Г. П. Акилов
В. Н. Дятлов

ОСНОВЫ математического АНАЛИЗА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Г. П. АКИЛОВ, В. Н. ДЯТЛОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук *Ю. Г. Решетняк*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
Новосибирск · 1980

УДК 517

Основы математического анализа. Акилов Г. П., Дятлов В. Н. Новосибирск, «Наука», 1980. 336 с.

Монография посвящена систематическому изложению основ теории топологических, равномерных и топологических векторных пространств, представляющих собой главные компоненты всех рассматриваемых в анализе структур. Широкое использование предварительно подготовленного аппарата —необходимых сторон теории множеств — позволяет кратко и доступно демонстрировать наиболее существенные моменты в рассматриваемых вопросах.

Книга адресована всем заинтересованным в изучении и использовании современного математического анализа.

Глеб Павлович Акилов,
Владимир Николаевич Дятлов

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Ответственный редактор *Юрий Григорьевич Решетняк*

Утверждено к печати
Институтом математики СО АН СССР

Редактор издательства *Л. В. Нонкина*
Художественный редактор *Т. Ф. Каминина*
Художник *А. И. Смирнов*
Технические редакторы *А. В. Семкова, А. В. Сурганова*
Корректоры *В. А. Князева, Л. А. Щербакова*

ИБ № 9940

Сдано в набор 22.11.78. Подписано к печати 25.10.79. МН-02288. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 20. Тираж 7100 экз. Заказ 334. Цена 1р. 60к.

Издательство «Наука», Сибирское отделение.
630099, Новосибирск, 99, Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука».
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

А $\frac{20203 - 705}{055(02) - 80}$ 2.79.1702030000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее время все чаще под (математическим) анализом понимают исследование множеств, наделенных характерными для анализа структурами, а именно структурами, позволяющими говорить о сходимости, а также исследование отображений таких множеств. Отличительная особенность анализа—наличие сходимости—выделяет набор его структур. Несмотря на многогранность структур анализа, оказывается, что они созданы из простейших структур трех типов: порядковых, отражающих сравнение, топологических, дающих понятие близости, и алгебраических. Последовательному изложению этих структур и посвящена настоящая книга, и в этом смысле она представляет собой изложение основ анализа. За ее пределами остался, по сути дела, весь анализ, и можно сказать, что материал данной книги мы склонны рассматривать как первый (и совершенно необходимый) этап в изучении анализа.

Система ссылок и обозначений в книге основана на том, что каждый параграф разбит на пункты и в пределах каждого пункта утверждения, не имеющие решающего, принципиального значения (мы называем их при необходимости предложениями), расположены в порядке возрастания номеров. Нумерация теорем и лемм своя в каждом параграфе. После порядкового номера теоремы указаны номера параграфа и главы, в которых она расположена, и эти данные служат ориентиром при ссылках на теоремы. При ссылке на пункт указывается номер параграфа и номер пункта в параграфе, если пункт расположен в текущей главе, и перед указанными данными ставится номер главы, если требуемый пункт выходит за пределы текущей главы. При ссылке на предложение, не вошедшее в данный пункт, после номера предложения поставлен номер пункта, в котором необходимое предложение содержится.

Работая над книгой, мы обсуждали написанное с нашими коллегами и друзьями. Их мнение способствовало улучшению содержания книги, и мы считаем своим приятным долгом выразить им глубокую благодарность. В полном объеме с рукописью ознакомились Б. М. Макаров, С. В. Нагаев и Ю. Г. Решетняк, которым мы весьма признательны за ценные замечания.

Глава I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Уже отметившее свой столетний юбилей понятие множества приобрело настолько широкое распространение в математике, что в настоящее время без него немыслимо изложение никакого сколько-нибудь значительного раздела математики и тем более анализа, который как раз и занимается изучением множеств, наделенных различными структурами.

Несостоятельность точки зрения на множество как на собрание предметов, объединенных каким-либо признаком, ощущал уже и сам создатель теории множеств Г. Кантор. И действительно, вскоре после появления работ Г. Кантора были обнаружены так называемые антиномии (противоречия) теории множеств, которые превратили ощущение несостоятельности в точное утверждение. Поскольку описанные события имели место еще в прошлом веке, сегодня уже немыслимо претендующее хотя бы на малую степень научности руководство, предполагающее у читателя лишь интуитивную точку зрения на множество (речь, разумеется, идет о руководствах, в которых используется понятие множества). Так как мы не рассчитываем, что читатель владеет какой-либо иной точкой зрения, мы и предпринимаем этот довольно обширный экскурс в область, хотя и лежащую в основаниях анализа, но не являющуюся его основой в нашем понимании этого слова. Впрочем, есть соображения и сугубо практического свойства, побудившие нас углубиться в теорию множеств. Дело в том, что большая или даже бо́льшая часть понятий, которыми оперирует анализ, возникает в рамках теории множеств, и потому, желая быть понятыми, и понятыми правильно, мы не рискуем возлагать на интуицию читателя бремя, которое может оказаться для нее непосильным.

Поскольку идея об абсолютной формализации математики, по-видимому, совершенно бесплодна, возникает вопрос об уровне формализации, т. е. о проведении границы между «общепонятным» и точно формулируемым. В нашем случае решение этого вопроса осложняется тем, что мы не предполагаем у читателя каких-либо специальных точных познаний в какой-либо области математики, и в частности в математической логике. Отдавая отчет в некоторой непрочности занятой нами позиции, мы будем исходить из предпосылки, что читатель лишь в области практической логики математики обладает интуицией, достаточно богатой для того, чтобы истинность высказывания «все черти зеленые» не была для него ни неожиданной, ни тем более спорной (понятно, что имеется в виду читатель — атеист).

Эта гипотеза о читателе предопределила и выбор принятой нами аксиоматики теории множеств. Из двух наиболее «ходовых» систем: схемы Цермело — Френкеля и системы Гёделя — Бернайса мы остановились на последней прежде всего из-за ее меньшей зависимости от математической логики. Поскольку все же такая зависимость имеется, мы вынуждены были определенным образом редуцировать традиционное изложение, чтобы избежать невозможных в наших условиях формализованных утверждений. Изменениям (впрочем, несущественным) подверглись и формулировки отдельных аксиом и, главное, принятый в большинстве руководств порядок их следования. Вследствие сказанного мы не отважимся употреблять термин «аксиома», заменив его более нейтральным: «принцип».

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Упоминавшиеся выше антиномии интуитивной теории множеств связаны не только с допущением в качестве «законных» слишком «обширных» множеств, но и с возможностью оперировать такими множествами, как несомненно «правомерными». В связи с этим естественными выглядят два подхода к аксиоматизации теории множеств. Первый состоит в предании анафеме «чрезмерно больших» множеств, в запрещении самого упоминания о них. Такая установка приводит к аксиоматике Цермело — Френкеля. Второй подход (идея его восходит к одному из величайших математиков XX в. Дж. фон Нейману) заключается в том, что все «множества» разделяются на два типа: «настоящие» множества и множества, имеющие «чрезмерно богатый» состав, т. е. как бы «сверхмножества» (они-то и называются (собственными) классами). Различие в отношении к множествам этих типов проявляется, по существу, лишь в правилах оперирования ими — для множеств второго типа они значительно жестче, чем для множеств первого. Этого уже достаточно, чтобы избежать по крайней мере известных антиномий (разумеется, теоретическая возможность обнаружения новых противоречий этим не исключается). Такая концепция и приводит к системе аксиом Гёделя — Бернайса.

1.1. В аксиоматике Гёделя — Бернайса единственным видом объектов являются *классы* и единственным отношением между ними — *отношение принадлежности* (или *включения*) $\in$. Если P и Q — классы, находящиеся в отношении принадлежности, то пишут $P \in Q$ и говорят, что (класс) P *принадлежит* (классу) Q (или *включен* в (класс) Q). При этом P называют *элементом* класса Q [1]. Если класс P не есть элемент класса Q, т. е. если неверно, что $P \in Q$, то пишут $P \notin Q$ (или $P \overline{\in} Q$).

Оставаясь на интуитивном уровне, можно истолковывать класс как собрание (коллекцию, коллектив) всех объектов, обладающих некоторым свойством (например, свойством принадлежать данному классу), т. е. фактически отождествить понятие класса с понятием свойства и отношение принадлежности (классу) с отношением обладания (свойством).

Отсутствие в аксиоматике Гёделя — Бернайса объектов, отличных от классов, отражает идею неисчерпаемости реального мира, которая, как известно, заключается в том, что всякая сущность складывается как из элементов из сущностей более простого типа. Так как в процессе познания мира мы по необходимости должны ограничивать уровень детализации, у нас создается между тем иллюзорное представление о существовании неделимых сущностей, атомов, которые, будучи составными элементами каких-то структур, сами уже не распадаются на элементы. Надо полагать, что такое представление, если только его не абсолютизировать, приемлемо и при изучении теории множеств: в конкретных ситуациях, по-видимому, всегда можно указать такие классы из числа рассматриваемых, которые просто нет надобности разлагать на составные части, в связи с чем эти классы можно считать атомарными объектами, но, разумеется, подчеркиваем это еще раз, лишь в данной ситуации.

Возвратимся, однако, к более формальному изложению.

Класс P называется *подклассом* класса Q, если каждый элемент класса P служит элементом также и класса Q, т. е. если для произвольного x соотношение $x \in P$ влечет соотношение $x \in Q$. То обстоятельство, что класс P есть подкласс класса Q, записывают в виде $P \subset Q$ или в виде $Q \supset P$. При этом нередко говорят, что класс P *содержится* в классе Q или что (класс) Q *содержит* (класс) P.

Введенное данным определением отношение «один класс содержится в другом классе» т р а н з и т и в н о:

---

[1]) Возможны и употребительны и другие синонимические выражения для обозначения включения $P \in Q$, например «P входит в Q» и т. д.

I. *Если P, Q, R — такие классы, что $P \subset Q$ и $Q \subset R$, то $P \subset R$.*

Следующий далее принцип провозглашает антисимметричность упомянутого отношения.

Принцип I. *Классы P и Q совпадают тогда и только тогда, когда одновременно имеют место оба соотношения: $P \subset Q$ и $Q \subset P$.*

Этот принцип, называемый обычно принципом (равно) *объемности*, можно истолковать так, что класс полностью определяется составом своих элементов.

Из данных классов можно образовывать новые классы, сообразуясь с правилами, изложенными в следующих принципах.

Принцип II. *Если P и Q — классы, то существует класс R, состоящий из всех таких x, что одновременно $x \in P$ и $x \in Q$*[2]). Класс R называется *пересечением* классов P и Q и обозначается символом $P \cap Q$.

Очевидно, $P \cap Q = Q \cap P$, и если кроме классов P и Q имеется еще класс S, то $(P \cap Q) \cap S = P \cap (Q \cap S)$. Последнее соотношение делает корректным обозначение $P \cap Q \cap S$.

Принцип III. *Каков бы ни был класс P, существует такой класс P', что соотношение $x \in P'$ равносильно тому, что $x \notin P$.* Класс P' называется *дополнительным* по отношению к классу P.

Поскольку соотношения $x \in P'$ и $x \notin P$ равносильны, будут равносильны и соотношения $x \in P$ и $x \notin P'$. Таким образом

II. *Каждый класс дополнителен по отношению к своему дополнительному классу: $(P')' = P$.*

Пусть P и Q — классы. Класс $(P' \cap Q')'$ называется *объединением* классов P и Q и обозначается через $P \cup Q$.

III. *Соотношение $x \in P \cup Q$ означает, что имеет место по крайней мере одно из двух соотношений: $x \in P$ или $x \in Q$.*

Действительно, включение $x \in P \cup Q$ равносильно соотношению $x \notin P' \cap Q'$, а это на основании соответствующих определений означает, что либо $x \notin P'$ (и, стало быть, $x \in P$), либо $x \notin Q'$ (и, следовательно, $x \in Q$).

Из определения следует: $P \cup Q = Q \cup P$ для любых классов P и Q. С помощью предложения III получаем, кроме того, что $(P \cup Q) \cup S = P \cup (Q \cup S)$ для любых классов P, Q, S.

Далее, нетрудно доказать (предоставляем проделать это читателю), что

---

[2]) Следовало бы сказать: «для любого x соотношение $x \in R$ имеет место тогда и только тогда, когда $x \in P$ и $x \in Q$». Подобные упрощенные формулировки употребляются и в дальнейшем.

IV. *Если* P, Q, S — *классы, то*

$$(P \cap Q) \cup S = (P \cup S) \cap (Q \cup S), \quad (P \cup Q) \cap S = (P \cap S) \cup (Q \cap S). \tag{1}$$

Пусть P, Q — классы. Класс $Q \setminus P = Q \cap P'$ называется *разностью* классов Q и P. Понятно, что включение $x \in Q \setminus P$ эквивалентно тому, что одновременно $x \in Q$ и $x \notin P$. Не останавливаясь на доказательстве (его читатель проведет самостоятельно), отметим некоторые утверждения о разности классов.

Если P и Q — классы, то

$$(Q \setminus P) \cup P = P \cup Q. \tag{2}$$

В частности, при дополнительном предположении, что класс Q содержит класс P,

$$(Q \setminus P) \cup P = Q. \tag{3}$$

Отправляясь от данных классов P и Q, можно определить класс $P \triangle Q$, называемый их *симметрической разностью*:

$$P \triangle Q = (Q \setminus P) \cup (P \setminus Q). \tag{4}$$

Нетрудно понять, что $x \in P \triangle Q$ в том и только в том случае, когда имеет место одно и т о л ь к о о д н о из включений: $x \in P$ или $x \in Q$.

Приведенные ниже свойства симметричной разности без труда выводятся из определения:

$$P \triangle Q = Q \triangle P, \ (P \triangle Q) \triangle S = P \triangle (Q \triangle S),$$
$$(P \triangle Q) \cap S = (P \cap S) \triangle (Q \cap S).$$

1.2. Хотя предметом настоящего параграфа и является теория м н о ж е с т в, термин «множество» до сих пор еще не введен. Восполняя этот пробел, дадим следующее определение.

Класс A называется *множеством*, если существует класс P, имеющий A своим элементом: $A \in P$. Класс, не являющийся множеством, называется *собственным* (классом)[3].

Содержательный разговор о множествах можно вести лишь в предположении справедливости следующего принципа.

П р и н ц и п IV. *Существует по крайней мере одно множество.*

[3]) Исключительно с целью расширить стилистические возможности мы будем зачастую писать вместо «множество» «совокупность».

Выскажем сразу же и еще одну гипотезу, также достаточно естественную.

Принцип V. *Подкласс множества представляет собой множество.*

В соответствии с последним принципом подкласс множества называется его *подмножеством.*

Привлекая высказанные в 1.1 принципы, докажем

I. *Существует единственный класс $\varnothing$ такой, что для любого x имеет место соотношение $x \not\in \varnothing$. Класс $\varnothing$ представляет собой множество.*

Действительно, пусть P — какой-либо класс (существование его гарантировано принципом IV). Положим $\varnothing = P \setminus P = P \cap P'$. Ясно, что класс $\varnothing$ удовлетворяет поставленным условиям. Единственность его вытекает из принципа объемности. Поскольку, очевидно, класс $\varnothing$ служит подклассом любого класса, то в силу принципов IV и V он представляет собой множество.

Множество $\varnothing$ предложения I называется *пустым.*

II. *Существует (единственный) универсальный класс, т. е. такой класс U, что каждое множество служит его элементом.*

В самом деле, за U можно принять класс $\varnothing'$, дополнительный по отношению к пустому множеству. Единственность универсального класса есть, очевидно, следствие принципа объемности.

Об универсальном классе мы обычно будем говорить как о *классе всех множеств.*

Понятно, что любой класс будет подклассом класса U.

Укажем на некоторые очевидные соотношения (под P в них подразумевается произвольный класс):

$$P \cap \varnothing = \varnothing, \quad P \cap U = P, \tag{5}$$

$$P \cup \varnothing = P, \quad P \cup U = U, \tag{6}$$

$$P \triangle \varnothing = P, \quad P \triangle U = P' \tag{7}$$

Пусть A — множество, P — класс. Пересечение $E = A \cap P$, поскольку оно содержится в множестве A, является в силу принципа V множеством.

1.3. Принципы IV и V, будучи, конечно, необходимыми для содержательного разговора о множествах, ни в коей мере не достаточны для этой цели: «модель», образованная из двух «классов» $\varnothing$ и U (с единственным элементом $\varnothing$), удовлетворяет всем высказанным до сих пор принципам, но не слишком богата содержанием. Тем самым, возникает потребность в принципах, гарантирующих существенно более широкую свободу в обращении с множествами и классами.

Принцип VI. *Каковы бы ни были множества* x *и* y, *существует множество* A, *единственными элементами которого являются* x *и* y, так что соотношение $z \in A$ равносильно одному из равенств: $z=x$ или $z = y$. Множество A обозначается символом $\{x, y\}$.

Если множества x и y тождественны, то вместо $\{x, x\}$ пишут просто $\{x\}$. Множества такого вида называются *одноэлементными*. Таким образом, множество A одноэлементно, если существует такое множество x, что включение $z \in A$ равносильно равенству $z = x$.

Принцип VI позволяет выразить в абстрактной форме идею об иерархическом различении сущностей.

Весьма часто мы имеем дело с такой ситуацией, что из двух рассматриваемых одновременно предметов один в силу каких-либо своих качеств оказывается (или, лучше сказать, признается) «первым», «старшим», «главным» и т. д., а другой тем самым «вторым», «младшим», «подчиненным» и пр.

Дадим теперь точное определение. Пусть x, y — множества. Множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ называется (*упорядоченной*) *парой* (или *диадой*) множеств x и y и обозначается через (x, y)[4]. При этом об x говорят как о *первом элементе*, а об y — как о *втором элементе* пары (x, y)[5].

Пара (y, x) называется *транспонированной* (или *обратной*) по отношению к паре (x, y).

Основное свойство, характеризующее понятие пары, сформулировано в следующей теореме.

Теорема 1 (1.I.) *Пусть* x, y, u, v*—множества. Если пары* (x, y) *и* (u, v) *совпадают, то* $x = u$ *и* $y = v$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда первый элемент одной из данных пар тождествен второму элементу этой же пары. Пусть, например, $x = y$. Так как при этом $(x, y) = \{\{x\}\}$, то $\{u\} = \{u, v\} = \{x\}$. Следовательно, $v = u = x$.

---

[4]) Ввиду большой функциональной нагрузки на круглые скобки (...) для обозначения пары часто используются другие виды скобок, например $\langle ... \rangle$, так что упорядоченная пара (x, y) обозначается символом $\langle x, y\rangle$.

[5]) Поскольку нет никаких оснований утверждать, что $x \in (x, y)$, первый элемент пары может и не быть ее элементом в смысле данного в 1.1 определения (более того, из дальнейших принципов будет следовать, что этого никогда не бывает). Тем самым термин «первый элемент» должен рассматриваться как единое целое; его нельзя толковать как «элемент, обладающий неким свойством (быть первым)». То же, разумеется, относится и к термину «второй элемент». В связи с указанным обстоятельством нередко употребляется терминология, отличная от принятой в тексте. Например, вместо «первый (второй) элемент» говорят «первая (вторая) составляющая» пары и т. д.

Предположим теперь, что $x \neq y$ и $u \neq v$. Понятно, что тогда совпадение множеств $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ и $(u, v) = \{\{u\}, \{u, v\}\}$ возможно лишь при условии, что $\{x\} = \{u\}$ и $\{x, y\} = \{u, v\}$. Первое равенство равносильно совпадению x и u. Тем самым, не может быть $y = u$. Следовательно, y, будучи элементом множества $\{u, v\}$, должен совпадать с v.

Следствие. *Пара (x, y) совпадает с транспонированной по отношению к самой себе в том и только в том случае, если $x = y$.*

Доказанная теорема позволяет истолковать образование пары (x, y) как операцию «помечивания» («предмета» x «меткой» y), которая применяется для явного различения без того трудно различимых или даже вовсе не различимых объектов. Такая интерпретация позволяет рассматривать один и тот же предмет как два различных — стоит только данный предмет x пометить заведомо различными метками α и β (существование различных «меток» обеспечивается принципом VI: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$), и тогда теорема 1 гарантирует, что $(x, \alpha) \neq (x, \beta)$.

Сформулированный ниже принцип позволяет образовывать классы, элементами которых служат пары.

Принцип VII. *Каковы бы ни были классы P и Q, существует класс R, элементами которого являются всевозможные пары (x, y), где $x \in P$, $y \in Q$.* Таким образом, соотношение $u \in R$ равносильно тому, что существуют такие x и y, что $x \in P$, $y \in Q$, $u = (x, y)$[6]).

Класс R, однозначно (в силу принципа объемности) определяемый классами P и Q, называется (*упорядоченным* или *декартовым*) *произведением* этих классов и обозначается через $P \times Q$ (при этом вместо $P \times P$ пишут обычно P^2).

Укажем на некоторые простые свойства произведения классов.

Отметим прежде всего, что $P \times \varnothing = \varnothing \times P = \varnothing$ для любого класса P. Далее

I. *Если классы P и Q непустые, то непустым будет и их произведение $P \times Q$.*

Справедливость этого утверждения вытекает из принципа VI.

---

[6]) В системе аксиом Гёделя — Бернайса вместо этого принципа имеется более слабое предположение, из которого с учетом других аксиом может быть выведен сформулированный принцип. Поскольку вопросы независимости отдельных аксиом друг от друга находятся далеко за пределами наших интересов, уступая тем самым требованиям понятности и простоты изложения, мы и позволили себе отступить от классической традиции.

II. *Пусть P, Q, X, Y — классы. Для того чтобы $P \times Q \subset$ $\subset X \times Y$, достаточно, а если классы P и Q непусты, то и необходимо, чтобы $P \subset X$ и $Q \subset Y$.*

Предложение II приводит и следующему факту.

III. *Пусть P, Q, X, Y — непустые классы. Равенство $P \times Q = X \times Y$ имеет место тогда и только тогда, когда $P = X$ и $Q = Y$.*

В справедливости следующих двух предложений читатель без труда убедится самостоятельно.

VI. *Каковы бы ни были классы P, Q, X, Y, имеет место равенство*

$$(P \times Q) \cap (X \times Y) = (P \cap X) \times (Q \cap Y). \tag{8}$$

V. *Каковы бы ни были классы V, X, Y, справедливы соотношения*

$$(V \times X) \cup (V \times Y) = V \times (X \cup Y); \tag{9}$$

$$(X \times V) \cup (Y \times V) = (X \cup Y) \times V. \tag{10}$$

Наряду с универсальным классом U (см. II(1.2)) рассмотрим произведение $U^2 = U \times U$. В силу самого определения произведения классов элементами класса U^2 являются всевозможные пары, в связи с чем этот класс обозначается обычно как *класс всех* (упорядоченных) *пар*.

Рассмотрим множества x, y, z. Множество $((x, y), z)$ называется (упорядоченной) *тройкой* (или, иначе, *триадой*) множеств x, y и z и обозначается символом (x, y, z). При этом x называется *первым элементом*, y — *вторым элементом*, z — *третьим элементом* тройки (x, y, z).

Ясно, что любая тройка есть элемент произведения $U^3 =$ $= U^2 \times U$. Понятно, что и обратно: каждый элемент класса U^3 представляет собой тройку некоторых множеств.

Подобно тому, как было введено понятие пары, транспонированной (обратной) по отношению к данной паре, можно определить и понятие тройки, транспонированной по отношению к данной тройке, а именно, о тройке (x_2, x_1, x_3) будем говорить как о *транспонированной по типу* (2, 1, 3) (или, короче, как о (2, 1, 3)-*транспонированной*) по отношению к тройке (x_1, x_2, x_3). Тройку (x_3, x_2, x_1) будем называть *транспонированной по типу* (3, 2, 1) по отношению к тройке (x_1, x_2, x_3) и т. д.

Полезно иметь в виду зависимости между операциями транспонирования различного типа. Так, тройка, транспонированная по типу (3, 1, 2), возникает как результат последовательного применения операций (2, 1, 3)- и (3, 2, 1)-транспонирования, транспонированная по типу (2, 3, 1) — как результат применения тех же операций, но в обратном порядке, наконец, (1, 3, 2)-транспонирование сводится к последовательности (2, 1, 3)-, затем (3, 2, 1)- и вновь (2, 1, 3)-транспонирований.

При желании (или при необходимости) нетрудно было бы дать определение (упорядоченной) *четверки*, *пятерки* (*тетрады*, *пентады*) и т. д. как элемента соответствующего класса $U^4 = U^3 \times U$, $U^5 = U^4 \times U$ и т. д. Очевидны и способы распространения на этот случай понятия транспонирования по данному типу.

1.4. Все изложенное в предыдущих пунктах можно рассматривать как подготовку к введению основного в этой книге, да и во многих других разделах математики, понятия о т н о ш е н и я, с помощью которого реализуется возможность рассматривать взаимозависимости между элементами данных классов. Более подробно это понятие будет обсуждаться в следующем параграфе. Здесь мы ограничимся лишь изложением принципов, регулирующих обращение с указанным понятием, и самых простых следствий из них.

Под *отношением* мы понимаем подкласс класса U^2 всех пар. Если об отношении F известно, что оно является подклассом класса U^3 всех троек, то, желая подчеркнуть указанное обстоятельство, будем говорить о F как о тернарном (тройном) отношении. Подобным же образом можно было бы ввести понятия тетрарного (четверного) отношения и т. д.

Введем некоторые понятия, связанные с понятием отношения.

Если «собрать воедино» первые элементы пар, составляющих данное отношение, то получится класс, называемый областью определения данного отношения. Вот точная формулировка этого определения.

П р и н ц и п VIII. *Каково бы ни было отношение F, существует такой класс P, что соотношение $x \in P$ равносильно тому, что существует множество y такое, что $(x, y) \in F$.*

Понятно, что ввиду принципа объемности отношение F однозначно определяет класс P, который и называется *областью определения* (или часто просто *областью*) отношения F и обозначается через $D(F)$. Иногда бывает удобнее использовать «геометрическую» терминологию и называть класс P *первой проекцией* класса F (в обозначениях $P = \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}F$). Заметим, что о классе $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}F$ можно говорить и не предполагая, что класс F — отношение. Достаточно применить принцип VIII к отношению $F \cap U^2$.

Следующий принцип обеспечивает возможность применять к элементам данного тернарного отношения операцию транспонирования любого фиксированного типа.

Принцип IX. *Каков бы ни был класс G троек* ($G \subset U^3$), *существуют* (*единственные*) *классы* $G_{(2,1,3)}$ *и* $G_{(3,2,1)}$, *элементы которых суть все тройки, получаемые из троек класса* G (2, 1, 3)- и *соответственно* (3, 2, 1)-*транспонированием*.

Таким образом, например, соотношение $u \in G_{(2,1,3)}$ означает, что существуют такие множества x, y, z, что $u = (y, x, z)$ и $(x, y, z) \in G$.

Учитывая сказанное в конце предыдущего пункта, можно, дополняя принцип IX, гарантировать существование классов $G_{(1,3,2)}$, $G_{(3,2,1)}$ и $G_{(3,1,2)}$. О каждом из пяти классов, упомянутых здесь и в формулировке принципа IX, мы будем говорить как о (тернарном) отношении, полученном из отношения G *транспонированием по данному типу*.

Как и в случае принципа VIII, в формулировке принципа IX нет надобности заранее предполагать, что данный класс G состоит из троек, т. е. что $G \subset U^3$. Замена произвольного класса G пересечением $G \cap U^3$ обеспечивает возможность указанного расширительного толкования принципа IX.

Заметим, что справедливость утверждения, аналогичного принципу IX, но относящегося к классам пар, четверок, пятерок и т. д., уже нет надобности постулировать. Возможность образовать класс, состоящий из всех пар, получающихся транспонированием (т. е. обращением) из пар данного отношения, доказана ниже (теорема 2). Что касается классов четверок, пятерок и т. д., то соответствующее доказательство нуждается в достаточно развитом аппарате, построение которого будет завершено лишь в следующем параграфе. Между тем, чтобы не дублировать изложение (сначала для частного случая, а потом — во втором параграфе — для общего), сделанное замечание целесообразно использовать уже сейчас, не дожидаясь, когда оно будет полностью обосновано. Разумеется, принятый способ изложения таит в себе опасность «порочного круга». То, что на самом деле такая опасность отсутствует, читатель без труда убедится с помощью сделанных в нужных местах замечаний.

А пока что докажем следующую теорему.

Теорема 2(1.1). *Пусть F — отношение. Существует единственный класс F^{-1} такой, что соотношение $u \in F^{-1}$ равносильно существованию таких множеств x и y, что $u = (x, y)$ и $(y, x) \in F$.*

Таким образом, класс F^{-1} является отношением, состоящим из всех пар, обратных к парам, входящим в отношение F. Отношение F^{-1} называется *обратным для отношения* F (или по отношению к F).

Доказательство. Рассмотрим произведение $G = F \times U$. Согласно предложению II(1.3) $G \subset U^2 \times U = U^3$, так что класс G представляет собой тернарное отношение. Образуем класс $G_{(2,1,3)}$ (принцип IX) и в соответствии с принципом VIII класс $P = \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} G_{(2,1,3)}$. Он и будет обладать требуемыми свойствами.

Действительно, предположим, что $u \in P$. По определению это означает существование такого множества z, что $(u, z) \in G_{(2,1,3)}$. Так как элементы класса $G_{(2,1,3)}$ суть тройки, то можно указать такие множества x, y, v, что $(u, z) = (x, y, v) = ((x, y), v)$. Отсюда на основании теоремы 1 получаем $u = (x, y)$, $z = v$. Поскольку тройка $(y, x, v) = ((y, x), z)$ есть элемент класса $G = F \times U$, то $(y, x) \in F$. Проведя эти же рассуждения, но в обратном порядке, докажем, что включение $(y, x) \in F$ приводит к соотношению $(x, y) \in F$. Таким образом, $P = F^{-1}$.

Пусть F — отношение. Область определения $D(F^{-1})$ обратного для F отношения F^{-1} называется *областью значений* данного отношения F и обозначается через $R(F)$[7]. Следовательно, $R(F) = D(F^{-1})$. Если используется «геометрический язык», то класс $R(F)$ называют *второй проекцией* класса F и обозначают символом $\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} F$, так что $\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} F = \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F^{-1}$.

Непосредственно из определения вытекает, что соотношение $y \in R(F)$ означает существование такого x, что пара (x, y) является элементом отношения F, т. е., проще говоря, класс $R(F)$ состоит из вторых элементов всех пар, образующих класс F. Тем самым $F \subset D(F) \times R(F)$.

Очевиден следующий факт.

I. *Всякое отношение F совпадает с обратным для своего обратного*: $F = (F^{-1})^{-1}$.

В частности:

$$D(F) = R(F^{-1}) \quad (\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F = \mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} F^{-1}). \tag{11}$$

1.5. Сейчас настала пора несколько формализовать те сведения из математической логики, которыми, как мы надеемся, читатель владеет на практическом уровне. Заметим сразу же, что делать это мы будем применительно лишь к теории множеств.

Математика вообще и теория множеств в частности имеют дело с разного рода высказываниями. Под этим мы понимаем повествовательное предложение, осмысленное в рамках теории множеств, так что предметы, о которых идет речь в данном высказывании, суть классы, возможно подчиненные заранее

---

[7]) В тех случаях, когда об области определения говорят просто как об области, «область значений» заменяется одним из терминов: *противообласть*, *кообласть* или *ранг* (отношения F).

описанным ограничениям, а в остальном совершенно произвольные. Мы будем рассматривать лишь два вида ограничений на рассматриваемый класс, когда, во-первых, он совпадает с некоторым фиксированным, т. е. однозначно определенным классом (при этом мы говорим о *постоянной* данного высказывания) и, во-вторых, когда рассматриваемый класс является элементом некоторого также вполне определенного класса V; в этом случае входящий в высказывание класс представляет собой множество и называется (*множественной*) *переменной* высказывания, класс V — *областью изменения* этой переменной, а элементы класса V — *значениями* этой переменной [8]. Ясно, что постоянная представляет собой частный случай переменной, когда область изменения — одноэлементное множество, однако, говоря о переменной, мы предполагаем отсутствие этого вырожденного случая.

Высказывание, содержащее лишь постоянные, называется утверждением (а также предложением, теоремой, аксиомой и т. д. в зависимости от ситуации). В соответствии с широко распространенным представлением некоторые из утверждений считаются **истинными** (верными), некоторые — **ложными** (неверными). Мы исходим из той предпосылки, что теория множеств непротиворечива, т. е. что в этой теории нет и не может быть утверждений, одновременно истинных и ложных. Это, однако, не исключает возможности утверждений, ни истинность, ни ложность которых нельзя установить, отправляясь от данной системы аксиом. Так, знаменитая гипотеза континуума, как было установлено в 1964 г. Дж. Коэном, независима от системы аксиом Гёделя — Бернайса.

Комбинируя различные утверждения, можно из них получать новые утверждения. Напомним употребимые в логике способы комбинирования и укажем обозначения для образованных так утверждений.

Пусть Φ — данное утверждение. Под *отрицанием* Φ (коротко «не Φ», в обозначениях $\neg\Phi$) понимается утверждение «утверждение Φ неверно (не имеет места)». Понятно, что $\neg\Phi$ истинно, когда Φ ложно, и $\neg\Phi$ ложно, когда Φ истинно.

Если Φ и Ψ — данные утверждения, то под $\Phi \wedge \Psi$ (читается «Φ и Ψ») понимается утверждение, называемое *конъюнкцией* данных утверждений и означающее «имеет место (истинно,

---

[8]) Понятно, что мыслимы и другие ограничения на входящие в высказывание классы. Заметим, что если ограничения на класс отсутствуют, то об этом классе говорят как о *классовой переменной* данного высказывания. Однако в дальнейшем под переменной мы будем понимать лишь множественную переменную, и только отступления от этого соглашения будут фиксироваться.

верно) как Φ, так и Ψ». Ясно, что истинность $\Phi\wedge\Psi$ имеет место тогда и только тогда, когда оба утверждения Φ и Ψ истинны; ложность утверждения $\Phi\wedge\Psi$ означает, что хотя бы одно из утверждений Φ или Ψ ложно.

Утверждение $\neg(\neg\Phi\wedge\neg\Psi)$, обозначаемое через $\Phi\vee\Psi$ (читается «Φ или Ψ»), называется *дизъюнкцией* утверждений Φ и Ψ. Нетрудно понять, что оно истинно в том и только в том случае, когда по крайней мере одно из утверждений Φ или Ψ истинно. Ложность дизъюнкции $\Phi\vee\Psi$ означает ложность обоих высказываний Φ и Ψ.

Трактуя знак $\equiv$ как «означает по определению», введем еще следующие утверждения. Положим $\Phi\Rightarrow\Psi\equiv(\neg\Phi)\vee\Psi$. Утверждение $\Phi\Rightarrow\Psi$ называется *импликацией* утверждений Φ и Ψ (читается «из Φ следует Ψ» и т. п.). Не останавливаясь на детальной проверке условий истинности или ложности импликации в зависимости от истинности или ложности ее образующих утверждений, заметим только, что если истинны оба утверждения Φ и $\Phi\Rightarrow\Psi$, то истинным будет и утверждение Ψ. Последнее обстоятельство служит одним из основных приемов доказательства истинности данного утверждения.

Определим *эквивалентность* утверждений Φ и Ψ, полагая $\Phi\Leftrightarrow\Psi\equiv(\Phi\Rightarrow\Psi)\wedge(\Psi\Rightarrow\Phi)$. Понятно, что истинность эквивалентности $\Phi\Leftrightarrow\Psi$ означает одновременную истинность или одновременную ложность обоих утверждений Φ и Ψ, ложность же — истинность одного и ложность другого.

Символы $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ называются *логическими связками*. Можно было бы определить и другие логические связки, позволяющие из двух данных утверждений образовывать новое. Для наших целей, однако, достаточно перечисленных.

Мы не приводим разнообразные соотношения между различными логическими формулами, предполагая, что читатель ими владеет по существу и без труда может воспроизвести их формальное написание.

Пусть теперь Φ — высказывание, фактически содержащее хотя бы одну нетривиальную (т. е. не сводящуюся к постоянной) переменную. Вопрос об истинности или ложности высказывания Φ в этом случае уже не имеет смысла, и данное высказывание следует рассматривать как некое условие на входящие в него переменные или, если угодно, некоторое их свойство. Поясним сказанное. Будем сначала считать, что высказывание Φ содержит только одну переменную [9]. Обозначая через V область изменения этой переменной, возьмем ка-

[9]) Такие высказывания называются *одноместными*. В зависимости от числа входящих в высказывание переменных различают, кроме того, *двух-*, *трех-* и т. д. *местные* высказывания.

кое-либо ее значение x. Заменяя каждое упоминание в высказывании Ф о переменной таким же упоминанием о множестве x, мы образуем новое высказывание, обозначаемое через $\Phi(x)$, которое, понятно, уже не содержит переменных, т. е. является утверждением. Утверждение $\Phi(x)$ может быть истинным или не быть таковым. Тем самым высказывание Ф определяет некий «коллектив» элементов класса таких, что при их подстановке в высказывание получается истинное утверждение. Разумеется, вместо «коллектива» можно говорить о свойстве элемента $x \in V$ обращать данное высказывание в истинное.

Будем говорить, что данное высказывание Ф *правильно сформулировано* (или просто что оно *правильно*), если упомянутый выше «коллектив» является классом — подклассом области изменения V. Точнее говоря, высказывание Ф называется правильно сформулированным, если существует такой класс X, что включение $x \in X$ имеет место тогда и только тогда, когда $x \in V$ и истинно $\Phi(x)$. Класс X и высказывание Ф называют при этом *соответствующими* друг другу. То, что класс X соответствует высказыванию Ф, записывают нередко так: $X = \{x \in V : \Phi(x)\}$, а в случае, когда область изменения переменной есть универсальный класс U, пишут просто $X = \{x : \Phi(x)\}$. Об X часто говорят как о классе всех элементов класса V, для которых верно высказывание Ф.

Распространение понятия правильного высказывания на многоместные высказывания требует некоторого уточнения самого понятия высказывания. Рассмотрим для определенности и простоты двухместное [10] высказывание Ф. Занумеруем произвольным образом участвующие в высказывании Ф переменные: одну из них будем считать (и называть) первой, другую — второй. (В дальнейшем, говоря о многоместном высказывании, мы всегда будем предполагать, что входящие в него переменные занумерованы). Область значений первой переменной обозначим через V_1, область изменения второй — через V_2. Пусть x — некоторый элемент класса V_1, т. е. некоторое значение первой переменной. Заменяя в высказывании Ф все вхождения первой переменной такими же вхождениями множества x, мы получим из Ф новое высказывание, обозначаемое через $\Phi(x;\ \cdot)$, в которое, понятно, первая переменная уже не входит, так что $\Phi(x,\ \cdot)$ представляет собой уже одноместное высказывание о переменной, совпадающей со второй переменной данного высказывания. Если в высказывании $\Phi(x,\ \cdot)$ за-

[10]) Желая подчеркнуть, что рассматриваемое высказывание — двухместное, мы иногда будем писать вместо Ф символ $\Phi(\cdot,\ \cdot)$ и аналогично поступать в случаях, когда речь идет о высказываниях с иным числом переменных.

менить переменную каким-либо ее значением, скажем, y, то возникнет утверждение $\Phi(x, y)$. То же самое утверждение, разумеется, получится, если сначала заменить в Φ вторую переменную на ее значение y, а уже затем в высказывании $\Phi(\cdot, y)$ заменить единственную его переменную на x. Очевидно также, что $\Phi(x, y)$ можно образовать одновременной заменой первой переменной на x, а второй — на y.

Будем говорить, что высказывание Φ *правильно сформулировано* (*правильно*), если существует такой класс X пар — подкласс произведения $V_1 \times V_2$, что для произвольных $x \in V_1$, $y \in V_2$ соотношение $(x, y) \in X$ равносильно истинности утверждения $\Phi(x, y)$.

Данное выше определение правильно сформулированного двухместного высказывания очевидным образом распространяется на любые многоместные высказывания (с числом переменных три или более). При этом, конечно, предполагается, что переменные, участвующие в рассматриваемом высказывании, предварительно перенумерованы. Основываясь на принципе IX или замечании к нему, можно утверждать, что при другой нумерации входящих в данное высказывание переменных из правильного высказывания мы вновь получаем правильное высказывание. Важно при этом иметь в виду, что замечание к принципу IX надо использовать лишь (и то не всегда) в случае четырех- или более местных высказываний. Для двух- и трехместных же достаточны сам принцип IX и теорема 2. Из сказанного вытекает, что правильность высказывания не зависит от способа нумерации переменных, так что о правильном высказывании можно говорить и не предполагая занумерованными входящие в него переменные.

Если в данном высказывании Φ участвуют две (или более) переменные, то путем своеобразной «замены переменных» их число может быть уменьшено. Для этого распределим все участвующие в Φ переменные на две непересекающиеся группы и перенумеруем переменные так, что те из них, которые попали в одну из групп, получат первые номера, а переменные другой — последние. Пусть, например, Φ — четырехместное высказывание и первая группа объединяет первые две переменные, а вторая — третью и четвертую. Области изменения переменных обозначим соответственно через V_1, V_2, V_3 и V_4. Введем две новые переменные с областями изменения $W_1 = V_1 \times V_2$ и $W_2 = V_3 \times V_4$ соответственно. Образуем новое высказывание $\bar{\Phi}$ о переменных элементах классов W_1 и W_2: $\bar{\Phi}(u, v) = \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 суть произвольные элементы классов V_1, V_2, V_3, V_4, $u = (x_1, x_2)$, $v = (x_3, x_4)$.

Важно отметить, что оба высказывания одновременно правильны или нет и в случае правильности соответствующие этим высказываниям классы легко восстанавливаются один по другому с помощью операции транспонирования. В некоторых случаях можно даже утверждать тождество соответствующих классов. Так будет, например, если вторая группа сводится к единственной, последней, переменной или вовсе не содержит переменных (в последнем случае высказывание $\overline{\Phi}$, очевидно, одноместное). Поскольку в дальнейшем высказывания будут интересовать нас лишь с точки зрения соответствующих им классов, мы, используя описанный прием, можем считать, в зависимости от надобности, данное высказывание двухместным или даже одноместным.

Воспользуемся, в частности, этой идеей для распространения понятия логических связок на произвольные высказывания (о множественных переменных). Пусть Φ — данное высказывание. Считая его в соответствии со сказанным одноместным и обозначая через V область изменения переменной, участвующей в Φ, положим $(\neg\, \Phi)(v) = \neg\, (\Phi(v))$ для произвольного элемента $v \in V$. Так определенное высказывание $\neg\, \Phi$ называется *отрицанием* высказывания Φ. Ясно, что если Φ правильно, то правильным будет и $\neg\, \Phi$, причем соответствующий высказыванию $\neg\, \Phi$ класс есть дополнение до V класса X, отвечающего высказыванию Φ, т. е., иными словами, разность $V \setminus X$.

Пусть теперь даны высказывания Φ и Ψ. Путем подходящей «замены переменных» можно в общей ситуации свести дело к тому, что оба высказывания Φ и Ψ — двухместные с общей первой переменной и с различными вторыми переменными. Разумеется, следует иметь в виду, что возможны разнообразные случаи вырождения, когда одна или даже обе переменные отсутствуют (мы не исключаем случая, когда одно из высказываний «нульместное», т. е. представляет собой утверждение). Обозначая через Z область изменения общей для высказываний Φ и Ψ переменной, через V — область изменения второй переменной высказывания Φ и через W — область изменения второй переменной высказывания Ψ, для произвольных $z \in Z$, $v \in V$, $w \in W$ положим

$$\Theta(z, v, w) \equiv \Phi(z, v) \wedge \Psi(z, w).$$

Так образованное трехместное (в общем случае) высказывание Θ называется *конъюнкцией* высказываний Φ и Ψ и обозначается, как и в случае утверждений, через $\Phi \wedge \Psi$. Нетрудно понять, что если оба высказывания Φ и Ψ правильные, то правильной будет и их конъюнкция. Действительно, оставляя пока в стороне случаи вырождения, обозначим через X и Y соответственно классы, отвечающие высказываниям Φ и Ψ. Перенумеруем переменные высказывания $\Theta = \Phi \wedge \Psi$ так, что первый номер получает, как и в данных высказываниях, общая переменная, второй — другая переменная высказывания Ф и третий — вторая переменная, участвующая в Ψ. Сохраняя прежние обозначения, положим $G = (X \times W) \cap (Y \times V)_{(1,3,2)}$. Без труда проверяется, что для произвольных $z \in Z$, $v \in V$, $w \in W$ включение $(z, v, w,) \in G$ имеет место тогда и только тогда, когда $(z, v) \in X$ и $(z, w) \in Y$, т. е. когда истинно высказывание $\Theta(z, v, w)$.

Из случаев вырождения отметим лишь некоторые, предоставляя остальные читателю. Так, если Ф, Ψ — одноместные высказывания об одной и той же переменной, то Θ также будет высказыванием об этой единственной переменной, причем класс, соответствующий высказыванию Θ, совпадает, очевидно, с пересечением $X \cap Y$. Если Ф и Ψ — одноместные высказывания, но о различных переменных, то Θ будет уже двухместным высказыванием об этих переменных. Считая, как и раньше, переменную высказывания Ф первой, а высказывания Ψ — второй, получим, что классом, отвечающим конъюнкции Θ, будет произведение $X \times Y$.

Отметим еще случай, когда одно из высказываний, например, Ψ, не содержит переменных, т. е. является утверждением. В этом случае конъюнкция $\Phi \wedge \Psi$ правильного высказывания Ф (которое, понятно, можно считать одноместным) и утверждения Ψ также будет правильной, причем соответствующий ей класс либо совпадает с X — классом, отвечающим высказыванию Ф,— если утверждение Ψ истинно, либо представляет собой пустое множество, когда утверждение Ψ не истинно.

Располагая понятиями отрицания высказывания и конъюнкции высказываний, можно естественным образом распространить на высказывания определения других логических связок: дизъюнкции, импликации и эквивалентности. Поскольку все эти операции над высказываниями сводятся к последовательному применению отрицания и конъюнкции, то в случае правильности исходных высказываний мы и в результате этих операций получаем правильное высказывание. Обратим внимание на то, что при этом замечание к принципу IX может понадобиться лишь для приведения данных высказываний к виду, указанному в (11). Заметим еще, что определение логических связок может быть дано и для случая, когда в высказываниях встречаются классовые переменные.

Важным способом образования новых высказываний является так называемое с в я з ы в а н и е одной (или нескольких) переменных в данном высказывании. С одним приемом такого рода мы уже имели дело, когда речь шла о подстановке вместо переменной какого-либо ее значения. Укажем еще два способа связывания переменной.

Пусть Φ — одноместное высказывание. Образуем высказывание: «существует такое x — значение участвующей в Φ переменной,— что истинно утверждение $\Phi(x)$», которое кратко записывается так: $\exists x : \Phi(x)$ или, если желательно указать на область изменения V переменной высказывания Φ, то $\exists x : : (x \in V \wedge \Phi(x))$. Ясно, что новое высказывание не содержит переменных, т. е. является утверждением. В случае, когда Φ — правильное высказывание и X — соответствующий ему класс, то, очевидно, истинность утверждения $\exists x : \Phi(x)$ равносильна непустоте класса X, а ложность — тому, что $X = \varnothing$.

Будем теперь под Φ подразумевать двухместное высказывание, как всегда, о множественных переменных. Образуем новое высказывание Ψ: «существует такое значение y второй переменной высказывания Φ, что имеет место $\Phi(\cdot, y)$». Кратко высказывание записывается в виде $\exists y : \Phi(\cdot, y)$[11]. Понятно, что высказывание Ψ уже не содержит упоминания о второй переменной высказывания Φ, так что Ψ одноместно, причем единственная переменная, участвующая в Ψ,— это первая переменная высказывания Φ. Пусть x — какое-либо значение этой переменной. Положим $\Theta \equiv \Phi(x, \cdot)$. Ясно, что $\Psi(x) = \exists y : \Theta(y)$, т. е., иначе говоря, $\Psi(x) = \exists y : \Phi(x, y)$. Отсюда следует, что если Φ правильно, то правильным будет и Ψ, причем, обозначив через X класс, отвечающий высказыванию Φ, в силу принципа VIII будем иметь, что высказыванию Ψ соответствует класс $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} X$.

О высказывании, начинающемся словами «существует значение...», или в краткой записи знаком $\exists$, говорят, что оно получено из данного высказывания применением к нему *квантора существования* по данной переменной, а сам знак $\exists$ называется квантором существования (от немецкого die Existenz — существование). Используя замену переменных, можно без труда определить высказывания, которые получаются применением квантора существования по любой из переменных (или даже по группе переменных) для высказываний с произвольным числом переменных. При этом из правильного высказывания мы снова получаем правильное высказывание, за исключением, разумеется, того вырожденного случая, когда квантор существования связывает все переменные данного высказывания, поскольку тогда мы приходим к «нульместному» высказыванию, т. е. утверждению, для которого правильность не имеет смысла.

[11]) Желая указать область изменения (обозначим ее через V_2) связываемой переменной, т. е. в данном случае второй переменной высказывания Φ, используют для Ψ обозначение $\exists y : (y \in V_2 \wedge \Phi(\cdot, y))$. При этом нередко отсутствие указания на область изменения трактуется как совпадение ее с универсальным классом U.

Так, в частности, если Ф — правильное двухместное высказывание, которому отвечает класс X, то высказыванию $\exists x : :\Phi(x, \cdot)$ отвечает класс $\mathrm{Pr}_{\mathrm{II}}X$ (см. 1.4). Важно отметить, что замечание к принципу IX (а не сам принцип IX или теорема 2) может понадобиться лишь в случае высказываний с числом переменных не менее четырех.

Укажем, наконец, на то, что применение квантора существования возможно не только по множественным переменным, но и по переменным классовым. Не объясняя подробно, остановимся лишь на примере высказывания: «произвольный класс X есть множество», которое получается из высказывания: «произвольный класс X есть элемент произвольного класса Y» применением квантора существования по второй переменной, так что высказывание: «X есть множество» означает то же, что и высказывание: «$\exists Y : X \in Y$».

Наряду с квантором существования большую роль в дальнейшем играет и так называемый квантор общности $\forall$ (от немецкого die Allgemeinheit — общность). Пусть Ф — данное высказывание, для определенности, двухместное. Под $\forall x : :\Phi(x, \cdot)$[12]) понимается высказывание: «для любого значения x первой переменной (высказывания Ф) имеет место $\Phi(x, \cdot)$». О последнем высказывании говорят, что оно получено из Ф применением к Ф *квантора общности по первой переменной*. Понятно, что в высказывании $\Psi \equiv \forall x : \Phi(x, \cdot)$ участвует лишь вторая переменная высказывания Ф (а первая связывается квантором $\forall$). Пусть y — какое-либо значение этой переменной. Поскольку $\Psi(y) \equiv \forall x : \Phi(x, y)$, то $\Psi(y)$ истинно в том и только в том случае, когда утверждение $\Phi(x, y)$ истинно, каково бы ни было значение x первой переменной (высказывания Ф). Ложность утверждения $\Psi(y)$ означает, что существует такое значение x первой переменной, что $\Phi(x, y)$ ложно, т. е. что справедливо утверждение $\exists x : \neg\Phi(x, y)$. Отсюда следует, что кванторы общности и существования связаны соотношением

$$\forall x : \Phi(x, \cdot) \equiv \neg\exists x : \neg\Phi(x, \cdot).^{13)} \qquad (12)$$

Соотношение (12) позволяет утверждать, что высказывание $\forall x : \Phi(x, \cdot)$ правильно, коль скоро правильно данное высказывание Ф.

Для квантора общности можно высказать все те замечания, которые были сделаны по поводу квантора существования,

[12]) Если бы Ф было одноместным, то следовало бы писать $\forall x : \Phi(x)$.

[13]) Тождество (12) позволяет указать запись высказывания Ψ, содержащую явное упоминание об области значений V первой переменной. Нетрудно понять, что она выглядит так: $\forall x : (x \in V \Rightarrow \Phi(x, \cdot))$.

в частности замечание о возможности применения квантора общности к многоместным высказываниям.

1.6. Основываясь на сказанном в 1.5, дополним результат из 1.4 некоторыми полезными фактами. Прежде всего сформулируем следующую теорему.

Теорема 3(1.1). *Каковы бы ни были отношение F и класс X, существует такой вполне определенный класс Q, что для любого множества y включение $y \in Q$ имеет место тогда и только тогда, когда $X \times \{y\} \subset F$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что высказывание Φ о произвольном множестве y, определяемое соотношением $\Phi(y) \equiv X \times \{y\} \subset F$, правильно. Для этого проверим, что если одно из утверждений $\Phi(y)$ и $\forall x : (x \in X \Rightarrow (x, y) \in F)$ истинно, то истинно и другое. Но истинность утверждения $\Phi(y)$ означает, что для любого элемента u класса X справедливо включение $(u, y) \in F$. Истинность же второго из рассматриваемых утверждений — что для произвольного множества x имеет место одно из двух: либо $x \notin X$, либо, если $x \in X$, то $(x, y) \in F$, т. е. и в этом случае для любого $u \in X$ будет $(u, y) \in F$. Остается заметить, что высказывание Ψ о произвольном множестве y, определяемое тождеством $\Psi(y) \equiv \forall x : :(x \in X \Rightarrow (x, y) \in F)$, согласно сказанному в 1.5 правильно.

Класс Q, построенный в теореме, называется *полярой класса X по отношению F* (или *при отношении F*) и обозначается через $\pi_F(X)$ или, когда нет никаких сомнений, о каком отношении F идет речь,— просто через $\pi(X)$. Из доказательства теоремы ясно, что

$$\pi_F(X) = \{y : X \times \{y\} \subset F\} = \\ = \{y : \forall x : (x \in X \Rightarrow (x, y) \in F)\}. \quad (13)$$

Отметим, что из теоремы 3 легко вытекает

I. *В условиях теоремы 3 имеет место соотношение*

$$X \times \pi_F(X) \subset F. \quad (14)$$

Рассмотрим отношение F и одноэлементное множество $\{x\}$. Поляра $\pi_F(\{x\})$ — это класс, состоящий из всех таких множеств y, что $\{x\} \times \{y\} = \{(x, y)\} \subset F$, так что соотношение $y \in \pi_F(\{x\})$ равносильно тому, что $(x, y) \in F$. Следовательно, в соответствии с определением класса $D(F)$ (принцип VIII) можно высказать такой результат.

II. *Для того чтобы множество x было элементом области определения $D(F)$ отношения F, необходимо и достаточно, чтобы класс $\pi(\{x\})$ был непустым, так что $D(F) = \{x : \pi(\{x\}) \neq \neq \varnothing\}$.*

Поскольку в силу (14) $\{x\} \times \pi_F(\{x\}) \subset F \subset D(F) \times R(F)$, то на основании предложения II (1.3) $\pi_F(\{x\}) \subset R(F)$ для любого множества x. В связи с этим и всем сказанным выше поляра $\pi_F(\{x\})$, обозначаемая для краткости через $\pi_F\{x\}$, называется *классом значений* отношения F на (элементе) x (или отвечающих x) и обозначается также через $F\{x\}$ (см. 1.2).

Рассмотрим двухместное высказывание Φ, которому при заданной нумерации переменных отвечает класс F (это будет, очевидно, отношение), и пусть x — какое-либо значение первой переменной. Нетрудно понять, что одноместное высказывание $\Phi(x, \cdot)$ также правильно, причем соответствующий этому высказыванию класс совпадает с классом $F\{x\}$ значений отношения F на элементе x. Действительно, каково бы ни было значение y второй переменной высказывания Φ, высказывание $\Phi(x, \cdot)(y) \equiv \Phi(x, y)$ истинно тогда и только тогда, когда $(x, y) \in F$, т. е. когда $y \in F\{x\}$.

Сказанное выше, и в частности предложение II, позволяет истолковать отношение как некое «правило» или, если угодно, «закон» соответствия, которое каждому элементу x некоторого класса (для отношения F, рассмотренного выше, это класс $D(F)$) сопоставляет какие-то элементы другого класса (а именно, класса $F\{x\}$) — значения отношения F, отвечающие элементу x. Следует, однако, иметь в виду, что далеко не всякое «правило» определяется в указанном выше смысле каким-либо отношением, хотя бы уже вследствие того, что значения, отвечающие данному x, могут не образовывать класса, что в случае «настоящего» отношения противоречило бы предложению II. Но даже если возможно рассматривать класс «значений» на данном x, правило все же может не порождаться никаким отношением — классом пар.

Отношение F называется *однозначным*, если для каждого элемента x области определения $D(F)$ отношения F класс $F\{x\}$ значений на x представляет собой одноэлементное множество. Единственный элемент этого множества называется *значением отношения* F на x (или отвечающим x) и обозначается через $F(x)$[14]. Таким образом, $F(x) \in F\{x\}$.

Реализуя указанную выше идею об отношении как о «правиле», часто в случае однозначного отношения F его задают, записывая $F : x \mapsto F(x)$ или $F : x \to F(x)$ $(x \in D(F))$ (читается: отношение F, с о п о с т а в л я ю щ е е каждому элементу x из класса $D(F)$ элемент $F(x)$). Если область определения $D(F)$

[14]) Весьма часто однозначное отношение называют отображением или функцией. Мы прибережем эти термины для обозначения понятий, немного более общих, чем понятие однозначного отношения.

однозначного отношения F представляет собой множество, то об F нередко говорят как о *семействе*, используя для задания F совсем краткий символ: $\{F(x)\}$ $(x \in D(F))$ [15]), или символ $F : \{u_x\}$ $(x \in D(F))$, где $u_x = F(x)$.

Тривиальным примером однозначного отношения служит произведение произвольного класса X и одноэлементного множества $\{y\} : F = X \times \{y\}$. Ясно, что $D(F) = X$ и $F(x) = y$ для любого $x \in X$. Отношения такого вида мы будем называть *постоянными*. Менее тривиальные примеры однозначных отношений будут приведены в следующих пунктах этого параграфа.

Однозначное отношение F называется *взаимно однозначным*, если однозначно также и обратное для F отношение F^{-1}. Понятно, что при этом F^{-1} также взаимно однозначно.

Следующий принцип, называемый обычно *принципом подстановки*, играет заметную роль при «конструировании» множеств.

Принцип X. *Если область определения однозначного отношения есть множество, то множеством будет и область значений этого отношения* [16]).

1.7. Каждая более или менее развитая теория предполагает существование достаточного «количества» конкретных объектов. В теории множеств мы пока что можем гарантировать существование довольно ограниченного запаса конкретных множеств, состоящего из пустого множества и тех множеств, которые могут быть образованы из пустого с помощью принципов VI, VII и II. Что касается классов вообще, то к перечисленным множествам добавляются еще универсальный класс и всевозможные комбинации классов, полученные применением принципов VII, IX, II и III. Поэтому, хотя мы и располагаем определением однозначного отношения, нам пока что затруднительно указать какое-либо конкретное однозначное отношение, если, конечно, не принимать в расчет постоянные и полученные из них простейшие отношения. Все сказанное оправдывает введение следующего принципа.

Принцип XI. *Существует такое вполне определенное отношение T, что, каковы бы ни были множества x и y, включение $(x, y) \in T$ имеет место тогда и только тогда, когда $x \in y$.*

---

[15]) Изредка, и поэтому всегда оговаривая это, мы под семейством будем понимать произвольное однозначное отношение.

[16]) С учетом других принципов (принципа V и сформулированного ниже принципа выбора) можно было бы в данном принципе ограничиться предположением взаимной однозначности отношения. По соображениям, изложенным в примечании на с. 12, и в связи с принципом VII мы предпочитаем данную формулировку.

Таким образом, T состоит из всех таких пар (x, y), для которых истинно утверждение $(x, y) \in T$. В соответствии со сказанным в 1.5 это позволяет сформулировать принцип XI еще и так: двухместное высказывание Φ о произвольных множествах x и y : $\Phi(x, y) \equiv x \in y$ — правильно, причем соответствующим ему классом служит отношение T.

Достаточно понятно, что областью определения $D(T)$ отношения T служит универсальный класс U : для любого множества x имеет место включение $x \in \{x\}$, так что пара $(x, \{x\})$ является элементом отношения T. Область значений $R(T)$ отношения T представляет собой, очевидно, класс $U_0 = U \setminus \{\varnothing\}$ всех непустых множеств.

Укажем на некоторые следствия принципа XI.

I. *Каков бы ни был класс X, существует такой вполне определенный класс Q, что для произвольного множества x соотношение $x \in Q$ означает, что x служит элементом каждого множества A, входящего в класс X.* Класс Q называется *классом-пересечением* (множеств) класса X и обозначается через $\operatorname{Ints} X$.

Действительно, высказывание Φ, определяемое соотношением $\Phi(x) \equiv \forall A : (A \in X \Rightarrow x \in A)$ для произвольного множества x, правильное. Ясно, что отвечающий высказыванию Φ класс и обладает предъявленными к Q свойствами. Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ints} X &= \{x : (\forall A : (A \in X \Rightarrow (x \in A)))\} = \\ &= \{x : (\forall A : (A \in X \Rightarrow (x, A) \in T))\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Непосредственно из соответствующих определений получаем

II. *Если класс X содержит класс Y, то класс-пересечение $\operatorname{Ints} X$ содержится в классе-пересечении $\operatorname{Ints} Y$.*

Допустим, что класс X представляет собой двухэлементное множество $\{A, B\}$. В соответствии с принципом II (см. 1.1) тогда $\operatorname{Ints} X = A \cap B$. Если, кроме того, $A = B$, т. е. если $X = \{A\}$, то $\operatorname{Ints}\{A\} = A$. Отсюда вытекает такая характеристика класса-пересечения.

III. *Пусть X — данный класс. Каково бы ни было множество A из класса X, имеет место соотношение $A \supset \operatorname{Ints} X$. Если Z — класс, являющийся подклассом каждого множества $A \in X$, то $Z \subset \operatorname{Ints} X$.*

В самом деле, поскольку включение $A \in X$ равносильно тому, что $\{A\} \subset X$, в силу предложения II можем написать $A = \operatorname{Ints}\{A\} \supset \operatorname{Ints} X$. Если класс Z удовлетворяет требованиям предложения и $x \in Z$, то по условию $x \in A$ для любого множества $A \in X$, так что в силу (15) $x \in \operatorname{Ints} X$. Следовательно, $Z \subset \operatorname{Ints} X$.

Предложение III приводит к следующему результату.

IV. *Если X — непустой класс, то класс-пересечение* $\mathrm{Ints}\,X$ *представляет собой множество*; $\mathrm{Ints}\,\varnothing = U$.

Действительно, если A — какой-либо элемент класса X, то $A \supset \mathrm{Ints} X$. Поскольку A, будучи элементом некоторого класса, представляет собой множество, то на основании принципа V (см. 1.2) будет множеством и его подкласс $\mathrm{Ints}\,X$. Если $X = \varnothing$, то, поскольку для любого множества x включение $x \in X$ неверно, импликация $A \in X \Rightarrow x \in A$ истинна, каково бы ни было множество x. Тем самым $\mathrm{Ints}\,\varnothing = U$.

Подобно классу-пересечению определяется класс-объединение.

V. *Каков бы ни был класс X, существует такой вполне определенный класс S, что для произвольного множества x соотношение $x \in S$ означает существование в классе X множества A, имеющего x своим элементом.* Класс S называется *классом-объединением* (множеств) класса X и обозначается через $\mathrm{Sum}\,X$.

Действительно, речь здесь идет о классе S, отвечающем высказыванию, как очевидно, правильному, о произвольном множестве x: $\exists A : (A \in X \wedge x \in A) \equiv \exists A : (A \in X \wedge (x, A) \in T)$.

Подобно предложению II имеет место следующий факт.

VI. *Если класс X содержит класс Y, то и класс-объединение* $\mathrm{Sum}\,X$ *содержит класс-объединение* $\mathrm{Sum}\,Y$.

Для двухэлементного множества $X = \{A, B\}$ согласно предложению II (1.1) имеем $\mathrm{Sum}\,\{A, B\} = A \cup B$, кроме того, ясно, что $\mathrm{Sum}\,\{A\} = A$.

Аналог предложения III для класса-объединения выглядит следующим образом.

VII. *Каждое множество A, входящее элементом в данный класс X, есть подмножество класса-объединения* $\mathrm{Sum}\,X$. *Если V — класс, содержащий в качестве подмножества любое множество $A \in X$, то* $\mathrm{Sum}\,X \subset V$.

Действительно, если $A \in X$, то $A = \mathrm{Sum}\,\{A\} \subset \mathrm{Sum}\,X$. Далее, для каждого $x \in \mathrm{Sum}\,X$ найдется множество $A \in X$ такое, что $x \in A$. Так как по условию $A \subset V$, тем самым должно быть $x \in V$, так что $\mathrm{Sum}\,X \subset V$.

Результат, подобный предложению IV, для класса-объединения уже неверен — нельзя доказать даже, что объединение $A \cup B = \mathrm{Sum}\,\{A, B\}$ м н о ж е с т в A и B будет множеством. Гарантировать, что класс $\mathrm{Sum}\,X$ является множеством, можно лишь в двух тривиальных случаях: когда X — одноэлементное множество ($\mathrm{Sum}\,\{A\} = A$) и когда $X = \varnothing$ (нетрудно понять, что $\mathrm{Sum}\,\varnothing = \varnothing$). В общем же случае приходится прибегнуть к следующему принципу.

П р и н ц и п XII. *Если класс X представляет собой множество, то множеством будет и его класс-объединение* Sum X [17]).

В силу принципа XII объединение $A \cup B$ м н о ж е с т в A и B также является множеством.

Используя отношение T, можно «собрать» воедино все подмножества данного класса X, т. е. все такие м н о ж е с т в а, которые являются подклассами класса X.

VIII. *Каков бы ни был класс X, существует вполне определенный класс P такой, что для произвольного множества x соотношение $x \in P$ имеет место тогда и только тогда, когда множество x содержится в классе X, т. е. является его подмножеством.* Класс P называется *классом всех подмножеств класса* X и обозначается через $\mathfrak{P}(X)$. Для P употребительно также название *класс-степень класса* X и (в этом случае) обозначение 2^X.

В самом деле, понятно, что искомый класс P определяется тем условием, что для любого множества x соотношение $x \in P$ равносильно соотношению $x \subset X$, т. е. в соответствии с определением (см. 1.1) истинности утверждения

$$x \subset X \equiv \forall y : (y \in x \Rightarrow y \in X) \equiv \forall y : ((y, x) \in T \Rightarrow y \in X).$$

Поскольку соответствующее высказывание (о произвольном множестве x) в силу принципа XI правильно, этим и доказано существование класса P.

Важным дополнением предложения VIII служит

П р и н ц и п XIII. *Класс всех подмножеств данного множества представляет собой множество.*

1.8. Опишем некоторые отношения, которые порождаются отношением включения T.

I. *Существует такое отношение L, что для произвольных x и y включение $(x, y) \in L$ равносильно тому, что множество x является подмножеством множества y, т. е. что $x \subset y$.*

Действительно, L — это класс, отвечающий, как очевидно, правильному высказыванию (о произвольных множествах x и y):

$$\forall z : (z \in x \Rightarrow z \in y) \equiv \forall z : ((z, x) \in T \Rightarrow (z, y) \in T).$$

Введем отношение $I = L \cap L^{-1}$. Класс I состоит из всех таких пар (x, y), что одновременно $x \subset y$ и $y \subset x$, т. е. соглас-

[17]) Нетрудно понять, что можно ограничиться более слабой формулировкой настоящего принципа: каково бы ни было м н о ж е с т в о X, существует такое м н о ж е с т в о S, что любое множество A из класса X есть подмножество множества S. В этом случае, очевидно, класс Sum X будет подклассом множества S и, стало быть, ввиду принципа V сам является множеством.

по принципу объемности из всех таких пар (x, y), что $x = y$. В связи с этим I называется *отношением тождества.*

Хотя это и не было явно сказано, но из контекста нетрудно было вывести, что гипотеза о существовании собственных классов, т. е. классов, не являющихся множествами, весьма вероятна. И действительно, можно установить следующий результат.

II. *Класс* $V = \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}(T' \cap I)$ *собственный.*

В самом деле, заметим сначала, что пересечение $T' \cap I$ состоит из всех таких пар (x, x), что $x \notin x$. Если класс V является своим собственным элементом, т. е. если $V \in V$, то, тем самым, он будет множеством и по определению найдется такое (множество) y, что $(V, y) \in T' \cap I$, т. е., как отмечалось, получим $V \notin y = V$. Таким образом, V не может быть своим собственным элементом. Предполагая, что V — множество, и учитывая, что $V \notin V$, можем утверждать, что пара $(V, V) \in T' \cap I$ [18]. Стало быть, $V \in \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}(T' \cap I) = V$ и мы опять приходим к противоречию.

В силу принципа V (см. 1.2) универсальный класс U, поскольку он содержит класс V, также будет собственным классом.

Приведем несколько более или менее важных примеров однозначных отношений.

III. *Существует такое отношение* N, *что включение* $(x, y) \in N$ *для любых* x *и* y *означает, что* $y = \{x\}$.

Действительно,

$$N = \{(x, y) \in T : (\forall z : (z \in y \Rightarrow z = x))\} =$$

$$= \{(x, y) \in T : (\forall z : ((z, y) \in T \Rightarrow (z, x) \in I))\}.$$

Областью определения отношения N служит, как очевидно, универсальный класс U, областью значений — класс E, элементы которого суть все одноэлементные множества. Понятно, что N — однозначное и даже взаимно однозначное отношение. Для произвольного (множества) x имеем $N(x) = \{x\}$, а если y — одноэлементное множество: $y \in E$, то $N^{-1}(y) = x$, где x — единственный элемент множества y.

Поскольку отношение N однозначно и класс U собственный, согласно принципу X собственным будет и класс E всех одноэлементных множеств.

В следующем предложении содержится реализация класса $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}}F$ в виде области значения некоторого тернарного отношения.

---

[18]) Именно здесь мы и используем предположение о том, что V — множество: иначе нельзя говорить о паре (V, V).

IV. *Каково бы ни было отношение F, существует такое (тернарное) отношение P_{I}, что включение $(x, y, z) \in P_{\mathrm{I}}$ равносильно соотношениям $(x, y) \in F$ и $z = x$.*

В самом деле,

$$P_{\mathrm{I}} = \{(x, y, z) \in U^3 : ((x, y) \in F \wedge x = z)\} =$$
$$= \{(x, y, z) \in U^3 : ((x, y) \in F \wedge (x, z) \in I)\}.$$

Очевидно, областью определения $D(P_{\mathrm{I}})$ отношения P_{I} служит класс F, областью значений — класс $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F$. Поясним последнее утверждение. Включение $z \in R(P_{\mathrm{I}})$ означает, что существует такое $u \in D(P_{\mathrm{I}}) = F$, что $(u, z) \in P_{\mathrm{I}}$, т. е. что найдутся (множества) x, y так, что $u = (x, y)$, $(x, y) \in F$ и $z = x$. Но из включения $(x, y) \in F$ следует включение $x \in \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F$ и тем самым включение $z \in \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F$. Таким образом, $R(P_{\mathrm{I}}) \subset \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F$. Обратно, если $x \in \mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F$, то по определению (см. 1.4, принцип VIII) можно указать такое y, что $(x, y) \in F$. Следовательно, тройка $(x, y, x) = ((x, y), x)$ входит в класс P_{I}, так что $x \in R(P_{\mathrm{I}})$ и, значит, $\mathrm{Pr}_{\mathrm{I}} F \subset R(P_{\mathrm{I}})$.

Пусть $u \in F = D(P_{\mathrm{I}})$ и x, y таковы, что $u = (x, y)$. Пара (u, z) входит в класс P_{I} тогда и только тогда, когда $z = x$, т. е. когда $P_{\mathrm{I}}\{u\} = \{x\}$. Отсюда следует, что P_{I} — однозначное отношение, причем $P_{\mathrm{I}}(u) = x$, где x — первый элемент пары u. В связи со сказанным отношение P_{I} называют *операцией первого проектирования* (отношения F).

Аналогичным образом можно определить и операцию второго проектирования P_{II} класса F как класс, состоящий из всех таких троек (x, y, z), что $(x, y) \in F$ и $y = z$. Ясно, что $D(P_{\mathrm{II}}) = F$, $R(P_{\mathrm{II}}) = \mathrm{Pr}_{\mathrm{II}} F$.

Привлекая принцип X, приходим к следующему результату.

V. *Если отношение F представляет собой множество, то множествами будут и классы $D(F)$, $R(F)$.*

Следующие два предложения открывают возможность несколько более широкого истолкования принципа X.

VI. *Если отношение F таково, что для каждого $x \in D(F)$ класс $F\{x\}$ значений отношения F на элементе x представляет собой множество, то существует такое отношение $\tilde{F}$, что $(x, u) \in \tilde{F}$ для любых x и u равносильно тому, что $x \in D(F)$ и $u = F\{x\}$.*

Действительно,

$$\tilde{F} = \{(x, u) \in U^2 : (\forall z : (z \in u \Leftrightarrow (x, z) \in F))\} =$$
$$= \{(x, u) \in U^2 : (\forall z : ((z, u) \in T \Leftrightarrow (x, z) \in F))\}.$$

Отношение F, удовлетворяющее условиям предложения VI, называется *множественным*. Об отношении $\widetilde{F} : x \mapsto F\{x\}$ $(x \in D(F))$ говорят как о порожденном отношением F.

Если отбросить предположение о множественности данного отношения F, то, разумеется, нельзя говорить о порожденном отношении $\widetilde{F}$. Тем не менее и в этом случае иногда говорят о порожденном отношением F семействе классов $x \mapsto F\{x\}$ $(x \in D(F))$, сопоставляющем элементу $x \in D(F)$ класс (возможно, собственный) значений отношения F на элементе x [19]). Не следует, впрочем, осмысливать это выражение как-нибудь иначе, чем то, что задано произвольное отношение F.

Возвращаясь к случаю, когда F — множественное отношение, отметим, что $D(\widetilde{F}) = D(F)$. Отношение $\widetilde{F}$, очевидно, однозначно. При этом $\widetilde{F}(x) = F\{x\}$ для любого $x \in D(\widetilde{F}) = D(F)$.

VII. *В условиях предложения* VI $R(F) = \operatorname{Sum} R(\widetilde{F})$.

Действительно, если $y \in R(F)$, то существует такое (множество) x, что $(x, y) \in F$. Поскольку при этом $x \in D(F)$, то $y \in F\{x\} = \widetilde{F}(x) \in R(\widetilde{F})$. Следовательно, $y \in \operatorname{Sum} R(\widetilde{F})$ (см. предложение V (1.7) и замечание в связи с предложением IV (1.4)). Обратно, включение $y \in \operatorname{Sum} R(\widetilde{F})$ означает, что найдется такое множество $u \in R(\widetilde{F})$, что $y \in u$. Но если $u \in R(\widetilde{F})$, то для некоторого $x \in D(F)$ будет $u = F\{x\} \subset R(F)$, так что $y \in R(F)$.

Учитывая принципы X и XII, приходим к следующему обобщению принципа X.

VIII. *Если область определения $D(F)$ множественного отношения F представляет собой множество, то множеством будет и класс $R(F)$ — область значений отношения F.*

В самом деле, на основании принципа X множеством будет класс $R(\widetilde{F})$, а потому применим принцип XII.

Рассмотрим множество B, множество x и отношение $\varphi = \{x\} \times B$. Через P_{II} обозначим операцию второго проектирования отношения φ. Понятно, что P_{II} в данном случае взаимно однозначно и, следовательно, поскольку класс $D\left(P_{\mathrm{II}}^{-1}\right) = R(P_{\mathrm{II}}) = B$ — множество, множеством в силу принципа X будет и класс $R\left(P_{\mathrm{II}}^{-1}\right) = D(P_{\mathrm{II}}) = \varphi$. Пусть A — еще одно множество. Если принять за F отношение P_{I}^{-1}, где P_{I} — операция первого проектирования произведения $A \times B$, то для любого $x \in A$ будет $F\{x\} = \{x\} \times B$, так что по доказанному мы

[19]) При таком понимании термина «семейство» мы, понятно, не предполагаем, что «область определения» его $D(F)$ является множеством.

оказываемся в условиях предложения VIII. Поскольку $D(F) = A$ — множество, то на основании предложения VIII будет множеством и класс $R(F) = A \times B$. Таким образом

IX. *Произведение $A \times B$ множеств A и B представляет собой множество* [20]).

Рассмотрим отношение F, представляющее собой множество. Согласно предложению IV и принципу X (см. 1.6) будут множествами классы $D(F)$ и $R(F)$. Так как $F^{-1} \subset R(F) \times D(F)$, с помощью предложения IX приходим к следующему результату.

X. *Если отношение F является множеством, то множеством будет и обратное для него отношение F^{-1}.*

1.9. Введем еще одно полезное во многих случаях отношение.

I. *Существует такое (тернарное) отношение Φ, что для любых x, y, z включение $(x, y, z) \in \Phi$ имеет место тогда и только тогда, когда $z = x \cap y$.*

Доказательство этого факта, как и выше, опирается на очевидное утверждение о правильности некоторого высказывания, а именно:

$$\Phi = \{(x, y, z) \in U^3 : (\forall u : ((u \in x \wedge u \in y) \Leftrightarrow u \in z))\} = \\ = \{(x, y, z) \in U^3 : (\forall u : ((u, x) \in T \wedge (u, y) \in T) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (u, z) \in T))\}. \tag{16}$$

Заметим, что здесь впервые нам пришлось воспользоваться замечанием к принципу IX, поскольку в (16) речь идет о четырехместном высказывании, к которому по одной из переменных применяется квантор общности.

Понятно, что областью определения отношения Φ служит класс U^2, а областью значений — весь класс U: каково бы ни было $z \in U$, очевидно, $(z, z, z) \in \Phi$. Ясно, что Φ — однозначное отношение, причем $\Phi(x, y) = x \cap y$ для любых $x, y \in U$[21]).

Предложение I приводит к такому результату.

II. *Каков бы ни был класс Z, существует такое отношение $\Delta = \Delta_Z$, что соотношение $(x, y) \in \Delta$ имеет место тогда и тольтолько тогда, когда $x \cap y \in Z$.*

В самом деле,

$$\Delta = \{(x, y) \in U^2 : (\exists z : ((x, y, z) \in \Phi \wedge z \in Z))\}.$$

---

[20]) Возможно, этот результат проще было бы получить на основании принципов XI, XII и V, если заметить, что $A \times B \subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B))$.

[21]) Мы пишем $\Phi(x, y)$ хотя следовало бы писать $\Phi((x, y))$. Подобная вольность в обозначениях будет допускаться и дальше.

Взяв в качестве Z в предложении II класс, единственным элементом которого является пустое множество, получим, что соответствующее отношение Δ состоит из всех таких пар (x, y), что $x \cap y = \varnothing$. Это отношение Δ называется *отношением дизъюнктности*, а сами такие множества x, y, что $(x, y) \in \Delta$, дизъюнктными [22]).

Класс X называется *расчлененным* (или дизъюнктным), если для любых множеств x, y, входящих в класс X, имеет место одно из двух соотношений: $x = y$ или $x \cap y = \varnothing$. Понимая под Δ отношение дизъюнктности, а под I — отношение тождества, можно записать определение расчлененного класса в виде: класс X—расчлененный тогда и только тогда, когда $X^2 \subset I \cup \Delta$.

Расчлененный класс X называется *разбиением* класса $Y = \mathrm{Sum}\, X$[23]). Ясно, что при этом соотношение $y \in Y$ означает, что в X существует единственный элемент w такой, что $y \in w$.

Пусть X — расчлененный класс. Обозначим через E класс всех одноэлементных множеств (предложение III (1.8)), а через Δ — отношение Δ_E предложения II. Положим $\Pi(X) = \mathfrak{P}(\mathrm{Sum}\, X) \cap \pi_\Delta(X)$. Класс $\Pi(X)$ называется *произведением* множеств класса X. Возьмем элемент u класса $\Pi(X)$. Поскольку $u \in \pi_\Delta(X)$, для любого элемента x класса X будет $(x, u) \in \Delta$, т. е. пересечение $x \cap u$ состоит в точности из одного элемента. Ввиду того, что $u \in \mathfrak{P}(\mathrm{Sum}\, X)$, т. е. что u служит подмножеством класса-объединения $\mathrm{Sum}\, X$, для каждого элемента $y \in u$ можно указать такое множество $x \in X$, что $y \in x$. При этом $x \cap u = \{y\}$.

Таким образом, множество u можно рассматривать как совокупность «представителей» множеств, образующих класс X — по одному из каждого множества, входящего в класс X. Отсюда ясно, что если среди элементов класса X имеется пустое множество, то пустым будет и класс $\Pi(X)$ — пустое множество не может иметь «представителя»! Однако класс $\Pi(X)$ может оказаться пустым даже и в том случае, когда в состав класса X не входит пустое множество. Так заведомо будет, если класс X собственный.

Действительно, пусть $u \in \Pi(X)$. Образуем отношение $T_0 = T \cap (u \times X)$. Если $(y, x) \in T_0$, то $y \in x$, $y \in u$, $x \in X$. Таким образом, ввиду того что класс X расчлененный, должно быть $x \cap u = \{y\}$. Отсюда следует, что отношение T_0 однозначно (и даже, как очевидно, взаимно однозначно). Так

---

[22]) И вообще классы X и Y называют *дизъюнктными*, если $X \cap Y = \varnothing$.

[23]) Иногда, говоря о разбиении X класса Y, предполагают, что пустое множество не входит в X.

как $D(T_0) = u$ — множество, то на основании принципа X будет множеством и область значений $R(T_0)$ отношения T_0. Остается заметить, что $R(T_0)$ совпадает с X.

Из сказанного, в частности, вытекает, что, каков бы ни был класс X, произведение $\Pi(X)$ всегда является множеством, поскольку, если класс X представляет собой множество, то в силу принципов XII и XIII класс $\mathfrak{P}(\mathrm{Sum}(X))$ является множеством, а стало быть, множеством будет и его подкласс $\Pi(X)$ (принцип V). Вопрос о том, будет или нет пустым произведение $\Pi(X)$ в случае, когда X — расчлененное множество непустых множеств, нельзя решить на основании введенных выше принципов теории множеств. Это приводит к необходимости ввести еще один принцип, известный под названием *принципа выбора Цермело*.

Однозначное отношение f будем называть *селектором* данного отношения F, если $f \subset F$ и $D(f) = D(F)$. Понятно, что для любого $x \in D(f)$ значение $f(x)$ есть элемент множества $F(x)$ значений отношения F на элементе x.

Принцип XIV. *Для любого отношения существует по крайней мере один селектор.*

Нетрудно показать (предлагаем читателю проделать это самостоятельно), что в формулировке принципа XIV можно было ограничиться предположением, что селектор существует хотя бы для отношения T^{-1}, т. е. потребовать существования такого однозначного отношения f, областью определения которого служит класс U_0 всех непустых множеств и $f(x) \in x$ для каждого $x \in U_0$. Отношение f, таким образом, как бы «выбирает» из каждого непустого множества по одному элементу [24].

Принцип выбора позволяет сформулировать следующий фундаментальный результат.

III. *Пусть A — расчлененное множество. Для того чтобы произведение $\Pi(A)$ множеств — элементов совокупности A — было непустым, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент совокупности A был непустым множеством.*

Необходимость этого условия, тривиальным образом следующая из определения, уже отмечалась. Достаточность условия выводится из принципа XIV, если принять в нем за F отношение $T^{-1} \cap (A \times U)$. Тогда, подразумевая под f какой-либо селектор отношения F и замечая, что в случае, когда A не содержит пустого множества, $D(f) = D(F) = U_0 \cap A = A$, можно заключить, что область значений $R(f) = u$ представляет собой множество (принцип X). Если x — произвольный элемент

---

[24]) Независимость (т. е. невозможность ни доказать, ни опровергнуть) именно этого утверждения от других аксиом теории множеств была доказана в 1963 г. американским математиком Дж. Коэном.

множества $A = D(f)$, то существует такое (множество) y, что $(x, y) \in f \subset F \subset T^{-1}$. Тем самым $y \in x$ и, кроме того, $y \in R(f) = u$. Следовательно, $y \in x \cap u$. Поскольку множество A расчлененное, пересечение $x \cap u$ состоит из единственного элемента y. Отсюда очевидным образом следует, что $u \in \Pi(A)$, так что $\Pi(A) \neq \varnothing$ [25]).

Завершая изложение аксиоматики теории множеств, приведем еще два принципа, которыми, однако, мы не будем пользоваться в дальнейшем изложении.

Принцип XV (аксиома фундирования). *Каков бы ни был непустой класс X, в нем существует такой элемент u, что $u \cap X = \varnothing$.*

Укажем лишь на одно следствие сформулированного принципа.

IV. *Каковы бы ни были множества x и y, не может быть одновременно $x \in y$ и $y \in x$.*

Действительно, если x и y — такие множества, что $x \in y$ и $y \in x$, и $X = \{x, y\}$, то $x \in X \cap y$, $y \in X \cap x$, что противоречит аксиоме фундирования.

Поскольку, в частности, ни для какого множества x не может быть $x \in x$, то построенный в предложении II (1.8) собственный класс V совпадает с универсальным классом U.

Все сформулированные до сих пор принципы теории множеств были проникнуты заботой о том, чтобы не допустить к рассмотрению слишком «обширных» множеств. Следующий принцип утверждает, напротив, существование достаточно «обширного» множества, в связи с чем этот принцип называют обычно аксиомой бесконечности.

Принцип XVI. *Существует такое множество* $\mathbf{N}$, *что* $\varnothing \in \mathbf{N}$ *и вместе с каждым своим элементом x множество* $\mathbf{N}$ *включает объединение* $x \cup \{x\} : x \in \mathbf{N} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \mathbf{N}$.

Таким образом, в $\mathbf{N}$, например, входит одноэлементное множество $\{\varnothing\}$, двухэлементное множество $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ и т. д.

Хотя формально аксиома бесконечности не будет использоваться в дальнейшем, фактически на нее опираются многие построения анализа. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что для избежания утомительных и не относящихся непосредственно к анализу рассуждений, мы постулируем ниже (см. § 5) существование множества всех вещественных чисел, хотя можно было бы доказать существование этого множества, опираясь, в частности, и на аксиому бесконечности.

---

[25]) Вообще-то нет надобности проверять, что $u \in \mathfrak{P}(\mathrm{Sum}\,(A))$, поскольку, если это включение не имело бы места, мы заменили бы u пересечением $u \cap \mathfrak{P}(\mathrm{Sum}\,(A))$.

§ 2. ОТНОШЕНИЯ

В этом параграфе мы продолжим изучение отношений. В частности, введем те связанные с отношениями понятия, которые используются на протяжении всей книги. Считая, что у читателя накопился уже достаточный опыт обращения с классами, мы лишь изредка будем приводить доказательства существования конкретных классов в тех случаях, когда они осуществляются с помощью соображений, изложенных в 1.5.

2.1. Рассмотрим отношение F и класс A. Обозначая через U, как и в § 1, универсальный класс, введем отношение $F|_A = F \cap (A \times U)$, которое называется *сужением* (или *ограничением*) отношения F на класс A[26]. Отношение F называется *распространением* (на $D(F)$) отношения G, если существует такой класс A, что $G = F|_A$. Область значений $R(F|_A)$ сужения $F|_A$ отношения A на класс A называется *образом класса* A при отношении F и обозначается через $F[A]$. Если класс A есть одноэлементное множество $\{x\}$, то обычно мы вместо $F[\{x\}]$ будем писать просто $F\{x\}$, называя этот класс *образом элемента* x.

Если в определении образа отношение F заменить на обратное к нему F^{-1}, то мы придем к понятию *прообраза* $F^{-1}[A]$ *класса* A при данном отношении F. Имеем, следовательно, $F^{-1}[A] = R(F^{-1} \cap (A \times U))$. Мы не останавливаемся на определении прообраза $F^{-1}\{x\}$ элемента.

В соответствии с предложением II (1.6)

$$F[A] = R(F|_A) = D\left((F|_A)^{-1}\right) = D\left(F^{-1} \cap (U \times A)\right) = \\ = \{y : \pi_{F^{-1}}\{y\} \cap A \neq \varnothing\}. \qquad (1)$$

В частности, если $A = \{x\}$, то условие $\pi_{F^{-1}}\{y\} \cap A \neq \varnothing$ равносильно тому, что $x \in \pi_{F^{-1}}\{y\}$, т. е. тому, что $(y, x) \in F^{-1}$ или, что то же, $y \in \pi_F\{x\}$. Следовательно, $F\{x\} = \pi_F\{x\}$ — образ элемента x совпадает с классом значений отношения F на элементе x. Аналогично для прообраза $F^{-1}\{y\}$ элемента y имеем $F^{-1}\{y\} = \pi_{F^{-1}}\{y\}$. Используя это в (1), получаем

$$F[A] = \{y : F^{-1}\{y\} \cap A \neq \varnothing\} \qquad (2)$$

[26]) Часто под сужением отношения F понимают любой подкласс класса F. В случае однозначного отношения F оба эти, вообще говоря различные, определения, как можно показать, совпадают.

и аналогично для произвольного класса B

$$F^{-1}[B] = \{x : F\{x\} \cap B \neq \varnothing\}. \tag{3}$$

Поскольку для каждого y имеем $F^{-1}\{y\} \subset D(F)$, то $F^{-1}\{y\} \cap \cap A = F^{-1}\{y\} \cap (A \cap D(F))$. Поэтому для любого класса A

$$F[A] = F[A \cap D(F)]. \tag{4}$$

Далее, также с помощью (2) и предложения II (1.6)

$$F[A] \subset \{y : F^{-1}\{y\} \neq \varnothing\} = R(F). \tag{5}$$

В случае, когда $A \supset D(F)$, соотношения $F^{-1}\{y\} \cap A \neq \varnothing$ и $F^{-1}\{y\} \neq \varnothing$ равносильны для любого y. Поэтому при сделанном предположении $F[A] = R(F)$.

Отметим наконец, что непосредственно из определения, или опять с помощью (2) можно получить, что если класс A_1 содержится в классе A_2, то $F[A_1] \subset F[A_2]$.

