p<\frac{1}{2}p(x_0)\}$ точки x_0, очевидно, не пересекается с X_0, так что дополнение X_0' открыто, а X_0 – замкнуто.

Обратно, предположим, что X_0 замкнуто и элемент $[x]\in X/X_0$ таков, что $\tilde{p}([x])=\inf_{x\in[x]} p(x)=0$. Возьмем такое фильтрующееся семейство $\{x_\xi\}(\xi\in\Xi)$ элементов из $[x]$, что $p(x_\xi)\xrightarrow[\xi\in\Xi]{} 0$. Отсюда следует, что $x_\xi\xrightarrow[\xi\in\Xi]{}\mathbb{O}$ в пространстве (X,p). Так как X_0, а вместе с ним и $[x]=x+X_0(x\in[x])$ замкнуто, то $\mathbb{O}\in[x]$, следовательно, $[x]=\varphi(\mathbb{O})=\mathbb{O}$. Таким образом, $\tilde{p}$ – норма на X/X_0.

Пусть $\mathfrak{M}$ – мультинорма на X и $\mathfrak{M}/X_0$ – совокупность фактор-полунорм $\tilde{p}$, где $p \in \mathfrak{M}$. Из определения ассоциированной с мультинормой топологии следует, что фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}/X_0}$ порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\varepsilon\varphi[S_1^{(p_1)}] \cap \varphi[S_1^{(p_2)}] \cap \ldots \cap \varphi[S_1^{(p_n)}]$, где $\varepsilon > 0$; $p_1, p_2 \quad p_n \in \mathfrak{M}$, $n \in \mathcal{N}$. Поскольку фильтр окрестностей нуля в фактор-топологии $\tau_{\mathfrak{M}}/X_0$ порожден системой $\varepsilon\varphi[S_1^{(p_1)} \cap S_1^{(p_2)} \cap \ldots \cap S_1^{(p_n)}]$ (см. пункт 4.4) и имеет место включение $\varphi[S_1^{(p_1)} \cap S_1^{(p_2)} \cap \ldots \cap S_1^{(p_n)}] \subset \varphi[S_1^{(p_1)}] \cap \varphi[S_1^{(p_2)}] \cap \ldots \cap \varphi[S_1^{(p_n)}]$, то фактор-топология $\tau_{\mathfrak{M}}/X_0$, вообще говоря, сильнее топологии $\tau_{\mathfrak{M}/X_0}$, ассоциированной с мультинормой $\mathfrak{M}/X_0$. В некоторых случаях, однако, эти топологии совпадают.

Ш. Если мультинорма $\mathfrak{M}$ фильтруется, то $\tau_{\mathfrak{M}/X_0} = \tau_{\mathfrak{M}}/X_0$.

Для доказательства достаточно заметить, что если $\mathfrak{M}$ фильтруется, то совокупность множеств $\varepsilon\varphi[S_1^{(p)}]$ $(p \in \mathfrak{M},\ \varepsilon > 0)$ порождает фильтр окрестностей нуля как в топологии $\tau_{\mathfrak{M}/X_0}$, так и в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}/X_0$.

Если $\mathfrak{M}$ фильтруется, тогда мультинорму $\mathfrak{M}/X_0$ на X/X_0 назовем ф а к т о р - м у л ь т и н о р м о й мультинормы $\mathfrak{M}$.

5.3. Из мультинормированных пространств проще всего устроены нормированные пространства, поэтому неудивительно, что они наиболее подробно изучены. Мы кратко остановимся лишь на некоторых вопросах, касающихся нормированных пространств. Так как нередко в рассмотрении одновременно участвуют несколько нормированных пространств, и к тому же часто с конкретными векторными пространствами связывают некоторую "стандартную" норму, удобно обозначать норму элемента в разных векторных пространствах одним символом. Общепринято норму обозначать символом $\|\cdot\|$, так что, например, норма элемента x в нормированном пространстве X обозначается через $\|x\|$. Преимущество такой унификации состоит по крайней мере в том, что, приходя к рассмотрению нового векторного пространства, на котором предполагается заданной одна норма, не надо каждый раз оговаривать обозначение этой нормы. Конечно, необходимо отдавать себе отчет в том, где определена та или иная норма.

Пусть X – нормированное пространство. Из определения нормы непосредственно следует, что отображение $\rho : (x, y) \mapsto \|x-y\|$ – метрика на X . Равномерность метрического пространства (X, ρ) , очевидно, совпадает с равномерностью на X , которая определяется топологией данного нормированного пространства. Стало быть, топология нормированного пространства X совпадает с топологией, определяемой метрикой ρ, так что топология нормированного пространства метризуема, поэтому, например, секвенциальна, нормальна и т.д.

Приведем несколько примеров нормированных пространств. Мы предоставим читателю несложную проверку того, что рассмотренные в примерах функционалы удовлетворяют условиям определения нормы.

I. С векторным пространством $\mathbb{R}$ вещественных чисел связывают всегда норму $\|x\| = |x|$, равную модулю числа x. Топология нормированного пространства $\mathbb{R}$, очевидно, есть интервальная топология (см. пункт У. I.2).

2. Рассмотрим конечномерное векторное пространство X размерности n и фиксируем в X какой-либо базис B. Чаще всего с X связывают норму $\|x\| = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – коэффициенты в разложении элемента $x \in X$ по базису B. Об этой норме говорят как о е в к л и д о в о й. Иногда бывает удобнее рассматривать на X норму $\|x\|_m = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} |\alpha_k|$, или норму $\|x\|_l = \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|$. Ниже мы покажем, что все нормы на конечномерном векторном пространстве эквивалентны и приводят к одной линейной топологии (именно к определенной в пункте У.4.3. евклидовой топологии), так что выбор нормы на X нередко предопределен соображениями удобства в формулировках и доказательствах.

3. На векторном пространстве M_T ограниченных на множестве T вещественных функций рассматривают обычно р а в н о м е р н у ю (иногда ее называют ч е б ы ш о в с к о й) норму $\|x\| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$ $(x \in M_T)$. Нетрудно проверить, что топология нормированного пространства M_T есть топология сильной равномерности на M_T (см. пункт У.7.5).

4. Если T – топологическое пространство, то векторное пространство C_T непрерывных ограниченных на T функций представляет собой подпространство в M_T. Равномерная норма на C_T приводит, так же как и для пространства M_T, к топологии сильной равномерности на C_T.

Напомним, что если T компактно, то C_T состоит из ограниченных функций.

5. Рассмотрим векторное пространство l^1, состоящее из всех вещественных последовательностей $x: \{\xi_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, у которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$ сходится. С пространством l^1 связывают норму

$\|x\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$.

На векторном пространстве $\ell^p (1 \leq p < \infty)$, состоящем из вещественных последовательностей $x: \{\xi_n\} (n \in \mathbb{N})$, у которых сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$, норму определяют как $\|x\| = [\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p]^{1/p}$.

Сравнительно простое устройство топологии нормированного пространства естественно приводит к вопросу: как по данной линейной топологии на X узнать, н о р м и р у е м о ли топологическое векторное пространство X, т.е. можно ли задать на X норму так, что топология полученного нормированного пространства совпадет с исходной линейной топологией? Ниже мы установим критерий нормируемости топологического векторного пространства, известный под названием теоремы Колмогорова о нормируемости.

ТЕОРЕМА I (*5.6*). Топологическое векторное пространство X нормируемо в том и только в том случае, если оно отделимо и существует абсолютно выпуклая ограниченная окрестность нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X нормируемо, то, как отмечалось, оно метризуемо, следовательно, топология пространства X отделима. Если к этому добавить, что шар единичного радиуса с центром в нуле - абсолютно выпуклая и, на основании предложения X (5.I), ограниченная окрестность нуля, то доказательство второй части теоремы закончено.

Предположим теперь, что X - отделимое пространство и C - абсолютно выпуклая ограниченная окрестность нуля в X. Обозначим через p функционал Минковского множества C. Из ограниченности C следует, что εC $(\varepsilon > 0)$ - базис фильтра $\mathfrak{V}$, откуда, так как $\overset{\circ}{S}{}_1^{(p)} \subset C$, получаем, что $\{\varepsilon \overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}\}$ $(\varepsilon > 0)$ - также базис фильтра $\mathfrak{V}$.