Согласно (2) включение $y \in F[A]$ равносильно существованию такого $x \in A$, что $x \in F^{-1}\{y\}$. В случае, когда F однозначно и $A \subset D(F)$, последнее соотношение эквивалентно равенству $y = F(x)$. Указанное обстоятельство мы выражаем словами, что образ $F[A]$ состоит из всех элементов вида $F(x)$ с $x \in A$.

Сохраняя предположение об однозначности отношения F, рассмотрим произвольный класс B. Если $x \in D(F)$, то класс $F\{x\}$ представляет собой одноэлементное множество $\{F(x)\}$. Поэтому условие $F\{x\} \cap B \neq \varnothing$ равнозначно включению $F(x) \in B$. Следовательно, согласно (3)

$$F^{-1}[B] = \{x \in D(F) : F(x) \in B\}. \tag{6}$$

Если при этом класс B представляет собой одноэлементное множество $\{y\}$, то (6) приводит к равенству $F^{-1}\{y\} = \{x \in D(F) : : F(x) = y\}$.

Отметим еще такой полезный факт.

I. *Пусть F и G — отношения. Для того чтобы существовал такой класс A, что $G = F|_A$, необходимо и достаточно, чтобы $D(G) \subset D(F)$ и для каждого $x \in D(G)$ было $G\{x\} = F\{x\}$. Если это условие выполнено, то в качестве A можно взять любой такой класс A, что $A \cap D(F) = D(G)$.*

Если отношения F и G связаны соотношением $G = F|_A$, то $D(G) = A \cap D(F) \subset D(F)$. Если $x \in D(G) = A \cap D(F)$, то $G\{x\} = = F\{x\} \cap (A \times U)\{x\} = F\{x\} \cap U = F\{x\}$.

Предполагая выполненными условия предложения I, положим $A = D(G)$. Если $(x, y) \in G$, то $x \in D(G) \subset D(F)$ и

$y \in G\{x\}$. По условию тогда и $y \in F\{x\}$, так что $(x, y) \in F$. Очевидно также, что $(x, y) \in A \times U$. Таким образом, $G \subset F \cap (A \times U) = F|_A$. Обратное соотношение проверяется в обратном порядке.

Если в условиях предложения I дополнительно потребовать, чтобы отношения F и G были однозначными, то второе условие предложения можно заменить следующим предположением: $F(x) = G(x)$ для каждого $x \in D(G)$, так что

II. *Если F и G — однозначные отношения, то для того чтобы G было сужением F, необходимо и достаточно, чтобы $F \supset G$.*

Если X и Y — произвольные классы и F — произвольное (необязательно множественное) отношение, то

$$F[X \cup Y] = F[X] \cup F[Y]. \tag{7}$$

Действительно, $y \in F[X \cup Y]$ означает, что $\varnothing \neq F^{-1}\{y\} \cap (X \cup Y) = (F^{-1}\{y\} \cap X) \cup (F^{-1}\{y\} \cup Y)$, а это возможно в том и только в том случае, когда одно из пересечений $F^{-1}\{y\} \cap X$ или $F^{-1}\{x\} \cap Y$ непусто, т. е. когда $y \in F[X] \cup F[Y]$.

Рассмотрим произвольный класс V. Имеет место следующее полезное утверждение.

III. *Каково бы ни было отношение F, существует единственный класс X такой, что включение $x \in X$ выполнено тогда и только тогда, когда $F\{x\} \in V$.*

Для доказательства достаточно проверить, что высказывание Φ: «$F\{x\} \in V$» о произвольном множестве x правильно сформулировано. Это становится очевидным, если записать высказывание Φ в виде $\Phi(x) \equiv \exists y : ((y \in V) \wedge (\forall z : (x, z) \in F \Leftrightarrow z \in y))$ и воспользоваться сказанным в 1.5.

Если класс V не включает в состав своих элементов пустого множества, то понятно, что класс X предложения III будет подклассом области определения $D(F)$ отношения F. В противном случае, если $\varnothing \in V$, очевидно, $X \supset (D(F))'$.

Рассмотрим правильно сформулированное двухместное высказывание Φ с перенумерованными переменными (см. 1.5). О высказывании Ψ: «существует единственное (множество из области изменения первой переменной) x такое, что имеет место $\Phi(x, \cdot)$» или в символической записи «$\exists! x : \Phi(x\ \cdot,)$[27]» говорят, что оно получается из Φ применением *квантора существования и единственности* $\exists!$[28]). Убедимся, что Ψ так же, как и Φ, пра-

[27]) Если требуется явно указать область изменения W первой переменной, то пишут $\exists! x : (x \in W \wedge \Phi(x, \cdot)$.

[28]) Применение квантора существования и единственности возможно, разумеется, и в том случае, когда Φ — произвольное, не обязательно правильное и двухместное, высказывание.

вильное высказывание. В самом деле, обозначим через E класс всех одноэлементных множеств (см. 1.8) и через F — отношение, отвечающее высказыванию Φ. Нетрудно понять, что высказыванию Ψ будет соответствовать класс X предложения III, если принять в нем в качестве V класс E. Заметим попутно, что сужение $F|_X$ отношения F на класс X будет однозначным.

Если в предложении III в качестве V взять класс U_0 всех непустых множеств, то класс X будет обладать тем свойством, что образ любого его элемента — множество (так что в этом случае сужение $F|_X$ — множественное отношение (см. 1.8)).

В случае, когда отношение F множественное, в 1.8 с ним было связано однозначное отношение $\widetilde{F} : x \to F\{x\}$ $(x \in D(F))$, сопоставляющее произвольному элементу области определения $D(F)$ данного отношения множество значений F на этом элементе. Используя понятие образа, можно построить однозначное отношение с существенно более широкой областью определения так, что $\widetilde{F}$ будет фактически его сужением.

IV. *Если F — множественное отношение, то для любого множества A его образ $F[A]$ представляет собой множество. Существует (однозначное) отношение $\widehat{F} : A \mapsto F[A]$ $(A \in U)$.*

Действительно, согласно предложению I для любого класса A сужение $F|_A$ представляет собой множественное отношение. Поэтому если A — множество, то множеством будет и пересечение $A \cap D(F)$, которое служит областью определения отношения $F|_A$. В силу предложения VIII (1.8) будет множеством и область значений $F[A]$ отношения $F|_A$.

Далее, поскольку соотношения $x \in F^{-1}[y]$ и $(x, y) \in F$ равносильны, то согласно (2) включение $y \in F[A]$ равносильно тому, что существует такой элемент x из A, что $(x, y) \in F$. Тем самым высказывание

$$\forall y : (y \in B \Leftrightarrow \exists x : (x \in A) \wedge (x, y) \in F)$$

о произвольных множествах A и B, будучи правильным, определяет искомое отношение $\widehat{F}$.

Пусть класс $\mathfrak{A}$ является подклассом области определения $D(\widehat{F}) = \mathfrak{P}(D(F))$ отношения $\widehat{F}$. Чтобы более определенно выразить связь отношения $\widehat{F}$ с данным отношением F, мы будем образ $\widehat{F}[\mathfrak{A}]$ класса $\mathfrak{A}$ при отношении $\widehat{F}$ записывать в виде $F\langle\mathfrak{A}\rangle$. Поскольку $\widehat{F}$, очевидно, однозначно, класс $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ состоит из всех множеств вида $\widehat{F}(A) = F[A]$ с $A \in \mathfrak{A}$.

Отметим еще, что для $x \in D(F)$ имеет место равенство $\widetilde{F}(x) = F\{x\} = \widehat{F}(\{x\})$. Именно это равенство мы имели в виду, говоря о том, что отношение $\widehat{F}$ служит фактически распространением отношения $\widetilde{F}$.

Заметим, что, как нетрудно понять, $\widehat{F}^{-1} = \widehat{F^{-1}}$.

Можно было бы под $\widehat{F}$ понимать отношение $A \mapsto F[A]$ ($A \in \in \mathfrak{P}(D(F))$) — сужение введенного в предложении IV отношения на класс $\mathfrak{P}(D(F))$ всех подмножеств класса $D(F)$. Такое сужение отношения $\widehat{F}$ особенно целесообразно рассматривать в случае, когда область определения $D(F)$ отношения F представляет собой множество, поскольку тогда и класс $\mathfrak{P}(D(F))$ также является множеством.

Введенное выше отношение $\widehat{F}$ позволяет связать данное отношение F с операцией образования класса-объединения.

V. *Если F — множественное отношение и $\mathfrak{A}$ — произвольный класс, то* $F[\mathrm{Sum}\,\mathfrak{A}] = \mathrm{Sum}\,F\langle\mathfrak{A}\rangle$[29])

Действительно, в силу соотношения (2) и согласно сказанному в 1.7 включение $y \in F[\mathrm{Sum}\,\mathfrak{A}]$ равносильно тому, что найдутся $A \in \mathfrak{A}$ и $x \in A$ так, что $x \in F^{-1}\{y\} \cap A$. Включение $y \in \mathrm{Sum}\,F\langle\mathfrak{A}\rangle$ эквивалентно тому, что найдется множество $B \in F\langle\mathfrak{A}\rangle$, включающее y в качестве своего элемента. Так как отношение $\widehat{F}$ однозначно, соотношение $B \in F\langle\mathfrak{A}\rangle = \widehat{F}[\mathfrak{A}]$ означает существование такого $A \in \mathfrak{A}$, что $B = \widehat{F}(A) = = F[A]$. Остается заметить, что в соответствии с (2) $y \in F[A]$ равносильно существованию $x \in F^{-1}\{y\} \cap A$.

Если в предложении V заменить операцию образования класса-объединения операцией образования класса-пересечения, то полученное утверждение будет неверным. Для этого случая можно утверждать лишь, что, как очевидно,

$$F[\mathrm{Ints}\,\mathfrak{A}] \subset \mathrm{Ints}\,F\langle\mathfrak{A}\rangle. \tag{8}$$

Однако имеет место

VI. *Если F — такое однозначное отношение, что отношение F^{-1} множественное, и $\mathfrak{A}$ — произвольный непустой класс, то*

$$F^{-1}[\mathrm{Ints}\,\mathfrak{A}] = \mathrm{Ints}\,F^{-1}\langle\mathfrak{A}\rangle. \tag{9}$$

[29]) В этой формуле мы впервые используем новую систему обозначений классов вообще и множеств, которую обычно будем применять и дальше. Согласно этой системе малыми латинскими буквами обозначаются такие множества, элементы которых, как правило, не участвуют в данном рассмотрении. Эти множества можно тем самым считать атомарными объектами (только в данной ситуации, конечно). Большими латинскими буквами обозначаются классы, элементы которых суть множества, обозначаемые малыми буквами и, наконец, прописными буквами немецкого (готического) алфавита — классы, имеющие в качестве элементов множества, обозначаемые большими латинскими буквами.

Действительно, согласно (6) $x \in F^{-1}[\mathrm{Ints}\,\mathfrak{A}]$ означает, что $F(x) \in \mathrm{Ints}\,\mathfrak{A}$, так что для любого $A \in \mathfrak{A}$ должно быть $F(x) \in \in A$. Но тогда $x \in F^{-1}[A]$ и, стало быть, $x \in \mathrm{Ints}\, F^{-1}\langle\mathfrak{A}\rangle$.

Если, в частности, $\mathfrak{A}$ — двухэлементное множество $\{A, B\}$, то в условиях предложения $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$. Это соотношение, как нетрудно понять, остается верным, если в нем под A и B понимать произвольные классы. При этом нет надобности считать отношение F^{-1} множественным.

Пусть φ — однозначное отношение, и A — подкласс области определения $D(\varphi)$ отношения φ. Класс $\mathrm{Ints}\,\varphi[A]$ будем обозначать символом $\bigcap\limits_{x\in A} \varphi\,(x)$ или $\bigcap_{x\in A}\varphi(x)$, а класс $\mathrm{Sum}\,\varphi\,[A]$ — $\bigcup\limits_{x\in R} \varphi(x)$ или $\bigcup_{x\in A}\varphi\,(x)$. Учитывая состав класса $\varphi[A]$, получаем, что соотношение $y \in \bigcap\limits_{x\in A} \varphi\,(x)$ означает, что для любого $x \in A$ имеет место включение $y \in \varphi(x)$. Аналогично соотношение $y \in \bigcup\limits_{x\in A} \varphi\,(x)$ равносильно существованию в A такого элемента x, что $y \in \varphi(x)$.

Взяв в качестве φ отношение тождества $I : x \mapsto x$ $(x \in U)$ и заметив, что $I[\mathfrak{A}] = \mathfrak{A}$ для любого класса $\mathfrak{A}$, используя новые обозначения, можем написать

$$\mathrm{Ints}\,\mathfrak{A} = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A, \quad \mathrm{Sum}\,A = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A.$$

Отметим еще, что в новых обозначениях соотношения предложений V и VI можно записать в виде

$$F\left[\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A\right] = \bigcup_{A\in\mathfrak{A}} [A], \quad F^{-1}\left[\bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A\right] = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} F^{-1}[A].$$

2.2. Одним из основных способов построения новых отношений из уже данных является образование суперпозиции двух отношений.

Пусть F и G — данные отношения. Образуем высказывание о произвольных множествах x и z: «существует такое (множество) y, что $(x, y) \in F$ и $(y, z) \in G$», т. е. в сокращенной форме «$\exists y : ((x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)$». Понятно, что это высказывание правильно сформулировано. Считая x первой, а z — второй переменной, класс S, отвечающий указанному высказыванию, назовем *суперпозицией отношений* F и G и будем обозначать через $G\circ F$. Условимся обозначать суперпозицию $F\circ F$ через $F^{[2]}$. Таким образом,

$$G\circ F = \{(x, z) \in U^2 : (\exists y : (x, y) \in F \wedge (y, z) \in G)\}. \qquad (10)$$

Сразу же отметим, что если $H = G\circ F$, то, очевидно, $H^{-1} =$

$= F^{-1} \circ G^{-1}$. Укажем еще, что порядок, в котором «действуют» данные отношения при образовании суперпозиции, играет существенную роль. Лишь в исключительном случае $G \circ F = F \circ G$.

I. *Если отношения F, G, S связаны соотношением $S = G \circ F$ и A — произвольный класс, то $S[A] = G[F[A]]$.*

Действительно, предположим, что $z \in S[A]$. Согласно (2) найдется $x \in A$ такое, что $x \in S^{-1}\{z\}$, т. е. что $(x, z) \in S$. Тем самым существует такое y, что $(x, y) \in F$, $(y, z) \in G$. Следовательно, $y \in F[A]$ и $z \in G[F[A]]$. Наоборот, если взять $z \in G[F[A]]$, то, как и выше, найдется элемент $y \in F[A]$ такой, что $(y, z) \in G$, после чего можно подобрать элемент $x \in A$ так, что $(x, y) \in F$. Таким образом, $(x, z) \in S$ и, поскольку $x \in A$, то $z \in S[A]$.

Взяв в предложении I $A = \{x\}$, получим

II. *В условиях предложения* I

$$D(S) = F^{-1}[D(G)] = F^{-1}[D(G) \cap R(F)],$$
$$R(S) = D(S^{-1}) = G[R(F)] = G[R(F) \cap D(G)]. \qquad (11)$$

В самом деле,

$$D(S) = S^{-1}[U] = F^{-1}\left[G^{-1}[U]\right] = F^{-1}[D(G)] = F^{-1}[D(G) \cap R(F)].$$

Из соотношений $R(S) = D(S^{-1})$ и $S^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$ получаем второе равенство (11). В частности, если $R(F) \subset D(G)$, то $D(S) = F^{-1}[R(F)] = D(F)$.

III. *Если отношения F и G однозначны, то будет однозначной и их суперпозиция $S = G \circ F$. При этом $S(x) = G(F(x))$*[30]) *для каждого $x \in D(S)$.*

Вот одно из приложений понятия суперпозиции отношений.

IV. *Пусть F и G — однозначные отношения. Существует такое отношение Θ, что для любых x и y включение $(x, y) \in \Theta$ равносильно тому, что $x \in D(F)$, $y \in D(G)$, $F(x) = G(y)$.*

Действительно, нетрудно проверить, что $\Theta = G^{-1} \circ F$, поскольку, очевидно, $\Theta = \{(x, y) \in U^2 : (\exists z : F(x) = z \wedge G(y) = z)\}$ и равенства $F(x) = z$, $G(y) = z$ равносильны включениям $(x, z) \in F$, $(z, y) \in G^{-1}$.

На основании доказанного предложения можно обосновать замечание к принципу IX (см. 1.4) о возможности образовывать классы четверок, пятерок и т. д., получающиеся из данного

---

[30]) В силу предложения II из $x \in D(S)$ следует $F(x) \in D(G)$, так что значение $G(F(x))$ имеет смысл.

класса транспонированием по любому типу. Ограничимся для простоты классом G четверок. Обозначим через Ψ_1 операцию второго проектирования класса G, так что если $(x, y, z, u) \in G$, то $\Psi_1(x, y, z, u) = u$. Через Φ_1 обозначим операцию первого проектирования класса G: $\Phi_1(x, y, z, u) = (x, y, z)$ для произвольной четверки $(x, y, z, u) \in G$. Далее, Ψ_2 и Φ_2 суть операции второго и первого проектирования соответственно класса $R(\Phi_1)$, а Ψ_3 и Φ_3 — то же, но для отношения $R(\Phi_2)$. Если $v \in G$, то, как очевидно, $v = (x, y, z, u)$, где $x = \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1(v)$, $y = \Psi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1(v)$, $z = \Psi_2 \circ \Phi_1(v)$, $u = \Psi_1(v)$.

Таким образом, для G существуют такие отношения Λ_1, Λ_2, Λ_3, Λ_4 с областью определения G, которые сопоставляют элементу $v \in G$ соответственно первый элемент четверки v, второй, третий, четвертый элементы.

Пусть есть класс G четверок. Предположим для определенности что нам нужно установить существование класса G с индексом (1, 3, 2, 4), который состоит из всех четверок, соответствующим образом транспонированных. Согласно предложению IV отношение $[\Lambda_2(v) = \Lambda_3(w)] \wedge [\Lambda_3(v) = \Lambda_2(w)]$ — пересечение двух отношений,— как ясно из сказанного выше, имеет областью определения G, а в качестве области значений как раз и фигурирует отношение $G_{(1,3,2,4)}$.

Еще раз предоставляем читателю возможность убедиться в том, что при выводе предложения IV мы не пользовались замечанием к принципу IX, а использовали лишь сам принцип IX[31]).

Наряду с отношениями F и G рассмотрим еще отношение H. На основании предложения I для произвольного x имеем $(H \circ (G \circ F))\{x\} = H[(G \circ F)\{x\}] = H[G[F\{x\}]]$ и $((H \circ G) \circ F)\{x\} = (H \circ G)[F\{x\}] = H[G[F\{x\}]]$. Отсюда следует, что $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$, в связи с чем для обозначения этого отношения нет надобности употреблять скобки, т. е. можно просто писать $H \circ G \circ F$; в случае $H = G = F$, т. е. суперпозицию $F \circ F \circ F$, будем обозначать через $F^{[3]}$.

Нетрудно понять, что

$$H \circ G \circ F = \{(x, u) \in U^2 : (\exists y, z : (x, y) \in F, \\ (y, z) \in G, (z, u) \in H)\}. \tag{12}$$

В самом деле, записывая соотношение $(x, u) \in H \circ G \circ F$ в виде $u \in H[G[F\{x\}]]$, можно согласно (2) утверждать, что существует такое $z \in G[F\{x\}]$, что $(z, u) \in H$. Первое из этих двух включений равносильно существованию элемента $y \in$

[31]) Замечание к принципу IX было использовано лишь в пункте 1.9 при доказательстве предложения I, которое здесь не используется.

$\in F\{x\}$ такого что $(y, z) \in G$. Остается записать включение $y \in F\{x\}$ в виде $(x, y) \in F$.

Рассмотрим множественные отношения Φ и Ψ. Положим $\Theta = \{(x, y, z) \in U^3 : z = \Phi\{x\}\times\Psi\{y\}\}$[32]). Ясно, что Θ является однозначным отношением, область определения которого совпадает с U^2. Для произвольных (множеств) x, y имеем $\Theta(x, y) = \Phi\{x\}\times\Psi\{y\}$ (мы пишем $\Theta(x, y)$ вместо $\Theta((x, y))$). Если G — какое-либо отношение, то в соответствии с данным в 2.1 определением имеет смысл отношение $\bigcup_{v\in G}\Theta(v) = \bigcup_{(y,z)\in G}\Phi\{y\}\times\Psi\{z\}$.

Рассмотрим отношения F, G, H.

V. *Если отношения F^{-1} и H множественные, то*

$$H\circ G\circ F = \bigcup_{(y,z)\in G}(F^{-1}\{y\}\times H\{z\}). \tag{13}$$

В самом деле, включение $(x, u)\in \bigcup_{(y,z)\in G}(F^{-1}\{y\}\times H\{z\})$ означает существование такой пары $(y, z)\in G$, что $x\in F^{-1}\{y\}$, $u\in H\{z\}$, т. е. что $(x, y)\in F$, $(z, u)\in H$, а это, как отмечалось, равносильно включению $(x, y)\in H\circ G\circ F$.

Пусть A — данный класс. Через I_A обозначим сужение $I|_A$ отношения тождества I на класс A. Очевидно, $I_A : x\mapsto x$ $(x\in A)$. Проверим, что

VI. *Для произвольного отношения F имеет место равенство $F\circ I_A = F|_A$.*

Действительно, согласно предложению II $D(F\circ I_A) = I_A^{-1}(D(F)\cap R(I_A)) = A\cap D(F)\subset D(F)$. Для любого $x\in A\cap D(F)$ в силу предложения I имеем $(F\circ I_A)\{x\} = F[I_A\{x\}] = F\{x\}$. Остается применить предложение I(2.1).

Из предложения VI получаем

VII. *Если класс A содержит область определения $D(F)$, а класс B — область значений $R(F)$ отношения F, то*

$$F\circ I_A = F = I_B\circ F. \tag{14}$$

Равенство $F\circ I_A = F$ следует непосредственно из предложения VI, поскольку соотношение $A\supset D(F)$ влечет тождество $F = F|_A$. Заменяя в доказанном равенстве F на F^{-1} и класс A

---

[32]) Трехместное высказывание Λ, определенное тождеством $\Lambda(x, y, z)\equiv z = \Phi\{x\}\times\Psi\{y\}$ $(x, y, z\in U)$, правильное, поскольку $\Lambda(x, y, z)\equiv w\in z\Leftrightarrow(\exists u, v : w = (u, v)\wedge(x, u)\in\Phi\wedge(y, v)\in\Psi)$, так что определение класса Θ корректно. В дальнейшем в подобных ситуациях мы обычно будем опускать проверку правильности соответствующего высказывания.

классом B (это возможно ввиду того, что $B \supset R(F) = D(F^{-1})$), можно написать $F^{-1} \circ I_B = F^{-1}$. Стало быть, $F = I_B^{-1} \circ F$, и остается заметить, что $I_B^{-1} = I_B$.

С помощью предложения VII из предложения V выводим

VIII. *Если отношение F таково, что отношение F^{-1} множественное, то каково бы ни было множественное отношение H имеет место равенство*

$$H \circ F = \bigcup_{y \in D} F^{-1}\{y\} \times H\{y\},$$

где $D = R(F) \cap D(H)$.

Для доказательства заметим, что в силу предложения VII $H = H \circ I_{D(H)}$, $F = I_{R(F)} \circ F$, так что $H \circ F = H \circ (I_{D(H)} \circ \circ I_{R(F)}) \circ F$. Но согласно предложению VI $I_{D(H)} \circ I_{R(F)} = I_{D(H)} |_{R(F)} = I_D$ и остается воспользоваться предложением V.

В терминах суперпозиции можно высказать критерий однозначности данного отношения. Для этого отметим сначала, что

IX. *Каково бы ни было отношение F, имеют место соотношения*

$$F \circ F^{-1} \supset I_{R(F)}, \quad F^{-1} \circ F \supset I_{D(F)}.$$

В самом деле, пусть $y \in R(F)$. По определению существует такое x, что $(x, y) \in F$ и, следовательно, $(y, x) \in F^{-1}$. Тем самым $(y, y) \in F \circ F^{-1}$. Стало быть, $I_{R(F)} \subset F \circ F^{-1}$. Второе соотношение получается отсюда заменой F на F^{-1}.

X. *Для того чтобы отношение F было однозначным, необходимо и достаточно, чтобы $F \circ F^{-1} = I_{R(F)}$.*

Если F однозначно, то согласно предложению VIII

$$F \circ F^{-1} = \bigcup_{x \in D(F)} F\{x\} \times F\{x\} = \bigcup_{x \in D(F)} \{(F(x), F(x))\}.$$

Поскольку при каждом $x \in D(F)$ имеем $F(x) \in R(F)$, т. е. $(F(x), F(x)) \in I_{R(F)}$ то $F \circ F^{-1} \subset I_{R(F)}$, что с учетом предложения IX приводит к равенству $F \circ F^{-1} = I_{R(F)}$. Таким образом, условие необходимо.

Докажем достаточность условия. Предположим, что для отношения F оно выполнено, возьмем произвольное $x \in D(F)$ и найдем y так, что $(x, y) \in F$, т. е. что $x \in F^{-1}\{y\}$. Поскольку, очевидно, $y \in R(F)$, можем написать

$$F\{x\} = F[\{x\}] \subset F[F^{-1}\{y\}] = I_{R(F)}\{y\} = \{y\}.$$

Так как множество $F\{x\}$ непусто, то должно быть $F\{x\} = \{y\}$, т. е. класс значений отношения F на элементе x — одноэлементное множество. Ввиду произвольности элемента x это и означает однозначность отношения F.

XI. *Для того чтобы однозначное отношение F было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы можно было указать такое однозначное отношение G, что $G \circ F = I_{D(F)}$.*

Необходимость условия вытекает из предложения X, поскольку, если F взаимно однозначно, то F^{-1} однозначно и, стало быть, $F^{-1} \circ (F^{-1})^{-1} = F^{-1} \circ F = I_{R(F^{-1})} = I_{D(F)}$, так что можно принять $G = F^{-1}$.

Допустим теперь, что условие выполнено. Тогда

$$F^{-1} = I_{D(F)} \circ F^{-1} = G \circ (F \circ F^{-1}) = G \circ I_{R(F)} = G|_{R(F)}$$

и так как G по условию однозначно, то будет однозначным и его сужение F^{-1}.

2.3. Займемся более подробно операциями пересечения и объединения.

Пусть F — множественное отношение и $\widehat{F} : A \mapsto F[A]$ ($A \in U$) — порожденное им отношение (см. 2.1). Рассмотрим семейство $\varphi : \xi \mapsto A_\xi$ ($\xi \in \Xi$). Подставляя в соотношение предложения V(2.1) $\mathfrak{A} = \varphi[\Xi]$ и учитывая, что $(\widehat{F} \circ \varphi)(\xi) = F[A_\xi]$ ($\xi \in \Xi$), можем написать

$$F\Big[\bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi\Big] = F\,[\mathrm{Sum}\,\varphi\,[E]] = \mathrm{Sum}\,\widehat{F}\,[\varphi\,[\Xi]] = \mathrm{Sum}\,\widehat{F} \circ \varphi\,[\Xi] = \\ = \bigcup_{\xi \in \Xi} F\,[A_\xi]. \tag{15}$$

Таким же образом при соответствующих предположениях относительно F (однозначность самого F и множественность F^{-1}) устанавливается

$$F^{-1}\Big[\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi\Big] = \bigcap_{\xi \in \Xi} F^{-1}\,[A_\xi]. \tag{16}$$

Следующее ниже свойство операций объединения и пересечения называется *ассоциативностью* соответствующих операций.

I. *Пусть* $\varphi : \xi \mapsto A_\xi$ ($\xi \in \Xi$) — *данное семейство. Предположим, что семейство* $\Gamma : \lambda \to \Xi_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) *таково, что* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Xi_\lambda = \Xi$. *Тогда имеют место соотношения*

$$\bigcap_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \Big(\bigcap_{\xi \in \Xi_\lambda} A_\xi\Big), \quad \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Big(\bigcup_{\xi \in \Xi_\lambda} A_\xi\Big).$$

Прежде всего поясним, как надо понимать правую часть каждого из этих соотношений. Введем отношения $\mathrm{Ints}\circ\widehat{\varphi}\circ\Gamma$ и $\mathrm{Sum}\circ\widehat{\varphi}\circ\Gamma$, где $\widehat{\varphi}: E\mapsto\varphi[E]$. Ясно, что

$$\mathrm{Ints}\circ\widehat{\varphi}\circ\Gamma(\lambda)=\mathrm{Ints}\,\widehat{\varphi}(\Xi_\lambda)=\bigcap_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi,$$

$$\mathrm{Sum}\circ\widehat{\varphi}\circ\Gamma(\lambda)=\bigcup_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi\quad(\lambda\in\Lambda).$$

Приступая к доказательству, возьмем $x\in\bigcap\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$. Это означает, что для любого $\xi\in\Xi$ справедливо включение $x\in A_\xi$. Так как для любого $\lambda\in\Lambda$ множество Ξ_λ содержится в классе Ξ, то $x\in A_\xi$ при $\xi\in\Xi_\lambda$, каково бы ни было $\lambda\in\Lambda$. Следовательно, $x\in\bigcap\limits_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi$ $(\lambda\in\Lambda)$ и, значит, $x\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap\limits_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi\right)$.

Обратно, взяв элемент $x\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap\limits_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi\right)$, получим, что для любого $\lambda\in\Lambda$ будет $x\in\bigcap\limits_{\xi\in\Xi_\lambda}A_\xi$ и, значит, при любом $\xi\in\Xi_\lambda$ справедливо включение $x\in A_\xi$. Если ξ — произвольный элемент класса Ξ, то ввиду условия $\Xi=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}\Xi_\lambda$ можно указать такое $\lambda\in\Lambda$, что $\xi\in\Xi_\lambda$. Стало быть, $x\in A_\xi$ и тем самым $x\in\bigcap\limits_{\xi\in\Xi}A_\xi$. Второе равенство доказывается с помощью аналогичных рассуждений.

Если класс Λ — двухэлементное множество, например если $\Lambda=\{1,2\}$, то формулы, отражающие ассоциативность, приобретают вид

$$\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcap_{\xi\in\Xi_1}A_\xi\cap\bigcap_{\xi\in\Xi_2}A_\xi,\quad\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi=\bigcup_{\xi\in\Xi_1}A_\xi\cup\bigcup_{\xi\in\Xi_2}A_\xi.\tag{17}$$

Полезно иметь в виду, что последние соотношения остаются справедливыми, если под Ξ_1 и Ξ_2 понимать произвольные классы (связанные с классом Ξ равенством $\Xi=\Xi_1\cup\Xi_2$), в чем мы предлагаем читателю убедиться самостоятельно.

Из этого замечания вытекает истинность следующего факта.

II. *Если Ξ_1 — подкласс класса Ξ, то*

$$\bigcap_{\xi\in\Xi_1}A_\xi\supset\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi,\quad\bigcup_{\xi\in\Xi_1}A_\xi\subset\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi.$$

Действительно, принимая в (17) $\Xi_2=\Xi\setminus\Xi_1$, придем к искомому результату.

Как и в предложении I, рассмотрим семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ и произвольный класс A. Образуем семейство $\xi\mapsto A\cap A_\xi$ $(\xi\in\Xi)$.

III. *Справедливо равенство*

$$\bigcup_{\xi\in\Xi}(A\cap A_\xi)=A\cap\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi. \tag{18}$$

В самом деле, соотношение $x\in A\cap\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi$ равносильно тому, что $x\in A$ и существует $\eta\in\Xi$, при котором $x\in A_\eta$, т. е. тому, что $x\in A\cap A_\eta$. А это означает, что $x\in\bigcup_{\xi\in\Xi}(A\cap A_\xi)$.

IV. *Если в условиях предложения* III *класс A представляет собой множество, то*

$$\bigcap_{\xi\in\Xi}(A\cup A_\xi)=A\cup\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi. \tag{19}$$

Действительно, включение $x\in A\cup\bigcap_{\xi\in\Xi}A_\xi$ имеет место в том и только в том случае, когда $x\in A$ или когда для каждого $\xi\in\Xi$ справедливо включение $x\in A_\xi$. И в том, и в другом случае $x\in A\cup A_\xi$ для любого $\xi\in\Xi$, так что $x\in\bigcap_{\xi\in\Xi}(A\cup A_\xi)$. Обратно, соотношение $x\in\bigcap_{\xi\in\Xi}(A\cup A_\xi)$, означающее, что для произвольного $\xi\in\Xi$ имеет место $x\in A\cup A_\xi$, влечет за собой включение $x\in A$ или, если $x\notin A$, включение $x\in A_\xi$ для каждого $\xi\in\Xi$.

Формулы (18) и (19) называются *дистрибутивными законами*: (18) — для объединения, (19) — для пересечения.

Рассмотрим семейство $\xi\mapsto F_\xi$ ($\xi\in\Xi$) отношений. Поскольку при каждом $\xi\in\Xi$ отношение F_ξ представляет собой множество, множествами будут область определения $D(F_\xi)$ и область значений $R(F_\xi)$ этого отношения (см. V(1.8)). Отсюда следует, что как само F_ξ, так и обратное к нему F_ξ^{-1} суть множественные отношения.

V. *Пусть* $F=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi$, $G=\bigcap_{\xi\in\Xi}F_\xi$. *Для каждого x справедливы равенства*

$$F\{x\}=\bigcup_{\xi\in\Xi}F_\xi\{x\},\quad G\{x\}=\bigcap_{\xi\in\Xi}F_\xi\{x\}.^{33)} \tag{20}$$

Не останавливаясь на доказательстве существования семейства $\xi\mapsto F_\xi\{x\}$ ($\xi\in\Xi$), проверим равенства (20). Включение $y\in F\{x\}$ равносильно тому, что $(x,y)\in F$, а это по условию

---

[33]) В случае $\Xi=\varnothing$ второе из этих равенств теряет смысл, поскольку тогда $G=U$ не является отношением. В этом случае под $G\{x\}$ следует понимать класс, состоящий из всех y таких, что $(x,y)\in G$, т. е. заменить G пересечением $G\cap U^2$.

означает существование такого $\eta \in \Xi$, что $(x, y) \in F_\eta$, что в свою очередь эквивалентно соотношению $y \in F_\eta\{x\}$, т. е. соотношению $y \in \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi$. Аналогичные рассуждения убеждают в справедливости второго из равенств (20).

VI. *В условиях предложения* V *для произвольного класса* A *имеет место равенство*

$$F[A] = \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi[A].$$

В самом деле, поскольку $F^{-1} = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}$, в силу (2) с учетом результатов предложений III и V имеем

$$F[A] = \{y : F^{-1}\{y\} \cap A \neq \varnothing\} = \left\{y : \bigcup_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}\{y\} \cap A \neq \varnothing\right\}.$$

Но объединение $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}\{y\} \cap A$ непусто тогда и только тогда, когда хотя бы при одном $\xi \in \Xi$ непусто множество $F_\xi^{-1}\{y\} \cap A$, т. е. когда $y \in F_\xi[A]$.

VII. *В условиях предложения* V

$$D(F) = \bigcup_{\xi \in \Xi} D(F_\xi), \quad R(F) = \bigcup_{\xi \in \Xi} R(F_\xi).$$

В самом деле, в силу предложения VI, примененного к F^{-1}, можем написать $D(F) = F^{-1}[U] = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi^{-1}[U] = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} D(F_\xi)$ и аналогично $R(F) = F[U] = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi[U] = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} R(F_\xi)$.

VIII. *Если в условиях предложения* V *при каждом* $\xi \in \Xi$ *отношение* F_ξ *однозначно, то для однозначности отношения* F *необходимо и достаточно, чтобы для любых* ξ, η, x *из соотношений* $\xi, \eta \in \Xi$ *и* $x \in D(F_\xi) \cap D(F_\eta)$ *вытекало бы равенство* $F_\xi(x) = F_\eta(x)$.

Очевидное доказательство этого факта мы опускаем.

Заметим только, что условие последнего предложения заведомо соблюдено, если для любых $\xi, \eta \in \Xi$ соотношение $\xi \neq \eta$ влечет равенство $D(F_\xi) \cap D(F_\eta) = \varnothing$.

Рассмотрим класс V, и пусть A —подкласс класса V. Класс $V \setminus A$ называется *дополнением* класса A (до класса V). В тех случаях, когда это не сможет вызвать недоразумений, мы будем обозначать указанный класс через A' — так же, как и дополнение до универсального класса U. В сомнительных случаях используются обозначения, в которых явным образом фигурирует класс V, например $C_V A$ и т. п.

Предположим, что имеется семейство $\varphi : \xi \mapsto A_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ подмножеств данного множества V. Наряду с φ рассмотрим семейство $\psi : \xi \mapsto A'_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ дополнений (до V) множеств семейства φ.

IX. *Если* Ξ — *непустой класс, то*

$$\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\Big)' = \bigcap_{\xi\in\Xi} A'_\xi, \quad \Big(\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi\Big)' = \bigcup_{\xi\in\Xi} A'_\xi. \tag{21}$$

В самом деле, если $x \in \Big(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\Big)'$, то это означает, что $x \in V$ и ни для какого $\xi \in \Xi$ не может быть $x \in A_\xi$, т. е. для каждого $\xi \in \Xi$ должно быть $x \in A'_\xi$, что равнозначно включению $x \in \bigcap_{\xi\in\Xi} A'_\xi$. Аналогично доказывается второе из равенств (21). Впрочем, его можно вывести из первого с помощью чисто формальных соображений:

$$\Big(\bigcap_{\xi\in\Xi} A_\xi\Big)' = \Big(\bigcap_{\xi\in\Xi} A''_\xi\Big)' = \Big(\bigcup_{\xi\in\Xi} A'_\xi\Big)'' = \bigcup_{\xi\in\Xi} A'_\xi.$$

Чтобы распространить равенства (21) и на случай, когда $\Xi = \varnothing$, условимся, отступая от данного в 1.7 определения, согласно которому $\operatorname{Ints} \varnothing = U$, в тех ситуациях, когда рассматриваются лишь элементы некоего фиксированного класса V и классы, состоящие лишь из такого рода элементов, т. е. подклассы класса V, считать $\operatorname{Ints} \varnothing = V$. Такое соглашение правомерно, поскольку в описанной обстановке класс V играет роль универсального. Принимая указанное соглашение, мы без труда убедимся, что равенства (21) справедливы и в случае $\Xi = \varnothing$. В пользу высказанного соглашения говорит, между прочим, и то обстоятельство, что, приняв его, уже нет надобности делать в предложении IX оговорку о непустоте соответствующих классов. Ниже будут упомянуты и другие соображения в пользу указанного соглашения.

2.4. Дополним изложенные в 1.6 сведения о поляре некоторыми полезными фактами.

Рассмотрим отношение F и произвольный класс A. Напомним, что под полярой класса A при отношении F понимается класс

$$\pi_F(A) = \{y \in R(F) : (\forall x : x \in A \Rightarrow (x, y) \in F)\} = \\ = \{y \in R(F) : A \times \{y\} \subset F\}.$$

В дальнейшем для устранения громоздких обозначений мы будем в тех случаях, когда рассматривается лишь одно отношение F (и, возможно, обратное для него — F^{-1}), опускать указание на F в обозначении поляры, т. е. писать просто $\pi(A)$ вместо $\pi_F(A)$. За полярой же $\pi_{F^{-1}}(B)$ в этом случае закрепим обозначение $\pi^{-1}(B)$ и название обратной поляры. Ниже будет упомянуто некоторое «обоснование» этой символики.

Непосредственно из определения вытекает (см. также I(1.6))

I. *Каковы бы ни были классы A и B, имеют место соотношения*

$$A\times\pi_F(A)\subset F,\quad \pi^{-1}(B)\times B\subset F. \tag{22}$$

Обратно, если $A\subset D(F)$, $B\subset R(F)$ и $A\times B\subset F$, то $B\subset \pi(A)$ и $A\subset\pi^{-1}(B)$.

Заметим, что если известно, что каждый из классов A и B непуст, то условия $A\subset D(F)$, $B\subset R(F)$, поскольку они при этом вытекают из соотношения $A\times B\subset F$, могут быть в формулировке второй части предложения опущены.

Из (22), понятно, следует, что если класс A «выходит за пределы» области определения $D(F)$ отношения F, т. е. если $A\setminus D(F)\neq\varnothing$, то $\pi(A)=\varnothing$.

Из предложения I получаем

II. *Каковы бы ни были классы A и B, если $A\subset D(F)$, $B\subset R(F)$, то $A\subset\pi^{-1}(\pi(A))$, $B\subset\pi(\pi^{-1}(B))$.*

Другим следствием предложения I служит

III. *Если A_1 и A_2 — произвольные классы и $A_1\subset A_2$, то $\pi(A_1)\supset\pi(A_2)$.*

Действительно, поскольку $A_1\times\pi(A_2)\subset A_2\times\pi(A_2)\subset F$, то, считая $A_1\neq\varnothing$ и $\pi(A_2)\neq\varnothing$, можем написать $\pi(A_2)\subset\pi(A_1)$. Исключенные из рассмотрения случаи тривиальны.

Более сильное, чем в III, утверждение содержится в следующем предложении.

IV. *Каковы бы ни были классы A_1 и A_2, имеет место равенство*

$$\pi(A_1\cup A_2)=\pi(A_1)\cap\pi(A_2).$$

В самом деле, согласно предложению III $\pi(A_1\cup A_2)\subset\pi(A_1)$ и $\pi(A_1\cup A_2)\subset\pi(A_2)$, так что $\pi(A_1\cup A_2)\subset\pi(A_1)\cap\pi(A_2)$. Пусть $y\in\pi(A_1)\cap\pi(A_2)$. Поскольку $A_1\times\{y\}\subset F$ и $A_2\times\{y\}\subset F$, то и $(A_1\cup A_2)\times\{y\}=(A_1\times\{y\})\cup(A_2\times\{y\})\subset F$, следовательно, $y\in\pi(A_1\cup A_2)$, так что $\pi(A_1)\cap\pi(A_2)\subset\pi(A_1\cup A_2)$. Вместе с предыдущим это и приводит к искомому равенству.

Само собой разумеется, далеко не всякий класс B, даже и содержащийся в области значений $R(F)$ отношения F, служит полярой какого-либо класса A. Простой, но удобный в некоторых конкретных ситуациях критерий существования указанного класса A содержится в следующей теореме.

Теорема 1(2.I). *Пусть A — подкласс области определения $D(F)$ отношения F. Для того чтобы существовал такой класс B,* *содержащийся в $R(F)$, что $A = \pi^{-1}(B)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента x области определения $D(F)$ отношения F, который не входит в класс A, можно было указать такой элемент $y \in R(F)$, что $A \subset \pi^{-1}\{y\}$, но $x \notin \pi^{-1}\{y\}$. Если указанное условие выполнено, то $A = \pi^{-1}(\pi(A))$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует класс B, связанный с данным классом A соотношением $A = \pi^{-1}(B)$. Тогда $D(F)\setminus A = \{x \in D(F) : : (\neg \forall y (y \in B \Rightarrow (x, y) \in F))\}$. Но при любом данном $x \in \in D(F)$, очевидно, $\neg\forall y : (y \in B \Rightarrow (x; y) \in F) \equiv \exists y : (y \in \in B \wedge (x, y) \notin F)$. В силу предложения III включение $y \in B$ влечет соотношение $\pi^{-1}(B) \subset \pi^{-1}\{y\}$, и из $(x, y) \notin F$ следует, что $x \notin \pi^{-1}\{y\} = F^{-1}\{y\}$. Это и доказывает необходимость условия теоремы.

Достаточность. Считая соблюденным условие теоремы, докажем, что $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Согласно предложению II $A \subset \pi^{-1}(\pi(A))$. Возьмем $x \in \pi^{-1}(\pi(A))$. Если $x \notin A$, то, поскольку $x \in D(F)$, в соответствии с условием найдем $y \in R(F)$ так, что $A \subset \pi^{-1}\{y\}$, но $x \notin \pi^{-1}\{y\}$. Привлекая предложения II и III, на основании первого из этих двух соотношений имеем $y \in \pi(\pi^{-1}\{y\}) \subset \pi(A)$. Воспользовавшись еще раз предложением III, получаем отсюда $\pi^{-1}\{y\} \supset \pi^{-1}(\pi(A))$. Но это приводит к включению $x \in \pi^{-1}\{y\}$, которое противоречит предположению.

Следствие. *Каков бы ни был класс B, содержащийся в области значений $R(F)$ отношения F, имеет место равенство $\pi^{-1}(B) = \pi^{-1}(\pi(\pi^{-1}(B)))$.*

Действительно, класс $A = \pi^{-1}(B)$ удовлетворяет условиям теоремы, так что $A = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Замечание 1. Заменяя в формулировке теоремы отношение F обратным к нему F^{-1}, получаем условия того, чтобы для данного класса B (содержащегося в $R(F)$) можно было указать такой класс A, (содержащийся в $D(F)$), что $B = \pi(A)$. Предоставляя подробные формулировки читателю, укажем, однако, что при выполнении условия будет $B = \pi(\pi^{-1}(B))$.

Замечание 2. Если отбросить требование, чтобы класс B содержался в области значений $R(F)$ отношения F, то теорема (в части необходимости) может оказаться неверной, поскольку пустое множество — обратная поляра класса, выходящего за пределы класса $R(F)$,— может и не удовлетворять условию теоремы. Понятно, что если заранее предположить непустоту класса A, то соотношение $B \subset R(F)$ непременно соблюдено и нет надобности вводить его в условия теоремы. Это ограничение становится ненужным также и в том случае, когда $\pi^{-1}(R(F)) = = \varnothing$, поскольку при этом пустое множество удовлетворяет условию теоремы.

Если A — класс, содержащийся в области определения $D(F)$ отношения F, класс $\pi^{-1}(\pi(A))$ будем называть *биркхофовской F-оболочкой класса A* (говорят также: *биркхофовское F-замыкание* класса A) и обозначать через $[A]_F$ или, если это не может вызвать недоразумений, просто через $[A]$. Класс A, совпадающий со своей биркхофовской F-оболочкой, называется (*биркхофовской*) *F-компонентой* класса $D(F)$.

Следствие из доказанной выше теоремы дает

V. *Для того чтобы класс A, содержащийся в области определения $D(F)$ отношения F, был F-компонентой, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой класс B, что $B \subset R(F)$ и $A = \pi^{-1}(B)$.*

Из предложения III вытекает

VI. *Если классы A_1 и A_2 связаны соотношением $A_1 \subset A_2$, то и* $[A_1] \subset [A_2]$.

Далее,

VII. *Если F-компонента K содержит класс A, то она содержит и F-оболочку $[A]$ класса A.*

Действительно, $K = [K] \supset [A]$.

2.5. Если предположить, что данное отношение F множественное, то результаты предыдущего пункта могут быть несколько усилены. Прежде всего отметим, что в силу предложения III(2.4) поляра $\pi(A)$ непустого класса A будет множеством, поскольку в этом случае она является подклассом множества $\pi\{x\}$, где x — какой-либо элемент класса A. Отсюда легко вывести существование однозначного отношения P, сопоставляющего произвольному непустому подмножеству A области определения $D(F)$ его поляру: $P : A \mapsto \pi(A)$ $(A \in \mathfrak{P}_0(D(F)))$ (через $\mathfrak{P}_0(D(F))$ обозначен класс всех непустых подмножеств класса $D(F)$).

I. *Пусть F — множественное отношение и $\varphi : \xi \mapsto A_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ — непустое семейство непустых подмножеств области определения*[34] *$D(F)$ отношения F. Имеет место равенство*

$$\pi\Big(\bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi\Big) = \bigcap_{\xi\in\Xi} \pi(A_\xi). \tag{23}$$

Отметим прежде всего, что правая часть формулы (23) есть пересечение множеств семейства $P\circ\varphi : \xi \mapsto \pi(A_\xi)$ $(\xi \in \Xi)$. Для доказательства соотношения (23) обозначим для краткости $A = \bigcup_{\xi\in\Xi} A_\xi$ и воспользуемся тем, что в силу предложения

[34]) Эту фразу следует понимать так, что область значений семейства φ содержится в упомянутом выше классе $\mathfrak{P}_0(D(F))$, т. е. для каждого $\xi \in \Xi$ множество $A_\xi = \varphi(\xi)$ представляет собой непустое подмножество класса $D(F)$.

III(2.4) $\pi(A) \subset \pi(A_\xi)$ для каждого $\xi \in \Xi$, так что $\pi(A) \subset \subset \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi)$. Возьмем, далее, произвольные элементы $y \in \in \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi)$ и $x \in A$. Поскольку найдется такое $\eta \in \Xi$, что $x \in A_\eta$, то ввиду того, что $y \in \pi(A_\eta)$, имеем $(x, y) \in F$. Таким образом, $y \in \pi(A)$ и, следовательно, $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} \pi(A_\xi) \subset \pi(A)$.

Заметим, что если в условии предложения I условие множественности отношения F заменить более сильным требованием: область значений $R(F)$ отношения F представляет собой множество, то предположение о непустоте множеств семейства φ оказывается излишним, поскольку в этом случае поляра $\pi(\varnothing) = R(F)$ будет множеством. Доказательство сохраняется с тем, однако, изменением, что под P надлежит в этом случае подразумевать отношение $A \mapsto \pi(A)$ $(A \in \mathfrak{P}(D(F)))$.

Если в высказанных выше соображениях заменить условие множественности F предположением о множественности обратного отношения F^{-1}, то можно, разумеется, сформулировать соответствующие результаты. Упомянем среди прочих о существовании отношения $Q : B \mapsto \pi^{-1}(B)$ $(B \in \mathfrak{P}_0(R(F)))$.

В этом же предположении имеет место следующий факт.

II. *Если отношение F^{-1} множественное, то всякая F-компонента, отличная от всего класса $D(F)$, представляет собой множество.*

Действительно, рассмотрим F-компоненту K. Если $\pi(K) = \varnothing$, то $K = \pi^{-1}(\pi(K)) = \pi^{-1}(\varnothing) = D(F)$. Поэтому, если $K \neq D(F)$, то $\pi(K) \neq \varnothing$ и, следовательно, $K = \pi^{-1}(\pi(K))$ — множество.

Согласно теореме 1 высказывание «множество A представляет собой F-компоненту» о произвольном подмножестве A класса $D(F)$ правильно сформулировано, так как оно равнозначно высказыванию

$$\forall y \exists x : \left(y \in D(F) \setminus A \Rightarrow \left(F^{-1}\{x\} \supset A \wedge y \notin F^{-1}\{x\}\right)\right).$$

Тем самым (см. 1.5) существует такой класс $\mathfrak{K}_F$ (или более подробно $\mathfrak{K}_F(D(F))$), принадлежность которому произвольного множества A равносильна тому, что м н о ж е с т в о A служит F-компонентой. В условиях предложения II можно, таким образом, утверждать, что каждая F-компонента, кроме, возможно, всего $D(F)$ является элементом класса $\mathfrak{K}_F$.

Образуем класс $\mathfrak{N}_F = \bigcup\limits_{K \in \mathfrak{K}_F} \mathfrak{P}(K)$. Ясно, что для каждого $A \in \mathfrak{N}_F$ существует F-компонента из $\mathfrak{K}_F$, т. е. представляющая собой множество, которая содержит данное множество A. Ясно, что, если $D(F)$ само является множеством, $\mathfrak{N}_F$ есть не что иное, как множество $\mathfrak{P}(D(F))$ всех подмножеств множества $D(F)$.

III. *В условиях предложения* II *существует отношение* G, *сопоставляющее множеству* $A \in \mathfrak{R}_F$ *его биркхофовскую оболочку* $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$.

Действительно, отметим сначала, что высказывание о произвольном множестве y и произвольном подмножестве A класса $D(F): y \in \pi(A)$ правильно сформулировано, поскольку оно означает, иными словами, высказывание $\forall x: (x \in A \Rightarrow \Rightarrow (x, y) \in F)$. Обозначая для краткости через K биркхофовскую оболочку множества $A (A \subset D(F))$, замечаем, что K есть множество. При этом согласно замечанию к теореме 1 K характеризуется равенством $\pi(A) = \pi(K)$. Отсюда вытекает, что высказывание $K = [A]_F$ о произвольных подмножествах A и K класса $D(F)$ есть конъюнкция правильных высказываний: $K = [A]_F \equiv K \in \mathfrak{R}_F \wedge (y \in \pi(A) \Leftrightarrow y \in \pi(K))$ и потому указанное отношение действительно существует.

Нетрудно понять, что любое одноэлементное подмножество класса $D(F)$ входит (в условиях предложения II) в $\mathfrak{R}_F$: поскольку $\pi\{x\} = F\{x\} \neq \varnothing$ для любого $x \in D(F)$, то $[\{x\}]_F = \pi^{-1}(\pi\{x\})$ представляет собой множество. Тем самым сужение G_0 отношения G на класс D_0 всех одноэлементных подмножеств класса $D(F)$ есть отношение, область определения которого совпадает с классом D_0. Отсюда следует, что существует отношение Φ, сопоставляющее элементу $x \in D(F)$ его биркхофовскую оболочку $[\{x\}]_F$, а именно, $\Phi: x \mapsto [\{x\}]_F = \pi^{-1}(\pi\{x\})$. Действительно, $\Phi = G_0 \circ L$, где $L: x \mapsto \{x\}$ $(x \in U)$. Отношение Φ будем называть *каноническим вложением* класса $D(F)$ в класс $\mathfrak{K}_F$.

Если оба отношения F^{-1} и F множественные и один из классов $D(F)$ или $R(F) = D(F^{-1})$ представляет собой множество, то множеством будет и другой класс (см. VIII (1.8)). В этом случае, понятно, каждая F-компонента также является множеством. Нетрудно понять, что отношения $\Lambda: K \mapsto \pi(K)$ $(K \in \mathfrak{K}_F)$, $\Theta: L \mapsto \pi^{-1}(L)$ $(L \in \mathfrak{K}_{F^{-1}})$ взаимно обратны: $\Lambda = \Theta^{-1}$, $\Theta = \Lambda^{-1}$. Отсюда следует, что оба эти отношения взаимно однозначны (что, впрочем, очевидно и непосредственно).

В случае, когда класс $D(F)$ собственный (таким же будет и класс $R(F)$), также можно говорить об отношениях Λ и Θ, но определить их возможно лишь на классах $\mathfrak{K}_F^0$ и $\mathfrak{K}_{F^{-1}}^0$ соответственно всех непустых F-(или F^{-1}) компонент, являющихся множествами.

Отметим, что F-компонента K и F^{-1}-компонента L, связанные соотношением $L = \pi(K)$ или, что то же, $K = \pi^{-1}(\pi(K)) = \pi^{-1}(L)$. будут называться *дополнительными*.

Докажем в заключение

IV. *Если оба отношения F и F^{-1} множественные и $\xi \mapsto K_\xi (\xi \in \Xi)$ — непустое семейство F-компонент — множеств, то и пересечение $\bigcap\limits_{\xi\in\Xi} K_\xi$ будет компонентой.*

Понятно, что можно считать $K_\xi \neq \varnothing$ для каждого $\xi \in \Xi$. Далее, поскольку $K_\xi = \pi^{-1}(\pi(K_\xi))$, то на основании равенства (23) имеем

$$\bigcap_{\xi\in\Xi} K_\xi = \bigcap_{\xi\in\Xi} \pi^{-1}(\pi(K_\xi)) = \pi^{-1}\left(\bigcup_{\xi\in\Xi} \pi(K_\xi)\right),$$

и остается сослаться на предложение V(2.4), в котором следует принять $B = \bigcup\limits_{\xi\in\Xi} \pi(K_\xi)$.

2.6 Одна из характернейших черт человеческого разума заключается в умении отождествлять явления при совпадении лишь некоторых из определяющих эти явления признаков, т. е., короче говоря, в способности классифицировать многообразие фактов, нас окружающих. Математическое выражение этой способности заключено в понятии о т н о ш е н и я э к в и в а л е н т н о с т и. Дадим необходимые определения и выясним элементарные свойства.

Отношение ω называется *симметричным*, если $\omega^{-1} = \omega$, т. е. если для любых x, y соотношения $(x, y) \in \omega$ и $(y, x) \in \omega$ равносильны.

Отношение ω называется *транзитивным*, если $\omega \circ \omega \subset \omega$. В развернутой форме это означает, что если x, y, z таковы, что $(x, y) \in \omega$ и $(y, z) \in \omega$, то также и $(x, z) \in \omega$.

Об отношении ω говорят, что оно *рефлексивно*, если $\omega \subset I_{D(\omega)}$, т. е. если $(x, x) \in \omega$ для каждого $x \in D(\omega)$.

Отношением эквивалентности в классе X называется такое симметричное, транзитивное и рефлексивное отношение ω, область определения которого совпадает с X. Поскольку $R(\omega) = D(\omega^{-1}) = D(\omega)$, то класс X будет также и областью значений отношения ω. Далее, ввиду того, что $\omega = \omega^{-1}$, имеем $\omega \circ \omega = \omega^{-1} \circ \omega \supset I_X$ (см. IX(2.2)). Если для элементов x, y класса X имеет место соотношение $(x, y) \in \omega$, то элементы x и y называются *эквивалентными*. При этом часто употребляют запись $x \sim y\,(\mathrm{mod}\,\omega)$ или, если это не может вызвать недоразумений, просто $x \sim y$. В этих обозначениях определение отношения эквивалентности выглядит следующим образом.

1. Рефлексивность: $x \sim x$ для любого $x \in X$.

2. Симметричность: если для x, $y \in X$ имеет место $x \sim y$, то и $y \sim x$.

3. Транзитивность: если x, y, z — такие элементы класса X, что $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

Если ω — отношение эквивалентности в классе X и X_0 — подкласс класса X, то $\omega_0 = I_{X_0} \circ \omega \circ I_{X_0}$ будет, как нетрудно понять, отношением эквивалентности в классе X. Об ω_0 говорят, что оно *индуцировано* на X_0 данным отношением эквивалентности ω.

Рассмотрим в качестве X универсальный класс U. Высказывание о произвольном подмножестве φ класса U^2 и произвольных множествах A и B : φ — такое взаимно однозначное отношение, что $D(\varphi) = A$, $R(\varphi) = B$, правильное, поскольку его можно представить как конъюнкцию нескольких очевидным образом правильных высказываний: для любого $x \in D(\varphi)$ класс $\varphi\{x\}$ — одноэлементное множество (т. е. является элементом класса E всех одноэлементных множеств), для любого $y \in R(\varphi)$ класс $\varphi^{-1}\{y\}$ — одноэлементное множество, $D(\varphi) = A$, $R(\varphi) = B$. Из сказанного вытекает, что существует отношение Ω, состоящее из всевозможных пар (A, B) множеств таких, что можно указать взаимно однозначное отношение φ, обладающее тем свойством, что $D(\varphi) = A$, $R(\varphi) = B$. Нетрудно понять, что Ω — отношение эквивалентности в U. Действительно, для любого множества A отношение I_A взаимно однозначно, причем $D(I_A) = R(I_A) = A$. Далее, если $(A, B) \in \Omega$ и φ — взаимно однозначное отношение, удовлетворяющее условиям $D(\varphi) = A$, $R(\varphi) = B$, то отношение φ^{-1} также взаимно однозначно и $D(\varphi^{-1}) = R(\varphi) = B$, $R(\varphi^{-1}) = D(\varphi) = A$, так что $(B, A) \in \Omega$.

Наконец, если множества A, B, C и взаимно однозначные отношения φ и ψ таковы, что $D(\varphi) = A$, $R(\varphi) = B$, $D(\psi) = B$, $R(\psi) = C$, то, поскольку суперпозиция $\psi \circ \varphi$, очевидно, взаимно однозначна и $D(\psi \circ \varphi) = D(\varphi) = A$, $R(\psi \circ \varphi) = R(\psi) = C$, то $(A, C) \in \Omega$. Таким образом, Ω — отношение эквивалентности в классе U.

Пусть ω — отношение эквивалентности в классе X. Класс A называется *классом эквивалентности* (для данного отношения), если существует такой элемент $x \in X$, что $A = \omega\{x\}$. Поскольку $x \in \omega\{x\}$, класс эквивалентности всегда отличен от пустого.

Из соотношения $\omega \circ \omega = \omega$ получаем в этом случае, что $\omega[A] = \omega[\omega\{x\}] = \omega\{x\} = A$.

I. *Если ω — отношение эквивалентности в классе X, то $(x, y) \in \omega$ тогда и только тогда, когда $\omega\{x\} = \omega\{y\}$.*

В самом деле, поскольку $y \in \omega\{x\}$, то $\omega\{y\} \subset \omega[\omega\{x\}] \subset \omega\{x\}$. Так как $(y, x) \in \omega$, то и $\omega\{x\} \subset \omega\{y\}$. Обратно, если для каких-то x, y будет $\omega\{x\} = \omega\{y\}$, то, поскольку $y \in \omega\{y\}$, должно быть также и $y \in \omega\{x\}$, т. е. $(x, y) \in \omega$.

II. *Если A и B — классы эквивалентности для данного отношения эквивалентности ω, то либо $A = B$, либо $A \cap B = \varnothing$.*

Действительно, если $z \in A \cap B$, а x и y таковы, что $A = \omega\{x\}$, $B = \omega\{y\}$, то в силу предложения I $A = \omega\{x\} = \omega\{z\}$ и $B = \omega\{y\} = \omega\{z\}$.

Заметим, что каждый класс (исключая тривиальный случай $\omega = X^2$) представляет собой биркхофовскую ω-компоненту. Кроме этих компонент имеются еще только две ω-компоненты — пустое множество и весь класс X.

Если отношение эквивалентности ω в классе X (а тем самым и совпадающее с ним отношение ω^{-1}) множественное, то можно говорить о каноническом вложении φ класса X в класс всех компонент, которые в данном случае представляют собой множества. Область значений $\mathfrak{X}$ отношения φ называется *фактор-классом* класса X по отношению эквивалентности ω и обозначается через X/ω. Ясно, что фактор-класс $\mathfrak{X}$ состоит из всевозможных классов эквивалентности, так что в силу предложения II $\mathfrak{X}$ — расчлененный класс. Поскольку для любого $x \in X$ будет $\varphi(x) = \omega\{x\}$, т. е. для произвольных $A \in \mathfrak{X}$ и $x \in A$ справедливо соотношение $\varphi(x) = A$ или, что то же, $A \subset \varphi^{-1}\{x\}$, то $\varphi^{-1} \circ \varphi\{x\} = \omega\{x\}$ $(x \in X)$, так что $\omega = \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Нетрудно показать, что любой расчлененный класс может быть реализован как фактор-класс.

III. *Пусть $\mathfrak{X}$ — расчлененный класс, не содержащий пустого множества. Существует класс X и такое (множественное) отношение эквивалентности ω в нем, что $\mathfrak{X} = X/\omega$.*

Действительно, если доказываемое утверждение справедливо, то необходимо должно быть $X = \mathrm{Sum}(\mathfrak{X}) = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{X}} A$. Принимая за X указанный класс, положим, кроме того, $\omega = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{X}} A^2$. В силу (20) $\omega\{x\} = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{X}} A^2\{x\}$ для каждого x. Замечая, что для $x \in A$ множество $A^2\{x\}$ совпадает с A, а для прочих x оказывается $A^2\{x\} = \varnothing$, получаем отсюда, что $\omega\{x\}$ (при $x \in X$) совпадает с одним из элементов A класса $\mathfrak{X}$ (а именно тем, который включает x) и обратно, для любых $A \in \mathfrak{X}$, $x \in A$ будет $\omega\{x\} = A$. Отсюда, в частности, следует: если для любого $x \in X$ найти такое множество $A \in \mathfrak{X}$, что $x \in A$, то $\omega[\omega\{x\}] = \omega[A] = \bigcup\limits_{y \in A} \omega\{y\} = A = \omega\{x\}$, так что $\omega \circ \omega = \omega$. Симметричность и рефлексивность отношения ω очевидны. Остается заметить, что $D(\omega) = \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{X}} A = X$.

Отношение эквивалентности и соответствующий ему фактор-класс может быть введен следующим образом.

IV. *Пусть f — однозначное отношение. Суперпозиция $\omega = f^{-1} \circ f$ представляет собой отношение эквивалентности в* *классе $X = D(f)$. При этом класс A будет классом эквивалентности для отношения ω тогда и только тогда, когда существует такой элемент y из области значений $R(f)$ отношения f, что $A = f^{-1}\{y\}$.*

В самом деле, симметрия отношения $\omega = f^{-1}\circ f$ очевидна. Рефлексивность этого отношения вытекает из сказанного в IX(2.2). В силу предложения X(2.2) имеем, кроме того, $\omega\circ\omega = f^{-1}\circ(f\circ f^{-1})\circ f = f^{-1}\circ I_{R(f)}\circ f$, так что ω рефлексивно. Пусть x, y таковы, что $x \in D(f)$, $y = f(x)$ (так что $y \in R(f)$ и $x \in f^{-1}\{y\}$). Тогда $A = \omega\{x\} = f^{-1}\{y\}$.

Поскольку эквивалентность элементов $x_1, x_2 \in X$ равносильна тому, что эти элементы входят в один и тот же класс эквивалентности, то предложение IV дает: $(x_1, x_2) \in \omega_f$ тогда и только тогда, когда $f(x_1) = f(x_2)$.

Рассмотрим вновь произвольное множественное отношение эквивалентности ω в классе X и обозначим через $\mathfrak{X}$ фактор-класс X/ω. Предположим, что имеется однозначное отношение f, область определения которого совпадает с X, и поставим задачу «пропустить» это отношение через $\mathfrak{X}$, т. е. определить на $\mathfrak{X}$ такое отношение $\bar{f}$, что $f = \bar{f}\circ\varphi$, где φ — каноническое вложение класса X в фактор-класс $\mathfrak{X}$. В случае, когда такое отношение $\bar{f}$ существует, оно называется *снижением* отношения f на фактор-класс $\mathfrak{X}$.

V. *Для того чтобы отношение f имело снижение $\bar{f}$ необходимо и достаточно, чтобы $\omega \subset \omega_f = f^{-1}\circ f$. Снижение $\bar{f}$ взаимно однозначно в том и только в том случае, когда $\omega = \omega_f$.*

Действительно, если снижение $\bar{f}$ существует, то $\omega = \varphi^{-1}\circ\varphi \subset \varphi^{-1}\circ\varphi\circ f^{-1}\circ f = \varphi^{-1}\circ\bar{f}^{-1}\circ\bar{f}\circ\varphi = f^{-1}\circ f = \omega_f$.

Предполагая теперь, что условие $\omega_f \supset \omega$ выполнено, и полагая $\bar{f} = f\circ\varphi^{-1}$, можем написать $\bar{f}\circ\bar{f}^{-1} = f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ f^{-1} = f\circ\omega\circ f^{-1} \subset f\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1} = I_{R(f)}$. Тем самым $\bar{f}\circ\bar{f}^{-1} = I_{R(f)}$, так что $\bar{f}$ однозначно. При этом $\bar{f}\circ\varphi = f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi \supset f$, а так как $D(\bar{f}\circ\varphi) = X = D(f)$ и оба отношения $\bar{f}\circ\varphi$ и f однозначны, то $\bar{f}\circ\varphi = \varphi$.

Докажем последнее утверждение предложения. Если существует взаимно однозначное снижение $\bar{f}$, то согласно сказанному ранее $I_{\mathfrak{X}} = \bar{f}^{-1}\circ\bar{f} = \varphi\circ f^{-1}\circ f\circ\varphi^{-1}$, так что $\omega = \varphi^{-1}\circ\varphi = \varphi^{-1}\circ I_{\mathfrak{X}}\circ\varphi = \omega\circ\omega_f\circ\omega \supset \omega_f$, что вместе с установленным ранее дает равенство $\omega = \omega_f$.

Если предположить теперь, что $\omega = \omega_f$, то, как показано, снижение существует, при этом $\bar{f}^{-1}\circ\bar{f} = \varphi\circ f^{-1}\circ f\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ\omega_f\circ\varphi^{-1} = \varphi\circ\omega\circ\varphi^{-1} = (\varphi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varphi^{-1}) = I_{\mathfrak{X}}\circ I_{\mathfrak{X}} = I_{\mathfrak{X}}$.

Предложение V можно использовать для некоторого расширения понятия фактор-класса. Если f — такое однозначное отношение (с областью определения X и областью значений Y), что $\omega = \omega_f = f^{-1} \circ f$, то, предполагая, что ω множественное, можно образовать взаимно однозначное отношение $\bar{f}$ — снижение отношения f — с областью определения $\mathfrak{X} = X/\omega$ и областью значений Y. Наличие такого отношения $\bar{f}$ позволяет всякое суждение об элементах фактор-класса $\mathfrak{X}$ преобразовать в некое суждение об элементах класса Y, заменяя каждый элемент из $\mathfrak{X}$, о котором упоминалось в данном суждении, соответствующим ему значением отношения $\bar{f}$. Ввиду взаимной однозначности отношения $\bar{f}$ при таком «переводе» с языка элементов класса $\mathfrak{X}$ на язык элементов класса Y информация не теряется, поскольку первоначальное суждение восстанавливается по вновь образованному «обратным переводом» с помощью отношений $\bar{f}^{-1}$.

Откажемся теперь от предположения, что рассматриваемое отношение эквивалентности ω в классе X множественное, но допустим, что существует такое однозначное отношение f, область определения которого совпадает с X, что $\omega = f^{-1} \circ f = \omega_f$ (будем говорить в этом случае, что ω приводимо). Из сказанного выше следует, что область значений Y отношения f обладает свойствами фактор-класса, а само f — канонического вложения. Изменяя очевидным образом формулировки, можно доказать предложения I — IV и при таком расширенном истолковании фактор-класса и канонического вложения. Заметим в заключение, что введенное в начале этого пункта отношение эквивалентности, хотя и не является множественным, приводимо. Если f — соответствующее отношение, то для данного множества A значение $f(A)$ называют *мощностью* множества A, так что эквивалентность двух множеств может быть истолкована как равенство их мощностей.

2.7. Для дальнейшего нам необходимо несколько расширить понятие отношения. Дело в том, что данное множество наряду с «абсолютными», т. е. независящими ни от каких других множеств, свойствами обладает еще и, если можно так сказать, свойствами «относительными», которые определяются в конечном счете тем, элементом каких других множеств выступает в рассматриваемой ситуации данное множество. В тех задачах, где возникает необходимость учитывать упомянутые «относительные» свойства, как раз и оказывается полезным вводимое ниже понятие соответствия и в частности отображения.

Пусть имеются отношение F и такие множества A и B, что $A \supset D(F)$, $B \supset D(F)$. В этом случае говорят, что тройка (F, A, B) есть *соответствие* из множества A в множество B. При этом множество A называется *областью отправления*, а множество B — *областью прибытия* данного соответствия, о котором говорят как о соответствии из множества A в множество B. В тех случаях, когда из контекста ясно, что имеется в виду под областями отправления и прибытия данного соответствия, мы будем говорить просто о соответствии F[35].

Заметим, что каждое отношение F, у которого $D(F)$ и $R(F)$ суть множества, можно считать соответствием, областями отправления и прибытия которого служат соответственно область определения и область значений данного отношения.

Поскольку соответствие получается из отношения «присоединением» еще двух объектов, многие понятия и факты об отношениях, с очевидными изменениями в формулировках, могут быть сформулированы для соответствий. Для примера определим несколько понятий такого рода.

Соответствие (F_0, A_0, B_0) называют *сужением соответствия* (F, A, B), если F_0 — сужение F и $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Пусть даны соответствия (F, A, B) и (G, C, D). Соответствие $(G \circ F, A, D)$ называют *суперпозицией соответствий* (F, A, B) и (G, C, D). Соответствие (f, X, Y), где f — однозначное отношение, называют *отображением*[36] *из* X *в* Y. Если $R(f) = Y$, тогда говорят, что f — отображение *на* Y, или что f *сюръективно*. В том случае, когда f взаимно однозначно и $D(f) = X$, говорят, что f *инъективно*. Сюръективное и инъективное отображение f называют *биективным*, или *биекцией* X *на* Y.

Рассмотрим одно из приложений понятия отображения. Пусть $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — данное семейство, причем класс индексов Ξ представляет собой множество. Образуем совокупность $\mathfrak{A}$ множеств вида $\{\xi\} \cdot A_\xi$ с $\xi \in \Xi$. Совокупность $\mathfrak{A}$, очевидно, расчлененная, поэтому имеет смысл говорить о ее произведении $\mathfrak{X}$ (см. 1.9). Опуская тривиальный случай, когда среди элементов множества Ξ имеется такой ξ, что $A_\xi = \varnothing$ (тогда и произведение пусто), возьмем какой-либо элемент $\varphi \in \mathfrak{X}$. Согласно определению для каждого элемента множества $\mathfrak{A}$, т. е. иными словами для каждого $\xi \in \Xi$, пересечение $\varphi \cap (\{\xi\} \times A_\xi)$ состоит из единственного элемента. Поскольку по определению $\varphi \subset \mathrm{Sum}(\mathfrak{A}) = \Xi \times \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$, то из сказанного следует, что φ —

[35]) Преодолевая незначительные логические трудности, можно было бы ввести понятие соответствия и тогда, когда в качестве A и B фигурируют произвольные классы. Однако описанные общие ситуации будут встречаться нам значительно реже описанных в тексте, почему мы и остановились на этом определении.

[36]) Кроме «отображение» употребляются и термины «функция», «преобразование», «оператор» и т. п. Некоторые из них мы будем использовать, но лишь для обозначения специальных классов отображений.

однозначное отношение с областью определения $D(\varphi) = \Xi$ и областью значений $R(\varphi) \subset A = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$. При этом $\varphi(\xi) \in A_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$.

Обратно, если φ — отношение, обладающее всеми указанными свойствами [37], то $(\xi, \varphi(\xi)) \in \{\xi\} \times A_\xi$, причем ввиду однозначности отношения φ кроме пары $(\xi, \varphi(\xi))$ множество $\{\xi\} \times A_\xi$ не содержит других элементов из φ. Стало быть, $\varphi \in \mathfrak{X}$. Таким образом, произведение $\mathfrak{X}$ представляет собой множество всех таких однозначных отношений φ, что $D(\varphi) = \Xi$ и $\varphi(\xi) \in A_\xi$ для каждого $\xi \in \Xi$.

Так как произведение пустого множества пусто, указанное выше описание множества $\mathfrak{X}$ сохраняет силу и в том вырожденном случае, когда в множестве Ξ имеется такой элемент ξ, что $A_\xi = \varnothing$. При этом $\mathfrak{X} = \varnothing$. Множество $\mathfrak{X}$ мы будем называть *произведением* данного семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и обозначать символом $\prod_{\xi \in \Xi} A_\xi$ [38]. Если $\varphi \in \mathfrak{X}$ и $\xi \in \Xi$, то значение $\varphi(\xi)$ называется *координатой* (с индексом ξ) элемента φ.

В дальнейшем мы обычно, допуская известную вольность, будем трактовать элементы произведения $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} A_\xi$ как отображения множества Ξ в объединение $A = \bigcup_{\xi \in \Xi} A_\xi$ (значения которых на каждом из элементов $\xi \in \Xi$ суть элементы множества A_ξ). Если, в частности, данное семейство п о с т о я н н о, т. е. если оно совпадает с произведением $\Xi \times \{A\}$ и, значит, при любом $\xi \in \Xi$ оказывается $A_\xi = A$, то произведение $\mathfrak{X}$ (оно в этом случае обозначается через A^Ξ) при такой интерпретации будет тождественно совокупности всех отображений множества Ξ в множество A.

Чтобы сделать более естественной указанную выше трактовку произведения, введем полезное и в других отношениях понятие селектора. Пусть имеется соответствие F из множества X в множество Y. Отображение f множества X в множество Y называется *селектором* данного соответствия, если для каждого $x \in X$ имеет место включение $f(x) \in F(x)$, т. е. $f \subset F$. Поскольку отсюда следует, что $D(f) \subset D(F)$, а с другой стороны

---

[37]) Достаточно, очевидно, потребовать однозначности и соблюдения условия $\varphi(\xi) \in A_\xi (\xi \in \Xi)$.

[38]) Во избежание недоразумений следует иметь в виду известную непоследовательность принятой терминологии. Дело в том, что семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, будучи множеством, может оказаться и расчлененным, так что к нему применимо определение из 1.9. Условимся поэтому, говоря о произведении с е м е й с т в а, всегда подразумевать описанную здесь конструкцию.

требуется, чтобы $D(f) = X$, то селектор может существовать лишь в случае, когда $D(F) = X$. Нетрудно понять, что множество всех селекторов данного соответствия совпадает с произведением $\prod_{x\in X} F\{x\}$ (см. 1.9). Наоборот, если дано семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ (Ξ, как и раньше, предполагается множеством), то, образовав отношение $F=\left\{(\xi,\eta)\in\Xi\times\left(\bigcup_{\xi\in\Xi}A_\xi\right):\exists\xi:\xi\in\Xi,\eta\in\in A_\xi\right\}$, мы без труда установим, что произведение $\mathfrak{X}=\prod_{\xi\in\Xi}A_\xi$ в точности совпадает с множеством всех селекторов соответствия F из Ξ в A.

В связи с произведением $\mathfrak{X}=\prod_{\xi\in\Xi}A_\xi$ семейства $\{A_\xi\}(\xi\in\Xi)$ возникают некоторые отображения. Пусть H — подмножество множества Ξ. Отображение P_H произведения $\mathfrak{X}$, сопоставляющее элементу $\varphi\in\Xi$ сужение $\varphi|_\mathrm{H}$, называется *проекцией* (отвечающей множеству H индексов). Ясно, что область определения $D(P_\mathrm{H})$ проекции P_H есть произведение $\mathfrak{X}$, областью же значений $R(P_\mathrm{H})$ в невырожденном случае (т. е. когда ни при каком $\xi\in\Xi$ множество A_ξ непусто) служит произведение $\mathfrak{Y}=\prod_{\xi\in\mathrm{H}}A_\xi$. Действительно, если $\psi\in\mathfrak{Y}$, то, полагая $\Theta=\Xi\setminus\mathrm{H}$ и взяв произвольный элемент $\chi\in\mathfrak{Z}=\prod_{\xi\in\Theta}A_\xi$ (по условию $\mathfrak{Z}$ непусто), без труда установим, что $\psi\cup\chi\in\mathfrak{X}$ и $P_\mathrm{H}(\psi\cup\chi)=\psi$.

В случае, когда множество H состоит из единственного элемента ξ, мы будем понимать под проекцией (индекса ξ) P_ξ отображение, сопоставляющее элементу φ его координату $\varphi(\xi)$ (индекса ξ), так что $P_\xi:\varphi\mapsto\varphi(\xi)$ $(\varphi\in\mathfrak{X})$. При соответствующих предположениях область значений проекции P_ξ есть множество A_ξ.

Всякое отображение f произвольного множества Z в произведение $\mathfrak{X}=\prod_{\xi\in\Xi}A_\xi$ семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ «распадается» на отображения $f_\xi=P_\xi\circ f$ множества Z в множества A_ξ. Эти отображения называются *координатными* (по отношению к данному отображению f). Зная все координатные отображения f_ξ, легко восстановить породившее их отображение f. Для произвольного $x\in Z$ имеем, очевидно, обозначая $\varphi=f(x)$, что $\varphi:\xi\mapsto f_\xi(x)$ $(\xi\in\Xi)$.

Наличие координатных отображений в известном смысле характерно для произведения семейства.

***Теорема** 4(2.1). Если множество X и семейство $\{p_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ удовлетворяют условию: каковы бы ни были множество Z и семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ отображений множества Z в A_ξ $(f_\xi: Z\to$*

$\to A_\xi (\xi \in \Xi))$, *существует единственное отображение f множества Z в множество X такое, что $f_\xi = p_\xi \circ f$ для каждого $\xi \in \Xi$, то существует взаимно однозначное отображение Φ множества X на произведение $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} A_\xi$, для которого соблюдены следующие соотношения: $p_\xi = P_\xi \circ \Phi (\xi \in \Xi)$, где P_ξ — проекция (с индексом ξ) произведения $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Положим $\varphi : \xi \mapsto p_\xi(x)$ $(\xi \in \Xi)$. Совокупность всех пар вида (x, φ) обозначим через Φ[39]. Ясно, что отношение Φ однозначно и что $D(\Phi) = X$. Полагая в условии $Z = \mathfrak{X}$ и $f_\xi = P_\xi (\xi \in \Xi)$, найдем такое отображение Ψ произведения $\mathfrak{X}$ в множество X, что $P_\xi = p_\xi \circ \Psi$ $(\xi \in \Xi)$. Подразумевая под φ произвольный элемент из $\mathfrak{X}$ и полагая $x = \Psi(\varphi)$, получим тем самым для любого $\xi \in \Xi$, что

$$\Phi(x)(\xi) = p_\xi(x) = p_\xi(\Psi(\varphi)) = P_\xi(\varphi) = \varphi(\xi).$$

Этим установлено, что $\Psi = \Phi^{-1}$. Теорема доказана.

§ 3. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

В том параграфе описывается тип отношений, играющий, по нашему глубокому убеждению, основную роль не только в математике, но и далеко за ее пределами. Речь идет о так называемом отношении порядка. Оно служит абстрактным выражением понятия следования, старшинства, предпочтения, главенствования и т. п., словом, оно возникает в тех случаях, когда в данной совокупности объектов возникает некоторая иерархия.

Как и в большинстве разделов этой главы, мы не намерены углубляться в теорию упорядоченных классов, ограничиваясь лишь перечислением терминов и указанием на самые простые связи между ними.

3.1. Пусть X — какой-либо класс. Отношение $\sigma \in X \times X$ называется *отношением порядка* (или просто *порядком* в X), если соблюдены следующие условия:

а) $I_X \subset \sigma$ (*рефлексивность*);

б) $\sigma \circ \sigma \subset \sigma$ (*транзитивность*);

в) $\sigma \cap \sigma^{-1} = I_X$ (*антисимметричность*).

Рассматривая класс X вместе с отношением порядка σ в нем, мы говорим об *упорядоченном класссе* X (с *порядком* σ)[40].

---

[39]) Мы не останавливаемся на проверке корректности определения множества Φ.

[40]) В случае, когда класс X представляет собой множество, упорядоченный класс X (с порядком σ) можно было бы мыслить себе как упорядоченную пару (X, σ), хотя следует сказать, что и эта точка зрения имеет также определенные недостатки.

Поэтому, говоря о совпадении упорядоченных классов X и Y, мы подразумеваем под этим не только тождество самих классов X и Y, но и совпадение соответствующих порядков.

Если X — упорядоченный класс (с порядком σ), а x, y — такие его элементы, что $(x, y) \in \sigma$, то обычно говорят, что элемент x *меньше* элемента y, и пишут $x \leqslant y$. В ряде случаев, напротив, в такой обстановке об x говорят, что он *больше*, чем y, и пишут при этом $x \geqslant y$. В ситуациях, исторически сложившихся, а также в тех случаях, когда в одном и том же классе X рассматривается одновременно несколько отношений порядка и, стало быть, имеют дело с несколькими различными упорядоченными классами, вместо знаков $\leqslant$ ($\geqslant$) употребляют другие, сходные по начертанию, символы (например, $\preccurlyeq$ или соответственно $\succcurlyeq$) и иные термины вроде «предшествует» («следует»), «тоньше» («грубее») и т. п.

Если $x \leqslant y$ и $x \neq y$, то это обстоятельство коротко записывают в виде $x < y$; при этом говорят, что x *строго меньше* y.

Условия определения порядка, если их записать в традиционных обозначениях, выглядят, очевидно, так:

а) (рефлексивность) для каждого $x \in X$ имеет место соотношение $x \leqslant x$;

б) (транзитивность) для любых таких $x, y, z \in X$, что $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, справедливо, что $x \leqslant z$;

в) (антисимметричность) если $x, y \in X$ таковы, что одновременно $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$.

Укажем на один в известном смысле универсальный пример упорядоченного класса. Пусть U — класс всех множеств. Нетрудно понять, что отношение $L = \{(x, y) \in U^2 : x \subset y\}$ служит отношением порядка в U (пункт а) определения очевиден, пункт б) отмечен в I(1.1), пункт в) есть не что иное, как принцип объемности). Впредь, говоря об U как об упорядоченном классе, будем иметь в виду именно этот порядок, и называть его *порядком по включению*. Лишь отступления от этого соглашения будут оговариваться.

Укажем на некоторые очевидные свойства отношения порядка.

I. *Если σ — отношение порядка в классе X, то и σ^{-1} — также отношение порядка в X.*

Если соотношение $(x, y) \in \sigma$ записывать, как мы и делали раньше, в виде $x \leqslant y$ и обозначать словами «x меньше чем y», то равносильное включение $(y, x) \in \sigma^{-1}$ естественно записывать в виде $y \geqslant x$ и говорить при этом «y больше чем x». Аналогично поступают и при других способах обозначения.

При изучении неоднозначных отношений, и в частности отношения порядка, большую помощь может оказать понятие поляры (см. 1.6, а также 2.4 и 2.5). Если X — упорядоченный класс с порядком σ, то в соответствии с данным в 1.6 определением под полярой класса A понимается класс

$$\pi(A) = \{y \in X : A \times \{y\} \subset \sigma\} = \\ = \{y \in X : (\forall x : (x \in A \Rightarrow (x, y) \in \sigma))\} = \\ = \{y \in X : (\forall x : (x \in A \Rightarrow x \leqslant y))\}.$$

Если в этом определении заменить порядок σ на обратный σ^{-1}, то получим обратную поляру класса A

$$\pi^{-1}(A) = \{y \in X : (\forall x : (x \in A \Rightarrow x \geqslant y))\}.$$

В случае, когда класс A содержится в классе X (а только этот случай и имеет смысл рассматривать, поскольку иначе $\pi(A) = \varnothing$), элементы поляры $\pi(A)$ называются *верхними границами класса* A, а элементы обратной поляры — *нижними границами* этого класса.

Если A — одноэлементное множество $\{x\}$ то, очевидно,

$$\pi\{x\} = \sigma\{x\} = \{y \in X : x \leqslant y\}, \\ \pi^{-1}\{x\} = \sigma^{-1}\{x\} = \{y \in X : x \geqslant y\}.$$

Для обозначения этих классов мы нередко будем использовать символы $[x, \rightarrow]$ и соответственно $[\leftarrow, x]$[41] Заметим, что ввиду свойства транзитивности порядка

$$\pi\{x\} = \{x, \rightarrow] = \pi[\leftarrow, x], \ \pi^{-1}\{x\} = \\ = [\leftarrow, x] = \pi^{-1}([x, \rightarrow]). \tag{1}$$

Равенства (1) позволяют свести, по существу, произвольное отношение порядка к порядку по включению.

II. *Пусть X — упорядоченный класс с порядком σ. Каковы бы ни были элементы $x, y \in X$, равносильны следующие три соотношения:*

1) $(x, y) \in \sigma$;
2) $\sigma\{x\} \supset \sigma\{y\}$;
3) $\sigma^{-1}\{x\} \subset \sigma^{-1}\{y\}$.

---

[41]) Часто рассматривают также пересечения классов указанного вида: $[u, \rightarrow] \cap [\leftarrow, v]$. Такое пересечение будем называть *промежутком* (с левым концом u и правым v) и обозначать через $[u, v]$. Понятно, что промежуток $[u, v]$ непуст в том и только в том случае, если $u \leqslant v$. Наряду с промежутками вида $[u, v]$ иногда целесообразно рассматривать и так называемые *открытые промежутки* — пересечения классов вида $(u, \rightarrow] = \{x \in X : x > u\}$ и $[\leftarrow, v) = \{x \in X : x < v\}$, а также полуоткрытые промежутки: $[u, v)$, $(u, v]$ (определение последних мы предоставляем читателю).

Действительно, поскольку $y \in \sigma\{y\}$, а $x \in \sigma^{-1}\{x\}$, то как соотношение 2), так и соотношение 3) влекут соотношение 1). Обратно, если дано, что $(x, y) \in \sigma$, т. е. если $x \in \sigma^{-1}\{y\} = [\leftarrow, y]$, то ввиду (1) $\pi\{x\} = \sigma\{x\} \supset \pi([\leftarrow, y]) = \sigma\{y\}$, и аналогично устанавливается справедливость соотношения 3).

Если X — упорядоченный класс с порядком σ и X_0 — подкласс класса X, то $\sigma_0 = \sigma \cap X_0^2$, как легко проверить, — порядок в классе X_0. Поэтому класс X_0 можно также рассматривать как упорядоченный. О порядке σ_0 будем говорить как о *сужении* порядка σ на класс X_0 или как о порядке, *индуцированном* в X_0 порядком σ. Так, поскольку каждый класс X служит подклассом класса U всех множеств, можно говорить о порядке в X, индуцированном порядком по включению.

Рассмотрим упорядоченные классы X, Y с отношениями порядка σ и τ соответственно. Однозначное отношение $f \subset X \times Y$ называют *возрастающим* (*убывающим*) на классе $A \subset D(f)$, если из того, что $x, y \in A$ и $x \leqslant y$ следует $f(x) \leqslant f(y)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(y)$). Ясно, что возрастающее (убывающее) на классе A отношение f может быть охарактеризовано тем, что $\sigma \cap (A \times A) \subset f^{-1} \circ \tau \circ f$ (соответственно $\sigma \cap (A \times A) \subset f^{-1} \circ \tau^{-1} \circ f$). Возрастающие и убывающие на A однозначные отношения объединяются общим термином — *монотонные на* A отношения. Однозначное отношение, монотонное на всей области определения, называют просто монотонным. О монотонных отношениях говорят также, что они *сохраняют порядок* (если речь идет о возрастающем отношении) или *обращают порядок* (в случае убывающих отношений).

Возрастающее взаимно однозначное отношение f упорядоченного класса $X(D(f) = X)$ в упорядоченный класс Y, у которого обратное отношение f^{-1} возрастает, называют *изоморфизмом* упорядоченного класса X в упорядоченный класс Y. Если при этом $R(f) = Y$, то говорят, что f — изоморфизм упорядоченных классов X, Y. Если f — изоморфизм упорядоченных классов X, Y, то f^{-1} служит, очевидно, изоморфизмом упорядоченных классов Y, X.

Если f — изморфизм упорядоченного класса X на упорядоченный класс Y, то, как упоминалось, должно быть $\tau \subset f \circ \sigma \circ f^{-1}$ и одновременно $\sigma \subset f^{-1} \circ \tau \circ f$. Иначе говоря, изоморфные порядки связаны равенством $\sigma = f^{-1} \circ \tau \circ f$ или, что то же, $\tau = f \circ \sigma \circ f^{-1}$.

Упорядоченные классы X, Y называют *изоморфными*, если можно указать изоморфизм одного из них на другой. Изоморфные классы с точки зрения отношения порядка имеют одинаковое устройство — всякое утверждение (в рамках теории упорядоченных классов) об элементах одного из них с помощью изоморфизма может быть «переведено» на «язык» другого.

Изморфизм упорядоченного класса X (с порядком σ) в упорядоченный класс Y (с порядком τ) называется *антиизоморфизмом* класса X (с порядком σ) в класс Y, снабженный порядком τ^{-1}.

В дальнейшем мы нередко будем сталкиваться с взаимно однозначными отношениями данных классов, сохраняющими заданные на этих классах структуры, так сказать, изоморфизмами тех или иных структур. Естественно, что изоморфные объекты в рамках теории тех структур, которые сохраняются при данном изоморфизме, имеют одинаковое строение. Учитывая это обстоятельство, мы в том случае, если указан некоторый «канонический» изоморфизм данных объектов, будем такие объекты отождествлять и рассматривать их как один объект. Еще раз подчеркнем, что такое отождествление изоморфных классов будет осуществляться только в тех случаях, когда ясно фиксирован способ отождествления —данный изоморфизм.

Отметим в заключение следствие предложения II.

III. *Если X — такой упорядоченный класс с порядком σ, что обратный порядок σ^{-1} представляет собой множественное отношение, то порожденное им однозначное отношение $\widehat{\sigma^{-1}}$: $x \mapsto \sigma^{-1}\{x\}$ $(x \in X)$ является изоморфизмом класса X в класс U всех множеств.*

В случае, когда само σ — множественное отношение, можно утверждать, что порожденное им однозначное отношение $\widehat{\sigma}$: : $x \mapsto \sigma\{x\}$ $(x \in X)$ будет антиизоморфизмом.

3.2. Во многих случаях строение рассматриваемого множества, или класса вообще, с той или иной мерой полноты может быть выяснено путем указания некоторых «определяющих» элементов, возможно и не принадлежащих рассматриваемому классу. Имея в виду эту идею, дадим основополагающее в теории упорядоченных классов определение.

Пусть X — упорядоченный класс с порядком σ и A — подкласс класса X. Элемент u класса A называется *наибольшим* (*относительно порядка* σ) *элементом класса* A, если u одновременно служит верхней границей класса A. Таким образом, наибольший элемент класса A — это элемент пересечения $A \cap \pi(A)$. Поскольку каждая верхняя граница класса A больше любого элемента этого класса, в том числе и наибольшего, то ввиду свойства антисимметричности отношения порядка наибольший элемент данного класса, если он существует, единствен.

Заменяя в данном определении порядок σ обратным порядком σ^{-1}, но желая сохранить терминологию, относящуюся к исходному порядку, мы придем к понятию *наименьшего эле-*

мента класса A (относительно порядка σ) как наибольшего относительно порядка σ^{-1} элемента этого класса. Таким образом, наименьший элемент класса A — это (единственный) элемент пересечения $A \cap \pi^{-1}(A)$.

Проиллюстрируем данные определения простым примером. Рассмотрим множество $\mathfrak{P}(E)$ всех подмножеств данного множества E как подкласс упорядоченного класса U всех множеств. Ясно, что E будет наибольшим элементом класса $\mathfrak{P}(E)$, а пустое множество — наименьшим элементом этого класса.

Наибольший элемент биркхофовской оболочки $[A]$ подкласса A данного упорядоченного класса X (с порядком σ) называется *точной верхней границей* (*относительно порядка* σ) *класса A* и обозначается через $\sup A$ или через $\sup \{x : x \in A\}$, или в необходимых случаях через $(\sigma)\text{-}\sup A$. В случае, когда класс A состоит из двух элементов x, y, то $\sup A$ обозначают нередко через $x \vee y$. Если класс A возникает как образ $f[B]$ некоторого класса B при однозначном отношении f, то вместо $\sup A$ пишут либо $\sup\limits_{x \in B} f(x)$ либо $\sup \{f(x) : x \in B\}$ или, когда нужно, $(\sigma)\text{-}\sup\limits_{x \in B} f(x)$ (здесь предполагается, конечно, что $B \subset D(f)$). Точную верхнюю границу семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов упорядоченного класса X обозначают через $\sup\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$.

Заменяя порядок σ на σ^{-1}, но ведя речь в терминах порядка σ, приходим к определению точной нижней границы: *точная нижняя граница* (*относительно порядка* σ) *класса A* есть точная верхняя граница этого класса, но относительно порядка σ^{-1}. Для обозначения точной нижней границы класса A используют символ $\inf A$ или $\inf \{x : x \in A\}$, или содержащий больше информации $(\sigma)\text{-}\inf A$; если $A = \{x, y\}$, то нередко пишут $x \wedge y$. Таким образом, $(\sigma)\text{-}\inf A = (\sigma^{-1})\text{-}\sup A$. Укажем еще на обозначение $\inf\limits_{x \in B} f(x)$ (или более полное $(\sigma)\text{-}\inf\limits_{x \in B} f(x)$), смысл которого ясен без объяснений.

Учитывая указанную связь между точными верхними и точными нижними границами, мы, как правило, будем формулировать и тем самым доказывать результаты, относящиеся лишь к точным верхним границам (или, изредка, к точным нижним границам).

Поскольку $\pi([A]) = \pi(A)$ для любого класса A (см. 2.4), то $[A] \cap \pi([A]) = \pi(A) \cap \pi^{-1}(\pi(A))$. Это приводит к следующему результату.

I. *Класс A упорядоченного класса X (с порядком σ) имеет точную верхнюю границу тогда и только тогда, когда в классе $\pi(A)$ верхних границ класса A существует наименьший элемент, при этом он и служит точной верхней границей класса A.*

Иными словами, $\sup A$ — что наименьшая из всех верхних границ класса A и, точно так же, точная нижняя граница класса A — это наибольшая из всех нижних границ этого класса [42].

Поскольку всегда $A \subset [A]$ (см. II (2.4)), из непустоты пересечения $A \cap \pi(A)$ следует, что и пересечение $[A] \cap \pi(A) = [A] \cap \pi([A])$ непусто. Поэтому

II. *Если класс A имеет наибольший элемент u, то существует точная верхняя граница класса A, совпадающая с u. Обратно, если существует точная верхняя граница класса A, ему принадлежащая, то $\sup A$ — наибольший элемент класса A.*

Знание точной верхней границы класса A открывает возможность полного описания биркхофовской оболочки $[A]$ класса A.

III. *Если класс A имеет точную верхнюю границу, то $[A] = [\leftarrow, \sup A]$.*

Действительно, поскольку $u = \sup A \in [A]$, то и (см. 2.4) $[\{u\}] \subset [A]$. Но в силу (1) $[\{u\}] = \pi^{-1}(\pi\{u\}) = \pi^{-1}([u, \rightarrow]) = [\leftarrow, u]$. Далее, включение $u \in \pi(A)$ ввиду предложения III (2.4) и вновь с помощью (1) приводит к соотношению $[\leftarrow, u] = \pi^{-1}\{u\} \supset \pi^{-1}(\pi(A)) = [A]$.

Из предложения III с помощью предложения II (3.1) получаем

IV. *Если подклассы A и B упорядоченного класса X имеют оба точные верхние (точные нижние) границы, то из соотношения $A \subset B$ вытекает*

$$\sup A \leqslant \sup B \qquad (\inf A \geqslant \inf B). \tag{2}$$

Для доказательства достаточно заметить, что из $A \subset B$ следует соотношение $[A] \subset [B]$, и воспользоваться предложением II (3.1).

Предложение III дает также

V. *Если A — непустой подкласс упорядоченного класса X, имеющий как точную верхнюю, так и точную нижнюю границу, то $\inf A \leqslant \sup A$.*

Действительно, полагая $\inf A = u$, $\sup A = v$, находим, что $A \subset [A] = [\leftarrow, v]$, и аналогично $A \subset [u, \rightarrow]$, так что $A \subset [u, v]$. Поскольку $A \neq \varnothing$, в силу транзитивности порядка $u \leqslant v$.

Хотя пустое множество, не имея элементов, не может обладать ни наибольшим, ни наименьшим элементами, все же в ряде случаев существует точная верхняя граница пустого множества. В самом деле, пусть X — упорядоченный класс. Поскольку $\pi(\varnothing) = X$, на основании предложения I $\sup \varnothing$ есть наимень-

[42]) Обычно эти свойства и берут за определение точной **верхней** и точной нижней границ.

ший элемент класса X (коль скоро такой элемент существует). По тем же соображениям $\inf \varnothing$ — это наибольший элемент класса X (разумеется, и здесь в предположении существования).

Рассмотрим семейство $\{X_t\}$ $(t \in T)$ упорядоченных множеств и порядок в множестве X_t обозначим через σ_t. С произведением $\prod\limits_{t \in T} X_t$ мы всегда будем связывать так называемое *покоординатное* (говорят еще *поточечное*) отношение порядка σ: по определению пара (x, y), где $x : t \mapsto x_t$, $y : t \mapsto y_t$ $(t \in T)$, находится в отношении σ, если $(x_t, y_t) \in \sigma_t$ для всех $t \in T$.

Нетрудно понять, что класс $A \subset \prod\limits_{t \in T} X_t$ имеет точную верхнюю границу в том и только в том случае, если каждая его проекция A_t $(t \in T)$ имеет точную верхнюю границу (в X_t), при этом $\sup A$ есть такое семейство $\{z_t\}$ $(t \in T)$, что $z_t = \sup A_t$ $(t \in T)$. Аналогичное можно сказать и относительно наибольшего элемента класса A.

Рассмотрим отношение F, область значений которого содержится в данном упорядоченном классе X (с порядком σ). Пусть Λ — такой класс, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $u_\lambda = \sup F\{\lambda\}$. Нетрудно понять, что можно говорить об отображении f класса Λ в класс X, сопоставляющем элементу $\lambda \in \Lambda$ элемент u_λ. Отображение f назовем *верхней огибающей* данного отношения F (на классе Λ). Аналогично (заменой σ на σ^{-1}) определяется *нижняя огибающая*.

VI. *Классы $F[\Lambda]$ и $f[\Lambda]$ имеют или нет точные верхние границы одновременно. При этом (в случае существования)* $\sup F[\lambda] = \sup f[\Lambda]$.

Для доказательства достаточно убедиться в справедливости равенства $\pi(F[\Lambda]) = \pi(f[\Lambda])$. Пусть $x \in F[\Lambda]$, $y \in \pi(f[\Lambda])$. Согласно сказанному в 2.1 найдется элемент $\lambda \in \Lambda$ такой, что $(\lambda, x) \in F$, т. е. $x \in F\{\lambda\}$. Тем самым $x \leqslant \sup F\{\lambda\} = f(\lambda) \leqslant y$. Следовательно (см. 2.4), $\pi(F[\Lambda]) \supset \pi(f[\Lambda])$. Подразумевая теперь под u произвольный элемент поляры $\pi(F[\Lambda])$, для каждого $\lambda \in \Lambda$ и любого $z \in F\{\lambda\}$ будем иметь $z \leqslant u$, так что $f(\lambda) = \sup F\{\lambda\} \leqslant u$ и тем самым ввиду произвольности λ можно написать, что $u \in \pi(f[\Lambda])$. Таким образом, $\pi(F[\Lambda]) \subset \pi(f[\Lambda])$.

Установленный в предложении VI факт называют свойством *ассоциативности* точных границ. Традиционная его формулировка отличается от приведенной нами и состоит в следующем. Пусть $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство элементов упорядоченного класса X. Предположим, что $\Xi = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \Xi_\lambda$, причем для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует $v_\lambda = \sup\limits_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi$. Тогда точные верхние границы семейств $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{v_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ существуют или нет одновременно и в случае существования имеет место равенство

$$\sup_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sup_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda = \sup_{\lambda\in\Lambda} (\sup_{\xi\in\Xi_\lambda} x_\xi). \tag{3}$$

Для обоснования соотношения (3) достаточно в предложении VI принять $F\{\lambda\} = \{x_\xi : \xi \in \Xi_\lambda\}$ и заметить, что $\{x_\xi : \xi \in \Xi\} = F[\Lambda]$.

В заключение рассмотрим два примера. Пусть U — упорядоченный по включению класс всех множеств. Возьмем класс $\mathfrak{A} \subset U$. Если класс $\mathfrak{A}$ собственный, он не имеет точной верхней границы, если $\mathfrak{A}$ — множество, то его точной верхней границей служит объединение $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A$ множеств класса $\mathfrak{A}$ (см. VII (1.7)). Точную нижнюю границу имеет любой непустой класс $\mathfrak{A}$ и $\inf \mathfrak{A} = \bigcap_{A\in\mathfrak{A}} A$ (см. III (1.7)).

Пусть X — множество. Упорядочим множество $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств множества X индуцированным из U отношением порядка по включению. В этом случае уже любое множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ имеет точные границы, при этом $\inf \varnothing = X$ (см. 2.3). Отметим, что именно в традиционной формулировке в предложении I (2.3) было доказано свойство ассоциативности точных границ для случая семейства элементов упорядоченного по включению универсального класса U.

3.3. Упорядоченный класс X (с порядком σ) называется *полным*, если каждый его подкласс имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы. Например, в конце пункта 3.2 было указано, что упорядоченное по включению множество всех подмножеств данного множества представляет собой полный класс.

Из предложения II (3.2) легко следует

I. *Если каждый подкласс упорядоченного класса X имеет точную верхнюю границу, тогда всякий подкласс X имеет точную нижнюю границу.*

Иначе говоря, в условиях предложения I класс X полный.

Класс $A \subset X$ называют *ограниченным сверху*, если $\pi(A) \neq \varnothing$, *и ограниченным снизу*, если A ограничен сверху относительно порядка σ^{-1}, т. е. если $\pi^{-1}(A) \neq \varnothing$. Ограниченный сверху и снизу подкласс $A \subset X$ называют *ограниченным*.

Примерами ограниченных классов могут служить промежутки с концами u, $v \in X$ (см. 3.1). При этом, как нетрудно показать, левый конец промежутка всегда оказывается его точной нижней границей, а правый — точной верхней границей.

II. *Если каждый ограниченный сверху подкласс класса X имеет точную верхнюю границу, тогда всякий непустой подкласс в X имеет точную нижнюю границу.*

Действительно, если $A \subset X$, $A \neq \varnothing$, то класс $\pi^{-1}(A)$ ограничен сверху (любым элементом из A), и его точная верхняя граница и даст $\inf A$.

Упорядоченный класс X называют *условно полным*, если каждый непустой ограниченный подкласс класса X имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы.

III. *Если каждый непустой ограниченный сверху подкласс упорядоченного класса X имеет точную верхнюю границу, тогда всякий непустой ограниченный снизу подкласс в X имеет точную нижнюю границу.*

3.4. Пусть X — упорядоченный класс с порядком σ и X_0 — подкласс X. Снабдим X_0 индуцированным из X отношением порядка σ_0 (см. 3.1.). Рассмотрим класс $A \subset X_0$. Из равенства

$$\pi_{\sigma_0}(A) = X_0 \cap \pi_\sigma(A) \tag{4}$$

следует, что если A ограничен сверху в X_0, то он ограничен сверху и в X. Поскольку $\pi_{\sigma_0}(A) \subset \pi(A)$, в случае существования точных верхних границ относительно X_0 и X эти границы связаны соотношением $(\sigma)\text{-}\sup A \leqslant (\sigma_0)\text{-}\sup A$ (см. IV (3.2) и II (3.2)). Из равенства (4) легко устанавливается справедливость предложения

I. *Пусть класс $A \subset X$ таков, что существует* $(\sigma)\text{-}\sup A = v$ *и $v \in X_0$. Тогда существует* $(\sigma_0)\text{-}\sup A$, *равный v.*

Поскольку согласно (4) $A \cap \pi_{\sigma_0}(A) = X_0 \cap (A \cap \pi_\sigma(A))$, наибольшие элементы класса $A \subset X_0$ относительно порядков σ_0 и σ существуют или нет одновременно и совпадают в случае существования. Иначе говоря, наибольший элемент класса $A \subset X_0$ носит абсолютный характер.

Подкласс X_0 упорядоченного класса X называют *правильным вверх*, если для любого ограниченного сверху в X_0 класса $A \subset X_0$ выполнено условие: для любого $x \in \pi_\sigma(A)$ можно указать такой $y \in \pi_{\sigma_0}(A)$, что $y \leqslant x$. Если X_0 правилен вверх и $A \subset X_0$, то $\pi_\sigma^{-1}(\pi_{\sigma_0}(A)) = [A]_\sigma$. Действительно, всегда $\pi_\sigma^{-1}(\pi_{\sigma_0}(A)) \supset [A]_\sigma$. Если теперь $z \in \pi_\sigma^{-1}\pi_{\sigma_0}(A))$, т. е. $z \leqslant y$ для любого $y \in \pi_{\sigma_0}(A)$, то $z \leqslant x$ для $x \in \pi_\sigma(A)$. Из определения правильности вверх легко следует, что если класс $A \subset X_0$ имеет $(\sigma)\text{-}\sup A = v$, то $v \in X_0$. Отсюда с учетом предложения I получаем, что если X_0 — правильный вверх подкласс класса X и существует $(\sigma)\text{-}\sup A = v$ класса $A \subset X_0$, то существует и $(\sigma_0)\text{-}\sup A$, равный v. Ясно, что если класс X условно полный, то для правильности вверх класса $X_0 \subset X$ достаточно, чтобы для любого ограниченного сверху в X класса $A \subset X_0$ имело место включение $(\sigma)\text{-}\sup A \in X_0$.

Переходом к обратному отношению порядка определяется *правильный вниз* подкласс данного класса. Правильный вверх и вниз подкласс называют *правильным*.

3.5. Рассмотрим полезный для дальнейшего пример упорядоченного класса. Пусть F — отношение, область определения которого обозначим через X. Предположим для простоты, что область определения и область значений отношения F — множества. Рассмотрим совокупность $\mathfrak{X} = \mathfrak{K}_F(X)$ всех компонент (точнее F-компонент) множества X (см. 2.4).

I. *Совокупность $\mathfrak{X}$, упорядоченная по включению, представляет собой полное упорядоченное множество. При этом, если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}$, то*

$$\inf \mathfrak{A} = \bigcap_{H \in \mathfrak{A}} H, \quad \sup \mathfrak{A} = [\bigcup_{H \in \mathfrak{A}} H]. \tag{5}$$

Действительно, согласно IV (2.5) пересечение любой совокупности компонент также оказывается компонентой, а поэтому на основании I (3.4) пересечение $\bigcap_{H \in \mathfrak{A}} H$ является точной нижней границей (относительно порядка в $\mathfrak{X}$) множества $\mathfrak{A}$. Поскольку каждое множество $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}$ имеет точную нижнюю границу, упорядоченное множество $\mathfrak{X}$ — полное (см. I (3.3)).

Второе из соотношений (5) вытекает из того, что $\sup \mathfrak{A}$ есть наименьшая компонента, содержащая каждое из множеств $H \in \mathfrak{A}$ и, стало быть, $\sup \mathfrak{A}$ — наименьшая компонента, содержащая объединение $\bigcup_{H \in \mathfrak{A}} H$, т. е. в соответствии с VII (2.4) $\sup \mathfrak{A} = [\bigcup_{H \in \mathfrak{A}} H]$.

Если обозначить через Y область значений $R(F)$ данного отношения F и через $\mathfrak{Y}$ — совокупность $\mathfrak{K}_{F^{-1}}(Y)$ всех F^{-1}-компонент множества Y, то вследствие III (2.4) отображение $H \mapsto \pi(H)$ $(H \in \mathfrak{X})$ будет антиизоморфизмом множества $\mathfrak{X}$ на множество $\mathfrak{Y}$. Поэтому из (5) для $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}$ получаем

$$\pi\{\inf \mathfrak{A}\} = \pi(\pi^{-1}(\bigcup_{H \in \mathfrak{A}} \pi(H))), \quad \pi\{\sup \mathfrak{A}\} = \bigcap_{H \in \mathfrak{A}} \pi(H). \tag{6}$$

Пусть Φ — каноническое вложение множества X в множество компонент $\mathfrak{X}$ (см. 2.5). Если H — какая-либо компонента, то, поскольку $x \in \Phi(x)$ для любого $x \in X$, включение $x \in H$ равносильно соотношению $\Phi(x) \subset H$. Поэтому $H = \bigcup_{x \in H} \{x\} = \bigcup_{x \in H} \Phi(x)$, так что на основании (5) $H = \sup \Phi[H]$. Таким образом

II. *Какова бы ни была компонента H, имеет место соотношение $H = \sup \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A} = \{A \in R(\Phi) : A \subset H\}$.*

В случае, когда F есть отношение порядка σ в множестве X, совокупность $\mathfrak{X}$ — она называется при этом *дедекиндовским расширением* упорядоченного множества (X, σ) — поддается более детальному изучению. Заметим, что совокупность $\pi^{-1}(E)$ всех нижних границ какого-либо множества $E \subset X$ представляет собой компоненту и наоборот: всякая компонента H имеет такой вид (с $E = \pi(H)$). Если $x \in X$, то $\pi\{x\} = [x, \to]$, следовательно, $\Phi(x) = \pi^{-1}([x, \to]) = [\leftarrow, x] = \pi^{-1}\{x\}$. Отсюда вытекает

III. *Каноническое вложение Φ упорядоченного множества X в его дедекиндовское расширение $\mathfrak{X}$ представляет собой изоморфизм X и $R(\Phi)$.*

Действительно, соотношение $x \leqslant y$ $(x, y \in X)$, очевидно, равносильно включению $\Phi(x) = [\leftarrow, x] \subset [\leftarrow, y] = \Phi(y)$, так что если $\Phi(x) = \Phi(y)$, то одновременно $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, т. е. $x = y$.

В рассматриваемой ситуации (когда X — упорядоченное множество) предложение II допускает двойственную формулировку.

IV. *Каков бы ни был элемент $X \in \mathfrak{X}$, имеет место соотношение $H = \inf \mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E} = \{E \in R(\Phi) : E \supset H\}$.*

В самом деле, ясно, что $H \subset H_0 = \inf \mathfrak{E}$. Если $H \neq H_0$, то, взяв элемент $x \in H_0 \setminus H$, в соответствии с теоремой 1 (2.I) найдем такой элемент $y \in X$, что $H \subset \pi^{-1}\{y\}$, $x \notin \pi^{-1}\{y\}$. Первое из этих соотношений дает $\Phi(y) \in \mathfrak{E}$, так что $x \in H_0 \subset \subset \Phi(y) = \pi^{-1}\{y\}$.

Предложения II и IV позволяют уточнить предложение III.

V. *Каноническое вложение Φ множества X в его дедекиндовское расширение $\mathfrak{X}$ сохраняет точные границы, т. е. если множество $E \subset X$ имеет (относительно порядка σ) точную верхнюю или нижнюю границу, то $\Phi(\sup E) = \sup \Phi[E]$ или соответственно $\Phi(\inf E) = \inf \Phi[E]$.*

Действительно, положим $H = \sup \Phi[E]$ и пусть $E^+ = \{x \in X : \Phi(x) \supset H\}$. Если $x \in E^+$, $y \in E$, то $\Phi(x) \supset H \supset \supset \Phi(y)$. Поэтому если существует $\sup E = v$, то $x \geqslant v$ и, стало быть, в силу предложения IV $H = \inf \Phi[E^+] \geqslant \Phi(v)$. Но, очевидно, $\Phi(v) \geqslant \sup \Phi[E] = H$. Доказательство соотношения $\Phi(\inf E) = \inf \Phi[E]$ проводится по той же схеме, но с использованием предложения II вместо предложения IV.

Заметим, что хотя предложение II было доказано для произвольного отношения F, нельзя утверждать, что каноническое вложение Φ при любом F сохраняет точные нижние границы. Этого нельзя сказать и в случае точных верхних границ (при доказательстве предложения V в соответствующем месте было использовано предложение IV, в котором предполагается F равным данному отношению порядка).

Множество $R(\Phi)$ «плотно» расположено в множестве $\mathfrak{X}$.

VI. *Пусть H_1, H_2—такие элементы множеств $\mathfrak{X}$, что $H_1 \subset H_2$ и $H_1 \neq H_2$. Если пересечение $(H_1, H_2) \cap R(\Phi)$ пусто, то $H_1, H_2 \in R(\Phi)$.*

В самом деле, обозначим через $\mathfrak{E}_i$ совокупность всех компонент из $\mathfrak{X}_0$, содержащих компоненту H_i $(i = 1, 2)$. В силу предложения IV будем иметь $H_i = \inf\ \mathfrak{E}_i$ $(i = 1, 2)$. Но по условию множество $\mathfrak{E}_2$ может отличаться от $\mathfrak{E}_1$ лишь элементом H_1. Поэтому, если $H_1 \notin R(\Phi)$, то $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$ и оказалось бы $H_1 = H_2$. Аналогично, но с помощью предложения II обосновывается заключение $H_2 \in R(\Phi)$.

Порядок σ в классе X называется *линейным*, а сам класс X — *линейно упорядоченным*, если $\sigma \cup \sigma^{-1} = X^2$, т. е. если любые элементы $x, y \in X$ сравнимы.

VII. *Если X — линейно упорядоченное множество, то таким же будет и его дедекиндовское расширение $\mathfrak{X}$.*

Действительно, пусть $H_1, H_2 \in \mathfrak{X}$. Если $H_1 \neq H_2$, то одна из разностей $H_2 \setminus H_1$ или $H_1 \setminus H_2$ непуста. Считая, например, что $H_2 \setminus H_1 \neq \varnothing$, возьмем $u \in H_2 \setminus H_1$ и $x \in H_1$. Ввиду линейной упорядоченности множества X имеет место одно из двух соотношений: $\Phi(u) \subset \Phi(x)$ или $\Phi(x) \subset \Phi(u)$. Но так как $\Phi(x) \subset H_1$, первое из этих двух соотношений привело бы к тому, что $\Phi(u) \subset H_1$, т. е. к включению $u \in H_1$. Поэтому должно быть $\Phi(x) \subset \Phi(u) \subset H_2$ или, иначе говоря, $x \in H_2$. Таким образом, $H_1 \subset H_2$.

Отождествляя элемент $x \in X$ с компонентой $\Phi(x)$ и, стало быть, множество X с множеством $R(\Phi)$, мы в силу взаимной однозначности канонического вложения Φ можем рассматривать X как множество в дедекиндовском расширении $\mathfrak{X}$. При этом ввиду предложения II порядок в X совпадает с порядком, индуцированным порядком $\tilde{\sigma}$ в $\mathfrak{X}$. Предложение V при таком отождествлении дает: если множество $E \subset X$ имеет (σ)-$\sup E$, то (σ)-$\sup E = (\tilde{\sigma})$-$\sup E$, а существование (σ)-$\inf E$ влечет равенство (σ)-$\inf E = (\tilde{\sigma})$-$\inf E$. Предложение VI преобразуется в следующий факт: если для элементов $u, v \in \mathfrak{X}$ таких, что $u < v$, пересечение $(u, v) \cap X$ пусто, то $u, v \in X$.

Заметим, что последним условием дедекиндовское расширение определяется (с точностью до изоморфизма) однозначно. Точнее, если $\hat{X}$ — такое содержащее X полное упорядоченное множество, порядок в котором индуцирует порядок в X, и удовлетворяющее условию, аналогичному предложению VI, то тождественное отображение I_X множества X на себя допускает распространение до изоморфизма множества $\hat{X}$ на дедекиндовское расширение $\mathfrak{X}$ множества X. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

3.6. Во многих случаях из данного упорядоченного класса требуется выделить элемент, обладающий теми или иными экстремальными свойствами. При доказательстве существования такого рода объектов оказываются полезными следующие результаты.

Пусть X — упорядоченный класс с порядком σ. Элемент x класса $A \subset X$ называют *максимальным элементом* класса A, если $A \cap \pi\{x\} = \{x\}$, иначе говоря, если в A нет отличных от x элементов, следующих за x. Ясно, что x — максимальный элемент в том и только в том случае, если он является наибольшим элементом класса $A \cap (\pi\{x\} \cup \pi^{-1}\{x\})$ всех сравнимых с x элементов из A. Переходом к обратному отношению порядка определяется минимальный элемент класса $A \subset X$.

Непосредственно из определений следует, что если класс $A \subset X$ обладает наибольшим элементом, последний будет единственным максимальным элементом A. С другой стороны, если A имеет единственный максимальный элемент, то этот элемент будет наибольшим в A.

Лемма. Пусть X — упорядоченный класс (с порядком σ). Если всякий непустой линейно упорядоченный класс $V \subset X$ имеет в X точную верхнюю границу, то, каков бы ни был элемент $a \in X$, в X существует максимальный элемент, следующий за a.

Доказательство. Отметим прежде всего, что элемент a можно считать наименьшим элементом класса X. Действительно, нетрудно понять, что класс $\pi\{a\} = \sigma\{a\}$ так же, как и X, удовлетворяет условиям леммы; с другой стороны, каждый максимальный элемент этого класса служит максимальным элементом и для X.

Определим отношение σ_0, полагая $\sigma_0 = \sigma \setminus I_X$. Ясно, что элемент $x \in X$ будет максимальным в том и только в том случае, если $\sigma_0\{x\}$ пусто. Предположим, что X не обладает ни одним максимальным элементом, т. е. что для каждого $x \in X$ класс $\sigma_0\{x\}$ непуст. Это означает, что область определения $D(\sigma_0)$ отношения σ_0 совпадает с X, и поэтому в силу принципа XIV (см. 1.9) существует селектор f отношения σ_0, определенный на всем X. Так как $f(x) \in \sigma_0\{x\}$ при любом $x \in X$, учитывая определение σ_0, имеем $f(x) > x$ $(x \in X)$.

Класс $A \subset X$ назовем регулярным, если

1) $a \in A$;

2) $f[A] \subset A$;

3) каков бы ни был непустой линейно упорядоченный класс $V \subset A$, должно быть $\sup V \in A$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность всех регулярных классов. Очевидно, что $X \in \mathfrak{A}$, так что совокупность $\mathfrak{A}$ непустая.

Пусть $P = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$. Класс P регулярен: справедливость условий 1) и 3) ясна непосредственно, условие 2) вытекает из соотношения (8) из § 2:

$$f[P] = f[\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} f[A] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = P.$$

Для доказательства леммы достаточно установить, что P линейно упорядочен. Действительно, в этом случае существует $\sup P = u$, причем в силу условия 3) $u \in P$. Следовательно, согласно условию 2) $f(u) \in P$, так что $f(u) \leqslant u$. Вместе с тем должно быть $f(u) > u$.

Линейную упорядоченность P докажем в несколько этапов. Введем множество

$$Q = \{x \in P : f[\sigma_0^{-1}\{x\} \cap P] \subset \sigma^{-1}\{x\}\}. \tag{7}$$

Таким образом, $x \in Q$, если, во-первых, $x \in P$ и, во-вторых, из соотношений $y < x$, $y \in P$ вытекает $f(y) \leqslant x$. Покажем, что для элементов $x \in Q$ выполнено равенство

$$P_x = P \cap (\sigma^{-1}\{x\} \cup \sigma\{f(x)\}) = P. \tag{8}$$

Действительно, имея в виду определение множества P, достаточно убедиться в том, что $P_x \in \mathfrak{A}$. Условие 1) определения регулярного класса выполнено очевидным образом. Далее, так как

$$\sigma^{-1}\{x\} = \sigma_0^{-1}\{x\} \cup \{x\},\ f(x) \in \sigma\{f(x)\} \cap P,$$

то в силу (7)

$$f[P_x] = f[P \cap \sigma_0^{-1}\{x\}] \cup \{f(x)\} \cup f[P \cap \sigma\{f(x)\}] \subset$$
$$\subset (\sigma^{-1}\{x\} \cap P) \cup (\sigma\{f(x)\} \cap P) = P_x,$$

так что соблюдено и условие 2). Наконец, если непустое линейно упорядоченное множество V содержится в P_x, то в случае, когда пересечение $V \cap \sigma\{f(x)\}$ непусто, будет $\sup V = \sup (V \cap \sigma\{f(x)\}) \in \sigma\{f(x)\}$, а так как $\sup V \in P$, то $\sup V \in P_x$. Если же пересечение $V \cap \sigma\{f(x)\}$ пусто, то $V \subset \sigma^{-1}\{x\}$. Следовательно, и $\sup V \in \sigma^{-1}\{x\}$. Поскольку и на этот раз $\sup V \in P$, опять имеем $\sup V \in P_x$. Итак, P_x удовлетворяет и условию 3) и тем самым оказывается регулярным классом.

Для любого $x \in Q$ из (8) вытекает, что

$$P \cap (\sigma^{-1}\{x\} \cup \sigma\{x\}) = P. \tag{9}$$

В самом деле, ввиду того, что $f(x) > x$, справедливо включение $\sigma\{x\} \supsetneq \sigma\{f(x)\}$. Следовательно,

$$P = P \cap (\sigma^{-1}\{x\} \cup \sigma\{f(x)\}) \subset P \cap (\sigma^{-1}\{x\} \cup \sigma\{x\}) \subset P.$$

Теперь нетрудно доказать, что $Q = P$. Учитывая, что $Q \subset P$, нужно проверить только справедливость соотношения $P \subset Q$, а для этого достаточно убедиться в том, что $Q \in \mathfrak{A}$.

Так как $\sigma_0^{-1}\{a\}$ пусто, то $a \in Q$. Установим включение $f[Q] \subset Q$. Пусть $x \in Q$, $y \in P \cap \sigma_0^{-1}\{f(x)\}$. В силу (8) должно быть $y \in \sigma\{x\}$. Если, кроме того, $y \neq x$, т. е. если $y \in \sigma_0^{-1}\{x\}$, то отсюда вытекает, что $f(y) \in \sigma^{-1}\{x\} \subset \sigma^{-1}\{f(x)\}$ (ведь $x \in Q$). Ясно, что и в случае $y = x$ будет $f(y) \in \sigma^{-1}\{f(x)\}$. Таким образом, $f(x) \in Q$, так что ввиду произвольности $x \in Q$ справедливо включение $f[Q] \subset Q$.

Пусть V — непустое подмножество в Q. Положим $u = \sup V$. Если $u \in V$, то, понятно, $u \in Q$. Предположим, что $u \notin V$. Тогда $V \subset \sigma_0^{-1}\{u\}$ и

$$P \cap \sigma_0^{-1}\{u\} \subset \bigcup_{x \in V} (\sigma_0^{-1}\{x\} \cap P), \tag{10}$$

так как если $y < u$ $(y \in P)$, то y не является верхней границей множества V, значит, найдется $x \in V$, для которого соотношение $x \leqslant y$ неверно, а тогда вследствие (9) должно быть $y \in \sigma_0^{-1}\{x\}$. Используя (10) и (7), получим

$$f[P \cap \sigma_0^{-1}\{u\}] \subset \bigcup_{x \in V} f[P \cap \sigma_0^{-1}\{x\}] \subset \bigcup_{x \in V} \sigma^{-1}\{x\} \subset \sigma^{-1}\{u\},$$

откуда и следует, что $u \in Q$.

Поскольку $Q = P$, соотношение (8) выполнено для любого $x \in P$. Значит, если $x, y \in P$, то либо $y \in \sigma^{-1}\{x\}$, либо $y \in \sigma\{x\}$, а это и означает, что P — линейно упорядоченное множество. Лемма полностью доказана.

Применение доказанной леммы приводит к следующему результату.

Теорема 1 (3.I). *Каков бы ни был упорядоченный класс X, в X существует максимальный линейно упорядоченный класс A, содержащий данный линейно упорядоченный класс $V_0 \subset X$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех линейно упорядоченных подклассов класса X. В $\mathfrak{X}$ введем отношение порядка по включению и покажем, что полученный таким образом упорядоченный класс обладает максимальным элементом, следующим за V_0. Проверим, что $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям леммы. Пусть непустой класс $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{X}$ линейно упорядочен. Примем $U = \bigcup\limits_{V \in \mathfrak{B}} V$ и покажем, что класс U линейно упорядочен, т. е. что $U \in \mathfrak{X}$. Если x_1, $x_2 \in U$, то найдутся множества V_1, $V_2 \in \mathfrak{B}$ такие, что $x_i \in V_i$ $(i = 1, 2)$. Так как $\mathfrak{B}$ — линейно упорядоченный класс, одно из множеств V_1 или V_2 содержится в другом. Обозначая через V более широкое из этих множеств, получим, что $x_1, x_2 \in V$ и, принимая во внимание, что множество V линейно упорядочено, будем иметь $x_1 \leqslant x_2$ или $x_2 \leqslant x_1$. Поскольку $U \in \mathfrak{X}$; то $U = \sup \mathfrak{B}$. Остается принять в лемме $a = V_0$.

Доказанная теорема позволяет несколько ослабить условия леммы. Упорядоченный класс X с порядком σ будем называть *индуктивным* (*вправо*), если всякий линейно упорядоченный класс $V \subset X$ ограничен сверху.

Теорема 2 (*3.1*). *Если упорядоченный класс X индуктивен вправо, то, каков бы ни был элемент $a \in X$, в X существует максимальный элемент, следующий за a.*

Доказательство. Класс $V_0 = \{a\}$ линейно упорядочен. Поэтому согласно теореме 1 в X существует максимальный линейно упорядоченный класс A_0, содержащий V_0. Согласно условию A_0 ограничен сверху. Пусть u — какая-нибудь верхняя граница A_0. Класс $A = A_0 \cup \{u\}$ так же, как и A_0, линейно упорядочен, а поскольку $A \supset A_0$, ввиду максимальности A должно быть $A = A_0$, так что $u \in A_0$, следовательно, элемент u — наибольший в A_0. Если $x \in X$ и $x \geqslant u$, то x — тоже верхняя граница A_0 и по доказанному $x \in A_0$, следовательно, $x = u$. Таким образом, элемент u — максимальный в X. Остается заметить, что из $a \in A_0$ вытекает $u \geqslant a$.

В дальнейшем теорему 2 будем называть *леммой Цорна*.

Мы не останавливаемся на формулировках двойственных определений и утверждений, относящихся к минимальным элементам.

В заключение отметим, что мы доказали лемму Цорна, основываясь на принципе выбора. Нетрудно показать, что на самом деле эти два утверждения — лемма Цорна и принцип выбора — равносильны.

§ 4. КАТЕГОРИИ

4.1. Будем говорить, что *задана категория* $\mathscr{A}$, если

1) указан класс, обозначаемый через $\mathrm{Ob}\mathscr{A}$, элементы которого называются *объектами категории* $\mathscr{A}$;

2) на $\mathrm{Ob}\mathscr{A} \times \mathrm{Ob}\mathscr{A}$ задано однозначное отношение Mor; образ $\mathrm{Mor}\,((X, Y))$ пары (X, Y) при этом отношении для краткости обозначим через $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$, а элементы его будем называть *морфизмами X в Y*;

3) на $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}\times\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}\times\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ задано однозначное отношение, обладающее следующими свойствами:

а) образ тройки (X, Y, Z) при этом отношении есть однозначное отношение $\mathrm{Mor}\,(X, Y)\times\mathrm{Mor}\,(Y, Z)\to\mathrm{Mor}\,(X, Z)$, называемое *законом композиции* для тройки (X, Y, Z), которое сопоставляет каждым морфизмам $f\in\mathrm{Mor}\,(X, Y)$, $g\in\mathrm{Mor}\,(Y, Z)$ морфизм $h\in\mathrm{Mor}\,(X, Z)$; морфизм h называется *композицией морфизмов* f, g и обозначается через $g\circ f$ (или через gf);

б) для любого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ существует такой морфизм $1_{X,\mathscr{A}}\in\in\mathrm{Mor}\,(X, X)$ [43] (называемый *тождественным в* X), что для любых $Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, $f\in\mathrm{Mor}\,(X, Y)$, $g\in\mathrm{Mor}(Y, X)$ имеют место равенства $f\circ 1_{X,\mathscr{A}}=f$, $1_{X,\mathscr{A}}\circ g=g$;

в) для любых $f\in\mathrm{Mor}\,(X, Y)$, $g\in\mathrm{Mor}\,(Y, Z)$, $h\in\mathrm{Mor}\,(Z, W)$ $(X, Y, Z, W\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A})$ справедливо равенство $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$; это свойство называют *ассоциативностью* закона композиции морфизмов.

Можно показать, что тождественный морфизм каждого объекта данной категории единствен.

В том случае, если достаточно ясно, что принимается в качестве морфизмов данной категории и в качестве закона их композиции, мы будем говорить о категории, называя лишь класс ее объектов.

Объекты категории $\mathscr{A}$ обычно будем обозначать прописными латинскими буквами, а для обозначения морфизма f объекта X в объект Y будем использовать один из следующих символов: $f\in\mathrm{Mor}\,(X, Y)$, $f: X\to Y$, $X\xrightarrow{f}Y$. В случае необходимости вместо символа $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$ будет использован более подробный: $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}\,(X, Y)$.

Пусть $\mathscr{A}$ — категория. Категорию $\mathscr{A}_0$ называют *подкатегорией* категории $\mathscr{A}$, если

1) $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_0\subset\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$;

2) $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}_0}\,(X, Y)\subset\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}\,(X, Y)$ для любых $X, Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_0$;

3) $1_{X,\mathscr{A}_0}=1_{X,\mathscr{A}}$ для каждого $X\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_0$;

4) композиция морфизмов категории $\mathscr{A}_0$ совпадает с композицией этих морфизмов в категории $\mathscr{A}$.

Подкатегория $\mathscr{A}_0$ категории $\mathscr{A}$ называется *полной* подкатегорией $\mathscr{A}$, если $\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}_0}\,(X, Y)=\mathrm{Mor}_{\mathscr{A}}\,(X, Y)$ для любых $X, Y\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}_0$.

Укажем несколько простых примеров категорий. Более содержательные примеры рассредоточены по тексту книги. В рассматриваемых примерах, как и во многих подобных ситуациях

---

[43] Как обычно в подобных ситуациях, индексы в этом обозначении зачастую будут опущены.

в дальнейшем, несложную проверку выполнения всех предъявляемых к категории требований предоставим читателю.

В первую очередь отметим категорию $\mathcal{U}$, у которой Ob$\mathcal{U}$ — класс U всех множеств и для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$ морфизмами служат соответствия из X в Y. Законом композиции морфизмов служит суперпозиция соответствий. Образуем категорию $\mathcal{U}_0$, полагая $\mathrm{Ob}\,\mathcal{U}_0 = \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}$, а в качестве морфизмов объектов X, $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{U}_0$ рассматривая отображения из X в Y. Ясно, что $\mathcal{U}_0$ представляет собой подкатегорию категории $\mathcal{U}$. В дальнейшем, говоря о категории множеств, мы будем иметь в виду категорию $\mathcal{U}_0$. Примером полной подкатегории категории $\mathcal{U}_0$ может служить категория, объектами которой являются все конечные множества, а морфизмами — отображения конечных множеств.

Пусть X — упорядоченный класс с порядком σ. Тогда можно определить категорию, объектами которой являются элементы данного упорядоченного класса, а множество $\mathrm{Mor}\,(x_1, x_2)$ $(x_1, x_2 \in X)$ либо состоит из пары (x_1, x_2), если $(x_1, x_2) \in \sigma$, либо пусто, если $(x_1, x_2) \notin \sigma$.

Примером категории может служить и класс всех упорядоченных множеств, где в качестве морфизмов выступают отображения, сохраняющие порядок (см. 3.2).

Рассмотрим категорию $\mathcal{A}$ и образуем категорию $\mathcal{A}^*$ (предоставим читателю легкую проверку того, что $\mathcal{A}^*$ — категория), называемую *двойственной* (говорят также *дуальной*) к $\mathcal{A}$. Объекты и морфизмы категории $\mathcal{A}^*$ представляют собой соответственно объекты и морфизмы категории $\mathcal{A}$, при этом $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}^*}(X, Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, X)$, а в качестве композиции $g \circ f$ морфизмов f, g в категории $\mathcal{A}^*$ берется композиция $f \circ g$ $(g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}^*}(X, Y)$, $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}^*}(Y, Z))$.

Ковариантным функтором из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$ называют правило, сопоставляющее каждому объекту X категории $\mathcal{A}$ объект $F(\mathcal{A})$ категории $\mathcal{B}$ и каждому морфизму f категории $\mathcal{A}$ морфизм $F(f)$ категории $\mathcal{B}$ таким образом, что выполнены следующие условия:

а) $F(1_X) = 1_{F(X)}$ для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$;

б) если $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, то $F(gf) = F(g)\,F(f)$.

Ковариантный функтор из категории $\mathcal{A}^*$ в категорию $\mathcal{B}^*$ называют *контравариантным функтором* из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Таким образом, F — контравариантный функтор, если для него выполнено условие а) и условие

б') если $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$, то $F(gf) = F(f)\,F(g)$.

4.2. Подобно тому как среди всевозможных отображений были выделены классы инъективных, сюръективных и биективных, можно провести классификацию морфизмов, приводящую в категории множеств к указанной.

Морфизм $f: X \to Y$ категории $\mathscr{A}$ называют *мономорфизмом*, если из равенства $fg = fh$, где $g, h \in \mathrm{Mor}(Z, X)$, $Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, следует равенство $g = h$. Иначе говоря, f — мономорфизм, если на него можно «сокращать слева». Ясно, что свойство морфизма быть мономорфизмом равносильно тому, что отображение множества $\mathrm{Mor}(Z, X)$ в множество $\mathrm{Mor}(Z, Y)$, сопоставляющее элементу $g \in \mathrm{Mor}(Z, X)$ элемент $fg \in \mathrm{Mor}(Z, Y)$, взаимно однозначно для любого объекта Z категории $\mathscr{A}$.

Двойственным понятию мономорфизма служит понятие эпиморфизма. Морфизм $f: X \to Y$ категории $\mathscr{A}$, являющийся мономорфизмом в двойственной к $\mathscr{A}$ категории, называют *эпиморфизмом*. Таким образом, f — эпиморфизм, если из равенства $gf = hf$, где $g, h \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$, следует равенство $g = h$. Ясно, что свойство морфизма $f: X \to Y$ быть эпиморфизмом равносильно тому, что отображение множества $\mathrm{Mor}(Y, Z)$ в множество $\mathrm{Mor}(X, Z)$, сопоставляющее морфизму $h \in \mathrm{Mor}(Y, Z)$ морфизм $hf \in \mathrm{Mor}(X, Z)$, взаимно однозначно для любого объекта Z категории $\mathscr{A}$.

Морфизм, являющийся мономорфизмом и эпиморфизмом одновременно, называется *биморфизмом*.

Морфизм g категории $\mathscr{A}$ называют *левым обратным* к морфизму $f: X \to Y$ категории $\mathscr{A}$, если $gf = 1_X$. Говорят, что морфизм f *обратим слева*, если существует левый обратный к нему морфизм. Двойственным образом определяется правый обратный и обратимый справа морфизмы данной категории. Нетрудно заметить, что обратимый слева (справа) морфизм будет мономорфизмом (эпиморфизмом).

Морфизм называется *изоморфизмом*, если он обратим слева и справа. Легко видеть, что все левые и правые обратные к изоморфизму совпадают. Если для объектов X, Y категории $\mathscr{A}$ можно указать изоморфизм X и Y, такие объекты называют *изоморфными*.

Нетрудно показать, что

I. *Если морфизмы f, g суть мономорфизмы (эпиморфизмы, биморфизмы, обратимые слева, обратимые справа, изоморфизмы), таковым будет и морфизм gf.*

Ясно, что отношение изоморфности (биморфности) в классе $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ является отношением эквивалентности.

II. *Следующие свойства морфизма f эквивалентны:*

а) *f — изоморфизм;*

б) *f — мономорфизм и обратим справа;*

в) *f — эпиморфизм и обратим слева;*

г) *f — биморфизм и обратим слева или справа.*

Заметим, что в условиях б) — г) свойства обратимости морфизма существенны. В частности, не всегда биморфизм будет изоморфизмом. Тем не менее читатель легко убедится в том, что в категории множеств мономорфизмы — это инъективные (т. е. обратимые слева), эпиморфизмы — сюръективные (т. е. обратимые справа), биморфизмы — биективные отображения (т. е. изоморфизмы, см. 2.7).

4.3. Объект X категории $\mathscr{A}$ такой, что для любого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ множество $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$ состоит из одного морфизма, называют *инициальным объектом* категории $\mathscr{A}$; *терминальным объектом* данной категории называют объект, инициальный в двойственной категории. Иначе говоря, объект Y категории $\mathscr{A}$ является терминальным объектом, если для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ множество $\mathrm{Mor}\,(X, Y)$ состоит из одного морфизма.

I. *Все инициальные (терминальные) объекты категории $\mathscr{A}$ изоморфны.*

Действительно, если X_1, X_2 — инициальные объекты категории $\mathscr{A}$ и $f : X_1 \to X_2$, $g : X_2 \to X_1$, то композиция gf ввиду единственности морфизма X_1 в X_1 совпадает с тождественным морфизмом в X_1 аналогично $fg = 1_{X_2}$, так что X_1 и X_2 изоморфны.

Например, в категории множеств $\mathscr{U}$ пустое множество представляет собой как инициальный, так и терминальный объект. В том случае, когда рассматривается подкатегория категории множеств, в которой морфизмами X в Y являются соответствия (или отображения) в Y, область определения которых есть все X, инициальным объектом по-прежнему будет лишь пустое множество, а терминальными — все одноточечные. Если взять в качестве категории упорядоченный класс, то инициальным объектом в такой категории будет наименьший, терминальным — наибольший элементы (если, конечно, они существуют).

Пусть $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — некоторое семейство объектов категории $\mathscr{A}$. Определим категорию $S\{X_\xi\}$, взяв в качестве ее объектов семейства $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, где $f_\xi \in \mathrm{Mor}\,(X_\xi, X)$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$ (иначе говоря, объектами $S\{X_\xi\}$ служат семейства морфизмов категории $\mathscr{A}$ с одной «областью значений»). Морфизмом объекта $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $f_\xi \in \mathrm{Mor}\,(X_\xi, X)$, $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, в объект $\{f'_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $f'_\xi : X_\xi \to X'$, $X' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$, в категории $S\{X_\xi\}$ будем называть такой морфизм $g \in \mathrm{Mor}\,(X, X')$ категории $\mathscr{A}$, что $f'_\xi = gf_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. *Суммой семейства объектов* $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ называют инициальный объект категории $S\{X_\xi\}$. Для обозначения суммы семейства $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ используют обозначение $\sum\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$ или $\sum_{\xi \in \Xi} X_\xi$; для обозначения суммы двух объектов X, Y мы будем использовать знак «$+$» в инфиксной форме записи: $X + Y$.

Иначе определение суммы можно было сформулировать так: сумма семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) объектов категории $\mathscr{A}$ есть такое семейство морфизмов $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), что $f_\xi \in \operatorname{Mor}(X_\xi, X)$ для некоторого $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ и каково бы ни было семейство $\{g_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), $g_\xi \in \operatorname{Mor}(X_\xi, X')$, $X' \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, существует единственный морфизм $g \in \operatorname{Mor}(X, X')$ такой, что $g_\xi = gf_\xi$ ($\xi \in \Xi$).

Если $\mathscr{A}$ — подкатегория категории множеств, то нередко под суммой семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) понимают упорядоченную пару $\left(X, \sum\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi\right)$, где X — тот объект категории $\mathscr{A}$, в который действуют морфизмы семейства $\sum\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$ (объект X неявно входит и в данное выше определение суммы).

Двойственным образом определяется произведение семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) объектов категории $\mathscr{A}$. Рассмотрим категорию $P\{X_\xi\}$, объекты которой — семейства $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Sigma$), где $f_\xi \in \operatorname{Mor}(X, X_\xi)$, $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$ (иначе говоря, объектами $P\{X_\xi\}$ служат семейства морфизмов с одной областью определения). Под морфизмом объекта $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), $f_\xi \in \operatorname{Mor}(X, X_\xi)$, $X \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, в объект $\{f'_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), $f'_\xi \in \operatorname{Mor}(X', X_\xi)$, $X' \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, в категории $P\{X_\xi\}$ понимается такой морфизм $g \in \operatorname{Mor}(X, X')$, что $f_\xi = f'_\xi g$ для всех $\xi \in \Xi$. Терминальный объект категории $P\{X_\xi\}$ называют *произведением* семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) и обозначают через $\prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$ или через $\prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$; для обозначения произведения двух объектов X, Y категории $\mathscr{A}$ будем использовать знак «$\times$» : $X \times Y$.

Иначе можно сказать, что произведение семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — это такое семейство морфизмов $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) категории $\mathscr{A}$, что $f_\xi \in \operatorname{Mor}(X, X_\xi)$ для некоторого $X \in \mathscr{A}$ и каково бы ни было семейство $\{g_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), $g_\xi \in \operatorname{Mor}(X', X_\xi)$, $X' \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, существует единственный морфизм $g \in \operatorname{Mor}(X, X')$ такой, что $g_\xi \in f_\xi g$ для всех $\xi \in \Xi$.

Как и в случае суммы, если $\mathscr{A}$ — подкатегория категории множеств, то под произведением семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) нередко понимают упорядоченную пару $\left(X, \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi\right)$, где X — тот объект категории $\mathscr{A}$, из которого действуют морфизмы семейства $\prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$.

Мы уже установили (см. теорему 4(2.I)), что в категории множеств существует произведение. Нетрудно показать также существование суммы в категории множеств. Ниже будут указаны факты существования суммы и произведения во всех отмечаемых нами категориях.

Рассмотрим семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ объектов категории $\mathscr{A}$. Пусть Σ — подкласс Ξ^2, обладающий свойствами рефлексивности и транзитивности. Семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ объектов и семейство $\{f_\xi^\eta\}$ $((\xi, \eta) \in \Sigma)$ морфизмов категории $\mathscr{A}$, где f_ξ^η: $: X_\xi \to X_\eta ((\xi, \eta) \in \Sigma)$, называется *прямым спектром*, если

а) $f_\xi^\xi = 1_{X_\xi}$ для любого $\xi \in \Xi$;

б) $f_\xi^\zeta = f_\eta^\zeta f_\xi^\eta$, если $(\xi, \eta) \in \Sigma$, $(\eta, \zeta) \in \Sigma$.

Определим категорию $\operatorname{dir}(\{X_\xi\}, \{f_\xi^\eta\})$, взяв в качестве ее объектов семейства морфизмов $\{g_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, где $g_\xi \in \operatorname{Mor}(X_\xi, Z)$, $Z \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$, таких, что $g_\xi = g_\eta f_\xi^\eta$ для любых $(\xi, \eta) \in \Sigma$. Морфизмом объекта $\{g_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $g_\xi \in \operatorname{Mor}(X_\xi, Z)$, $Z \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$, в объект $\{g'_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $g'_\xi \in \operatorname{Mor}(X_\xi, Z')$, $Z' \in \operatorname{Ob}\mathscr{A}$, в этой категории служит морфизм $g \in \operatorname{Mor}(Z, Z')$ такой, что $g'_\xi = g g_\xi$ для всех $\xi \in \Xi$. Инициальный объект категории $\operatorname{dir}(\{X_\xi\}, \{f_\xi^\eta\})$ называют *пределом прямого спектра* $(\{X_\xi\}, \{f_\xi^\eta\})$ и обозначают через $\varinjlim(X_\xi, f_\xi^\eta)$ или через $\varinjlim X_\xi$.

Нередко под пределом прямого спектра понимают упорядоченную пару $(X, \varinjlim(X_\xi, f_\xi^\eta))$, где X — тот объект, в который действует семейство морфизмов $\varinjlim(X_\xi, f_\xi^\eta)$ (он входит неявно и в данное выше определение предела прямого спектра).

Определения прямого спектра, объектов и морфизмов категории dir поясняют следующие диаграммы (в которых $(\xi, \eta) \in \Sigma$, $(\eta, \zeta) \in \Sigma$):

$$
\begin{tikzcd}
X_\xi \arrow[rr, "f_\xi^\zeta"] \arrow[dr, "f_\xi^\eta"'] & & X_\zeta \\
& X_\eta \arrow[ur, "f_\eta^\zeta"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X_\xi \arrow[rr, "f_\xi^\eta"] \arrow[dr, "g_\xi"'] & & X_\eta \arrow[dl, "g_\eta"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "g"] & & Z' \\
& X_\xi \arrow[ul, "g_\xi"] \arrow[ur, "g'_\xi"'] &
\end{tikzcd},
$$

коммутативность которых и приводит к соответствующим понятиям.

Двойственными понятиями прямого спектра и его предела служат понятия обратного спектра и предела обратного спектра. *Обратным спектром* в категории $\mathscr{A}$ называют семейство $\{Y_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ объектов категории $\mathscr{A}$ и семейство $\{h_\xi^\eta\}$ $((\xi, \eta) \in \Sigma \subset \Xi^2)$, где $\{h_\xi^\eta\}: Y_\eta \to Y_\xi$, $(\xi, \eta) \in \Sigma$ (Σ — по-прежнему рефлексивный и транзитивный подкласс Ξ^2), обладающие следующими свойствами:

а) $h_\xi^\xi = 1_{Y_\xi}$, $\xi \in \Xi$;

б) $h_\xi^\zeta = h_\xi^\eta h_\eta^\zeta$ для любых таких $\xi, \eta, \zeta \in \Xi$, что $(\xi, \eta) \in \Sigma$, $(\eta, \zeta) \in \Sigma$.

Определим категорию $\operatorname{inv}(\{Y_\xi\}, \{f_\xi^\eta\})$, принимая в качестве ее объектов семейства $\{g_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ морфизмов $g_\xi \in \operatorname{Mor}(Z, Y_\xi)$, $Z \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, таких, что $g_\xi = f_\xi^\eta g_\eta$ для любых $\xi, \eta \in \Xi$, $(\xi, \eta) \in \Sigma$. В этой категории морфизмом объекта $\{g_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $g_\xi \in \operatorname{Mor}(Z, Y_\xi)$, $Z \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, в объект $\{g'_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, $g'_\xi \in \operatorname{Mor}(Z', Y_\xi)$, $Z' \in \operatorname{Ob} \mathscr{A}$, служит такой морфизм $g \in \operatorname{Mor}(Z, Z')$ категории $\mathscr{A}$, что $g_\xi = g'_\xi g$ при $\xi \in \Xi$. Терминальный объект категории $\operatorname{inv}(\{Y_\xi\}, \{h_\xi^\eta\})$ называют *пределом обратного спектра* $(\{Y_\xi\}, \{h_\xi^\eta\})$ и обозначают через $\varprojlim(Y_\xi, h_\xi^\eta)$, или через $\varprojlim Y_\xi$.

Подобно прямому спектру, нередко под пределом обратного спектра понимают упорядоченную пару $\left(Y, \varprojlim(Y_\xi, h_\xi^\eta)\right)$, где Y — тот объект, из которого действуют все морфизмы предела $\varprojlim(Y_\xi, h_\xi^\eta)$.

Читатель без труда приведет диаграммы, коммутативность которых заложена в основе определений, относящихся к обратному спектру.

§ 5. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Важность понятия вещественного (часто говорят действительного) числа обусловлена тем, что все рассматриваемые в анализе конкретные множества образованы из множества вещественных чисел. С другой стороны, связи, которые имеются между вещественными числами, послужили прообразами для многих рассматриваемых в математике структур.

Мы исходим из того, что существует множество $\mathbf{R}$, элементы которого называются *вещественными* (или *действительными*) *числами* [44], обладающее рядом свойств, перечислению которых и посвящен весь параграф.

5.1. Рассмотрим множество X. Отображение $\omega : X^2 \to X$ будем называть (*внутренней*) *операцией* (или внутренним законом композиции) на множестве X.

Пусть X, Y — множества, на которых заданы операции ω, δ соответственно. Будем говорить, что отображение f множества X в множество Y *согласовано с операциями* ω, δ (или что f сохраняет операции), если $f(\omega(x_1, x_2)) = \delta(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$. В качестве примера отображения, согласованного с любыми операциями, можно указать тождественное отображение I_X множества X.

[44]) При этом множество $\mathbf{R}$ иногда называют *числовой прямой*.

Рассмотрим множества X, Y, Z с операциями ω, δ, η соответственно и отображения f множества X в Y и g — множества Y в Z, каждое из которых согласовано с соответствующими операциями. Тогда

$$g\circ f(\omega(x_1, x_2)) = g(\delta(f(x_1), f(x_2))) = \eta(g(f(x_1)), g(f(x_2)))$$
$$(x_1, x_2 \in X),$$

так что и суперпозиция $g\circ f$ согласована с операциями ω и η.

Отмеченные выше свойства указывают на то, что множества с заданными на них операциями и отображения, согласованные с соответствующими операциями, образуют категорию, если в качестве композиции морфизмов взять их суперпозицию.

Если не предъявлять никаких требований к рассматриваемым операциям, вряд ли можно получать сколько-нибудь содержательные утверждения о множествах с этими операциями и отображениях, с ними согласованных. С другой стороны, некоторые естественные условия приводят к содержательным понятиям, широко используемым в математике.

Пусть X — множество и ω — заданная на нем операция. Говорят, что ω *ассоциативна*, если

$$\omega(\omega(x, y), z) = \omega(x, \omega(y, z)) \ (x, y, z) \in X.$$

Элемент $e \in X$ называют *левым* (*правым*) *нейтральным элементом* (относительно ω), если $\omega(e, x) = x$ (соответственно $\omega(x, e) = x$) для любого $x \in X$. Если e — одновременно левый и правый нейтральный элемент, то e называют *нейтральным* (относительно ω). Если e_1 — левый, а e_2 — правый нейтральные элементы, то $e_1 = \omega(e_1, e_2) = e_2$. В частности, может быть не более одного нейтрального относительно ω элемента. Элемент $y \in X$ называют *левым* (*правым*) *обратным к элементу* $x \in X$, если $\omega(y, x) = e$ ($\omega(x, y) = e$). Если y — одновременно левый и правый обратный элемент к x, то y называют *обратным к* x. Если операция ω ассоциативна и y_l, y_r — соответственно левый и правый обратные к x, то

$$y_l = \omega(y_l, e) = \omega(y_l, \omega(x, y_r)) = \omega(\omega(y_l, x), y_r) =$$
$$= \omega(e, y_r) = y_r.$$

В частности, каждый элемент может иметь не более одного обратного.

Упорядоченную пару (X, ω), где X — множество, а ω — операция на X, называют *группой*, если операция ω ассоциативна, X обладает нейтральным относительно ω элементом и существует обратный к каждому элементу из X. Если множество X рассматривается в связи с имеющейся на нем групповой операцией, говорят, что на X *задана структура группы*. Более того, если достаточно ясно, что принимается в качестве групповой операции, о самом множестве X мы будем говорить как о группе.

Групповую операцию (в зависимости от обстановки) называют зачастую либо *сложением*, либо *умножением* (говорят также «*операция сложения*» либо «*операция умножения*») и о группе говорят в первом случае как о *группе по сложению* (или об *аддитивной* группе), а во втором — как о *группе по умножению* (или *мультипликативной* группе). При этом соответственно значение $\omega(x, y)$ называют либо *суммой* x и y и обозначают через $x + y$, либо *произведением* x и y и обозначают через $x \cdot y$ или через xy. Нейтральный элемент группы по сложению обозначают знаком 0 и называют его *нулем*, для группы по умножению — знаком 1 и называют *единицей*. Обратный элемент в группе по сложению называют *противоположным*.

Если X — группа по сложению, то элемент, противоположный элементу $x \in X$, обозначают через $-x$, а сумму $y + (-x)$, где $y \in X$, через $y - x$ и называют *разностью* элементов y и x. Нетрудно понять, что разность $y - x$ — единственный элемент группы X, обладающий тем свойством, что $x + (y - x) = y$ для любых $x, y \in X$. Если X — группа по умножению, то элемент, обратный элементу $x \in X$, обозначают через x^{-1} или через $\frac{1}{x}$, а произведение $y \cdot x^{-1}$ — через $\frac{y}{x}$ и называют его *частным* y и x.

Условимся о следующих обозначениях. Пусть X — группа, например, по сложению и $A, B \subset X$. Тогда под $A + B$ понимается множество $A + B = \omega[A, B] = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Через $-A$ будет обозначаться множество $\{-x : x \in A\}$. Наконец, $A - B = A + (-B)$. Для краткости будем писать $x + B$ вместо $\{x\} + B$, $x - B$ вместо $\{x\} - B$ и т. д. Аналогичные обозначения будут использованы и для мультипликативной группы.

Пусть (X, ω) — группа, $X_0 \subset X$ и $\omega_0 = \omega|_{X_0^2}$. Если (X_0, ω_0) — группа, ее называют *подгруппой группы* (X, ω). Допуская вольность речи, часто само множество X_0 будем называть подгруппой группы X.

Нетрудно видеть, что множество $X_0 \subset X$ будет подгруппой аддитивной группы X, если

а) $x + y \in X_0$ для любых $x, y \in X_0$;

б) $0 \in X_0$;

в) $-x \in X_0$ для любого $x \in X_0$.

Коротко это можно записать так: $X_0 - X_0 \subset X_0$.

Если X, Y — группы, то отображение $f: X \to Y$, согласованное с групповыми операциями, называют *гомоморфизмом* группы X в группу Y.

Класс всех групп образует категорию групп, морфизмами в которой служат гомоморфизмы, а в качестве закона композиции выступает суперпозиция.

Обсудим элементарные свойства гомоморфизмов группы X в группу Y, считая X группой по сложению, а Y — по умножению (операции в X и Y выбраны для удобства ссылок при изложении материала § 4 из гл. II).

I. *Если φ — гомоморфизм группы X в группу Y, то*

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi(-x) = (\varphi(x))^{-1} \ (x \in X).$$

Действительно, $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$, откуда $\varphi(0) = 1$. Аналогично из соотношений $1 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x)\varphi(-x)$ получаем $\varphi(-x) = (\varphi(x))^{-1}$ для всякого $x \in X$.

Поскольку для элементов $x_1, x_2 \in X$ разность $x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$; то из I вытекает, что

$$\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1)(\varphi(x_2))^{-1} \ (x_1, x_2 \in X).$$

II. *Если φ — гомоморфизм группы X в группу Y, то образ $\varphi[X_0]$ подгруппы X_0 группы X будет подгруппой группы Y.*

В самом деле, $\varphi[X_0] - \varphi[X_0] = \varphi[X_0 - X_0] \subset \varphi[X_0]$.

Аналогично устанавливается

III. *Прообраз $\varphi^{-1}[Y_0]$ подгруппы Y_0 группы Y при гомоморфизме φ является подгруппой группы X.*

Поскольку множество, состоящее из единственного нейтрального элемента группы Y, будет подгруппой этой группы, на основании предложения III прообраз $\varphi^{-1}\{1\}$ — подгруппа группы X. Эта подгруппа называется *ядром гомоморфизма* φ.

В дальнейшем нас будут интересовать исключительно группы с указанным ниже свойством. Группу X с операцией ω называют *коммутативной* (или *абелевой*), если ω обладает свойством *коммутативности*, т. е. если $\omega(x, y) = \omega(y, x)$ для любых $x, y \in X$. Ясно, что класс всех коммутативных групп с их гомоморфизмами составляют подкатегорию категории групп, называемую категорией абелевых групп. Всюду в дальнейшем, говоря о группе, мы будем иметь в виду коммутативную группу!

Допустим, что $(X, +)$ — группа по сложению, а $(X \setminus \{0\}, \cdot)$ — группа по умножению. Если операции сложения и умножения связаны между собой свойством *дистрибутивности*, т. е. если $(x + y)z = xz + yz$ для любых $x, y, z \in X$, тогда тройку $(X, +, \cdot)$ называют *полем*. Как и всегда, в обозначении поля мы обычно будем опускать указание на операции сложения и умножения. Понятно, что в поле X имеем $1 \neq 0$. Нетрудно показать, что для элементов x, y поля X равенство $xy = 0$ равносильно тому, что по крайней мере один из элементов x, y нулевой.

В первую очередь от множества $\mathbf{R}$ потребуем, чтобы оно было полем и обсудим вытекающие из этого требования свойства.

Рассмотрим отображение $s_1 : x \mapsto x + 1$[45] множества $\mathbf{R}$ в себя. Подмножество A множества $\mathbf{R}$ назовем индуктивным, если $1 \in A$ и $s_1[A] \subset A$. Очевидно, что множество $\mathbf{R}$ — индуктивное, так что совокупность индуктивных множеств непуста. Далее, пересечение любой совокупности $\mathfrak{A}$ индуктивных множеств непусто, ибо единица входит во все такие множества. Кроме того, поскольку

$$s_1\Big[\bigcap_{A \in \mathfrak{A}}\Big] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} s_1[A] \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A,$$

множество $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ индуктивно. Ясно, что пересечение совокупности всех индуктивных множеств представляет собой наименьшее индуктивное множество, элементы которого называются *натуральными числами*. Множество всех натуральных чисел обозначается через $\mathbf{N}$, или через $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Таким образом, можно сказать, что множество натуральных чисел — наименьшее из множеств $A \subset \mathbf{R}$, содержащих единицу, и таких, что $A + 1 \subset A$. В частности, если множество $M \subset \mathbf{N}$ индуктивно, то $M = \mathbf{N}$. Это утверждение называют обычно *принципом индукции*.

Отметим несколько применений принципа индукции.

IV. $\mathbf{N} + \mathbf{N} \subset \mathbf{N}$.

В самом деле, положим $M = \{m \in \mathbf{N} : \mathbf{N} + m \subset \mathbf{N}\}$. Из определения множества натуральных чисел следует, что $1 \in M$. Далее, если $m \in M$, то $\mathbf{N} + (m + 1) = (\mathbf{N} + m) + 1 \subset \mathbf{N} + 1 \subset \mathbf{N}$. Таким образом, $m + 1 \in \mathbf{N}$, а тогда в силу принципа индукции $M = \mathbf{N}$.

Образуем множество $\mathbf{Z} = \mathbf{N} - \mathbf{N}$. Его элементы называют *целыми числами*.

V. $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$.

Действительно, $1 \in \mathbf{Z}$ $(1 = (1 + 1) - 1)$ и $\mathbf{Z} + 1 = (\mathbf{N} - \mathbf{N}) + 1 = (\mathbf{N} + 1) - \mathbf{N} \subset \mathbf{N} - \mathbf{N} = \mathbf{Z}$, следовательно, $\mathbf{Z} \supset \mathbf{N}$. Поскольку $-\mathbf{Z} = -\mathbf{N} + \mathbf{N} = \mathbf{Z} \supset \mathbf{N}$, то $\mathbf{Z} \supset -\mathbf{N}$. Наконец, $0 = 1 - 1 \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $z \in \mathbf{Z}$. По определению существуют такие натуральные числа m, n, что $z = n - m$. Предположим сначала, что $m = 1$, и докажем, что в этом случае $z \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Если $n = 1$, то $z = 0 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Пусть для какого-нибудь $n \in \mathbf{N}$ разность $n - 1$ входит в $\mathbf{N} \cup \{0\}$. Тогда $(n + 1) - 1 = n \in \mathbf{N} \subset \mathbf{N} \cup \{0\}$, и справедливость включения $z \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ следует из принципа индукции.

---

[45]) В поле $\mathbf{R}$ нуль будем обозначать знаком 0, единицу — знаком 1.

Основываясь на доказанном, проверим теперь, что соотношение $n-m \in \in \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$ верно для любых $n, m, \in \mathbf{N}$. Для $m = 1$ это уже сделано. Допустим, что указанное соотношение справедливо для некоторого $m \in \mathbf{N}$ и любого $n \in \mathbf{N}$. Тогда если $n - m \in \mathbf{N}$, то по доказанному $n - (m+1) = (n-m) - 1 \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и, наконец, если $n - m \in -\mathbf{N}$, то $n - (m+1) = -[(m-n)+1] \cup -\mathbf{N}$. Таким образом, во всех случаях $n - (m+1) \in \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N}) \cup \{0\}$, и доказательство заканчивается по индукции.

Используя результаты предложений IV, V, нетрудно установить справедливость предложения.

VI. *Множество Z всех целых чисел представляет собой наименьшую из подгрупп группы* $\mathbf{R}$, *содержащих число* 1.

Число $x \in \mathbf{R}$ называется *рациональным*, если существуют такие целые числа $q \neq 0$ и p, что $qx = p$ (т. е. если x есть частное p/q целых чисел p, q). Поскольку при любом $\alpha \neq 0$ справедливо равенство $p/q = \alpha p/\alpha q$, можно считать, что $q \in \mathbf{N}$. Множество всех рациональных чисел с индуцированными в нем из $\mathbf{R}$ операциями сложения и умножения является полем. Используя предложение VI, нетрудно убедиться в том, что это — наименьшее среди полей в $\mathbf{R}$, содержащих число 1.

5.2. Множество $\mathbf{R}$ снабжено структурой порядка.

П1. Существует отношение порядка σ в $\mathbf{R}$ такое, что $(\mathbf{R}, \sigma)$ — линейно упорядоченное множество.

Число x называют *положительным*, если $x \geqslant 0$; если $x \leqslant 0$, то x называют *отрицательным*. Если, кроме того, $x \neq 0$, то о x говорят, что оно *строго положительно* (соответственно *строго отрицательно*)[46]. Совокупность всех положительных (отрицательных) вещественных чисел обозначается через $\mathbf{R}^+$ (соответственно через $\mathbf{R}^-$).

Связь структуры порядка и структуры поля обусловлена следующими двумя аксиомами.

П2. Для любого $z \in \mathbf{R}$ отображение $x \mapsto x + z$ $(x \in \mathbf{R})$ — изоморфизм упорядоченного множества $(\mathbf{R}, \sigma)$ на себя.

Нетрудно понять, что требование, заключенное в аксиоме B2, состоит в том, что для любых x, y, $z \in \mathbf{R}$ неравенства $x \leqslant y$ и $x + z \leqslant y + z$ равносильны. Отсюда очевидным образом следует, что соотношение $x \leqslant y$ равносильно неравенству $y - x \geqslant 0$. Далее, если $x \leqslant y$ и $u \leqslant v$, то $x + u \leqslant y + v$. Так как $-x - 0 = 0 - x$, то неравенства $x \geqslant 0$ и $-x \leqslant 0$ равносильны.

Поскольку изоморфизм упорядоченных множеств сохраняет точные границы, то в силу аксиомы П2 для любых множества $A \subset \mathbf{R}$ и числа $u \in \mathbf{R}$ имеем

[46]) Обратим внимание на то, что нередко строго положительное число называют просто положительным, а о положительном в нашем смысле говорят как о неотрицательном.

I. *Точные верхние (нижние) границы множеств A и $u+A$ могут существовать лишь одновременно, причем в случае существования*

$$\sup(u+A) = u + \sup A,\ \inf(u+A) = u + \inf A. \quad (1)$$

II. *Пусть A_1, A_2 — множества, имеющие точные верхние (нижние) границы. Тогда существует*

$$\sup(A_1+A_2) = \sup A_1 + \sup A_2$$
$$(\inf(A_1+A_2) = \inf A_1 + \inf A_2). \quad (2)$$

В самом деле, $A_1 + A_2 = \bigcup\limits_{U \in A_1} (u + A_2)$, при этом для каждого $u \in A_1$ существует $\sup(u+A_2) = u + \sup A_2$ и, если положить $v_i = \sup A_i$ ($i = 1, 2$), то существует $\sup\{u + v_2 : u \in A_1\} = \sup(A_1 + v_2) = v_1 + v_2$. По свойству ассоциативности точных границ при этих условиях существует

$$\sup(A_1 + A_2) = \sup_{u \in A_1}(\sup(u + A_2)) = v_1 + v_2.$$

Так как $\mathbf{R}$ — линейно упорядоченное множество, при любом $x \in \mathbf{R}$ числа x и $-x$ сравнимы между собой. Наибольшее из этих чисел, $|x| = \sup\{x, -x\}$, называется *абсолютной величиной* числа x. Ясно, что если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, если же $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$. Понятно, что $|x| = |-x|$.

III. *Если $x, y \in \mathbf{R}$, то*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \quad (3)$$

Действительно, поскольку $x \leqslant |x|$, $y \leqslant |y|$, то $x + y \leqslant |x| + |y|$. Заменяя в последнем неравенстве x на $-x$, а y — на $-y$, получим, что $-(x+y) \leqslant |x| + |y|$, следовательно, и $|x + y| = \sup\{(x+y), -(x+y)\} \leqslant |x| + |y|$.

Из неравенства (3) легко выводится неравенство

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y| \quad (x, y \in \mathbf{R}). \quad (4)$$

Вторая из аксиом, устанавливающих связь структуры порядка со структурой поля, состоит в следующем.

П3. Если $x, y \in \mathbf{R}$, причем $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $xy \geqslant 0$.

Из П3 без труда выводится «правило знаков».

IV. *Если $x \geqslant 0$, а $y \leqslant 0$, то $xy \leqslant 0$. Если же $x, y \leqslant 0$, то $xy \geqslant 0$. В частности, $xx \geqslant 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$.*

Так как $1 = 1 \cdot 1$, то $1 \geqslant 0$. Ввиду того, что $1 \neq 0$, имеем $1 > 0$. По индукции отсюда легко получить, что 1 — наименьшее натуральное число. В силу сказанного и предложения

V(5.1) каждое строго положительное целое число является натуральным.

V. *Пусть m и n — такие целые числа, что $n \leqslant m \leqslant n+1$. Тогда либо $m = n$, либо $m = n + 1$.*

В самом деле, из условий имеем $0 \leqslant m - n \leqslant 1$ и, если $m - n \neq 0$, то, как было отмечено, $m - n \in \mathbf{N}$. Но в множестве $\mathbf{N}$ число 1 — наименьшее. Стало быть, $m - n = 1$.

Из V вытекает следующее важное предложение.

VI. *Каждое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.*

Действительно, допустим, что существует непустое множество $M \subset \mathbf{N}$, не обладающее наименьшим элементом. Рассмотрим пересечение $D = \pi^{-1}(M) \cap \mathbf{N}$. Поскольку 1 — наименьшее натуральное число, то $1 \in \pi^{-1}(M)$, а значит, и $1 \in D$. Пусть $n \in D$. Число n не может входить в состав множества M — оно было бы тогда его наименьшим элементом. Следовательно, для любого $m \in M$ должно быть выполнено неравенство $n < m$. Но тогда $n + 1 \leqslant m$, ибо в противном случае $n < m < n + 1$, что противоречит предложению V. Таким образом, $n + 1 \in \pi^{-1}(M)$ и, следовательно, $n + 1 \in D$. Согласно принципу индукции $D = \mathbf{N}$, т. е. $\pi^{-1}(M) \supset \mathbf{N}$. Если m — какой-либо элемент из M, то $m + 1 \in \mathbf{N} \subset \pi^{-1}(M)$. Поэтому $m + 1 \leqslant m$, $1 \leqslant 0$, что неверно.

Упорядоченное множество, каждое непустое множество в котором имеет наименьший элемент, называют *вполне упорядоченным*. В предложении VI установлен, следовательно, тот факт, что множество натуральных чисел представляет собой вполне упорядоченное множество.

Множество всех натуральных чисел, не превосходящих данного натурального числа m, обозначают через $\mathbf{N}_m$, или через $\{1, 2, \ldots, m\}$. Таким образом, $\mathbf{N}_m = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$. Ясно, что m — наибольший элемент множества $\mathbf{N}_m$. Для обозначения множества всех натуральных чисел, лежащих между данными натуральными числами m, n, где $m \leqslant n$, т. е. множества $\{k \in \mathbf{N} : m \leqslant k \leqslant n\}$, используют символ $\{m, \ldots, n\}$.

При доказательстве фактов, относящихся к множествам типа $\mathbf{N}_m$ ($m \in \mathbf{N}$), часто оказывается полезным вытекающий из принципа индукции так называемый принцип *конечной индукции*.

VII. *Пусть M — такое множество натуральных чисел, что*

1) $1 \in M$;

2) *существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что если $k \in M$ и $k < m$, то $k + 1 \in M$.*

Тогда $M \supset \mathbf{N}_m$.

Действительно, обозначим через $\mathbf{N}^m$ множество $\{n \in \mathbf{N} : n > m\}$ и через $\overline{M}$ — множество $M \cup \mathbf{N}^m$. Понятно, что $1 \in \overline{M}$. Далее, если $k \in \overline{M}$, то $k+1 \in \overline{M}$: если $k < m$, то должно быть $k \in M$ и $k+1 \in M \subset \overline{M}$ по условию, если же $k \geqslant m$, тогда $k+1 > m$, так что $k+1 \in \mathbf{N}^m \subset \overline{M}$. По принципу индукции получаем, что $\overline{M} = \mathbf{N}$, следовательно, $M \supset \mathbf{N} \setminus \mathbf{N}^m = \mathbf{N}_m$.

Теорема 1(5.1). *Пусть имеется множество X и последовательность $\{\varphi_n\}$ отображений из X в X такая, что $D(\varphi_{n+1}) \supset R(\varphi_n)$ для каждого $n \in \mathbf{N}$. Тогда если $x \in D(\varphi_1)$, то существует единственная последовательность $\{x_n\}$ элементов множества X такая, что*

$$x_1 = x,\ x_n \in D(\varphi_n),\ x_{n+1} = \varphi_n(x_n)\ (n \in \mathbf{N}). \tag{5}$$

Доказательство. Единственность последовательности $\{x_n\}$ без труда устанавливается по индукции: если $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ — последовательности, удовлетворяющие (5), то $x'_1 = x''_1 = x$, и если для какого-то $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство $x'_n = x''_n$, то $x'_{n+1} = \varphi_n(x'_n) = \varphi_n(x''_n) = x''_{n+1}$.

Докажем существование требуемой последовательности.

Пусть m — положительное целое число. Понятно, что $m \in \mathbf{N}_m$ при любом $m > 0$; при этих же m, в силу предложения V, имеем $\mathbf{N}_m = \mathbf{N}_{m-1} \cup \{m\}$. В частности, так как $\mathbf{N}_0 = \varnothing$, то $\mathbf{N}_1 = \{1\}$.

Рассмотрим множество M всех натуральных чисел m, обладающих тем свойством, что существует отображение $f^{(m)}: k \mapsto x_k^{(m)}$ множества $\mathbf{N}_m$ в X такое, что

$$\begin{aligned} &x_1^{(m)} = x,\ x_k^{(m)} = f^{(m)}(k) \in D(\varphi_k) \quad (k \in \mathbf{N}_m), \\ &x_{k+1}^{(m)} = \varphi_k\left(x_k^{(m)}\right) \quad (k \in \mathbf{N}_{m-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что $1 \in M$, так что отображение $f^{(1)} = \{(1, x)\}$ обладает требуемыми свойствами. Предположим, что $m \in M$. Так как $x_m^{(m)} \in D(\varphi_m)$, существует элемент $x_{m+1}^{(m+1)} = \varphi_m\left(x_m^{(m)}\right)$, причем $x_{m+1}^{(m+1)} \in R(\varphi_m) \subset D(\varphi_{m+1})$. Поэтому, полагая

$$f^{(m+1)} = f^{(m)} \cup \left\{\left(m+1,\ x_{m+1}^{(m+1)}\right)\right\}, \tag{7}$$

без труда убедимся, что $f^{(m+1)}$ удовлетворяет (6), так что $m+1 \in M$. Отсюда по индукции заключаем, что $M = \mathbf{N}$, т. е. что отображение $f^{(m)}$ существует для любого $m \in \mathbf{N}$.

Для каждого данного $m \in \mathbf{N}$ отображение $f^{(m)}$ единственно. Действительно, если $g: \mathbf{N}_m \to X$ — отображение, удовлетворяющее, как и $f^{(m)}$, условиям (6), то в случае $f^{(m)} \neq g$ в силу предложения VI существует наименьшее число $i \in \mathbf{N}_m$, для которого $x_i^{(m)} = f^{(m)}(i) \neq g(i)$. Ясно, что $i > 1$ и, следовательно, $i - 1 \in \mathbf{N}_m$. Поскольку $f^{(m)}(i-1) = g(i-1)$, то по (6) имеем

$$x_i^{(m)} = \varphi_{i-1}\left(x_{i-1}^{(m)}\right) = \varphi_{i-1}\left(f^{(m)}(i-1)\right) = \varphi_{i-1}\left(g(i-1)\right) = g(i),$$

что противоречит определению i.

Из единственности $f^{(m)}$ на основании (7) следует, что $f^{(m+1)} \supset f^{(m)}$ при любом $m \in \mathbf{N}$. В частности, $x_m^{(m)} = f^{(m)}(m) = f^{(m+1)}(m) = x_m^{(m+1)}$.

Для $n \in \mathbf{N}$ положим теперь $x_n = x_n^{(n)}$. В силу (6)

$$x_1 = x_1^{(1)} = x, \quad x_n = x_n^{(n)} \in D(\varphi_n),$$

$$x_{n+1} = x_{n+1}^{(n+1)} = \varphi_n\left(x_n^{(n+1)}\right) = \varphi_n\left(x_n^{(n)}\right) = \varphi_n(x_n).$$

Теорема полностью доказана.

Теорему 1 будем называть *принципом построения по индукции*. Если говорить коротко, смысл этой теоремы состоит в том, что для задания последовательности $\{x_n\}$ достаточно указать ее первый элемент x_1 $(= x)$ и «правила перехода» от элемента x_n к элементу x_{n+1} — отображения φ_n.

Обычно применение принципа построения по индукции оформляется так: «зададим $x_1 = x$; предположим, что для некоторого натурального числа n уже определен элемент $x_n \in D(\varphi_n)$; положим $x_{n+1} = \varphi_n(x_n)$; этим определяется последовательность $\{x_n\}$».

Пусть a — вещественное число. Полагая для каждого $n = 1, 2, \ldots$ в теореме 1 $\varphi_n : x \mapsto ax$ $(x \in \mathbf{R})$ и $x = a$, образуем такую последовательность $\{x_n\}$, что

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = ax_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Число x_n $(n \in \mathbf{N})$ называется *n-й степенью* данного числа a и обозначается через a^n. В частности, $a^1 = a$, $a^2 = aa$ и т. д. Очевидно, $0^n = 0$, $1^n = 1$ при любом $n \in \mathbf{N}$. По индукции нетрудно доказать

VIII. *Если m и n — натуральные числа и a — вещественное число, то*

$$a^{m+n} = a^m a^n. \tag{9}$$

IX. *Если a, b — вещественные числа и n — натуральное число, то*

$$(ab)^n = a^n b^n. \tag{10}$$

Если $b \neq 0$, то $(a/b)^n = a^n/b^n$.

X. *Пусть a и b — положительные вещественные числа и n — натуральное число. Если $a < b$, то $a^n < b^n$.*

XI. *Пусть ε — вещественное число, заключенное между 0 и 1, а n — натуральное число. Тогда*

$$(1+\varepsilon)^n \leqslant 1 + (2^n - 1)\varepsilon, \quad (1-\varepsilon)^n \geqslant 1 - n\varepsilon. \tag{11}$$

Степень a^n числа $a \in \mathbf{R}$ в случае, когда показатель n — целое отрицательное число и $a \neq 0$, определяется соотношением $a^n = 1/a^{-n}$ $(n < 0)$ и $a^0 = 1$. Мы не останавливаемся здесь на доказательстве того, что формула (9) справедлива и тогда, когда m, n — произвольные целые числа (разумеется, в необходимых случаях при условии $a \neq 0$).

5.3. Перечисленные аксиомы не обеспечивают весьма важного свойства — «полноты» множества вещественных чисел. Такого рода свойство заключено в следующей *аксиоме полноты*, называемой также *аксиомой Дедекинда*.

Д. Всякое непустое ограниченное сверху множество в $\mathbf{R}$ имеет точную верхнюю границу.

Принимая во внимание предложение III(3.3), из аксиомы Д можно заключить о том, что каждое непустое ограниченное снизу множество в $\mathbf{R}$ имеет точную нижнюю границу.

Непосредственно из аксиомы Дедекинда следует также

I. *Если $A \subset \mathbf{R}$ — непустое ограниченное множество, то существует наименьший замкнутый содержащий его промежуток Δ, причем $\Delta = [a, b]$, где $a = \inf \Delta$, $b = \sup \Delta$.*

Используя аксиому Дедекинда, нетрудно установить, как «распределено» множество всех натуральных чисел в множестве $\mathbf{R}$.

II. *Множество $\mathbf{N}$ не ограничено сверху в $\mathbf{R}$.*

Действительно, допустим, что $\pi(\mathbf{N}) \neq \varnothing$. Тогда существует $\sup \mathbf{N} = b$. Поскольку $\mathbf{N} + 1 \subset \mathbf{N}$, то множество $\mathbf{N} + 1$ также ограничено и существует $\sup(\mathbf{N} + 1) \leqslant b$. С другой стороны, так как $n + 1 \geqslant n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то $\sup \mathbf{N} \leqslant \sup(\mathbf{N} + 1)$, следовательно, $\sup(\mathbf{N} + 1) = b$. Итак, $\sup \mathbf{N} = \sup(\mathbf{N} + 1) = \sup \mathbf{N} + 1$, откуда должно быть $0 = 1$, что невозможно.

Нетрудно понять, что если ε — строго положительное число, то множество вещественных чисел вида $n\varepsilon$ $(n \in \mathbf{N})$ так же, как и само $\mathbf{N}$, не ограничено сверху: если $x \in \mathbf{R}$, то, найдя натуральное $n \geqslant x/\varepsilon$, очевидно, будем иметь $n\varepsilon \geqslant x$. Перефразировкой этого замечания является следующее предложение

III. *Каковы бы ни были числа* $\varepsilon > 0$ *и* a, *найдется такое натуральное число* m, *что* $a/m < \varepsilon$.

Отметим, что если $a \geqslant 0$, то $\inf \{a/n : n \in \mathbf{N}\} = 0$, поскольку если $a/n \geqslant b$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то согласно III должно быть $b \leqslant 0$.