Покажем, что p - норма. В самом деле, возьмем $x \neq \mathbb{O}$. Используя свойство отделимости X, найдем окрестность $V \in \mathfrak{V}$ такую, что $x \bar{\in} V$. Так как $\{\varepsilon \overset{\circ}{S}{}^{(p)}\}$ $(\varepsilon > 0)$ - базис фильтра $\mathfrak{V}$, то $x \bar{\in}$ $\varepsilon_0 \overset{\circ}{S}{}_1^{(p)}$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, а это означает, что $p(x) \geq \varepsilon$, так что $p(x) \neq 0$. Теорема полностью доказана.

5.4. Рассмотрим нормированные пространства $X; Y$ и линейный оператор $\mathcal{A}: X \to Y$. Обозначим через $H = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, $K = \{y \in Y : \|y\| \leq 1\}$ шары единичного радиуса в X, Y, отвечающие заданным нормам. Элемент $\|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{x \in H} \|\mathcal{A}(x)\|$ из $\mathbb{R}$ называется н о р м о й линейного оператора $\mathcal{A}$. Заметим, что в записи $\|\mathcal{A}\|$ знак нормы относится к оператору $\mathcal{A}$, тогда как символ $\|\mathcal{A}(x)\|$ означает норму элемента $\mathcal{A}(x)$ в Y.

Покажем, что норма оператора $\mathcal{A}$ равна $\|\mathcal{A}\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\mathcal{A}(x)\|$. Действительно, $\sup\limits_{\|x\|=1}\|\mathcal{A}(x)\|\leq\sup\limits_{x\in H}\|\mathcal{A}(x)\|$. С другой стороны, если $0\neq\|x\|\leq 1$, то $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1$, и $\mathcal{A}\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)=\frac{1}{\|x\|}\|\mathcal{A}(x)\|\geq\|\mathcal{A}(x)\|$, откуда $\sup\limits_{x\in H}\|\mathcal{A}(x)\|\leq\sup\limits_{\|x\|=1}\|\mathcal{A}(x)\|$, что и требовалось.

I. Пусть $\mathcal{A}\in L(X,Y)$. Тогда

$$\|\mathcal{A}(x)\|\leq\|\mathcal{A}\|\cdot\|x\|. \tag{3}$$

для всех $x\in X$. Неравенство (3) называют нормативным.

Результат предложения тривиален, когда $\|\mathcal{A}\|=+\infty$, либо если $x=\mathbb{O}$. Предположим, что $\|\mathcal{A}\|=a\in\mathbb{R}$, и рассмотрим некоторое $x\neq\mathbb{O}$. Элемент $x'=\frac{1}{\|x\|}x$ входит в H, и из определения нормы оператора следует, что $\|\mathcal{A}(x')\|\leq\|\mathcal{A}\|$, откуда $\left\|\mathcal{A}\left(\frac{1}{\|x\|}x\right)\right\|=\frac{1}{\|x\|}\|\mathcal{A}(x)\|\leq\|\mathcal{A}\|$, что и требовалось.

II. Предположим, что положительное число $t>0$ таково, что $\|\mathcal{A}(x)\|\leq t\|x\|$ для всех $x\in X$. Тогда $\|\mathcal{A}\|\leq t$.

Действительно, для $x\in H$ согласно условиям имеем $\|\mathcal{A}(x)\|\leq t\|x\|\leq t$, откуда $\|\mathcal{A}\|=\sup\limits_{x\in H}\|\mathcal{A}(x)\|\leq t$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из предложения II следует, в частности, что норма оператора $\mathcal{A}$ может быть найдена как $\|\mathcal{A}\|=\inf\limits_{\|\mathcal{A}(x)\|\leq t\|x\|} t$.

III. Норма оператора $\mathcal{A}\in L(X,Y)$ конечна в том и только в том случае, если $\mathcal{A}$ ограничен, т.е. ограниченное в X множество переводит в множество, ограниченное в Y (см. пункт 4.3).

Пусть $\|\mathcal{A}\|<+\infty$ и E – ограниченное множество в X, т.е. $E\subset rH$ для некоторого $r>0$. Тогда $\mathcal{A}[E]\subset\mathcal{A}[rH]=r\mathcal{A}[H]\subset r\|\mathcal{A}\|K$ – ограниченное множество в Y.