Полезным следствием аксиомы Дедекинда является следующий факт.

Теорема 2(5.I). *Пусть* a *— положительное вещественное число, а* n *— натуральное число. Существует единственное положительное вещественное число* v, *удовлетворяющее соотношению* $v^n = a$.

Доказательство. Единственность числа v вытекает из предложения X(4.2). Докажем его существование. Пусть $E = \{x \in \mathbf{R} : x \geqslant 0,\ \ x^n \leqslant a\}$. Множество E непусто, ибо $0 \in E$, и ограничено сверху: если $a \leqslant 1$, то в силу предложения X(5.2) $1 \in \pi(E)$, если же $a > 1$, то $a \in \pi(E)$, поскольку при этом $a^n \geqslant a$. Положим $v = \sup E$ и убедимся в том, что $v^n = a$. Допустим, например, что $v^n > a$. Так как $v > 0$, найдется настолько большое натуральное число k, что $kv \geqslant 1$ и $k \geqslant nv^{n-1}/(v^n - a)$. На основании второго из соотношений (11)

$$(v - 1/k)^n = v^n(1 - 1/kv)^n \geqslant v^n(1 - n/kv) = a + (v^n - \\ - a) - nv^{n-1}/k > a.$$

Следовательно, $x^n \leqslant a \leqslant (v - 1/k)^n$ для каждого $x \in E$, так что $x \leqslant (v - 1/k)$. Таким образом, $(v - 1/k) \in \pi(E)$, что невозможно, поскольку $(v - 1/k) < v$. Этим показано, что $v^n \leqslant a$.

Предположим, что $v = 0$. Если при этом было бы $a > 0$, то, выбрав натуральное число k так, чтобы $1/k \leqslant a$, мы могли бы написать $(1/k)^n = (1/k)(1/k)^{n-1} \leqslant 1/k \leqslant a$, т. е. оказалось бы, что $1/k \in E$, между тем равенство $v = 0$ означает, что множество E состоит только из одного элемента — числа 0. В случае $v > 0$ и $v^n < a$ можно было бы, использовав первое из соотношений (11), а в остальном рассуждая так же, как и в начале доказательства, найти такое натуральное число k, что оказалось бы $(v + 1/k)^n \leqslant a$, т. е. что $(v + 1/k) \in E$ и, следовательно, что $v + 1/k \leqslant \sup E = v$.

Число v, существование и единственность которого установлены в теореме 2, называется *корнем* n*-й степени* из числа a и обозначается через $\sqrt[n]{a}$, или через $a^{1/n}$.

Теорема 3(5.1). Если x, $y \in \mathbf{R}$, причем $x < y$, то существует рациональное число r, содержащееся в открытом промежутке (x, y).

Доказательство. Принимая в предложении III $a = 1$, $\varepsilon = y - x$, найдем $q \in \mathbf{N}$, так, чтобы $1/q < y - x$.

Пусть k — какое-либо целое число, не превосходящее x. Рассмотрим множество $M = \{n \in \mathbf{N} : n/q > (x - k)\}$. Так как $1/q > 0$, из сказанного ранее вытекает, что $M \neq \varnothing$. Согласно предложению VI(5.2) множество M имеет наименьший элемент, который обозначим через m. Поскольку $m \in M$, имеем $(m/q + k) > x$. Если, кроме того, $m - 1 \in \mathbf{N}$, то $m - 1 \notin M$, поэтому $((m - 1)/q + k) \leqslant x$. Это неравенство ввиду выбора k сохраняет силу и при $m = 1$, т. е. верно, каково бы ни было m. Учитывая выбор q, имеем $m/q + k = (m - 1)/q + k + 1/q < x + (y - x) = y$, и остается заметить, что число $r = m/q + k$ — рациональное.

Следствие. Пусть a, $b \in \mathbf{R}$. Если $a < b$, то промежуток Δ, у которого b служит правым концом, а a — левым, не пуст, причем $a = \inf \Delta$, $b = \sup \Delta$.

5.4. Рассмотрим обозначаемое в дальнейшем через $\overline{\mathbf{R}}$ дедекиндовское расширение множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел и отождествим $\mathbf{R}$ с изоморфным ему подмножеством в $\overline{\mathbf{R}}$, т. е. будем считать, что $\mathbf{R} \subset \overline{\mathbf{R}}$ (см. 3.5). Наибольший элемент множества $\overline{\mathbf{R}}$ называют *плюс бесконечностью* и обозначают через $+\infty$, наименьший — *минус бесконечностью* $(-\infty)$. Если $x \in \overline{\mathbf{R}}$ и $-\infty < x < +\infty$, то, используя аксиому Дедекинда, можно легко показать, что такой элемент x входит в $\mathbf{R}$. Таким образом, множество $\overline{\mathbf{R}}$ отлично от $\mathbf{R}$ лишь двумя элементами — плюс и минус бесконечностью. Элементы множества $\overline{\mathbf{R}}$ будем называть также *вещественными числами*. В случае необходимости об элементах из $\mathbf{R}$ будем говорить как о *конечных* вещественных числах, а о $+\infty$, $-\infty$ — как о *несобственных*.

Отметим, что множество $\overline{\mathbf{R}}$ представляет собой дедекиндовское расширение и множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел. На этом факте основано впервые проведенное Дедекиндом конструктивное построение множества вещественных чисел исходя из множества рациональных чисел.

Каждый промежуток Δ в произвольном упорядоченном множестве обладает тем свойством, что если x, $y \in \Delta$ и $x \leqslant y$, то $[x, y] \subset \Delta$. Для множества $\overline{\mathbf{R}}$ (но не $\mathbf{R}$) справедливо и обратное утверждение.

I. *Пусть множество $\Delta \subset \overline{\mathbf{R}}$ обладает тем свойством, что если x, $y \in \Delta$, $x \leqslant y$, то $[x, y] \subset \Delta$. Тогда существуют числа*

a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ такие, что $a \leqslant b$ и

$$(a, b) \subset \Delta \subset [a, b], \tag{12}$$

т. е. Δ является промежутком с концами a и b.

В самом деле, если $\Delta = \varnothing$, то можно принять за a любое число и положить $b = a$. Пусть $\Delta \neq \varnothing$. Положим $a = \inf \Delta$, $b = \sup \Delta$. Очевидно, что $a \leqslant b$ и $\Delta \subset [a, b]$. Возьмем какой-либо элемент $z \in (a, b)$. Так как $z > a$, то z не является нижней границей множества Δ, и поэтому найдется элемент $x \in \Delta$ такой, что $x < z$. Аналогично можно убедиться в том, что существует такой $y \in \Delta$, что $z < y$. По условию $[x, y] \subset \Delta$, а так как $z \in (x, y) \subset [x, y]$, то и $z \in \Delta$. Следовательно, $(a, b) \subset \Delta$.

Коротко скажем о распространении алгебраических операций на множество $\overline{\mathbf{R}}$. По определению для $x \in \mathbf{R}$ полагаем $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$, $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$, $x - (\pm\infty) = \mp\infty$. Далее, $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$. Символы $(+\infty) + (-\infty)$ и $(-\infty) + (+\infty)$ не осмысливаются. Нетрудно понять, что множество $\overline{\mathbf{R}}$, снабженное так определенной операцией сложения, уже не образует группы, хотя во многих вопросах принятые соглашения оказываются удобными. Относительно умножения полагаем: если $x \in \overline{\mathbf{R}}$ и $x > 0$, то $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty$, если $x < 0$, то $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty$. Символы $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, $x/0$ $(x \in \overline{\mathbf{R}})$ не осмысливаются.

5.5. В произведении $\mathbf{R}^2$ можно определить структуру поля, причем так, что если естественным образом отождествить множества $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R} \times \{0\}$, то индуцированная в $\mathbf{R}$ из $\mathbf{R}^2$ структура совпадает с заданной на $\mathbf{R}$.

Пусть $z_k \in \mathbf{R}^2$ $(z_k = (x_k, y_k)$, x_k, $y_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2)$. По определению положим

$$z_1 + z_2 \equiv (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1). \tag{13}$$

Легко проверить, что такое определение сложения и умножения наводит в $\mathbf{R}^2$ структуру поля (см. 5.1). Не останавливаясь на подробной проверке этого утверждения, отметим лишь, что роль нейтрального элемента группы $\mathbf{R}^2$ (по сложению) играет пара $(0, 0)$, временно обозначаемая символом $\mathbf{0}$; разностью $z_1 - z_2$ служит пара $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. Единицей поля, т. е. нейтральным элементом мультипликативной группы

$\mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, является пара (1, 0), которую мы тоже временно обозначим через $\mathbf{1}$. Если $z_2 \neq 0$, то частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Обычно, когда множество $\mathbf{R}^2$ рассматривается вместе с определенной выше структурой поля, оно обозначается символом $\mathbf{C}$, а его элементы называются *комплексными числами* (при этом само $\mathbf{C}$ иногда называют *комплексной плоскостью*).

Рассмотрим в $\mathbf{C}$ подмножество $R = \mathbf{R} \times \{0\}$. Естественно возникающее отображение $\varphi : (x, 0) \mapsto x$ $(x \in \mathbf{R})$ множества R на $\mathbf{R}$ взаимно однозначно и, что особенно важно, согласовано со структурой поля, т. е.

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2),$$
$$\varphi(z_1z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2) \quad (z_1, z_2 \in R).$$

Таким образом, можно сказать, что φ представляет собой изоморфизм поля R и поля $\mathbf{R}$. Поскольку в данной ситуации фиксируется изоморфизм φ, мы будем считать изоморфные объекты R и $\mathbf{R}$ тождественными (см. 3.1), так что поле $\mathbf{R}$ окажется содержащимся в поле $\mathbf{C}$ и будет представлять собой подполе $\mathbf{C}$.

Осуществив указанное отождествление, т. е. условившись вместо $(x, 0)$ $(x \in \mathbf{P})$ писать просто x, в частности вместо $\mathbf{0}$ писать 0 и вместо $\mathbf{1}$ писать 1, каждое комплексное число $z = (x, y)$ представим в форме $z = x + yi$, где через i обозначена пара (0, 1), причем согласно (13) $i^2 = -1$ [47]. Вещественное число x называется *вещественной частью*, а число y (тоже вещественное) — *мнимой частью* комплексного числа $z = x + yi$. При этом пишут $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Комплексное число $\bar{z} = x - yi$ $(x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z)$ называется *сопряженным* по отношению к числу $z = x + yi$. Очевидно, что

$$(z + \bar{z})/2 = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}, \quad (z - \bar{z})/2i = \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}.$$

Произведение $z\bar{z} = x^2 + y^2$ $(z = x + yi)$ представляет собой вещественное положительное число. Поэтому существует число $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, которое называется *модулем* числа z. Если $z \in \mathbf{R}$, т. е. если $y = \operatorname{Im} z = 0$, то модуль $|z| = \sqrt{x^2}$ совпадает с определенной ранее абсолютной величиной вещественного

[47]) Равенство $z = x + yi$ в подробной записи выглядит так: $z = (x, 0) + (0, y)\cdot(0, 1)$.

числа $z = x$, в связи с чем часто и для абсолютной величины вещественного числа используется термин «модуль».

На комплексные числа распространяется и предложение III(5.2).

I. *Каковы бы ни были комплексные числа* z_1 и z_2, *справедливо неравенство*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \tag{14}$$

называемое неравенством треугольника.

В самом деле, поскольку левая и правая части (в 14) положительны, это неравенство справедливо тогда и только тогда, когда $|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$, т. е. если положить $z_k = x_k + y_k i$ $(i = 1, 2)$, когда

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + \\ + 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \tag{15}$$

В свою очередь (15) равносильно следующему соотношению:

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}. \tag{16}$$

Так как, очевидно,

$$(x_1x_2 + y_1y_2)^2 = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 = \\ = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leqslant (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$$

и

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant |x_1x_2 + y_1y_2| = \sqrt{(x_1x_2 + y_1y_2)^2},$$

то, следовательно, верно (16), а значит, (15) и (14).

Как и в вещественном случае, из (14) может быть выведено неравенство

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|. \tag{17}$$

Наконец, отметим, что

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|. \tag{18}$$

В самом деле, $|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})}$. Но легко проверить, основываясь на правилах (13), что $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$. Поэтому

$$|z_1z_2| = \sqrt{(z_1z_2)(\overline{z_1z_2})} = \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)} = \sqrt{z_1\bar{z}_1}\sqrt{z_2\bar{z}_2} = \\ = |z_1|\,|z_2|.$$

Точно так же, как это было сделано в вещественном случае, можно определить степень любого комплексного числа (см. 5.2). При этом останутся выполненными соотношения (9) и (10), если в них в качестве a рассматривать отличное от нуля комплексное число.

§ 6. КОНЕЧНЫЕ И СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

В этом параграфе мы коснемся идеи сравнения множеств по «числу» их элементов. При этом мы будем сравнивать «число» элементов данного множества с «числом» элементов некоторых множеств-эталонов, таких, например, как $\mathbf{N}_m$ ($m \in \mathbf{N}$), или $\mathbf{N}$.

6.1. Напомним (см. 2.6), что множества A и B называются *равномощными*, или *эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение φ множества A на B.

Если в определении равномощности на время отказаться от взаимной однозначности отображения φ, то, выбирая из соответствия φ^{-1} селектор, приходим к следующему простому результату.

I. *Если φ — отображение множества A на множество B, то B эквивалентно некоторому подмножеству множества A.*

Если множество A обладает тем свойством, что существует целое положительное число m такое, что $A \sim \mathbf{N}_m$, где $\mathbf{N}_m = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leqslant k \leqslant m\}$, то множество A называют *конечным*, а m — *числом его элементов*. В противном случае об A говорят, что оно *бесконечно*. Множество A, эквивалентное множеству $\mathbf{N}$, называют *счетным*. Термином «не более чем счетное множество» обозначают всякое множество, которое или конечно, или счетно.

Отметим следующий очевидный факт: если множества A и B эквивалентны и одно из них конечно (или счетно), то и другое будет конечным (или счетным).

Поскольку множество $\mathbf{N}_0 = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leqslant k \leqslant 0\}$ пусто, то пустое множество имеет 0 элементов. Множество $\{x\}$, состоящее из одного элемента x, эквивалентно $\mathbf{N}_1 = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leqslant k \leqslant 1\}$. Аналогично, состоящее из двух элементов множество $\{x, y\}$ эквивалентно $\mathbf{N}_2 = \{k \in \mathbf{N} : 1 \leqslant k \leqslant 2\}$ и т. д.

Непосредственно из определения не вытекает, что число элементов данного конечного множества определяется этим множеством однозначно. В связи с этим приобретает значение

Лемма. *Пусть k и m — положительные целые числа. Если $\mathbf{N}_k \sim \mathbf{N}_m$, то $k = m$.*

Проводимое по индукции доказательство этой леммы, так же как и доказательства многих других утверждений этого параграфа, мы оставим читателю в качестве упражнений.

Если множество A эквивалентно множеству $\mathbf{N}_k$ и множеству $\mathbf{N}_m$, то $\mathbf{N}_k = \mathbf{N}_m$, следовательно, по лемме $k = m$. Таким образом, каждое конечное множество A имеет единственное число элементов, которое будем обозначать через $\mu(A)$. Ясно, что из эквивалентности конечных множеств A и B вытекает $\mu(A) = \mu(B)$ и обратно, если $\mu(A) = \mu(B)$, то $A \sim B$.

Другим важным следствием леммы является

Теорема 1(6.I). *Если A — конечное множество, а множество $B \subset A$, то B также конечно, причем $\mu(B) \leqslant \mu(A)$.*

Пусть m, n — целые положительные числа. Отображение $f: k \mapsto k + m$ $(k \in \mathbf{N}_n)$ взаимно однозначно отображает множество $\mathbf{N}_n$ на множество $\mathbf{N}_{m+n} \setminus \mathbf{N}_m$ всех натуральных чисел $\nu \in [m+1, m+n]$. Отсюда с помощью теоремы 1 получаем

II. *Если A и B — конечные множества, то объединение $A \cup B$ также конечно, причем*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \tag{1}$$

Предложение II позволяет дополнить результат теоремы 1.

III. *Если в условиях теоремы 1 $\mu(A) = \mu(B)$, то $B = A$.*

Теорема 2(6.I). *Если A — конечное множество, то множество $\mathfrak{P}(A)$ всех его подмножеств также конечно, причем*

$$\mu(\mathfrak{P}(A)) = 2^{\mu(A)}.$$

IV. *Если множества A и B конечны, то конечно и их произведение, причем $\mu(A \times B) = \mu(A)\mu(B)$.*

6.2. Если множество A таково, что существует множество $B \subset A$, отличное от A, но ему эквивалентное, то A бесконечно (см. III(6.1)). Отсюда следует, что $\mathbf{N}$, а значит, и всякое другое счетное множество, бесконечно, так как отображение $\varphi: n \mapsto 2n$ $(n \in \mathbf{N})$ взаимно однозначно отображает $\mathbf{N}$ на не совпадающее с $\mathbf{N}$ множество всех четных чисел.

Следующая теорема показывает, что счетные множества по «количеству» элементов — наименьшие бесконечные множества.

Теорема 3(5.I). *Если A — счетное множество, а $B \subset A$, то B не более чем счетно.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $A = \mathbf{N}$. Предположим, что B бесконечно. Если $k \in \mathbf{N}$, то множество $B \setminus \mathbf{N}_k$ непусто. Обозначим через m_k наименьший элемент множества $B \setminus \mathbf{N}_k$, и пусть $\psi: k \mapsto m_k$ $(k \in \mathbf{N})$. Применяя теорему о построении по индукции, найдем последовательность $f: \{x_n\}$ натуральных чисел такую, что

$$x_1 = x; \; x_{n+1} = \psi(x_n) \quad (n \in \mathbf{N}), \tag{2}$$

где через x обозначен наименьший элемент множества B. Ясно, что $x_n \in B$ $(n \in \mathbf{N})$. Таким образом, последовательность f является отображением множества $\mathbf{N}$ в B. Докажем, что f взаимно однозначно и $R(f) = B$. Из определения φ вытекает, что $\varphi(k) \notin \mathbf{N}_k$, т. е. что $\varphi(k) > k$, так что $x_{n+1} > x_n$. По индукции отсюда без труда получается, что f — строго возрастающее отображение и, следовательно, взаимно однозначно.

Предположим, что $R(f) \neq B$. Возьмем элемент $\bar{x} \in B \setminus R(f)$. Очевидно, $\bar{x} > x_1$. Если $n \in \mathbf{N}$ таково, что $\bar{x} > x_n$, то $\bar{x} \in B \setminus \mathbf{N}_{x_n}$. Следовательно, $\bar{x} \geqslant \varphi(x_n) = x_{n+1}$. Однако, так как $\bar{x} \notin R(f)$, не может быть $\bar{x} = x_{n+1}$. Значит, $\bar{x} > x_{n+1}$. По индукции заключаем, что $\bar{x} > x_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Также по индукции выводим, что $x_n \geqslant n$ $(n \in \mathbf{N})$. Таким образом, $\bar{x} \geqslant n$ для любого $n \in \mathbf{N}$, что противоречит результату предложения II (5.3).

Следствие. *Если A — счетное множество и φ — отображение множества A на множество B, то B не более чем счетно.*

I. *Пусть A и B — счетные множества. Тогда и произведение $A \times B$ — счетное множество.*

В самом деле, достаточно доказать, что будет счетным множество $\mathbf{N}^2$, т. е. достаточно рассмотреть случай, когда $A = B = \mathbf{N}$. Пусть $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Положим $n = 2^{(p-1)}(2q-1)$ и определим на $\mathbf{N}^2$ отображение $\Phi : (p, q) \mapsto n$. Покажем, что Φ взаимно однозначно. Действительно, если $2^{p_1-1}(2q_1 - 1) = 2^{p_2-1}(2q_2 - 1)$ и $p_1 \neq p_2$, то, считая для определенности $p_1 < p_2$, будем иметь $2^{p_2-p_1-1}(2q_2 - 1) = q_1 - 1/2$. В левой части этого равенства — целое число, а так как $q_1 - 1 < q_1 - 1/2 < q_1$, то $q_1 - 1/2$ — не целое. Следовательно, $p_1 = p_2$. А тогда без труда получаем, что и $q_1 = q_2$.

Множество $R(\Phi)$ по теореме 3 не более чем счетно, так что и $\mathbf{N}^2 = D(\Phi) \sim R(\Phi)$ не более чем счетно. Поскольку $\mathbf{N}^2$, очевидно, бесконечно, то оно счетно.

Теорема 4(6.1). *Пусть дано семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств с не более чем счетным множеством индексов Ξ. Тогда если при каждом $\xi \in \Xi$ множество A_ξ не более чем счетно, то объединение $A = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} A_\xi$ не более чем счетно.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему лишь в случае, когда $\Xi = \mathbf{N}$, — остальные к нему легко сводятся. Возьмем какое-либо $\xi \in \mathbf{N}$. Так как множество A_ξ не более чем счетно, т. е. эквивалентно $\mathbf{N}$ или его подмножеству вида $\mathbf{N}_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$, существует взаимно однозначное отображение φ_ξ множества A_ξ в $\mathbf{N}$. Обозначим через Q множество всех таких пар $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, что $q \in R(\varphi_p)$. Множество Q, будучи подмножеством счетного множества $\mathbf{N}^2$, по теореме 3 не более чем счетно. Если $(p, q) \in Q$, то, полагая $\varphi(p, q) = \varphi_p^{-1}(q)$, построим отображение φ множества Q в A. На самом деле, однако, $R(\varphi) = A$, так как если $a \in A$, то существует такое $\xi \in \mathbf{N}$, что $a \in A_\xi$ и $a = \varphi(p, q)$, где $p = \xi$, а $q = \varphi_\xi(a)$. Согласно следствию из теоремы 3 множество A не более чем счетно, что и требовалось доказать.

С помощью доказанной теоремы нетрудно вывести, что множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел счетно. Далее, так как всякое рациональное число определяется парой чисел (p, q), где $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$, а произведение $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ согласно I счетно, то и множество всех рациональных чисел — область значений отображения $\varphi : (p, q) \mapsto p/q$ $(p, q \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N})$ счетно.

6.3. Подобно конечным множествам, можно сравнивать по «числу» их элементов и бесконечные множества.

I. *Каковы бы ни были множества A и B, в одном из них имеется часть, эквивалентная другому.*

Основанное на лемме Цорна доказательство мы оставим читателю.

Среди конечных множеств, как очевидно, нет «универсального» — имеющего наибольшее по сравнению с каждым другим число элементов. Такая же ситуация имеет место и для бесконечных множеств.

II. *Каково бы ни было множество A, множество $\mathfrak{P}(A)$ не эквивалентно никакой его части.*

В самом деле, допустим, что имеется множество $A_0 \subset A$, эквивалентное множеству $\mathfrak{P}(A)$. Обозначим через φ взаимно однозначное отображение A_0 на $\mathfrak{P}(A)$. Положим $X = \{a \in A_0 : a \notin \varphi(a)\}$. Ясно, что $X \in \mathfrak{P}(A)$. Рассмотрим элемент $x = \varphi^{-1}(X)$. Понятно, что $x \in A_0$, причем $\varphi(x) = X$. Не может быть $x \in X$: по определению X это означало бы, что $x \notin \varphi(x) = X$. Но и гипотеза $x \notin X = \varphi(x)$ приводит, очевидно, к противоречию.

Можно доказать, хотя необходимый для этого аппарат будет развит лишь в следующей главе, что $\mathbf{R} \sim \mathfrak{P}(\mathbf{N})$. Отсюда, разумеется, вытекает, что $\mathbf{R}$ — несчетное множество. Мы дадим, однако, независимое от II доказательство этого факта.

Теорема 5(6.I). Множество всех вещественных чисел несчетно.

Доказательство. Предположим, что существует взаимно однозначное отображение f множества $\mathbf{N}$ на $\mathbf{R}$. Обозначим $f(n)$ через x_n $(n \in \mathbf{N})$.

Рассмотрим какой-либо замкнутый промежуток $\Delta = [a, b]$ $(a, b \in \mathbf{R},\ a < b)$. Положим $c = a + (b - a)/3$, $d = c + (b - a)/3 = a + 2(b - a)/3$, и пусть n — данное натуральное число. Полагая $\Delta^1 = [a, c]$, $\Delta^2 = [c, d]$, $\Delta^3 = [d, b]$, будем иметь $\Delta^1 \cap \Delta^2 \cap \Delta^3 = \varnothing$, так что по крайней мере для одного $i = 1, 2, 3$ будет $x_n \notin \Delta^i$. Через Δ' обозначим тот из промежутков Δ^i, который удовлетворяет этому соотношению и имеет наименьшее i. Если под X понимать множество всех промежутков Δ указанного вида, то, сопоставляя промежутку $\Delta \in X$ промежуток Δ', определим на X отображение φ_n. Ясно, что $\varphi_n(\Delta) \in X$, $\varphi_n(\Delta) \subset \Delta$ и $x_n \notin \varphi_n(\Delta)$.

В силу теоремы о построении по индукции существует последовательность $\{\Delta_n\}$ замкнутых промежутков — элементов множества X — такая, что $\Delta_1 = [0, 1]$, $\Delta_{n+1} = \varphi_n(\Delta_n)$ $(n \in \mathbf{N})$. Поскольку $\Delta_{n+1} = \varphi_n(\Delta_n) \subset \Delta_n$, то, полагая $\Delta_n = [a_n, b_n]$, получим, что последовательность $\{a_n\}$ — возрастающая и ограничена сверху любым элементом b_m $(m \in \mathbf{N})$. Аналогично $\{b_n\}$ — убывающая и ограничена снизу любым элементом a_m $(m \in \mathbf{N})$. Следовательно, существуют точные границы $a = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$, $b = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}} b_n$, причем $a \leqslant b$. Замкнутый промежуток $[a, b]$ непуст и, очевидно, $[a, b] \subset [a_n, b_n]$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Если $x \in [a, b]$, то, так как $x \in \mathbf{R} = R(f)$, существует натуральное число k такое, что $x = f(k) = x_k$. Из определения φ_k между тем следует, что $x = x_k \notin \varphi_k(\Delta_k) = [a_{k+1}, b_{k+1}]$, а это противоречит выбору элемента x.

6.4. В определении группы (по сложению) говорится о возможности находить сумму двух элементов группы. Используя принцип индукции, можно сконструировать сумму любого конечного семейства элементов данной группы.

Пусть X — (коммутативная) группа по сложению.

Теорема 6(6.I). Каково бы ни было конечное[48]) *семейство* $\{x_\xi\}(\xi \in \Xi)$ *элементов группы* X, *существует единственное отображение* S *множества* $\mathfrak{P}(\Xi)$ *в* X, *обладающее свойствами:*

а) $S(\{\xi\}) = x_\xi$ *для любого* $\xi \in \Xi$;

б) $S(\Theta_1 \cup \Theta_2) = S(\Theta_1) + S(\Theta_2)$ *для любых непересекающихся* $\Theta_1, \Theta_2 \subset \Xi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{P}_k(\Xi) = \{\Theta \subset \Xi : \mu(\Theta) \leqslant k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Тогда такое отображение S_0 на $\mathfrak{P}_0(\Xi)$, что $S_0(\varnothing) = 0$, обладает, очевидно, свойствами, аналогичными свойствам а), б).

Пусть n — число элементов множества Ξ. Предположим, что для некоторого $m \in \mathbf{Z}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, на множестве $\mathfrak{P}_m(\Xi)$ определено отображение S_m, обладающее свойствами, подобными свойствам а), б), и установлено, что такое отображение един-

48) Так будем называть семейство, множество индексов которого конечно.

ственно. Если $m = n$, то $\mathfrak{P}_m(\Xi) = \mathfrak{P}(\Xi)$ и S_m — искомое. Допустим, что $m < n$ и $\Theta \in \mathfrak{P}_{m+1}(\Xi)$. Поскольку для любых $\xi, \eta \in \Theta$, $\xi \neq \eta$, выполнено соотношение

$$x_\xi + S_m(\Theta \setminus \{\xi\}) = x_\xi + (x_\eta + S_m(\Theta \setminus \{\xi, \eta\})) =$$
$$= x_\eta + (x_\xi + S_m(\Theta \setminus \{\xi, \eta\})) = x_\eta + S_m(\Theta \setminus \{\eta\}),$$

сумма $x_\xi + S_m(\Theta \setminus \{\xi\})$ не зависит от выбора элемента $\xi \in \Theta$. Определим на $\mathfrak{P}_{m+1}(\Xi)$ отображение S_{m+1}, полагая $S_{m+1}(\varnothing) = 0$ и $S_{m+1}(\Theta) = x_\xi + S_m(\Theta \setminus \{\xi\})$ (где $\xi \in \Theta$), если $\Theta \neq \varnothing$. По индуктивному предположению S_m обладает аналогичными а), б), свойствами, следовательно, для $\Theta \in \mathfrak{P}_m(\Xi)$, выбрав какое-либо $\xi \in \Theta$, получим

$$S_{m+1}(\Theta) = x_\xi + S_m(\Theta \setminus \{\xi\}) = S_m(\{\xi\}) + S_m(\Theta \setminus \{\xi\}) = S_m(\Theta).$$

Покажем, что отображение S_{m+1} удовлетворяет подобным а), б) условиям. Первое из этих условий, очевидно, выполнено. Пусть $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathfrak{P}_{m+1}(\Xi)$, $\Theta_1 \cap \Theta_2 = \varnothing$, $\Theta_1 \cup \Theta_2 = \Theta$. Если одно из множеств Θ_1, Θ_2 пусто, то второе из условий тривиально выполнено. Пусть Θ_1, Θ_2 непусты. Поскольку тогда Θ_1, $\Theta_2 \in \mathfrak{P}_m(\Xi)$, то

$$S_{m+1}(\Theta_1 \cup \Theta_2) = x_\xi + S_m(\Theta_1 \cup (\Theta_2 \setminus \{\xi\})) = x_\xi + S_m(\Theta_1) +$$
$$+ S_m(\Theta_2 \setminus \{\xi\}) = S_m(\Theta_1) + x_\xi + S_m(\Theta_2 \setminus \{\xi\}) =$$
$$= S_{m+1}(\Theta_1) + S_{m+1}(\Theta_2),$$

где $\xi \in \Theta_2$.

Единственность S_{m+1} ясна из определения.

Согласно принципу конечной индукции, существует единственное отображение, удовлетворяющее всем условиям теоремы.

Значение $S(\Xi)$ отображения S называют *суммой семейства* $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и обозначают через $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$, или через $\sum_{\xi \in \Xi} x_\xi$. Если $\Xi = \{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \in \mathbf{N})$, для обозначения суммы семейства $\{x_k\}$ $(k \in \mathbf{N}_m)$ используют символ $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k$, или $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k$, или $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ и употребляют аналогичные символы в других подобных ситуациях.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим конечное множество $\mathrm{H} \supset \Xi$ и такое семейство $\psi : \{y_\eta\}$ $(\eta \in \mathrm{H})$, сужение которого на множество Ξ совпадает с данным семейством $\varphi : \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Пусть S_H, S_Ξ — отображения, построенные в теореме 6 по семействам ψ, φ соответственно. Сужение отображения S_H на $\mathfrak{P}(\Xi)$ удовлетворяет, очевидно, всем условиям доказанной теоремы, так что вследствие единственности отображения S_Ξ должно быть $S_\Xi(\Theta) = S_H(\Theta)$ для любого $\Theta \subset \Xi$. В частности, можно сказать, что сумма $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$ зависит только от данного семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. В случае, когда все элементы семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ совпадают и равны x, сумму такого семейства обозначают через nx, где $n = \mu(\Xi)$.

Обсуждение свойств суммы начнем с так называемого свойства *коммутативности*, доказательство которого без труда проводится по индукции.

I. *Пусть множества* Ξ, H *таковы, что существует взаимно однозначное отображение* φ *множества* Ξ *на множество* H; *рассмотрим семейство* $\{x_\eta\}$ $(\eta \in H)$ *элементов группы* X. *Образуем семейство* $\{x_{\varphi(\xi)}\}$ $(\xi \in \Xi)$. *Тогда* $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_{\varphi(\xi)} = \sum\limits_{\eta \in H} x_\eta$.

Следующее свойство называют *ассоциативностью* суммы.

II. *Рассмотрим конечное семейство* $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *элементов группы* X *и такое конечное семейство* $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ *подмножеств множества* Ξ, *что* $\Xi_{\lambda'} \cap \Xi_{\lambda''} = \varnothing$ *при* $\lambda' \neq \lambda''$ *и* $\Xi = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \Xi_\lambda$. *Тогда*

$$\sum_{\xi \in \Xi} x_\xi = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi\Big). \tag{3}$$

Действительно, если $\Lambda = \varnothing$, тогда и $\Xi = \varnothing$, так что результат предложения тривиально выполнен. Допустим, что для некоторого целого положительного числа m равенство (3) имеет место при любом таком семействе $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, которое удовлетворяет условиям теоремы и, кроме того, $\mu(\Lambda) \leqslant m$. Рассмотрим семейство $\{\Xi_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, удовлетворяющее условиям теоремы, и такое, что $\mu(\Lambda) = m + 1$. Так как $m + 1 > 0$, то $\Lambda \neq \varnothing$. Возьмем $\lambda_0 \in \Lambda$. Поскольку $\mu(\Lambda \setminus \{\lambda_0\}) \leqslant m$, то

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \Big(\sum_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi\Big) = \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}} \Big(\sum_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi\Big) + \sum_{\lambda \in \Xi_{\lambda_0}} x_\xi =$$
$$= \sum_{\xi \in \Xi \setminus \Xi_{\lambda_0}} x_\xi + \sum_{\xi \in \Xi_{\lambda_0}} x_\xi = \sum_{\xi \in \Xi} x_\xi.$$

Доказательство заканчивается по индукции.

Предположим, что $\Xi = \Lambda \times M$, где Λ и M — конечные множества, и рассмотрим семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Lambda \times M)$ элементов группы X. Полагая $\Xi_\lambda = \{\lambda\} \times M$ $(\lambda \in \Lambda)$, получим, очевидно, такое семейство подмножеств Ξ, которое удовлетворяет условиям предложения II. Пусть $\lambda \in \Lambda$. Тогда в силу предложения I $\sum\limits_{\xi \in \Xi_\lambda} x_\xi = \sum\limits_{\mu \in M} x_{\lambda\mu}$. Согласно ассоциативности суммы семейства, имеет место равенство

$$\sum_{(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M} x_{\lambda\mu} = \sum_{\mu \in M} \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} x_{\lambda\mu}\Big).$$

Аналогично

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{\mu\in\mathrm{M}} x_{\lambda\mu}\right),$$

так что

$$\sum_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times\mathrm{M}} x_{\lambda\mu} = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{\mu\in\mathrm{M}} x_{\lambda\mu}\right) = \sum_{\mu\in\mathrm{M}}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} x_{\lambda\mu}\right).$$

Сумма семейства обладает свойством *аддитивности.*

III. *Пусть* $\{x'_\xi\}$, $\{x''_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *конечные семейства элементов группы* X. *Тогда*

$$\sum_{\xi\in\Xi}(x'_\xi + x''_\xi) = \sum_{\xi\in\Xi} x'_\xi + \sum_{\xi\in\Xi} x''_\xi.$$

Остановимся на обсуждении свойств суммы числового семейства. Поскольку $\mathbf{C}$ — группа по сложению, нами определено понятие суммы конечного семейства (комплексных) чисел. Отметим, что доказанная теорема не охватывает расширенной числовой прямой. Однако, если конечное семейство элементов из $\overline{\mathbf{R}}$ не содержит бесконечных элементов разных знаков, можно доказать теорему, аналогичную теореме 6, т. е. и в этом случае определить сумму такого семейства элементов из $\overline{\mathbf{R}}$. Поскольку мы считаем множество $\mathbf{R}$ содержащимся как в $\overline{\mathbf{R}}$, так и в $\mathbf{C}$, необходимо отметить, что сумма конечного семейства элементов из $\mathbf{R}$ не будет зависеть от точки зрения, с которой на эту сумму смотрят.

Первое из отмечаемых нами свойств суммы числового семейства называют свойством *дистрибутивности.*

IV. *Пусть* $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *конечное семейство комплексных чисел, и* $\alpha\in\mathbf{C}$. *Тогда* $\alpha\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = \sum_{\xi\in\Xi}\alpha x_\xi$.

Можно установить и дистрибутивность суммы конечного семейства элементов из $\overline{\mathbf{R}}$, внося в формулировку предложения IV коррективы, вызванные определением суммы такого семейства и ограничениями на операцию умножения в $\overline{\mathbf{R}}$.

Указанное ранее обозначение суммы семейства, составленного из одинаковых элементов группы, обретает реальное содержание для числовых семейств.

V. *Если все элементы конечного числового семейства* $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ *совпадают и равны* x, *то* $\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi = nx$, *где* $n=\mu(\Xi)$.

VI. *Пусть* $\{x_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ — *конечное семейство комплексных чисел. Тогда*

$$\left|\sum_{\xi\in\Xi} x_\xi\right| \leqslant \sum_{\xi\in\Xi}|x_\xi|. \qquad (4)$$

Результат предложения VI имеет место и для конечного семейства элементов из $\overline{\mathbf{R}}$, у которого сумма $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$ существует.

VII. *Пусть* $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *такое семейство вещественных чисел, что* $x_\xi \geqslant 0$ *для всех* $\xi \in \Xi$. *Тогда существует* $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi \geqslant 0$.

VIII. *Если* $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *семейство положительных вещественных чисел и* $\Xi' \subset \Xi$, *то* $\sum\limits_{\xi \in \Xi'} x_\xi \leqslant \sum\limits_{\lambda \in \Xi} x_\xi$.

IX. *Если* $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *такое семейство положительных вещественных чисел, что* $\sum\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi = 0$, *то и* $x_\xi = 0$ *при всех* $\xi \in \Xi$.

Если X — коммутативная группа с умножением в качестве групповой операции, тогда значение на множестве Ξ отображения, удовлетворяющего условиям, подобным условиям теоремы 6, называется *произведением* семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и обозначается через $\prod\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$, или через $\prod\limits_{\xi \in \Xi} x_\xi$. В различных частных случаях используют обозначения, аналогичные введенным для суммы. В случае, когда все элементы семейства совпадают и равны x, произведение обозначают символом x^n, где $n = \mu(\Xi)$.

Так как $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа, тем самым определено произведение конечного семейства ненулевых комплексных чисел. Полагая произведение равным нулю, если среди элементов данного семейства есть нулевой, приходим к произведению любого семейства комплексных чисел.

Мы не будем останавливаться на определении произведения конечного семейства элементов из $\overline{\mathbf{R}}$, а также на формулировках свойств произведения — в случае необходимости читатель легко их приведет.

§ 7. ФИЛЬТРЫ В УПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ

Обратимся к обсуждению вопросов, связанных с направленными множествами. Такие множества играют заметную роль в анализе, ибо с ними связано одно из основных понятий анализа — понятие предела.

Поскольку понятия и результаты этого параграфа потребуются нам лишь для упорядоченных м н о ж е с т в, мы ограничимся здесь именно этими рамками. Конечно, можно рассматривать фильтры и в упорядоченном классе.

7. 1. Пока речь пойдет об определении и простейших следствиях из них, мы не будем делать об упорядоченном множестве X каких-либо специальных предположений. Как обычно, порядок в X обозначается через σ.

О множестве $A \subset X$ говорят, что оно *фильтруется по убыванию*, если любое конечное множество $K \subset A$ ограничено снизу в A, т. е. если пересечение $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap A$ непусто. Множество, фильтрующееся по убыванию относительно порядка σ^{-1}, называется *фильтрующимся по возрастанию* (в данном отношении порядка σ). Если множество A непусто, то в данном выше определении под K можно подразумевать двухэлементные множества: множество $A \subset X$ фильтруется по убыванию, если $A \neq \varnothing$ и для любых элементов $x, y \in A$ в A найдется элемент z, меньший каждого из элементов x и y.

Пусть, кроме множества X, имеется еще одно упорядоченное множество Y (с порядком ρ).

I. *Если f — возрастающее отображение множества X в множество Y и $A \subset X$ — фильтрующееся по убыванию множество, то образ $B = f[A]$ фильтруется по убыванию.*

Действительно, пусть L — конечное подмножество множества B. Очевидно, существует такое конечное множество $K \subset A$, что $L = f[K]$. Поскольку f возрастает, то $\pi_\sigma^{-1}(K) \subset f^{-1}[\pi_\rho^{-1}(L)]$, так что $\pi_\rho^{-1}(L) \supset f[\pi_\sigma^{-1}(K)]$. Следовательно, $\pi_\rho^{-1}(L) \cap B \supset$ $\supset f[\pi_\sigma^{-1}(K)] \cap f[A] \supset f[\pi_\sigma^{-1}(K) \cap A]$, откуда вытекает, что $\pi_\rho^{-1}(L) \cap B \neq \varnothing$.

Фильтрующееся по убыванию множество $\varphi \subset X$ называется (убывающим) *фильтром* в X, если $\sigma[\varphi] \subset \varphi$, т. е. если φ вместе с каждым своим элементом содержит и все большие его. Фильтр в множестве X, снабженном обратным порядком, называется *возрастающим фильтром* в X. Таким образом, возрастающий фильтр ψ — это фильтрующееся по возрастанию множество, удовлетворяющее условию $\sigma^{-1}[\psi] \subset \psi$. В дальнейшем будут рассматриваться исключительно убывающие фильтры, поэтому будем говорить о них просто как о фильтрах.

II. *Пусть $A \subset X$. Множество $\varphi = \sigma[A]$ представляет собой фильтр в том и только в том случае, если множество A фильтруется по убыванию.*

Действительно, если φ — фильтр и K — конечное подмножество множества A, то, поскольку $K \subset A \subset \sigma[A] = \varphi$, пересечение $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi$ непусто. Если $z \in \pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi$, то в A найдется такой элемент x, что $z \in \sigma\{x\} = [x, \rightarrow]$, т. е. такой, что $x \leqslant z$. Но тогда, очевидно, $x \in \pi_\sigma^{-1}(K)$, так что $x \in \pi_\sigma^{-1}(K) \cap A$.

Предположим теперь, что A фильтруется по убыванию. Возьмем конечное множество $K \subset \varphi$. Очевидно, можно построить такое конечное множество $L \subset A$, что $K \subset \sigma[L]$. Но тогда

$$\pi_\sigma^{-1}(K) \supset \pi_\sigma^{-1}(\sigma[L]) = \bigcap_{x \in L} \pi_\sigma^{-1}(\sigma\{x\}) = \bigcap_{x \in L} \pi_\sigma^{-1}\{x\} = \pi_\sigma^{-1}(L)$$

и, следовательно, $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi \supset \pi_\sigma^{-1}(L) \cap A \neq \varnothing$. Поскольку

$\sigma\circ\sigma \subset \sigma$, то $\sigma[\varphi] = \sigma[\sigma[A]] \subset \sigma[A] = \varphi$. Таким образом, φ — фильтр.

Множество $A \subset X$, связанное с фильтром φ соотношением $\varphi = \sigma[A]$, называется *базисом фильтра* φ. О фильтре φ говорят в этом случае, что он *порожден* фильтрующимся по убыванию множеством A. В достаточно ясных ситуациях фильтр, порожденный фильтрующимся множеством A, будем обозначать через $\widetilde{A}$.

Множество $\mathscr{F}(X)$ всех фильтров в данном упорядоченном множестве X будет в дальнейшем снабжено индуцированным из совокупности $\mathfrak{P}(X)$ всех подмножеств множества X отношением порядка по включению. Для обозначения сравнимых фильтров будем использовать те же знаки, что и для множества $\mathfrak{P}(X)$, и если при этом $\varphi \subset \psi$, то будем говорить, что фильтр ψ *тоньше* фильтра φ или что фильтр φ *грубее* фильтра ψ.

Пусть A, B — фильтрующиеся по убыванию множества в X. Если $\widetilde{A} \supset \widetilde{B}$, то говорят, что множество A *коинициально* множеству B. Это означает, что для любого элемента $y \in B$ можно найти в A элемент x, меньший, чем y. В самом деле, соотношение $y \in B \subset \sigma[B] \subset \sigma[A]$ равносильно существованию такого $x \in A$, что $y \in \sigma\{x\}$. Обратно, если выполнено условие и $z \in \sigma[B]$, то, находя $y \in B$, а по нему, в соответствии с условием $x \in A$ так, что $z \in \sigma\{y\}$, $x \leqslant y$, имеем $z \in \sigma\{y\} \subset \sigma\{x\} \subset \sigma[A]$. Следовательно, $\widetilde{A} = \sigma[A] \supset \sigma[B] = \widetilde{B}$.

Если множества A и B фильтруются по возрастанию и A коинициально B в смысле обратного отношения порядка, то говорят, что A *конфинально* B в данном отношении порядка.

Непосредственно из определений следует

III. *Фильтрующиеся по убыванию множества A и B служат базисом одного и того же фильтра в том и только в том случае, если каждое из этих множеств коинициально другому.*

IV. *Если множество $\mathfrak{A} \subset \mathscr{F}(X)$ фильтруется по возрастанию, то оно имеет точную верхнюю границу, при этом*

$$\sup \mathfrak{A} = \bigcup_{\varphi\in\mathfrak{A}} \varphi. \tag{1}$$

Действительно, положим $\psi = \bigcup\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}} \varphi$. Докажем, что множество ψ фильтруется по убыванию. Пусть K — конечное подмножество множества ψ. Очевидно, найдется такое конечное множество $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, что $K \subset \bigcup\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}_0} \varphi$. Так как $\mathfrak{A}_0$ ограничено сверху в $\mathfrak{A}$, то существует фильтр $\varphi_0 \in \mathfrak{A}$, который тоньше каждого фильтра $\varphi \in \mathfrak{A}_0$, так что $\varphi_0 \supset \bigcup\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}_0} \varphi \supset K$. Множество K ограничено снизу в φ_0 и тем более в ψ. Так как $\sigma[\psi] = \bigcup\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}} \sigma[\varphi] = \bigcup\limits_{\varphi\in\mathfrak{A}} \varphi = \psi$, то ψ — фильтр в X. Согласно предложению I (3.4) $\psi = \sup \mathfrak{A}$.

Поскольку каждое непустое линейно упорядоченное множество фильтруется по возрастанию (и по убыванию), множество $\mathscr{F}(X)$ в силу предложения IV удовлетворяет условиям леммы Цорна, так что, каков бы ни был фильтр φ_0 в X, существует максимальный фильтр, более тонкий, чем φ_0.

Если само множество X фильтруется по убыванию (так будет, в частности, если X имеет наименьший элемент), то оно является, очевидно, фильтром и притом наибольшим элементом множества $\mathscr{F}(X)$. Фильтры, отличные от всего X, будем называть *собственными*.

V. *Если множество X имеет наименьший элемент* $\mathbf{0}$, *то, каков бы ни был собственный фильтр* φ_0, *в множестве* $\mathscr{F}_0(X)$ *всех собственных фильтров в X существует максимальный фильтр, более тонкий, чем* φ_0.

Для доказательства заметим, прежде всего, что если $\mathbf{0}$ входит в фильтр φ, то $X = \sigma[\mathbf{0}] \subset \sigma[\varphi] \subset \varphi$, т. е. $\varphi = X$. Поэтому, если $\mathfrak{C}$ — непустое линейно упорядоченное множество в множестве $\mathscr{F}_0(X)$ и $\psi = \sup \mathfrak{C}$, то в силу (1) $\mathbf{0} \notin \mathfrak{C}$, так что $\psi \in \mathscr{F}_0(X)$. Тем самым множество $\mathscr{F}_0(X)$ удовлетворяет условию леммы Цорна, применение которой и приводит к требуемому результату.

Максимальный элемент множества $\mathscr{F}_0(X)$ называется *ультрафильтром*.

VI. *Если множество $\mathfrak{A}$ собственных фильтров в X фильтруется по возрастанию и ограничено сверху собственным фильтром, то оно имеет точную верхнюю границу в множестве* $\mathscr{F}_0(X)$.

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях предложения объединение $\bigcup_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi$ отлично от X, и воспользоваться предложениями IV и I (3.4).

7.2. Дальнейшие свойства множества $\mathscr{F}(X)$ всех фильтров в X мы выскажем, предполагая определенную квалификацию отношения порядка в X. Для этого понадобятся некоторые понятия, имеющие также и самостоятельный интерес.

Упорядоченное множество, каждое непустое конечное множество в котором имеет точную верхнюю границу, называется *верхней решеткой*. Если множество (X, σ^{-1}) — верхняя решетка, то (X, σ) называют *нижней решеткой*. Если X — верхняя и нижняя решетка одновременно, такое множество называют *решеткой*[49]. Точная верхняя (нижняя) граница конечного множества $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ обозначается обычно через $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ $(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$. По индукции нетрудно по-

[49]) Иногда в такой ситуации используют термин „структура“, хотя его следует рассматривать как устаревший.

казать, что если для любых элементов x, $y \in X$ существует $x \vee y$, то X — верхняя решетка.

Ясно, что полное упорядоченное множество — всегда решетка (и в дальнейшем, ради краткости, такое множество будем называть *полной решеткой*). Аналогичного нельзя уже сказать об условно полных упорядоченных множествах, поскольку среди конечных множеств могут быть и неограниченные. Условно полное упорядоченное множество, являющееся одновременно решеткой, называют *условно полной решеткой.*

Сформулируем теперь требования к множеству X. На протяжении этого пункта будем предполагать, что X — нижняя решетка, имеющая наименьший элемент $\mathbf{0}$ и наибольший — $\mathbf{1}$. Отметим сразу, что при этом в определении фильтра можно требовать не только ограниченности снизу (в данном фильтре) любого конечного подмножества, но и принадлежности фильтру точной нижней границы такого множества. Точнее, если φ — фильтр в X и K — конечное подмножество множества φ, то, обозначая через z какой-нибудь элемент пересечения $\pi_\sigma^{-1}(K) \cap \varphi$, можем написать $\inf K \in \sigma\{z\} \subset \sigma[\varphi] \subset \varphi$.

Сделанное замечание позволяет дополнить результат предложения I (7.1).

I. *Пусть f — отображение множества X на некоторое множество Y. Если Y снабжено порядком ρ так, что отображение f сохраняет точные нижние границы конечных множеств, то прообраз $\varphi = f^{-1}[\psi]$ фильтра ψ в Y является фильтром в X.*

В самом деле, пусть K — конечное подмножество множества φ, $u = \inf K$, $L = f[K]$. Так как f сохраняет точные нижние границы конечных множеств, существует точная нижняя граница множества L, причем $v = \inf L = f(\inf K) = f(u)$. Поскольку $L \subset \psi$, то $v \in \psi$, а тогда $u \in f^{-1}[\psi] = \varphi$, так что φ фильтруется по убыванию. Принимая во внимание, что f возрастает, можем написать

$$\sigma[\varphi] \subset (f^{-1}\circ\rho\circ f\circ f^{-1})[\psi] = f^{-1}[\rho[\psi]] \subset f^{-1}[\psi] = \varphi.$$

Рассмотрим множество $A \subset X$. Пусть Ξ — совокупность всех его конечных подмножеств. Для $\xi \in \Xi$ положим $u_\xi = \inf \xi$ и обозначим через $\tilde{A}$ совокупность всех элементов вида u_ξ с $\xi \in \Xi$. Множество $\tilde{A}$ фильтруется по убыванию: на основании ассоциативности точных границ $u_{\xi'} \wedge u_{\xi''} = u_{\xi' \cup \xi''}$ (ξ', $\xi'' \in \Xi$). Поскольку $u_{\{x\}} = x$ ($x \in A$), то $A \subset \tilde{A}$.

II. *Точные нижние границы множеств A и $\tilde{A}$ существуют или нет одновременно и равны в случае существования. Фильтр $\sigma[\tilde{A}]$ является самым грубым из фильтров, содержащих множество A.*

Действительно, поскольку $A = \bigcup_{\xi \in \Xi} \xi$, то

$$\pi_\sigma^{-1}(A) = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi_\sigma^{-1}\{\xi\} = \bigcap_{\xi \in \Xi} \pi_\sigma^{-1}\{u_\xi\} = \pi_\sigma^{-1}(\tilde{A}),$$

откуда и следует справедливость утверждения о точных нижних границах. Так как $\tilde{A}$ фильтруется по убыванию, то $\sigma[\tilde{A}]$ — фильтр, содержащий множество $\tilde{A}$ и, значит, множество A. Если φ — какой-нибудь фильтр, содержащий множество A, то, очевидно, должно быть также $\varphi \supset \tilde{A}$ и, следовательно, $\varphi \supset \sigma[\varphi] \supset \sigma[A]$.

О фильтре $\sigma[\tilde{A}]$ говорят, что он *порожден множеством* A, и обозначают его, как правило, через $\widetilde{A}$. Если A само фильтруется по убыванию, то, очевидно, $\sigma[A] = \sigma[\tilde{A}]$, и на этом основании мы сохранили терминологию и обозначения.

III. *Упорядоченное множество $\mathscr{F}(X)$ всех фильтров в X представляет собой полную решетку.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A} \subset \mathscr{F}(X)$. Рассмотрим пересечение $\psi = \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi$ и докажем, что $\psi \in \mathscr{F}(X)$. Пусть K — конечное подмножество множества ψ. Так как $K \subset \varphi$ для каждого $\varphi \in \mathfrak{A}$, то $\inf K \in \varphi$. Следовательно, $\inf K \in \psi$. Так как $\sigma[\psi] \subset \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{A}} \sigma[\varphi] \subset \subset \bigcap_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi = \psi$, то ψ — фильтр в X. На основании предложения I (3.4) $\psi = \inf \mathfrak{A}$ в $\mathscr{F}(X)$.

Выясним смысл точной верхней границы в множестве $\mathscr{F}(X)$. Рассмотрим множество $\mathfrak{A} \subset \mathscr{F}(X)$. Понятно, что поляра $\pi(\mathfrak{A})$ состоит из всех фильтров, содержащих множество $A = \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi$, поэтому в силу предложения II фильтр $\widetilde{A}$, порожденный этим множеством, будет наименьшим элементом поляры $\pi(\mathfrak{A})$, т. е. $\widetilde{A} = \sup \mathfrak{A}$.

Убедимся в том, что множество B всех элементов вида $\inf_{\varphi \in \mathfrak{A}_0} u_\varphi$, где $\mathfrak{A}_0$ — конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$, а $u_\varphi \in \varphi$ ($\varphi \in \mathfrak{A}_0$), представляет собой базис фильтра $\widetilde{A}$. Действительно, согласно уже цитированному предложению II фильтр $\widetilde{A}$ имеет базис $\tilde{A}$, состоящий из всех элементов вида $\inf K$, где K — конечное подмножество множества A. Но в силу ассоциативности точных границ $\inf K = \inf_{\varphi \in \mathfrak{A}_0} (\inf \varphi \cap K) = \inf_{\varphi \in \mathfrak{A}_0} u_\varphi$, где за $\mathfrak{A}_0$ взято такое конечное подмножество множества $\mathfrak{A}$, что $K \subset \bigcup_{\varphi \in \mathfrak{A}_0} \varphi$, и положено $u_\varphi = \inf(\varphi \cap K)$ $(\varphi \in \mathfrak{A}_0)$. Таким образом, $\widetilde{A} \subset B$. Включение $B \subset \widetilde{A}$ очевидно.

Заметим, что при образовании множества B элементы u_φ можно брать не из всего фильтра φ, а лишь из какого-либо его базиса. Укажем еще, что в качестве множества, порождающего фильтр $\widetilde{A}$, может быть взято объединение $\bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} A_\varphi$, где A_φ — множество, порождающее фильтр φ.

IV. *Множество $\mathcal{F}_0(X)$ всех собственных фильтров в X представляет собой условно полное упорядоченное множество.*

Действительно, если непустое множество $\mathfrak{A}$ собственных фильтров в X ограничено сверху, т. е. в поляре $\pi(\mathfrak{A})$ имеется собственный фильтр, то фильтр $\widetilde{A}$, где $A = \bigcup\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}} \varphi$, собственный. Следовательно, $\sup \mathfrak{A} \in \mathcal{F}_0(X)$, откуда на основании предложения I(3.4) заключаем о том, что $\widetilde{A}$ представляет собой точную верхнюю границу множества $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{F}_0(X)$.

Касаясь структуры точной верхней границы непустого ограниченного сверху множества собственных фильтров, отметим, что в этом случае рассмотренное ранее множество всех элементов вида $\inf\limits_{\varphi \in \mathfrak{A}_0} u_\varphi$ ($\mathfrak{A}_0$ — конечное множество в $\mathfrak{A}$, $u_\varphi \in \varphi$, $\varphi \in \mathfrak{A}_0$) состоит из собственных фильтров и представляет собой базис фильтра $\sup \mathfrak{A}$.

Говорят, что *фильтры* φ, $\psi \in F_0(X)$ *зацепляются*, если фильтр $\varphi \vee \psi$ собственный, иначе говоря, если $u \vee v \neq X$ для любых $u \in \varphi$, $v \in \psi$. В случае, когда зацепляются фильтры φ и $\pi\{x\}$ $(x \in X)$, говорят, что *фильтр* φ *зацепляет элемент* $x \in X$. Последнее, понятно, равносильно тому, что $u \wedge x \neq \mathbf{0}$ для любого $u \in \varphi$.

V. *Предположим, что фильтр φ и ультрафильтр ψ зацепляются. Тогда $\varphi \subset \psi$.*

Действительно, множество $A = \{u \wedge v : u \in \varphi,\ v \in \psi\}$ не содержит наименьшего элемента, фильтруется по убыванию и коинициально как φ, так и ψ. Следовательно, $\widetilde{A} \supset \varphi$ и $\widetilde{A} \supset \psi$. Поскольку ψ — ультрафильтр, а фильтр φ — собственный, то $\psi = \widetilde{A} \supset \varphi$.

В частности, если ультрафильтр ψ зацепляет элемент $x \in X$ и $x \notin \psi$, то найдется $v \in \psi$, для которого $x \wedge v = \mathbf{0}$.

7.3. Рассмотрим некоторые свойства фильтров в том частном случае, когда в качестве X берется упорядоченная по включению совокупность $\mathfrak{P}(T)$ всех подмножеств данного множества T.

I. *Фильтр $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ представляет собой ультрафильтр в том и только в том случае, если из того, что $V \cup W \in \varphi$ $(V, W \subset T)$, следует, что либо $V \in \varphi$, либо $W \in \varphi$.*

В самом деле, если φ — ультрафильтр и множества V, W ему не принадлежат, то из предложения V (7.2) можно заключить о существовании таких множеств $U_1, U_2 \in \varphi$, что $V \cap U_1 = W \cap U_2 = \varnothing$. Но тогда $(V \cup W) \cap (U_1 \cup U_2) = \varnothing$, а так как $U_1 \cup U_2 \in \varphi$, то $V \cup W \notin \varphi$.

Предположим, что условие предложения выполнено, но φ не ультрафильтр. Обозначим через ψ ультрафильтр, более тонкий, чем φ. Пусть $E \in \psi \setminus \varphi$. Поскольку $E \cup E' \in \varphi$, где E' — дополнение множества $E \subset T$, а $E \notin \varphi$, то $E' \in \varphi$. Но тогда $E' \in \psi$, ибо $\psi \supset \varphi$, следовательно, пересечение $E \cup E'$ также входит в ψ, что невозможно, так как $E \cap E' = \varnothing$, а фильтр ψ — собственный.

Рассмотрим отображение f, действующее из множества T в некоторое множество Y. Поскольку f — однозначное соответствие, то отображение $E \mapsto f^{-1}[E]$ из $\mathfrak{P}(Y)$ в $\mathfrak{P}(T)$ сохраняет точные нижние границы. Если к тому же $D(f) = T$, $R(f) = Y$, то в силу предложения I (7.2) в этой ситуации совокупность $f\langle\varphi\rangle = \{f[A] : A \in \varphi\}$, которую в дальнейшем будем называть *образом фильтра* φ *непустых подмножеств множества* T *при отображении* f, представляет собой собственный фильтр в $\mathfrak{P}(Y)$. Отметим, что вместо условия $D(f) = T$ можно было требовать принадлежности множества $D(f)$ фильтру φ.

II. *Если* f — *отображение множества* T *на множество* Y *и* φ — *ультрафильтр в* $\mathfrak{P}(T)$, *то* $f\langle\varphi\rangle$ — *ультрафильтр в* $\mathfrak{P}(Y)$.

Согласно сказанному ранее $f\langle\varphi\rangle$ — фильтр. Для доказательства того, что $f\langle\varphi\rangle$ — ультрафильтр, воспользуемся критерием предложения I. Пусть $E \subset Y$. Так как $f^{-1}[E] \cup f^{-1}[E'] = f^{-1}[Y] \in \varphi$, то по указанному критерию одно из множеств $f^{-1}[E]$, $f^{-1}[E']$ входит в φ. Поскольку ввиду однозначности f имеем $f \circ f^{-1} = I_Y$, то $E = f[f^{-1}[E]]$, $E' = f[f^{-1}[E']]$, следовательно, в фильтр $f\langle\varphi\rangle$ должно войти одно из множеств E, E', и нам осталось еще раз воспользоваться упомянутым критерием.

7.4. В заключение установим существование пределов прямого и обратного спектров в категории множеств.

Рассмотрим семейство $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) с фильтрующимся по возрастанию множеством индексов Ξ. Пусть Σ порядок в Ξ. Предположим, что имеется семейство $\{\omega_\lambda^\mu\}$ ($(\lambda, \mu) \in \Sigma$) отображений $\omega_\lambda^\mu : X_\lambda \to X_\mu$. Отображение ω_λ^μ с данной парой индексов $(\lambda, \mu) \in \Sigma$ можно рассматривать как вложение (возможно, с последующим «склеиванием») множества X_λ в множество X_μ. Допустим, что семейство $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) и семейство $\{\omega_\lambda^\mu\}$ ($(\lambda, \mu) \in \Sigma$) отображений образуют прямой спектр в категории множеств. Напомним (см. 4.3), что при этом должны выполняться соотношения

$$\omega_\lambda^\nu = \omega_\mu^\nu \circ \omega_\lambda^\mu \quad (\lambda, \mu, \nu \in \Xi, (\lambda, \mu) \in \Sigma, (\mu, \nu) \in \Sigma). \qquad (2)$$

Построим множество $S = \left\{(\xi, x) \in \Xi \times \left(\bigcup_{\xi \in \Xi} X_\xi\right) : x \in X_\xi\right\}$, называемое *суммой* [50]) семейства $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), и введем в S отношение ρ, полагая $((\lambda, x), (\mu, y)) \in \rho$ ($\lambda, \mu \in \Xi$, $x \in X_\lambda$, $y \in X_\mu$), если можно найти такое $\nu \in \Xi$, что (λ, ν), $(\mu, \nu) \in \Sigma$ и $\omega_\lambda^\nu(x) = \omega_\mu^\nu(y)$. Нетрудно проверить, что ρ — отношение эквивалентности в S. Действительно, в проверке нуждается только транзитивность отношения ρ. Пусть $((\lambda, x), (\mu, y)) \in \rho$ и $((\mu, y), (\nu, z)) \in \rho$. По определению найдутся такие индексы $\xi, \eta, \in \Xi$, что (λ, ξ), (μ, ξ), (μ, η), $(\nu, \eta) \in \Sigma$ и $\omega_\lambda^\xi(x) = \omega_\mu^\xi(y)$, $\omega_\mu^\eta(y) = \omega_\mu^\eta(z)$. Так как Ξ фильтруется, то можно указать индекс $\zeta \in \Xi$, удовлетворяющий условию (ξ, ζ), $(\eta, \zeta) \in \Sigma$. Но тогда, согласно (2),

$$\omega_\lambda^\zeta(x) = \omega_\xi^\zeta\left(\omega_\lambda^\xi(x)\right) = \omega_\xi^\zeta\left(\omega_\mu^\xi(y)\right) = \omega_\mu^\zeta(y) = \omega_\eta^\zeta\left(\omega_\nu^\eta(y)\right) =$$
$$= \omega_\eta^\zeta\left(\omega_\nu^\eta(z)\right) = \omega_\nu^\zeta(z),$$

следовательно, $((\lambda, x), (\nu, z)) \in \rho$.

Рассмотрим фактор-множество $L = S/\rho$. Пусть Φ — каноническое отображение множества S на фактор-множество $L = S/\rho$. Возьмем $\xi \in \Xi$. Отображение $\Phi_\xi : x \mapsto \Phi(\xi, x)$ ($x \in X_\xi$) называется *каноническим вложением* множества X_ξ в индуктивный предел L. Докажем, что отображения Φ_λ и Φ_μ при $(\lambda, \mu) \in \Sigma$ связаны равенством $\Phi_\lambda = \Phi_\mu \circ \omega_\lambda^\mu$. В самом деле, если $x \in X_\lambda$, то пары (λ, x) и $\left(\mu, \omega_\lambda^\mu(x)\right)$ эквивалентны, стало быть,

$$\Phi_\lambda(x) = \Phi(\lambda, x) = \Phi\left(\mu, \omega_\lambda^\mu(x)\right) = \Phi_\mu\left(\omega_\lambda^\mu(x)\right).$$

Тем самым, если обозначить через L_ξ область значений $\Phi_\xi[X_\xi]$ канонического вложения Φ_ξ, из сказанного вытекает, что

$$L_\lambda = \Phi_\lambda[X_\lambda] = \Phi_\mu\left[\omega_\lambda^\mu[X_\lambda]\right] \subset \Phi_\mu[X_\mu] = L_\mu \quad ((\lambda, \mu) \in \Sigma).$$

Далее, ясно, что $L = \bigcup_{\xi \in \Xi} L_\xi$.

I. *Фактор-множество L и семейство* $\{\Phi_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *есть предел прямого спектра* $(\{X_\xi\}, \{\omega_\lambda^\mu\})$ *в категории множеств.*

---

[50]) Нетрудно понять, что S представляет собой сумму данного семейства в категории множеств.

Учитывая сказанное выше, для доказательства достаточно установить (см. 4.3), что для любого множества X и любого семейства $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений $f_\xi : X_\xi \to X$, удовлетворяющих соотношениям $f_\lambda = f_\mu \circ \omega_\lambda^\mu$ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$, существует единственное отображение $g : L \to X$ такое, что $f_\xi = g \circ \Phi_\xi$ $(\xi \in \Xi)$.

Прежде всего покажем, что если $((\lambda, x), (\mu, y)) \in \rho$, т. е. если $\Phi(\lambda, x) = \Phi(\mu, y)$ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$, то $f_\lambda(x) = f_\mu(y)$. Действительно, пусть $\nu \in \Xi$ таково, что (λ, ν) $(\mu, \nu) \in \Sigma$ и $\omega_\lambda^\nu(x) = \omega_\mu^\nu(y)$. Тогда $f_\lambda(x) = f_\nu(\omega_\lambda^\nu(x)) = f_\nu(\omega_\mu^\nu(y)) = f_\mu(y)$.

Положим теперь $g(\bar{x}) = f_\xi(x)$, где $\bar{x} \in L$ и $\bar{x} = \Phi(\xi, x)$. Как было установлено, значение $g(\bar{x})$ не зависит от выбора элемента $(\xi, x) \in \bar{x}$, следовательно, g однозначно. Наконец, из определения g и Φ_ξ имеем $g(\Phi_\xi(x)) = g(\Phi(\xi, x)) = f_\xi(x)$, так что $g \circ \Phi_\xi = f_\xi$.

Предел L называют также *индуктивным пределом* данного прямого спектра и обозначают через $\varinjlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$ (или, если есть необходимость, более подробно через $\varinjlim_{(\lambda, \mu) \in \Sigma} (X_\lambda \xrightarrow{\omega_\lambda^\mu} X_\mu)$).

Отметим, что если все отображения ω_λ^μ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$ взаимно однозначны, то будут взаимно однозначными и все канонические вложения, так как в этом случае равенство $\Phi_\xi(x') = \Phi(\xi, x') = \Phi(\xi, x'') = \Phi_\xi(x'')$ $(\xi \in \Xi,\ x', x'' \in X_\xi)$, означающее существование такого индекса $\eta \in \Xi$, что $(\xi, \eta) \in \Xi$ и $\omega_\xi^\eta(x') = \omega_\xi^\eta(x'')$, приводит к равенству $x' = x''$. В частности, если $X_\lambda \subset X_\mu$ при $(\lambda, \mu) \in \Sigma$, т. е. если семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — возрастающее в буквальном смысле этого слова и в качестве вложений ω_λ^μ принимаются «настоящие» вложения множества X_λ в множество X_μ, т. е. если $\omega_\lambda^\mu = \{(x, y) \in X_\lambda \times X_\mu : x = y,\ x \in X_\lambda\}$, то действие канонического вложения Φ_ξ на элемент $x \in X_\xi$ состоит в приписывании к x всевозможных индексов $\eta \in \Xi$ такого рода, что $x \in X_\eta$. Это позволяет отождествить множество X_ξ с множеством L_ξ и, значит, индуктивный предел L — с объединением $\bigcup_{\xi \in \Xi} X_\xi$. Так мы и будем поступать в дальнейшем в подобной обстановке.

Обратимся к обсуждению обратного спектра. Рассмотрим, как и выше, семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ множеств с фильтрующимся множеством индексов Ξ и семейство $\{\omega_\mu^\lambda\}$ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$ отображений $\omega_\mu^\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$, образующие обратный спектр. Напомним (см. 4.3), что в этом предположении имеют место соотношения

$$\omega_\nu^\lambda = \omega_\mu^\lambda \circ \omega_\nu^\mu \ (\lambda, \mu, \gamma \in \Xi;\ (\lambda, \mu), (\mu, \nu) \in \Sigma). \tag{3}$$

Рассмотрим множество $M \subset \mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$ всех таких отображений φ, что $\varphi(\lambda) = \omega_\mu^\lambda(\varphi(\mu))$ $((\lambda, \mu) \in \Sigma)$, и семейство $\{\Psi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений $\Psi_\xi = P_\xi|_M$, где P_ξ — проекция $\mathfrak{X}$ на X_ξ. Множество M и семейство $\{\Psi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ образуют предел обратного спектра $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ в категории множеств (подробное доказательство этого факта оставим читателю), который мы будем называть также *проективным пределом* обратного спектра и обозначать символом $\varprojlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$ (или, более подробно, через $\varprojlim_{(\lambda, \mu) \in \Sigma} (X_\mu - \omega_\mu^\lambda \to X_\lambda)$. Отображение Ψ_ξ по-прежнему будем называть *проекцией проективного предела* M в множество X_ξ (употребляется также термин «каноническое вложение» проективного предела M в множество X_ξ).

Предполагая, что данное семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — убывающее и что в качестве отображений ω_μ^λ фигурируют вложения (в узком смысле этого слова) множества X_μ в множество X_λ, можно указать простую реализацию проективного предела. Пусть $\widehat{M} = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$. Возьмем $\varphi \in M$. Для произвольных $\lambda, \mu \in \Xi$ и такого $\nu \in \Xi$, что $(\lambda, \nu), (\mu, \nu) \in \Sigma$, определяющее проективный предел соотношение дает $\varphi(\lambda) = \varphi(\nu)$, $\varphi(\mu) = \varphi(\nu)$, так что $\varphi(\lambda) = \varphi(\mu)$, т. е. отображение φ «постоянно». При этом, поскольку $\varphi(\xi) \in X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, единственное значение отображения φ есть элемент множества $\widehat{M}$. Обратно, если $x \in \widehat{M}$, то «постоянное» отображение $\varphi : \xi \to x$ $(\xi \in \Xi)$ является элементом проективного предела M. Таким образом, M может быть отождествлен с пересечением $\widehat{M} = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$. Предоставим читателю убедиться, что при таком отождествлении проекция Ψ_ξ проективного предела в множество X_ξ становится вложением множества $\widehat{M}$ в множество X_ξ.

Глава II

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Одной из главнейших составных частей структур анализа является структура топологического пространства, основанная на понятии близости элементов данного множества к фиксированному его элементу.

§ 1. ТОПОЛОГИЯ

1.1. Пусть X — данное множество и $\mathfrak{P}(X)$ — совокупность всех его подмножеств, упорядоченная по включению. Через $\mathbf{F}$ (а в необходимых случаях через $\mathbf{F}(X)$) будем обозначать множество всех фильтров в $\mathfrak{P}(X)$, а через $\mathbf{F}_0$ (иногда, подробнее, через $\mathbf{F}_0(X)$) — совокупность всех собственных фильтров из $\mathbf{F}$, т. е. фильтров, отличных от всего $\mathfrak{P}(X)$ и, стало быть, состоящих из непустых подмножеств множества X. Допуская вольность речи, мы будем ради простоты говорить о фильтрах из $\mathbf{F}_0$ как о фильтрах в множестве X (а не в $\mathfrak{P}(X)$).

Отображение τ с областью определения X и областью прибытия $\mathbf{F}(X)$ называют *предтопологией на* X, если элемент $x \in X$ принадлежит каждому множеству фильтра $\tau(x)$. Отметим сразу, что в этом случае фильтр $\tau(x)$ состоит из непустых подмножеств множества X, иначе говоря, представляет собой фильтр в множестве X.

Упорядоченную пару (X, τ), где τ — предтопология на множестве X, называют *предтопологическим пространством*, элементы множества X — *точками* этого пространства, а множества, входящие в фильтр $\tau(x)$,— *окрестностями* точки x. Хотя предтопологическое пространство было определено как упорядоченная пара (X, τ), обычно с множеством X связывается какая-то одна, «стандартная», предтопология. В связи с этим мы, как обычно в подобных случаях, в обозначениях будем опускать указания на предтопологию и говорить о предтопологическом пространстве X, зачастую при этом обозначая фильтр окрестностей точки x через $\mathfrak{B}_x$. О подмножествах множества X, наделенного предтопологией, будем говорить как о множествах в предтопологическом пространстве.

В качестве примеров предтопологий укажем пока на *дискретную*, в которой фильтр окрестностей каждой точки $x \in X$ состоит из всех подмножеств множества X, содержащих эту точку, и на *антидискретную* (или *вырожденную*), в которой фильтр окрестностей каждой точки $x \in X$ состоит из одного элемента — множества X.

В соответствии со сказанным в I. 6.1. в множестве $\mathbf{F}$ введем индуцированный из $\mathfrak{P}(X)$ порядок — по включению. Снабдим совокупность $\mathbf{F}^X$ всех отображений множества X в упорядоченное множество $\mathbf{F}$ поточечным отношением порядка (см. I. 3.2), а множество $\mathfrak{T}_0(X)$ всех предтопологий на X — порядком, индуцированным из $\mathbf{F}^X$, так что $\tau \leqslant \delta$, где $\tau, \delta \in \mathfrak{T}_0(X)$, означает, что $\tau(x) \leqslant \delta(x)$ при каждом $x \in X$. Если $\tau, \delta \in \mathfrak{T}_0(X)$ и $\tau \leqslant \delta$, то будем говорить, что предтопология δ *сильнее*, чем τ, или что τ *слабее*, чем δ.

Отметим свойства упорядоченного множества $\mathfrak{T}_0(X)$.

I. *Упорядоченное множество* $\mathfrak{T}_0(X)$ — *полная решетка, представляющая собой правильное подмножество множества* $\mathbf{F}^X$.

Учитывая результаты предложений I(I.3.3) и I(I.3.4), достаточно установить правильность вверх множества $\mathfrak{T}_0(X)$ в $\mathbf{F}^X$. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}_0(X)$. Поскольку дискретная и вырожденная предтопологии суть наибольший и наименьший элементы множества $\mathfrak{T}_0(X)$, можно считать множество $\mathfrak{S}$ непустым. Положим $\mathfrak{S}_x = \{\tau(x) : \tau \in \mathfrak{S}\}$ $(x \in X)$. Так как любое множество каждого из фильтров, входящих в множество $\mathfrak{S}_x$, включает точку x, пересечение любого конечного семейства множеств фильтра $\mathfrak{S}_x$ также включает точку x. Учитывая структуру точной верхней границы в множестве фильтров в X, можно утверждать, что каждое множество фильтра $\sup \mathfrak{S}_x$ включает точку x, так что отображение $x \mapsto \sup \mathfrak{S}_x$ $(x \in X)$, являющееся точной верхней границей множества $\mathfrak{S}$ в $\mathbf{F}^X$, оказывается предтопологией на X. Таким образом, $\mathfrak{S}_0(X)$—правильное вверх подмножество множества $\mathbf{F}^X$.

Для доказательства правильности вниз $\mathfrak{T}_0(X)$ в $\mathbf{F}^X$ достаточно указать, что множество X входит в состав каждого фильтра из $\mathfrak{S}_x (x \in X)$, так что фильтр $\inf \mathfrak{S}_x = \bigcap\limits_{\tau \in \mathfrak{S}} \tau(x)$ — собственный.

Иначе о результате предложения I можно было сказать, что значение точной верхней границы $\sup \mathfrak{S}$ на элементе $x \in X$ есть фильтр $\overline{\bigcup\limits_{\tau \in \mathfrak{S}} \tau(x)}$, порожденный (вообще говоря, не фильтрующимся) объединением множества фильтров $\{\tau(x) : \tau \in \mathfrak{S}\}$, а точной нижней границей — фильтр $\bigcap\limits_{\tau \in \mathfrak{S}} \tau(x)$.

1.2. Задание предтопологии на множестве X уже определяет «шкалу» близости элементов множества X к данной точке $x \in X$.

Однако такие шкалы для разных точек между собой никак не связаны. В частности, фильтром окрестностей точки x может быть такой фильтр в X, который состоит в основном из множеств, служащих окрестностями т о л ь к о точки x. Это указывает на определенную скудность запаса множеств, оказывающихся окрестностями каждой своей точки, такие множества и могли бы осуществить связь между шкалами близости точек из X.

Множество G предтопологического пространства (X, τ) называется *открытым*, если $G \in \tau(x)$ для каждой точки $x \in G$, т. е. если G — окрестность каждой своей точки. Совокупность всех открытых множеств предтопологического пространства (X, τ) будем обозначать через $\mathfrak{G}_\tau(X)$. Указание предтопологии τ или множества X в обозначении совокупности открытых множеств иногда будет опущено.

Рассмотрим, кроме τ, еще одну предтопологию δ на X и допустим, что $\tau \leqslant \delta$. Тогда $\tau(x) \subset \delta(x)$ для каждой точки $x \in X$, т. е. всякая окрестность точки x в предтопологии τ служит окрестностью этой точки и в предтопологии δ. В частности, если множество $G \subset X$ служит окрестностью каждой своей точки в предтопологии τ, то оно будет обладать этим свойством и в предтопологии δ. Итак, можно сказать, что если $\tau \leqslant \sigma$, то $\mathfrak{G}_\tau(X) \subset \mathfrak{G}_\sigma(X)$ — усиление предтопологии обогащает запас открытых множеств.

I. *Совокупность* $\mathfrak{G}_\tau(X)$ *открытых множеств предтопологического пространства* (X, τ) *обладает следующими свойствами:*

1) $\varnothing$, $X \in \mathfrak{G}_\tau(X)$;

2) *если* $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_\tau(X)$, *то* $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}_\tau(X)$;

3) *если* $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *произвольное семейство элементов из* $\mathfrak{G}_\tau(X)$, *то* $G = \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} G_\xi \in \mathfrak{G}_\tau(X)$.

Справедливость первого свойства очевидна.

Пусть $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}_\tau(X)$ и $x \in G_1 \cap G_2$. Тогда $x \in G_1$, $x \in G_2$, а поскольку $G_1, G_2 \in \tau(x)$ и $\tau(x)$ — фильтр в X, то $G_1 \cap G_2 \in \tau(x)$, и второе свойство установлено.

Рассмотрим произвольное семейство $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ открытых множеств. Если $x \in \bigcup\limits_{\xi \in \Xi} G_\xi = G$, то $x \in G_\eta$ при некотором $\eta \in \Xi$. Но $G_\eta \in \tau(x)$, а $G \supset G_\eta$, следовательно, и $G \in \tau(x)$, так как $\tau(x)$ — фильтр. Итак, $G \in \mathfrak{G}_\tau(X)$.

Рассмотрим предтопологию τ на X. Через $\mathfrak{G}_{\tau(x)}$ будем обозначать совокупность $\tau(x) \cap \mathfrak{G}_\tau(X)$ всех открытых в предтопологии τ окрестностей точки $x \in X$. Эта совокупность фильтруется по убыванию и, поскольку $\mathfrak{G}_{\tau(x)} \subset \tau(x)$, то и фильтр $\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}}$ в X порожденный этой совокупностью, грубее фильтра окрестностей $\tau(x)$ точки x, причем включение $\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}} \subset \tau(x)$ может для каких-то точек $x \in X$ оказаться строгим. Предтопология τ

на X называется *топологией*, если $\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}} = \tau(x)$ для каждой точки $x \in X$, иначе говоря, если фильтр окрестностей каждой точки $x \in X$ обладает базисом, состоящим из открытых в этой предтопологии множеств. Предтопологическое пространство (X, τ), в котором τ — топология, называется *топологическим пространством.* Тот факт, что фильтр окрестностей каждой точки x топологического пространства X полностью характеризуется совокупностью открытых окрестностей этой точки, служит основой для задания топологии путем указания совокупности подмножеств X, оказывающихся открытыми в задаваемой топологии.

II. *Пусть $\mathfrak{G}$ — совокупность подмножеств множества X, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $\varnothing$, $X \in \mathfrak{G}$;

2) *пересечение конечного семейства множеств из $\mathfrak{G}$ входит в $\mathfrak{G}$;*

3) *объединение любого семейства множеств совокупности $\mathfrak{G}$ принадлежит $\mathfrak{G}$.*

Тогда существует единственная топология τ на X, обладающая тем свойством, что $\mathfrak{G}_\tau(X) = \mathfrak{G}$.

Действительно, положим $\mathfrak{G}_x = \{G \in \mathfrak{G}\colon x \in G\}$. Отображение $\tau : x \mapsto \widetilde{\mathfrak{G}_x}$ — предтопология на X, в которой все множества из $\mathfrak{G}$, очевидно, открыты, а тогда по своему определению τ — топология на X, причем, как отмечено, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_\tau(X)$. С другой стороны, если $G \in \mathfrak{G}_\tau(X)$, то $G \in \tau(x)$ при каждом $x \in G$, следовательно, можно образовать такое семейство $\{G_x\}$ $(x \in G)$ множеств совокупности $\mathfrak{G}$, что $G_x \subset G$ $(x \in G)$. Тогда $G \subset \subset \bigcup\limits_{x \in G} G_x \subset G$, а $\bigcup\limits_{x \in G} G_x \in \mathfrak{G}$, следовательно, $G \in \mathfrak{G}$. Таким образом, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\tau(X)$.

Если σ — какая-либо топология на X, обладающая тем свойством, что $\mathfrak{G}_\sigma(X) = \mathfrak{G}$, то совокупность $\mathfrak{G}_{\sigma(x)} = \mathfrak{G}_x$ должна создавать базис фильтра $\sigma(x)$ при каждом $x \in X$, следовательно, фильтры $\tau(x)$, $\sigma(x)$ совпадают при каждом $x \in X$, как фильтры с одним базисом $\mathfrak{G}_x$. Предложение доказано.

Пусть τ — предтопология на X. Из предложений I, II следует, что существует единственная топология μ на X, обладающая тем свойством, что $\mathfrak{G}_\mu(X) = \mathfrak{G}_\tau(X)$. Такую топологию будем называть *топологией, ассоциированной с* данной *предтопологией.* Понятно, что фильтр окрестностей точки $x \in X$ в топологии, ассоциированной с предтопологией τ, есть не что иное, как фильтр $\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}}$, порожденный совокупностью открытых в предтопологии τ окрестностей точки x. Таким образом, переход к ассоциированной топологии можно представлять себе как отбрасывание от фильтра $\tau(x)$ (который всегда тоньше, чем $\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}}$)

таких множеств, которые мешают осуществить переход между «шкалами» близости разных точек из X.

Специфика топологии, связанная с большим запасом открытых окрестностей каждой точки, естественно, оказывает влияние на структуру точных границ в множестве топологий. Обозначим через $\mathfrak{T}(X)$ множество всех топологий на данном множестве X. Поскольку, как нетрудно понять, дискретная и вырожденная предтопологии представляют собой топологии, то $\mathfrak{T}(X)$ обладает тем самым наибольшим и наименьшим элементами. Пусть $\mathfrak{E}$ — непустое множество топологий на X. Поскольку $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{T}(X)\subset\mathfrak{T}_0(X)$, то согласно предложению I(1.1) существуют точные границы множества $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{T}_0(X)$. Напомним, что $(\inf\mathfrak{S})(x)=$ $=\bigcap\limits_{\tau\in\mathfrak{E}}\tau(x)$, а $(\sup\mathfrak{S})(x)=\widetilde{\bigcup\limits_{\tau\in\mathfrak{E}}\tau(x)}$ и, учитывая структуру точной верхней границы множества предтопологий на X, можно утверждать, что если $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{T}(X)$, то $\sup\mathfrak{E}\in\mathfrak{T}(X)$, тогда как об $\inf\mathfrak{E}$ можно лишь сказать, что $\inf\mathfrak{E}\in\mathfrak{T}(X)$ — эта граница может топологией не оказаться. Однако, так как $(\inf\mathfrak{E})(x)\subset\tau(x)$ $(x\in X)$ для любой топологии $\tau\in\mathfrak{E}$, а ослабление предтопологии уменьшает запас открытых множеств, то $\mathfrak{G}_{(\inf\mathfrak{S})(x)}\subset\mathfrak{G}_{\tau(x)}$ $(x\in X)$, следовательно, обозначая через μ ассоциированную с предтопологией $\inf\mathfrak{E}$ топологию, получим, что

$$\mu(x)=\widetilde{\mathfrak{G}_{(\inf\mathfrak{S})(x)}}\subset\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(x)}}=\tau(x)\quad(x\in X),$$

следовательно, μ — нижняя граница множества $\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{T}(X)$. Пусть $\sigma\in\mathfrak{T}(X)$ и $\sigma\leqslant\mathfrak{E}$. Тогда $\sigma\leqslant\inf\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{G}_{(\inf\mathfrak{S})(x)}\supset\mathfrak{G}_{\sigma}(x)$ $(x\in X)$. Отсюда вытекает, что

$$\mu(x)=\widetilde{\mathfrak{G}_{(\inf\mathfrak{S})(x)}}\supset\widetilde{\mathfrak{G}_{\sigma(x)}}=\sigma(x),$$

так что ассоциированная с предтопологией $\inf\mathfrak{E}$ топология оказывается точной нижней границей в $\mathfrak{T}(X)$ множества топологий $\mathfrak{E}$.

Подводя итог сказанному, можно утверждать

III. *Покоординатно упорядоченное множество $\mathfrak{T}(X)$ топологий на X — полная решетка, причем $\mathfrak{T}(X)$ правильно вверх в множестве $\mathfrak{T}_0(X)$ всех предтопологий на X, а в качестве точной нижней границы множества $\mathfrak{E}\subset\mathfrak{T}(X)$ выступает топология, ассоциированная с предтопологией $\inf\mathfrak{E}$, где точная нижняя граница понимается в множестве $\mathfrak{T}_0(X)$.*

1.3. Приступая к исследованию свойств топологических пространств, сразу же отметим, что многие вводимые ниже понятия могут рассматриваться и в рамках предтопологии, причем в известной мере сохраняются многие устанавливаемые ниже утверждения. Однако предтопология ввиду возможной скудности запаса открытых множеств не играет такой роли, как топология, поэтому мы будем вести речь сразу о топологических пространствах.

Пусть E — некоторое множество топологического пространства X. Точка $x \in X$ называется *внутренней* точкой множества E, если $E \in \mathfrak{B}_x$, т. е. если E — окрестность точки x. Совокупность всех внутренних точек множества E называется его *внутренностью* и обозначается символом E°.

Основные свойства внутренности дает следующая

Теорема 1(1.II). *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*

1) $E^\circ \subset E$ *для любого* $E \subset X$;

2) $\varnothing^\circ = \varnothing$, $X^\circ = X$;

3) *если* $E_1 \subset E_2 \subset X$, то $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{E}_2$;

4) *для любых множеств* $E_1, E_2 \subset X$ *имеет место равенство* $(E_1 \cap E_2)^\circ = \overset{\circ}{E}_1 \cap \overset{\circ}{E}_2$;

5) *для любого множества* $E \subset X$ *справедливо равенство* $(E^\circ)^\circ = E^\circ$;

6) *множество E° открыто и является наибольшим из открытых множеств, содержащихся в E.*

Доказательство. 1. Если $x \in E^\circ$, то, поскольку $E \in \mathfrak{B}_x$, имеем $x \in E$, так что $E^\circ \subset E$.

2. Соотношение $\varnothing^\circ = \varnothing$ вытекает из первого пункта теоремы. Далее, если x — любая точка из X, то $X \in \mathfrak{B}_x$, ибо $\mathfrak{B}_x$ — фильтр, а тогда $x \in X^\circ$ и $X = X^\circ$.

3. Пусть $x_1 \in \overset{\circ}{E}_1$, т. е. $E_1 \in \mathfrak{B}_x$. Поскольку $\mathfrak{B}_x$ — фильтр и $E_1 \in E_2$, то $E_2 \in \mathfrak{B}_x$, а это означает, что $x \in \overset{\circ}{E}_2$.

4. Так как $E_1 \cap E_2$ содержится в E_1 и в E_2, то, согласно пункту 3, $(E_1 \cap E_2)^\circ \subset \overset{\circ}{E}_1$, $(E_1 \cap E_2)^\circ \subset \overset{\circ}{E}_2$, т. е. $(E_1 \cap E_2)^\circ \subset \subset \overset{\circ}{E}_1 \cap \overset{\circ}{E}_2$. Пусть теперь $x \in \overset{\circ}{E}_1 \cap \overset{\circ}{E}_2$. Это означает, что $E_1 \in \mathfrak{B}_x$, $E_2 \in \mathfrak{B}_x$, и в силу того, что $\mathfrak{B}_x$ — фильтр, имеем $E_1 \cap E_2 \in \mathfrak{B}_x$, или $x \in (E_1 \cap E_2)^\circ$, откуда $(E_1 \cap E_2)^\circ = \overset{\circ}{E}_1 \cap \overset{\circ}{E}_2$.