Обратно, предположим, что образ $\mathcal{A}[E]$ всякого ограниченного множества $E\subset X$ представляет собой ограниченное множество в Y. Тогда найдется $t>0$ такое, что $\mathcal{A}[H]\subset tK$, откуда $\|\mathcal{A}(x)\|\leq t$ для $x\in H$, и $\|\mathcal{A}\|=\sup\limits_{x\in H}\|\mathcal{A}(x)\|<+\infty$.

IV. Пусть X,Y,Z – нормированные пространства, $\mathcal{A}_1\in(X,Y)$, $\mathcal{A}_2\in L(Y,Z)$ – два линейных оператора. Тогда $\|\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1\|\leq\|\mathcal{A}_1\|\|\mathcal{A}_2\|$. Если $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ – ограниченные операторы, то $\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1$ также ограничен.

Действительно, из нормативного неравенства для $x\in\Omega_{\mathcal{A}_2\circ\mathcal{A}_1}$ имеем

$$\|A_2 \circ A_1(x)\| = \|A_2(A_1(x))\| \leq \|A_2\| \|A_1(x)\| \leq \|A_2\| \|A_1\| \|x\|,$$

следовательно, $\|A_2 \circ A_1\| \leq \|A_1\| \|A_2\|$. Ограниченность суперпозиции следует из установленной оценки и ограниченности операторов A_1, A_2 (см. предложение Ш).

У. Оператор $A \in L(X, Y)$ непрерывен в том и только в том случае, если он ограничен.

Ограниченность непрерывного оператора $A \in L(X, Y)$ следует из предложения П (4.3).

Обратно, если A ограничен, тогда имеет место неравенство (3), и непрерывность оператора A следует из предложения XIУ (5.I).

УI. Отображение $A \longmapsto \|A\|$, заданное на векторном пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из X в Y, представляет собой норму на $\mathcal{L}(X, Y)$.

Действительно, пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $A = A_1 + A_2$. Для $x \in H$ имеем

$$\|A(x)\| = \|A_1(x) + A_2(x)\| \leq \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|,$$

откуда и $\|A\| = \sup\limits_{x \in H} \|A(x)\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$ – неравенство треугольника установлено.

Обозначим через $A_0 = \alpha A$ $(\alpha \in R)$ и возьмем $x \in H$. Тогда $\|A_0(x)\| = \|\alpha A(x)\| = |\alpha| \, \|A(x)\|$, откуда

$$\|A_0\| = \sup_{x \in H} \|A_0(x)\| = |\alpha| \sup_{x \in H} \|A(x)\|.$$

Предположим, что $\|A\| = 0$ у некоторого $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда $0 \leq \|A(x)\| \leq 0 \cdot \|x\|$, откуда $A(x) = \mathbb{O}$ для всех $x \in X$, так что A – нулевой оператор.

5.5. Поскольку локально выпуклое пространство мультинормируемо, оказывается возможным распространять линейный непрерывный функционал с подпространства локально выпуклого пространства на все пространство с сохранением указанных его свойств.

ТЕОРЕМА 2(5.6). Пусть X – локально выпуклое пространство, X_0 – его подпространство и f_0 – линейный непрерывный функционал на X_0. Тогда существует линейный непрерывный на X функционал f такой, что $f(x) = f_0(x)$ для $x \in X_0$. Если X – нормированное пространство, то распространение f можно выбрать так, что $\|f\| = \|f_0\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{M}$ фильтрующуюся мультинорму на X, состоящую из всех непрерывных на X полунорм. Сужение мультинормы $\mathfrak{M}$ на X_0 – фильтрующаяся мультинорма на X_0, и поскольку f_0 непрерывен, найдутся такие $p \in \mathfrak{M}$, $K > 0$, что $|f_0(x)| \leq Kp(x)\ (x \in X_0)$. В силу теоремы 3(3.6) существует линейное распространение f функционала f_0 с X_0 на X с сохранением неравенства $|f(x)| \leq Kp(x)\ (x \in X)$, а из непрерывности p следует, что функционал f непрерывен.

Если X – нормированное пространство, то из непрерывности f_0 вытекает, что $\|f_0(x)\| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|\ (x \in X_0)$, следовательно, существует распространение f функционала f_0 такое, что $\|f(x)\| \leq \|f_0\| \cdot \|x\|\ (x \in X)$. Отсюда $\|f\| \leq \|f_0\|$, что с очевидным неравенством $\|f_0\| \leq \|f\|$ дает требуемое равенство.

I. Пусть X – локально выпуклое пространство, p – непрерывная полунорма на X и x_0 – некоторый элемент из X. Тогда существует линейный непрерывный функционал f на X такой, что $f(x_0) = p(x_0)$ и $|f(x)| \leq p(x)\ (x \in X)$.

Доказательство следует непосредственно из следствия к теореме 3 (3.6).

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть X – отделимое локально выпуклое пространство и x_0 – ненулевой элемент из X. Тогда существует линейный непрерывный функционал на X такой, что $f(x_0) \neq 0$.

Отделимость X гарантирует существование такой непрерывной полунормы p на X, что $p(x_0) \neq 0$, и остается лишь воспользоваться результатом доказанного предложения.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если X – нормированное пространство и x_0 – ненулевой элемент из X, то найдется линейный непрерывный функционал f на X такой, что $f(x_0) = \|x_0\|$ и $\|f\| = 1$.

Результат следствия I называют нередко теоремой о достаточном числе линейных непрерывных функционалов в отделимом локально выпуклом пространстве.

5.6. Здесь мы обсудим структуру линейных топологий в конечномерном векторном пространстве.

Пусть X – конечномерное векторное пространство размерности n. Фиксируем в X базис $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и рассмотрим на X норму $q: x \mapsto \max\limits_{k=1,2,\dots,n} |\alpha_k|$, где α_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ – координаты вектора x в разложении по базису B.

ЛЕММА I. Любая отделимая линейная топология τ на X совпадает с топологией μ нормированного пространства (X, q).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\tau \leq \mu$. Пусть $V \in \mathfrak{V}^{\tau}$, где $\mathfrak{W}^{\tau}$ – фильтр окрестностей нуля в топологии τ. Используя предложение У (4.I), возьмем $\mathcal{U}\in\mathfrak{W}^{\tau}$ такую, что $\underbrace{\mathcal{U}+\mathcal{U}+\ldots+\mathcal{U}}_{n}\subset V$. Так как $\mathcal{U}$ – поглощающее множество (см. предложение Ш (4.I)), то для каждого e_K можно указать такое $z_K>0$, что $\alpha e_K\in\mathcal{U}$, если $|\alpha|\leq z_K$. Полагая $z=\min\limits_{K=1,2,\ldots,n} z_K$, получаем, что $\alpha e_K\in\mathcal{U}$ при $|\alpha|\leq z$.

Рассмотрим теперь $x\in\{q<z\}$. Обозначая через $\alpha_K\,(K=1,2,\ldots,n)$ координату вектора x с номером K, по определению q получаем $|\alpha_K|\leq q(x)<z$, следовательно, $\alpha_K e_K\in\mathcal{U}$, а тогда $x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\ldots+\alpha_n e_n\in V$. Поскольку $\{q<z\}$ – окрестность нуля в топологии μ, то мы тем самым доказали, что в любой окрестности $V\in\mathfrak{W}^{\tau}$ содержится некоторая окрестность из $\mathfrak{W}^{\mu}$, т.е. что $\tau\leq\mu$.

Для доказательства соотношения $\tau\geq\mu$ достаточно показать, что $S_1^{(q)}=\{q\leq 1\}$ содержит некоторую окрестность нуля в топологии τ. Рассмотрим пространство R^B и обозначим через $\psi: X\to R^B$ канонический изоморфизм пространств X и R^B. Определим на R^B норму p соотношением $p(t)=q(\psi^{-1}(t))\ (t\in R^B)$. Очевидно, что ψ оказывается при этом гомеоморфизмом нормированных пространств (X,q) и (R^B, p). Обозначим $S=\psi[S_1]$. Непосредственно из определения S_1 и ψ следует, что $S=K^n$, где K – замкнутый единичный шар в R. Так как K – замкнутое и ограниченное в R множество (см. предложение УП из У. 6.3.), то в силу теоремы 2 (5.5) множество S также компактно, следовательно, компактно и множество $S_1=\psi^{-1}[S]$ как образ компактного множества при непрерывном отображении (см. теорему 3 (5.5)). Множество $\{q=1\}$, будучи замкнутым в топологии μ подмножеством компактного множества S_1, само компактно. Но, по доказанному, $\tau\leq\mu$, а это означает непрерывность тождественного отображения $I:(X,\mu)\to(X,\tau)$. Еще раз используя теорему 3 (5.5), получаем, что множество $\{q=1\}$ компактно и в топологии τ.