5. Заметим, что $(E^\circ)^\circ \subset E^\circ$ в силу пункта 1. Пусть $x \in E^\circ$, т. е. $E \in \mathfrak{B}_x$. Так как X — топологическое пространство, найдется открытая окрестность G точки x, содержащаяся в E. В силу третьего условия имеем $G^\circ \subset E^\circ$. Открытое множество G служит окрестностью каждой своей точки, следовательно, $G = G^\circ$, откуда $x \in G \subset E^\circ$. В силу пункта 3 $G = G^\circ \subset (E^\circ)^\circ$, так что $x \in (E^\circ)^\circ$.

6. Поскольку открытость множества равносильна соотношению $E^\circ = E$, в силу свойства 5 E° открыто. Пусть G — открытое множество, содержащееся в E. Тогда $E^\circ \supset G^\circ = G$, т. е. E° — наибольшее открытое множество, содержащееся в E. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 2(1.11). *Пусть X — некоторое множество. Рассмотрим определенное на $\mathfrak{P}(X)$ отображение $i : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1) $i(X) = X$;
2) $i(E) \subset E$ *для любого* $E \subset X$;
3) *если* $E_1, E_2 \subset X$, *то* $i(E_1 \cap E_2) = i(E_1) \cap i(E_2)$;
4) $i \circ i = i$, т. е. $i(i(E)) = i(E)$ *для каждого* $E \subset X$.

Тогда существует единственная топология τ на X такая, что внутренность E° любого множества $E \subset X$ совпадает с $i(E)$.

Доказательство. Проверим, что совокупность $\mathfrak{G} = \{E \subset X : i(E) = E\}$ удовлетворяет условиям предложения I(1.2). Первые два условия указанного предложения следуют непосредственно из условий 1 — 3 настоящей теоремы. Пусть $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — произвольное семейство множеств из $\mathfrak{G}$ и $G = \bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi$. Так как в силу второго условия $i(G) \subset G$, достаточно установить включение $i(G) \supset G$. Поскольку $G_\xi \subset G (\xi \in \Xi)$, из условия 3 имеем $i(G_\xi) = i(G_\xi \cap G) = i(G_\xi) \cap i(G)$, откуда $i(G_\xi) \subset i(G)$. Но $i(G_\xi) = G_\xi$, следовательно, $G = \bigcup_{\xi \in \Xi} G_\xi = \bigcup_{\xi \in \Xi} i(G_\xi) \subset i(G)$. Таким образом, существует единственная топология τ на X такая, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\tau(X)$.

Проверим соотношение $E^\circ = i(E)$ $(E \subset X)$. Действительно, если $x \in E^\circ$, то существует окрестность $G \in \mathfrak{G}_\tau(X)$ точки x такая, что $G \subset E$. Но $G \in \mathfrak{G}$, так что $x \in i(G) \subset E$. Тогда имеем

$$x \in i(G) = i(i(G)) = i(i(G) \cap E) = i(i(G)) \cap i(E) = \\ = i(G) \cap i(E) \subset i(E),$$

откуда $E^\circ \subset i(E)$. Пусть теперь $x \in i(E)$. Поскольку $i(i(E)) = i(E)$, то $i(E) \in \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\tau(X)$, следовательно, множество $i(E)$ открыто и содержится в E, а тогда $i(E) \subset E^\circ$. Теорема доказана полностью.

1.4. Пусть E' — дополнение множества E топологического пространства X. Точка x называется *граничной* точкой множества E, если она не входит ни в E°, ни в E'°. Совокупность всех граничных точек множества E называется *границей* E и обозначается символом ∂E. Заметим сразу, что, как видно из определения, граница множества E совпадает с границей его дополнения. Множество, получающееся из E присоединением всех его граничных точек, называется *замыканием* множества E и обозначается через $\bar{E}$, т. е. $\bar{E} = E \cup \partial E$. Точки, входящие в замыкание $\bar{E}$ множества E, называются *точками прикосновения* множества E. Так как по определению границы $E \setminus \partial E = E^\circ$, то $E^\circ \cup \partial E = E \cup \partial E = \bar{E}$.

Множества E°, $\partial E (= \partial E')$, E'° попарно не пересекаются. Кроме того, очевидно, $E^\circ \cup \partial E \cup E'^\circ = X$. Отсюда получаем

$$\overline{E} \cap \overline{E'} = (E^\circ \cup \partial E) \cap (E'^\circ \cup \partial E) = (E^\circ \cap E'^\circ) \cup \partial E = \partial E, \tag{1}$$

$$(\overline{E})' = (E^\circ \cup \partial E)' = E'^\circ, \tag{2}$$

$$E^{\circ\prime} = E'^\circ \cup \partial E = \overline{E'}. \tag{3}$$

Учитывая (1), можно привести следующий критерий принадлежности точки границе данного множества.

I. *Точка $x \in X$ является граничной точкой множества E в том и только в том случае, если любая ее окрестность имеет непустое пересечение как с E, так и с E'.*

II. *Точка $x \in X$ является точкой прикосновения множества E в том и только в том случае, если любая ее окрестность имеет с E непустое пересечение.*

В самом деле, если $U \in \mathfrak{B}_x$ такова, что $U \cap E = \varnothing$, то $U \subset E'$ и E' — окрестность точки x, т. е. $x \in E'^\circ = \overline{E}'$. Обратно, если $x \notin \overline{E}$, то E' — окрестность точки x, не имеющая общих точек с E.

Опираясь на соотношение (2) и теорему 1, нетрудно доказать теорему о свойствах замыкания.

Теорема 3(1.II). *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*

1) $\overline{E} \supset E$ *для любого* $E \subset X$;

2) $\overline{\varnothing} = \varnothing$, $\overline{X} = X$;

3) *если* $E_1 \subset E_2 \subset X$, то $\overline{E}_1 \subset \overline{E}_2$;

4) *если* $E_1, E_2 \subset X$, *то* $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2$;

5) $\overline{(\overline{E})} = \overline{E}$ *для любого* $E \subset X$.

Доказательство. Остановимся лишь на доказательстве двух последних пунктов. В силу (2) и соответствующих свойств внутренности имеем

$$\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)' = (E_1 \cup E_2)'^\circ = (E_1' \cap E_2')^\circ = E_1'^\circ \cap E_2'^\circ =$$
$$= \overline{E}_1' \cap \overline{E}_2' = (\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2)';$$
$$\left(\overline{(\overline{E})}\right)' = (\overline{E}')^\circ = (E'^\circ)^\circ = E'^\circ = (\overline{E})',$$

Множество F топологического пространства называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием, т. е. если $F = \overline{F}$. Совокупность всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) будем обозначать через $\mathfrak{F}_\tau(X)$, или $\mathfrak{F}(X)$, или просто через $\mathfrak{F}$.

С помощью соотношений (2), (3) между открытыми и замкнутыми множествами можно легко усмотреть связь, выраженную в следующем факте.

III. *Множество F топологического пространства замкнуто в том и только в том случае, если его дополнение открыто.*

В самом деле, из $F \in \mathfrak{F}$ с помощью соотношения (2) следует $F'^{\circ} = \overline{F'} = F'$, т. е. $F' \in \mathfrak{G}$. Обратно, если $F' \in \mathfrak{G}$, то, полагая в (3) $E = F'$, имеем $\overline{F} = F$, или $F \in \mathfrak{F}$.

Часто, принимая во внимание результат предложения III, свойства замкнутых множеств выводят из свойств открытых, и наоборот.

IV. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*

1) $\varnothing,\ X \in \mathfrak{F}(X)$;

2) *если* $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}(X)$, *то* $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}(X)$;

3) *для любого семейства* $\{F_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *элементов из* $\mathfrak{F}(X)$ *множество* $F = \bigcap\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi$ *также входит в* $\mathfrak{F}(X)$;

4) *замыкание* $\overline{E}$ *множества* E *является наименьшим замкнутым множеством, содержащим* E.

Справедливость сформулированных свойств следует из соответствующих свойств открытых множеств и предложения III.

V. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *— совокупность подмножеств некоторого множества* X, *обладающая следующими свойствами:*

1) $\varnothing,\ X \in \mathfrak{F}$;

2) *если* $F_1,\ F_2 \in \mathfrak{F}$, *то и* $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$;

3) *для любого семейства* $\{F_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *множеств из* $\mathfrak{F}$ *выполнено* $\bigcap\limits_{\xi \in \Xi} F_\xi \in \mathfrak{F}$.

Тогда существует единственная топология τ *на* X *такая, что* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X,\ \tau)$.

В самом деле, нетрудно убедиться в том, что совокупность $\mathfrak{G} = \{G \subset X : G' \in \mathfrak{F}\}$ удовлетворяет условиям предложения II(1.2), откуда и следует требуемый результат.

Используя теорему 2, легко доказать, что

VI. *Если на* $\mathfrak{P}(X)$ *определено отображение* f, *действующее в* $\mathfrak{P}(X)$ *и обладающее свойствами:*

1) $f(\varnothing) = \varnothing$;

2) $f(E) \subset E$ *для любого* $E \subset X$;

3) $f(E_1 \cup E_2) = f(E_1) \cup f(E_2)$ *для любых* $E_1,\ E_2 \subset X$;

4) $f \circ f = f$, *т. е.* $f(f(E)) = f(E)$ *для каждого* $E \subset X$.

Тогда на X *существует единственная топология* τ, *такая, что замыкание* $\overline{E}$ *любого* $E \in \mathfrak{P}(X)$ *совпадает с* $f(E)$. *Отображение* f *называют иногда оператором замыкания на* X.

Обращаясь к свойствам открытых и замкнутых множеств, отметим то обстоятельство, что пустое множество и все X являются открытыми и замкнутыми одновременно. Спрашивается, бывают ли множества в топологическом пространстве, являющиеся одновременно открытыми и замкнутыми (такие множества обычно называют *открыто-замкнутыми*), отличные от $\varnothing$ и X? Поставленный вопрос приводит к понятию связного множества в топологическом пространстве.

Множество $A \subset X$ называют *несвязным*, если существуют такие пересекающиеся с A открытые множества G_1, $G_2 \subset X$, что $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $A \subset G_1 \cup G_2$. В противном случае множество A называют *связным*. Топологическое пространство X называют *связным* (*несвязным*), если множество его точек связно (несвязно). Понятно, что множество $A \subset X$ связно (несвязно), если, будучи снабженным индуцированной из X топологией, оно представляет собой связное (несвязное) топологическое пространство. Заметим, что характеристическим свойством связного топологического пространства служит отсутствие в нем открыто-замкнутых множеств, отличных от $\varnothing$ и X.

Примером связного топологического пространства может служить любое множество, наделенное вырожденной топологией, несвязного же — множество , состоящее не менее чем из двух точек, с дискретной топологией. Более того, дискретное топологическое пространство таково, что в нем всякое множество открыто-замкнуто. Это свойство является характеристическим для дискретной топологии.

1.5. Множество A топологического пространства X называется *плотным в множестве* $E \subset X$, если $E \subset \bar{A}$. О множестве A, плотном в X, говорят еще как о *всюду плотном*.

I. *Если G_1, G_2 — всюду плотные открытые множества топологического пространства X, то $G = G_1 \cap G_2$ также плотно в X.*

Действительно, пусть x — произвольная точка из X и V — некоторая ее окрестность. Докажем, что $V \cap G \neq \varnothing$. Можно считать V открытым множеством (иначе мы заменим V на V°). Так как x — точка прикосновения множества G_1, то $V \cap G_1 \neq \varnothing$. Возьмем точку $y \in V \cap G_1$. Так как y — точка прикосновения множества G_2, а пересечение $V \cap G_1$, будучи открытым множеством, служит окрестностью этой точки, то $(V \cap G_1) \cap G_2 \neq \varnothing$, откуда $V \cap G \neq \varnothing$. Таким образом, x — точка прикосновения G, т. е. $x \in \bar{G}$ и $\bar{G} = X$.

Множество A топологического пространства X называется *нигде не плотным*, если его замыкание $\bar{A}$ не имеет внутренних точек, иначе, если дополнение его замыкания всюду плотно.

Из предложения I вытекает

II. *Объединение конечного семейства нигде не плотных множеств нигде не плотно.*

1.6. Пусть X_0 — множество в топологическом пространстве (X, τ). Имеющаяся в X «шкала» близости, будучи примененной только к элементам множества X_0, даст «шкалу» близости в этом множестве. Говоря точнее, рассмотрим элемент $x \in X_0$ и обозначим через $\mathfrak{B}_x^0$ совокупность всех множеств вида $V \cap X_0$, где $V \in \mathfrak{B}_x$. Ясно, что $\mathfrak{B}_x^0$ — фильтр непустых подмножеств множества X_0 и что отображение $\tau_0 : x \mapsto \mathfrak{B}_x^0$ $(x \in X_0)$ — топология на X_0. Эту топологию называют топологией, *индуцированной на* X_0 из X. Топологическое пространство (X_0, τ_0) называют *подпространством* топологического пространства (X, τ).

Пусть X_0 — подпространство в X. Выясним соотношения между $\mathfrak{G}(X_0)$ и $\mathfrak{G}(X)$.

I. *Множество $U \subset X_0$ открыто в X_0 в том и только в том случае, если его можно представить в виде $U = G \cap X_0$, где $G \in \mathfrak{G}(X)$*.

Действительно, непосредственно из определения индуцированной топологии следует, что если $G \in \mathfrak{G}(X)$, то $G \cap X_0 \in \mathfrak{G}(X_0)$. Рассмотрим теперь какое-либо множество $U \in \mathfrak{G}(X_0)$ и возьмем в качестве G множество $(X_0' \cup U)^\circ$. Ясно, что $G \in \mathfrak{G}(X)$ и $G \cap X_0 \subset (X_0' \cup U)^\circ \cap X_0 = U \cap X_0 = U$. Докажем противоположное включение. Возьмем $x \in U$. Множество U служит окрестностью (в X_0) точки x и, следовательно, может быть представлено в виде $U = V \cap X_0$, где $V \in \mathfrak{B}_x$. Так как $V = (V \cap X_0) \cup (V \cap X_0') \subset U \cup X_0'$, то и $U \cup X_0'$ — также окрестность точки x, откуда следует, что $x \in G$, и тем самым $x \in G \cap X_0$.

Следующее предложение устанавливает связь между $\mathfrak{F}(X_0)$ и $\mathfrak{F}(X)$.

II. *Множество $Z \subset X_0$ замкнуто в пространстве X_0 в том и только в том случае, если существует такое множество $F \in \mathfrak{F}(X)$, что $Z = F \cap X_0$.*

Предложение легко может быть выведено из предложения I с учетом связи открытых множеств с замкнутыми.

Пусть $E \subset X_0$. Замыкания множества E в пространствах X и X_0 могут, разумеется, отличаться одно от другого. Обозначая первое символом $\overline{E}^X$, а второе — $\overline{E}^{X_0}$, из предложения II и определения замыкания нетрудно получить

III. $\overline{E}^{X_0} = \overline{E}^X \cap X_0$.

1.7. Определение топологического пространства обладает настолько большой общностью, что его условиям удовлетворяют множества, не наделенные фактически никакой структурой, как это будет, например, в случае, когда топология вырождена. Поэтому возникает необходимость в дополнительных требованиях, которые выделяют те или иные классы топологических пространств. Среди такого рода требований выделяются так называемые *аксиомы отделимости.*

Топологическое пространство X называют *отделимым* или *T_1-пространством*, если для любых двух различных точек из X найдется окрестность одной из них, не содержащая другой точки. Иначе говоря, отделимость пространства X означает, что $\bigcap\limits_{U \in \mathfrak{B}_x} U = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

Отделимость может быть охарактеризована и в других терминах.

I. *Пространство X отделимо в том и только в том случае, если каждое одноточечное множество в нем замкнуто.*

Действительно, если X отделимо, то множество точек прикосновения множества $\{x\}$ состоит лишь из единственной точки x, т. е. $\{x\}$ замкнуто. Обратно, если x — любая точка из X и $\{x\}$ замкнуто, а y — отличная от x точка из X, то она не может служить точкой прикосновения множества $\{x\}$, поэтому найдется такая окрестность $U \in \mathfrak{B}_x$, что $y \notin U$.

Учитывая то обстоятельство, что объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуто, можно утверждать, что в отделимом пространстве замкнуты любые конечные множества.

Более сильное по сравнению с отделимостью требование выделяет класс так называемых хаусдорфовых пространств. Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, или *T_2-пространством*, если для любых различных точек $x, y \in X$ можно указать окрестности $U \in \mathfrak{B}_x$, $V \in \mathfrak{B}_y$, не имеющие общих точек. Ясно, что хаусдорфово пространство отделимо. Обратный факт, однако, не имеет места. Например, если X — бесконечное множество и фильтр окрестностей точки $x \in X$ определен как совокупность всех множеств, содержащих x и имеющих конечное дополнение, то получившееся топологическое пространство отделимо, но не хаусдорфово.

II. *Топологическое пространство X хаусдорфово в том и только в том случае, если пересечение всех замкнутых окрестностей каждой точки $x \in X$ состоит лишь из единственной точки x.*

Действительно, если U — окрестность точки x, не пересекающаяся с некоторой окрестностью точки y, то $y \notin \overline{U}$ (по определению замыкания). Таким образом, если X — хаусдорфово пространство, то у любой точки $x \in X$ найдется замкнутая окрестность, не содержащая любую другую точку $y \in X$. Следовательно, пересечение всех замкнутых окрестностей точки x содержит лишь x.

Если теперь допустить, что пересечение всех замкнутых окрестностей точки $x \in X$ состоит только из x, то для любой отличной от x точки $y \in X$ можно указать замкнутую окрестность U точки x, не содержащую y. Но тогда дополнение U', будучи открытым множеством, является окрестностью каждой своей точки, в частности, и точки y. Поскольку $U \cap U' = \varnothing$, а x, y — произвольные различные точки из X, то X хаусдорфово.

Чтобы сформулировать дальнейшие аксиомы отделимости, нам понадобится полезное и в других отношениях понятие *окрестности множества* E в X. Под этим понимается всякое множество $U \subset X$, которое служит окрестностью каждой точки $x \in E$, иначе говоря, окрестность множества E — всякое множество U в X такое, что $E \subset U^\circ$. Обозначая через $\mathfrak{U}_E$ совокупность всех окрестностей множества E, можем записать $\mathfrak{U}_E = \bigcap\limits_{x \in E} \mathfrak{B}_x$. Отсюда или непосредственно из определения следует, что $\mathfrak{U}_E$ представляет собой фильтр в $\mathfrak{P}(X)$, причем собственный, если $E \neq \varnothing$.

Топологическое пространство X называют *T_3-пространством*, если каковы бы ни были замкнутое множество $F \subset X$ и точка $y \notin F$, существуют окрестности U — множества F, и V — точки y, пересечение $U \cap V$ которых пусто.

Заменяя в доказательстве предложения II точку x множеством F, получим следующий результат.

III. *Топологическое пространство X является T_3-пространством в том и только в том случае, если пересечение всех замкнутых окрестностей любого замкнутого множества F совпадает с F.*

Приведем другую характеристику T_3-пространства.

IV. *Топологическое пространство X оказывается T_3-пространством в том и только в том случае, если фильтр окрестностей любой точки $x \in X$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.*

Действительно, пусть X — T_3-пространство, x — точка из X и V — некоторая её окрестность. Множество $F = V^{\circ\prime} = \overline{V'}$ замкнуто и не содержит точку x. Поэтому, согласно предложению III, найдется замкнутая окрестность W множества F, не содержащая точку x. Множество W' открыто и $x \in W'$, следовательно, $W' \in \mathfrak{B}_x$. Тем более $U = \overline{W'} \in \mathfrak{B}_x$. Но так как W — окрестность F, то $W^\circ \supset F$ и в силу соотношения (3) имеем $V \supset V^\circ = F' \supset W^{\circ\prime} = \overline{W'} = U$. Таким образом, замкнутые окрестности точки x образуют базис фильтра $\mathfrak{B}_x$.

Рассмотрим замкнутое множество $F \subset X$ и точку $x \notin F$. Поскольку $F' \in \mathfrak{B}_x$, найдется замкнутая окрестность U точки x, содержащаяся в F'. Множество U' открыто и содержит F, стало быть, U' — окрестность множества F, не пересекающаяся с окрестностью U точки x, т. е. X — T_3-пространство.

Отделимое T_3-пространство называют *регулярным*. Понятно, что регулярное пространство хаусдорфово. Обратное, вообще говоря, неверно: вырожденная топология, очевидно, удовлетворяет аксиоме T_3, но не является, за тривиальными исключениями, хаусдорфовой.

И, наконец, последняя аксиома отделимости. Топологическое пространство X называют *T_4-пространством*, если для любых двух замкнутых непересекающихся множеств в X существуют их окрестности, также не имеющие общих точек.

Отметим факт, проверить который можно по образцу доказательства предложения IV.

V. *Топологическое пространство X является T_4-пространством в том и только в том случае, если фильтр окрестностей любого непустого замкнутого множества имеет базис, состоящий из замкнутых множеств.*

Если T_4-пространство к тому же и отделимо, его называют *нормальным*. Нормальное пространство регулярно. Обратное и здесь не имеет места.

В заключение заметим, что, как нетрудно показать, свойства отделимости, хаусдорфовости, регулярности «наследуются» при переходе от пространства к подпространству. Этого уже нельзя сказать о нормальности, хотя построить соответствующий пример не так уж и просто.

1.8. Пусть X — линейно упорядоченное множество (см. I. 3.5) с порядком σ и $x \in X$. Предположим, что x не есть наименьший элемент множества X, и обозначим через $\mathfrak{B}_x^-$ совокупность всех множеств вида $(u, x]$ с $u \in [\leftarrow, x)$. В случае же, когда x — наименьший элемент множества X, положим $\mathfrak{B}_x^- = \sigma^{-1}\{x\} = \{\{x\}\}$. И в том и в другом случае совокупность $\mathfrak{B}_x^-$ непуста и линейно упорядочена, так что фильтруется по убыванию. Тем самым она порождает фильтр, который мы обозначим через $\mathfrak{V}_x^-$, а множества, входящие в его состав, будем называть *левыми окрестностями* элемента x. Ясно, что если $V \in \mathfrak{V}_x^-$, то $x \in V$, так что отображение $\tau^- : x \mapsto \mathfrak{V}_x^-$ $(x \in X)$ является предтопологией на множестве X. Можно показать (предоставляем сделать это читателю), что на самом деле τ^{-1} — топология. Эта топология называется *левой топологией* на X.

Меняя порядок σ на обратный — при этом X остается линейно упорядоченным, — мы заменим совокупность $\mathfrak{B}_x^-$ совокупностью $\mathfrak{B}_x^+$, состоящей (если x не наибольший элемент в данном порядке множества X) из всех промежутков вида $[x, v)$, где $v \in [x, \rightarrow]$, и фильтр $\mathfrak{V}_x^-$ — на фильтр $\mathfrak{V}_x^+$, элементы которого называются *правыми* (относительно данного порядка) *окрестностями* элемента x.

Положим $\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_x^- \cap \mathfrak{V}_x^+$. Ясно, что отображение $\tau: x \mapsto \mapsto \mathfrak{V}_x$ $(x \in X)$ будет предтопологией на множестве X. Докажем ряд свойств этой предтопологии.

I. *При любых u, $v \in X$ промежутки $(u, \rightarrow]$, $[\leftarrow, v)$ и (u, v) представляют собой открытые множества.*

Действительно, для любого $x \in (u, \rightarrow]$, очевидно, $(u, x] \subset \subset (u, \rightarrow]$, так что $(u, \rightarrow] \in \mathfrak{V}_x^-$. По аналогичным соображениям $(u, \rightarrow] \supset [x, \rightarrow] \in \mathfrak{V}_x^+$. Таким образом, $(u, \rightarrow] \in \mathfrak{V}_x$. По этой же схеме доказывается, что и промежуток $[\leftarrow, v)$ служит окрестностью каждого своего элемента. Остается заметить, что $(u, v) = (u, \rightarrow] \cap [\leftarrow, v)$.

Предложение I позволяет доказать

II. *Предтопология τ является топологией.*

В самом деле, можно, очевидно, считать, что множество X не сводится к единственному элементу. Пусть $x \in X$. Если x — наибольший элемент множества X, то $\mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_x^-$, и $\mathfrak{V}_x^-$ будет в этом случае базисом фильтра окрестностей точки x. Но любое множество из $\mathfrak{V}_x^-$ имеет вид $(u, x]$, т. е. в данном случае — вид $(u, \rightarrow]$ и, стало быть, открыто. Аналогичным образом, если x — наименьший элемент множества X, то $\mathfrak{V}_x^+$ будет базисом фильтра окрестностей точки x, причем, как и раньше, $\mathfrak{V}_x^+$ состоит только из открытых множеств. Если, наконец, x не является ни наибольшим, ни наименьшим элементом множества X и $V \in \mathfrak{V}_x$, то, поскольку V входит в $\mathfrak{V}_x^-$ и в $\mathfrak{V}_x^+$, найдутся элементы u, $v \in X$ такие, что $u < x < v$, $V \supset (u, x]$ и $V \supset (x, v)$, так что $V \supset (u, v)$. Поскольку $x \in (u, v)$ и промежуток (u, v) — открытое множество, то и в этом случае фильтр $\mathfrak{V}_x$ имеет базис, состоящий из открытых множеств — открытых промежутков, содержащих элемент x.

Введенная выше топология τ на множестве X называется *интервальной*. Отметим, что линейность порядка в X использовалась при построении топологии τ не в полной мере. Все проведенные выше рассуждения будут справедливы, очевидно, и в том случае, когда для любого $x \in X$ множество $[\leftarrow, x)$ фильтруется по возрастанию, а множество $(x, \rightarrow]$ — по убыванию (мы для простоты оставляем в стороне случай, когда x—наибольший или наименьший элемент множества X). К сожалению, эта возможность реализуется достаточно редко, если только X — не линейно упорядоченное множество.

Пусть $V \in \mathfrak{V}_x$. Так как множество V является и левой окрестностью точки x и этим же свойством обладает промежуток $[\leftarrow, x]$, то пересечение $V \cap [\leftarrow, x]$ также служит левой окрестностью точки x. Нетрудно понять, что совокупность всех левых окрестностей указанного вида будет базисом фильтра $\mathfrak{B}_x^-$. Действительно, пусть $U \in \mathfrak{B}_x^-$. Поскольку $[x, \to] \in \mathfrak{B}_x^+$, то $V = U \cup [x, \to] \in \mathfrak{B}_x$ и, следовательно, $V \cap [\leftarrow, x] = U \cap [\leftarrow, x] \subset U$.

III. *Любой замкнутый промежуток — замкнутое множество.*

Действительно, дополнение промежутка $[u, \to]$ или промежутка $[\leftarrow, v]$ — это промежуток $[\leftarrow, u)$ или соответственно $(v, \to]$, т. е. и в том и в другом случае — открытое множество. Замкнутость промежутка $[u, v]$ $(u, v \in X)$ вытекает из равенства $[u, v] = [u, \to] \cap [\leftarrow, v]$.

Совокупность $\pi(E)$ всех верхних границ множества $E \subset X$ (см. I.3.2) замкнута, поскольку она совпадает с пересечением $\bigcap\limits_{x \in E} [x, \to]$. По этой же причине будет замкнутой и наименьшая содержащая множество E компонента $[E] = \pi^{-1}(\pi(E))$. Следовательно, $\overline{E} \subset [E]$ и, значит, $[\overline{E}] \subset [E]$. Так как соотношение $E \subset \overline{E}$ влечет обратное включение $[E] \subset [\overline{E}]$, то $[E] = [\overline{E}]$. Отсюда получаем

IV. *Множество E топологического пространства X и его замыкание $\overline{E}$ имеют точные верхние границы или нет одновременно, и если имеют, то* $\sup E = \sup \overline{E}$.

Для доказательства достаточно отметить, что точная верхняя граница множества E — это наибольший элемент компоненты $[E]$.

V. *Точная верхняя граница множества E пространства X существует тогда и только тогда, когда замыкание $\overline{E}$ обладает наибольшим элементом. При этом наибольший элемент замыкания и есть* $\sup E$.

Действительно, если u — наибольший элемент замыкания $\overline{E}$, то $u = \sup \overline{E}$, и можно воспользоваться предложением IV. Обратно, предположим, что u есть точная верхняя граница непустого множества $E \subset X$. Если $u \notin \overline{E}$, то дополнение E' множества E служит окрестностью точки u, и так как вследствие непустоты множества E элемент u не может быть наименьшим в X, то найдется такой элемент $v \in X$, что $v < u$ и $E' \supset (v, u]$, так что $E \subset [\leftarrow, v] \cup (u, \to]$. Но понятно, что $E \cap (u, \to] = \varnothing$. Следовательно, $E \subset [\leftarrow, v]$, а это означает, что v — верхняя граница множества E, и мы пришли к противоречию с соотношением $v < u$.

Из предложения V непосредственно следует

VI. *Если непустое замкнутое множество F пространства X имеет точную верхнюю границу, то* $\sup F \in F$.

Заметим, что, поскольку замена порядка в X на обратный не отражается на интервальной топологии в X, предложения IV, V и VI остаются справедливыми, если в них вместо (точных) верхних границ говорить о (точных) нижних границах, а вместо наибольшего — о наименьшем элементе.

VII. *Интервальная топология на X регулярна.*

Действительно, для любого $x \in X$ множество $\{x\} = [x, x]$ замкнуто, поэтому в соответствии с предложением I(1.7) пространство X отделимо. Докажем, что X, кроме того, T_3-пространство. Для этого согласно предложению IV(1.7) достаточно проверить, что любая точка $x \in X$ имеет состоящий из замкнутых множеств базис фильтра окрестностей. Пусть V — окрестность точки x. Убедимся, что тогда в X найдется такой элемент u, что промежуток $[u, x]$ содержится в V и служит левой окрестностью точки x. Это действительно так и притом тривиальным образом, если x — наименьший элемент множества x, так как тогда можно принять $u = x$. В противном случае, учитывая, что V служит левой окрестностью точки x, найдется такой элемент $u_0 \in [\leftarrow, x)$, что $V \supset (u_0, x]$. Если при этом промежуток (u_0, x) пуст, то $(u_0, x] = [x, x]$, и снова можно принять $u = x$. Если же имеется элемент $u \in (u_0, x)$, то $V \supset \supset (u_0, x] \supset [u, x] \supset (u, x]$. Поскольку $u < x$, промежуток $[u, x]$ удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Заменив порядок σ на σ^{-1}, докажем существование такого элемента $v \in X$, что промежуток $[x, v]$ содержится в V и служит правой окрестностью точки x. Так как $[u, v] = [u, x] \cup \cup [x, v]$, промежуток $[u, v]$ будет (замкнутой) окрестностью точки x, причем $[u, v] \subset V$.

Заметим, что, будучи регулярным, пространство X тем более хаусдорфово.

В заключение выясним вопрос о том, когда интервальная топология подмножества совпадает с топологией подпространства. Пусть X — линейно упорядоченное множество с порядком σ, а X_0 — множество в X. Обозначая порядок в X_0, индуцированный порядком σ, через σ_0, а интервальную топологию на X_0 — через τ_{σ_0}, можем сформулировать поставленный вопрос так: когда топология τ_{σ_0} совпадает с топологией τ_0, индуцированной в X_0 интервальной топологией τ на множестве X? Обозначим через $\mathfrak{V}_x^-$ и $\mathfrak{V}_x^+$ фильтр левых и соответственно правых окрестностей элемента $x \in X_0$ (в множестве X_0), а через $\mathfrak{W}_x^-$ и $\mathfrak{W}_x^+$ — фильтры в X_0, состоящие из всех множеств вида $W \cap X_0$, где W — левая или соответственно правая окрестность (в X) элемента $x \in X_0$. По определению топология τ_{σ_0} есть отображение $x \mapsto \mathfrak{V}_x = \mathfrak{V}_x^- \cap \mathfrak{V}_x^+$ $(x \in X_0)$, а топология τ_0, как нетрудно понять, совпадает с отображением $x \mapsto \mathfrak{W}_x =$

$= \mathfrak{W}_x^- \cap \mathfrak{W}_x^+$ $(x \in X_0)$. Поэтому при решении поставленного вопроса можно ограничиться изучением соотношения между фильтрами $\mathfrak{V}_x^-$ и $\mathfrak{W}_x^-$ (и между фильтрами $\mathfrak{V}_x^+$ и $\mathfrak{W}_x^+$).

Пусть $x \in X_0$. Оставляя в стороне тривиальный случай, когда x — наименьший элемент множества X_0 (в этом случае, очевидно, $\mathfrak{V}_x^- = \mathfrak{W}_x^-$), возьмем $V \in \mathfrak{V}_x^-$. Это значит, что в X_0 найдется элемент v, строго меньший, чем x, и такой, что $V \supset \supset (v, x] \cap X_0$. Поскольку $(v, x] \cap X_0 \in \mathfrak{W}_x^-$, то тем самым установлено включение $\mathfrak{V}_x^- \subset \mathfrak{W}_x^-$. Понятно, что $\mathfrak{V}_x^+ \subset \mathfrak{W}_x^+$, так что $\tau_{\sigma_0}(x) = \mathfrak{V}_x \subset \mathfrak{W}_x = \tau_0(x)$ $(x \in X)$. Иначе можно сказать, что топология τ_{σ_0} всегда слабее топологии τ_0.

Докажем, что включение $\mathfrak{V}_x^- \supset \mathfrak{W}_x^-$ равносильно тому, что существует принадлежащая множеству X_0 точная верхняя граница (относительно порядка σ) множества $[\leftarrow, x) \cap X_0$. Действительно, пусть $\mathfrak{W}_x^- \subset \mathfrak{V}_x^-$. Если для любого $u \in [\leftarrow, x)$ пересечение $(u, x) \cap X_0 \neq \varnothing$, то, очевидно, (σ)-$\sup[\leftarrow, x] \cap \cap X_0 = x$. Если же для некоторого $u \in [\leftarrow, x]$ будет $(u, x) \cap \cap X_0 = \varnothing$, то по предположению можно найти $v \in X_0$ так, что $v < x$ и $\{x\} = (u, x] \cap X_0 \supset (v, x] \cap X_0$. Но тогда $[\leftarrow, x) \cap X_0 \subset \subset [\leftarrow, v]$ и v является наибольшим элементом множества $[\leftarrow, x) \cap X_0$. Обратно, пусть существует (σ)-$\sup[\leftarrow, x) \cap X_0 = = u_0$, причем $u_0 \in X_0$. Если, кроме того, $u_0 = x$, то при любом $u \in [\leftarrow, x)$ пересечение $(u, x) \cap X_0 \neq \varnothing$ и, следовательно, при $v \in (u, x) \cap X_0$ имеем $(u, x] \cap X_0 \supset (v, x] \cap X_0$, откуда вытекает включение $\mathfrak{W}_x^- \subset \mathfrak{V}_x^-$. Если же $u_0 < x$, то $\{x\} = (u_0, x] \cap X_0$ и, стало быть, $\mathfrak{V}_x^-$ состоит в этом случае из всех множеств (из X_0), содержащих элемент x, что делает очевидным включение $\mathfrak{W}_x^- \subset \mathfrak{V}_x^-$.

Итак, установлен следующий критерий совпадения топологий τ_{σ_0} и τ_0.

VIII. *Для того чтобы топологии τ_{σ_0} и τ_0 совпадали необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X_0$ пересечения $[\leftarrow, x) \cap X_0$ и $(x, \rightarrow] \cap X_0$, коль скоро они непусты, имели бы первое — точную верхнюю, а второе — точную нижнюю границы, принадлежащие X_0.*

Заметим, что поскольку при $X_0 = X$ совпадение топологий τ_{σ_0} и τ_0, очевидно, имеет место, то любой промежуток $[\leftarrow, x)$ имеет точную верхнюю, а промежуток $(x, \rightarrow]$ — точную нижнюю границу[1]). Из сказанного вытекает, что условия предложения VIII заведомо выполнены, если множество X_0 является

---

[1]) Если, например, промежуток $[\leftarrow, x)$ пуст, то x — наименьший элемент множества X, так что и в этом случае существует $\sup [\leftarrow, x) = x$

промежутком множества X, так как в этом случае для $x \in X_0$ пересечение $[\leftarrow, x) \cap X_0$ также будет промежутком открытым справа, а пересечение $(x, \rightarrow] \cap X_0$ — промежутком, открытым слева. Таким образом, получаем

IX. *Если X_0 — промежуток в множестве X, то топологии τ_{σ_0} и τ_0 совпадают.*

Очевидна также справедливость следующего факта.

X. *Если множество X_0 таково, что каждое его непустое подмножество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы (относительно порядка σ), которые принадлежат множеству X_0, то топологии τ_{σ_0} и τ_0 совпадают.*

Предоставляем читателю убедиться в том, что условия предложения VIII выполнены также в следующих двух случаях. 1. Если X_0 обладает свойством плотности в себе: каждый его открытый промежуток вида (x, y) с $x < y$ непуст. 2. Множество X служит дедекиндовским расширением множества X_0.

1.9. Пусть $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ — конечное семейство топологических пространств и $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ — произведение семейства множеств $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$[2]. Возьмем какую-либо точку $x \in \mathfrak{X}$, $x : \xi \mapsto x_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ и, выбрав при каждом $\xi \in \Xi$ окрестность $U_\xi \in \tau_\xi(x_\xi)$, образуем произведение $\prod_{\xi \in \Xi} U_\xi$. Обозначим через $\mathfrak{B}_x$ совокупность всевозможных произведений такого вида. Если $U = \prod_{\xi \in \Xi} U_\xi$, $V = \prod_{\xi \in \Xi} V_\xi$ — два множества этой совокупности, то, поскольку $V_\xi \cap U_\xi \in \tau_\xi(x_\xi)$ $(\xi \in \Xi)$ и $\prod_{\xi \in \Xi} U_\xi \cap V_\xi = U \cap V$, получим, что $U \cap V \in \mathfrak{B}_x$, следовательно, $\mathfrak{B}_x$ фильтруется по убыванию. Обозначим через $\mathfrak{V}_x$ фильтр $\mathfrak{B}_x$, порожденный совокупностью $\mathfrak{B}_x$. Нетрудно понять, что $x \in U$ для каждого $U \in \mathfrak{V}_x$, так что отображение $\tau : x \mapsto \mathfrak{V}_x$ $(x \in \mathfrak{X})$ — предтопология на $\mathfrak{X}$.

Покажем, что произведение $G = \prod_{\xi \in \Xi} G_\xi$ множеств $G_\xi \subset X_\xi$, каждое из которых открыто в соответствующей топологии, будет множеством, открытым в предтопологии τ — отсюда, в частности, немедленно будет следовать, что τ — топология.

---

[2]) Если $\Xi = \{1, 2, \ldots, n\}$, то произведение $\prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ обозначают обычно символом $\prod_{k=1}^{n} X_k$. Если к тому же все $X_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ совпадают и равны X, то пишут $\prod_{k=1}^{n} X_k = X^n$.

Итак, пусть $x \in G$, $x : \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Поскольку G_ξ — открытое множество, содержащее точку x, найдется окрестность $U_\xi \in \tau_\xi(x_\xi)$ такая, что $U_\xi \subset G_\xi$. Тогда окрестность $U = \prod_{\xi \in \Xi} U_\xi$ точки x в предтопологии τ содержится в G, откуда следует, что множество G открыто.

Топологическое пространство (X, τ) называется *произведением конечного семейства топологических пространств* $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$, а топология τ — *топологией произведения конечного семейства топологических пространств.*

Заметим, что если при образовании совокупности $\mathfrak{B}_x$ брать окрестности U_ξ не из всего фильтра $\tau_\xi(x_\xi)$, а из какого-либо его базиса, то мы снова получим базис фильтра окрестностей точки x в топологии τ.

I. *Произведение конечного семейства хаусдорфовых топологических пространств хаусдорфово.*

Действительно, пусть $x : \{x_\xi\}$, $y : \{y_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — две различные точки из $\mathfrak{X}$ и $\eta \in \Xi$ таково, что $x_\eta \neq y_\eta$. Возьмем непересекающиеся окрестности U_η, V_η соответственно точек x_η, y_η в топологии τ_η пространства X_η. Тогда окрестности точек x, y, у которых все «сомножители» с индексами ξ, отличными от η, совпадают с X, а в качестве «сомножителя» с индексом η выступают выбранные окрестности U_η, V_η, как нетрудно понять, не пересекаются.

1.10. Кратко остановимся на задании топологии в числовых множествах. Расширенная числовая прямая $\overline{\mathbf{R}}$ представляет собой линейно упорядоченное множество, с которым мы всегда будем связывать интервальную топологию. Множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел впредь снабжается топологией, индуцированной из $\overline{\mathbf{R}}$. Как было отмечено в 1.8, такая топология совпадает с интервальной топологией линейно упорядоченного множества $\mathbf{R}$, ибо $\overline{\mathbf{R}}$ — дедекиндовское расширение $\mathbf{R}$.

Отметим несколько специфических фильтрующихся по убыванию совокупностей подмножеств $\overline{\mathbf{R}}$, служащих базисами фильтра окрестностей конечного вещественного числа x. Одна из них состоит из открытых «симметричных» относительно точки x промежутков $(x-r, x+r)$, где $r > 0$, другая — из замкнутых промежутков такого же вида: $[x-r, x+r]$ $(r>0)$. Поскольку множество $\mathbf{N}$ не ограничено в $\mathbf{R}$, в указанном качестве может выступать совокупность $\{(x - 1/n, x + 1/n) : n \in \mathbf{N}\}$ или $\{[x - 1/n, x + 1/n] : n \in \mathbf{N}\}$.

На произведении $\mathbf{R}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ мы всегда будем задавать топологию произведения, так что фильтр окрестностей $\mathfrak{B}_x$ точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью «параллелепипедов» — множеств вида $\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k)$, где $\alpha_k < x_k < \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Понятно, что все «симметричные» относительно точки x произведения $\prod_{k=1}^{n}(x_k - r, x_k + r)$, а также произведения $\prod_{k=1}^{n}[\alpha_k, \beta_k]$ $(\alpha_k < x_k < \beta_k)$, $\prod_{k=1}^{n}[x_k - r, x_k + r]$ $(r > 0)$ образуют базис фильтра окрестностей точки x.

Поскольку множество $\mathbf{C}$ комплексных чисел было определено как произведение $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$, с этим множеством мы всегда будем связывать топологию произведения. Произведение $\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$ также будет снабжаться топологией произведения.

Отметим, наконец,

I. *Множество* $A \subset \overline{\mathbf{R}}$ *связно в том и только в том случае, если A — промежуток.*

§ 2. СХОДИМОСТЬ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В топологическом (или хотя бы в предтопологическом) пространстве с каждым элементом связана некая «стандартная шкала», характеризующая «близость » к данному элементу,— фильтр окрестностей данного элемента. Сравнивая какую-либо другую «шкалу», т. е. фильтр в совокупности всех множеств данного пространства, мы и приходим к понятию сходимости, которое играет основополагающую роль в анализе.

2.1. Пусть X — топологическое пространство с топологией $\tau : x \mapsto \mathfrak{B}_x$ $(x \in X)$. Фильтр $\mathfrak{U}$ в X (напомним, что так мы договорились называть собственные фильтры в $\mathfrak{P}(X)$) называется *сходящимся*, если существует такая точка $x \in X$, что $\mathfrak{U}$ тоньше фильтра $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки x. При этом будем говорить, что фильтр $\mathfrak{U}$ *сходится к точке* x, и писать $\mathfrak{U} \to x$. Совокупность всех точек, к которым сходится данный сходящийся фильтр $\mathfrak{U}$, назовем *предельным множеством* фильтра $\mathfrak{U}$ и обозначим через $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}$. Если предельное множество фильтра $\mathfrak{U}$ состоит из единственного элемента, этот элемент называется *пределом фильтра* $\mathfrak{U}$ и обозначается через $\lim \mathfrak{U}$.

Совокупность всех сходящихся фильтров обладает, очевидно, свойством «нормальности».

I. *Если* $\mathfrak{U}_0$ *— сходящийся фильтр в* X, *а фильтр* $\mathfrak{U}$ *в* X *тоньше, чем* $\mathfrak{U}_0$, *то и он также сходится, причем* $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \supset \operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0$.

Перефразируя предложение II(1.4) в терминах сходящихся фильтров, получаем

II. *Если E — множество в топологическом пространстве X и x — точка прикосновения этого множества, то существует сходящийся к x фильтр $\mathfrak{U}$, включающий в себя множество E.*

Обратно, если $\mathfrak{U}$ — сходящийся фильтр, зацепляющий множество E, то $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset \bar{E}$.

Напомним (см. I.7.1), что мы говорим: фильтр $\mathfrak{U}$ зацепляет множество E, если оно имеет непустое пересечение с каждым множеством, входящим в состав фильтра $\mathfrak{U}$. Это условие означает, что $\mathfrak{U} \vee \mathfrak{S}_E \in \mathbf{F}_0$, где через $\mathfrak{S}_E$ обозначен фильтр, состоящий из всех множеств, содержащих данное множество E.

Докажем предложение II. Полагая $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}_x \vee \mathfrak{S}_E$, в соответствии с предложением IV (I.7.2) имеем $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_0$. В силу предложения I $\mathfrak{U} \to x$ и остается заметить, что $E \in \mathfrak{S}_E \subset \mathfrak{U}$.

Если в условиях второй части предложения фильтр $\mathfrak{U}$ сходится к точке x, то $\mathfrak{B}_x \vee \mathfrak{S}_E \supset \mathfrak{U} \vee \mathfrak{S}_E$. Поэтому $\mathfrak{B}_x \vee \mathfrak{S}_E \in \mathbf{F}_0$. Используя предложение II(1.4), заключаем, что $x \in \bar{E}$, т. е. что $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset \bar{E}$.

Предложение II приводит к следующему критерию замкнутости множества.

III. *Для того чтобы множество F топологического пространства X было замкнутым, необходимо, чтобы для любого сходящегося фильтра $\mathfrak{U}$ в X, зацепляющего множество F, было $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset F$, и достаточно, чтобы это соотношение имело место для каждого сходящегося фильтра $\mathfrak{U}$ в X, включающего множество F.*

Рассмотрим фильтр $\mathfrak{U}$ в пространстве X и обозначим через $L_{\mathfrak{U}}$ пересечение $\bigcap\limits_{U \in \mathfrak{U}} \bar{U}$.

IV. Если $x \in L_{\mathfrak{U}}$, *то существует фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, более тонкий, чем $\mathfrak{U}$, и сходящийся к точке x. Обратно, если фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X тоньше, чем $\mathfrak{U}$, и сходится, то* $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset L_{\mathfrak{U}}$. *В частности, если сходится сам фильтр $\mathfrak{U}$, то* $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset L_{\mathfrak{U}}$[3]).

В самом деле, пусть $x \in L_{\mathfrak{U}}$. Поскольку фильтр $\mathfrak{U}_x$ зацепляет любое множество $U \in \mathfrak{U}$, т. е. поскольку пересечение $U \cap V$ непусто, каковы бы ни были $U \in \mathfrak{U}$, $V \in \mathfrak{B}_x$, то $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U} \vee \mathfrak{B}_x$ будет фильтром в X, очевидно, сходящимся к x

---

[3]) В связи с этим предложением элементы множества $L_{\mathfrak{U}}$ называют часто *точками прикосновения фильтра* $\mathfrak{U}$, хотя, строго говоря, этот термин и не вполне корректен.

и более тонким, чем $\mathfrak{U}$. Обратно, если фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X тоньше фильтра $\mathfrak{U}$ и сходится, то вследствие того, что фильтр $\mathfrak{U}_0$ зацепляет каждое множество, входящее в его состав, и тем более любое множество $U \in \mathfrak{U}$, то на основании предложения II $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset L_{\mathfrak{U}_0} \subset L_{\mathfrak{U}}$.

V. *Если* $\mathfrak{U}$ — *такой ультрафильтр в* X, *что* $L_{\mathfrak{U}} \neq \varnothing$, *то* $\mathfrak{U}$ *сходится и* $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} = L_{\mathfrak{U}}$.

Действительно, возьмем $x \in L_{\mathfrak{U}}$. Поскольку $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр, фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, более тонкий, чем $\mathfrak{U}$, совпадает с $\mathfrak{U}$. Поэтому на основании предложения IV $\mathfrak{U}$ сходится к x, т. е. $x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{U}$. Следовательно, $L_{\mathfrak{U}} \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{U}$ и, значит, снова на основании предложения IV $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} = L_{\mathfrak{U}}$.

Из предложения IV вытекает следующий критерий существования предела у сходящегося фильтра.

VI. *Для того чтобы каждый сходящийся фильтр в* X *имел предел, необходимо и достаточно, чтобы* X *было хаусдорфовым пространством.*

Действительно, согласно предложению II(1.7) X будет хаусдорфовым пространством в том и только в том случае, когда $L_{\mathfrak{V}_x} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$. Так как для сходящегося к точке x фильтра $\mathfrak{U}$ в X имеем согласно предложению IV $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset L_{\mathfrak{U}} \subset L_{\mathfrak{V}_x}$, то из сказанного тотчас же вытекает достаточность условия предложения. Чтобы доказать необходимость, возьмем $x \in X$ и $y \in L_{\mathfrak{V}_x}$. В силу предложения IV существует сходящийся к точке y фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, более тонкий, чем $\mathfrak{V}_x$, и тем самым сходящийся к x. Поэтому, если фильтр $\mathfrak{U}_0$ имеет предел, то должно быть $y = x$ и, стало быть, $L_{\mathfrak{V}_x} = \{x\}$. Этим и доказана необходимость условия.

Для одного важного класса сходящихся фильтров для существования предела оказывается достаточной лишь отделимость пространства.

VII. *Если сходящийся фильтр* $\mathfrak{U}$ *в* X *таков, что пересечение* $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$ *непусто, и пространство* X *отделимо, то существует предел* $\lim \mathfrak{U}$, *причем* $\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U = \{\lim \mathfrak{U}\}$.

В самом деле, пусть $x \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U$, $y \in \operatorname{Lim} \mathfrak{U}$. Поскольку $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_y$, а X — отделимое пространство, то $\{x\} \subset \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} U \subset$ $\subset \bigcap_{U \in \mathfrak{V}_y} U = \{y\}$, так что $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} = \{x\}$.

Заметим, что в условиях предложения VII множество $L_{\mathfrak{U}}$ может содержать элементы, отличные от $\lim \mathfrak{U}$.

Поскольку обычно фильтры задаются не сами по себе, а указанием некоторого своего базиса, имеет смысл распространить понятие сходимости на базисы фильтров в X.

Рассмотрим фильтрующуюся по убыванию совокупность $\mathfrak{E}$ непустых подмножеств множества X, и пусть X_1 — множество, содержащее объединение $\bigcup\limits_{e\in\mathfrak{E}} e$. Пару $(\mathfrak{E}, X_1)$ будем называть *предфильтром в множестве* X_1[4]. Предфильтр $\mathfrak{E}$ в топологическом пространстве X называется *сходящимся*, если сходится фильтр $\mathfrak{U} = \widetilde{\mathfrak{E}}$ в X, порожденный множеством $\mathfrak{E}$. По определению полагаем, кроме того, $\operatorname{Lim} \mathfrak{E} = \operatorname{Lim} \mathfrak{U}$ и для $x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{E}$ пишем $\mathfrak{E} \to x$ и говорим, что *предфильтр* $\mathfrak{E}$ *сходится к точке* x. В соответствующих случаях используется обозначение $\operatorname{Lim} \mathfrak{E}$ и термин *предел предфильтра* $\mathfrak{E}$.

Если $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ — фильтры в X, а $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — их базисы, то соотношение $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2$ между фильтрами равносильно тому, что множество $\mathfrak{E}_1$ коинициально по отношению к множеству $\mathfrak{E}_2$ (см. I. 7.1): для каждого элемента $E \in \mathfrak{E}_2$ может быть указан элемент $e \in \mathfrak{E}_1$ такой, что $e \subset E$. Рассматривая множества $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ как предфильтры в X, мы будем писать в этом случае $\mathfrak{E}_1 \prec \mathfrak{E}_2$[5]. Если использовать это обозначение, то предложение I остается справедливым без каких-либо изменений в формулировке и в том случае, когда в нем под $\mathfrak{U}_0$ и $\mathfrak{U}_1$ понимаются не фильтры, а лишь предфильтры.

Предложения II и V также сохраняют силу при таком расширительном толковании, поскольку если какой-либо предфильтр $\mathfrak{E}$ в X зацепляет множество E, то будет зацеплять E и порожденный множеством $\mathfrak{E}$ фильтр $\widetilde{\mathfrak{E}}$. Нетрудно заметить, что если $\mathfrak{U}$ — фильтр, порожденный предфильтром $\mathfrak{E}$ в X, то $\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}} U = \bigcap\limits_{U\in\mathfrak{E}} U$. Это соображение позволяет распространить результаты предложений IV, VI и VII на сходящиеся предфильтры.

Следующее предложение показывает, что говорить о сходимости фильтрующейся по убыванию совокупности $\mathfrak{E}$ (а не предфильтра) не вполне корректно.

VIII. *Пусть X — топологическое пространство, X_0 — его подпространство и $\mathfrak{E}$ — фильтрующаяся по убыванию сово-*

[4]) В обозначении предфильтра мы, как это водится в подобных случаях, будем опускать указание на множество X_1, говоря, таким образом, просто о предфильтре $\mathfrak{E}$ в X_1 или даже только о предфильтре $\mathfrak{E}$.

[5]) Следует иметь в виду, что отношение коинициальности в множестве всех предфильтров в X будет лишь предпорядком: если одновременно $\mathfrak{E}_1 \prec \mathfrak{E}_2$ и $\mathfrak{E}_2 \prec \mathfrak{E}_1$ (в этом случае о предфильтрах $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ говорят, что они *эквивалентны*), то совпадают не сами предфильтры, а лишь порожденные ими фильтры $\widetilde{\mathfrak{E}_1}$ и $\widetilde{\mathfrak{E}_2}$.

купность непустых подмножеств пространства X_0. *Если предфильтр* $(\mathfrak{C}, X_0)$ *сходится* (*в пространстве* X_0), *то сходится и предфильтр* $(\mathfrak{C}, X)$ (*в пространстве* X), *причем* $\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X_0) = [\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X)] \cap X_0$. *Обратно, если предфильтр* $(\mathfrak{C}, X)$ *сходится и пересечение* $[\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X)] \cap X_0$ *непусто, то будет сходящимся и предфильтр* $(\mathfrak{C}, X_0)$.

Действительно, пусть $x \in X_0$. Фильтр $\mathfrak{V}_x^0$ окрестностей точки x в пространстве X_0 состоит из всех множеств вида $V \cap X_0$ $(V \in \mathfrak{V}_x)$, и, следовательно, совокупность $\mathfrak{V}_x^0$ коинициальна по отношению к фильтру $\mathfrak{V}_x$. Поэтому, если предфильтр $(\mathfrak{C}, X_0)$ сходится к точке $x \in X_0$, то $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{V}_x^0 \supset \mathfrak{V}_x$, так что предфильтр $(\mathfrak{C}, X_0)$ сходится к x. Отсюда получаем, что $\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X_0) \subset \mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X)$. Если теперь под x понимать точку пространства X_0, к которой сходится предфильтр $(\mathfrak{C}, X)$, то, поскольку $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{P}(X_0)$, множество $\mathfrak{C}$, будучи коинициальным по отношению к множеству $\mathfrak{V}_x$, будет коинициальным и по отношению к множеству $\mathfrak{V}_x^0$, а это означает, что $(\mathfrak{C}, X_0) \to x$. Вместе с предыдущим это дает:

$$\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X_0) = X_0 \cap \mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X).$$

IX. *Если в условиях предложения* VIII *множество* X_0 *замкнуто в пространстве* X, *то предфильтры* $(\mathfrak{C}, X_0)$ *и* $(\mathfrak{C}, X)$ *сходятся или нет одновременно и, в случае сходимости,* $\mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X_0) = \mathrm{Lim}(\mathfrak{C}, X)$.

Для доказательства достаточно, заметив, что совокупность $\mathfrak{C}$ зацепляет множество X_0, воспользоваться предложением V.

Рассмотрим конечное семейство $\{X_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ топологических пространств и их произведение $\mathfrak{X} = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ (см. 1.9). Через P_λ $(\lambda \in \Lambda)$, как обычно, обозначаем проекцию произведения $\mathfrak{X}$ на пространство X_λ, т. е. $P_\lambda : \varphi \mapsto \varphi(\lambda)$ $(\varphi \in \mathfrak{X})$.

X. *Предфильтр* $\mathfrak{C}$ *в* $\mathfrak{X}$ *сходится тогда и только тогда, когда при любом* $\lambda \in \Lambda$ *сходятся* (*в пространстве* X_λ) *предфильтры* $P_\lambda\langle\mathfrak{C}\rangle$. *Если условие выполнено, то* $\mathrm{Lim}\,\mathfrak{C} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Lim}\, P_\lambda \langle\mathfrak{C}\rangle$.

В самом деле, возьмем $\lambda \in \Lambda$ и обозначим через $\tau_\lambda : x \mapsto \mathfrak{V}_x^\lambda$ $(x \in X_\lambda)$ топологию пространства X_λ. Если $\varphi \in \mathfrak{X}$, то под $\mathfrak{S}_\varphi$ будем понимать совокупность всех множеств вида $\prod_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$, где $V_\lambda \in \mathfrak{V}_{\varphi(\lambda)}^\lambda$. Совокупность $\mathfrak{S}_\varphi$ служит, как известно, базисом фильтра окрестностей точки φ в пространстве $\mathfrak{X}$. Поэтому сходимость предфильтра $\mathfrak{C}$ к точке $\varphi \in \mathfrak{X}$ равносильна его коинициальности по отношению к $\mathfrak{S}_\varphi$. Если указанное обстоятельство имеет место, то при любом $\lambda \in \Lambda$ предфильтр $P_\lambda\langle\mathfrak{E}_\varphi\rangle$ в X_λ будет коинициален по отношению к предфильтру $P_\lambda\langle\mathfrak{S}_\varphi\rangle$ в X_λ, который, очевидно, совпадает с фильтром $\mathfrak{B}^\lambda_{\varphi(\lambda)}$, так что $P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle \to \varphi(\lambda)$ и, следовательно, $\operatorname{Lim}\mathfrak{E} \subset \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Lim} P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle$.

Обратно, предположим, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ сходится предфильтр $P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle$. Возьмем $x_\lambda \in P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle$ и положим $\varphi : \lambda \mapsto x_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. Так как любое множество $E \in \mathfrak{X}$ содержится, очевидно, в произведении $\prod_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda[E]$, то предфильтр $\mathfrak{E}$ коинициален по отношению к предфильтру $\overline{\mathfrak{E}}$ в $\mathfrak{X}$, состоящему из всех произведений вида $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, где $A_\lambda \in P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle$ $(\lambda \in \Lambda)$. Но $\overline{\mathfrak{E}}$ коинициален по отношению к предфильтру $\mathfrak{S}_\varphi$; таким образом, $\mathfrak{E} \to \varphi$ и $\operatorname{Lim}\mathfrak{E} \supset \prod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Lim} P_\lambda\langle\mathfrak{E}\rangle$.

В заключение заметим, что говорить о сходимости фильтров (и предфильтров) в X можно и в том случае, когда X — лишь предтопологическое пространство. Ясно, что фильтр $\mathfrak{U}$, сходящийся в предтопологическом пространстве X, будет сходиться и в ассоциированном с X топологическом пространстве. В связи с этим, если в предложении III под замыканием множества E в предтопологическом пространстве понимать замыкание этого множества в ассоциированной топологии, то результат предложения III останется справедливым. При аналогичном понимании замкнутости будет верным и результат предложения V, но лишь в части его необходимости. Формулировки предложений IV, VI—VIII для случая предтопологического пространства X мы предоставляем читателю.

2.2. Нередко фильтры (а точнее предфильтры) в множестве X возникают как «образы» фильтрующихся (по убыванию) совокупностей множеств при некотором соответствии с областью прибытия X. Если множество X наделено структурой топологического (или хотя бы предтопологического) пространства, то это позволяет говорить о сходимости рассматриваемого соответствия.

Итак, пусть X — топологическое пространство. Рассмотрим множество T и соответствие (F, T, X). Пусть $\mathfrak{A}$ — фильтрующаяся совокупность множеств (здесь и всюду ниже в этом пункте — по убыванию). Совокупность $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ всех множеств вида $F[A]$ $(A \in \mathfrak{A})$ (см. IV (I.2.1)) фильтруется по убыванию (см. I(I.7.1))[6]). Если $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ состоит из непустых множеств, то эту совокупность можно рассматривать как пред-

[6]) Допуская некоторую вольность, мы называем образ $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ совокупности $\mathfrak{A}$ при отношении $\widehat{F}$ (см. 1.2.1) образом этой совокупности при отношении F.

фильтр в пространстве X. В случае, когда этот предфильтр сходится, говорят, что *сходится соответствие F по фильтрующейся совокупности* $\mathfrak{U}$. При этом множество $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F = \mathrm{Lim}\, F\langle\mathfrak{A}\rangle$ называют *предельным множеством соответствия F* (по $\mathfrak{A}$) и, если $x \in \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$, говорят, что *соответствие F сходится по $\mathfrak{A}$ к точке x* (*в обозначениях* $F \underset{\mathfrak{A}}{\to} x$). В надлежащих случаях говорят о *пределе* $\lim_{\mathfrak{A}} F$ *соответствия F по* $\mathfrak{A}$.

Отметим, что если фильтрующиеся совокупности $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ эквивалентны, т. е. коинициальны одна другой, то это же самое справедливо, конечно, и для их образов $F\langle\mathfrak{A}_1\rangle$ и $F\langle\mathfrak{A}_2\rangle$. Поэтому в такой ситуации сходимость соответствия F по $\mathfrak{A}_1$ или по $\mathfrak{A}_2$ имеет место или нет одновременно, причем, понятно, в положительном случае $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}_1} F = \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}_2} F$.

Из определения ясно, что говорить о сходимости соответствия F по фильтрующейся совокупности $\mathfrak{A}$ можно лишь в том случае, когда образ $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ не содержит пустого множества. Так как, обозначив через T_0 область определения $D(F)$ данного соответствия, имеем $F[A] = F[A \cap T_0]$ для любого множества $A \in \mathfrak{A}$, а последнее множество непусто одновременно с пересечением $A \cap T_0$, то для сходимости F по $\mathfrak{A}$ необходимо, чтобы фильтрующаяся совокупность $\mathfrak{A}$ зацепляла область определения $D(F)$ соответствия F. Более того, из сказанного вытекает

I. *Пусть $\mathfrak{A}$ — зацепляющая область определения $D(F) = T_0$ соответствия F (из T в топологическое пространство X) фильтрующаяся совокупность множеств. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$ совокупность всех множеств вида $A \cap T_0$ ($A \in \mathfrak{A}$). Тогда соответствие F одновременно сходится или нет как по $\mathfrak{A}$, так и по $\mathfrak{A}_0$. При этом, в случае сходимости,* $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F = \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}_0} F$.

Доказательство этого факта очевидно, если заметить, что $F\langle\mathfrak{A}\rangle = F\langle\mathfrak{A}_0\rangle$.

Высказанное предложение позволяет, говоря о сходимости соответствия F по $\mathfrak{A}$, ограничиться, когда это удобно, случаем совокупности $\mathfrak{A}$, состоящей из подмножеств области определения $D(F)$ соответствия F.

Пусть, как и выше, F — соответствие из множества T в топологическое пространство X, а F_0 — его сужение из подмножества S множества T в замкнутое подпространство X_0 пространства X.

II. *Если $\mathfrak{A}$ — фильтрующаяся совокупность множеств, зацепляющая область определения $D(F_0)$ соответствия F_0, и такая, что соответствие F сходится по $\mathfrak{A}$, то и соответствие F_0 сходится по $\mathfrak{A}$, причем* $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F_0 \supset \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$.

Действительно, образ $F_0\langle\mathfrak{A}\rangle$ коинициален по отношению к образу $F\langle\mathfrak{A}\rangle$. Стало быть, в силу предложения I(2.1), предфильтр $(F_0\ \langle\mathfrak{A}\rangle,\ X)$ сходится, причем $\mathrm{Lim}(F_0\langle\mathfrak{A}\rangle, X)\supset \mathrm{Lim}(\langle F\mathfrak{A}\rangle, X) = \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$. Применение предложения IX(2.1) завершает доказательство.

Если под F_0 подразумевать селектор f соответствия F (см. I. 2.7), то условие зацепления множеством $\mathfrak{A}$ области определения $D(f)$ отображения f, очевидно, выполнено (коль скоро оно соблюдено для F). Поэтому

III. *Любой селектор f сходящегося по фильтрующейся совокупности $\mathfrak{A}$ соответствия F сходится по $\mathfrak{A}$, причем* $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} f \supset$ $\supset \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$.

Обращение предложения II, разумеется, неверно. Однако имеется хотя и весьма частный, но достаточно часто встречающийся случай, когда из сходимости сужения можно вывести факт сходимости самого соответствия.

Пусть B — множество, среди подмножеств которого имеется множество из данной фильтрующейся совокупности $\mathfrak{A}$ (так что $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{P}(B)\neq\varnothing$). В качестве F_0 возьмем отношение $F|_B =$ $= F\cap(B\times X)$. За S примем произвольное множество, содержащее область определения $D(F|_B) = B\cap D(F)$ отношения $F|_B$, а за X_0 — подпространство пространства X, содержащее замыкание (в X) $\overline{R(F)}$ области значений данного соответствия.

IV. *Соответствия $(F,\ T,\ X)$ и $(F|_B,\ S,\ X_0)$ сходятся по $\mathfrak{A}$ или нет одновременно. В случае сходимости* $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F|_B = \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$.

Действительно, совокупность $\mathfrak{A}$ одновременно зацепляет или нет области определения отношений $F|_B$ и F. Поэтому, учитывая результат предложений II и I, достаточно рассмотреть случай сходимости (по $\mathfrak{A}$) соответствия $F|_B$. Положим $\mathfrak{A}_0 =$ $= \{A\in\mathfrak{A} : A\subset B\}$. Предфильтр $F|_B\langle\mathfrak{A}\rangle = F\langle\mathfrak{A}_0\rangle$ в X_0 сходится. Но в смысле коинициальности $\mathfrak{A}_0$ эквивалентна данной совокупности $\mathfrak{A}$. Поэтому будет сходящимся и предфильтр $(F\langle\mathfrak{A}\rangle,\ X_0)$, а, следовательно, на основании предложения VIII(2.1) и предфильтр $(F\langle\mathfrak{A}\rangle,\ X)$. При этом, поскольку образ $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ зацепляет, очевидно, область значений $R(F)$ соответствия F, в силу предложения III(2.1) $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F = \mathrm{Lim}(F\langle\mathfrak{A}\rangle, X)\subset\overline{R(F)}\subset X_0$. Тем самым, снова используя предложение VIII(2.1), можем написать

$$\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F|_B = \mathrm{Lim}(F\langle\mathfrak{A}\rangle, X_0) = X_0\cap\mathrm{Lim}(F\langle\mathfrak{A}\rangle, X) = \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F.$$

Считая, в соответствии с предложением I, что $\mathfrak{A}$ состоит из подмножеств области определения соответствия F, и полагая в предложении IV $B = S = D(F)$, $X_0 = \overline{R(F)}$, получим

V. *Соответствия* (F, T, X) *и* $(F, D(F), \overline{R(F)})$ *сходятся или нет по* $\mathfrak{A}$ *одновременно и, в случае сходимости, имеют одинаковые предельные множества.*

Заметим, что в этом предложении, как явствует из предложения VIII(2.1), нельзя, вообще говоря, заменить замыкание $\overline{R(F)}$ самой областью значений $R(F)$.

Пусть $\{X_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ — конечное семейство топологических пространств и $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — их произведение. Сохраняя и прочие обозначения, введенные в связи с предложением X(2.1), рассмотрим соответствие F из множества T в пространство $\mathfrak{X}$. Напомним (см. пункт I.2.7), что суперпозиция $F_\lambda = P_\lambda \circ F$ $(\lambda \in \Lambda)$, рассматриваемая как соответствие из T в X_λ, называется координатным соответствием данного соответствия F. Отметим, что $D(F_\lambda) = D(F)$ $(\lambda \in \Lambda)$.

VI. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— фильтрующаяся совокупность множеств. Соответствие* F *сходится по* $\mathfrak{A}$ *в том и только в том случае, когда сходятся (по* $\mathfrak{A}$*) все координатные соответствия* F_λ $(\lambda \in \Lambda)$. *При этом, в случае сходимости,* $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F_\lambda$.

Для доказательства следует воспользоваться предложением X(2.1) применительно к предфильтру $\mathfrak{E} = F\langle\mathfrak{A}\rangle$.

В случае $\Lambda = \{1, 2\}$ и $X_1 = X_2 = \mathbf{R}$, трактуя произведение $\mathbf{R}^\Lambda$ как множество $\mathbf{C}$ всех комплексных чисел, снабженное топологией произведения, обозначают проекцию P_1 через Re, а P_2 — через Im (см. I.5.6), а координатные соответствия F_1 и F_2 данного соответствия F (из T и $\mathbf{C}$) — через $\mathrm{Re}\, F$ и $\mathrm{Im}\, F$ (вместо $\mathrm{Re} \circ F$ и $\mathrm{Im} \circ F$) и называют *вещественной и мнимой* частью соответствия F. Так как $\mathbf{R}$, а стало быть и $\mathbf{C}$,— хаусдорфово пространство (см. 1.8, 1.9), то предложение VI дает в рассматриваемом случае, что для существования предела $\lim_{\mathfrak{A}} F$ соответствия F из T в $\mathbf{C}$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Re}\, F$ и $\lim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Im}\, F$. При этом $\mathrm{Re} \lim_{\mathfrak{A}} F = \lim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Re}\, F$, $\mathrm{Im} \lim_{\mathfrak{A}} F = \lim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Im}\, F$.

Остановимся еще на случае, когда в роли пространства X выступает линейно упорядоченное множество, снабженное интервальной топологией (см. 1.8). Поскольку при этом X хаусдорфово, сходимость и существование предела означает в этом случае одно и то же (предложение VII(2.1)).

VII. *Пусть* F *— соответствие из* T *в* X, *имеющее предел* $\lim_{\mathfrak{A}} F$ *по данной фильтрующейся совокупности множеств* $\mathfrak{A}$. *Если* $x \in X$ *таков, что* $x > \lim_{\mathfrak{A}} F$ (*или* $x < \lim_{\mathfrak{A}} F$), *то можно указать такое множество* $A \in \mathfrak{A}$, *что* $F[A] < x$, *т. е. что* $F[A] \subset [\leftarrow, x]$ (*или соответственно что* $F[A] > x$).

Для доказательства достаточно заметить, что промежуток $[\leftarrow, x)$ служит окрестностью точки $\lim_{\mathfrak{A}} F$.

VIII. *В условиях предложения* VII *существует множество* $A \in \mathfrak{A}$, *образ которого* $F[A]$ *ограничен.*

Действительно, можно ограничиться доказательством существования таких множеств A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$, что образ $F[A_1]$ ограничен сверху, а образ $F[A_2]$ — снизу. Если $\lim_{\mathfrak{A}} F$ служит наибольшим элементом множества X, то в качестве A_1 можно взять любое множество из $\mathfrak{A}$. В противном случае в X найдется такой элемент x, что $x > \lim_{\mathfrak{A}} F$, и можно воспользоваться предложением VII. По той же схеме обосновывается существование множества A_2.

IX. *Пусть* f_1 *и* f_2 — *такие отображения из множества* T *в пространство* X, *что фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств* $\mathfrak{A}$ *зацепляет множество* $D(f_1) \cap D(f_2)$, *и существует такое множество* $A_0 \in \mathfrak{A}$, *что* $f_1(t) \leqslant f_2(t)$ *для любого* $t \in A_0 \cap D(f_1) \cap D(f_2)$. *Тогда, если существуют пределы* $\lim_{\mathfrak{A}} f_1$ *и* $\lim_{\mathfrak{A}} f_2$, *то* $\lim_{\mathfrak{A}} f_1 \leqslant \lim_{\mathfrak{A}} f_2$.

Действительно, допустим, что $x_1 = \lim_{\mathfrak{A}} f_1 > \lim_{\mathfrak{A}} f_2 = x_2$. Если при этом промежуток (x_2, x_1) непуст и $x \in (x_2, x_1)$, то, согласно предложению VII, найдутся такие множества A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$, что $f_1[A_1] > x$, $f_2[A_2] < x$. Поскольку совокупность $\mathfrak{A}$ включает в себя множество A, содержащееся в $A_0 \cap A_1 \cap A_2$ и по условию пересечение $L = A \cap D(f_1) \cap D(f_2) \neq \varnothing$, то для $t \in L$ имеем $f_2(t) < x < f_1(t)$, что противоречит предположениям о f_1 и f_2. В случае, когда $(x_2, x_1) = \varnothing$, промежуток $[x_1, \rightarrow] = [x_2, \rightarrow]$ является окрестностью точки x_1, а промежуток $[\leftarrow, x_2] = [\leftarrow, x_1]$ — окрестностью точки x_2, так что в этом случае можно указать множества A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$ так, что $f_1[A_1] \geqslant x_1$ и $f_2[A_2] \leqslant x_2$. Рассуждая по той же схеме, что и выше, мы вновь придем к противоречию с условиями предложения. Таким образом, $x_1 \leqslant x_2$.

Заметим, что результат предложения IX при соответствующих изменениях в формулировке имеет место и для произвольных (а не только однозначных) соответствий.

В условиях предложения IX рассмотрим еще такое отображение f из T в X, что $D(f) \subset D(f_1) \cap D(f_2)$. Предполагая, что совокупность $\mathfrak{A}$ зацепляет область определения $D(f)$ отображения f, докажем

X. *Если существует такое множество* $A_0 \in \mathfrak{A}$, *что* $f_1(t) \leqslant f(t) \leqslant f_2(t)$ *для каждого* $t \in A_0 \cap D(f)$ *и пределы* $\lim_{\mathfrak{A}} f_1$ *и* $\lim_{\mathfrak{A}} f_2$ *совпадают, то отображение* f *также имеет предел, причем в силу предложения* IX

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A}} f_1 = \lim_{\mathfrak{A}} f_2.$$

В самом деле, пусть V — промежуток, который служит окрестностью точки $x = \lim_{\mathfrak{A}} f_1 = \lim_{\mathfrak{A}} f_2$. Найдем такие множества $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$, что $f_1[A_1], f_2[A_2] \subset V$, и пусть A — множество из $\mathfrak{A}$, содержащееся в пересечении $A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Для любого $t \in A \cap D(f)$ будет тогда $f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \subset V$, т. е. $f[A] \subset V$. Поскольку окрестности V указанного вида образуют базис фильтра окрестностей точки x, доказательство на этом завершается.

2.3. Конкретизируя описанную в 2.2 общую схему, мы получим различные частные случаи понятия сходящегося соответствия.

Рассмотрим в качестве T упорядоченное множество (с порядком σ), фильтрующееся по возрастанию. Вместо $(\xi, \eta) \in \sigma$ мы пишем, как обычно, $\xi \leqslant \eta$ и говорим, что ξ меньше η. Всякое соответствие, область определения которого — фильтрующееся по возрастанию множество, будем называть *фильтрующимся* (по возрастанию)[7].

Примем в качестве $\mathfrak{A}$ совокупность всех множеств вида $\sigma[\xi] = [\xi, \to]$ $(\xi \in T)$. Так как отображение $\xi \mapsto \sigma[\xi]$ $(\xi \in T)$ является антиизоморфизмом упорядоченного множества T в упорядоченное множество $\mathfrak{P}(T)$ (см. I.3.1), совокупность $\mathfrak{A}$ так же, как и T, фильтруется, но, очевидно, по убыванию, т. е. так, как это требует схема предыдущего пункта. Пусть Ξ — подмножество множества T. Выясним, при каких условиях совокупность $\mathfrak{A}$ зацепляет множество Ξ. Если $A \in \mathfrak{A}$ (а это означает, что при некотором $\xi \in T$ будет $A = [\xi, \to[$), то непустота пересечения $A \cap \Xi$ равносильна тому, что в множестве Ξ имеется элемент η, больший, чем ξ, т. е. что множество Ξ конфинально по отношению к T. Таким образом, множество Ξ зацепляется совокупностью $\mathfrak{A}$ в том и только в тóм случае, когда Ξ конфинально по отношению к T. Так как конфинальное множество также, очевидно, фильтруется, необходимым условием сходимости (по $\mathfrak{A}$) соответствия F из Ξ в топологическое пространство X является фильтруемость рассматриваемого соответствия F.

Итак, пусть F — фильтрующееся соответствие из Ξ в топологическое пространство X. В рассматриваемом случае для обозначения сходимости по $\mathfrak{A}$ и других связанных с ней понятий употребляется специфическая символика, обусловленная

---

[7]) Если область определения некоторого соответствия фильтруется по убыванию, то и о соответствии говорят, что оно фильтруется по убыванию. Поскольку замена порядка σ обратным порядком σ^{-1} превращает фильтрующееся по убыванию соответствие в соответствие, фильтрующееся по возрастанию, не возникает необходимости рассматривать по отдельности оба случая фильтруемости соответствия.

тем, что в данной обстановке совокупность $\mathfrak{A}$ определена однозначно и поэтому указание на нее излишне. В связи с этим говорят просто с *сходимости фильтрующегося соответствия* F и вместо $\mathrm{Lim}_{\mathfrak{A}} F$ пишут $\mathrm{Lim}\, F$. Аналогичным образом модифицируют и обозначение предела: $\underset{\longrightarrow}{\lim} F$[8]).

Укажем еще на одну исторически сложившуюся систему обозначений, хотя и не совсем корректную, но обладающую известными удобствами (и потому широко используемую в литературе). Она относится по преимуществу к случаю, когда F однозначно и $D(F) = \Xi$. В этой системе обозначений, например, соотношение $x \in \mathrm{Lim}\, F$ записывают в виде $F(\xi) \underset{\xi \in \Xi}{\longrightarrow} x$ или даже просто $F(\xi) \to x$. В случае же, когда Ξ совпадает с множеством $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, т. е. когда F — последовательность точек пространства X, пишут $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (или проще $x_n \to x$). Для обозначения предела $\lim F$ используют при этом символ $\lim\limits_{\xi\in\Xi} F(\xi)$, (для последовательностей — $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)$).

Чтобы не затруднять читателя редукцией общего определения, данного в 2.2, на рассматриваемый случай, сформулируем определение сходимости фильтрующегося соответствия в терминах, относящихся непосредственно к рассматриваемой ситуации, ограничившись, впрочем, однозначным соответствием, область определения которого Ξ совпадает с T. В этом случае образ $F[A]$ множества $A = [\xi, \to]$ $(\xi \in \Xi)$ представляет собой множество всех элементов $F(\eta)$ с $\eta \geqslant \xi$ $(\eta \in \Xi)$ и, поскольку сходимость F означает сходимость предфильтра $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ в X, т. е. коинициальность совокупности $F\langle\mathfrak{A}\rangle$ по отношению к фильтру $\mathfrak{V}_x$ окрестностей некоторой точки $x \in X$ или, что то же, к произвольному базису $\mathfrak{B}_x$ этого фильтра, то для любой окрестности $V \in \mathfrak{B}_x$ может быть указан элемент $\xi \in \Xi$ так, что $F(\eta) \in V$ для каждого $\eta \in \Xi$ такого, что $\eta \leqslant \xi$.

Специализация предложения II(2.2) приводит к следующему факту.

I. *Если фильтрующееся соответствие F (из T в X) сходится и F_0 — его сужение, область определения которого конфинальна по отношению к T, а область прибытия содержит замыкание $\overline{R(F)}$ области значений данного соответствия, то сходится и соответствие F_0, причем* $\underset{\longrightarrow}{\mathrm{Lim}}\, F_0 \supset \underset{\longrightarrow}{\mathrm{Lim}}\, F$.

---

[8]) Если F фильтруется по убыванию, то для обозначения предельного множества используют символ $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{Lim}}\, F$, а для обозначения предела — $\underset{\longleftarrow}{\lim}\, F$.

Отдавая в основном дань традиции, сформулируем несколько предложений о топологических свойствах пространства X в терминах фильтрующихся семейств, т. е. однозначных фильтрующихся соответствий. Естественно, что при этом мы будем придерживаться и традиционных обозначений.

II. *Пусть E — множество в топологическом пространстве X и x — точка прикосновения этого множества. Существует упорядоченное фильтрующееся множество Ξ и фильтрующееся семейство $f: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ точек множества E, сходящееся к точке x. Если при этом фильтр $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки x имеет не более чем счетный базис, то существует* п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь *$\{x_n\}$ точек множества E, сходящаяся к точке x.*

Действительно, обозначим через Ξ какой-либо базис фильтра $\mathfrak{B}_x$ и снабдим множество Ξ естественным порядком (по включению). Определим отношение F как совокупность всех пар вида (ξ, x), где $\xi \in \Xi$, а $x \in \xi \cap E$. Поскольку в силу предложения II(1.4) $F\{\xi\} = \xi \cap E \neq \varnothing$ $(\xi \in \Xi)$, область определения $D(F)$ отношения F совпадает с Ξ. Очевидно также, что фильтрующееся соответствие (F, Ξ, X) сходится к точке x. На основании предложения III(2.2) любой селектор f этого соответствия удовлетворяет всем требованиям доказываемого предложения.

В случае, когда фильтр $\mathfrak{B}_x$ имеет не более чем счетный базис, нетрудно по индукции доказать, что тогда существует и такой базис Ξ, что на него возможно убывающее отображение φ множества $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел. Ясно, что $f \circ \varphi$ и будет искомой последовательностью.

Использование предложения II(2.1) дает

III. *Если $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — фильтрующееся семейство элементов множества E в топологическом пространстве X, сходящееся к точке x, то $x \in \overline{E}$.*

Наконец, сочетая предложения II и III, приходим к следующему критерию замкнутости множества.

IV. *Для того чтобы множество E топологического пространства X было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы любое фильтрующееся семейство точек множества E сходилось бы только к точкам этого множества.*

Если топология пространства X такова, что для любой точки прикосновения x произвольного множества E этого пространства может быть указана п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь точек множества E, сходящаяся к x, то о такой топологии говорят, что она *секвенциальна*. Из предложения II следует

V. *Если фильтр окрестностей каждой точки топологического пространства X имеет не более чем счетный базис, то топология этого пространства секвенциальна.*

Во всех приведенных выше высказываниях о сходимости того или иного фильтра утверждалось, что рассматриваемый фильтр сходится п р и у с л о в и и сходимости некоторого другого фильтра. Последнее обстоятельство сильно затрудняет использование указанных фактов, поскольку в конце концов приходится устанавливать сходимость того или иного фильтра н е п о с р е д с т в е н н о, для чего надо прежде у г а д а т ь, к чему же он сходится. Доказанная ниже теорема, хотя и относится к довольно частному случаю, свободна от упомянутых недостатков, в связи с чем она служит мощным средством для установления сходимости в различных конкретных ситуациях.

Как и в конце предыдущего пункта, будем под X понимать линейно упорядоченное множество, снабженное интервальной топологией. Пусть Ξ — упорядоченное множество, фильтрующееся по возрастанию, и f — отображение этого множества в пространство X.

Теорема 1(2.II). *Если отображение f — возрастающее, то оно имеет предел в том и только в том случае, если его область значений $R(f)$ имеет точную верхнюю границу. При этом* $\underset{\longrightarrow}{\lim} f = \sup R(f)$.

Доказательство. Как уже отмечалось в 2.2, пространство X хаусдорфово, так что существование предела $\underset{\longrightarrow}{\lim} f$ равносильно сходимости фильтрующегося отображения f.

Допустим сначала, что существует предел $\underset{\longrightarrow}{\lim} f = u$. Обозначая через B совокупность $\pi(R(f))$ всех верхних границ множества $R(f)$, докажем, что $u \in B$, т. е. что u — верхняя граница множества $R(f)$. Если u — наибольший элемент множества X, то это верно тривиальным образом. В противном случае возьмем элемент $x \in X$, строго больший, чем u; и по окрестности $[\leftarrow, x)$ элемента u определим такой элемент $\xi_x \in \Xi$, что $f[[\xi_x, \rightarrow]] \subset [\leftarrow, x)$. Если $\xi \in \Xi$, то, поскольку Ξ фильтруется по возрастанию, найдется элемент $\eta \in [\xi_x, \rightarrow] \cap [\xi, \rightarrow]$. Ввиду того, что f — возрастающее отображение, $f(\xi) \leqslant f(\eta) < x$. Таким образом, $R(f) \subset [\leftarrow, x)$. Поскольку пересечение $\bigcap\limits_{x \in (u, \rightarrow]} [\leftarrow, x)$ в силу линейности порядка в X совпадает с промежутком $[\leftarrow, u]$, то тем самым $R(f) \subset [\leftarrow, u]$, так что действительно $u \in B$. Согласно предложению II(2.1) $u = \underset{\longrightarrow}{\lim} f \in \overline{R(f)}$. Отсюда, привлекая результат предложения V(1.8), заключаем с помощью доказанного, что $u = \sup \overline{R(f)} = \sup \overline{R(f)}$.

Будем считать теперь, что множество $R(f)$ имеет точную верхнюю границу u. Если при этом u — наименьший элемент множества X, то тогда $R(f) = \{u\}$, т. е. $f(\xi) = u$ для любого $\xi \in \Xi$, так что, очевидно, существует предел $\underset{\longrightarrow}{\lim} f = u$. Если u не является наименьшим элементом множества X и x — какой-либо элемент из X, строго меньший, чем u, то, поскольку $x \notin B$, найдется элемент $\xi \in \Xi$, для которого нарушено соотношение $f(\xi) \leqslant x$, т. е. ввиду линейности порядка в X имеет место соотношение $f(\xi) > x$. Но f — возрастающее отображение, следовательно, $f[[\xi, \rightarrow]] \subset (x, u]$. Остается заметить, что совокупность всех промежутков вида $(x, u]$ $(x \in [\leftarrow, u))$, будучи базисом фильтра левых окрестностей точки u, коинициальна по отношению к фильтру окрестностей точки u.

Замечание. Замена порядка в Ξ или в X на обратный превращает возрастающее отображение f в убывающее и, наоборот, убывающее в возрастающее. Если такая замена происходит с порядком в Ξ, то при этом меняется и «направление» фильтруемости: фильтрующееся по убыванию множество становится фильтрующимся по возрастанию и обратно. Поскольку интервальная топология на X одна и та же как для данного, так и для обратного порядка, то можно высказать еще три варианта доказанной теоремы, формулировки которых мы приведем, опуская подробности.

1) Ξ — фильтруется по возрастанию, f — убывающее:

$$\varinjlim f = \inf R(f);$$

2) Ξ — фильтруется по убыванию, f — возрастающее:

$$\varprojlim f = \inf R(f);$$

3) Ξ — фильтруется по убыванию, f — убывающее:

$$\varprojlim f = \sup R(f).$$

2.4. Другая ситуация, в которой реализуется общая схема из 2.2, относится к тому случаю, когда множество T наделено топологией и в качестве фильтрующейся совокупности $\mathfrak{A}$ берется фильтр окрестностей какой-либо точки пространства T.

Итак, пусть T — топологическое пространство с топологией $t \mapsto \mathfrak{U}_t$ $(t \in T)$. Рассмотрим соответствие F из T в топологическое пространство X. Принимая $\mathfrak{A} = \mathfrak{U}_t$, где t — данная точка пространства T, приходим к определению: если соответствие (F, T, X) сходится по фильтру $\mathfrak{U}_t$ окрестностей точки $t \in T$, то говорят, что оно *сходится в точке* t. При этом обозначают $\mathrm{Lim}_{(t)}F \left(= \mathrm{Lim}_{\mathfrak{U}_t}F\right)$ и, когда это имеет смысл, $\lim_{(t)}F$ $\left(= \lim_{\mathfrak{U}_t}F\right)$. Если F — однозначно, то часто используют исторически сложившиеся, хотя и некорректные, обозначения:

$$\mathrm{Lim}_{s\to t} F(s) \,(= \mathrm{Lim}_{(t)} F)\,,\ \lim_{s\to t} F(s) \,(= \lim_{(t)} F)\,,\ F(s) \underset{s\to t}{\longrightarrow} x$$

(последнее означает, что $F \underset{\mathfrak{U}_t}{\longrightarrow} x$).

Так как согласно II(1.4) фильтр $\mathfrak{U}_t$ зацепляет множество A пространства T в том и только в том случае, когда t — точка прикосновения множества A, данное соответствие может сходиться в точке t лишь при условии, что $t \in \overline{D(F)}$.

Прежде чем останавливаться на специфике рассматриваемого случая, перефразируем в терминах, относящихся к данной ситуации, предложение IV(2.2). Пусть T_0 — подпространство пространства T и t — точка множества T_0, для которой существует такая ее окрестность U (в пространстве T), что $T_0 \supset U \cap \cap D(F)$. Как и в 2.2, положим $F|_{T_0} = F \cap (T_0 \times X)$.

I. *Если t — точка прикосновения области определения $D(F)$ данного соответствия, X_0 — подпространство пространства X, содержащее замыкание (в пространстве X) $\overline{R(F)}$ области значений соответствия F, то соответствия $(F|_{T_0}, T_0, X_0)$ и (F, T, X) сходятся в точке t или нет одновременно. В случае сходимости предельные множества этих соответствий совпадают.*

Положив $T_0 = \overline{D(F)}$, $X_0 = \overline{R(F)}$[9]), получим

II. *Какова бы ни была точка $t \in T_0$, соответствия (F, T_0, X_0) и (F, T, X) сходятся в этой точке или нет одновременно.*

Наряду с данным соответствием (F, T, X) рассмотрим еще множество S и соответствие (Φ, S, T). Пусть $\mathfrak{S}$ — фильтрующаяся (по убыванию) совокупность множеств, зацепляющая область определения $D(\Phi)$ соответствия Φ. Имеет место следующая *теорема о сходимости суперпозиции.*

Теорема 2(2.II). *Если совокупность $\mathfrak{S}$ зацепляет область определения суперпозиции $F \circ \Phi$ и соответствие Φ сходится по $\mathfrak{S}$ к точке $t \in \overline{D(F)}$, а соответствие F сходится в точке t к точке $x \in X$, то соответствие $(F \circ \Phi, S, X)$ сходится по $\mathfrak{S}$ к точке x. В частности, если существуют пределы $t = \lim_{\mathfrak{S}} \Phi \in \in \overline{D(F)}$, $\lim_{(t)} F$ и $\lim_{\mathfrak{S}} F \circ \Phi$, то $\lim_{\mathfrak{S}} F \circ \Phi = \lim_{(t)} F$.*

Доказательство. По условию имеем: образ $\Phi \langle \mathfrak{S} \rangle$ коинициален по отношению к фильтру $\mathfrak{U}_t$, образ которого $F \langle \mathfrak{U}_t \rangle$ в свою очередь коинициален по отношению к фильтру $\mathfrak{V}_x$. Так как $F \circ \Phi \langle \mathfrak{S} \rangle = F \langle \Phi \langle \mathfrak{S} \rangle\rangle$ и совокупность $F \circ \Phi \langle \mathfrak{S} \rangle$ не содержит пустого множества, в силу сказанного предфильтр $(F \circ \Phi \langle \mathfrak{S} \rangle, X)$ сходится к точке x.

Замечание. Так как $\operatorname{Lim}_{\mathfrak{S}} \Phi \subset \overline{R(\Phi)}$ (предложение III(2.1)), условие $t \in \overline{D(F)}$ заведомо выполнено, если $\overline{R(\Phi)} \subset \subset \overline{D(F)}$, и тем более, если $R(\Phi) \subset D(F)$. Поскольку это последнее соотношение обеспечивает тождество областей определения $D(F \circ \Phi)$ и $D(\Phi)$, то при его выполнении нет необходимости требовать в условиях теоремы, чтобы совокупность $\mathfrak{S}$ зацепляла область определения $D(F \circ \Phi)$ суперпозиции $F \circ \Phi$.

Пользуясь доказанной теоремой, получаем

[9]) Имеются в виду замыкания в пространствах T и X соответственно.

III. *Если f — отображение из пространства T в пространство X, сходящееся в точке $t \in T$ к точке $x \in X$, и $\{t_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — фильтрующееся семейство точек множества $D(f)$, сходящееся к точке t, то фильтрующееся семейство $\{f(t_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ сходится к точке x.*

Обратное утверждение также справедливо. Его формулировку и доказательство мы предоставляем читателю.

Если под T понимать снабженное интервальной топологией линейно упорядоченное множество, то можно говорить о сходимости данного соответствия F из T в X не только по фильтру $\mathfrak{U}_t$ окрестностей точки $t \in T$, но и по фильтру $\mathfrak{U}_t^-$ левых, или по фильтру $\mathfrak{U}_t^+$ правых окрестностей точки t. При этом мы приходим к понятию *односторонней сходимости* (в точке $t \in T$). Точнее, будем говорить, что соответствие F (из T в X) *сходится слева в точке* $t \in T$, если F сходится по фильтру $\mathfrak{U}_t^-$, и *сходится справа в точке* t, если F сходится по фильтру $\mathfrak{U}_t^+$. Укажем, не расшифровывая подробно, на применяемые в этом случае обозначения: $\mathrm{Lim}_{(t-)}F$, $\lim_{(t-)} F$, $F \underset{(t-)}{\to} x$, и $\mathrm{Lim}_{(t+)}F$, $\lim_{(t+)} F$, $F \underset{(t+)}{\to} x$ (или в традиционной форме — для однозначного соответствия F : $\mathrm{Lim}_{s\to t-} F(s)$, $\lim_{s\to t-} F(s)$, $F(s) \underset{s\to t-}{\longrightarrow} x$, и аналогично для сходимости справа)[10].

Отметим, что при замене порядка в T на обратный сходимость слева и сходимость справа меняются ролями.

Положим $F^- = F|_{[\leftarrow, t]}$.

IV. *Данное соответствие F сходится слева в точке t тогда и только тогда, когда соответствие F^- сходится в точке t. При этом условии $\mathrm{Lim}_{(t-)}F = \mathrm{Lim}_{(t)}F^-$.*

Действительно, как отмечалось в 1.8, совокупность множеств вида $U \cap [\leftarrow, t]$ $(U \in \mathfrak{U}_t)$ служит базисом фильтра $\mathfrak{U}_t^-$. Так как $D(F^-) = D(F) \cap [\leftarrow, t]$, то для любой окрестности U точки t будет $D(F^-) \cap U = D(F) \cap (U \cap [\leftarrow, t])$, после чего следует воспользоваться предложением I(2.2).

Поскольку фильтр $\mathfrak{U}_t^-$ тоньше фильтра $\mathfrak{U}_t$, с помощью предложения I(2.1) получаем

V. *Если соответствие F сходится в точке t и фильтр $\mathfrak{U}_t^-$ зацепляет множество $D(F)$, то F сходится слева в точке t. При этом $\mathrm{Lim}_{(t-)} F \supset \mathrm{Lim}_{(t)}F$.*

Пользуясь предложением IV(2.2) и предложением IV, нетрудно показать, что если фильтр $\mathfrak{U}_t^+$ не зацепляет множест-

[10]) Как очевидно, сходимость слева в точке $t \in T$ означает обычную сходимость в точке t, если только под топологией пространства T понимать левую топологию.

во $D(F)\setminus\{t\}$, то сходимость слева в точке t и просто сходимость в точке t означает одно и то же.

VI. *Если соответствие F сходится слева в точке $t \in T$ и сходится справа в точке t, причем* $\mathrm{Lim}_{(t-)} F \cap \mathrm{Lim}_{(t+)} F \neq \varnothing$, *то F сходится в точке t и* $\mathrm{Lim}_{(t)} F = \mathrm{Lim}_{(t-)} F \cap \mathrm{Lim}_{(t+)} F$.

Действительно, пусть $x \in \mathrm{Lim}_{(t-)} F \cap \mathrm{Lim}_{(t+)} F$. Возьмем окрестность V точки x. По условию найдутся множества $U^- \in \mathfrak{U}_t^-$ и $U^+ \in \mathfrak{U}_t^+$ так, что $F[U^-] \subset V$, $F[U^+] \subset V$; так как $U = U^- \cup U^+ \in \mathfrak{U}_t$ и $F[U] \subset V$, то отсюда следует, что $F \underset{(t)}{\to} x$. Учитывая результат предложения V, заключаем отсюда же о справедливости соотношения для предельного множества $\mathrm{Lim}_{(t)} F$.

Непустое соответствие F из T в X можно рассматривать и как фильтрующееся: его область определения, будучи непустым линейно упорядоченным множеством, фильтруется и по возрастанию, и по убыванию. Тем самым сходимость F можно понимать как сходимость фильтрующегося соответствия. Выясним связь такого типа сходимости со сходимостью в точке пространства T.

VII. *Пусть F—такое соответствие из T в X, что существует точная верхняя граница t его области определения $D(F)$. Если F сходится в точке t, то фильтрующееся по возрастанию соответствие F также сходится, причем* $\underset{\to}{\mathrm{Lim}}\, F \supset \mathrm{Lim}_{(t)} F$.

Обратно, если $t \notin D(F)$ и фильтрующееся по возрастанию соответствие F сходится, то F сходится и в точке t, причем $\underset{\to}{\mathrm{Lim}}\, F = \mathrm{Lim}_{(t)} F$.

Для доказательства отметим прежде всего, что на основании предложения IV вместо сходимости F в точке t можно говорить о сходимости слева в точке t. Оставляя в стороне тривиальный случай $D(F) = \{t\}$, заметим, что в условиях предложения t не будет наименьшим элементом множества T и, стало быть, совокупность $\mathfrak{B}_t^-$ всех промежутков $(s, t]$ с $s \in [\leftarrow, t)$ служит базисом фильтра $\mathfrak{U}_t^-$ левых окрестностей точки t. Но совокупность $\mathfrak{A}_0$ всех замкнутых промежутков вида $[\xi, t]$ $(\xi \in D(F))$, как нетрудно понять, коинициальна по отношению к $\mathfrak{B}_t^-$, откуда с помощью предложения I(2.2) и вытекает справедливость первой части предложения. Если, кроме того, $t \notin D(F)$, то тривиальным образом верно, что совокупность $\mathfrak{B}_t^-$ коинициальна по отношению к $\mathfrak{A}_0$. Тем самым доказана и вторая часть предложения.

Аналогичная связь имеется, конечно, между сходимостью соответствия F как фильтрующегося по убыванию и сходимостью

F в точке. Относящиеся к этому случаю формулировки мы предоставляем читателю.

В связи с предложением VII целесообразно ввести понятие односторонних значений данного соответствия.

Рассматривая опять соответствие F из T в X, возьмем точку $t \in T$ и положим $D^- = D(F) \cap [\leftarrow, t)$. Если соответствие $F|_{D^-}$ имеет в точке t предел $\lim_{(t)} F|_{D^-}$, то он называется *значением соответствия F слева в точке t* и обозначается через $F(t-)$. Если указанный предел существует, то точка t принадлежит замыканию $\overline{D^-}$ множества D^- и, поскольку $\overline{D^-} \subset [\leftarrow, t]$, является там наибольшим элементом. В силу предложения IV(1.8) тогда $t = \sup D^-$. Тем самым на основании предложения VII фильтрующееся по возрастанию соответствие $F|_{D^-}$ имеет пределом точку $F(t-)$. Обратно, если $t = \sup D^-$ и существует предел фильтрующегося по возрастанию соответствия $F|_{D^-}$, то этот предел как раз и есть значение слева: $F(t-)$. Значение $F(t+)$ соответствия F *справа* в точке t определяется по той же схеме, что и значение слева, и мы не будем на этом останавливаться.

Мы не будем также касаться свойств значений слева и справа, поскольку, например, $F(t-)$ есть предел слева в точке t соответствия $F|_{D_0}$, где $D_0 = D(F) \setminus \{t\}$, и упомянутые свойства могут быть выведены из доказанного выше.

В заключение заметим, что нередко, а правильнее сказать, обычно сходимость соответствия и, в частности, отображения в точке $t \in T$ определяют как сходимость по фильтру $\widehat{\mathfrak{U}}_t$ проколотых окрестностей точки t (множество U топологического пространства T называется *проколотой окрестностью* точки $t \in T$, если объединение $U \cup \{t\}$ есть окрестность точки t). Вообще-то такому пониманию сходимости в точек t нельзя отказать в целесообразности. Дело в том, что при указанном определении мы получаем характеристику поведения рассматриваемого отображения вблизи от точки t без учета значения отображения в самой точке t, которое по ряду причин может оказаться никак не связанным со значениями в остальных точках и потому в какой-то мере случайным, так что, если и его принимать в расчет, благополучная, возможно, картина исказится. Есть, однако, соображения, которые заставили нас нарушить вековую традицию. Во-первых, фильтр $\widehat{\mathfrak{U}}_t$ проколотых окрестностей точки t отнюдь не всегда является собственным фильтром: если например, топология пространства T дискретна, то любое, в том числе и пустое, множество будет проколотой окрестностью любой точки $t \in T$. Таким образом, говорить о сходимости в точке t не всегда возможно. Во-вторых, если точка t, будучи точкой прикосновения области определения данного соответствия, не входит в нее, то сходимость по фильтру окрестностей и по фильтру проколотых окрестностей означает в этом случае в точности одно и то же (предложение I (2.2)). И, наконец, третье, основное соображение в пользу данного в тексте определения. Как уже говорилось, надобность в сходимости по фильтру проколотых окрестностей точки t возникает тогда (и только тогда), когда плохо, например, наугад определено значение в точке t. Так не проще ли и вовсе не определять значение в этой точке, а, коль скоро оно все же определено, выкинуть его из рассмотрения, т. е. изучать сужение данного соответствия на «проколотую» в точке t область его определения? Такое решение вопроса, поскольку оно не нуждается во введении новых понятий, в разграничении различных частных случаев и т. п., представляется нам более целесообразным и уж, конечно, более экономным.

2.5. Пусть, как и в 2.4, T и X — топологические пространства и F — соответствие из T в X. Рассматривая сходимость F в точке $t \in T$, принадлежащей области определения соответствия F, мы приходим к важнейшему понятию непрерывности.

Соответствие F из T в X называется *непрерывным в точке* $t \in D(F)$, если оно сходится в точке t и $F\{t\} \subset \mathrm{Lim}_{(t)} F$. В частности, если F не только сходится в точке t, но и имеет в этой точке предел, то, в случае непрерывности, F должно быть однозначно в точке t и $F(t) = \lim_{(t)} F$.

Если пространство X отделимо, определение непрерывности может быть несколько упрощено.

I. *Если X — отделимое пространство, то для непрерывности F в точке $t \in D(F)$ достаточно (и необходимо), чтобы F сходилось в точке t.*

Действительно, поскольку $F\{t\} \subset L = \bigcap\limits_{V \in F\langle \mathfrak{U}_t \rangle} V_{\Sigma}$ пересечение L непусто. А тогда на основании предложения VI (2.1) сходящийся предфильтр $F\langle \mathfrak{U}_t \rangle$ имеет предел, причем $L = \mathrm{Lim} F\langle \mathfrak{U}_t \rangle$.

Заметим, что в условиях предложения I соответствие F однозначно в точке t.

Используя предложение II (2.4) и учитывая результат предложения II (2.2), можем установить, что в известном смысле непрерывность соответствия не зависит от его области отправления и области прибытия. Снабдим множества $T_0 = D(F)$ и $X_0 = R(F)$ топологиями, индуцированными топологиями пространств T и X соответственно.

II. *Какова бы ни была точка $t \in T_0$, соответствия (F, T, X) и (F, T_0, X_0) одновременно непрерывны в этой точке или нет.*

Тождественное отображение I_T пространства T на себя непрерывно в каждой точке $t \in T$, так что

III. *Пусть X_0 — подпространство пространства X. Отображение (I_{X_0}, X_0, X) (оно называется вложением подпространства X_0 в пространство X) непрерывно в каждой точке пространства X_0.*

Пусть S — топологическое пространство и Φ — соответствие из S в пространство T, однозначное в точке $s \in D(\Phi)$. С помощью теоремы о сходимости суперпозиции получаем следующее предложение о непрерывности суперпозиции.

IV. *Пусть Φ непрерывно в точке s и $t = \Phi(s) \in D(F)$. Если соответствие F непрерывно в точке t, то суперпозиция $F \circ \Phi$ непрерывна в точке s.*

Предложение I (2.1) позволяет установить справедливость следующего факта.

V. *Если $\mathfrak{G}$ — сходящийся к точке $t \in D(F)$ предфильтр в пространстве T и соответствие F непрерывно в точке t, то предфильтр $F\langle\mathfrak{G}\rangle$ в X сходится к любой точке $x \in F[t]$*, т. е. $F[t] \subset \operatorname{Lim} F\langle\mathfrak{G}\rangle$.

Для однозначных соответствий, область определения которых есть все пространство T, может быть выведен следующий критерий непрерывности.

VI. *Пусть f — отображение пространства T в пространство X и $t \in T$. Обозначим через $\mathfrak{B}_x$ какой-либо базис фильтра $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки $x = f(t)$. Для того чтобы отображение f было непрерывным в точке t, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{U}_t \supset f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle$, т. е. чтобы прообраз любой окрестности $V \in \mathfrak{B}_x$ был окрестностью точки t.*

Действительно, непрерывность f в точке t означает, что образ $f\langle\mathfrak{U}_t\rangle$ коинициален по отношению к множеству $\mathfrak{B}_x$. Так как $D(f) = T$, для каждого множества $U \subset T$ будет $f^{-1}[f[U]] \supset U$, так что $f^{-1}\langle f\langle\mathfrak{U}_t\rangle\rangle \subset \mathfrak{U}_t$. Следовательно, если f непрерывно в точке t, фильтр $\mathfrak{U}_t$ коинициален по отношению к совокупности $f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle$. Ввиду того, что $\mathfrak{U}_t$ — фильтр, это означает, что $\mathfrak{U}_t \supset f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle$. Обратно, если выполнено это соотношение, то образ $f\langle\mathfrak{U}_t\rangle$ коинициален по отношению к совокупности $f\langle f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle\rangle$. Но вследствие однозначности f для любого $B \subset X$ будет $f[f^{-1}[B]] = B \cap R(f)$ (см. X(I .2.2)). Отсюда вытекает, что совокупность $f\langle f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle\rangle$ коинициальна по отношению к $\mathfrak{B}_x$. Таким образом, f непрерывно в точке t.

Используя доказанный факт, можно дополнить результат предложения III (2.4).

VII. *Пусть f — такое отображение из пространства T в пространство X, что если фильтрующееся семейство $\{t_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ точек области определения $D(f)$ отображения f сходится к данной точке $t \in D(f)$, то фильтрующееся семейство $\{f(t_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ сходится к точке $x = f(t)$. Тогда f непрерывно в точке t. Если при этом топология пространства T секвенциальна, то вместо произвольных фильтрующихся семейств $\{t_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$*

в условиях предложения можно ограничиться рассмотрением только последовательностей.

В самом деле, на основании предложения II можно считать, что $D(f) = T$. Возьмем окрестность V точки x и положим $U = f^{-1}[V]$. Если $U \notin \mathfrak{U}_t$, то $t \in (U^\circ)' = \overline{U'}$. Следовательно, согласно предложению II(2.3) существует фильтрующееся семейство $\{t_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) точек множества U' (последовательность — если топология пространства T секвенциальна), сходящееся к точке t. По условию фильтрующееся семейство $\{f(t_\xi)\}(\xi \in \Xi)$ сходится к x и, стало быть, для достаточно далеких индексов $\xi \in \Xi$ должно быть $f(t_\xi) \in V$, т. е. $t_\xi \in f^{-1}[V] = U$. Между тем $t_\xi \in U'$ для всех $\xi \in \Xi$. Таким образом, $f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle \subset \mathfrak{U}_t$, так что в силу предложения VI f непрерывно в точке t.

В случае, когда пространство T представляет собой линейно упорядоченное множество с интервальной топологией, можно говорить о непрерывности слева и справа в точке t. Так, соответствие F называется *непрерывным слева в точке* $t \in D(F)$, если F сходится слева в точке t и $F[t] \subset \operatorname{Lim}_{(t-)} F$. Ввиду предложения VI(2.4) одновременная непрерывность слева и справа влечет непрерывность в точке t.

Отметим, предоставляя несложное доказательство читателю, что если существует значение F слева — $F(t-)$, то для непрерывности слева однозначного в точке t соответствия необходимо и достаточно, чтобы $F(t) = F(t-)$.

Отметим в заключение, что если под X понимать произведение $\mathfrak{X} = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ конечного семейства $\{X_\lambda\}$ ($\lambda \in \Lambda$) топологических пространств, то предложение VI(2.2) приводит к следующему результату.

VIII. *Пусть F — соответствие из топологического пространства T в пространство $\mathfrak{X}$. Для того чтобы F было непрерывным в точке $t \in D(F)$, необходимо и достаточно, чтобы было непрерывным в точке t каждое координатное соответствие $F_\lambda (\lambda \in \Lambda)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что для любого $t \in T$ имеет место включение $F\{t\} \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda\{t\}$.

Если в предложении VI взять за T само произведение $\mathfrak{X}$, а за F — тождественное отображение $I_{\mathfrak{X}}$ пространства $\mathfrak{X}$ на себя, то, поскольку координатные отображения в этом случае совпадают с проекциями P_λ произведения $\mathfrak{X}$ на X_λ ($\lambda \in \Lambda$), получаем

IX. *Какова бы ни была точка $\varphi \in \mathfrak{X}$, при любом $\lambda \in \Lambda$ проекция P_λ непрерывна в точке φ.*

Далее, редукция предложения III на случай $\mathfrak{X} = \mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ позволяет сформулировать следующий результат: соответствие F из топологического пространства T в $\mathbf{C}$ непрерывно в точке t

или нет одновременно со своими вещественной и мнимой частями.

2.6. Об отображении f из топологического пространства T в топологическое пространство X говорят, что оно *непрерывно на множестве* $A \subset D(f)$, если оно непрерывно в каждой точке множества A [11]). В частности, если f непрерывно на $D(f)$, то f называют просто *непрерывным отображением* (из T в X).

В силу предложения IV(2.5) суперпозиция непрерывных отображений будет непрерывным отображением. Учитывая это, можно утверждать, что класс всех топологических пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов образуют категорию.

Изоморфизм в категории топологических пространств называют *гомеоморфизмом*, а изоморфные объекты — *гомеоморфными топологическими пространствами*.

Теорема 3(2.II). Для непрерывности отображения f топологического пространства T в топологическое пространство X необходимо и достаточно соблюдение любого из следующих трех условий:

а) *прообраз $f^{-1}[G]$ любого открытого множества G пространства X представляет собой открытое множество пространства T;*

б) *прообраз $f^{-1}[E]$ любого замкнутого множества E пространства X представляет собой замкнутое множество пространства T;*

в) *для любого множества $A \subset T$ имеет место соотношение $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.*

Доказательство. Отметим прежде всего равносильность условий а) и б). Действительно, если множества G и E пространства X дополняют друг друга (до X), то их прообразы дополняют друг друга до T. Поэтому $f^{-1}[G]$ открыто тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}[E]$ замкнут (предложение III (1.5)).

Используя предложения II(2.1) и V(2.5), без труда докажем, что непрерывность отображения f влечет выполнение условия в).

Далее, если в предположении, что выполнено условие в), взять в пространстве X замкнутое множество E, то, принимая $A = f^{-1}[E]$, можем написать: $\overline{A} \subset f^{-1}[f[\overline{A}]] \subset f^{-1}[\overline{f[A]}] \subset$ $\subset f^{-1}[E] = A$, так что A — замкнутое в пространстве T множество. Следовательно, соблюдены требования п. б) и тем самым п. а).

---

[11]) При этом согласно предложению II (2.2) сужение $f|_A$ отображения f на множество A будет непрерывным в каждой точке $t \in A$. Мы хотим предупредить читателя от обратного вывода. Непрерывность отображения $f|_A$ в каждой точке $t \in A$ не может, вообще говоря, гарантировать непрерывность на A самого соответствия f.

Если, наконец, выполнено а), то, принимая для произвольной точки $t \in T$ за x значение $f(t)$, а за $\mathfrak{G}_x$ — совокупность всех открытых окрестностей точки x, будем по условию иметь, что совокупность $f^{-1}\langle\mathfrak{G}_x\rangle$ состоит из открытых множеств, каждое из которых содержит точку t, т. е. из окрестностей точки t. Поскольку $\mathfrak{G}_x$ — базис фильтра окрестностей точки x, согласно предложению VI(2.5) отображение f непрерывно в точке t и, стало быть, непрерывно на T.

Замечание 1. Используя предложения II(2.5) и I(1.6), II(1.6), нетрудно понять, что условия а) и б) достаточны для непрерывности отображения f и без предположения о том, что $D(f) = T$. Что же касается условия в), то оно остается и необходимым без этого предположения. Действительно, если отображение f из T в X непрерывно и A — множество пространства T, то, поскольку замыкание множества $A \cap D(f)$ в подпространстве $D(f)$ совпадает с пересечением $\overline{A} \cap D(f)$ (см. III(1.6)), $f[\overline{A}] = f[\overline{A} \cap D(f)] \subset \overline{f[A \cap D(f)]} = \overline{f[A]}$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы подразумевать под X линейно упорядоченное множество с интервальной топологией, то условия а) и б) могут быть существенно упрощены. Конкретнее, для непрерывности отображения f пространства T в пространство X достаточно (и необходимо) каждое из следующих двух условий:

а$_0$) для каждого $\lambda \in X$ множества $G_\lambda = f^{-1}[[\leftarrow, \lambda)]$ и $G^\lambda = f^{-1}[(\lambda, \rightarrow]]$ открыты;

б$_0$) для каждого $\lambda \in X$ множества $E_\lambda = f^{-1}[[\leftarrow, \lambda]]$ и $E^\lambda = f^{-1}[[\lambda, \rightarrow]]$ замкнуты.

Действительно, и на этот раз очевидна эквивалентность обоих условий. Докажем достаточность условия а$_0$). Пусть $t \in T$ и $x = f(t)$. Предполагая для определенности, что x отлично от наибольшего и от наименьшего элементов множества X, заметим, что в этом случае совокупность $\mathfrak{B}_x$ всех открытых промежутков (λ, μ), содержащих элемент x, служит базисом фильтра окрестностей точки x. Из условия а) следует, что $f^{-1}\langle\mathfrak{B}_x\rangle$ состоит из открытых множеств, содержащих точку t, т. е. из окрестностей точки t. Как и при доказательстве теоремы, применение предложения VI(2.5) завершает проверку достаточности условия а$_0$).

Поскольку множества G_λ и E^λ, равно как и множества G^λ и E_λ, взаимно дополнительны, условие а$_0$) (и, разумеется, условие б$_0$)) равносильны каждому из условий: а$_1$) при любом $\lambda \in X$ множество G_λ открыто, а множество E_λ замкнуто; б$_1$) при любом $\lambda \in X$ множество G^λ открыто, а множество E^λ замкнуто.

В частности, если принять за T произведение X^2, то с помощью условий а$_1$) и б$_1$) нетрудно установить, что отображения $(x, y) \mapsto x \vee y$ $((x, y) \in X^2)$ и $(x, y) \mapsto x \wedge y$ $((x, y) \in X^2)$ непрерывны.

В дополнение к теореме 3 докажем

I. *Пусть f и g — непрерывные отображения пространства T в пространство X. Если X — хаусдорфово, то множество $A = \{t \in T : f(t) = g(t)\}$ замкнуто.*

Действительно, положим $h = f \cap g$. Ясно, что $h = f|_A = g|_A$. В силу предложений VI(2.1) и II (2.2), для любой точки $t \in \bar{A}$ можем написать: $f(t) = \lim_{(t)} f = \lim_{(t)} h = \lim_{(t)} g = g(t)$, так что $t \in A$ и, значит, $\bar{A} = A$.

Заметим, что в условиях предложения I нельзя заменить требование хаусдорфовости пространства X предположением о его отделимости.

При непрерывном отображении сохраняется связность множества.

II. *Если A — связное множество пространства T и f — непрерывное отображение пространства T в пространство X, то множество $B = f[A]$ связно.*

В самом деле, пусть G_1, G_2 — такие открытые множества пространства X, что $G_1 \cup G_2 \supset B$ и $G_1 \cap G_2 \cap B = \varnothing$. Согласно теореме 3 множества $U_i = f^{-1}[G_i]$ $(i = 1, 2)$ открыты в T и $U_1 \cup U_2 = f^{-1}[G_1 \cup G_2] \supset f^{-1}[B] \supset A$, причем $U_1 \cap U_2 \cap A \subset f^{-1}[G_1 \cap G_2 \cap B] = f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$. Следовательно, одно из множеств U_1 или U_2 должно содержать множество A. А тогда одно из множеств $f[U_1]$ или $f[U_2]$ будет содержать образ $f[A] \subset B$. Остается заметить, что $G_i \supset f[f^{-1}[G_i]] = f[U_i]$ $(i = 1, 2)$.

Непрерывное отображение φ промежутка Ω числовой прямой в топологическое пространство X называется *путем* (*в пространстве* X)[12]. О множестве $R(\varphi)$ говорят при этом как о *траектории пути* φ. Если $x \in R(\varphi)$, то говорят, что путь φ *проходит через точку* x.

III. *Если множество E топологического пространства X таково, что для любых его точек x_1, x_2 существует проходящий через эти точки путь φ, траектория которого содержится в E, то E связно.*

Действительно, пусть G_1 и G_2 — такие открытые множества пространства X, что $G_1 \cup G_2 \supset E$. Если ни одно из множеств G_1 и G_2 не содержит множества E, то в E найдутся такие точки x_1, x_2, что $x_i \in G_i$ $(i = 1, 2)$. Обозначая через φ путь, проходящий через эти точки, траектория которого содержится в E,

---

[12]) Имеется в виду, что промежуток Ω снабжен стандартной, т. е. интервальной, топологией.

и полагая $\Omega_i = \varphi^{-1}[G_i]$ ($i = 1, 2$), мы определим открытые (в Ω) множества Ω_1 и Ω_2, причем, поскольку $G_1 \cup G_2 \supset R(\varphi)$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$. Так как $\Omega_i \supset \varphi^{-1}[x_i]$ ($i = 1, 2$), множества Ω_1 и Ω_2 непусты. Поскольку Ω связно (см. 1.10), должно быть непусто пересечение $\Omega_1 \cap \Omega_2$. Ввиду того, что $G_1 \cap G_2 \cap E \supset \varphi[\Omega_1] \cap \cap \varphi[\Omega_2] \cap R(\varphi) \supset \varphi[\Omega_1 \cap \Omega_2] \neq \varnothing$, непустым будет и пересечение $G_1 \cap G_2 \cap E$, а это и доказывает связность множества E.

Множество E, удовлетворяющее условиям предложения III, называется *линейно-связным*. Таким образом, линейно-связное множество связно.

Обратное утверждение неверно. Однако предоставляем читателю проверить, что открытое связное множество в локально-линейно-связном пространстве [13] линейно-связно. Следует иметь в виду, что и при этом условии замыкание связного открытого множества, будучи, как нетрудно проверить, связным, может уже не быть линейно-связным.

2.7. Сходимость определяет одно из важнейших топологических понятий — компактность (и бикомпактность).

О множестве C в топологическом пространстве X говорят, что оно *бикомпактно* (в X), если, каков бы ни был содержащий множество C фильтр $\mathfrak{U}$ в X, существует более тонкий, чем $\mathfrak{U}$, фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, который сходится к некоторой точке $x \in C$. Если при этом фильтр $\mathfrak{U}_0$ можно выбрать так, что $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset C$, то множество C называется *компактным* (в X). Учитывая результат предложения VI(2.1), заметим, что в хаусдорфовом пространстве бикомпактность множества равнозначна его компактности.

Пространство X называется *компактным* (говорят также, что X — *компакт*), если компактно множество всех его точек.

Если фильтр $\mathfrak{U}$, о котором шла речь в определении, включает не только данное бикомпактное множество C, но и некоторое его замкнутое подмножество E, то тем более $E \subset \mathfrak{U}_0$, и вследствие предложения III(2.1) $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset E$, так что E компактно. Если замкнуто и само C, то можно принять $E = C$. Таким образом, замкнутое бикомпактное множество компактно. Нетрудно понять, что верно и обратное: компактное множество замкнуто. Действительно, если $\mathfrak{U}$ — сходящийся фильтр в X, включающий компактное множество C, и фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X тоньше $\mathfrak{U}$ и $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset C$, то в силу предложения I(2.1) $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \subset C$, т. е. ввиду предложения III(2.1) C замкнуто.

Множество $C \subset X$ называется *относительно компактным* (в пространстве X), если его замыкание $\overline{C}$ бикомпактно и, следо-

[13] Топологическое пространство называется *локально-линейно-связным*, если у каждой его точки имеется базис фильтра окрестностей, состоящий из линейно-связных множеств.

вательно, на основании сказанного выше компактно [14]. Отсюда ясно, что подмножество относительно компактного множества само относительно компактно.

Понятно, что, опустив в определении бикомпактности требование, чтобы фильтр $\mathfrak{U}_0$ сходился к точке, принадлежащей данному множеству, оставив лишь условие его сходимости, мы придем к определению относительно компактного множества.

Ясно также, что во всех высказываниях о бикомпактных и компактных множествах вместо фильтров можно говорить о предфильтрах, заменяя отношение «тоньше» отношением коинициальности (см. 2.1).

Пусть $\mathfrak{E}$ — предфильтр в пространстве X. Обозначим, как и раньше, пересечение $\bigcap\limits_{E\in\mathfrak{E}} \bar{E}$ через $L_{\mathfrak{E}}$.

I. *Пусть C — такое множество пространства X, что для всякого фильтра $\mathfrak{U}$ в X, включающего в себя C, пересечение $L_{\mathfrak{U}} \cap \cap C$ непусто. Тогда C бикомпактно. Обратно, если предфильтр $\mathfrak{E}$ в X зацепляет бикомпактное множество C, то $L_{\mathfrak{E}} \cap C \neq \varnothing$.*

Действительно, возьмем какой-либо фильтр $\mathfrak{U}$ в X, содержащий множество C, и точку $x \in L_{\mathfrak{U}} \cap C$. Согласно предложению IV(2.1) существует фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X более тонкий, чем $\mathfrak{U}$, и сходящийся к точке x. Следовательно, C бикомпактно. Обратно, пусть $\mathfrak{E}$ — предфильтр в X, зацепляющий бикомпактное множество C. Обозначим через $\mathfrak{E}_0$ совокупность всех множеств, представимых в виде $E \cap C$ $(E \in \mathfrak{E})$. По определению существует фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, коинициальный по отношению в $\mathfrak{E}_0$ и сходящийся к точке $x \in C$. Поэтому $x \in L_{\mathfrak{U}_0} \cap C \subset L_{\mathfrak{E}_0} \cap C \subset \subset L_{\mathfrak{E}} \cap C$.

Чтобы сформулировать условия, необходимые и достаточные для компактности или относительной компактности множества C, надо следующим образом изменить условия предложения I.

Множество C компактно: необходимо (при условии $C \in \widetilde{\mathfrak{E}}$), чтобы $\varnothing \neq L_{\mathfrak{E}} \subset C$; достаточно, чтобы $\varnothing \neq L_{\mathfrak{U}} \subset C$.

Относительная компактность C: необходимо, чтобы $L_{\mathfrak{E}} \neq \varnothing$; достаточно, чтобы $L_{\mathfrak{U}} \neq \varnothing$.

Понятие бикомпактности абсолютно. А именно, нетрудно доказать

II. *Пусть X_0 — подпространство пространства X и C — множество в X_0. Множество C бикомпактно в X тогда и только тогда, когда оно бикомпактно в X_0.*

---

[14]) Не следует думать, что бикомпактное множество относительно компактно.

Заметим, что результат предложения II перестает быть верным, если под C понимать относительно компактное множество. Справедливость предложения восстанавливается, однако, если потребовать, чтобы X_0 было замкнутым подпространством. Впрочем, если пространство X хаусдорфово, то из относительной компактности в X_0 вытекает, очевидно, относительная компактность в X (но не наоборот).

Укажем на следующий в ряде случаев полезный критерий бикомпактности множества.

III. *Для того чтобы множество C в X было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый ультрафильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, включающий множество C, сходился бы к какой-либо точке из C.*

Действительно, пусть C бикомпактно и $\mathfrak{U}_0$ — содержащий множество C ультрафильтр в X. Так как согласно предложению I, $L_{\mathfrak{U}_0} \supset L_{\mathfrak{U}_0} \cap C \neq \varnothing$, на основании предложения IV(2.1) фильтр $\mathfrak{U}_0$ сходится, причем $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 = L_{\mathfrak{U}_0}$, так что $\operatorname{Lim} \mathfrak{U}_0 \cap \cap C \neq \varnothing$. Достаточность условия делается очевидной, если заметить, что всякий фильтр $\mathfrak{U}$ в X может быть «утончен» до ультрафильтра.

Модификации предложения III, относящиеся к случаям, когда C — компактно или относительно компактно, формулируются по тем же принципам, что и в случае предложения II.

Если $C = C_1 \cup C_2$, то ультрафильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, содержащий множество C, включает по крайней мере одно из множеств C_1 или C_2 (предложение I(I.7.3)). Стало быть, если множества C_1 и C_2 бикомпактны, то на основании предложения III будет бикомпактным и их объединение C. То же, конечно, верно и для относительно компактных и компактных множеств — их объединение принадлежит тому же классу.

Хотя мы и не будем пользоваться приводимым ниже критерием, но именно его условие обычно принимается во многих руководствах за определение бикомпактности.

Совокупность $\mathfrak{M}$ множеств называется *покрытием* множества C, если $C \subset \bigcup\limits_{M \in \mathfrak{M}} M$. Если C — множество в топологическом пространстве X и элементы покрытия $\mathfrak{M}$ суть открытые множества в X, то $\mathfrak{M}$ называют *открытым покрытием*.

IV. *Множество C топологического пространства X бикомпактно тогда и только тогда, когда в любом фильтрующемся по возрастанию открытом покрытии $\mathfrak{M}$ множества C имеется множество M, содержащее C.*

С самом деле, пусть C бикомпактно. Не принимая в расчет тривиальный случай, когда в состав $\mathfrak{M}$ входит само X, обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех множеств вида M' $(M \in \mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{C}$ фильтруется по убыванию и не содержит пустого множества, так что $\mathfrak{C}$ можно рассматривать как предфильтр в X. При этом $L_{\mathfrak{C}} = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}} M' = (\bigcup_{M \in \mathfrak{M}} M)' \subset C'$ и тем самым $L_{\mathfrak{C}} \cap C = \varnothing$. В силу предложения I $\mathfrak{C}$ не зацепляет множество C. Поэтому найдется такое $M \in \mathfrak{M}$, что $C \cap M' = \varnothing$, т. е. $C \subset M$.

Обратно, если выполнено условие и $\mathfrak{U}$ — фильтр в X, включающий множество C, то, взяв за $\mathfrak{M}$ совокупность всех множеств вида $\overline{U}' = U'^{\circ}$ $(U \in \mathfrak{U})$, можем написать $\bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \overline{U}' = (\bigcap_{U \in \mathfrak{U}} \overline{U})' = (L_{\mathfrak{U}})'$. Поэтому, если бы оказалось, что $L_{\mathfrak{U}} \cap C = \varnothing$, то $\mathfrak{M}$ было бы покрытием, очевидно, открытым, множества C и нашлось бы множество $U \in \mathfrak{U}$ такое, что $C \subset \overline{U}'$. Но это означало бы, что $\overline{U}' \in \mathfrak{U}$, что невозможно из-за пустоты пересечения $\overline{U} \cap \overline{U}'$. Итак, должно быть $L_{\mathfrak{U}} \cap C \neq \varnothing$, и множество C — бикомпактно.

Понятно, что если не предполагать заранее покрытие $\mathfrak{M}$ фильтрующимся, то, вводя вместо него покрытие $\widehat{\mathfrak{M}}$, состоящее из объединений всевозможных конечных подсовокупностей $\mathfrak{M}$, мы придем к следующей формулировке условия предложения IV: каково бы ни было открытое покрытие $\mathfrak{M}$ множества C, существует конечная совокупность $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, которая также является покрытием множества C. В таком виде и формулируется зачастую определение бикомпактности.

Основа применения понятия компактности содержится в следующей теореме.

Теорема 4(2.II). *Если фильтр $\mathfrak{U}$ в X включает бикомпактное множество C, то $\mathfrak{U}$ тоньше фильтра $\mathfrak{B}_E$ окрестностей множества $E = L_{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Возьмем $V \in \mathfrak{B}_E$. Если $V \notin \mathfrak{U}$, то, очевидно, фильтр $\mathfrak{U}$ зацепляет дополнение V' множества V. Следовательно, существует более тонкий, чем $\mathfrak{U}$, фильтр $\mathfrak{U}_0$ в X, включающий в себя множество V'. Поскольку C входит и в $\mathfrak{U}_0$, то на основании предложения I $L_{\mathfrak{U}_0} \neq \varnothing$. Но $L_{\mathfrak{U}_0} \subset L_{\mathfrak{U}} = E \subset V^{\circ}$. Между тем $L_{\mathfrak{U}_0} \subset \overline{V}' = (V^{\circ})'$.

Привлекая предложение VI(2.1), получаем

Следствие. *Если фильтр $\mathfrak{U}$ в хаусдорфовом пространстве X содержит относительно компактное множество, то для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы множество $L_{\mathfrak{U}}$ состояло из единственного элемента, который и будет пределом фильтра $\mathfrak{U}$.*

Замечание. Если в условиях теоремы вместо фильтра $\mathfrak{U}$ говорить о предфильтре $\mathfrak{C}$ в X, то требование к $\mathfrak{C}$ состоит в том, что он должен включать подмножество бикомпактного множества. Это требование будет заведомо выполнено, если среди множеств в $\mathfrak{C}$ имеется относительно компактное.

В качестве следствий теоремы 4 укажем на следующие два факта.

V. *Компактное хаусдорфово пространство X — локально компактно: каждая точка пространства X имеет базис фильтра окрестностей, состоящий из компактных множеств.*

Действительно, пусть $x \in X$. Обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех замкнутых окрестностей точки x. Поскольку X компактно, предфильтр $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условиям замечания к теореме 4 и, так как на основании предложения II(1.7) $L_{\mathfrak{C}} = \{x\}$, то предфильтр $\mathfrak{C}$ коинициален по отношению к фильтру $\mathfrak{B}_x$ окрестностей точки x. Но ввиду того, что $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}_x$, это означает, что $\mathfrak{C}$ — базис фильтра $\mathfrak{B}_x$. Остается заметить, что множества из $\mathfrak{C}$, будучи замкнутыми подмножествами компактного множества X, компактны.

VI. *Компактное хаусдорфово пространство нормально.*

В самом деле, пусть E — замкнутое множество пространства X. Считая $E \neq \varnothing$, обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех замкнутых (и, стало быть, компактных) окрестностей множества E. Учитывая, что хаусдорфово локально компактное пространство регулярно (предложение IV(1.7)), на основании предложения III(1.7) заключаем: $L_{\mathfrak{C}} = E$. Так как $\mathfrak{C}$ состоит из компактных множеств, то $\mathfrak{C}$ коинициально фильтру $\mathfrak{B}_E$ и тем самым $\mathfrak{C}$ служит базисом этого фильтра.

2.8. Свойство бикомпактности при непрерывном отображении сохраняется. Точная формулировка этого обстоятельства составляет содержание так называемой *теоремы Вейерштрасса*.

Теорема 5(2.II). *Пусть T и X — топологические пространства* и f — *непрерывное отображение из T в X. Образ $f[C]$ бикомпактного множества C, содержащегося в области определения $D(f)$ отображения f, бикомпактен.*

Доказательство. Так как сужение $f|_C$ также непрерывно (предложение II(2.2)), то можно считать, что $C = D(f)$, а на основании предложений II(2.5) и II(2.7) можно, кроме того, ограничиться случаем, когда $D(f) = T$, т. е. когда f — непрерывное отображение компактного пространства T в X. Пусть $\mathfrak{U}$ — фильтр в X, включающий множество $f[T] = R(f)$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ совокупность всех замкнутых множеств, входящих в $\mathfrak{U}$, и положим $\mathfrak{C} = f^{-1}\langle\mathfrak{F}\rangle$. Согласно теореме 3 предфильтр $\mathfrak{C}$ в T состоит из замкнутых множеств, так что

$L_{\mathfrak{S}} = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{S}} A$. Поскольку T компактно, $L_{\mathfrak{S}} \neq \varnothing$. Непусто тем самым и множество $f[L_{\mathfrak{S}}]$. Но

$$R(f) \cap f[L_{\mathfrak{S}}] = f[L_{\mathfrak{S}}] \subset \bigcap_{E \in \mathfrak{F}} f[f^{-1}[E]] \subset \bigcap_{E \in \mathfrak{F}} E = L_{\mathfrak{F}} = L_{\mathfrak{U}}.$$

Предложение I(2.7) позволяет заключить отсюда о бикомпактности множества $R(f)$.

Следствие 1. Если в условиях теоремы пространство X хаусдорфово, то множество $f[C]$ компактно и, стало быть, замкнуто.

Следствие 2. Если в условиях следствия 1 f — взаимно однозначное отображение компактного пространства T в X, то обратное отображение f^{-1} непрерывно, и тем самым f служит гомеоморфизмом пространства T на подпространство $X_0 = R(f)$ пространства X.

Действительно, замкнутое множество E пространства T компактно, поэтому на основании следствия 1 множество $(f^{-1})^{-1}[E] = f[E]$ замкнуто. Применяя замечание 1 к теореме 3, заключаем о непрерывности отображения f^{-1} из X в T (предложение II(2.5))

Укажем еще на одно применение теоремы Вейерштрасса. Хотя соответствующий факт под именем теоремы Тихонова будет сформулирован впоследствии в значительно более общей ситуации (см. теорему 2 (6.II)), простое его доказательство, приведенное ниже, пригодно без каких-либо изменений и в общем случае.

Пусть Λ — конечное множество и $\{X_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ — семейство топологических пространств. Положим $X = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

I. *Пусть $\{C_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ — такое семейство множеств, что $C_\lambda \subset X_\lambda$ при каждом $\lambda \in \Lambda$. Для того чтобы непустое множество $C = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы было бикомпактным каждое множество C_λ $(\lambda \in \Lambda)$. Компактность множества C равносильна компактности каждого множества C_λ.*

В самом деле, возьмем ультрафильтр $\mathfrak{U}$ в X, содержащий множество C. Обозначим через P_λ $(\lambda \in \Lambda)$ проекции пространства X и положим $\mathfrak{U}_\lambda = P_\lambda\langle\mathfrak{U}\rangle$ $(\lambda \in \Lambda)$. В силу предложения II(I.7.3) $\mathfrak{U}_\lambda$ — ультрафильтры в C_λ, содержащие, очевидно, множества C_λ $(\lambda \in \Lambda)$. Поэтому, если C_λ бикомпактны, то каждый ультрафильтр $\mathfrak{U}_\lambda$ сходится к некоторой точке $x_\lambda \in C_\lambda$ (предложение III(2.7)), а тогда вследствие предложения X(2.1) фильтр $\mathfrak{U}$ сходится к точке $\varphi \in X$, где $\varphi : \{x_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$, так что $\varphi \in C$.

Пусть теперь дано, что бикомпактно множество C. Так как P_λ непрерывны, по теореме Вейерштрасса множества $C_\lambda = P[C]$ $(\lambda \in \Lambda)$ бикомпактны.

Поскольку $C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda^{-1}[C_\lambda]$, то замкнутость множеств C_λ $(\lambda \in \Lambda)$ влечет замкнутость множества C и, следовательно, компактность множеств C_λ $(\lambda \in \Lambda)$ влечет компактность множества C. С помощью предложения X(2.1) нетрудно доказать и обратное: замкнутость C влечет замкнутость множеств C_λ и тем самым из компактности C вытекает компактность множеств C_λ $(\lambda \in \Lambda)$.

2.9. Рассмотрим в заключение вопрос о пределе «функций двух переменных». Допустим, что имеется отображение Φ произведения $S \times T$ множеств S и T в топологическое пространство X. Предположим еще, что заданы фильтры (или предфильтры) $\mathfrak{A}$ в S и $\mathfrak{B}$ в T. Понятно, что совокупность множеств вида $A \times B$ $(A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{B})$ образует предфильтр в $S \times T$. Этот предфильтр, хотя это и не совсем корректно, мы будем обозначать через $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Пусть $s \in S$. Введем отображение $\Phi(s, \cdot):$ $: t \mapsto \Phi(s, t)$ $(t \in T)$ множества T в пространство X [15]) и аналогичным образом (при $t \in T$) отображение $\Phi(\cdot, t)$.

I. *Пусть X — регулярное пространство. Если существует предел* $\lim_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \Phi$ *и при каждом* $s \in S$ *существует предел* $\lim_{\mathfrak{B}} \Phi\,(s, \cdot)$, *то отображение* $f: s \mapsto \lim_{\mathfrak{B}} \Phi\,(s, \cdot)$ $(s \in S)$ *имеет предел по фильтру* $\mathfrak{A}$, *причем* $\lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \Phi$.

Действительно, пусть V — з а м к н у т а я окрестность точки $x = \lim_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \Phi$. Найдем такие множества $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, что $\Phi[A \times B] \subset V$. В силу предложения III(2.1) для каждого $s \in A$ имеем $f(s) \in V$, т. е. $f[A] \subset V$. Поскольку замкнутые окрестности точки x образуют базис фильтра $\mathfrak{B}_x$ окрестностей этой точки (см. IV(1.7)), последнее соотношение означает, что предфильтр $f\langle \mathfrak{A} \rangle$ коинициален фильтру $\mathfrak{B}_x$, т. е. что $x = \lim_{\mathfrak{A}} f$.

Если в условиях доказанного предложения существует также предел $\lim_{\mathfrak{A}} \Phi(\cdot, t)$ $(t \in T)$, то $\lim_{\mathfrak{B}} g = \lim_{\mathfrak{A}} f$, где $g: t \mapsto$ $\mapsto \lim_{\mathfrak{A}} \Phi(\cdot, t)$ $(t \in T)$.

§ 3. ПРЕДЕЛЫ ЧИСЛОВЫХ СООТВЕТСТВИЙ

В этом параграфе изучаются по преимуществу соответствия, область прибытия которых есть одно из множеств $\mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$ или $\mathbf{C}$, в связи с чем они и называются ч и с л о в ы м и соответствиями. Однозначное числовое соответствие мы будем называть

[15]) Грубо говоря, отображение $\Phi(s, \cdot)$ есть сужение отображения Φ на множество $\{s\} \times T$, а если быть точным, то суперпозиция Φ и отображения $t \mapsto (s, t)$ $(t \in T)$ множества T на произведение $\{s\} \times T$.

(числовой) *функцией — вещественной*, если ее область значений лежит в $\mathbf{R}$, или *комплексной*, если — в $\mathbf{C}$. Поскольку числовую прямую мы будем мыслить в зависимости от случая как подмножество множества $\overline{\mathbf{R}}$ или множества $\mathbf{C}$, то функцию с областью прибытия $\mathbf{R}$ можно рассматривать и как комплексную и как вещественную. В последнем случае будем говорить о такой функции как о *конечной*. Трактуя множества $\mathbf{R}$ и $\overline{\mathbf{R}}$ как топологические пространства, всегда будем иметь в виду интервальную топологию. Поскольку $\mathbf{R}$ есть промежуток расширенной числовой прямой $\overline{\mathbf{R}}$, топология на $\mathbf{R}$ совпадает с топологией, индуцированной топологией на $\overline{\mathbf{R}}$. С множеством $\mathbf{C}$ всегда связывается топология произведения $\mathbf{R}^2$. Отметим, что каждое из пространств $\mathbf{R}$, $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{C}$ — хаусдорфово (предложения VII (1.8) и I (1.10)).

3.1. В этом пункте мы приведем некоторые факты о пределах функций, связанные с наличием в $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ структуры поля.

Рассмотрим конечное множество Λ и произведение $\mathbf{R}^\Lambda$. В $\mathbf{R}^\Lambda$ естественным образом определяется структура коммутативной группы (с покоординатным сложением в роли групповой операции). Имея в виду топологию произведения на $\mathbf{R}^\Lambda$, докажем

I. *Отображение* $S: \varphi \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda)$ $(\varphi \in \mathbf{R}^\Lambda)$ *пространства* $\mathbf{R}^\Lambda$ *в* $\mathbf{R}$ *непрерывно.*

Действительно, пусть $\varphi \in \mathbf{R}^\Lambda$ и $x = S(\varphi) = \Sigma_{\lambda\in\Lambda}\, \varphi(\lambda)$. Совокупность $\mathfrak{B}_\varphi$ всех множеств вида $V_\varepsilon = \prod_{\lambda\in\Lambda} [\varphi(\lambda) - \varepsilon, \varphi(\lambda) + \varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ представляет собой базис фильтра окрестностей точки φ (см. 1.10). Обозначая через n число элементов множества Λ, при $n > 0$ имеем $S[V_\varepsilon] \subset [x - n\varepsilon, x + n\varepsilon]$. При $n > 0$ множество $\mathfrak{A}_x$ всех промежутков вида $[x - n\varepsilon, x + n\varepsilon]$ $(\varepsilon > 0)$ образует базис фильтра окрестностей точки x, так что предфильтр $S\langle\mathfrak{B}_\varphi\rangle$ в $\mathbf{R}$ коинициален по отношению к предфильтру $\mathfrak{A}_x$ в $\mathbf{R}$, а это означает, что $S\langle\mathfrak{B}_\varphi\rangle \to x$, т. е. что $\lim_{(\varphi)} S = x$.

При $n = 0$ будет $\mathbf{R}^\varnothing = \{\varnothing\}$ и непрерывность отображения S тривиальна.

Если $a \in \mathbf{R}$ и под X подразумевается промежуток $[a, +\infty]$ расширенной числовой прямой, снабженный интервальной топологией или, что в данном случае то же, топологией подпространства пространства $\overline{\mathbf{R}}$, то, понимая под S отображение пространства X^Λ в $\overline{\mathbf{R}}$, по-прежнему сопоставляющее элементу $\varphi \in X^\Lambda$ сумму $\sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda)$, в том же порядке идей, что и при доказательстве предложения I, можно убедиться в непрерывности отображения S и в этом случае.

Пусть, как и выше, Λ — конечное множество и $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ — семейство комплексных функций, область отправления каждой из которых есть некоторое множество T. Положим $D = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} D(f_\lambda)$. Функция $f: t \mapsto \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(t)$ $(t \in T)$ называется *суммой* семейства $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ и обозначается через $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$, или через $\Sigma_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$. Ясно, что $D(f) = D$.

II. *Если фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств $\mathfrak{A}$ зацепляет область определения D суммы $f = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ и для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует предел $\lim_{\mathfrak{A}} f_\lambda$, то существует предел* $\lim_{\mathfrak{A}} f = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \lim_{\mathfrak{A}} f_\lambda$.

В самом деле, предположим сначала, что все функции f_λ $(\lambda \in \Lambda)$ вещественные. Определим отображение F из T в $\mathbf{R}^\Lambda$, понимая для $t \in D$ под $F(t)$ семейство $\lambda \mapsto f_\lambda(t)$ $(\lambda \in \Lambda)$. Тогда $f = S \circ F$, где S — отображение, о котором шла речь в предложении I. Так как координатными функциями отображения F служат, очевидно, сужения $f_\lambda|_D$, доказываемое утверждение вытекает из предложения VI (2.2) и теоремы 2 (2.II).

В общем случае имеем $\operatorname{Re} f = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Re} f_\lambda$, $\operatorname{Im} f = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Im} f_\lambda$. Применяя опять предложение VI(2.2) сначала к f_λ, а затем к f, получим требуемый результат.

Из предложения II вытекает, в частности, что при любом $u \in \mathbf{C}$ отображение $z \mapsto z + u$ $(z \in \mathbf{C})$ будет гомеоморфизмом пространства $\mathbf{C}$ на себя. Не останавливаясь на очевидном доказательстве, отметим также, что при $\alpha \in \mathbf{R}$ $(\alpha \neq 0)$ будет гомеоморфизмом пространства $\mathbf{C}$ на себя отображение $z \mapsto \alpha z$ $(z \in \mathbf{C})$.

Пусть r — строго положительное вещественное число и $u \in \mathbf{C}$. Положим $B_r\{u\} = \{z \in \mathbf{C} : |z - u| \leqslant r\}$.

III. *Совокупность всех множеств вида $B_r\{u\}$ является базисом фильтра окрестностей точки u (в пространстве $\mathbf{C}$).*

Действительно, в силу указанного выше достаточно рассмотреть случай $u = 0$. Поскольку $0 \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ и функции Re и Im непрерывны (предложение IX(2.5)), согласно предложению X(2.2) отображение $m : z \mapsto |z|$ $(z \in \mathbf{C})$ из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{R}$ непрерывно в точке 0. Поэтому $B_r\{0\} = m^{-1}[-r, r]$ является окрестностью точки 0 в пространстве $\mathbf{C}$ (предложение VI (2.5)). Так как $B_r\{0\} \subset (\operatorname{Re}[B_r\{0\}]) \times (\operatorname{Im}[B_r\{0\}]) = [-r, r] \times [-r, r]$, а произведения вида $[-r, r] \times [-r, r]$ образуют базис фильтра окрестностей точки 0 пространства $\mathbf{C}$, отсюда и вытекает справедливость доказываемого утверждения.

Заметим, что из неравенства $||z| - |u|| \leqslant |z - u|$ следует непрерывность функции m не только в точке 0, но и на всей комплексной плоскости.

Используя доказанный факт, можем установить

IV. *Пусть f — комплексная функция из множества T. Если $\mathfrak{A}$ — фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств, то для существования предела $\lim_{\mathfrak{A}} f$, равного l, необходимо и достаточно, чтобы вещественная функция $g: t \mapsto |f(t) - l|$ $(t \in D(f))$ имела предел, равный нулю.*

Вновь рассмотрим конечное множество Λ и семейство $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ комплексных функций. Полагая $D = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} D(f_\lambda)$, введем функцию $h: t \mapsto \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(t)$ $(t \in D)$, называемую *произведением* семейства $\{f_\lambda\}$ $(\lambda \in \Lambda)$ и обозначаемую через $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$ или через $\prod_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$.

V. *Если $\mathfrak{A}$ — фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств, зацепляющая область определения D произведения $h = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda$, и существуют пределы $\lim_{\mathfrak{A}} f_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, то существует и предел $\lim_{\mathfrak{A}} h = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} \lim_{\mathfrak{A}} f_\lambda$.*

Если воспользоваться индукцией, то для доказательства можно ограничиться рассмотрением случая, когда Λ состоит из двух элементов, т. е. когда $h(z_1, z_2) = z_1 z_2$ $(z_1, z_2 \in \mathbf{C})$. Так как при $0 < r < 1$, очевидно, $h[B_r\{0\} \times B_r\{0\}] \subset B_r\{0\}$, то h непрерывна в точке $(0, 0) \in \mathbf{C}^2$. Применяя результаты предложений II, III, IV и исходя из равенства

$$z_1 z_2 - u_1 u_2 = u_2(z_1 - u_1) + u_1(z_2 - u_2) + \\ + (z_1 - u_1)(z_2 - u_2) \quad (z_1, z_2, u_1, u_2 \in \mathbf{C}),$$

установим непрерывность отображения h и в любой точке $(u_1, u_2) \in \mathbf{C}^2$.

Если в предложении V принять $f_\lambda = I_{\mathbf{C}}$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то получаем

VI. *Каково бы ни было целое положительное число n, функция $z \mapsto z^n$ $(z \in \mathbf{C})$ непрерывна.*

Пусть n — целое положительное число и $\{c_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — семейство комплексных чисел. Функция $z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} c_k z^k$ $(z \in \mathbf{C})$ называется *целой рациональной* (а ее значения в точке z — *полиномом* от z степени n). Комбинируя предложения IV, VI и II, приходим к следующему заключению.

VII. *Целая рациональная функция непрерывна.*

Обозначая через C_0 множество всех комплексных чисел, отличных от нуля, докажем, наконец,

VIII. *Функция* $z \mapsto 1/z$ $(z \in C_0)$ *непрерывна.*

В самом деле, пусть $u \in C_0$. Так как функция $m : z \mapsto |z|$ $(z \in C)$ непрерывна, согласно предложению IV(2.2) найдется такая окрестность U_0 точки u, что $|z| > |u|/2$ для $z \in U_0$. Поскольку для $z \in U_0$ будет $|1/z - 1/u| \leqslant 2|z - u|/|u|^2$, доказательство заканчивается применением предложений III и IV.

IX. *Если* n — *строго отрицательное целое число, то функция* $z \mapsto z^n$ $(z \in C_0)$ *непрерывна.*

X. *Пусть* f, g — *комплексные функции и* $\mathfrak{A}$—*фильтрующаяся по убыванию совокупность множеств, зацепляющая множество* $D = \{t \in D(f) \cap D(g) : g(t) \neq 0\}$. *Если существуют пределы* $\lim_{\mathfrak{A}} f$ *и* $\lim_{\mathfrak{A}} g$, *причем* $\lim_{\mathfrak{A}} g \neq 0$, *то функция* $h : t \mapsto f(t)/g(t)$ $(t \in D)$ *также имеет предел*: $\lim_{\mathfrak{A}} h = \lim_{\mathfrak{A}} f / \lim_{\mathfrak{A}} g$.

Продолжим изучение соответствий, область прибытия которых есть линейно упорядоченное множество (см. I.3.5). Для этого выясним условия компактности множества в линейно упорядоченном множестве, снабженном интервальной топологией. Докажем на этот счет фундаментальную теорему Больцано — Вейерштрасса.

Теорема 1(3.II). *Пусть* X — *линейно упорядоченное множество с интервальной топологией. Для того чтобы множество* $C \subset X$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы любое непустое подмножество множества* C *имело бы точные границы (относительно порядка в* X*), которые входили бы в* C.

Доказательство. Необходимость. Предполагая, что компактное множество C непусто, докажем, что оно обладает наибольшим и наименьшим элементами. Обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех промежутков вида $[x, \rightarrow]$ с $x \in C$. Совокупность $\mathfrak{C}$, будучи линейно упорядоченной, фильтруется по убыванию и, очевидно, зацепляет C. Поэтому на основании предложения I(2.7) $C \cap L_{\mathfrak{C}} \neq \varnothing$. Но, обозначая порядок в X через σ, будем иметь $L = \bigcap_{\mathfrak{C} x \in C} [x, \rightarrow] = \bigcap_{x \in C} \pi_\sigma \{x\} = \pi_\sigma (C)$. Следовательно, $C \cap \pi_\sigma (C) \neq \varnothing$ и, значит, существует наибольший элемент множества C (см. I.3.2) Меняя порядок σ на σ^{-1}, установим существование наименьшего элемента множества C.

Пусть E — непустое подмножество компактного множества C. Поскольку E относительно компактно, его замыкание $\bar{E}$, будучи компактным множеством, обладает наибольшим и наименьшим элементами, причем ввиду того, что C замкнуто, эти элементы входят в C. Остается воспользоваться предложением IV(1.8).

Достаточность. Рассмотрим в пространстве X множество C, удовлетворяющее условиям теоремы. Учитывая предложения X(1.8) и II(2.7), можем считать, что C совпадает со всем X. Пусть $\mathfrak{U}$ — какой-либо фильтр в X. Обозначим через Ξ совокупность всех замкнутых множеств, входящих в состав $\mathfrak{U}$, и введем отображение $\Phi : \xi \mapsto \inf \xi$ $(\xi \in \Xi)$. Поскольку Φ — убывающее и Ξ фильтруется по убыванию, на основании замечания к теореме 1(2.II) существует предел $u = \overleftarrow{\lim}\, \Phi = \sup\limits_{\xi \in \Xi} (\inf \xi)$. Возьмем произвольное $\eta \in \Xi$ и, обозначая $\Xi_\eta = [\leftarrow, \eta]$, в соответствии с предложением IV(2.2) напишем $u = \overleftarrow{\lim}\, \Phi|_{\Xi_\eta} = \overleftarrow{\lim}\, \Phi$. Но для $\xi \in \Xi_\eta$ в силу предложения VI(1.8) $\Phi(\xi) \in \xi \subset \eta$. Стало быть, $u = \overleftarrow{\lim}\, \Phi|_{\Xi_\eta} \in \eta$, и тем самым, $u \in \bigcap\limits_{\eta \in \Xi} \eta = L_{\mathfrak{U}}$, так что $L_{\mathfrak{U}}$ непусто, т. е. X компактно.

Замечание. Если по ходу доказательства достаточности условия ввести отображение $\Psi : \xi \mapsto \sup \xi$ $(\xi \in \Xi)$, то можно было бы доказать, что $v = \overleftarrow{\lim}\, \Psi = \inf\limits_{\xi \in \Xi} (\sup \xi) \in L_{\mathfrak{U}}$. Поскольку для любого $U \in \mathfrak{U}$ вследствие предложения IV(1.8) $\sup U = \sup \overline{U}$, то $v = \inf\limits_{U \in \mathfrak{U}} (\sup \overline{U}) = \inf\limits_{U \in \mathfrak{U}} (\sup U)$ и, разумеется, точно так же

$$u = \sup_{U \in \mathfrak{U}} (\inf U).$$

Укажем на ряд следствий доказанной теоремы.

Следствие 1. *Чтобы множество C пространства X было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы любое его непустое подмножество имело точные границы (относительно порядка в X).*

Следствие 2. *Если в условиях теоремы множество X — условно полное, то для относительной компактности множества C в X достаточно, а если $X \neq \varnothing$, то и необходимо, чтобы C было ограничено.*

Таким образом, аксиома Дедекинда об условной полноте числовой прямой $\mathbf{R}$ равносильна требованию относительной компактности каждого ограниченного множества в $\mathbf{R}$.

Привлекая теорему Вейерштрасса, получаем

Следствие 3. *Пусть T — топологическое пространство и f — непрерывное отображение из T в пространство X, область определения которого содержит бикомпактное множество K. Существуют такие точки $t_1, t_2 \in K$, что $f[K] \subset [f(t_1), f(t_2)]$.*

3.2. В пункте 2.1, рассматривая сходимость фильтров в топологическом пространстве X, мы связали с фильтром $\mathfrak{U}$ в X

замкнутое множество $L_{\mathfrak{U}} = \bigcap\limits_{U \in \mathfrak{U}} \overline{U}$. Если пространство X хаусдорфово, то согласно предложениям IV и VI из 2.1 элементы множества $L_{\mathfrak{U}}$ можно трактовать как «частичные» пределы фильтра $\mathfrak{U}$. Поэтому, когда роль X играет линейно упорядоченное множество с интервальной топологией, появляется возможность говорить о наименьшем или наибольшем из такого рода «частичных» пределов.

Итак, пусть X — линейно упорядоченное множество с интервальной топологией. Рассмотрим предфильтр $\mathfrak{E}$ в X и, как и прежде (см. 2.1), обозначим $\bigcap\limits_{E \in \mathfrak{E}} \overline{E}$ через $L_{\mathfrak{E}}$. Допустим, что множество $L_{\mathfrak{E}}$ непусто и существует $\inf L_{\mathfrak{E}}$ $(\sup L_{\mathfrak{E}})$. Тогда элемент $\inf L_{\mathfrak{E}}$ $(\sup L_{\mathfrak{E}})$ называют *нижним* (соответственно *верхним*) *пределом предфильтра* $\mathfrak{E}$ и обозначают через $\underline{\lim}\ \mathfrak{E}$ $(\overline{\lim}\ \mathfrak{E})$. Заметим, что, поскольку $L_{\mathfrak{E}}$ замкнуто, то в случае существования будет $\inf L_{\mathfrak{E}} \in L_{\mathfrak{E}}$ $(\sup L_{\mathfrak{E}} \in L_{\mathfrak{E}})$, так что $\underline{\lim}\ \mathfrak{E}$ $(\overline{\lim}\ \mathfrak{E})$ — наименьший (соответственно наибольший) элемент множества $L_{\mathfrak{E}}$.

В зависимости от происхождения предфильтра для обозначения его верхнего и нижнего пределов используется отличная от указанной символика, основанная на обозначениях предела предфильтра в соответствующей ситуации [16].

Понятно, что если предфильтр $\mathfrak{E}_0$ в X коинициален предфильтру $\mathfrak{E}$, то, поскольку $L_{\mathfrak{E}_0} \subset L_{\mathfrak{E}}$, в случае существования соответствующих пределов будет $\underline{\lim}\mathfrak{E} \leqslant \underline{\lim}\mathfrak{E}_0 \leqslant \overline{\lim}\mathfrak{E}_0 \leqslant \leqslant \overline{\lim}\mathfrak{E}$.

Если к предфильтру не предъявлять никаких требований, то существование его нижнего и верхнего пределов можно гарантировать лишь в следующей тривиальной ситуации.

I. *Если предфильтр* $\mathfrak{E}$ *в* X *сходится, то он имеет нижний и верхний пределы, причем* $\underline{\lim}\ \mathfrak{E} = \overline{\lim}\ \mathfrak{E} = \lim \mathfrak{E}$.

В связи со сказанным приобретает значение следующее утверждение

II. *Если в состав фильтра* $\mathfrak{U}$ *в* X *входит компактное множество, тогда существуют* $\underline{\lim}\ \mathfrak{U}$, $\overline{\lim}\ \mathfrak{U}$, *причем* $\underline{\lim}\ \mathfrak{U} = \sup\limits_{C \in \mathfrak{C}} (\inf C)$, $\overline{\lim}\ \mathfrak{U} = \inf\limits_{C \in \mathfrak{C}} (\sup C)$, *где* $\mathfrak{C}$ — *совокупность всех компактных множеств, входящих в фильтр* $\mathfrak{U}$.

---

[16] Кроме того, встречаются и такие обозначения: $\lim\inf \mathfrak{E}$ — для нижнего и $\lim\sup \mathfrak{E}$ — для верхнего пределов предфильтра $\mathfrak{E}$.

Действительно, если $C \in \mathfrak{C}$, то согласно предложению I(2.7) $\varnothing \neq L_{\mathfrak{U}} \subset C$ и, привлекая теорему Больцано — Вейерштрасса, заключаем о существовании нижнего и верхнего пределов фильтра $\mathfrak{U}$. Далее, поскольку всякое компактное множество замкнуто, то $L_{\mathfrak{U}} \subset \bigcap\limits_{C \in \mathfrak{C}} C$. С другой стороны, множества $C \cap \overline{U}$, где $U \in \mathfrak{U}$, компактны как замкнутые подмножества C, следовательно, $\bigcap\limits_{C \in \mathfrak{C}} C \subset L_{\mathfrak{U}}$. Таким образом, $L_{\mathfrak{U}} = \bigcap\limits_{C \in \mathfrak{C}} C$, откуда легко следует требуемое равенство.

Предложение I дополним предложением

III. *Если фильтр* $\mathfrak{U}$ *в* X *содержит компактное множество и* $\underline{\lim}\, \mathfrak{U} = \overline{\lim}\, \mathfrak{U}$, *то существует предел* $\lim \mathfrak{U} = \underline{\lim}\, \mathfrak{U} = \overline{\lim}\, \mathfrak{U}$.

Действительно, из полученных в предложении II соотношений нетрудно получить, что $\mathfrak{U}$ коинициален по отношению к любому базису фильтра окрестностей точки $x = \underline{\lim}\, \mathfrak{U} = \overline{\lim}\, \mathfrak{U}$, состоящему из промежутков.

Предложение III лежит в основе доказательства важного факта, который называется *принципом сходимости Коши*.

Рассматривая числовую прямую $\mathbf{R}$ как топологическое пространство (с интервальной топологией), будем говорить, что (пред)фильтр $\mathfrak{E}$ *в* $\mathbf{R}$ *сходится в себе*, если предфильтр $\widehat{\mathfrak{E}}$ [17] в $\mathbf{R}$, состоящий из всех множеств вида $E - E$ ($E \in \mathfrak{E}$), сходится к точке 0.

Если предфильтр $\mathfrak{E}$ в $\mathbf{R}$ сходится (например, к $x \in \mathbf{R}$), то он сходится и в себе, так как если взять число $\varepsilon > 0$ и найти множество $E \in \mathfrak{E}$, удовлетворяющее условию $E \subset [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$, то $E - E \subset [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$, так что $\widehat{\mathfrak{E}} \to 0$. Оказывается — в этом и состоит принцип сходимости Коши, — что верно и обратное утверждение.

Теорема 2(3.II). *Для того чтобы предфильтр* $\mathfrak{E}$ *в* $\mathbf{R}$ *имел предел, необходимо и достаточно, чтобы он сходился в себе.*

Доказательство. Предположим, что предфильтр $\mathfrak{E}$ в $\mathbf{R}$ сходится в себе. Найдется такое множество $E_0 \in \mathfrak{E}$, что $E_0 - E_0 \subset [-1, 1]$. Если $x_0 \in E_0$, то $E_0 = x_0 + (E_0 - x_0) \subset x_0 + (E_0 - E_0) \subset [x_0 - 1, x_0 + 1]$, так что фильтр $\widetilde{\mathfrak{E}}$ содержит компактное множество. Обозначим через $\mathfrak{C}$ совокупность всех компактных множеств, входящих в состав фильтра $\widetilde{\mathfrak{E}}$. Так как вследствие предложения II $\overline{\lim}\, \mathfrak{C} - \underline{\lim}\, \mathfrak{C} \leqslant$

---

[17] Мы не останавливаемся на простом доказательстве того факта, что совокупность $\widehat{\mathfrak{E}}$ фильтруется по убыванию.

$\leqslant \sup C - \inf C = \sup (C - C)$ $(C \in \mathfrak{C})$, то, снова привлекая предложение II_3 получим $\overline{\lim}\,\mathfrak{C} - \underline{\lim}\,\mathfrak{C} \leqslant \inf\limits_{C \in \mathfrak{C}} (\sup (C - C)) = \overline{\lim}\,\hat{\mathfrak{C}} = 0$, т. е. $\underline{\lim}\,\mathfrak{C} = \overline{\lim}\,\mathfrak{C}$. В силу предложения III предфильтр $\mathfrak{C}$ имеет предел.

Замечание 1. Пользуясь предложением X(2.2), можно распространить принцип сходимости Коши и на пространство $\mathbf{R}^\Lambda$ (Λ — конечное множество). Поскольку впоследствии будет доказан более общий факт (см. теорему 1(3.III)), мы не приводим здесь ни формулировки, ни, тем более, относящихся сюда результатов, предоставляя сделать это читателю.

Замечание 2. Учитывая генезис предфильтра $\mathfrak{C}$ в $\mathbf{R}$, можно получить различные варианты принципа сходимости Коши. Укажем на один из них. Будем говорить, что фильтрующееся (например, по возрастанию) *семейство* $f : \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ точек числовой прямой *сходится в себе*, если фильтрующееся семейство $\{x_\xi - x_\eta\}$ $((\xi, \eta) \in \Xi^2)$ сходится к точке 0. В соответствии с доказанной теоремой семейство f сходится тогда и только тогда, когда оно сходится в себе.

3.3. Этот пункт посвящен изучению отображений из $\overline{\mathbf{R}}$ в $\overline{\mathbf{R}}$ или, говоря более общо, из одного линейно упорядоченного множества T в другое такое же множество X.

Прежде всего отметим один частный случай предложения II(2.6), который обычно называют *теоремой Коши о промежуточных значениях*.

I. *Пусть f — непрерывное отображение из* $\overline{\mathbf{R}}$ *в* $\overline{\mathbf{R}}$. *Если промежуток Λ содержится в области определения $D(f)$ отображения f, то его образ $f[\Lambda]$ также является промежутком.*

Для доказательства достаточно заметить, что множество $E \subset \overline{\mathbf{R}}$ связно тогда и только тогда, когда оно является промежутком (см. 1.10).

II. *Если в условиях предложения* I *существуют такие точки t_1, $t_2 \in \Lambda$, что $f(t_1) < 0$, $f(t_2) > 0$, то в Λ найдется и такая точка t, что $f(t) = 0$.*

Действительно, раз точки $f(t_1)$, $f(t_2)$ входят в промежуток $f[\Lambda]$, то $0 \in [f(t_1), f(t_2)] \subset f[\Lambda]$.

Рассмотрим линейно упорядоченное множество X, полное в смысле порядка и обладающее свойством плотности в себе: если элементы x, $y \in X$ таковы, что $x < y$, то открытый промежуток (x, y) непуст. Ясно, что расширенная числовая прямая $\overline{\mathbf{R}}$ удовлетворяет обоим требованиям, предъявленным X. Наряду с X рассмотрим также линейно упорядоченное множество T. Множества T и X снабдим интервальной топологией. Установим результат, важность которого обусловлена тем, что с его помощью можно доказывать непрерывность конкретных отображений (см., например, § 4).

Теорема 2(3.II). Пусть f — возрастающее отображение из множества T в множество X. Если область значений $\Omega = R(f)$ представляет собой промежуток, то f непрерывно и допускает непрерывное возрастающее распространение F на замыкание $D = \overline{D(f)}$ своей области определения.

Доказательство. Возьмем такие элементы $x, y \in \overline{\Omega}$, что $x < y$ и пусть $u \in (x, y)$. Очевидно, $u \in \Omega$, так что прообраз $f^{-1}\{u\}$ непуст. Предположим, что $r \in f^{-1}\{u\}$. Докажем тогда, что для любой точки $s \in [\leftarrow, r] \cap D$ будет $\overline{\lim}_{(s)} f \leqslant u$, а если $s \in [\leftarrow, r) \cap D$, то $\underline{\lim}_{(s)} f \geqslant u$ [18]). Действительно, обозначая через $\mathfrak{U}_t$ фильтр окрестностей точки $t \in T$, имеем в случае $s \in [\leftarrow, r) \cap D$, что $U = [\leftarrow, r] \in \mathfrak{U}_s$. Поэтому, поскольку $\overline{\lim}_{(s)} f = \overline{\lim}\, f\langle \mathfrak{U}_t \rangle \in \overline{f[U]}$, ввиду того что f — возрастающее, $f[U] \subset [\leftarrow, f(r)]$, а тогда и $\overline{f[U]} \subset [\leftarrow, f(r)]$, так что $\overline{\lim}_{(s)} f \leqslant \leqslant f(r) = u$. В том же порядке идей обосновывается и вторая часть утверждения.

Возьмем точку $t \in D$. Положим $x = \underline{\lim}_{(t)} f$, $y = \overline{\lim}_{(t)} f$. Очевидно, $x, y \in \overline{\Omega}$. Если, кроме того, $x < y$, то для $u \in (x, y)$ и $r \in f^{-1}\{u\}$ в силу сказанного только что будем иметь $t = r$. Если бы, например, оказалось $t < r$, то $y = \overline{\lim}_{(t)} f \leqslant u < y$, а допущение $t > r$ опровергается неравенством $x = \underline{\lim}_{(t)} f < u$. Таким образом, $(x, y) = \{u\}$ и промежуток (x, u) (и, разумеется, промежуток (u, y)) пустой, что противоречит предположению о множестве X. Итак, $x = y$ и, следовательно, на основании предложения III (3.2) существует предел $\lim_{(t)} f$. Отсюда с помощью предложения I (2.5) заключаем о непрерывности отображения f в любой точке $t \in D(f)$.

Положим $F : t \to \lim_{(t)} f$ $(t \in D)$. Ясно, что $F \supset f$. Стало быть, $\Omega = R(f) \subset R(F) \subset \overline{\Omega}$. Это означает, что область значений $R(F)$ отображения F представляет собой промежуток, причем с теми же концами, что и у Ω. Пусть s, t — такие точки множества D, что $x = F(s) \leqslant F(t) = y$. Взяв $u \in (x, y)$ и $r \in f^{-1}\{u\}$, получим $s \leqslant t$ (в противном случае было бы $F(s) = \lim_{(s)} f \geqslant u > F(s)$) и точно так же $t \geqslant r$. Тем самым $s \leqslant t$. Таким образом, F — возрастающее отображение. Следовательно, по доказанному F непрерывно.

В дополнение к теореме докажем несколько полезных фактов.

---

[18]) Существование фигурирующих здесь нижнего и верхнего пределов следует из полноты множества X с помощью предложения II (3.2) и теоремы Больцано — Вейерштрасса.

III. *Если в условиях теоремы 2 множество T так же, как и X, обладает свойством плотности в себе, отображение f строго возрастающее и множество $D = \overline{D(f)}$ представляет собой промежуток, то и само множество $D(f)$ будет промежутком.*

В самом деле, докажем, что в этом случае отображение F строго возрастающее. Пусть $s, t \in D$ и $s < t$. Так как множество (s, t) открыто и непусто, то непусто и пересечение $(s, t) \cap D(f)$. Взяв $s_0 \in (s, t) \cap D(f)$ и применив то же рассуждение к промежутку (s_0, t), найдем $t_0 \in (s_0, t) \cap D(f)$. Так как $s < s_0 < t_0 < t$, то $F(s) \leqslant F(s_0) \leqslant f(s_0) < f(t_0) = F(t_0) \leqslant F(t)$. Будем теперь под t подразумевать точку промежутка D, отличную от его концов. Так как в этом случае найдутся такие q, $r \in D$, что $q < t < r$ и, следовательно, $F(t) \in (F(q), F(r))$, то $F(t)$ не совпадает ни с одним из концов промежутка $\overline{\Omega}$ и, значит, $F(t) \in \Omega = D(f^{-1})$. Поскольку $f^{-1} \subset F^{-1}$ и F, будучи строго возрастающим, взаимно однозначно, то $t = F^{-1}(F(t)) = f^{-1}(F(t)) \in D(f)$.

IV. *В условиях предложения III отображение f^{-1} непрерывно.*

Действительно, отображение f^{-1} также строго возрастает. Поэтому f является изоморфизмом множества $D(f)$ на промежуток Ω, так что $f[[\leftarrow, r]] = [\leftarrow, f(r)] \cap \Omega$ и $f[[r, \rightarrow]] = [f(r), \rightarrow] \cap \Omega$ для любого $r \in D(f)$. Поскольку $D(f)$ и Ω — промежутки, интервальная топология на них совпадает с топологией подпространства (см. IX (1.8)). Следовательно, множества $f[[\leftarrow, r]]$ и $f[[r, \rightarrow]]$ замкнуты в подпространстве Ω пространства X, а это в силу замечания к теореме 2 (2.II) означает непрерывность отображения $f^{-1}|_\Omega$ из Ω в $D(f)$ и, следовательно, согласно предложению II (2.5) непрерывность самого отображения f^{-1} из X в T.

Формулируя предложение IV в терминах, относящихся к самому отображению f^{-1}, получаем

V. *Пусть X и T — линейно упорядоченные множества, обладающие свойством плотности в себе. Если, кроме того, X полное и g — строго возрастающее отображение промежутка $\Omega \subset X$ на множество, замыкание которого D представляет собой непустой промежуток в T, то g непрерывно и область значений $R(g)$ является промежутком с теми же концами, что и у D.*

Полагая $T = X = \overline{\mathbf{R}}$ и привлекая предложение I, приходим к следующему результату.

VI. *Вещественная возрастающая функция f, область определения которой есть промежуток расширенной числовой прямой, непрерывна тогда и только тогда, когда ее область значений $R(f)$ также является промежутком расширенной числовой* *прямой. Если f — строго возрастающая и непрерывная функция, то обратная функция непрерывна.*

В частности, если за f взять функцию $t \mapsto t^n$ ($t \in [0, +\infty)$), где n — натуральное число, то можно утверждать, что функция $f^{-1}: t \mapsto t^{1/n}$ ($t \in [0, +\infty)$) непрерывна.

Заметим в заключение, что, заменяя порядок в одном из множеств T или X на обратный, мы, не нарушив требований, которые предъявлены в этом пункте к множествам T и X, и не изменив интервальной топологии, превратим убывающее отображение f в возрастающее. Тем самым все сказанное в этом пункте остается справедливым (с необходимыми перефразировками), если под f понимать убывающее отображение.

§ 4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Под элементарными обычно понимают функции, которые вошли в математику до конца XVIII в. В связи с этим может показаться, что само понятие «элементарная функция» чисто историческое и, следовательно, в значительной мере случайное, так что в иных исторических условиях мог бы появиться и иной запас «элементарных функций». Более глубокий анализ показывает, однако, что элементарные функции — степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические — возникают в математике прямо-таки с «железной» необходимостью. Не удивительно поэтому, что, хотя и вслепую, математика пришла именно к ним, а не каким-либо другим «экзотическим» с нашей точки зрения функциям. Дело здесь в том, что все основные элементарные функции тесно связаны с алгебраической структурой поля R и поля C. Рассматривая различные отображения этих множеств, сохраняющие те или иные алгебраические операции, мы и получаем, в сущности, все перечисленные выше элементарные функции.

К сказанному стоит добавить, что и так называемые «специальные» функции, вроде, например, функций Бесселя, эллиптических, сферических и т. п., вошедших в математику в XVIII—XIX вв., также в большинстве своем описывают связи между различными алгебраическими структурами, хотя и более сложными, чем структуры на числовой прямой или на комплексной плоскости.

4.1. Основные понятия теории групп и элементарные свойства гомоморфизмов были сформулированы в I.5.1. Как и в указанном пункте, рассматривая гомоморфизм φ группы X в группу Y, будем считать X группой по сложению, а Y — по умножению.

Рассмотрим в качестве X подгруппу группы $\mathbf{R}$, плотную в $\mathbf{R}$, а за Y примем мультипликативную группу поля $\mathbf{C}$, т. е. совокупность всех отличных от нуля комплексных чисел вместе с операцией умножения.

Лемма 1. *Если φ — гомоморфизм группы X в группу Y, непрерывный в точке 0, то существует единственная непрерывная функция $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, являющаяся распространением функции φ. При этом Φ служит гомоморфизмом группы $\mathbf{R}$ в группу Y.*

Доказательство. Пусть r — строго положительное число, меньшее единицы. Множество $B_r\{1\}$ является окрестностью точки 1 на комплексной плоскости, поэтому вследствие непрерывности функции φ в точке 0 найдется такая окрестность U_r точки 0 (в пространстве $\mathbf{R}$), что $\varphi[U_r] \subset B_r\{1\}$. Понятно, что можно считать $U_r = [-\varepsilon_r, \varepsilon_r]$, где ε_r — строго положительное число, и кроме того, $U_r \subset U_1$. Возьмем произвольную точку $x \in \mathbf{R}$. Положим $V_1 = x + {}^1/_2U_1$ и, зафиксировав точку $t_0 \in V_1 \cap X$, примем $m = |\varphi(t_0)|$. Для любой точки $t \in V_1 \cap X$ имеем $|\varphi(t)| = |\varphi(t - t_0)\varphi(t_0)| \leqslant |\varphi(t_0)| = m$. Пользуясь этим, докажем, что функция $\lambda = \operatorname{Re} \varphi$ имеет предел в точке x. Для точек $t, t' \in V_r \cap X$ ($V_r = x + {}^1/_2U_r$), учитывая, что $V_r \subset V_1$, имеем

$$|\lambda(t') - \lambda(t)| \leqslant |\varphi(t') - \varphi(t)| = |\varphi(t)| \cdot |\varphi(t' - t) - 1| \leqslant \leqslant mr.$$

Это означает, что $\lambda[V_r] - \lambda[V_r] \subset [-mr, mr]$. Если под $\mathfrak{V}_x$ понимать фильтр окрестностей точки x (в пространстве $\mathbf{R}$), то, замечая, что множества вида V_r с $r \in (0, 1]$ образуют базис фильтра $\mathfrak{V}_x$, а промежутки $[-mr, mr]$ ($r \in (0, 1]$) — базис фильтра $\mathfrak{V}_0$, выводим отсюда, что предфильтр $\lambda\langle\mathfrak{V}_x\rangle$ сходится в себе, т. е. удовлетворяет условиям теоремы 2 (3.II), применение которой и обеспечивает существование конечного предела $\lim \lambda\langle\mathfrak{V}_x\rangle = \lim_x\lambda$ и, в частности (см. I(2.5)), если $x \in X$, непрерывность функции λ в точке x. Из сказанного вытекает также, что $|\lim_x \lambda - \lambda(t)| \leqslant mr$ для любой точки $t \in V_r \cap X$ и любого числа $r \in (0, 1]$.

Если x' — точка числовой прямой, удовлетворяющая условию $|x' - x| < r/2$, где $r \in (0, 1]$, то пересечение $V_r \cap (x' + {}^1/_2U_r)$ имеет, очевидно, непустую внутренность и потому включает в себя точки множества X. Если $t \in X \cap V_r \cap (x' + {}^1/_2U_r)$, $t_0 \in X \cap V_1 \cap (x' + {}^1/_2U_1)$, то, как и выше, $|\lim_{x'}\lambda - \lambda(t)| \leqslant mr$, так что $|\lim_{x'} \lambda - \lim_x\lambda| \leqslant 2mr$, следовательно, функция $\Lambda : s \mapsto \lim_s\lambda$ ($s \in \mathbf{R}$) непрерывна в точке x. Поскольку для $x \in X$, как отмечалось, $\Lambda(x) = \lim_x\lambda = \lambda(x)$, функция Λ является распространением функции λ.

Точно так же доказав, что функция $\mu = \operatorname{Im} \varphi$ допускает распространение до непрерывной конечной функции на все $\mathbf{R}$, построим тем самым определенное на $\mathbf{R}$ непрерывное распространение Φ данного гомоморфизма φ. В силу IV (3.3) функция Φ единственна. Поскольку функции $(s, t) \mapsto \Phi(s+t)$ $((s, t) \in \mathbf{R}^2)$ и $(s, t) \mapsto \Phi(s)\,\Phi(t)$ $((s, t) \in \mathbf{R}^2)$ непрерывны (см. предложения I и V из 3.1) и совпадают на плотном в $\mathbf{R}^2$ множестве X^2, то по этим же основаниям они тождественны, т. е. $\Phi(x+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ $((s, t) \in \mathbf{R}^2)$. Если бы оказалось, что $\Phi(s) = 0$ при каком-то $s \in \mathbf{R}$, то, как очевидно, и все другие значения функции Φ и, значит, функции φ, были бы также равными нулю. Следовательно, $R(\varphi) \subset Y$ — функция Φ представляет собой гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в группу Y.

Замечание. Поскольку область значений $R(\Phi)$ гомоморфизма Φ содержится в замыкании $\overline{R(\varphi)}$ области значений $R(\varphi)$ данного гомоморфизма φ, то в случае, когда φ есть гомоморфизм группы X в замкнутую (в пространстве Y) подгруппу Z группы Y, функция Φ также будет гомоморфизмом в группу Z.

4.2. Рассмотрим несколько простых примеров гомоморфизмов конкретных групп.

Возьмем произвольное вещественное число k. Отображение $\varphi : x \mapsto kx$ $(x \in \mathbf{R})$ будет, очевидно, гомоморфизмом группы $\mathbf{R}$ в себя, при этом непрерывным и монотонным. Можно показать, что при условии непрерывности или монотонности этими функциями исчерпываются все гомоморфизмы группы $\mathbf{R}$ в себя.

Пусть, далее, n — целое положительное число. Функция $f : x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbf{R})$ сохраняет операцию умножения поля $\mathbf{R}$, т. е. $f(xy) = f(x)f(y)$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Ее сужение f_0 на множество $\mathbf{M}$ всех отличных от нуля вещественных чисел — мультипликативную группу поля $\mathbf{R}$ — будет, как очевидно, гомоморфизмом этой группы в себя. Это свойство сохраняется у функции $f_0 : x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbf{M})$ и в том случае, когда n — строго отрицательное целое число.