Обозначим через $\mathcal{L}^{\tau}$ базис фильтра $\mathfrak{W}^{\tau}$, состоящий из замкнутых множеств. Так как топология τ отделима, то $\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{L}^{\tau}}\mathcal{U}=\{\Theta\}$, поэтому $\bigcap\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{L}}\mathcal{U}\cap\{q=1\}=\varnothing$. Но множество $\{q=1\}$ компактно, так что в силу теоремы 1 (5.5) найдется окрестность $V\in\mathcal{L}^{\tau}$ такая, что $V\cap\{q=1\}=\neq\varnothing$. Пусть $W\in\mathcal{L}^{\tau}$ – уравновешенная окрестность, содержащаяся в V. Докажем, что $W\subset S_1$. Действительно, предположим, что нашелся элемент $y\in W$ такой, что $q(y)>1$. Тогда $\frac{1}{q(y)}y\in\{q=1\}$ и $\frac{1}{q(y)}y\in\frac{1}{q(y)}W$. Но поскольку W – уравновешенная окрестность и $0<\frac{1}{q(y)}<1$, то $\frac{1}{q(y)}y\in W$, а тогда $\frac{1}{q(y)}y\in W\cap\{q=1\}$, что невозможно. Таким образом, нашлась окрестность $W \in \mathfrak{W}^{\tau}$, содержащаяся в S_1, а это и означает, что $\mu \leq \tau$, т.е. вместе с доказанным ранее, что $\mu = \tau$. Лемма доказана.

Следующий результат, называемый теоремой Рисса, показывает, что отделимая линейная топология на конечномерном пространстве предопределяется векторной структурой данного пространства.

ТЕОРЕМА 3(5.6). Отделимая линейная топология на конечномерном векторном пространстве единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, двух различных отделимых линейных топологий на конечномерном векторном пространстве быть не может, поскольку каждая из них, согласно лемме, должна совпадать с топологией μ.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть p, q – две нормы на конечномерном векторном пространстве X. Топологии нормированных пространств (X,p), (X,q) отделимы, так что из теоремы Рисса следует, что нормы p, q эквивалентны. Иначе можно сказать, что любые две нормы на конечномерном векторном пространстве эквивалентны.

Посмотрим теперь, как дело обстоит в случае, когда топология τ может и не быть отделимой. Рассмотрим замыкание $X_0 = \overline{\{0\}}$. Как было установлено в предложении IX (4.1), множество X_0 линейно. Выберем в X базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ так, что $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ $(m \leq n)$ образуют базис в подпространстве X_0. Определим на X полунорму, полагая $p(x) = \max\limits_{k=m+1,\ldots,n} |\alpha_k|$, где $\{\alpha_k\}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ – координаты вектора x в разложении по заданному базису.

Обозначим через ν топологию полунормированного пространства (X,p).

ЛЕММА 2. Линейная топология τ на X совпадает с определенной выше топологией ν.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E_k = \{\alpha e_k : \alpha \in R, |\alpha| \leq 1\}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ и покажем, что при $k > m$ множества E_k ограничены в топологии τ. Действительно, пусть V – некоторая окрестность нуля и $\mathcal{U}$ – уравновешенная окрестность нуля, лежащая в V. Так как $\mathcal{U}$ – поглощающее множество, а n – фиксированное натуральное число, то найдется $r > 0$ такое, что $\beta e_k \in \mathcal{U}$ для $|\beta| \leq r$ и $k = 1,2,\ldots,n$. Тогда $\beta(\alpha e_k) \in \alpha\mathcal{U}$, а поскольку $\alpha\mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset V$ при $|\alpha| \leq 1$, то $\beta E_k \subset V$, следовательно, E_k поглощается окрестностью V, а вследствие произвольности V множество E_k ограничено.