Положим $\mathbf{M}+ = (0, +\infty)$. Множество $\mathbf{M}+$ вместе с операцией умножения является группой и, если n — натуральное число, то функция φ: $x \mapsto x^n$ $(x \in \mathbf{M}+)$ служит гомоморфизмом этой группы в себя. При этом функция φ непрерывна и строго возрастает. Стало быть, в силу предложения VI (3.4) обратная функция $\psi = \varphi^{-1}$ также непрерывна и строго возрастает. При этом $D(\psi) = \mathrm{R}(\varphi) = (0, +\infty) = \mathbf{M}+$. Тем самым функция $\psi : x \mapsto x^{1/n}$ $(x \in \mathbf{M}+)$ является непрерывным и строго возрастающим гомоморфизмом группы $\mathbf{M}+$ на себя.

Пусть r — рациональное число. Функция $g : x \mapsto x^r$ $(x \in \mathbf{M}+)$ также представляет собой пример гомоморфизма группы M+ в себя. Если $r = m/n$, где m — целое, а n — натуральное число, то, поскольку g есть суперпозиция функций $x \mapsto x^{1/n}$ ($x \in$ M+) и $x \mapsto x^m$ ($x \in$ M+), которые непрерывны и монотонны, g обладает этими свойствами. Ясно, что при $r > 0$ функция g строго возрастает, при $r < 0$ — строго убывает.

4.3. Займемся теперь изучением гомоморфизмов группы **R** в группу M+.

Сначала выясним структуру гомоморфизмов группы **Q** всех рациональных чисел в группу M+. Нетрудно понять, что, каково бы ни было строго положительное вещественное число a, функция $f_0 : r \mapsto a^r$ ($r \in$ **Q**) представляет собой гомоморфизм группы **Q** в группу M+. Оказывается, что этим исчерпываются все гомоморфизмы группы **Q** в группу M+. Точнее говоря, имеет место следующий факт.

I. *Пусть f_0 — заданная на множестве* **Q** *вещественная функция, удовлетворяющая условию*

$$f_0(r' + r'') = f_0(r')f_0(r'') \quad (r', r'' \in \mathbf{Q}). \tag{1}$$

Если хотя бы одно значение функции f_0 отлично от нуля, то $a = f_0(1) > 0$ и $f_0(r) = a^r$ ($r \in$ **Q***).*

Действительно, отметим сначала, что для каждого $r \in$ **Q** будет $f_0(r) = [f_0(r/2)]^2 \geqslant 0$. Пусть теперь $r_0 \in$ **Q** таково, что $f_0(r_0) \neq 0$ и, стало быть, в соответствии со сказанным выше $f_0(r_0) > 0$. Если $r \in$ **Q**, то на основании (1) $f_0(r_0) = f_0(r)f_0(r_0 - r)$. Следовательно, $f_0(r) > 0$. Таким образом, f_0 — гомоморфизм группы **Q** в группу M+. На основании сказанного в I.5.1

$$f_0(0) = 1, \; f_0(-r) = [f_0(r)]^{-1} = 1/f_0(r) \quad (r \in \mathbf{Q}). \blacksquare$$

Кроме того, для любого целого m и $r \in$ **Q** будет $f_0(mr) = [f_0(r)]^m$. Если n — отличное от нуля целое число, то из последнего соотношения получаем $f_0(r) = f_0(nr/n) = [f_0(r/n)]^n$ ($r \in$ **Q**), и так как $f_0(r/n) > 0$, то $f_0(r/n) = [f_0(r)]^{1/n}$. Таким образом, если $r = m/n$, где m и n — некоторые целые числа, то

$$f_0(r) = f_0\left(\frac{m}{n} 1\right) = \left[f_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = [[f_0(1)]^{1/n}]^m = [f_0(1)]^r = a^r.$$

Чтобы иметь возможность применить к гомоморфизмам, описанным в предложении I, лемму 1, выведем некоторые вспомогательные неравенства.

Пусть ε — положительное вещественное число, меньшее единицы. Для каждого $n = 0, 1, \ldots$ имеет место неравенство $(1 - \varepsilon)^n \geqslant 1 - n\varepsilon$ (см. п. I.5.2). Действительно, для $n = 0$ это неравенство тривиально; если оно уже установлено для какого-либо $n = 0, 1, \ldots$, то

$$(1-\varepsilon)^{n+1} \geqslant (1-n\varepsilon)(1-\varepsilon) = \\ = 1-(n+1)\varepsilon + n\varepsilon^2 \geqslant 1-(n+1)\varepsilon.$$

Полагая в доказанном неравенстве $\varepsilon = \lambda/[n(\lambda+1)]$, где λ — положительное вещественное число, а $n = 1, 2, \ldots$, получим

$$(1+\lambda)^{1-1/n} \leqslant (1+\lambda)(1-\lambda/n(\lambda+1)) = 1+(n-1)\lambda/n. \quad (2)$$

С помощью (2) нетрудно убедиться в справедливости так называемого *неравенства Бернулли*.

II. *Если α — положительное вещественное число, а ρ — положительное рациональное число, меньшее единицы, то*

$$(1+\alpha)^{\rho} \leqslant 1+\rho\alpha. \quad (3)$$

Действительно, соотношение (3) очевидно, если $\rho = 0$ или $\rho = 1$. Допустим, что n — такое натуральное число, при котором неравенство (3) имеет место для любого $\rho = m/n$ ($m = 0, 1, \ldots, n$). Полагая в (2) $\lambda = (1+\alpha)^{m/n} - 1$, на основании индуктивного предположения можем написать

$$(1+\alpha)^{m/(n+1)} = [(1+\alpha)^{m/n}]^{n/(n+1)} \leqslant \\ \leqslant 1+n((1+\alpha)^{m/n}-1)/(n+1) \leqslant 1 = m\alpha/(n+1),$$

и доказательство завершается по индукции.

Основываясь на (3), установим

III. *Пусть a — вещественное число, большее единицы. Функция $\Lambda : r \to (a^r-1)/r$ ($r \in \mathbf{Q} \cap (0, +\infty)$) возрастающая.*

Действительно, возьмем строго положительные рациональные числа r и t. Предполагая, что $r \leqslant t$, положим $\rho = r/t$. В силу (3) получим

$$\Lambda(r) = \frac{a^r-1}{r} = \frac{(a^t)^{\rho}-1}{r} \leqslant \frac{1+\rho(a^t-1)-1}{r} = \frac{a^t-1}{t} = \Lambda(t).$$

Поскольку все значения функции Λ положительны, эта функция, будучи возрастающей, имеет конечный предел в точке 0, который мы будем обозначать через l_a. Ясно, что $l_a \geqslant 0$. При этом найдется такое число $\eta > 0$, что

$$l_a \leqslant \frac{a^r-1}{r} \leqslant l_a+1 \quad (r \in \mathbf{Q} \cap (0, \eta]). \quad (4)$$

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему этого пункта.

Теорема 1(4.II). *Каково бы ни было строго положительное вещественное число a, существует единственная определенная на* $\mathbf{R}$ *непрерывная вещественная функция f, удовлетворяющая условиям*

$$f(1) = a, \; f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in \mathbf{R}). \tag{5}$$

При этом функция f является гомоморфизмом группы $\mathbf{R}$ *в группу* $\mathbf{M}^+$.

Доказательство. Функция $f_0 : r \mapsto a^r$ $(r \in \mathbf{Q})$ в силу предложения I является гомоморфизмом группы $\mathbf{Q}$ в группу $\mathbf{M}^+$. Если $a \geqslant 1$, то из (4) без труда вытекает непрерывность функции f_0 в точке 0. Поскольку $a^r = (1/a)^{-r}$ $(r \in \mathbf{Q})$, это обстоятельство имеет место и в случае $a < 1$. Применяя к гомоморфизму f_0 лемму 1 и замечание к ней, получаем искомую функцию f.

Замечание 1. Функция f, существование и единственность которой установлены в теореме, называется *показательной* (с основанием a). Значение $f(x)$ для произвольного $x \in \mathbf{R}$ называют *степенью* числа a с показателем x и обозначают, как и в случае рационального x, через a^x.

Замечание 2. Так как f_0 — монотонная функция, то согласно предложению V(3.3) будет монотонной и ее распространение на $\mathbf{R}$ — функция f (возрастающей при $a \geqslant 1$ и убывающей при $a \leqslant 1$). Если $a \neq 1$, то f, как и f_0, строго монотонна.

Замечание 3. В условиях доказанной теоремы требование непрерывности функции f может быть заменено условием ее монотонности.

Отметим некоторые необходимые для дальнейшего свойства показательной функции.

IV. *Если a и b — строго положительные вещественные числа, то*

$$(ab)^x = a^x b^x \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{6}$$

Действительно, функция $f : x \mapsto a^x b^x$ $(x \in \mathbf{R})$ представляет собой непрерывный гомоморфизм группы $\mathbf{R}$ в группу $\mathbf{M}^+$. Так как $f(1) = ab$, на основании теоремы 1 $f(x) = (ab)^x$ $(x \in \mathbf{R})$.

Из тех же соображений устанавливается

V. *Если a — строго положительное вещественное число, то*

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad (x, y \in \mathbf{R}). \tag{7}$$

В заключение докажем

VI. *Каково бы ни было строго положительное вещественное число a, существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x$.

В самом деле, пусть сначала $a\geqslant 1$. Функция $\overline{\Lambda}: x\mapsto(a^x-1)/x$ ($x\in \mathbf{M}+$) служит непрерывным распространением на промежуток $(0, +\infty)$ функции Λ, введенной в предложении III. Следовательно, согласно предложению V(3.3) функция $\overline{\Lambda}$ так же, как и Λ, возрастающая, и потому существует предел $\lim_{(0)}\overline{\Lambda}=$ $=\lim\limits_{x\to 0+}(a^x-1)/x=\lim_{(0)}\Lambda=l_a$.

Если $x\in(-\infty, 0)$, то $(a^x-1)/x=a^x\dfrac{a^{-x}-1}{-x}$ и, так как $\lim\limits_{x\to 0}a^x=a^0=1$, существует предел

$$\lim_{x\to 0-}(a^x-1)/x=\lim_{x\to 0-}\frac{a^{-x}-1}{-x}=\lim_{x\to 0+}\frac{a^x-1}{x}=l_a.$$

Отсюда и вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x$, равного l_a.

Если $a<1$, то для любого отличного от нуля $x\in\mathbf{R}$

$$\frac{a^x-1}{x}=-\frac{(1/a)^{-x}-1}{-x},$$

так что и в этом случае существует предел $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x$, равный $-l_{1/a}$.

Поскольку для $a\geqslant 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x=l_a$, то и для $a<1$ мы будем использовать для обозначения предела $\lim\limits_{x\to 0}(a^x-1)/x$ символ l_a.

Заметим, что если $a\neq 1$, то $l_a\neq 0$. Действительно, допустим, что $l_a=0$. Поскольку тогда и $l_{1/a}=0$, можно считать, что $a\geqslant 1$. Возьмем настолько большое натуральное число n, чтобы для $r=1/n$ выполнялось бы неравенство $0\leqslant(a^r-$ $-1)/r\leqslant\varepsilon$, где ε — наперед заданное строго положительное число. Так как для $k=1, 2, \ldots, n$ имеем $a^{kr}-a^{(k-1)r}=$ $=a^{(k-1)r}(a^r-1)\leqslant a\varepsilon r=a\varepsilon/n$, то $a-1=\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{kr}-a^{(k-1)r})\leqslant a\varepsilon$, что ввиду произвольности ε возможно лишь при $a=1$.

4.4. Рассмотрим строго положительное число a, отличное от единицы. Показательная функция $f: x\mapsto a^x$ ($x\in\mathbf{R}$) с основанием a строго монотонна и непрерывна. Поэтому на основании VI(3.4) областью значений $R(f)$ функции f служит открытый промежуток. Вместе с тем в силу предложения II(I.5.1) множество $R(f)$ будет подгруппой группы $\mathbf{M}+$. При этом, поскольку a и $1/a = a^{-1}$ входят в $R(f)$, то и $t = a \vee (1/a)$ входит в $R(f)$. Вместе с t входят в группу $R(f)$ и все степени t^n с любым целым показателем n. Учитывая, что $t > 1$, с помощью неравенства (3) получаем

$$t^n \geqslant 1 + n(t-1), \quad t^{-n} \leqslant 1/(1 + n(t-1)) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} t^{-n} = 0$, $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} t^n = +\infty$. Тем более $\inf R(f) = 0$, $\sup R(f) = +\infty$ и, значит, $R(f) = (0, +\infty) = \mathbf{M}^+$.

Согласно VI(3.4) для функции f существует непрерывная обратная функция g. При этом $D(g) = R(f) = \mathbf{M}^+$, $R(g) = D(f) = \mathbf{R}$. Функция g называется *логарифмической* по основанию a. Значение ее $g(x)$ $(x \in \mathbf{M}^+)$ называется *логарифмом* числа x по основанию a и обозначается через $\log_a x$. Логарифмическая функция, будучи обратной к строго монотонной функции f, сама строго монотонна. При $a > 1$ — строго возрастающая, при $a < 1$ — строго убывающая.

Так как f — взаимно однозначный гомоморфизм, т. е. изоморфизм группы $\mathbf{R}$ на группу $\mathbf{M}^+$, то $g = f^{-1}$ также является изоморфизмом группы $\mathbf{M}^+$ на группу $\mathbf{R}$. Это означает, что

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (x, y \in \mathbf{M}^+). \tag{8}$$

Докажем, что кроме логарифмических функций имеется только один непрерывный гомоморфизм группы $\mathbf{M}^+$ в группу $\mathbf{R}$ — функция, все значения которой равны нулю. Доказательство этого факта опирается на лемму, которая будет использована и в других ситуациях.

Лемма 2. *Пусть G — подгруппа группы $\mathbf{R}$. Тогда либо множество G плотно в $\mathbf{R}$, либо существует такое положительное вещественное число T, что G состоит из всех чисел вида nT, где n — целое число.*

Доказательство. Положим $G^+ = G \cap (0, +\infty)$. Если множество G^+ пусто, то, очевидно, G сводится к единственному элементу 0, т. е., иначе говоря, G состоит из всех элементов вида nT (n — целое) с $T = 0$.

Предположим, что $G^+ \neq \varnothing$. Пусть $\rho = \inf G^+$. Рассмотрим сначала случай, когда $\rho = 0$, и докажем, что при этом замыкание $\overline{G}$ множества G совпадает с $\mathbf{R}$. Возьмем $x \in \mathbf{R}$ и число $\varepsilon > 0$. Так как $\inf G^+ = 0$, в множестве G^+ найдется такой элемент z, что $z \leqslant 2\varepsilon$. Поскольку $z \in G^+$, то $z > 0$. Обозначим через n целую часть числа $(x + \varepsilon)/z$, т. е. наибольшее из таких целых чисел m, что $m \leqslant (x + \varepsilon)/z$ [19]. Так как $n + 1 > (x + \varepsilon)/z$,

[19] Доказательство существования целой части произвольного вещественного числа мы предоставляем читателю.

то $(x-\varepsilon)/z \leqslant (x+\varepsilon)/z - 1 \leqslant n \leqslant (x+\varepsilon)/z$, т. е. $nz \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Но $z \in G$, стало быть, и $nz \in G$. Таким образом, в любой окрестности точки x имеются элементы множества G. Следовательно, $x \in \overline{G}$.

Пусть теперь $\rho > 0$. Докажем, что в этом случае $\rho \in G^+$. Если это не так, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно найти такой элемент $u \in G^+$, что $\rho < u < \rho + \varepsilon$, и вслед за тем элемент $v \in G^+$, для которого $\rho < v < u$. Поскольку $u - v \in G^+$ и $u - v < \varepsilon$, то $\rho = \inf G^+ < \varepsilon$, так что ввиду произвольности ε должно быть $\rho = 0$. Итак, $\rho \in G^+$. Возьмем какой-либо элемент z группы G, и пусть n — целая часть числа z/ρ. Тогда $0 \leqslant z - n\rho < \rho$ и, поскольку $\rho = \inf G^+$, должно быть $z \notin G^+$. Но $z - n\rho \in G$. Стало быть, $z = n\rho$. Остается принять $T = \rho$.

Замечание. Если к условиям леммы добавить требование замкнутости (в пространстве $\mathbf{R}$) группы G, то тогда либо $G = \overline{G} = \mathbf{R}$, либо, как и в лемме, G сводится к совокупности элементов вида nT (n — целое).

Теорема 2 (4.II). *Пусть g — непрерывный гомоморфизм группы $\mathbf{M}^+$ в группу $\mathbf{R}$, т. е. заданная на $\mathbf{M}^+ = (0, +\infty)$ вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая условию*

$$g(xy) = g(x) + g(y) \qquad (x, y \in \mathbf{M}^+). \tag{9}$$

Если среди значений функции g есть отличные от нуля, то существует такое вещественное строго положительное число $a \neq 1$, что $g(x) = \log_a x$ $(x \in \mathbf{M}^+)$.

Доказательство. Так как областью определения функции g служит промежуток $(0, +\infty)$, то на основании теоремы Коши промежутком будет и область значений $R(g)$ функции g; вместе с тем в силу предложения II (I.5.1) множество $R(g)$ — подгруппа группы $\mathbf{R}$. Но согласно лемме 2 подгруппа $R(g)$ группы $\mathbf{R}$ может быть промежутком лишь в случае, когда $R(g) = \{0\}$, либо когда $R(g)$ плотно в $\mathbf{R}$. Первая из указанных возможностей не соответствует условию теоремы о том, что $R(g)$ содержит отличные от нуля элементы. Поэтому промежуток $R(g)$, будучи плотным в $\mathbf{R}$, совпадает с $\mathbf{R}$. Таким образом, $R(g) = \mathbf{R}$. Из этого равенства вытекает, в частности, что множество $g^{-1}[1]$ непусто. Возьмем какой-нибудь элемент $a \in g^{-1}[1]$. Ясно, что $a \in \mathbf{M}^+$, а поскольку $g(1) = 0$, то $a \neq 1$. Обозначим через f показательную функцию с основанием a. Суперпозиция $i = g \circ f$ является непрерывным гомоморфизмом группы $\mathbf{R}$ в себя. При этом $i(1) = g(f(1)) = g(a) = 1$. Нетрудно понять (ср. доказательство предложения I (4.3)), что для любого рационального числа r будет тогда $i(r) = ri(1) = r$. Стало быть, на множестве $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел непрерывная функция i совпадает с тождественным отображением I множества $\mathbf{R}$ в себя. Так как I непрерывно, а $\mathbf{Q}$ плотно в $\mathbf{R}$, то $i = I$. Но $f \circ f^{-1} = I_0$, где через I_0 обозначено тождественное отображение множества $\mathbf{M}^+$ на себя. Учитывая это соотношение, можем написать $g = g \circ I_0 = g \circ f \circ f^{-1} = I \circ f^{-1} = f^{-1}$. Остается заметить, что f^{-1} и есть как раз логарифмическая функция по основанию a.

Замечание. В условиях доказанной теоремы предположение о непрерывности гомоморфизма g можно заменить требованием его строгой монотонности. Точнее говоря, если g — заданная на $\mathbf{M}^+$ строго возрастающая функция, удовлетворяющая условию (9), то существует такое вещественное число a, строго большее единицы, что $g(x) = \log_a x$ $(x \in \mathbf{M}^+)$.

Действительно, поскольку множество $D(g) = \mathbf{M}^+$ несчетно, а функция g взаимно однозначна, то и множество $R(g)$ несчетно. Но тогда это множество, будучи подгруппой группы $\mathbf{R}$, в силу леммы 2 должно быть плотно в $\mathbf{R}$, и, следовательно, удовлетворены условия предложения V (3.4), согласно которому функция g непрерывна. Таким образом, к g применима теорема 2, на основании которой $g(x) = \log_a x$ $(x \in \mathbf{M}^+)$. Так как g — возрастающая функция, то $a > 1$.

В предложении VI (4.3) было установлено, что для любого $a \in \mathbf{M}^+$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to 0} (a^x - 1)/x = l_a$, причем отмечалось, что если $a \neq 1$, то $l_a \neq 0$. С помощью теоремы 2 (в форме, указанной в замечании) докажем

I. *Существует такое вещественное число e, большее единицы, что $l_a = \log_e a$ $(a \in M^+)$.*

В самом деле, определим функцию $g : a \mapsto l_a$ $(a \in \mathbf{M}^+)$ и докажем, что g удовлетворяет условиям замечания к теореме 2. Возьмем числа a, $b \in \mathbf{M}^+$. На основании соотношения (6) для $x \in \mathbf{R}$ будем иметь $(ab)^x - 1 = b^x(a^x - 1) + (b^x - 1)$, и так как $\lim\limits_{x \to 0} b^x = b^0 = 1$, то

$$g(ab) = \lim_{x \to 0} \frac{(ab)^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = g(a) + g(b).$$

Таким образом, для g удовлетворено условие (9). Если теперь о числах a, $b \in \mathbf{M}^+$ предположить, что $a < b$, то, принимая во внимание сказанное в 4.1, получим, что $g(b) - g(a) = g(b/a) = l_{b/a}$. Но $b/a > 1$, поэтому $l_{b/a} > 0$. Значит, функция g — строго возрастающая. Используя это замечание, убеждаемся в справедливости доказываемого предложения.

Логарифм числа $x \in \mathbf{M}^+$ по основанию e называется *натуральным* и обозначается через $\ln x$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to 0} (a^x - 1)/x = \ln a$. В частности, $\lim\limits_{x \to 0} (e^x - 1)/x = \ln e = 1$.

Используя теорему 2, можно выяснить, как устроены непрерывные гомоморфизмы группы $M+$ в себя, т. е. такие определенные на $M+$ непрерывные функции h со значениями в $M+$, что

$$h(xy) = h(x)h(y) \qquad (x,\ y \in M+). \tag{10}$$

II. *Если h — непрерывный гомоморфизм группы* $M+$ *в себя, то существует такое вещественное число α, что $h(x) = x^{\alpha}$* $(x \in M+)$.

Действительно, рассмотрим функцию $\lambda : x \mapsto \ln x (x \in M+)$ и положим $g = \lambda \circ h$. Понятно, что g — непрерывный гомоморфизм группы $M+$ в группу $\mathbf{R}$. Если все значения функции g равны нулю, то $h(x) = \lambda^{-1}(g(x)) = \lambda^{-1}(0) = e^0 = 1$ для любого $x \in M+$, и можно положить $\alpha = 0$.

Если функция g имеет отличные от нуля значения, то согласно теореме 2 существует такое число $a \in M+$ $(a \neq 1)$, что $g(x) = \log_a x$. Следовательно, $h(x) = \lambda^{-1}(g(x)) = e^{\log_a x}$ $(x \in M+)$. Но $e = a^{\log_a e}$. Поэтому вследствие (7)

$$h(x) = e^{\log_a x} = \left(a^{\log_a e}\right)^{\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a e} = x^{\log_a e} \qquad (x \in M+).$$

Остается принять $\alpha = \log_a e$.

Заметим в заключение, что при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ функция $h : x \mapsto x^{\alpha} (x \in M+)$ является ввиду (6) гомоморфизмом группы $M+$ в себя. При этом, поскольку $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x} (x \in M+)$, гомоморфизм h представляет собой суперпозицию непрерывных функций и потому сам является непрерывной функцией.

4.5. Как должно быть известно читателю, введение тригонометрических функций связано с возможностью измерять углы или, что то же, измерять дуги окружности. Если рассматриваемую окружность трактовать как множество U всех комплексных чисел с модулем, равным единице, то задача об измерении дуг, как можно показать, сводится к построению такого отображения Φ числовой прямой на множество U, что $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y)$ $(x,\ y \in \mathbf{R})$. При этом, конечно, предполагается, что Φ н е п р е р ы в н о. Поскольку U является, очевидно, подгруппой мультипликативной группы Y поля $\mathbf{C}$, речь идет, таким образом, о построении непрерывного гомоморфизма группы $\mathbf{R}$ на группу U. Оказывается, однако, удобнее более общая постановка вопроса, когда вместо группы $\mathbf{R}$ берется просто коммутативная группа. Дадим необходимые определения.

Характером коммутативной группы X называется гомоморфизм этой группы в группу U, т. е., если групповая операция в X записывается как сумма, такое отображение χ множества X в множество U, что

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y) \qquad (x,\ y \in X). \tag{11}$$

С характером χ группы X свяжем две заданные на X вещественные функции: $C_\chi : x \mapsto \operatorname{Re}\chi(x)$ $(x \in X)$ и $S_\chi : x \mapsto \operatorname{Im}\chi(x)$ $(x \in X)$. Первая из них называется *с-функцией*, а вторая — *s-функцией*, отвечающей характеру χ. В случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы вместо C_χ и S_χ будем писать просто C и S.

Поскольку $|\chi(x)| = 1$ для каждого $x \in X$, то

$$[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1. \tag{12}$$

Соотношение (11) в терминах функций C и S превращается в равенства

$$\begin{gathered} C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y), \\ S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x) \qquad (x,\ y \in X). \end{gathered} \tag{13}$$

В частности, с учетом (12)

$$\begin{aligned} C(2x) &= [C(x)]^2 - [S(x)]^2 = 2[C(x)]^2 - 1 = \\ &= 1 - 2[S(x)]^2 \qquad (x \in X) \end{aligned} \tag{14}$$

и

$$S(2x) = 2S(x)C(x) \qquad (x \in X). \tag{15}$$

Обозначив через $\mathbf{0}$ нейтральный элемент группы X, имеем $\chi(\mathbf{0}) = 1$. Поэтому $C(\mathbf{0}) = 1$, $s(\mathbf{0}) = 0$. Далее, ввиду того что $u^{-1} = \bar{u} = \operatorname{Re} u - i \operatorname{Im} u$ для $u \in U$, равенство $\chi(-x) = [\chi(x)]^{-1}$ $(x \in X)$ дает

$$C(-x) = C(x),\ S(-x) = -S(x) \qquad (x \in X). \tag{16}$$

Предположим, что коммутативная группа X есть объединение возрастающей последовательности $\{X_n\}$ своих подгрупп X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и пусть χ_n — характер группы X_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

I. *Если последовательность* $\{\chi_n\}$ — *возрастающая, то объединение* $\chi = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \chi_n$ *представляет собой характер группы* X.

Действительно, возьмем $x \in X$. Тогда $\chi\{x\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \chi_n\{x\}$. Так как для $m \geqslant n$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$ имеем $\chi_m \supset \chi_n$, то $\chi_m\{x\} \supset \chi_n\{x\}$. Считая здесь n настолько большим, что $\chi_n\{x\} \neq \varnothing$, и учитывая, что при этом множество $\chi_n\{x\}$ состоит ровно из одного элемента — значения $\chi_n(x)$, получаем, что $\chi_m\{x\} = \chi_n\{x\}$ и, стало быть, $\chi\{x\} = \chi_n\{x\} = \{\chi_n(x)\}$. Таким образом, отношение χ однозначно. Ввиду того что для любых $x,\ y \in X$ найдется такое натуральное число n, что $x,\ y \in X_n$, а значит, и $x+y\in X_n$, можем написать $\chi(x+y)=$ $=\chi_n(x+y)=\chi_n(x)\chi_n(y)=\chi(x)\chi(y)$.

Будем говорить, что в данной коммутативной группе X *возможно* (единственное) *деление пополам*, если для каждого $x\in X$ существует единственный элемент группы X, обозначаемый через $x/2$ или через $\frac{x}{2}$ такой, что $x/2+x/2=2x/2=x$. Поскольку X — коммутативная группа, то ввиду единственности элемента $x/2$ будет $(x+y)/2=x/2+y/2$ $(x,\ y\in X)$. Кроме того, $-(x/2)=-x/2$ $(x\in X)$[20].

Если в группе X возможно деление пополам, то, поскольку в этом случае $(x+y)/2+(x-y)/2=2x/2=x$, $(x+y)/2-$ $-(x-y)/2=2y/2=y$ $(x,\ y\in X)$, с помощью соотношений (13) и (16) получаем

$$C(x)-C(y)=-2S\left(\frac{x-y}{2}\right)S\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$S(x)-S(y)=2S\left(\frac{x-y}{2}\right)C\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{17}$$

$$S(x)+S(y)=2S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{18}$$

4.6. Займемся теперь изучением характеров подгрупп группы $\mathbf{R}$. Для краткости мы будем называть такого рода группы *числовыми*.

Пусть X — числовая группа, χ — ее характер, C и S — отвечающие этому характеру c- и s-функции. Если существует строго положительное число $a\in X$, обладающее тем свойством, что на множестве $X_a=X\cap[0,\ a]$ как функция C, так и функция S принимают значения одного знака, то мы будем называть характер χ *регулярным* (на промежутке $[0,\ a]$). При этом, поскольку $C(0)=1>0$, то значения (на X_a) функции C могут быть только положительными; что же касается значений функции S, то они могут быть и положительными, и отрицательными. В первом случае будем говорить о *положительно-регулярном*, во втором — об *отрицательно-регулярном* характере.

Если характер χ отрицательно-регулярен, то функция $\psi: x\mapsto\chi(-x)(x\in X)$ будет, очевидно, характером положительно-регулярным (в том же промежутке, в котором регулярен χ).

---

[20]) Если в данной группе групповая операция — умножение, то естественно говорить не о делении пополам, а об извлечении квадратного корня. К сожалению, в группе U, хотя и возможно извлечение квадратного корня, но не единственным образом. Этим во многом и обусловлены трудности, возникающие при построении характеров конкретных групп.

I. *Пусть χ — регулярный в промежутке* $[0, a]$ *характер числовой группы X. Если в группе X возможно деление пополам, то с-функция C, отвечающая характеру χ,— убывающая на множестве X_a, а s-функция S — возрастающая (на X_a) в случае положительной регулярности характера χ и убывающая, если характер χ отрицательно-регулярен.*

Действительно, если $x, y \in X_a$ и $x \geqslant y$, то и $(x-y)/2$, $(x+y)/2 \in X_a$. Остается воспользоваться соотношениями (17).

II. *Если в условиях предложения* I χ — *нетривиальный характер, т. е. если среди его значений имеются отличные от единицы, то $C(x)>0$ для $x \in X \cap [0, a)$ и $S(x) \neq 0$ для $x \in X \cap (0, a]$. При этом функции C и S строго монотонны на множестве X_a.*

В самом деле, учитывая сделанное в связи с определением регулярного характера замечание, можно считать, что χ положительно-регулярен. Пусть x_0 — такой элемент группы X, что $\chi(x_0) \neq 1$. Так как и $\chi(-x_0) \neq 1$, то можно считать, что $x_0 > 0$. Если $x \in X \cap (0, a]$, то для достаточно большого натурального числа n будет $x_0/2^n \leqslant x$. Ввиду того что в группе X возможно деление пополам, $x_0/2^n \in X$ и, следовательно, $x_0/2^n \in X_a$. Но $[\chi(x_0/2^n)]^{2n} = \chi(x_0) \neq 1$, так что и $\chi(x_0/2^n) \neq 1$. Значит, не может быть $S(x_0/2^n) = 0$, т. е. должно быть $S(x_0/2^n) > 0$. Но тогда на основании предложения I $S(x) \geqslant S(x_0/2^n) > 0$. Если теперь под x понимать элемент пересечения $X \cap [0, a)$, то, учитывая, что при этом $a - x \in X \cap (0, a)$, можем написать, используя (13) и (16),

$$C(x) = C(a-(a-x)) = C(a)C(a-x) + S(a)S(a-x) = \\ = S(a)S(a-x) > 0.$$

Чтобы убедиться в строгой монотонности функций C и S, достаточно, заметив, что из соотношений $x, y \in X_a$ и $x > y$ вытекает

$$(x-y)/2,\ (x+y)/2 \in X \cap (0, a) = X_a \cap (0, a),$$

воспользоваться, как и при доказательстве предложения I, формулами (17).

III. *Если в условиях предложения* I *характер χ регулярен на каждом промежутке вида* $[0, a]$ $(a \in X,\ a > 0)$, *то $\chi(x) = 1$ для любого $x \in X$.*

В самом деле, положим $X^+ = X \cap [0, +\infty)$, $\rho = \inf C\,[X^+]$. Вследствие (16) будет также $\rho = \inf C[X]$. Ясно, что $\rho \leqslant \sup C[X] = 1$. Кроме того, по определению регулярного характера $\rho \geqslant 0$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такой элемент

$x_0 \in X^+$, что $C(x_0) \leqslant \rho + \varepsilon$. На основании (14) будем иметь $\rho \leqslant C(2x_0) = 2[C(x_0)]^2 - 1 \leqslant 2(\rho + \varepsilon)^2 - 1$ и, следовательно, ввиду произвольности ε будет $\rho \leqslant 2\rho^2 - 1$, т. е. $0 \leqslant \rho - \rho^2 \leqslant \leqslant \rho^2 - 1 \leqslant 0$, откуда следует, что $\rho^2 = 1$ и, стало быть, $\rho = 1$. Таким образом, $C(x) = 1$, $S(x) = (1-1)^{1/2} = 0$, $\chi(x) = 1$ для любого $x \in X$.

Вещественное число r называется *двоично-рациональным*, если существуют такое целое число m и такое целое положительное число n, что $r = m/2^n$. Множество всех двоично-рациональных чисел мы будем в дальнейшем обозначать через W. Пусть $\mathbf{Z}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — совокупность всех двоично-рациональных чисел, представимых в виде $m/2^n$ с данным n и произвольным целым m. Ясно, что $\mathbf{Z}_n$ при любом $n = 0, 1, \ldots$ есть числовая группа. Так как последовательность $\{\mathbf{Z}_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ — возрастающая и $W = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{Z}_n$, то будет числовой группой и множество W. Поскольку $\inf (W \cap (0, +\infty)) \leqslant \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} 2^{-n} = 0$, то в силу леммы 2 из 4.4 множество W плотно в $\mathbf{R}$. Понятно, что в группе W возможно деление пополам. Важно отметить еще, что если X — числовая группа, в которой возможно деление пополам, то, как можно легко доказать по индукции, произведение rx входит в X, каковы бы ни были $r \in W$, $x \in X$.

IV. *Пусть в условиях предложения* I *характер* χ *положительно-регулярен. Если элемент* $x \in X$ *и число* $\alpha \in [0, 1]$ *таковы, что* $\alpha x \in X$, *то*

$$S(\alpha x) \geqslant \alpha S(x). \tag{19}$$

Действительно, предположим сначала, что α — двоично-рациональное число. Неравенство (19), очевидно, выполнено, если $\alpha \in \mathbf{Z}_0 \cap [0, 1]$, т. е. если $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Пусть n — такое целое положительное число, что неравенство (19) справедливо для каждого $\alpha \in \mathbf{Z}_n \cap [0, 1]$. Докажем, что тогда это неравенство имеет место и для $\alpha \in \mathbf{Z}_{n+1} \cap [0, 1]$.

Итак, пусть $\alpha \in (\mathbf{Z}_{n+1} \setminus \mathbf{Z}_n) \cap [0, 1]$. Это означает, что α можно представить в виде $\alpha = m/2^{n+1}$, где m — нечетное число, содержащееся в промежутке $[0, 2^{n+1}]$ и, следовательно, удовлетворяющее условию: $1 \leqslant m \leqslant 2^{n+1} - 1$. На основании (18) имеем

$$S(\alpha x) = S\left(\frac{m}{2^{n+1}} x\right) \geqslant S\left(\frac{m}{2^{n+1}} x\right) C\left(\frac{1}{2^{n+1}} x\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[S\left(\frac{m+1}{2^{n+1}} x\right) + S\left(\frac{m-1}{2^{n+1}} x\right)\right].$$

Но так как числа $(m+1)/2$ и $(m-1)/2$ — целые (и входящие в промежуток $[0, 2^n]$), то $(m+1)/2^{n+1}$, $(m-1)/2^{n+1} \in \mathbf{Z}_n \cap$ $\cap [0, 1]$, так что в соответствии с индуктивным предположением

$$S(\alpha x) \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{m+1}{2^{n+1}} + \frac{m-1}{2^{n+1}}\right] S(x) = \frac{m}{2^{n+1}} S(x) = \alpha S(x).$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда α произвольно (но удовлетворяет, разумеется, условиям предложения и, можно считать, строго положительно). Так как множество W плотно в $\mathbf{R}$, то, каково бы ни было число $\varepsilon \in (0, \alpha]$, в промежутке $[\alpha-\varepsilon, \alpha]$ найдется по крайней мере одно двоично-рациональное число r. Используя результат предложения I, можем в силу уже доказанного написать: $S(\alpha x) \geqslant S(rx) \geqslant rS(x) \geqslant (\alpha-\varepsilon)S(x)$. Ввиду произвольности ε получаем отсюда $S(\alpha x) \geqslant \alpha S(x)$.

Предложение IV позволяет обосновать следующий важный факт.

V. *Если X и χ удовлетворяют требованиям предложения* IV, *т. е. если X — числовая группа, в которой возможно деление пополам, а χ — положительно-регулярный в промежутке* $[0, a]$ $(a \in X,\ a > 0)$ *характер, то определенная на пересечении* $X_a^0 = X \cap (0, a] = X_a \setminus \{0\}$ *функция* $F: x \mapsto S(x)/x$ $(x \in X_a^0)$ — *убывающая и ограниченная.*

В самом деле, пусть $x, y \in X_a^0$ и $x \geqslant y$. Положим $\alpha = y/x$. Так как $\alpha x = y \in X$, то, используя неравенство (19), будем иметь

$$F(y) = F(\alpha x) = \frac{S(\alpha x)}{\alpha x} \geqslant \frac{\alpha S(x)}{\alpha x} = \frac{S(x)}{x} = F(x).$$

Докажем ограниченность функции F. Заменяя, если нужно, a на $a/2$, можем считать, что $C(a) > 0$. Введем функцию $f: x \mapsto$ $\mapsto S(x)/C(x)$ $(x \in X_a)$. Так как $f(x) \geqslant 0$ для $x \in X_a$, на основании (14) и (15)

$$f(x) = \frac{S(x)}{C(x)} = \frac{2S(x/2)\,C(x/2)}{[C(x/2)]^2 - [S(x/2)]^2} = \frac{2\,f(x/2)}{1-[f(x/2)]^2} \geqslant 2f(x/2).$$

Отсюда по индукции выводим, что последовательность $\{2^n f(a/2^n)\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ убывающая. Возьмем $x \in X_a^0$ и найдем такое целое положительное число n, чтобы было $a/2^{n+1} \leqslant x \leqslant$ $\leqslant a/2^n$. Получим

$$F(x) = \frac{S(x)}{x} \leqslant \frac{S(a/2^n)}{x} \leqslant \frac{f(a/2^n)}{x} \leqslant 2^{n+1} f(a/2^n) \leqslant 2f(a).$$

Ограниченность функции F снизу очевидна, ввиду того что все ее значения положительны.

Поскольку в условиях предложения V группа X включает в себя число a, отличное от нуля, а стало быть, и все числа вида $a/2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то, как и в случае $X = W$, с помощью леммы 2 из 4.4 заключаем о плотности группы X в $\mathbf{R}$. Отсюда, в частности, следует, что нуль является точкой прикосновения области определения X_a^0 функции F. Поэтому имеет смысл говорить о пределе функции F в точке 0. Согласно предложению V указанный предел (мы его обозначим через L_χ) существует и конечен. При этом $0 \leqslant L_\chi = \sup F\left[X_a^0\right]$. Таким образом,

$$S(x) \leqslant L_\chi x \qquad (x \in X_a). \tag{20}$$

Так как для любого отличного от нуля $x \in X$ в силу (16) $S(-x)/(-x) = S(x)/x$ и множество $[-a, a]$ служит окрестностью точки 0, из сказанного вытекает существование предела $\lim\limits_{x\to 0} S(x)/x$ (равного L_χ).

Если характер χ группы X отрицательно-регулярен, то, как отмечалось, характер $\bar{\chi} : x \mapsto \chi(-x)$ $(x \in X)$ будет положительно-регулярным, так что, поскольку $S_\chi(x) = S_{\bar{\chi}}(-x) = -S_{\bar{\chi}}(x)$ $(x \in X)$, и в этом случае существует конечный предел $L_\chi = \lim\limits_{x\to 0} S(x)/x = -\lim\limits_{x\to 0} S_{\bar{\chi}}(x)/x = L_{\bar{\chi}}$. Заметим, что отсюда следует совпадение «знака» регулярности характера χ со знаком предела L_χ. Отсюда же с помощью (20) для регулярного в промежутке $[0, a]$ характера χ получаем

$$|S_\chi(x)| \leqslant |L_\chi||x| \qquad (x \in X,\ |x| \leqslant a). \tag{21}$$

Тем самым для регулярного характера χ справедливо неравенство (см. (14))

$$0 \leqslant 1 - C_\chi(x) = 2[S_\chi(x)]^2 \leqslant {}^1/_2|L_\chi|\,|x|^2 \qquad (x \in X,\ |x| \leqslant a)$$

и, значит, $\lim\limits_{x\to 0}(1 - C_\chi(x))/x = 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\chi(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{C_\chi(x) - 1}{x} + i \lim_{x\to 0} \frac{S_\chi(x)}{x} = iL_\chi. \tag{22}$$

Основываясь на неравенстве (21), выводим следующий результат.

VI. *Пусть X — содержащая отличные от нуля элементы числовая группа, в которой возможно деление пополам, и χ — ее характер, регулярный в промежутке $[0, a]$, где a — строго положительный элемент группы X. Тогда характер χ непрерывен в точке 0.*

Справедливость высказанного утверждения очевидно следует из равенства (22).

Как отмечалось, числовая группа, в которой возможно деление пополам, и включающая строго положительный элемент a, плотна в $\mathbf{R}$. Поэтому на основании леммы 1 и замечания к ней можно утверждать справедливость следующего факта.

VII. *В условиях предложения* VI *характер* χ *допускает единственное непрерывное распространение* $\tilde{\chi}$ *на всю числовую прямую. При этом функция* $\tilde{\chi}$ *является характером группы* $\mathbf{R}$.

Заметим, что характер $\tilde{\chi}$ регулярен и $L_{\tilde{\chi}} = L_{\chi}$.

Справедливо и утверждение, обратное по отношению к предложению VI.

Теорема 4 (4.II). *Если* χ — *характер группы* $\mathbf{R}$, *среди значений которого имеются отличные от единицы, то существует такое строго положительное число* T, *называемое полупериодом характера* χ, *что* $\chi(T) = -1$ *и характер* χ *регулярен на промежутке* $[0, T/2]$.

Доказательство. Рассмотрим множество $G = \chi^{-1}[1]$. В силу теоремы 3 (2.II) оно замкнуто, а вследствие предложения III (I.5.1) G представляет собой подгруппу группы $\mathbf{R}$. Поскольку при этом $G \neq \mathbf{R}$ (иначе было бы $\chi(x)=1$ для каждого $x \in \mathbf{R}$), то на основании замечания к лемме 2 из 4.4 существует такое положительное число z, что G совпадает с множеством всех чисел вида nz, где n — целое число.

Характер χ не может быть регулярным на каждом промежутке вида $[0, a]$ ($a \in \mathbf{R}$, $a > 0$) — это противоречило бы результату предложения III. Поэтому найдется такое строго положительное число a, что $\Omega = [0, a]$ не является промежутком регулярности характера χ. Так как отвечающие характеру χ c-функция C и s-функция S непрерывны и по крайней мере одна из них принимает на Ω как строго положительные, так и строго отрицательные значения, то согласно предложению II (3.4) внутри промежутка Ω имеется точка, значение в которой соответствующей функции равно нулю. Предположим сначала, что существует такая точка $x \in \Omega^\circ = (0, a)$, что $S(x) = 0$. На основании (14) тогда $C(2x) = 1$, т. е. $2x \in G$. Так как $2x > 0$, отсюда следует, что $G \neq \{0\}$ и, стало быть, $z > 0$. А тогда включение $2x \in G$ означает, что число $2x/z$ целое и, очевидно, строго положительное. Поэтому $2x/z \geqslant 1$ и, следовательно, $a > x > z/2$.

Если в промежутке Ω° нет точек, в которых значение функции S равно нулю, то, как было сказано, можно указать такую точку $x \in \Omega^\circ$, что $C(x) = 0$. Вследствие (15) тогда $S(2x) = 0$ и, поскольку $2x \in (0, 2a)$ должно быть по доказанному $z > 0$, $2a > 2x \geqslant z/2$, т. е. $a > z/4$.

Итак, во всяком случае, если характер χ нерегулярен на промежутке $[0, a]$, то $z > 0$ и $a > z/4$. Тем самым $T = z/2 > 0$

и на промежутке $[0, T/2]$ характер χ регулярен. Остается заметить, что на основании (14) $2[C(T)]^2 = 1 + C(z) = 2$, так что $|C(T)| = 1$. Однако не может быть $C(T) = 1$, так как тогда было бы $T \in G$. Следовательно, $C(T) = -1$ и, стало быть, $\chi(T) = -1$.

Замечание 1. Полупериод T фигурирующего в теореме характера χ можно было бы определить как наименьший элемент множества $\chi^{-1}\{-1\} \cap [0, +\infty)$. Действительно, ясно, что $T \in \chi^{-1}\{-1\} \cap [0, +\infty)$. Если x — элемент этого множества, причем $x < T$, то $\chi(T - x) = 1$, так что число $(T - x)/2$ — целое. Но это невозможно ввиду очевидного неравенства $0 < (T - x)/2 \leqslant 1/2$.

Замечание 2. Число $z = 2T$ называется (наименьшим) *периодом* характера χ. Это название оправдано тем, что $\chi(x+z) = \chi(x)\chi(z) = \chi(x)$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Если $\tau \in (0, +\infty)$ таково, что $\chi(x + \tau) = \chi(x)$ $(x \in \mathbf{R})$, то, поскольку $\chi(\tau) = 1$, число $\tau/2$ должно быть целым и строго положительным, так что $\tau \geqslant z$.

Замечание 3. Как ясно из доказательства теоремы, в промежутке $(0, T)$ все значения функции S имеют один и тот же знак, который, таким образом, совпадает со знаком числа $\varepsilon = S(T/2)$. Отсюда с помощью соотношений (17) выводим, что в промежутке $[0, T]$ функция C строго убывает. При этом ввиду непрерывности этой функции $C[[0, T]] = [C(T), C(0)] = [-1, 1]$.

Заметим, что из (14) следует $2\varepsilon^2 = 2[S(T/2)]^2 = 1 - C(T) = 2$, т. е. $|\varepsilon| = 1$.

В заключение докажем

VIII. *В условиях теоремы 4 характер χ взаимно однозначно отображает любой полуоткрытый промежуток Ω длиной $z = 2T$ на множество U.*

В самом деле, докажем сначала взаимную однозначность функции χ на промежутке Ω. Пусть $x', x'' \in \Omega$. Предполагая $x' \leqslant x''$, можем написать $0 \leqslant x'' - x' \leqslant z$. Поэтому в силу замечания 2 к теореме 4 соотношение $1 = \chi(x'')[\chi(x')]^{-1} = \chi(x'' - x')$ возможно лишь при $x' = x''$. Проверим теперь, что $\chi[\Omega] = U$. Полагая для определенности $\Omega = [a, a + z)$, обозначим через m целую часть числа $-a/2$ и положим $n = -m$. Тогда, очевидно, $a \leqslant nz < a + z$, т. е. $nz \in \Omega$. Введем промежутки $\Omega' = [a, nz)$ и $\Omega'' = [nz, a + z)$. Поскольку $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, то $\chi[\Omega] = \chi[\Omega'] \cup \chi[\Omega'']$. Но $\chi[\Omega'] = \chi[\Omega_1]$, где через Ω_1 обозначен промежуток $\Omega' + z = [a + z, (n + 1)z)$. Поэтому $\chi[\Omega] = \chi[\Omega''] \cup \chi[\Omega_1] = \chi[\Omega'' \cup \Omega_1] = \chi[[nz, (n + 1)z)] = \chi[[0, z)]$. Таким образом, достаточно установить, что $\chi[\Omega_0] = U$, где $\Omega_0 = [0, z) = [0, 2T)$. Пусть $u \in U$. Положим $\lambda = \operatorname{Re} u$, $\mu = \operatorname{Im} u$. Согласно замечанию 3 к теореме 4 в промежутке $[0, T]$

найдется такая точка x, что $C(x)=\lambda$. Обозначая, как и в упомянутом замечании, $\varepsilon = S(T/2)$, учитывая, что $|\varepsilon| = 1$, и опять используя цитированное замечание, будем иметь

$$S(x) = \varepsilon(1 - [C(x)]^2)^{1/2} = \varepsilon(1 - \lambda^2)^{1/2} = \\ = \varepsilon|\mu| = \varepsilon|\varepsilon\mu|. \qquad (23)$$

Если $\varepsilon\mu \geqslant 0$, то тогда $S(x) = \varepsilon|\varepsilon\mu| = \varepsilon^2\mu = \mu$ и $\chi(x) = C(x) + iS(x) = \lambda + i\mu = u$, так что $u \in \chi[[0, T]] \subset \chi[\Omega_0]$. В случае же, когда $\varepsilon\mu < 0$, также с помощью (23) получаем $S(x) = \varepsilon|\varepsilon\mu| = -\varepsilon^2\mu = -\mu$ и, следовательно, $\chi(z - x) = \chi(-x) = \overline{\chi(x)} = C(x) - iS(x) = \lambda + i\mu = u$. Остается заметить, что $z - x \in [T, z) \subset \Omega_0$. Стало быть, $u = \chi(z - x) \in \chi[\Omega_0]$.

4.7. Приступим, наконец, к доказательству существования нетривиальных непрерывных характеров группы $\mathbf{R}$. Учитывая результат предложения VII (4.6), для этого достаточно построить нетривиальный регулярный характер какой-либо числовой группы X, в которой возможно деление пополам (и, разумеется, содержащей ненулевые элементы), например, в группе W всех двоично-рациональных чисел. В свою очередь, поскольку $W = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{Z}_n$, где через $\mathbf{Z}_n$ $(n = 0, 1,\ldots)$ обозначена группа чисел вида $m/2^n$ с данным n и произвольным целым m, построив возрастающую последовательность $\{\varphi_n\}$ $(n = 0, 1,\ldots)$ положительно-регулярных характеров φ_n групп $\mathbf{Z}_n$, мы с помощью предложения I(4.5) определим на W характер $\varphi = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n$, который, очевидно, будет положительно-регулярным.

Перейдем к осуществлению указанной схемы. Рассмотрим группу $\mathbf{Z}_n$ $(n = 1, 2,\ldots)$. Поскольку в этой группе среди строго положительных элементов имеется наименьший — $1/2^n$, а всё остальные ее элементы — суть целые кратные его, то любой характер χ группы $\mathbf{Z}_n$ полностью определяется элементом $\chi(1/2^n)$: каково бы ни было $r \in \mathbf{Z}_n$, имеем $\chi(r) = [\chi(1/2^n)]^{2^n r}$. Это замечание обусловливает для обозначения элемента $u = \chi(1/2^n)$ множества U название *производящего элемента характера* χ. Ясно, что в роли производящего может фигурировать какой угодно элемент u группы U: отображение $\chi : r \mapsto u^{2^n r}$ $(r \in \mathbf{Z}_n)$ представляет собой характер группы $\mathbf{Z}_n$, производящий элемент которого как раз и есть u.

Указанные соображения лежат в основе доказательства следующей леммы, на которую опираются фактически все построения настоящего пункта.

Лемма 3. *Каково бы ни было натуральное число n, существует единственный характер φ_n группы $\mathbf{Z}_n$, обладающий свойствами: φ_n положительно-регулярен на промежутке $[0, 1/2]$ и $\varphi_n(1) = -1$. При этом сужение $\varphi_{n+1}|_{\mathbf{Z}_n}$ характера φ_{n+1} на группу $\mathbf{Z}_n$ совпадает с φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала группу $\mathbf{Z}_1$. Пусть χ — такой ее характер, что $\chi(1) = -1$. Так как в силу (17) $[C_\chi(1/2)]^2 = {}^1/_2(1 + C_\chi(1)) = 0$, а $[S_\chi(1/2)]^2 = {}^1/_2(1 - C_\chi(1)) = 1$, то если χ — положительно регулярен в промежутке $[0, 1/2]$ и, следовательно, если $S_\chi(1/2) \geqslant 0$, необходимо должно быть $S_\chi(1/2) = 1$, так что производящим элементом характера χ может быть только $u_1 = iS_\chi(1/2) = i$. Поскольку пересечение $\mathbf{Z}_1 \cap [0, 1/2]$, кроме нуля, содержит лишь элемент $1/2$, характер $\varphi_1 : r \mapsto i^{2r}$ $(r \in \mathbf{Z}_1)$ действительно положительно-регулярен на промежутке $[0, 1/2]$ и удовлетворяет условию $\varphi_1(1) = -1$. Из сказанного вытекает единственность характера φ_1.

Допустим, что n — такое натуральное число, что существует единственный характер φ_n, удовлетворяющий требованиям леммы. Обозначим для краткости C_{φ_n} через C_n и S_{φ_n} — через S_n. Положим еще $\lambda_n = C_n(1/2^n), \mu_n = S_n(1/2^n)$, $u_n = \varphi_n(1/2^n)$ (таким образом, u_n — производящий элемент характера φ_n). Отметим, что вследствие единственности характера φ_1 сужение $\varphi_n|_{Z_n}$ характера φ_n на $\mathbf{Z}_1$ совпадает с φ_1, так что $\varphi_n(1/2) = \varphi_1(1/2) = i$. Предположим, что χ — такой положительно-регулярный на промежутке $[0, 1/2]$ характер группы $\mathbf{Z}_{n+1}$, что $\chi(1) = -1$. Так как сужение χ_n характера χ на группу $\mathbf{Z}_n$ будет, очевидно, положительно-регулярным на промежутке $[0, 1/2]$, и $\chi_n(1) = -1$, то в соответствии с индуктивным предположением $\chi_n = \varphi_n$. Используя, как и выше, соотношения (14), будем иметь

$$\left[C_\chi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(1 + C_\chi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 + \lambda_n),$$

$$\left[S_\chi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right]^2 = \frac{1}{2}\left(1 - C_\chi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2}(1 - \lambda_n),$$

так что ввиду положительности значений $C_\chi(1/2^{n+1})$ и $S_\chi(1/2^{n+1})$

$$C_\chi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(\frac{1+\lambda_n}{2}\right)^{1/2} = \lambda_{n+1}, \qquad S_\chi\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \left(\frac{1-\lambda_n}{2}\right)^{1/2} = \mu_{n+1}.$$

Таким образом, предъявленные к характеру χ требования однозначно определяют его производящий элемент $u_{n+1} = \lambda_{n+1} + i\mu_{n+1}$ и, стало быть, и сам характер χ. Из сказанного следует, что если искомый характер φ_{n+1} существует, то только один.

Проверим, что характер $\varphi_{n+1}: r \mapsto (u_{n+1})^{2^{n+1}r}$ $(r \in \mathbf{Z}_{n+1})$ удовлетворяет всем требованиям леммы. Прежде всего, учитывая, что $\mu_n = S_n(1/2^n) \geqslant 0$, можем написать

$$(u_{n+1})^2 = \left(\lambda_{n+1}^2 - \mu_{n+1}^2\right) + 2i\lambda_{n+1}\mu_{n+1} =$$
$$= \left(\frac{1+\lambda_n}{2} - \frac{1-\lambda_n}{2}\right) + i\left(1-\lambda_n^2\right)^{1/2} = \lambda_n + i\mu_n = u_n.$$

Следовательно, если $z \in \mathbf{Z}_n$, то

$$\varphi_{n+1}(r) = (u_{n+1})^{2^{n+1}r} = \left(u_{n+1}^2\right)^{2^n r} = (u_n)^{2^n r} = \varphi_n(r),$$

так что характер φ_{n+1} служит распространением характера φ_n. Отсюда, в частности, вытекает, что $\varphi_{n+1}(1) = \varphi_n(1) = -1$ и $\varphi_{n+1}(1/2) = \varphi_n(1/2) = i$. Установим теперь положительную регулярность (в промежутке $[0, 1/2]$) характера φ_{n+1}. Введем обозначения $C_{n+1} = C_{\varphi_{n+1}}$ и $S_{n+1} = S_{\varphi_{n+1}}$ и возьмем число $r \in \mathbf{Z}_{n+1} \cap [0, 1/2]$. Так как $\varphi_{n+1} \supset \varphi_n$, то, доказывая положительность значений $S_{n+1}(r)$ и $C_{n+1}(r)$, можно считать, что $r \notin \mathbf{Z}_n$. Поскольку $r \in \mathbf{Z}_{n+1} \cap [0, 1/2]$, число $m = 2^{n+1}r$ — целое положительное. Условие же $r \notin \mathbf{Z}_n$ дает, что m — нечетное, так что во всяком случае $m \geqslant 1$. Определим еще число $\rho = r - 1/2^{n+1} = (m-1)/2^{n+1}$. Поскольку $m-1$ четное, то $\rho \in \mathbf{Z}_n$, а так как $0 \leqslant \rho < r \leqslant 1/2$, то $\rho \in \mathbf{Z}_n \cap [0, 1/2]$. Поэтому в силу индуктивного предположения $S_{n+1}(\rho) = S_n(\rho) \geqslant 0$, $C_{n+1}(\rho) = C_n(\rho) \geqslant 0$. Вследствие того что $C_{n+1}(1/2^{n+1}) = \lambda_{n+1} > 0$ и $S_{n+1}(1/2^{n+1}) = \mu_{n+1} \geqslant 0$, на основании (13) имеем

$$S_{n+1}(r) = S_{n+1}(\rho + 1/2^{n+1}) = S_{n+1}(\rho)C_{n+1}(1/2^{n+1}) +$$
$$+ S_{n+1}(1/2^{n+1})C_{n+1}(\rho) \geqslant 0,$$

а учитывая, что $C_{n+1}(1/2) = 0$, $S_{n+1}(1/2) = 1$ и $1/2 - r \in \mathbf{Z}_{n+1} \cap [0, 1/2]$, на основании (12) и (16) можем написать

$$C_{n+1}(r) = C_{n+1}(1/2 - (1/2 - r)) = C_{n+1}(1/2)C_{n+1}(1/2 - r) +$$
$$+ S_{n+1}(1/2)S_{n+1}(1/2 - r) = S_{n+1}(1/2 - r) \geqslant 0.$$

Доказательство леммы завершается по индукции.

Так как построенная в лемме 3 последовательность $\{\varphi_n\}$ характеров возрастающая и $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{Z}_n$, согласно предложению I (4.5) отображение $\varphi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ будет характером группы W, очевидно, положительно-регулярным на промежутке $[0, 1/2]$ и удовлетворяющим условию $\varphi(1) = -1$. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Существует единственный положительно-регулярный на промежутке* $[0, 1/2]$ *характер* φ *группы* W *такой, что* $\varphi(1) = -1$.

Действительно, если ψ — характер группы W, удовлетворяющий, как и φ, указанным условиям, то при любом $n = 1, 2, \ldots$ сужение $\psi_n = \psi|_{\mathbf{Z}_n}$ характера ψ на группу $\mathbf{Z}_n$ будет положительно-регулярным на промежутке $[0, 1/2]$ характером этой группы. Поскольку $\psi_n(1) = \psi(1) = -1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то на основании леммы 3 $\psi_n = \varphi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Следовательно,

$$\psi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \psi_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n = \varphi.$$

Следствие 2. *Функция* $\bar{\varphi} : r \mapsto \varphi(-r)$ $(r \in W)$ *представляет собой единственный отрицательно-регулярный на промежутке* $[0, 1/2]$ *характер группы* W, *удовлетворяющий условию* $\bar{\varphi}(1) = -1$.

Применяя предложение VII (4.6), получаем следующий результат.

Теорема 5 (4.II). *Каково бы ни было строго положительное число* T, *существуют в точности два непрерывных характера* χ_T *и* $\bar{\chi}_T$ *группы* $\mathbf{R}$ *с полупериодом* T. *Один из них* χ_T — *положительно-регулярен на промежутке* $[0, T/2]$, *другой,* $\bar{\chi}_T$ — *отрицательно-регулярен на этом промежутке. При этом* $\bar{\chi}_T(x) = \chi_T(-x)$ $(x \in \mathbf{R})$.

Доказательство. На основании предложения VII (4.6) построенные выше характеры φ и $\bar{\varphi}$ группы W допускают каждый единственное распространение до непрерывных характеров Φ и соответственно $\bar{\Phi}$ группы $\mathbf{R}$. При этом, очевидно, $\Phi(1) = \bar{\Phi}(1) = -1$. Так как Φ и $\bar{\Phi}$ одновременно с φ и $\bar{\varphi}$ регулярны на промежутке $[0, 1/2]$ (положительно и соответственно отрицательно), то полупериод характеров Φ и $\bar{\Phi}$ равен единице.

Возьмем строго положительное число T. Полагая $\chi_T(x) = \Phi(x/T)$, $\bar{\chi}(x) = \bar{\Phi}(x/T)$ $(x \in \mathbf{R})$, мы и построим искомые характеры группы $\mathbf{R}$.

Пусть теперь χ — непрерывный характер группы $\mathbf{R}$ с полупериодом T. Положим $\Psi : x \mapsto \chi(Tx)$ $(x \in \mathbf{R})$. Ясно, что Ψ — также непрерывный характер группы $\mathbf{R}$ с полупериодом, равным единице. Его сужение $\psi = \Psi|_W$ на группу W будет поэтому регулярным на промежутке $[0, 1/2]$ характером группы W, причем, поскольку $\psi(1) = \Psi(1) = -1$, на основании следствия 1 или 2 ψ должен совпадать с φ или с $\bar{\varphi}$. А тогда Ψ, будучи непрерывным распространением функции ψ, совпадает с Φ или с $\overline{\Phi}$. Понятно, что при этом χ тождественно равен одному из характеров χ_T или $\overline{\chi}_T$.

Рассмотрим характер $\Phi = \chi_1$ группы $\mathbf{R}$. Согласно сказанному в 4.6 существует конечный предел $L_\Phi = \lim\limits_{x\to 0} S_\Phi(x)/x$. Этот предел обозначается буквой π. Характер $\chi_\pi : x \mapsto \Phi(\pi x)$ $(x \in \mathbf{R})$, таким образом, имеет полупериод π. Этот характер называется *каноническим* характером группы $\mathbf{R}$; отвечающая ему c-функция называется *косинусом*, а s-функция — *синусом*. Вместо $C_{\chi_\pi}(x)$ пишут при этом $\cos x$, а вместо $S_{\chi_\pi}(x)$ — $\sin x$. Как очевидно, $L_{\chi_\pi} = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \sin x/x = 1$.

Функция χ_π непрерывна и удовлетворяет соотношениям

$$\chi_\pi(x+y) = \chi_\pi(x)\,\chi_\pi(y) \quad (x, y \in \mathbf{R}), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\chi_\pi(x) - 1}{x} = i$$

(см. предложение V (4.6)). По аналогии с вещественным случаем (см. 4.4) это служит поводом для использования обозначения $\chi_\pi(x) = e^{ix}$ $(x \in \mathbf{R})$. Таким образом, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $(x \in \mathbf{R})$. Отсюда получаем так называемые *формулы Эйлера*:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{24}$$

Так как характер χ_T с полупериодом T связан с характером χ_π соотношением $\chi_T(x) = \Phi(x/T) = \chi_\pi(\pi x/T)$ и $\overline{\chi}_T(x) = \chi_\pi(-\pi x/T)$, то

$$\chi_T(x) = e^{i\pi x/T}, \quad \overline{\chi}_T(x) = e^{-i\pi x/T} \quad (x \in \mathbf{R}). \tag{25}$$

С помощью этого соотношения получаем

I. *Каков бы ни был непрерывный характер χ группы $\mathbf{R}$, существует такое вещественное число α, что $\chi(x) = e^{i\alpha x}$ $(x \in \mathbf{R})$.*

Действительно, если все значения характера χ равны единице, то можно принять $\alpha = 0$. В прочих случаях χ совпадает с одним из характеров χ_T или $\overline{\chi}_T$, и можно воспользоваться (25).

4.8. В заключение рассмотрим гомоморфизмы аддитивной группы поля $\mathbf{C}$ в его мультипликативную группу Y. Условимся в обозначениях. Если z — комплексное число, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, то под e^z мы будем понимать произведение $e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$. Таким образом, $|e^z| = |e^x|\,|e^{iy}| = e^x$. Отсюда, в частности, следует, что $e^z \neq 0$.

Любое отличное от нуля комплексное число u, т. е., иначе говоря, любой элемент группы Y можно представить в виде

$u = e^z$. Действительно, полагая $x = \ln|u|$, будем иметь $|ue^{-x}| = 1$. А тогда согласно предложению VIII (4.6) найдется такое $y \in \mathbf{R}$ (можно даже, задав произвольный промежуток Ω длиной 2π, считать, что $y \in \Omega$), что $e^{iy} = ue^{-x}$, так что $u = e^x e^{iy} = e^{x+iy}$. Число $y \in \mathbf{R}$, участвующее в этом представлении, называется *аргументом* числа u. Как сказано, можно считать, что аргумент числа u лежит в промежутке $(-\pi, \pi]$. Это значение аргумента называется *главным*.

Нетрудно понять, что функция $z \mapsto e^z$ $(z \in \mathbf{C})$ является гомоморфизмом группы $\mathbf{C}$, как только что показано, на группу Y и, очевидно, непрерывным. Отсюда вытекает, что, каково бы ни было комплексное число k, функция $z \mapsto e^{kz}$ $(z \in \mathbf{C})$ также является непрерывным гомоморфизмом группы $\mathbf{C}$ в группу Y (а при $k \neq 0$ — и на группу Y). Однако этим не исчерпываются все непрерывные гомоморфизмы группы $\mathbf{C}$ в группу Y.

I. *Пусть F — такая определенная на $\mathbf{C}$ комплексная функция, что*

$$F(z_1 + z_2) = F(z_1)F(z_2) \qquad (z_1, z_2 \in \mathbf{C}). \tag{26}$$

Если среди значений функции F имеются отличные от нуля, то существуют такие вещественные числа α, β, λ, μ, что

$$F(z) = e^{(\alpha x+\beta y)+i(\lambda x+\mu y)} \quad (z \in \mathbf{C};\ x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z). \tag{27}$$

Действительно, введем функции $f_1 : x \mapsto |F(x)|$ $(x \in \mathbf{R})$ и $f_2 : x \mapsto |F(xi)|$ $(x \in \mathbf{R})$. Ясно, что эти вещественные функции удовлетворяют соотношению, аналогичному равенству (26), и так как $|F(x+iy)| = f_1(x)f_2(y)$ $(x, y \in \mathbf{R})$, то среди значений функций f_1 и f_2 имеются отличные от нуля. Тогда согласно теореме 1 $f_1(x) = [f_1(1)]^x$, $f_2(x) = [f_2(1)]^x$ $(x \in \mathbf{R})$. Положив $\alpha = \ln f_1(1) = \ln|F(1)|$, $\beta = \ln f_2(1) = \ln|F(i)|$, можем, следовательно, записать

$$|F(z)| = f_1(x)f_2(y) = e^{\alpha x+\beta y} \quad (z \in \mathbf{C};\ x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z). \tag{28}$$

Из (28) вытекает, в частности, что $F(z) \neq 0$ $(z \in \mathbf{C})$. Поэтому имеют смысл функции $\varphi_1 : x \mapsto F(x)/|F(x)|$ $(x \in \mathbf{R})$, $\varphi_2 : x \mapsto F(xi)/|F(xi)|$ $(x \in \mathbf{R})$. Ясно, что функции φ_1 и φ_2 представляют собой непрерывные характеры группы $\mathbf{R}$, так что на основании предложения I (4.7) можно указать такие вещественные числа λ и μ, что $\varphi_1(x) = e^{i\lambda x}$, $\varphi_2(x) = e^{i\mu x}$ $(x \in \mathbf{R})$. Но тогда, учитывая (28), будем иметь

$$F(z) = f_1(x)\varphi_1(x)f_2(y)\varphi_2(y) = e^{(\alpha x+\beta y)+i(\lambda x+\mu y)}$$
$$(z \in \mathbf{C};\ x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z).$$

Гомоморфизм F группы $\mathbf{C}$ в группу Y называется *аналитическим*, если существует предел $\lim\limits_{z\to 0}(F(z)-1)/z$.

II. *Всякий аналитический гомоморфизм F (группы $\mathbf{C}$ в группу Y) имеет вид $F: z \to e^{kz}$ $(z \in \mathbf{C})$, где $k = \lim\limits_{z\to 0}(F(z)-1)/z$.*

В самом деле, поскольку для $z, z' \in \mathbf{C}$ будет $F(z') - F(z) = F(z)[F(z'-z) - 1]$, то, если число $|z'-z|$ достаточно мало, можем написать $|F(z') - F(z)| \leqslant |F(z)|(|k|+1)|z'-z|$. Отсюда вытекает непрерывность функции F в точке z. Следовательно, на основании предложения I существуют такие числа $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, что справедливо (27). Обозначая $F_1: x \mapsto F(x)$, $F_2: x \mapsto F(xi)$ $(x \in \mathbf{R})$, должны иметь

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{F_1(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{F_2(x)-1}{xi}.$$

Но $F_1(x) = e^{\alpha x+\lambda xi}$, $F_2(x) = e^{\beta x+\mu xi}$ $(x \in \mathbf{R})$. Поэтому согласно предложению I(4.4) и соотношению (22) будет

$$k = \lim_{x\to 0}\frac{F_1(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{\lambda xi}-1}{x} = \alpha + \lambda i,$$
$$ki = \lim_{x\to 0}\frac{F_2(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\beta x}-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu xi}-1}{x} = \beta + \mu i,$$

так что $\alpha = \mu = \operatorname{Re} k$, $\lambda = -\beta = \operatorname{Im} k$. Следовательно, $(\alpha x + \beta y) + (\lambda x + \mu y)i = kz$.

Имеет место также и утверждение, обратное по отношению к предложению II.

III. *Каково бы ни было комплексное число k, функция $F: z \mapsto e^{kz}$ $(z \in \mathbf{C})$ представляет собой аналитический гомоморфизм группы $\mathbf{C}$ в группу Y.*

Действительно, докажем, что существует предел $\lim\limits_{z\to 0}(e^z-1)/z$. Возьмем вещественное число $\varepsilon > 0$. Согласно предложению VI (4.3) для достаточно малого по абсолютной величине вещественного числа x имеем $|e^x - 1 - x| \leqslant \varepsilon|x|$. Аналогично, принимая во внимание соотношение (22), также для достаточно малого (по абсолютной величине) вещественного числа y выполняется неравенство $|e^{yi} - 1 - yi| \leqslant \varepsilon|y|$. Для этого же y тем самым имеем $|e^{yi} - 1| \leqslant (1+\varepsilon)|y|$. Возьмем отличное от нуля комплексное число z. Если оно достаточно мало (по модулю), в частности если $|z| \leqslant \varepsilon$, то, полагая, как и раньше, $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, можем написать

$$|e^z - 1 - z| = |e^{yi}(e^x - 1 - x) + (e^{yi} - 1 - yi) + x(e^{yi} - 1)| \leqslant \varepsilon|x| + \varepsilon|y| + (1 + \varepsilon)|x||y| \leqslant \leqslant |z|(2\varepsilon + (1 + \varepsilon)\varepsilon) = |z|(3\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Таким образом, для указанного z получаем $|(e^z - 1)/z - 1| \leqslant 3\varepsilon + \varepsilon^2$.

Поскольку при $k \neq 0$ будет $(F(z) - 1)/z = k(e^{kz} - 1)/kz$ $(z \in Y)$, то по доказанному существует предел $\lim\limits_{z \to 0}(F(z) - 1)/z$ (равный k). Это означает, что F — аналитический гомоморфизм.

Распространив область определения показательной функции на всю комплексную плоскость, мы можем, используя формулы Эйлера (см. (24)), проделать аналогичную операцию и для тригонометрических функций — косинуса и синуса, а именно, положим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (z \in \mathrm{C}).$$

Понятно, что по-прежнему $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ $(z \in \mathrm{C})$, хотя, разумеется, $\cos z$ уже не будет вещественной, а $\sin z$ — мнимой частью числа e^{iz} [21].

§ 5. КОНСТРУИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе описываются две типичные конструкции, позволяющие задавать топологию на данном множестве, коль скоро она задана на некоторых других множествах.

5.1. Одна из упомянутых конструкций связана со следующим простым фактом.

Пусть T и X — данные множества и f — отображение множества T в множество X. Предположим, что на множестве X задана топология τ. Обозначим через $\mathfrak{T}(\mathfrak{T}(\tau, f))$ совокупность всех таких топологий λ на множестве T, что f оказывается непрерывным отображением пространства (T, λ) в пространство (X, τ). Понятно, что $\mathfrak{T}$ — непустое множество (оно включает, например, дискретную топологию). Снабжая совокупность всех топологий на данном множестве (в рассматриваемом случае речь идет о множестве T) каноническим порядком (см. 1.1), докажем

[21] Как нетрудно понять, $\operatorname{Re} e^{iz} = e^{-\operatorname{Im} z} \cos(\operatorname{Re} z)$, $\operatorname{Im} e^{iz} = e^{-\operatorname{Im} z} \cdot \sin(\operatorname{Re} z)$.

I. *Множество* $\mathfrak{T}(\tau, f)$ *имеет наименьший элемент, т. е. среди таких топологий* λ *на* T, *что* f — *непрерывное отображение пространства* (T, λ) *в пространство* (X, τ), *имеется слабейшая.*

Действительно, положим $\mu : t \mapsto \widetilde{f^{-1}\langle\tau(f(t))\rangle}$ $(t \in T)$ и для $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{G}_{\tau(x)}$ совокупность всех открытых окрестностей точки x. Нетрудно понять, что множества, входящие в предфильтр $f^{-1}\langle\mathfrak{G}_{\tau(f(t))}\rangle$ $(t \in T)$ в T, открыты в предтопологии μ, а так как

$$\widetilde{f^{-1}\langle\mathfrak{G}_{\tau(f(t))}\rangle} = \widetilde{f^{-1}\langle\widetilde{\mathfrak{G}_{\tau(f(t))}}\rangle} = \widetilde{f^{-1}\langle\tau(f(t))\rangle} = \mu(t),$$

то μ — топология. Согласно предложению VI(2.5), μ — наименьший элемент в $\mathfrak{T}$.

Заметим, что с помощью теоремы 3(2.II) нетрудно получить, что

$$\mathfrak{G}_{\mu}(T) = f^{-1}\langle\mathfrak{G}_{\tau}(X)\rangle, \quad \mathfrak{F}_{\mu}(T) = f^{-1}\langle\mathfrak{F}_{\tau}(X)\rangle. \tag{1}$$

О топологии μ предложения I будем говорить, что она *порождена* (*справа*) *пространством* (X, τ) *и отображением* f. Топологию μ называют также *прообразом топологии* τ (при отображении f).

Из соотношений (1) вытекает

II. *Если область значений* $R(f)$ *отображения* f — *открытое множество пространства* X, *то отображение* $f : (T, \mu) \to (X, \tau)$ *открыто, т. е. образ* $f[U]$ *любого множества* $U \in \mathfrak{G}_{\mu}(T)$ *открыт в пространстве* (X, τ). *Аналогично, замкнутость* (*в пространстве* X) *множества* $R(f)$ *влечет соотношение* $f\langle\mathfrak{F}_{\mu}(T)\rangle \subset \mathfrak{F}_{\tau}(X)$.

Допустим, что вместо одного топологического пространства дано семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений $f_\xi : T \to X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, где T, как и выше, данное множество. Имеет место следующее обобщение предложения I.

Теорема 1(5.II). *Среди таких топологий* λ *на множестве* T, *что при каждом* $\xi \in \Xi$ *отображение* f_ξ *пространства* (T, λ) *в пространство* X_ξ *непрерывно, имеется слабейшая.*

Доказательство. Возьмем $\xi \in \Xi$ и обозначим через μ_ξ топологию на множестве T, порожденную пространством X_ξ и отображением f_ξ. Примем $\mu = \sup\limits_{\xi \in \Xi} \mu_\xi$. Поскольку для каждого $\xi \in \Xi$ будет $\mu \geqslant \mu_\xi$, то используя предложение VI(2.5), нетрудно показать, что f_ξ — непрерывное отображение пространства (T, μ) в пространство X_ξ. Если топология λ на множестве T такова, что $f_\xi : (T, \lambda) \to X_\xi$ непрерывно, то в силу предложения I $\lambda \geqslant \mu_\xi$. Следовательно, если указанное обстоятельство имеет место для каждого $\xi \in \Xi$, то $\lambda = \sup_{\xi\in\Xi} \mu_\xi = \mu$. Этим доказано, что топология μ — искомая.

Топология μ на множестве T, существование которой установлено в доказанной теореме, называется *порожденной* (*справа*) *семейством* $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *топологических пространств и семейством* $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *отображений.*

Замечание. Топология μ, порожденная на множестве T семействами $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) и $\{f_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$), в соответствии со сказанным в 1.1, 1.2 может быть описана следующим образом.

Обозначим через τ_ξ топологию пространства X_ξ ($\xi \in \Xi$). Для каждого $\xi \in \Xi$ и каждой точки $x \in X_\xi$ выберем какой-либо базис $\mathfrak{B}_x^\xi$ фильтра $\tau_\xi(x)$ окрестностей точки x. Пусть $t \in T$. Возьмем произвольное конечное множество $\Theta \subset \Xi$ и множества $V_\xi \in \mathfrak{B}^\xi_{f_\xi(t)}$ ($\xi \in \Theta$). Множества $U \subset T$, допускающие представление в виде $U = \bigcap_{\xi\in\Theta} f_\xi^{-1}[V_\xi]$, и образуют базис фильтра $\mu(t)$ окрестностей точки t в топологии μ.

Укажем на некоторые свойства введенной выше топологии μ на множестве T.

III. *Для того чтобы фильтр* $\mathfrak{U}$ *в пространстве* (T, μ) *сходился к точке* $t \in T$, *необходимо и достаточно, чтобы каждый из предфильтров* $f_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ *в пространстве* X_ξ *сходился к точке* $f_\xi(t)$ ($\xi \in \Xi$). *При этом* $\operatorname{Lim}\mathfrak{U} = \bigcap_{\xi\in\Xi} f_\xi^{-1}[\operatorname{Lim} f_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle]$.

Необходимость условия вытекает с помощью предложения V(2.5) из непрерывности отображений f_ξ. Докажем достаточность условия. Пусть точка $t \in T$ такова, что для каждого $\xi \in \Xi$ имеет место сходимость $f_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle \to f_\xi(t)$. Сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы 1, будем иметь, следовательно, что предфильтр $f_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ коинициален фильтру $\tau_\xi(f_\xi(t))$ ($\xi \in \Xi$), где через τ_ξ обозначена топология пространства X_ξ. Тем самым имеет место соотношение

$$\mathfrak{U}_\xi = \widetilde{f_\xi^{-1}\langle f_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle\rangle} \supset \widetilde{f_\xi^{-1}\langle\tau(f_\xi(t))\rangle} = \mu_\xi(t)$$

и, значит,

$$\sup_{\xi\in\Xi} \mathfrak{U}_\xi \supset \sup_{\xi\in\Xi} \mu_\xi(t) = \mu(t).$$

Но ввиду соотношения $f_\xi^{-1}[f_\xi[U]] \supset U$ ($U \subset T$, $\xi \in \Xi$) фильтр $\mathfrak{U}$ тоньше каждого из фильтров $\mathfrak{U}_\xi$, так что $\mathfrak{U} \supset \sup_{\xi\in\Xi} \mathfrak{U}_\xi \supset \mu(t)$. Стало быть, $\mathfrak{U} \to t$.

Справедливость соотношения

$$\operatorname{Lim} \mathfrak{U} = \bigcap_{\xi \in \Xi} f_\xi^{-1} [\operatorname{Lim} f_\xi \langle \mathfrak{U} \rangle]$$

очевидным образом вытекает из приведенных выше рассуждений.

Наряду с множеством T, семействами $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ рассмотрим еще топологическое пространство Y и отображение $g : Y \to T$. Снабжая T топологией μ, порожденной семействами $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, докажем

IV. *Для того чтобы отображение g пространства Y в пространство T было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\xi \in \Xi$ были непрерывны суперпозиции $h_\xi = f_\xi \circ g$.*

Необходимость условия следует из непрерывности отображений f_ξ $(\xi \in \Xi)$ (см. IV(2.5)). Доказательство достаточности получаем из следующей цепочки соотношений (ν —топология на Y, $y \in Y$, $t = g(y)$):

$$\widetilde{g \langle \nu(y) \rangle} \supset \widetilde{(f_\xi^{-1} \circ h_\xi) \langle \nu(y) \rangle} \supset \widetilde{f_\xi^{-1} \langle \tau_\xi \; (f_\xi(t)) \rangle} = \mu_\xi(t) \qquad (\xi \in \Xi),$$

так что $\widetilde{g \langle \nu(y) \rangle} \supset \sup\limits_{\xi \in \Xi} \mu_\xi(t) = \mu(t)$.

В качестве простейшего примера применения теоремы 1 (точнее, предложения I) рассмотрим множество T в топологическом пространстве X, а за f примем каноническое вложение i множества T в множество X, т. е. $i : t \mapsto t \; (t \in T)$.

V. *Топология μ, порождаемая на T топологическим пространством X и отображением i, совпадает с топологией, индуцированной в T топологией пространства X.*

Для доказательства достаточно заметить, что $i^{-1}[E] = E \cap T$ для любого множества $E \subset X$.

5.2. Значительно более содержательный пример использования теоремы 1 возникает в следующей ситуации.

Рассмотрим семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и произведение $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$. Принимая в теореме 1 за T произведение $\mathfrak{X}$, а за отображения f_ξ — проекции P_ξ произведения $\mathfrak{X}$ на множество X_ξ, зададим в соответствии с цитированной теоремой на множестве $\mathfrak{X}$ топологию π, порожденную семействами $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Эта топология называется (*тихоновской*) *топологией произведения* $\mathfrak{X}$. Впредь, говоря о произведении семейства топологических пространств как о топологическом пространстве, мы, если только не сделаны специальные оговорки, будем иметь в виду именно тихоновскую топологию.

В соответствии с замечанием к теореме 1 для $\varphi \in \mathfrak{X}$ базис фильтра $\pi(\varphi)$ окрестностей точки φ может быть составлен из всех множеств вида $U = \bigcap_{\xi \in \Theta} P_\xi^{-1}[V_\xi]$, где Θ — конечное подмножество множества Ξ, а V_ξ — окрестность (в пространстве X_ξ) точки $P_\xi(\varphi) = \varphi(\xi)$ ($\xi \in \Xi$) (возможно, из некоторого, заранее заданного, базиса фильтра окрестностей). Пусть $\eta \in \Xi$ и E — множество, содержащееся в X_η. Полагая $E_\eta = E$ и $E_\xi = X_\xi$ для $\xi \in \Xi$, отличных от η, будем иметь, очевидно, $P_\eta^{-1}[E] = \prod_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Поэтому множество U, описанное выше, совпадает с произведением $U = \prod_{\xi \in \Xi} U_\xi$, где $U_\xi = V_\xi$ для $\xi \in \Theta$ и $V_\xi = X_\xi$ для остальных $\xi \in \Xi$. В частности, если само множество конечно, то U есть просто произведение $\prod_{\xi \in \Xi} V_\xi$ произвольных окрестностей V_ξ точек $\varphi(\xi)$ ($\xi \in \Xi$). Таким образом, введенная в 1.9 топология на произведении $\prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ конечного числа «сомножителей», совпадает с тихоновской.

Предложение III(5.1) дает (ср. X(2.1)).

I. *Для того чтобы фильтр* $\mathfrak{U}$ *в произведении* $\prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ *семейства* $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *топологических пространств сходился, необходимо и достаточно, чтобы при каждом* $\xi \in \Xi$ *сходился предфильтр* $P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ *в пространстве* X_ξ. *При этом*

$$\operatorname{Lim} \mathfrak{U} = \prod_{\xi \in \Xi} \operatorname{Lim} P_\xi \langle \mathfrak{U} \rangle.$$

Предложение IV(5.1) приводит к следующему результату (ср. VIII(2.5)).

II. *Пусть* Y — *топологическое пространство и* g — *отображение пространства* Y *в произведение* $\prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$. *Для непрерывности отображения* g *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\xi \in \Xi$ *координатные отображения* g_ξ, *т. е. суперпозиции* $g_\xi = P_\xi \circ g$, *были непрерывны.*

С помощью теоремы 3(2.II) и предложения IV(1.5) получаем

III. *Пусть* $\{F_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — *семейство таких множеств, что при каждом* $\xi \in \Xi$ *множество* F_ξ *замкнуто в топологическом пространстве* X_ξ. *Тогда произведение* $F = \prod_{\xi \in \Xi} F_\xi$ *замкнуто в произведении семейства топологических пространств* $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$).

Для доказательства достаточно, заметив, что $F = \bigcap_{\xi \in \Xi} P_\xi^{-1}[F_\xi]$, воспользоваться указанными выше фактами.

Заметим, что результат, аналогичный предложению III, для семейства $\{G_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ открытых множеств верен лишь в двух частных случаях: во-первых, когда хотя бы одно из открытых множеств, участвующих в произведении, пусто и, во-вторых, когда множество $\{\xi \in \Xi : G_\xi \neq X_\xi\}$ конечно.

В связи с предложением III следует также предостеречь читателя от неправомерного вывода о том, что проекция замкнутого в произведении множества замкнута в соответствующем пространстве.

Опираясь на предложения III и I, докажем следующий факт.

IV. *Если при каждом $\xi \in \Xi$ топологическое пространство X_ξ отделимо или соответственно хаусдорфово, то таким же будет и произведение $\mathfrak{X}$.*

Действительно, в случае отделимости всех пространств X_ξ из предложения III (с учетом предложения I(1.7)) вытекает замкнутость всех одноточечных множеств пространства $\mathfrak{X}$, т. е. опять на основании предложения I(1.7) отделимость этого пространства.

Предполагая каждое из пространств X_ξ $(\xi \in \Xi)$ хаусдорфовым, воспользуемся предложением VI(2.1), которое утверждает эквивалентность хаусдорфовости и того свойства, что предельное множество любого сходящегося фильтра одноточечно. Приняв во внимание этот факт, из предложения I получаем требуемый результат.

Предложение I открывает также возможность доказательства важного во многих отношениях результата, известного под названием *теоремы Тихонова* (ср. I(2.8)).

Теорема 2(5.II). *Пусть $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство топологических пространств и $\{C_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — такое семейство множеств, что при каждом $\xi \in \Xi$ множество C_ξ бикомпактно или соответственно компактно в пространстве X_ξ. Тогда и произведение $C = \prod_{\xi \in \Xi} C_\xi$ бикомпактно или соответственно компактно в произведении $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в $\mathfrak{X}$, включающий множество C. Согласно предложению II(I.7.3) совокупности $P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ также будут ультрафильтрами (но уже, разумеется, в X_ξ) при любом $\xi \in \Xi$, а поскольку $C_\xi = P_\xi[C] \in P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ $(\xi \in \Xi)$, в силу предложения III(2.7) ультрафильтр $P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle$ сходится, причем $C_\xi \cap \operatorname{Lim} P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle \neq \varnothing$ (если C_ξ бикомпактны) и $\operatorname{Lim} P_\xi\langle\mathfrak{U}\rangle \subset C_\xi$ (если C_ξ компактны). И в том и в другом случае предложение I позволяет утверждать о сходимости ультрафильтра $\mathfrak{U}$, причем в случае бикомпактности $C \cap \operatorname{Lim} \mathfrak{U} \neq \varnothing$, а в случае компактности $\operatorname{Lim} \mathfrak{U} \subset C$. Остается еще раз воспользоваться предложением III(2.7).

Замечание. Не останавливаясь на очевидном доказательстве, отметим, что произведение относительно компактных множеств относительно компактно.

5.3. Высказанное ниже предложение показывает, что теорему 1 в полном объеме достаточно использовать только однажды — для задания топологии на произведении семейства топологических пространств, после чего можно ограничиться использованием частного случая этой теоремы — предложения I(5.1).

Итак, рассмотрим, как и в 5.1, множество T, семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений $f_\xi : T \to X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Через μ обозначим топологию, порожденную на T семействами $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Образовав произведение $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$, построим отображение $f : T \to \mathfrak{X}$, полагая $f(t) = \varphi_t$ для $t \in T$, где $\varphi_t : \xi \mapsto f_\xi(t)$ $(\xi \in \Xi)$. Таким образом, координатными отображениями по отношению к f служат отображения данного семейства: $f_\xi = P_\xi \circ f$ $(\xi \in \Xi)$ (через P_ξ обозначены, как всегда, проекции произведения $\mathfrak{X}$ на X_ξ).

I. *Топология μ на T совпадает с топологией, порожденной на T топологическим пространством $\mathfrak{X}$ и отображением f.*

Если воспользоваться предложением II(5.2), то справедливость этого утверждения вытекает непосредственно из определений, данных в 5.1.

Из предложения I и образованной перед ним конструкции следует, что для любого семейства $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ морфизмов $f_\xi : T \to X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ в категории топологических пространств существует единственный морфизм $f : T \to \mathfrak{X}$ такой, что $f_\xi = P_\xi \circ f$. Иначе говоря, $\mathfrak{X}$ и семейство $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ проекций представляют собой произведение семейства $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ в категории топологических пространств.

Укажем на одно применение предложения I. Поскольку отделимость или хаусдорфовость пространства $\mathfrak{X}$ при условии взаимной однозначности отображения f влечет соответствующее свойство отделимости и у пространства (T, μ), то с учетом результата предложения IV(5.2) получаем

II. *Если семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений $f_\xi : T \to X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ удовлетворяют условию: для любых различных элементов $t', t'' \in T$ можно указать такой индекс $\xi \in \Xi$, что $f_\xi(t') \neq f_\xi(t'')$*[22]*, то отделимость или соответственно хаусдорфовость каждого из пространств X_ξ $(\xi \in \Xi)$ влечет отделимость или*

---

[22]) В этом случае говорят, что семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *разделяет* элементы множества T.

соответственно хаусдорфовость топологии μ, *порожденной на* T ~~*семействами*~~ $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *и* $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$.