Множество X_0 также ограничено, ибо, по определению, поглощается каждой окрестностью нуля. Из проведенных рассуждений с помощью предложения У (4.I) следует, что множество $X_0+E_{m+1}+ +\ldots+E_n$ ограничено. Заметим теперь, что $X_0+E_{m+1}+\ldots+E_n=S_1^{(p)}$, и из ограниченности множества $S_1^{(p)}$ можно заключить, что для любой окрестности $V\in\mathfrak{W}^{\tau}$ найдется $z>0$ такое, что $zS_1^{(p)}\subset V$, а это, в свою очередь, означает справедливость соотношения $\nu\geqslant\tau$ между топологиями τ и ν.

Обозначим через $Y=\mathcal{L}(\ell_{m+1},\ldots,\ell_n)$ линейную оболочку множества $\{\ell_{m+1},\ldots,\ell_n\}$. Легко видеть, что топологии τ,ν, индуцированные на Y топологиями τ,ν, отделимы, так что согласно теореме 3 они совпадают.

Определим отображение $P: x\mapsto\sum\limits_{k=m+1}^{n}\alpha_k e_k$ $\left(x=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)$, действующее на подпространство Y, и проверим его непрерывность как отображения из (X,τ) в (Y,ν). Отметим прежде всего, что $P^{-1}[\mathbb{O}]= =X_0$, а тогда, в силу теоремы 2 (2.6), снижение $P_{X_0}: X/X_0\to Y$ оператора P на фактор-пространство X/X_0 представляет собой взаимно однозначное отображение множества X/X_0 на Y. Пусть σ – какая угодно линейная топология на X/X_0, относительно которой P_{X_0} непрерывен (существование такой топологии гарантирует предложение I(4.4)). Поскольку $\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{W}^{\nu}}P_{X_0}^{-1}[V]=P_{X_0}^{-1}[\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{W}^{\nu}}V]=P_{X_0}^{-1}[\mathbb{O}]=\mathbb{O}$, а множества $P_{X_0}^{-1}[V]$ входят в фильтр окрестностей нуля в топологии σ, то σ отделима. Кроме того, поскольку X_0 замкнуто, то фактор-топология τ/X_0 также отделима, и по лемме I $\sigma=\tau/X_0$. Следовательно, P_{X_0} непрерывен и в топологии τ/X_0 на X/X_0, а тогда непрерывен и оператор $P=P_{X_0}\circ\varphi$, где φ – канонический гомоморфизм X на X/X_0.

Пусть S – отвечающий полунорме p шар единичного радиуса в пространстве Y. Так как оператор $P:(X,\tau)\to(Y,\nu)$ непрерывен, то $P^{-1}[S\cap Y]$ – окрестность нуля в (X,τ). Из определения S имеем $P^{-1}[S\cap Y]=S_1$, где $S_1=\{p\leq 1\}$ – отвечающий p единичный шар в пространстве X. Итак, получили, что S_1 – окрестность нуля в (X,ν), а отсюда, в свою очередь, следует неравенство $\nu\leq\tau$. Доказанный факт, вместе со сказанным выше, означает, что $\nu=\tau$.

ТЕОРЕМА 4 (5.6). Топологии ρ,λ на конечномерном векторном пространстве X связаны соотношением $\lambda\leq\rho$ в том и только в том случае, если $\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{W}^{\rho}}V\subset\bigcap\limits_{W\in\mathfrak{W}^{\lambda}}W$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\rho\geqslant\lambda$, то, по определению отношения порядка в множестве топологий на X, это означает, что $\mathfrak{W}^{\rho}\supset\mathfrak{W}^{\lambda}$. Следовательно, $\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{W}^{\rho}} V\subset\bigcap\limits_{W\in\mathfrak{W}^{\lambda}} W$.

Обратно, пусть $X_0^{\rho}=\bigcap\limits_{V\in\mathfrak{W}^{\rho}} V\subset\bigcap\limits_{W\in\mathfrak{W}^{\lambda}} W=X_0^{\lambda}$. Выберем базис $\{e_1,\dots,e_n\}$ в X так, что $\{e_1,\dots,e_m\}$ $(m\le n)$ – базис в X_0^{ρ}, а $\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_k\}$ $(m\le k\le n)$ – базис в X_0^{λ}. Обозначим через $S_1^{(p)}$, $S_1^{(q)}$ шары единичного радиуса, отвечающие полунормам

$$p: x\mapsto \max_{k=m+1,\dots,n}|\alpha_k|,\quad q: x\mapsto \max_{\ell=k+1,\dots,n}|\alpha_\ell| \qquad \left(x=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right)$$

соответственно. Очевидно, что $S_1^{(p)}\subset S_1^{(q)}$, а в силу леммы топологии ρ и λ совпадают с топологиями полунормированных пространств (X,p) и (X,q) соответственно. Из сказанного можно сделать вывод о том, что $\rho\geqslant\lambda$.

СЛЕДСТВИЕ. Отделимая линейная топология на конечномерном векторном пространстве X сильнее любой неотделимой линейной топологии на X.

Следующие два полезных факта посвящены линейным операторам, некоторым образом связанным с конечномерными векторными пространствами.

I. Пусть X, Y – топологические векторные пространства, причем топология пространства X отделима. Тогда всякий линейный оператор $\mathcal{A}: X\to Y$ с конечномерной областью определения X' непрерывен.

Обозначим через τ' индуцированную из X топологию пространства X', а через σ – какую-либо линейную топологию на X', относительно которой оператор $\mathcal{A}$ непрерывен (существование такой топологии гарантирует предложение I (4.4)). Согласно следствию из теоремы 4 получаем, что во всяком случае $\sigma\le\tau'$, поскольку τ' отделима, следовательно, $\mathcal{A}$ непрерывен и относительно топологии τ'.

II. Пусть X, Y – векторные пространства, причем Y конечномерно и заданная на нем линейная топология отделима. Тогда оператор $\mathcal{A}\in L(X,Y)$ непрерывен в том и только в том случае, если его ядро $X_0=\mathcal{A}^{-1}[\Theta]$ замкнуто.

Действительно, пусть X_0 замкнуто. Тогда фактор-пространство X/X_0 отделимо. Снижение $\mathcal{A}_{X_0}$ оператора $\mathcal{A}$ на X/X_0 существует и взаимно однозначно, что следует из свойств X_0 (см. теорему 2 (2.6)). Поскольку $\mathcal{A}_{X_0}$ взаимно однозначно, а Y конечномерно, то X/X_0 также конечномерно (см. замечание 5 к теореме I (2.6)), и по предложению I оператор $\mathcal{A}_{X_0}$ непрерывен. Отсюда и из непрерывности канонического гомоморфизма φ следует непрерывность оператора $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{X_0}\circ\varphi$.

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ непрерывен. Тогда в силу отделимости топологии на Y одноточечное множество $\{O\}$ замкнуто, а, согласно теореме I (2.5), прообраз $\mathcal{A}^{-1}[O]$ замкнутого множества в Y представляет собой замкнутое множество в X. Предложение доказано.

Итак, мы нарисовали исчерпывающую картину свойств линейных топологий на конечномерном векторном пространстве.

Литература

К главе У:

1. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., "Наука", 1968.
2. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии, функциональные пространства, сводка результатов. М., "Наука", 1975.
3. Келли Дж. Общая топология. М., "Наука", 1968.

К главе УI:

1. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра. М., Физматгиз, 1962.
2. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1959.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М., "Наука", 1966.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
5. Робертсон А.П., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1967.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ+)

+) в указатель включены лишь основные понятия и именные теоремы

Глеб Павлович Акилов

Владимир Николаевич Дятлов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Ответственный редактор С.С.Кутателадзе

Редактор М.Н.Рашевская

Подписано в печать 11.12.75. МН 07040

Бумага 60x84, I/I6. I0 п.л., I0,4 уч.-изд.л. Тираж I000 экз.

Заказ № 983. Цена 40 коп.

Ротапринт НГУ 630090, Новосибирск

Цена 40 коп.