Рассмотрим фильтрующееся семейство $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейство $\{\omega_\eta^\xi\}$ $((\xi, \eta) \in \Sigma)$ непрерывных отображений $\omega_\eta^\xi : X_\eta \to X_\xi$ $((\xi, \eta) \in \Sigma)$, где Σ — порядок в Ξ, образующие обратный спектр в категории топологических пространств. Обозначим через M предел $\varprojlim X_\xi$ обратного спектра $(\{X_\xi\}, \{\omega_\eta^\xi\})$ в категории множеств (см. I.7.4).

III. *Если при каждом* $\xi \in \Xi$ *топология* τ_ξ *хаусдорфова, то множество* M *замкнуто в произведении* $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$, *снабженном тихоновской топологией.*

Действительно, обозначая через P_ξ $(\xi \in \Xi)$ проекцию произведения $\mathfrak{X}$ на множество X_ξ, можем написать в соответствии с определением проективного предела (см. I.7.4):

$$M = \bigcap_{(\xi, \eta) \in \Sigma} M_{\xi, \eta},$$

где

$$M_{\xi, \eta} = \{\varphi \in \mathfrak{X} : P_\xi(\varphi) = \omega_\eta^\xi \circ P_\eta(\varphi)\} \qquad ((\xi, \eta) \in \Sigma).$$

Поскольку пространство $\mathfrak{X}$ хаусдорфово (предложение IV(5.2)), в силу предложения I(2.6) каждое из множеств $M_{\xi,\eta}$, замкнуто, а тогда будет замкнутым и пересечение M.

Зададим на проективном пределе M топологию μ, порожденную семейством $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейством $\{\Psi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ проекций проективного предела M в множества семейства $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Пространство (M, μ), как нетрудно понять, будет пределом обратного спектра $(\{(X_\xi, \tau_\xi)\}, \{\omega_\eta^\xi\})$ в категории топологических пространств. Если есть необходимость в упоминании топологий, участвующих в образовании обратного спектра топологических пространств, то для обозначения предела (M, μ) используют символ $\varprojlim_{\xi \in \Xi} (X_\xi, \tau_\xi)$ (или даже более детальный, включающий в себя обозначения вложений пространств, см. I.7.4). В противном случае предел обратного спектра топологических пространств обозначается так же, как и проективный предел обратного спектра множеств: $\varprojlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$.

Используя еще раз предложение I, получаем

IV. *Предел* $M = \varprojlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$ *обратного спектра* $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *топологических пространств представляет собой подпространство произведения* $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$ *семейства* $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$.

В самом деле, поскольку проекция Ψ_ξ ($\xi \in \Xi$) предела M в пространство X_ξ — это сужение на M проекции P_ξ произведения $\mathfrak{X}$ на X_ξ, то отображение $\Psi : M \to \mathfrak{X}$, определяемое соотношениями $\Psi_\xi = P_\xi \circ \Psi$ ($\xi \in \Xi$), является, очевидно, каноническим вложением множества M в произведение $\mathfrak{X}$. Поэтому для завершения доказательства остается воспользоваться предложениями V(5.1) и I.

Заметим, что как в самом определении предела обратного спектра топологических пространств, так и в доказательстве предложения IV никак не использовалась непрерывность вложений ω_η^ξ, хотя она, конечно, существенна при доказательстве предложения III и следующего ниже предложения VI.

Сопоставляя предложение IV(6.2) с доказанным только что фактом, получаем

V. *Если при каждом $\xi \in \Xi$ топологическое пространство X_ξ отделимо или соответственно хаусдорфово, и семейство $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) образует обратный спектр, то предел $\varprojlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$ также является отделимым или соответственно хаусдорфовым пространством.*

Продолжая изучение предела обратного спектра $\{X_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) топологических пространств и сохраняя введенные выше обозначения, рассмотрим такое семейство $\{C_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) множеств, что $C_\xi \subset X_\xi$ ($\xi \in \Xi$) и $C_\xi \subset \omega_\eta^\xi[C_\eta]$ ($(\xi, \eta) \in \Sigma$). Рассматриваемое семейство образует, очевидно, обратный спектр, (в категории множеств) если под морфизмом множества C_η в множество C_ξ ($(\xi, \eta) \in \Sigma$) понимать сужение на C_η отображения ω_η^ξ. Ясно, что проективный предел $C = \varprojlim_{\xi \in \Xi} C_\xi$ представим в виде пересечения: $C = M \cap \prod_{\xi \in \Xi} C_\xi$. С помощью теоремы Тихонова (а также замечания к ней), опираясь на предложения II(2.7) и III, получаем

VI. *Если каждое из пространств X_ξ ($\xi \in \Xi$) хаусдорфово, а каждое из множеств C_ξ ($\xi \in \Xi$) компактно (относительно компактно), то будет компактным (относительно компактным) и множество C.*

5.4. В связи с теоремой 1 поставим следующий вопрос. Рассмотрим топологическое пространство T (с топологией σ) и множество C всех непрерывных вещественных (конечных) функций, заданных на T. Для каждой $f \in C$ положим $X_f = \mathbf{R}$. Снабжая числовую прямую стандартной топологией, обозначим через μ топологию на T, порожденную справа семейством $\{X_f\}$ ($f \in C$) топологических пространств и семейством $\{f\}$ ($f \in C$) отображений. Таким образом, μ — слабейшая из таких топологий λ на T, что каждая функция $f \in C$ непрерывна на пространстве (T, λ).

Ясно, что $\mu \leqslant \sigma$ и требуется установить, когда топология μ совпадает с исходной топологией σ пространства T.

Для того чтобы сформулировать условия совпадения топологий μ и σ, нам понадобятся некоторые определения. Будем говорить, что множество $E \subset T$ *функционально отделимо* (с помощью функционального класса C) от точки $t \in T$, если существует такая функция $f_0 \in C$ и такое вещественное число ε, что $f_0(t) < \varepsilon$ и $f_0(s) \geqslant \varepsilon$ для $s \in E$. Если каждое замкнутое множество пространства T функционально отделимо (с помощью C) от любой точки пространства T, не принадлежащей этому множеству, то T называется *T_3^+-пространством*, а его топология σ — *T_3^+-топологией*. Если, кроме того, пространство T отделимо, то оно и его топология называются *вполне регулярными*.

Нетрудно понять, что T_3^+-пространство T будет и T_3-пространством (см. 1.7), так как если $F \in \mathfrak{F}_\sigma(T)$, $t \in T \setminus F$, а функция $f_0 \in C$ и число ε таковы, что $f_0(t) < \varepsilon$, $f_0(s) \geqslant \varepsilon$ $(s \in F)$, то, взяв число a так, чтобы было $f_0(t) < a < \varepsilon$, можем написать $t \in G_0 = f_0^{-1}[(-\infty, a)]$, $F \subset G_1 = f_0^{-1}[(a, +\infty)]$, и остается заметить, что множества G_0 и G_1 открыты и не пересекаются. Поскольку можно построить такое регулярное топологическое пространство, что непрерывными на нем будут лишь функции, принимающие единственное значение, то условие T_3^+ оказывается существенно более сильным, чем аксиома отделимости T_3. Вместе с тем, как будет показано в следующем параграфе, нормальное топологическое пространство вполне регулярно, причем и в этом случае обратное утверждение неверно (это вытекает хотя бы из того, что условие T_3^+ наследуется подпространством, а аксиома T_4 — нет).

Теорема 2(5.II). *Для того чтобы топология μ совпадала с исходной топологией σ пространства T, необходимо и достаточно, чтобы последняя была T_3^+-топологией.*

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\mu = \sigma$. Возьмем $F \in \mathfrak{F}_\sigma(T)$ и $t \in T \setminus F$. Дополнение G множества F служит окрестностью точки t, т. е. $G \in \sigma(t) = \mu(t)$. Поэтому в соответствии с замечанием к теореме 1 найдется такое строго положительное число ε и такое конечное множество $\Theta \subset C$ (которое, очевидно, можно считать непустым), что

$$\bigcap_{f \in \Theta} f^{-1}[[f(t) - \varepsilon, f(t) + \varepsilon]] \subset G. \tag{2}$$

Заменяя каждую функцию $f \in \Theta$ функцией $s \mapsto f(s) - f(t)$ $(s \in T)$, мы не нарушим условия (2). Это позволяет считать, что $f(t) = 0$ для $f \in \Theta$. Условие (2) сохраняется также и при последующей замене функций $f \in \Theta$ функциями $s \mapsto |f(s)|$ $(s \in T)$, так что можно считать, что все значения любой из функций множества Θ положительны. Примем $f_0 : s \mapsto \sup\limits_{f \in \Theta} f(s)$ $(s \in T)$. Поскольку Θ — конечное множество, то $f_0 \in C$. Очевидно, $f_0(t) = 0$, а ввиду того, что для $s \in F$ найдется такая функция $f \in \Theta$, что $s \notin f^{-1}[[-\varepsilon, \varepsilon]]$, то $f_0(s) \geqslant f(s) \geqslant \varepsilon$. Таким образом, функция f «отделяет» множество F от точки t.

Достаточность. Предполагая, что выполнено условие теоремы, возьмем точку $t \in T$ и ее окрестность $U \in \sigma(t)$. Принимая $F = (U^\circ)'$, согласно условию теоремы найдем функцию $f_0 \in C$ и число ε так, чтобы было $f_0(t) < \varepsilon$ и $f_0(s) \geqslant \varepsilon$ $(s \in F)$. Множество $U_0 = f_0^{-1}[(-\infty, \varepsilon)]$ служит окрестностью точки t в топологии μ (см. замечание к теореме 1). Поскольку при этом $U_0 \cap F = \varnothing$, то $U_0 \subset U^\circ \subset U$. Таким образом, и $U \in \mu(t)$. Следовательно, $\sigma \leqslant \mu$.

Замечание 1. Условие теоремы 2 равносильно следующему формально более сильному требованию: каковы бы ни были замкнутое множество F пространства (T, σ) и точка $t \in T \setminus F$, существует такая непрерывная функция φ на T, что $\varphi(t) = 0$, $\varphi(s) = 1$ $(s \in F)$ и $R(\varphi) \subset [0, 1]$.

Действительно, как следует из доказательства необходимости условия теоремы, «отделяющую функцию» f_0 можно считать такой, что $f_0(t) = 0$, $f_0(s) \geqslant \varepsilon$ $(s \in F)$, где ε — некоторое строго положительное число, и $R(f) \subset [0, +\infty]$. Функция $\varphi : s \mapsto \varepsilon^{-1} f_0(s) \wedge 1$ $(s \in T)$ удовлетворяет всем поставленным выше требованиям.

Замечание 2. Как следует из замечания 1, теорема 2 остается справедливой, если под C понимать множество не всех непрерывных функций, а лишь непрерывных и ограниченных или даже таких непрерывных функций, область значений которых лежит в фиксированном промежутке (не сводящемся, разумеется, к одной точке).

Значение условия T_3^+ выходит далеко за рамки теоремы 2. Как оказывается (это устанавливается, кстати сказать, с помощью теоремы 2), класс T_3^+-пространств совпадает с классом топологических пространств, топология на которых может быть задана способом, наиболее адекватным обычному представлению о «близости» как о неком симметричном отношении в данном множестве, в связи с чем именно T_3^+-пространства можно рассматривать как «готовую продукцию» теории топологических пространств, оставляя прочие топологические пространства лишь для «внутреннего употребления», поскольку на таких пространствах имеется всегда более или менее глубокий отпечаток экзотики.

Мы ограничиваемся здесь этим несколько туманно оформленным замечанием, так как со всей подробностью затронутые вопросы будут изучены в главе III.

5.5 Аналогичная, хотя и не в полной мере, ситуация возникает, если задавать топологию на множестве T и «переносить» ее с помощью отображения $f : T \to X$ на множество X.

I. *Пусть T и X — данные множества и f — отображение множества T в множество X. Какова бы ни была топология σ на множестве T, среди топологий τ на множестве X таких, что отображение $f : (T, \sigma) \to (X, \tau)$ непрерывно, существует сильнейшая.*

Действительно, поскольку для любого множества $\mathfrak{C}$ топологий на X и элемента $x \in X$ имеет место соотношение $(\sup \mathfrak{C})(x) = \sup\limits_{\tau \in \mathfrak{C}} \tau(x)$, то, обозначая через $\Gamma(\sigma)$ множество тех топологий на X, которые участвуют в формулировке доказываемого предложения, можем на основании определения непрерывности написать

$$\widetilde{f\langle\sigma(t)\rangle} \supset \sup_{\tau \in \Gamma(\sigma)} \tau(f(t)) = (\sup \Gamma(\sigma))(f(t)) \qquad (t \in T), \qquad (3)$$

откуда и следует, что топология $\rho = \sup \Gamma(\sigma)$ искомая.

О топологии ρ на X говорят, что она *порождена слева топологией* σ (или топологическим пространством (T, σ)) *и отображением* f. Топологию ρ называют также *образом топологии* σ (при отображении f).

Дадим конструктивное описание топологии ρ. Если E — подмножество множества T, то условимся через $\mathfrak{U}_E$ обозначать фильтр окрестностей (в данной топологии σ на T) множества E. Таким образом, $\mathfrak{U}_E = \bigcap\limits_{t \in E} \sigma(t) = \inf\limits_{t \in E} \sigma(t)$.

II. *Если $R(f) = X$, то ρ совпадает с топологией, ассоциированной с предтопологией $\bar{\rho} : x \mapsto f\langle\mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}\rangle$ $(x \in X)$.*

В самом деле, отметим прежде всего, что условие $R(f) = X$ обеспечивает то обстоятельство, что совокупность $f\langle\mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}\rangle$ является фильтром (см. п. I.7.3). Предположим, что $\tau \in \Gamma(\sigma)$, т. е. что отображение $f : (T, \sigma) \to (X, \tau)$ непрерывно. Поскольку тогда для любых $x \in X$ и $t \in f^{-1}\{x\}$ будет $f\langle\sigma(t)\rangle \supset \tau(x)$, то и $\bigcap\limits_{t \in f^{-1}\{x\}} f\langle\sigma(t)\rangle \supset \tau(x)$. Но если $V \in \bigcap\limits_{t \in f^{-1}\{x\}} f\langle\sigma(t)\rangle$, то для каждого $t \in f^{-1}\{x\}$ найдется такое множество $U_t \in \sigma(t)$, что $V \subset f[U_t]$ и, следовательно, $V = f[U]$, где $U = \bigcap\limits_{t \in f^{-1}\{x\}} U_t$. Понятно, что $U \in \mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}$. Тем самым $V \in f\langle\mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}\rangle$. Таким образом, $\bar{\rho}(x) = f\langle\mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}\rangle \supset \bigcap\limits_{t \in f^{-1}\{x\}} f\langle\sigma(t)\rangle \supset \tau(x)$. Если через $\overline{\rho}_0$ обозначить топологию, ассоциированную с предтопологией $\overline{\rho}$, то $\rho_0 \geqslant \tau$ и, стало быть, $\rho_0 \geqslant \sup \Gamma(\sigma) = \rho$. Учитывая непрерывность отображения $f : (T, \sigma) \to (X, \rho_0)$, заключаем, что имеет место и обратное соотношение: $\rho \geqslant \rho_0$.

Множество $E \subset T$ назовем *насыщенным* (по отображению f), если оно служит прообразом некоторого множества $B \subset X$. Для насыщенного множества $E \subset T$ имеем

$$f^{-1}[f[E]] = f^{-1}[(f\circ f^{-1})[B]] = f^{-1}[B] = E. \qquad (4)$$

Это означает, в частности, что в качестве B можно взять образ $f[E]$ (если $R(f) = X$, то нетрудно понять, что это единственная возможность для множества B).

Каково бы ни было множество $E \subset T$, множество $\widetilde{E} = (f^{-1}\circ f)[E]$, очевидно, насыщенно и является наименьшим насыщенным множеством, содержащим данное множество E. В связи с этим обстоятельством множество $\widetilde{E}$ мы будем называть *насыщением* множества E. Заметим, что $f[\widetilde{E}] = (f\circ f^{-1})[f[E]] = f[E]$. Это замечание позволяет заменить в предложении II фильтр $\mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}$ предфильтром $\mathfrak{U}^0_{f^{-1}\{x\}}$ всех насыщенных окрестностей множества $f^{-1}\{x\}$.

Понимая, как и выше, под ρ топологию на X, порожденную топологией σ (на T) и отображением f, и обозначая через $\mathfrak{G}^0_\sigma(T)$ совокупность всех насыщенных открытых множеств пространства (T, σ), докажем

III. *Если $R(f) = X$, то имеет место соотношение* $\mathfrak{G}_\rho(X) = f\langle\mathfrak{G}^0_\sigma\rangle$.

Действительно, в силу теоремы 3 (2.II) $f^{-1}\langle\mathfrak{G}_\rho(X)\rangle \subset \mathfrak{G}^0_\sigma(T)$, так что $f\langle\mathfrak{G}^0_\sigma(T)\rangle \supset \mathfrak{G}_\rho(X)$. Обратно, если G — насыщенное открытое множество пространства (T, σ) и $x \in f[G]$, то $f^{-1}\{x\} \subset (f^{-1}\circ f)[G]=G$, так что $G \in \mathfrak{U}_{f^{-1}\{x\}}$. Следовательно, $f[G] \in \overline{\rho}(x)$. Это означает, что множество $f[G]$ открыто в предтопологии $\overline{\rho}$ предложения II и, стало быть, открыто и в топологии ρ, ассоциированной с предтопологией $\overline{\rho}$. Таким образом, $f\langle\mathfrak{G}^0_\sigma(T)\rangle \subset \mathfrak{G}_\rho(X)$.

Учитывая, что образ дополнения насыщенного множества совпадает с дополнением образа, имеем

IV. *Если $R(f) = X$, то* $\mathfrak{F}_\rho(X) = f\langle\mathfrak{F}^0_\sigma(T)\rangle$, где через $\mathfrak{F}^0_\sigma(T)$ *обозначена совокупность всех насыщенных замкнутых множеств пространства (T, σ).*

В частности,

V. *Если $R(f) = X$ и при любом $x \in X$ прообраз $f^{-1}\{x\}$ замкнут в пространстве (T, σ), то топология ρ отделима.*

Также из предложения III вытекает следующий полезный во многих приложениях факт.

VI. *Если $R(f) = X$ и топология σ на множестве T такова, что насыщение $(f^{-1}\circ f)[G]$ любого открытого в пространстве (T, σ) множества G открыто, то предтопология $\bar{\rho}$ предложения II является топологией (совпадающей в силу предложения II с топологией ρ).*

В самом деле, условия предложения обеспечивают коинициальность множества всех насыщенных открытых окрестностей множества $f^{-1}\{x\}$ по отношению к предфильтру $\mathfrak{U}^0_{f^{-1}\{x\}}$ всех насыщенных окрестностей этого множества. Поскольку, как отмечалось, $\bar{\rho}(x) = f\langle\mathfrak{U}^0_{f^{-1}\{x\}}\rangle$ $(x \in X)$, то вследствие предложения III указанное обстоятельство означает, что фильтр $\bar{\rho}(x)$ имеет базис, состоящий из открытых в топологии ρ (или, что то же, в предтопологии $\bar{\rho}$) множеств.

Заметим, что в условиях предложения VI $f\langle\mathfrak{G}_\sigma(T)\rangle = f\langle\mathfrak{G}^0_\sigma(T)\rangle = \mathfrak{G}_\rho(X)$, так что отображение $f : (T, \sigma) \to (X, \rho)$ открыто (см. II(5.1)).

Отказываясь от предположения $R(f) = X$ и по-прежнему понимая под ρ топологию на X, порождаемую (слева) топологическим пространством (T, σ) и отображением f, докажем

VII. *Совокупность $\mathfrak{G}_\rho(X)$ состоит из всех таких подмножеств G множества X, что $f^{-1}[G] \in \mathfrak{G}_\sigma(T)$.*

Действительно, обозначая совокупность всех множеств указанного вида через $\mathfrak{G}$, без труда убедимся в том, что она удовлетворяет условиям предложения II(1.2) и, следовательно, определяет на X такую топологию μ, что $\mathfrak{G}_\mu(X) = \mathfrak{G}$. При этом, очевидно, отображение $f : (T, \sigma) \to (X, \mu)$ непрерывно, так что $\mu \leqslant \rho$. Поскольку для любой такой топологии τ на X, что отображение $f : (T, \sigma) \to (X, \tau)$ непрерывно, имеем $\mathfrak{G}_\tau(X) \subset \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_\mu(X)$, то $\tau \leqslant \mu$. В частности, $\rho \leqslant \mu$.

Аналогичным образом описывается совокупность $\mathfrak{F}_\rho(X)$.

VIII. *Множество $\mathfrak{F}_\rho(X)$ состоит из всех таких подмножеств F множества X, что $f^{-1}[F] \in \mathfrak{F}_\sigma(T)$.*

В качестве применения описанной выше конструкции рассмотрим множество T и отношение эквивалентности ω в нем. Принимая за X фактор-множество T/ω (см. пункт I.2.6), приходим к следующему определению: пусть σ — топология на множестве T; топология ρ на X, порожденная слева топологией σ и каноническим вложением φ, называется *фактор-топологией* топологии σ (по отношению эквивалентности ω), а топологическое пространство (X, ρ) — *фактор-пространством* (пространства (T, σ) по отношению эквивалентности ω).

5.6. Топологию слева так же, как и справа, можно порождать с помощью семейств топологических пространств и отображений.

Теорема 3(6.II). *Пусть* $\{T_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *семейство топологических пространств и* $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *семейство отображений* $(f_\xi(\xi \in \Xi)$ — *отображение множества* T_ξ *в данное множество* $X)$. *Среди таких топологий* τ *на* X, *что при любом* $\xi \in \Xi$ *отображение* $f_\xi : T_\xi \to (X, \tau)$ *непрерывно, существует сильнейшая.*

Доказательство. Возьмем $\xi \in \Xi$ и обозначим через ρ_ξ топологию на X, порожденную топологическим пространством T_ξ и отображением f_ξ. Докажем, что топология $\rho = \inf\limits_{\xi \in \Xi} \rho_\xi$ — искомая. Действительно, если τ — топология на X, обладающая указанными в формулировке теоремы свойствами, то в силу предложения I(5.4) $\tau \leqslant \rho_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Следовательно, $\tau \leqslant \rho$. Но ввиду того, что $\rho \leqslant \rho_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, а отображение $f_\xi : T_\xi \to (X, \rho_\xi)$ непрерывно, будет непрерывным и отображение $f_\xi : T_\xi \to (X, \rho)$.

О топологии ρ на множестве X, существование которой утверждается в теореме, говорят, что она *порождена слева семейством* $\{T_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *топологических пространств* (или, если σ_ξ $(\xi \in \Xi)$ — топология пространства T_ξ,— *семейством* $\{\sigma_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *топологий*) *и семейством* $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *отображений.*

Поскольку топология ρ есть точная нижняя граница семейства $\{\rho_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологий, порожденных топологическим пространством T_ξ и отображением f_ξ, на основании предложения VII(5.5) совокупность $\mathfrak{G}_\rho(X)$ допускает следующее описание.

I. *Если обозначить через* σ_ξ $(\xi \in \Xi)$ *топологию пространства* T_ξ, *то совокупность* $\mathfrak{G}_\rho(X)$ *состоит из всех таких подмножеств* G *множества* X, *что при любом* $\xi \in \Xi$ *имеет место* $f_\xi^{-1}[G] \in \mathfrak{G}_{\sigma_\xi}(T_\xi)$.

Точно так же

II. *Совокупность* $\mathfrak{F}_\rho(X)$ *состоит из всех таких подмножеств* F *множества* X, *что при любом* $\xi \in \Xi$ *имеет место* $f_\xi^{-1}[F] \in \mathfrak{F}_{\sigma_\xi}(T_\xi)$.

В частности,

III. *Если для любых* $\xi \in \Xi$ *и* $x \in X$ *множество* $f_\xi^{-1}\{x\}$ *замкнуто в пространстве* T_ξ, *то топология* ρ *отделима.*

Остановимся лишь на одном примере использования теоремы 3.

Рассмотрим фильтрующееся семейство $\{(T_\xi, \sigma_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейство $\{\omega_\xi^\eta\}$ $((\xi, \eta) \in \Sigma)$ непрерывных отображений $\omega_\xi^\eta : T_\xi \to T_\eta$ $((\xi, \eta) \in \Sigma)$, где Σ —

порядок в Ξ, образующие прямой спектр в категории топологических пространств. Пусть L — индуктивный предел $\varinjlim X_\xi$ прямого спектра $(\{X_\xi\}, \{\omega_\xi^\eta\})$ в категории множеств. Как и в I.7.4, обозначим через Φ_ξ ($\xi \in \Xi$) каноническое вложение множества T_ξ в множество L. Зададим на L топологию λ, порожденную семействами $\{\sigma_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) и $\{\Phi_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$). Нетрудно понять, что топологическое пространство (L, λ) будет пределом прямого спектра $(\{(T_\xi, \sigma_\xi)\}, \{\omega_\xi^\eta\})$ в категории топологических пространств. Топологию λ называют при этом *индуктивным пределом семейства* $\{\sigma_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) *топологий* и обозначают через $\varinjlim \sigma_\xi$ или через $\varinjlim_{\xi \in \Xi} \sigma_\xi$, а топологическое пространство (L, λ) — (индуктивным) пределом прямого спектра топологических пространств и в его обозначении указания на топологии обычно опускают.

Сделаем несколько замечаний в связи с пределом прямого спектра, имея в виду тот частный случай, когда семейство $\{T_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) — возрастающее и в роли вложений ω_ξ^η выступают канонические вложения множества T_ξ в множество T_η ($(\xi, \eta) \in \Sigma$). Отождествляя в этом случае индуктивный предел L с объединением $\bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi$ и замечая, что вложения Φ_ξ ($\xi \in \Xi$) становятся при этом каноническими вложениями множества T_ξ в множество L, применением предложений I и II получаем

IV. *Если $L = \bigcup_{\xi \in \Xi} T_\xi$, то совокупность $\mathfrak{G}_\lambda(L)$ состоит из всех таких подмножеств G множества L, что при каждом $\xi \in \Xi$ след $G_\xi = G \cap T_\xi$ множества G на множестве T_ξ открыт в пространстве (T_ξ, σ_ξ).*

Аналогично множество $F \in \mathfrak{F}_\lambda(L)$ в том и только в том случае, если при каждом $\xi \in \Xi$ след $F_\xi \in F \cap T_\xi \in \mathfrak{F}_{\sigma_\xi}(T_\xi)$.

Предложение IV дает

V. *Если при каждом $\xi \in \Xi$ пространство T_ξ отделимо, то будет отделимым и пространство (L, λ).*

Если X — топологическое пространство (с топологией τ), а $\mathfrak{B}$ — фильтрующаяся по возрастанию совокупность его подпространств, удовлетворяющая условию $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X$, то нельзя утверждать, что топология τ совпадает с индуктивным пределом λ прямого спектра $\{\tau_B\}$ ($B \in \mathfrak{B}$) топологий подпространств из $\mathfrak{B}$, хотя, разумеется, из предложения IV вытекает, что $\tau \leqslant \lambda$. В связи с этим представляет интерес следующий факт.

VI. *Если совокупность $\mathfrak{B}$ такова, что $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B^\circ = X$, то топологическое пространство (X, τ) есть индуктивный предел прямого спектра $\{(B, \tau_B)\}$ ($B \in \mathfrak{B}$) подпространств $B \in \mathfrak{B}$.*

Действительно, из условия вытекает, что для любого $x \in X$ найдется множество $B_x \in \mathfrak{B} \cap \tau(x)$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_\lambda(X)$. Согласно предложению IV, для каждого $x \in G$ будет $U_x = G \cap \cap B_x \in \mathfrak{G}\tau_{B_x}(B_x)$. Так как множество $B_x \in \tau(x)$, то отсюда следует, что и $U \in \tau(x)$. Тем самым $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \mathfrak{G}_\tau(X)$, так что $\lambda \leqslant \tau$.

Условия предложения VI выполнены, в частности, если X — локально компактное пространство (см. п. 2.7), а в качестве $\mathfrak{B}$ взята совокупность всех компактных или хотя бы всех компактных с непустой внутренностью множеств пространства X. Таким образом,

VII. *Локально компактное пространство является индуктивным пределом прямого спектра всех своих компактных подпространств.*

Возвращаясь к общему понятию индуктивного предела, заметим, что оно может быть сведено к частному случаю, рассмотренному в предложениях IV и V. В самом деле, положим $\overline{T}_\xi = R(\Phi_\xi)$ $(\xi \in \Xi)$. Если снабдить множество $\overline{T}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ топологией σ_ξ, порожденной слева топологическим пространством T_ξ и отображением Φ_ξ, то нетрудно доказать, что топология λ на $L = \varinjlim_{\xi \in \Xi} T_\xi$ служит индуктивным пределом прямого спектра $\overrightarrow{\{\sigma_\xi\}}$ $(\xi \in \Xi)$ топологий пространств $\overline{T}_\xi$.

В связи с теоремой 3 отметим, что, так же, как и в случае теоремы 1, можно ограничиться однократным ее применением, когда в качестве X фигурирует сумма $\bigcup_{\xi \in \Xi} (\{\xi\} \times \times T_\xi)$ данного семейства множеств $\{T_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, доказав утверждение, аналогичное предложению I(7.3). Подробности мы и здесь опустим.

Заканчивая параграф, заметим, что порой возникает надобность в доказательстве фактов, подобных приведенным выше, но с теми или иными дополнительными требованиями к конструируемым топологиям. Понятно, что высказывание каких-либо общих соображений на этот счет нецелесообразно.

§ 6. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Как уже было отмечено (см. 5.4), в теории топологических пространств не последнюю роль играют такие топологические пространства, на которых имеется достаточно богатый запас непрерывных функций. В этом параграфе будет показано, что достаточным для такого свойства условием является аксиома отделимости T_4.

6.1 Прежде всего займемся разработкой необходимого аппарата. Пусть на множестве T задана функция f и пусть x — некоторое вещественное число. Множества

$$\begin{aligned} \{f < x\} &= f^{-1}[[\leftarrow, x)] = \{t \in T : f(t) < x\}, \\ \{f \leqslant x\} &= f^{-1}[[\leftarrow, x]] = \{t \in T : f(t) \leqslant x\}, \\ \{f > x\} &= f^{-1}[(x, \rightarrow]] = \{t \in T : f(t) > x\}, \\ \{f \geqslant x\} &= f^{-1}[[x, \rightarrow]] = \{t \in T : f(t) \geqslant x\} \end{aligned} \tag{1}$$

называются *лебеговскими множествами* функции f.

Если для каждого $x \in \overline{\mathbf{R}}$ известно одно из множеств (1), то функцию f легко восстановить. Однако удобнее использовать несколько более общий факт.

Лемма 1. *Пусть $X \subset \overline{\mathbf{R}}$. Если $\{U_x\}$ $(x \in X)$ — семейство подмножеств данного множества T, то для существования на T функции, обладающей свойством*

$$\{f < x\} \subset U_x \subset \{f \leqslant x\} \qquad (x \in X), \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы семейство $\{U_x\}$ $(x \in X)$ было возрастающим.

Доказательство. Необходимость. Пусть f — некоторая функция, заданная на T. Обозначим для краткости множества $\{f < x\}$, $\{f \leqslant x\}$ через G_x, E_x соответственно. Поскольку для $x < y$ $(x, y \in \overline{\mathbf{R}})$, очевидно,

$$G_x \subset E_x \subset G_y \subset E_y, \tag{3}$$

то, если f удовлетворяет (2), имеем $U_x \subset E_x \subset G_y \subset U_y$ $(x < y,\ x,\ y \in X)$.

Достаточность. Пусть семейство $\{U_x\}$ $(x \in X)$ возрастает. Для $t \in T$ положим $A_t = \{x \in X : t \in U_x\}$ и $f(t) = \inf A_t$. Этим соотношением на T определена функция f (со значениями в $\overline{\mathbf{R}}$). Проверим, что для нее выполнено (2). Действительно, если множество $\{f < x\}$ непусто, т. е. если для некоторых $t \in T$, $x \in X$ будет $f(t) < x$, то, поскольку $f(t) < +\infty$, множество A_t непусто. Следовательно, существует такой элемент $y \in A_t$, что $y \leqslant x$. Так как $t \in U_y$, то по условию $t \in U_x$, и это доказывает включение $\{f < x\} \subset U_x$. Предположим теперь, что $t \in T$, $x \in X$ связаны соотношением $t \in U_x$. Ввиду того что оно равносильно включению $x \in A_t$, то $f(t) \leqslant x$, и доказательство достаточности завершено.

Пусть, как и в лемме 1, имеется множество $X \subset \overline{\mathbf{R}}$ и два семейства $\{U_x\}$ $(x \in X)$ и $\{V_x\}$ $(x \in X)$ подмножеств множества T. Пусть f и g — такие заданные на T функции, что

$$\{f < x\} \subset U_x \subset \{f \leqslant x\},$$
$$\{g < x\} \subset V_x \subset \{g \leqslant x\} \qquad (x \in X). \tag{4}$$

I. *Если $f \leqslant g$* [23]*, то $V_y \subset U_x$ для любых $x, y \in X$ таких, что $y < x$. Если X плотно в $\overline{\mathbf{R}}$ и для любых $x, y \in X$ таких, что $y < x$, имеем $V_y \subset U_x$, то $f \leqslant g$.*

Допустим, что $f \leqslant g$. Тогда из (4) получаем

$$V_y \subset \{g \leqslant y\} \subset \{f \leqslant y\} \subset \{f < x\} \subset U_x$$
$$(x,\ y \in X;\ y < x).$$

Предположим теперь, что X плотно в $\overline{\mathbf{R}}$ и $V_y \subset U_x$ для любых $x, y \in X$; $y < x$. Возьмем $t \in T$. Доказывая неравенство $f(t) \leqslant g(t)$, можно считать, что $g(t) < +\infty$. Пусть r — вещественное число, большее $g(t)$. Так как промежуток $(g(t), r)$ представляет собой непустое открытое множество в $\overline{\mathbf{R}}$, а X плотно в $\overline{\mathbf{R}}$, то найдется $x \in X \cap (g(t), r)$. Заменяя здесь r на x, найдем число $y \in X \cap (g(t), x)$. Таким образом, существуют числа $x, y \in X$, для которых $g(t) < y < x < r$. Тогда $t \in \{g < y\} \subset \subset V_y \subset U_x \subset \{f \leqslant x\} \subset \{f < r\}$, так что $f(t) < r$. В силу произвольности r получаем отсюда, что $f(t) \leqslant g(t)$.

II. *Если X — плотное в $\overline{\mathbf{R}}$ множество и $\{U_x\}$ $(x \in X)$ — возрастающее семейство подмножеств множества T, то функция f, удовлетворяющая соотношениям (2), единственна.*

В самом деле, если для функции g также соблюдены соотношения, аналогичные (2), то, полагая в I $V_x = U_x$ $(x \in X)$, получим, что $f \leqslant g$ и одновременно $g \leqslant f$.

III. *В условиях предложения* II *имеем*

$$\{f < r\} = \bigcup_{x \in X \cap [\leftarrow, r)} U_x, \quad \{f \leqslant r\} = \bigcap_{x \in X \cap (r, \rightarrow]} U_x. \tag{5}$$

В самом деле, согласно (3) при $x < r$ $(x \in X)$ имеем $U_x \subset \subset \{f < r\}$. Если, с другой стороны, предположить, что $f(t) < r$ $(t \in T, r \in \overline{\mathbf{R}})$, то в промежутке $(f(t), r)$ можно указать число y, входящее в X, и следовательно, $t \in \{f < x\} \subset U_x$.

Аналогично проверяется и второе из равенств (5).

6.2. К условиям предыдущего пункта добавим предположение о том, что множество T снабжено топологией — это позволит рассматривать непрерывные функции на T.

---

[23] Порядок в множестве $\overline{\mathbf{R}}^T$, как обычно, покоординатный.

Поскольку при любом $x \in \overline{\mathbf{R}}$ множества $[\leftarrow, x)$ и $(x, \rightarrow]$ открыты, а множества $[\leftarrow, x]$ и $[x, \rightarrow]$ замкнуты в $\overline{\mathbf{R}}$ (с интервальной топологией, см. 1.8), то в случае, когда f — непрерывная на T функция, множества $\{f < x\}$ и $\{f > x\}$ открыты, а множества $\{f \leqslant x\}$ и $\{f \geqslant x\}$ замкнуты (см. теорему 3(2.II).) Как было сказано в замечании 2 к упомянутой теореме, отмеченные свойства лебеговских множеств функции f оказываются достаточными для непрерывности функции f на T.

Лемма 2. Пусть X — плотное множество в $\overline{\mathbf{R}}$ и $\{U_x\}$ $(x \in X)$ — семейство множеств топологического пространства T. Тогда для существования непрерывной на T функции f, удовлетворяющей соотношениям (2), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{U}_y \subset U_x^\circ \qquad (x, y \in X;\ y < x). \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Если функция f с указанными в формулировке свойствами существует, то при любом $x \in X$ в силу замкнутости множества $\{f \leqslant x\}$ и открытости множества $\{f < x\}$ имеем $\{f<x\} \subset U_x^0 \subset \overline{U}_x \subset \{f \leqslant x\}$. Поэтому, полагая в предложении I(6.1) $f = g$ и принимая в качестве U_x множества U_x°, а в качестве V_x — множества $\overline{U}_x$ $(x \in X)$, придем к (6).

Достаточность. Пусть выполнены условия (6). Наряду с семейством $\{U_x\}$ $(x \in X)$ рассмотрим еще семейства $\{V_x'\}$ $(x \in X)$ и $\{V_x''\}$ $(x \in X)$, где $V_x' = U_x^\circ$, $V_x'' = \overline{U}_x$. Условие (6) обеспечивает соблюдение условий леммы 1 для всех трех семейств, в связи с чем можно утверждать существование таких заданных на T функций f, g, h, что для каждой из них выполнено соотношение вида (2):

$$\{f < x\} \subset U_x \subset \{f \leqslant x\},\ \{g < x\} \subset V_x' \subset \{g \leqslant x\},$$
$$\{h < x\} \subset V_x'' \subset \{h \leqslant x\} \qquad (x \in X).$$

Если $y < x$ $(x, y \in X)$, то $U_y \subset U_x \subset \overline{U}_x = V_x''$, а $V_y' = U_y^\circ \subset U_y \subset U_x$ и, следовательно, в силу предложения I(6.1) $h \leqslant f$ и $f \leqslant g$. С другой стороны, переписывая соотношение (6) в виде $V_y'' \subset V_x'$ $(x, y \in X,\ y < x)$, опять с помощью предложения I(6.1) заключаем, что $g \leqslant h$. Стало быть, $f = g = h$.

Согласно (5), можем написать

$$\{f < r\} = \{g < r\} = \bigcup_{x \in X \cap [\leftarrow, r)} V_x',$$
$$\{f \leqslant r\} = \{h \leqslant r\} = \bigcap_{x \in X \cap (r, \rightarrow]} V_x'' \qquad (r \in \overline{\mathbf{R}}).$$

Но V'_x открыто, а V''_x замкнуто при любом $x \in X$, так что $\{f < r\}$ открыто, а $\{f \leqslant r\}$ замкнуто для каждого $r \in \overline{\mathbf{R}}$. Остается воспользоваться замечанием 2 к теореме 3(2.II).

Обозначим через D множество всех двоично-рациональных чисел, содержащихся в промежутке $[0, 1]$, т. е. $D = W \cap [0,1]$ (см. 4.6).

Лемма 3. *Пусть T — T_4-пространство, E — замкнутое множество в T и U — открытая окрестность множества E. Тогда существует такое семейство $\{U_r\}$ $(r \in D)$ множеств пространства T, что*

а) $U_0 = E$, $U_1 = U$;

б) *если* r', $r'' \in D$ *и* $r' = r''$, *то* $U_{r'} = U_{r''}$;

в) *если* r', $r'' \in D$ *и* $r' < r''$, *то* $U_{r'} < U_{r''}$.

Доказательство. Полагая $U_0 = E$, $U_1 = U$, допустим, что при некотором $n \in \mathbf{N}$ построено семейство $\{U_r\}$ $(r \in D_n)$, где $D_n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} W_m \cap [0,1]$, а $W_m = \{r \in W : r = k/2^m$, $k=0, 1, \ldots, 2^m\}$ (см. 4.6), обладающее свойствами, подобными высказанным в формулировке леммы. Покажем возможность построения аналогичного семейства для $n+1$.

Отметим прежде всего, что семейство с множеством индексов D_{n+1} будет распространением имеющегося семейства $\{U_r\}$ $(r \in D_n)$. Пусть $r \in W_{n+1} \cap [0, 1]$, $r = k/2^{n+1}$. Если k — четное, допустим $k = 2s$, тогда $r' = s/2^n \in D_n$ и, принимая во внимание сделанное предположение, положим $U_r = U_{r'}$. Рассмотрим случай, когда $k = 2s+1$ $(s = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$. Так как согласно предположению $\overline{U}_q \subset \overset{\circ}{U}_{q'}$, где $q = s/2^n$, $q' = (s+1)/2^n$, то множество $\overset{\circ}{U}_{q'}$ — окрестность замкнутого множества $\overline{U}_q$. Поскольку T — T_4-пространство, согласно предложению V(1.7) найдется такая замкнутая окрестность V множества $\overline{U}_q$, что $V \subset \overset{\circ}{U}_{q'}$. Полагая $U_r = V$, имеем тем самым

$$\overline{U}_q \subset \overset{\circ}{U}_r \subset U_r \subset \overline{U}_r \subset \overset{\circ}{U}_{q'}. \tag{7}$$

Убедимся в том, что семейство $\{U_r\}$ $(r \in D_{n+1})$ удовлетворяет требованиям, подобным условиям б), в) леммы, при этом ввиду простоты проверки первого из них ограничимся лишь проверкой второго. Пусть r', $r'' \in D_{n+1}$. Учитывая имеющееся предположение, можно считать, что по крайней мере одно из r', r'' принадлежит множеству $W_{n+1} \cap [0, 1]$. Допустим, что $r' \in W_{n+1} \cap [0, 1]$, $r'' \in D_n$ и $r' = k/2^{n+1} < l/2^m = r''$. Если k — четно, то попадаем под влияние предположения. Пусть

$k = 2s + 1$ $(s = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$. Заметим, что в этом случае

$$\frac{s+1}{2^n} = \frac{k+1}{2^{n+1}} < \frac{l}{2^m} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{l+1}{2^m},$$

откуда $(s+1)/2^n \leqslant l/2^m = r''$. Используя предположение, с учетом (7) получаем, что

$$\overline{U}_{r'} \subset \overset{\circ}{U}_{(s+1)/2^n} \subset \overline{U}_{(s+1)/2^n} \subset \overset{\circ}{U}_{r''}.$$

Аналогично можно рассмотреть случай $r' \in D_n$, $r'' \in W_{n+1} \cap \cap [0, 1]$.

Пусть $r', r'' \in W_{n+1} \cap [0, 1]$, $r' < r''$ и $r' = k/2^{n+1}$, $r'' = l/2^{n+1}$. В этой ситуации k и l нечетны и $k < l$. Тогда

$$\frac{k}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^{n+1}} = p' \leqslant \frac{l-1}{2^{n+1}} = p'' < \frac{l}{2^{n+1}},$$

а учитывая четность чисел $k+1$, $l-1$ и используя предположения и результаты рассмотренных случаев, имеем

$$\overline{U}_{r'} \subset \overset{\circ}{U}_{p'} \subset \overset{\circ}{U}_{p''} \subset \overline{U}_{p''} \subset \overset{\circ}{U}_{r''}.$$

Ссылка на принцип индукции завершает доказательство леммы.

6.3. Доказанные леммы лежат в основе следующего важного факта теории непрерывных функций, известного под названием *теоремы Урысона*.

Теорема 1(6.II). *Пусть T — T_4-пространство. Каковы бы ни были замкнутое множество $E \subset T$ и его окрестность U, существует непрерывная на T функция f такая, что*

$$f(t) = 0 \ (t \in E); \ f(t) = 1 \ (t \in T \setminus U); \ f[T] \subset [0, 1]. \tag{8}$$

Доказательство. Определим семейство $\{V_r\}$ $(r \in W)$, полагая

$$V_r = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } r < 0, \\ U_r, & \text{если } r \in D, \\ T, & \text{если } r > 1, \end{cases}$$

где U_r $(r \in D)$ — множества семейства, фигурирующего в лемме 3. Проверим, что семейство $\{V_r\}$ $(r \in W)$ удовлетворяет условию (6). Действительно, пусть $r', r'' \in W$ и $r' < r''$. Если хотя бы одно из r', r'' не входит в промежуток $[0, 1]$, то (6) выполнено тривиальным образом. В том случае, когда $0 \leqslant r' < r'' \leqslant 1$, требуемое свойство следует непосредственно из последнего условия леммы 3. Таким образом, в силу леммы 2 существует непрерывная на T функция, для которой соблюдены соотношения (2). Так как $V_r = \varnothing$ для $r < 0$ $(r \in W)$, а $V_r = T$ при $r > 1$ $(r \in W)$, то согласно (5) $\{f < 0\} = \varnothing$ и $\{f \leqslant 1\} = T$, следовательно, все значения функции f лежат в промежутке $[0, 1]$. Если $t \in E$, то $t \in V_0 \subset \{f \leqslant 0\}$, поэтому $f(t) = 0$. Так как, с другой стороны, $V_1 \supset \{f < 1\}$, то вне множества V_1, тем более вне U, все значения функции f равны единице. Итак, функция f удовлетворяет требованиям теоремы.

Замечание. Если E — замкнутое множество, а U — его окрестность, то непрерывную на T функцию f, удовлетворяющую соотношениям (8), будем называть *урысоновской функцией пары* (E, U).

Покажем, что справедлив факт, обратный результату теоремы, т. е. из существования урысоновской функции для любой пары (E, U) ($E \subset T$ — непустое замкнутое множество, U — его окрестность) можно утверждать, что T является T_4-пространством. Действительно, если $\varnothing \neq E \subset T$ — произвольное замкнутое множество, U — какая-либо его окрестность и f — урысоновская функция пары (E, U), то множество $V = \{f \leqslant 1/2\}$ замкнуто и его внутренность содержит множество $\{f < 1/2\}$, которое, в свою очередь, содержит E. Таким образом, фильтр окрестностей замкнутого множества $E \subset T$ имеет базис, состоящий из замкнутых множеств, и на основании предложения V(1.7) заключаем о том, что T — T_4-пространство.

Теорему Урысона иногда бывает удобнее использовать в несколько иной формулировке.

Следствие 1. *Пусть E_1, E_2 — непересекающиеся замкнутые множества топологического T_4-пространства T. Тогда существует непрерывная на T функция f такая, что*

$$f(t) = 0 \quad (t \in E_1); \quad f(t) = 1 \quad (t \in E_2); \quad f[t] \subset [0, 1]. \tag{9}$$

В самом деле, дополнение U множества E_2 открыто и содержит E_1, стало быть, U — окрестность множества E_1. Урысоновская функция пары (E_1, U) удовлетворяет, очевидно, соотношениям (9).

В нормальном пространстве одноточечные множества замкнуты, поэтому справедливо

Следствие 2. *Нормальное пространство вполне регулярно* (*см. пункт* 5.4).

Глава III

РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В настоящей главе содержится формальное изложение одной из основных используемых в анализе структур — структуры равномерного пространства, основанной на интуитивном понятии взаимной удаленности пар элементов данного множества. Следует отметить, что структура равномерного пространства естественным образом порождает структуру топологического пространства, которая в свою очередь обладает известной квалификацией (по этому поводу несколько слов было сказано в II.5.4). Таким образом, в рамках теории равномерных пространств можно вести речь и о понятиях и фактах, присущих структуре топологического пространства. Структура равномерного пространства отражает наиболее адекватное действительности понятие удаленности, как взаимной, равноправной, так что, по-видимому, она и должна иметь больший (по сравнению со структурой топологического пространства) вес в тех вопросах, где существенна структура близости.

§ 1. РАВНОМЕРНОСТЬ

В этом параграфе будет дано определение равномерного пространства и приведены элементарные его свойства.

1.1. Рассмотрим множество X. Фильтр $\mathfrak{B}$ в X^2 (т. е. собственный фильтр в упорядоченном по включению множестве $\mathfrak{P}(X^2)$) называется *равномерностью на* X, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) каждое множество фильтра $\mathfrak{B}$ содержит диагональ [1] Δ в X;

2) с каждым множеством $U \in \mathfrak{B}$ в фильтр $\mathfrak{B}$ входит симметричное U множество U^{-1};

3) для любого $V \in \mathfrak{B}$ найдется $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $U^{[2]} = U \circ U \subset V$ [2].

[1]) В текущем разделе нам удобно отношение тождества I_X в X называть *диагональю* в X и обозначать через Δ.

[2]) Суперпозиция n экземпляров множества $U \subset X^2$, т. е. множество $\underbrace{U \circ U \circ \ldots \circ U}_{n}$, обозначается через $U^{[n]}$ (см. I.2.2).

Фильтр $\mathfrak{B}$ называют также *фильтром окружений диагонали* (в X) или, если достаточно ясно о чем идет речь, просто *фильтром окружений*. Каждое множество $U \in \mathfrak{B}$ называется *окружением диагонали* в X, или просто *окружением* (в X). Если на некотором множестве X задана равномерность, говорят, что на X задана структура равномерного пространства. Как правило, фильтр окружений будем обозначать через $\mathfrak{B}$.

Упорядоченная пара $(X, \mathfrak{B})$, где X — множество, а $\mathfrak{B}$ — равномерность на X, называется *равномерным пространством* (с равномерностью $\mathfrak{B}$). Элементы множества X будем называть при этом *точками* равномерного пространства $(X, \mathfrak{B})$, а подмножества множества X — *множествами в равномерном пространстве* $(X, \mathfrak{B})$. В дальнейшем, как обычно в подобных ситуациях, мы нередко будем опускать указание равномерности и говорить просто о равномерном пространстве X, если, конечно, такая вольность речи не приведет к недоразумениям.

В определении равномерности можно было ограничиться предфильтром в X^2 в том смысле, что если $\mathfrak{B}$ — предфильтр в X^2, обладающий свойствами 1—3, то (единственный) фильтр $\widetilde{\mathfrak{B}}$ в X^2, порожденный предфильтром $\mathfrak{B}$, оказывается равномерностью на X. С другой стороны, если $\mathfrak{B}$ — равномерность на X и $\mathfrak{W}$ — какой-либо базис фильтра $\mathfrak{B}$, что $\mathfrak{W}$, понятно, обладает свойствами 1—3.

Укажем два простых примера равномерных пространств. Пусть X — некоторое множество. Фильтр в X^2, включающий в себя все подмножества X^2, содержащие диагональ, удовлетворяет, очевидно, всем условиям определения равномерности. Такая равномерность называется *дискретной*. С другой стороны, в качестве фильтра окружений можно взять $\mathfrak{B} = \{X^2\}$ — фильтр, состоящий из единственного множества X^2. Такую равномерность на X^2 называют *вырожденной*, или *антидискретной*.

Отметим некоторые свойства равномерности на X.

I. *Фильтр $\mathfrak{B}$ окружений в X обладает базисом, состоящим из симметричных множеств.*

Для доказательства достаточно заметить, что для любого $V \in \mathfrak{B}$ множество $V \cap V^{-1}$ симметрично, входит в $\mathfrak{B}$ и содержится в V.

II. *Для любого окружения $V \in \mathfrak{B}$ и любого натурального числа n найдется такое окружение $U \in \mathfrak{B}$, что $U^{[n]} \subset V$.*

Действительно, если $n = 1$, можно взять $U = V$. Допустим, что для некоторого натурального n указанный в предложении факт установлен. Воспользовавшись условием 3 определения равномерности, возьмем такое окружение W, что $W \circ W \subset V$, а опираясь на сделанное допущение, найдем такое $U \in \mathfrak{B}$, что

$U^{[n]} \subset W$. Тогда, используя ассоциативность суперпозиции, напишем:

$$U^{[n+1]} = U^{[n+1]} \circ \Delta^{[n-1]} \subset U^{[n+1]} \circ U^{[n-1]} =$$
$$= U^{[n]} \circ U^{[n]} \subset W \circ W \subset V.$$

Ссылка на принцип индукции завершит доказательство предложения.

Пусть x — точка равномерного пространства X. Образуем совокупность $\mathfrak{V}_x = \{V\{x\} : V \in \mathfrak{V}\}$ — образов точки x при всевозможных окружениях из фильтра $\mathfrak{V}$. Учитывая то обстоятельство, что $\mathfrak{V}$ — фильтр в X^2, нетрудно показать, что $\mathfrak{V}_x$ $(x \in X)$ — фильтр в X, причем $x \in V\{x\}$ $(x \in X,\ V \in \mathfrak{V})$. Таким образом, отображение $\tau : x \mapsto \mathfrak{V}_x$ $(x \in X)$ — предтопология на X.

Покажем, что внутренность A° каждой окрестности $A = V\{x\}$ точки $x \in X$ — также окрестность этой точки. Действительно, пусть U — такое окружение, что $U \circ U \subset V$. Если $y \in U\{x\}$, то $U\{y\} \subset U[U\{x\}] \subset V\{x\}$, так что всякая такая точка y — внутренняя точка множества $V\{x\}$, откуда получаем, что $U\{x\} \subset A^\circ$, следовательно, $A^\circ \in \mathfrak{V}_x$.

Как мы смогли убедиться, предтопология τ оказывается топологией на X, которую называют *топологией равномерного пространства* $(X, \mathfrak{V})$, или топологией, *ассоциированной с равномерностью* $\mathfrak{V}$ на X, или просто *равномерной топологией.* Как правило, мы не будем давать указателя равномерности к обозначении равномерной топологии, а в случае необходимости ассоциированную с равномерностью $\mathfrak{V}$ топологию будем обозначать через $\tau_{\mathfrak{V}}$.

Отметим, что если $\mathfrak{U}$ — базис равномерности $\mathfrak{V}$, то при каждом $x \in X$ совокупность $\mathfrak{U}_x = \{U\{x\} : U \in \mathfrak{U}\}$ — базис фильтра $\tau_{\mathfrak{V}}(x)$ окрестностей точки $x \in X$.

Понятно, что топология дискретной равномерности — дискретная топология, с антидискретной равномерностью ассоциируется вырожденная топология.

Говоря о свойствах топологического пространства с равномерной топологией, мы будем нередко допускать вольность речи и говорить о них как о свойствах равномерного пространства. Например, выражение «отделимое равномерное пространство X» или «бикомпактное равномерное пространство X» надо понимать так: «топологическое пространство X с равномерной топологией отделимо» или соответственно «топологическое пространство X с равномерной топологией бикомпактно». Такая терминология вряд ли приведет к недоразумениям — равномерная топология целиком и полностью определяется заданием равномерной структуры, и из контекста обычно ясно, о чем идет речь в том или ином случае.

Рассмотрим непустое множество X_0 в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{V})$. Совокупность $\mathfrak{V}_0 = \{V \cap X_0^2 : V \in \mathfrak{V}\}$ подмножеств множества X_0^2, очевидно, представляет собой фильтр в X_0^2. Исходя из того, что $\mathfrak{V}$ — равномерность на X, нетрудно показать, что $\mathfrak{V}_0$ — равномерность на X_0, о которой говорят, что она *индуцирована на* X_0 *равномерностью* $\mathfrak{V}$ на X. Равномерное пространство $(X_0, \mathfrak{V}_0)$ в такой ситуации называют *подпространством равномерного пространства* $(X, \mathfrak{V})$.

Пусть τ — топология на X, ассоциированная с равномерностью $\mathfrak{V}$, а τ_0 — топология на X_0, ассоциированная с равномерностью $\mathfrak{V}_0$. Поскольку фильтр окружений $\mathfrak{V}_0$ состоит в точности из множеств $V \cap X_0^2$, где $V \in \mathfrak{V}$, то фильтр окрестностей точки $x \in X_0$ в равномерной топологии составлен из множеств $X_0 \cap V\{x\}$ $(V \in \mathfrak{V})$. Следовательно, равномерная топология τ_0 подпространства $(X_0, \mathfrak{V}_0)$ равномерного пространства $(X, \mathfrak{V})$ совпадает с топологией подпространства топологического пространства (X, τ), порожденного данной равномерностью.

1.2. Множество $\mathfrak{R}(X)$ всех равномерностей на X, представляющее собой часть упорядоченного по включению множества $\mathbf{F}(X)$ всех фильтров в $\mathfrak{P}(X)$ (см. I.7.1), будет в дальнейшем снабжено индуцированным из $\mathbf{F}(X)$ отношением порядка. При этом, если $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ — две равномерности на X и $\mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}_2$, то будем говорить, что $\mathfrak{V}_1$ *слабее, чем* $\mathfrak{V}_2$, или что $\mathfrak{V}_2$ *сильнее, чем* $\mathfrak{V}_1$. Порядок в $\mathbf{F}(X)$ обозначим через σ, а его сужение на $\mathfrak{R}(X)$ — через σ_0.

Рассмотрим некоторое множество $\mathfrak{H}$ равномерностей на X. Согласно предложению III(I.7.2), в множестве $\mathbf{F}(X)$ существуют точные границы множества $\mathfrak{H}$, причем

$$(\sigma)\text{-}\inf \mathfrak{H} = \bigcap_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{H}} \mathfrak{V}, \qquad (\sigma)\text{-}\sup \mathfrak{H} = \overline{\bigcup_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{H}} \mathfrak{V}}.$$

Поскольку, как очевидно, каждый из фильтров (σ)-inf $\mathfrak{H}$, (σ)-sup $\mathfrak{H}$ содержит диагональ, то эти фильтры — собственные в $\mathfrak{P}(X)$. Так как множество $\mathfrak{R}(X)$ обладает, понятно, наименьшим и наибольшим элементами — ими оказываются соответственно вырожденная и дискретная равномерности, можно ограничиться рассмотрением случая, когда $\mathfrak{H} \neq \varnothing$. Ясно, что фильтры (σ)-inf $\mathfrak{H}$, (σ)-sup $\mathfrak{H}$ с каждым множеством содержат ему симметричное, так что оба эти фильтра удовлетворяют второму условию определения равномерности. Однако при анализе последнего, третьего, условия приходится констатировать, что (σ)-inf $\mathfrak{H}$ равномерностью, вообще говоря, может не оказаться. Лучше дело обстоит с точной верхней границей. Пусть $V \in (\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H}$. Как отмечено в пункте I.7.2, это означает, что существуют такое конечное множество $\{\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ и такие множества $V_k \in \mathfrak{V}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, что $\bigcap_{k=1}^{n} V_k \subset V$. Воспользовавшись третьим условием определения равномерности применительно к равномерностям $\mathfrak{V}_1, \ldots, \mathfrak{V}_n$, найдем такие множества $U_k \in \mathfrak{V}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, что $U_k \circ U_k \subset V_k$ при $k = 1, \ldots, n$. Поскольку, как нетрудно понять, имеют место соотношения

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\right) \circ \left(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} U_k \circ U_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k \subset V$$

и, кроме того,

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k \in (\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H},$$

приходим к выводу о том, что $(\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H}$ — равномерность на X, т. е. что $(\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H} \in \mathfrak{R}(X)$. Используя результат предложения I(I.3.4), заключаем, что $(\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H}$ есть точная верхняя граница множества $\mathfrak{H}$ в упорядоченном множестве $\mathfrak{R}(X)$, т. е. что $(\sigma)\text{-sup}\,\mathfrak{H} = (\sigma_0)\text{-sup}\,\mathfrak{H}$.

Итак, каждое множество равномерностей на X имеет точную верхнюю границу. В силу предложения I(I.3.3) тогда каждое множество в $\mathfrak{R}(X)$ обладает и точной нижней границей. При этом

$$(\sigma_0)\text{-inf}\,\mathfrak{H} \subset (\sigma)\text{-inf}\,\mathfrak{H} = \bigcap_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{H}} \mathfrak{V},$$

причем, в отличие от точных верхних границ, включение может оказаться строгим.

Подводя итог проведенным рассуждениям, сформулируем такое предложение.

I. *Множество $\mathfrak{R}(X)$ всех равномерностей на данном множестве X, будучи упорядоченным по включению, представляет собой полную решетку (см. I.7.2). При этом точная верхняя граница множества $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{R}(X)$ есть не что иное, как его точная верхняя граница в упорядоченном множестве всех фильтров в $\mathfrak{P}(X)$.*

Обозначим через $\tau_{\mathfrak{V}}$ топологию, ассоциированную с равномерностью $\mathfrak{V}$ на X. Если $\mathfrak{V}'$, $\mathfrak{V}''$ — равномерности на X и $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}''$, то, как следует непосредственно из соответствующих определений, $\tau_{\mathfrak{V}'} \leqslant \tau_{\mathfrak{V}''}$ — с более сильной равномерностью ассоциируется и более сильная топология.

Рассмотрим множество $\mathfrak{H}$ равномерностей на X. Вспоминая структуру точных верхних границ множеств $\mathfrak{H}$ и $\{\tau_{\mathfrak{V}} : \mathfrak{V} \in \mathfrak{H}\}$ и используя соотношение

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)\{x\} = \bigcap_{k=1}^{n} V_k\{x\} \quad (x \in X;\, V_k \in \mathfrak{V}_k,\, \mathfrak{V}_k \in \mathfrak{H},\ k=1,\ldots,n)$$

(см. V (I. 2. 3)), нетрудно прийти к равенству

$$\tau_{\sup \mathfrak{H}} = \sup_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{H}} \tau_{\mathfrak{V}},$$

которое означает перестановочность операций взятия точной верхней границы и перехода к ассоциированной топологии — безразлично, сначала ли найти точную верхнюю границу данного множества равномерностей, а затем перейти к ассоциированной с ней топологии, или сначала перейти к ассоциированной топологии для каждой равномерности из данного множества, а затем найти точную верхнюю границу полученного множества. Результат в обоих случаях получится один и тот же.

Для точных нижних границ можно утверждать только, что $\tau_{\inf \mathfrak{H}} \leqslant \inf\limits_{\mathfrak{V} \in \mathfrak{H}} \tau_{\mathfrak{V}}$. Убедиться в этом предоставим читателю.

1.3. Рассмотрим равномерное пространство X и снабдим X^2 топологией произведения (равномерных топологий на X). Обсудим некоторые топологические свойства подмножеств X^2 в указанной топологии. При этом основным техническим средством будет служить напоминаемое нами соотношение (13) из § 2 гл. I:

$$V_1 \circ V_2 \circ V_3 = \bigcup_{(x,y) \in V_2} V_3^{-1}\{x\} \times V_1\{y\} \qquad (V_1, V_2, V_3 \subset X^2). \quad (1)$$

Отметим, что фильтр окрестностей точки $(x, y) \in X^2$ в топологии произведения равномерных топологий порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью произведений $U\{x\} \times V\{y\}$ $(U, V \in \mathfrak{V})$. Нетрудно показать, что совокупность множеств $U\{x\} \times U\{y\}$ $(U \in \mathfrak{V})$, а также совокупности $\{U\{x\} \times U^{-1}\{y\} : U \in \mathfrak{V}\}$ и $\{U^{-1}\{x\} \times U\{y\} : U \in \mathfrak{V}\}$ составляют базис фильтра окрестностей точки (x, y).

I. *Пусть $A \subset X^2$ и V — окружение. Тогда множество $V \circ A \circ V$ — окрестность множества A.*

Действительно, для любого окружения $V \in \mathfrak{V}$ множество $V^{-1}\{x\} \times V\{y\}$ служит окрестностью точки $(x, y) \in X^2$, так что в силу (1) $V \circ A \circ V = \bigcup\limits_{(x,y) \in A} V^{-1}\{x\} \times V\{y\}$ — окрестность множества A (см. II.1.7).

II. *Замыкание* $\overline{A}$ *множества* $A \subset X^2$ *совпадает с множеством* $\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V \circ A \circ V$.

Действительно, если $(x, y) \in \overline{A}$, то (x, y) входит в любую окрестность множества A, в частности $(x, y) \in V \circ A \circ V$ для каждого $V \in \mathfrak{B}$, т. е. $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V \circ A \circ V$.

Обратно, пусть $(x, y) \in \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V \circ A \circ V$. Это означает, что для любого окружения $V \in \mathfrak{B}$ найдется такая точка $(u, v) \in A$, что $(x, u) \in V$, $(y, v) \in V^{-1}$. Последнее соотношение равносильно тому, что $u \in V\{x\}$, $v \in V^{-1}\{y\}$ или что $(u, v) \in V\{x\} \times V^{-1}\{y\}$. Поскольку совокупность $\{V\{x\} \times V^{-1}\{y\} : V \in \mathfrak{B}\}$ — базис фильтра окрестностей точки (x, y), то ввиду II(II.1.4) $(x, y) \in \overline{A}$.

III. *Замыкание диагонали совпадает с пересечением всех множеств из фильтра окружений диагонали:* $\overline{\Delta} = \bigcap_{U \in \mathfrak{B}} U$.

В самом деле, согласно предложению II имеем $\overline{\Delta} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V \circ \Delta \circ V$. Поскольку $V \circ \Delta \circ V = V \circ V$, а в силу условия 3 определения равномерности суперпозиции $V \circ V$ всевозможных окружений $V \in \mathfrak{B}$ образуют базис фильтра окружений, то $\overline{\Delta} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V \circ V = \bigcap_{U \in \mathfrak{B}} U$.

Отметим, что в предложениях II, III без всякого ущерба фильтр окружений можно заменить каким-либо его базисом.

IV. *Равномерное пространство отделимо в том и только в том случае, если* $\overline{\Delta} = \Delta$.

Действительно, если $(x, y) \in \overline{\Delta}$, то согласно предложению III $y \in \bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V\{x\}$, и в случае отделимости равномерного пространства должно быть $y = x$ (см. предложение I(II.1.7)), так что $\overline{\Delta} = \Delta$. Если допустить выполнение равенства $\overline{\Delta} = \Delta$, то в этом случае $\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V\{x\} = \{x\}$, так что X отделимо.

V. *Открытые в* X^2 *окружения образуют базис фильтра окружений.*

В самом деле, пусть $V \in \mathfrak{B}$ и U — такое симметричное окружение, что $U^{[3]} \subset V$. В силу предложения I множество $U^{[3]}$ — окрестность окружения U, следовательно, внутренность V° множества V содержит U и является, тем самым, окружением диагонали, содержащимся в V и, очевидно, открытым.

VI. *Замкнутые в* X^2 *окружения образуют базис фильтра окружений.*

Действительно, взяв $V \in \mathfrak{V}$, найдем симметричное окружение U так, что $U^{[3]} \subset V$. Пусть $(x, y) \in \overline{U}$. Тогда, поскольку $U\{x\} \times U\{y\}$ — окрестность точки (x, y), то $W = (U\{x\} \times \times U\{y\}) \cap U \neq \varnothing$. Возьмем $(u, v) \in W$. Тогда $(x, u) \in U$, $(y, v) \in U$, $(u, v) \in U$ и в силу симметричности U имеем $(x, y) \in U^{[3]} \subset V$, так что $(x, y) \in V$. Тем самым $\overline{U} \subset V$, что и требовалось доказать.

Из результата предложения V следует, что всякое окружение диагонали служит ее окрестностью. Следует иметь в виду, что обратное, вообще говоря, неверно, т. е. в общем случае не всякая окрестность диагонали есть ее окружение. Однако иногда такой факт имеет место.

VII. *Фильтр окружений диагонали бикомпактного равномерного пространства X совпадает с фильтром ее окрестностей.*

Учитывая отмеченное выше свойство, достаточно убедиться в том, что любая окрестность диагонали служит ее окружением. Пусть U — окрестность диагонали. Можно считать, что множество U открыто в X^2. Поскольку $U\{x\}$ — окрестность точки x, найдется такое окружение $V_x \in \mathfrak{V}$, что $V_x\{x\} \subset U\{x\}$. Так как $\bigcap\limits_{V \in \mathfrak{V}} V = \overline{\Delta}$, то $U\{x\} \supset V_x\{x\} \supset \overline{\Delta}\{x\}$. Последнее соотношение справедливо для каждого $x \in X$, так что $U \supset \overline{\Delta}$, а учитывая, что U — открытое множество, получаем, что U служит окрестностью замыкания диагонали $\overline{\Delta}$. Фильтр окружений $\mathfrak{V}$ включает бикомпактное множество X^2, поэтому согласно теореме 4(2.II) $\mathfrak{V}$ тоньше фильтра окрестностей множества $L_{\mathfrak{V}} = \bigcap\limits_{V \in \mathfrak{V}} \overline{V} = \overline{\Delta} \subset U$. Следовательно, можно указать такое окружение $W \in \mathfrak{V}$, что $\overline{W} \subset U$, откуда $U \in \mathfrak{V}$.

Возьмем какой-либо элемент $x \in X$ и определим на X отображение $\varepsilon_x : y \mapsto (x, y)$, действующее в X^2. Если $F \subset X^2$, то $\varepsilon_x^{-1}[F] = \{y \in X : (x, y) \in F\} = F\{x\}$. В частности, если $A \times B$ — окрестность точки (x, y), то $\varepsilon_x^{-1}[A \times B] = B$ — окрестность точки y, так что отображение ε_x непрерывно в каждой точке $y \in X$. Непрерывность отображения ε_x на множестве X с помощью теоремы 3(2.II) позволяет сказать, что если F — открытое (замкнутое) множество в X^2, то $F\{x\} = \varepsilon_x^{-1}[F]$ открыто (соответственно замкнуто).

Поскольку совокупность всех замкнутых окружений согласно предложению VI составляет базис фильтра окружений, ввиду сказанного фильтр окрестностей данной точки $x \in X$ в равномерной топологии обладает базисом, состоящим из замкнутых множеств. Отсюда и из предложения IV(II.1.7) следует

VIII. *Всякое равномерное пространство является T_3-пространством.*

Если X — отделимое равномерное пространство, то оно регулярно, в частности, хаусдорфово.

1.4. Кратко обсудим свойства одного из основных частных случаев равномерного пространства — так называемого метрического пространства. Его значение обусловлено возможностью использования для оценки взаимного отклонения точек метрического пространства естественной «шкалы» — множества положительных вещественных чисел.

Пусть X — некоторое множество. Конечная вещественная функция ρ, заданная на произведении X^2, называется *метрикой на* X, если выполнены следующие условия:

1) $\rho[X^2] \subset [0, +\infty)$; $\rho^{-1}[0] = \Delta$[3]

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$ (*симметричность* метрики);

3) каковы бы ни были элементы $x, y, z \in X$, имеет место соотношение

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

называемое *неравенством треугольника.*

Если ρ — метрика на X и $x, y \in X$, то число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между элементами x и y (или от x до y). Упорядоченная пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*. Говорят также, что метрика ρ определяет на X структуру метрического пространства. В дальнейшем, если не оговорено, метрика на множестве X будет обозначаться буквой ρ, при этом, как и выше в подобных ситуациях, метрика ρ фигурирует в обозначениях метрического пространства лишь тогда, когда без этого возможны недоразумения.

Пусть ρ — метрика на X. Из неравенства треугольника по индукции следует, что

$$\rho(x_0, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \rho(x_{k-1}, x_k) \qquad (x_0, x_1, \ldots, x_n \in X; n \in \mathbf{N}). \tag{2}$$

Далее,

$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| \leqslant \rho(x, u) + \rho(y, v)$$
$$(x, y, u, v \in X). \tag{3}$$

[3] Если вместо равенства здесь требуется лишь выполнение включения $\rho^{-1}[0] \supset \Delta$, такую функцию ρ называют *полуметрикой* или *псевдометрикой* на X.

16*

Действительно, в силу симметричности метрики можно считать, что $\rho(x, y) \geqslant \rho(u, v)$. А тогда на основании соотношения (2) имеем

$$|\rho(x, y) - \rho(u, v)| = \rho(x, y) - \rho(u, v) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x, u) + \rho(u, v) + \rho(v, y) - \rho(u, v) = \rho(x, u) + \rho(v, y).$$

Множество $B_r = \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) \leqslant r\}$ ($r \in \mathbf{R}$, $r \geqslant 0$) метрического пространства X называют (замкнутым) *цилиндром* диаметра r, а множество $\overset{\circ}{B}_r = \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) < r\}$ — *открытым цилиндром* диаметра r.

Совокупность $\{B_r\}$ ($r \in \mathbf{R}$, $r > 0$) цилиндров в X, очевидно, фильтруется по убыванию. Из симметричности метрики ρ следует, что каждый цилиндр — симметричное множество. Далее, из неравенства треугольника можно вывести соотношение $B_r \circ B_r \subset B_{2r}$, так что фильтр $\mathfrak{B}_\rho$, порожденный фильтрующейся по убыванию совокупностью $\{B_r\}$ ($r > 0$), представляет собой равномерность на X, которую называют *равномерностью метрического пространства* (X, ρ), или *метрической равномерностью* на X.

Топологию, ассоциированную с равномерностью метрического пространства, называют *топологией метрического пространства* (X, ρ), или *метрической топологией*. Фильтр окрестностей точки $x \in X$ в этой топологии порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью $\{B_r\{x\}\}$ ($r > 0$). Множество $B_r\{x\}$ называется (замкнутым) *шаром* с центром в x и радиуса r. Нетрудно понять, что совокупность $\{\overset{\circ}{B}_r\{x\}\}$ ($r > 0$) *открытых шаров* с центром в x радиуса r также представляет собой базис фильтра окрестностей точки x в топологии метрического пространства X.

Укажем простой пример метрического пространства. Пусть X — некоторое множество. Функция ρ, сопоставляющая паре $(x, y) \in X^2$ число 1, если $x \neq y$, и число 0, если $x = y$, является, очевидно, метрикой на X, которую называют *дискретной*. Метрическое пространство (X, ρ) называют дискретным метрическим пространством. Легко проверить, что топология и равномерность дискретного метрического пространства дискретны.

Пусть R — множество $\mathbf{R}$ вещественных, или $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Функция $\rho : (x, y) \to |x - y|$ является, очевидно, метрикой на R. С множеством R обычно мы будем связывать равномерность, порожденную метрикой ρ. Отметим, что метрическая топология на множестве R совпадает с введенными ранее стандартными топологиями на $\mathbf{R}$ и на $\mathbf{C}$ (соответственно интервальной и топологией произведения, см. пункт II.1.10 и предложение III(II.3.1)).

I. *Метрика ρ непрерывна на X^2, снабженном топологией произведения.*

Пусть (x_0, y_0) — какая-либо точка из X^2. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Шары $B_\varepsilon\{x_0\}$, $B_\varepsilon\{y_0\}$ служат окрестностями точек x_0, y_0 соответственно, и согласно определению топологии произведения множество $B_\varepsilon\{x_0\} \times B_\varepsilon\{y_0\}$ — окрестностью точки (x_0, y_0). Для точек (x, y) из этой окрестности с учетом неравенства (3) имеем

$$|\rho(x_0, y_0) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(y_0, y) \leqslant 2\varepsilon,$$

откуда и следует непрерывность ρ в точке $(x_0, y_0) \in X^2$.

Из непрерывности метрики, используя результат теоремы 3(2.II), получаем топологические свойства цилиндров.

II. *Замкнутый цилиндр представляет собой замкнутое множество, открытый цилиндр — открытое множество в X^2 (с топологией произведения).*

Из топологических свойств цилиндров можно получить топологические свойства шаров.

III. *Замкнутый шар — замкнутое множество, открытый шар — открытое множество в метрической топологии.*

Кстати, не надо думать, что замыкание открытого шара $\overset{\circ}{B}_r\{x\}$ всегда совпадает с соответствующим замкнутым шаром $B_r\{x\}$.

Пусть $(X, \mathfrak{V})$ — равномерное пространство. Если можно указать метрику на X так, что равномерность $\mathfrak{V}$ совпадет с равномерностью $\mathfrak{V}_\rho$ метрического пространства (X, ρ), тогда равномерность $\mathfrak{V}$ называют *метризуемой*, а равномерное пространство $(X, \mathfrak{V})$ — *метризуемым.*

Отметим, что если $(X, \mathfrak{V})$ — метризуемое равномерное пространство и $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_\rho$, то фильтр $\mathfrak{V}$ обладает счетным базисом — в качестве такого базиса можно взять, например, совокупность цилиндров $\{B_{1/n} : n \in \mathbf{N}\}$. Далее, метризуемое равномерное пространство отделимо, что следует из результата предложения IV(1.3) и очевидных соотношений

$$\overline{\Delta} = \bigcap_{U \in \mathfrak{V}} \overline{U} \subset \bigcap_{r>0} B_r = \rho^{-1}\{0\} = \Delta.$$

Указанные свойства метризуемых пространств служат не только необходимыми, но и достаточными условиями метризуемости равномерного пространства.

Теорема 1(1.III). *Для метризуемости равномерного пространства $(X, \mathfrak{V})$ необходимо и достаточно, чтобы X было отделимым и фильтр $\mathfrak{V}$ обладал счетным базисом.*

Доказательство. Используя существование счетного базиса фильтра $\mathfrak{V}$, с помощью принципа индукции можно построить последовательность $\{U_n\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ окружений, состоящую из симметричных окружений, являющуюся базисом фильтра $\mathfrak{V}$ и такую, что $U_0 = X^2, U_{n+1}^{[3]} \subset U_n$ $(n = 0,1, \ldots)$. Зададим на X^2 функцию φ, полагая $\varphi(x, x) = 0$ $(x \in X)$ и на элементе $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ считая $\varphi(x, y) = 2^{-n}$, если $(x, y) \in U_k$ при $k = 0, 1, \ldots, n$, но $(x, y) \notin U_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Функция φ, очевидно, удовлетворяет первым двум условиям из предъявляемых к метрике, т. е. φ принимает положительные значения, в нуль обращается только на диагонали и симметрична.

Определим на X^2 функцию

$$\rho : (x, y) \mapsto \inf \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_{k-1}, x_k) : n \in \mathbf{N}, \right.$$

$$\left. x_k \in X, \ k = 0,1, \ldots, n; x_0 = x, x_n = y \right\}.$$

Из определения функции ρ легко следует, что она принимает положительные значения, симметрична и удовлетворяет неравенству треугольника. Так как $\rho(x, y) \leqslant \varphi(x, y)$, то в нуль функция ρ обращается только на диагонали. Из приведенного неравенства вытекает также, что цилиндр $B_r = \rho^{-1}[[0, r]]$ содержит все такие окружения U_k, у которых $2^{-k} < r$, следовательно, исходная равномерность $\mathfrak{V}$ сильнее равномерности метрического пространства (X, ρ).

Докажем, что $^1/_2\varphi(x, y) \leqslant \rho(x, y)$ $(x, y \in X)$. Отсюда немедленно будет следовать требуемое для окончательного вывода соотношение $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V}_\rho$, т. е. что $\mathfrak{V}_\rho$ сильнее, чем $\mathfrak{V}$. Действительно, достаточно показать, что при каждом $n \in \mathbf{N}$ и для любого конечного семейства $\{x_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, у которого $x_0 = x$, $x_n = y$, имеет место равенство

$$^1/_2\, \varphi(x, y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_{k-1}, x_k). \tag{4}$$

При $n = 1$ приходим к очевидному неравенству. Допустим, что при некотором натуральном n требуемое неравенство установлено для любого семейства, состоящего не более чем из n элементов. Рассмотрим семейство $\{x_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Положим $a = \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_{k-1}, x_k)$. Если $a \geqslant 1/2$, то неравенство (4) выполнено, поскольку $\varphi(x, y) \leqslant 1$. Поэтому рассмотрим случай, когда $a < 1/2$. Пусть

$$l = \sup \left\{ q \in \mathbf{N} : \sum_{k=1}^{q} \varphi(x_{k-1}, x_k) \leqslant a/2 \right\}.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{l} \varphi(x_{k-1}, x_k) \leqslant a/2, \qquad \sum_{k=1}^{l+1} \varphi(x_{k-1}, x_k) > a/2,$$

откуда $\sum_{k=l+1}^{n-1} \varphi(x_k, x_{k+1}) \leqslant a/2$. По предположению $\varphi(x, x_l) \leqslant$ $\leqslant 2 \sum_{k=1}^{l} \varphi(x_{k-1}, x_k) \leqslant a$, $\varphi(x_{l+1}, y) \leqslant 2 \sum_{k=l+1}^{n-1} \varphi(x_k, x_{k+1}) \leqslant a$. С другой стороны, очевидно, что $\varphi(x_l, x_{l+1}) \leqslant a$.

Пусть m — наименьшее из таких натуральных чисел h, что $2^{-h} \leqslant a$, тогда $m \geqslant 2$ и согласно определению функции φ имеем

$$(x, x_l) \in U_m, \ (x_l, x_{l+1}) \in U_m, \ (x_{l+1}, y) \in U_m.$$

Учитывая требования, предъявленные к последовательности окружений $\{U_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, получаем, что $(x, y) \in U_{m-1}$, так что $\varphi(x, y) \leqslant 2^{-m+1} \leqslant 2a$.

Итак, соотношение (4) доказано, а вместе с ним закончено и доказательство теоремы.

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЯ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Как при обсуждении рассмотренных ранее структур, так и в рамках структуры равномерного пространства большую роль играют такие отображения равномерных пространств, которые «сохраняют» данную структуру.

2.1. Рассмотрим равномерные пространства $(T, \mathfrak{W})$, $(X, \mathfrak{V})$ и отображение f, действующее из T в X. Определим на $D(f) \times \times D(f) \subset T^2$ действующее в X^2 отображение $\hat{f}: (s, t) \mapsto (f(s), f(t))$. В этой ситуации отображение f называют *равномерно непрерывным*, если $\hat{f}\langle \mathfrak{W} \rangle \supset \mathfrak{V}$ или, иначе говоря, если для любого окружения $U \in \mathfrak{V}$ можно указать такое окружение $V \in \in \mathfrak{W}$, что $\hat{f}[V] \subset U$, т. е. что $(f(s), f(t)) \in U$ для любой пары $(s,t) \in V$.

Если $D(f) = T$, то отображение f равномерно непрерывно в том и только в том случае, если прообраз $\hat{f}^{-1}[U]$ любого окружения $U \in \mathfrak{V}$ представляет собой окружение в T.

Заметим, что, говоря о равномерной непрерывности, можно ограничиться рассмотрением каких-либо базисов равномерностей на T и на X.

В том случае, если f — отображение из метрического пространства (T, η) в метрическое пространство (X, ρ), можно сказать, что его равномерная непрерывность равносильна следующему: для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $\rho(f(s), f(t)) \leqslant \varepsilon$ для любых $s, t \in D(f)$, у которых $\eta(s, t) \leqslant \delta$.

Укажем для отображения метрических пространств одно достаточное условие равномерной непрерывности. Говорят, что отображение f из (T, η) в (X, ρ) удовлетворяет *условию Липшица*, если найдется такое положительное число L, что $\rho(f(s), f(t)) \leqslant L\eta(s, t)$ для всех $s, t \in D(f)$. Число L называют константой Липшица. Очевидно, что удовлетворяющее условию Липшица отображение метрических пространств равномерно непрерывно. Следует иметь в виду, что не всякое равномерно непрерывное отображение метрических пространств удовлетворяет условию Липшица.

Вернемся к общему случаю. Непосредственно из определений следует

I. *Равномерно непрерывное отображение $f : (T, \mathfrak{W}) \to (X, \mathfrak{V})$ непрерывно, если T и X снабжены равномерными топологиями.*

Обратное сказанному в предложении 2 утверждение, вообще говоря, не имеет места. Укажем один частный случай, в котором обратное заключение все же выполнено. Соответствующий этому факт носит название *теоремы Кантора*.

Теорема 1(2.III). *Пусть $(T, \mathfrak{W})$, $(X, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства и T бикомпактно. Тогда всякое непрерывное на T отображение f, действующее в X, равномерно непрерывно.*

Доказательство. Из непрерывности отображения f и из определения топологии на произведении топологических пространств следует, что отображение $\hat{f} : (s, t) \mapsto (f(s), f(t))$ также непрерывно в каждой точке $(s, t) \in T^2$. Пусть $U \in \mathfrak{V}$ — окружение диагонали Δ в X, которое с учетом предложения V(1.3) можно считать открытым. Замыкание $\overline{\Delta}$ диагонали Δ содержится в любом окружении, в частности $\overline{\Delta} \subset U$. Так как $\hat{f}$ непрерывно, то по теореме 3(2.II) прообраз $\hat{f}^{-1}[\overline{\Delta}]$ — замкнутое в T^2 множество, причем $D = I_T \subset \hat{f}^{-1}[\overline{\Delta}]$, откуда $\overline{D} \subset \subset \hat{f}^{-1}[\overline{\Delta}] \subset \hat{f}^{-1}[U]$. Вновь привлекая теорему 3(2.II), можно заметить, что множество $\hat{f}^{-1}[U]$ открыто, следовательно, $\hat{f}^{-1}[U]$ — окрестность замыкания диагонали D в T. Из предложения VII(1.3) следует, что $\hat{f}^{-1}[U]$ — окружение из $\mathfrak{W}$. Равномерная непрерывность f установлена.

Рассмотрим равномерные пространства T, X, Y и отображения $f : T \to X$, $g : X \to Y$. Непосредственно из определения равномерной непрерывности вытекает

II. *Если отображения f, g равномерно непрерывны, то их суперпозиция $g \circ f$ также равномерно непрерывна.*

Учитывая результат предложения II и тот факт, что тождественное отображение равномерного пространства на себя всегда равномерно непрерывно, можно утверждать, что класс всех равномерных пространств образует категорию, морфизмами которой являются равномерно непрерывные отображения.

Пусть X — некоторое множество и $I : X \to X$ — тождественное отображение множества X. Зададим на X равномерности $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$.

III. *Отображение $I : (X, \mathfrak{V}_1) \to (X, \mathfrak{V}_2)$ равномерно непрерывно в том и только в том случае, если $\mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$, т. е. если равномерность $\mathfrak{V}_1$ сильнее, чем $\mathfrak{V}_2$.*

Результат предложения легко вытекает из соответствующих определений.

Из предложений II, III следует, что если $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ — такие равномерности на X, что $\mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$, а $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ — такие равномерности на T, что $\mathfrak{W}_1 \supset \mathfrak{W}_2$, то отображение $f : T \to X$, равномерно непрерывное как отображение из пространства $(T, \mathfrak{W}_2)$ в пространство $(X, \mathfrak{V}_1)$, будет равномерно непрерывным, если снабдить T равномерностью $\mathfrak{W}_1$, а X —равномерностью $\mathfrak{V}_2$. Иначе говоря, усиление равномерности на T и ослабление — на X не нарушают равномерной непрерывности данного отображения $f : T \to X$.

2.2. Равномерность с данного множества может быть перенесена на другие множества требованием равномерной непрерывности тех или иных отображений. В отличие от подобных рассмотрений, касающихся топологий, мы ради краткости обсудим лишь перенесение равномерности на область отправления данного отображения и совсем не затронем похожий на этот случай переноса равномерности на область прибытия.

Пусть f — отображение из множества T в множество X. Предположим, что на X задана равномерность $\mathfrak{V}$. Образуем предфильтр $\mathfrak{U} = \hat{f}^{-1} \langle \mathfrak{V} \rangle = \{\hat{f}^{-1}[V] : V \in \mathfrak{V}\}$ в T^2. Из соотношений

$$D \subset \hat{f}^{-1}[\Delta],$$

$$[\hat{f}^{-1}[V]]^{-1} = \hat{f}^{-1}[V^{-1}],$$

$$\hat{f}^{-1}[V] \circ \hat{f}^{-1}[V] \subset \hat{f}^{-1}[V \circ V] \quad (V \subset X^2),$$

где D — диагональ в T, используя тот факт, что $\mathfrak{V}$ — равномерность на X, можно получить, что фильтр $\mathfrak{W} = \widetilde{\mathfrak{U}}$ в T^2 представляет собой равномерность. Ясно, что отображение $f : (T, \mathfrak{W}) \to (X, \mathfrak{V})$ равномерно непрерывно. С другой стороны, если $\mathfrak{W}'$ — какая-либо равномерность на T, относительно которой f равномерно непрерывно, то, как нетрудно понять, $\mathfrak{W}'$ сильнее равномерности $\mathfrak{W}$. Таким образом,

I. *Среди всех равномерностей на T, относительно которых данное отображение f из множества T в множество X с заданной равномерностью $\mathfrak{V}$, равномерно непрерывно, существует слабейшая. Эту равномерность, порожденную предфильтром $\widehat{f}^{-1}\langle\mathfrak{V}\rangle$ в T^2, называют прообразом равномерности $\mathfrak{V}$ на X при отображении f.*

Обозначим через $\tau_{\mathfrak{W}}$ топологию, ассоциированную с равномерностью $\mathfrak{W}$ на T. Фильтр окрестностей $\tau_{\mathfrak{W}}(t)$ точки $t \in T$ в этой топологии порожден предфильтром в T, состоящим из всех множеств вида $W\{t\}$, где $W = \widehat{f}^{-1}[V] \in \mathfrak{W}$, $V \in \mathfrak{V}$. Легко видеть, что $W\{t\} = f^{-1}[V\{f(t)\}]$, а поскольку предфильтр $\{f^{-1}[V\{f(t)\}] : V \in \mathfrak{V}\}$ в T представляет собой базис фильтра окрестностей в слабейшей из топологий на T, относительно которых отображение f непрерывно, то

II. *Топология на T, ассоциированная с прообразом равномерности $\mathfrak{V}$ при отображении f из T в X, совпадает с прообразом (при отображении f) топологии $\tau_{\mathfrak{V}}$ на X, ассоциированной с равномерностью $\mathfrak{V}$.*

Рассмотрим семейство $\{(X_\xi, \mathfrak{V}_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ равномерных пространств и семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений таких, что f_ξ действует из данного множества T в пространство X_ξ $(\xi \in \Xi)$.

Теорема 2(2.III). *Среди равномерностей на множестве T, относительно которых каждое отображение f_ξ $(\xi \in \Xi)$ данного семейства равномерно непрерывно, существует слабейшая. Фильтр окружений в этой равномерности порожден предфильтром в T^2, состоящим из всевозможных пересечений $\bigcap_{k=1}^{n} \widehat{f}_{\xi_k}^{-1}[V_k]$, где $V_k \in \mathfrak{V}_{\xi_k}$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$; $n \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{W}_\xi$ прообраз равномерности $\mathfrak{V}_\xi$ при отображении $f_\xi (\xi \in \Xi)$ и покажем, что равномерность $\mathfrak{W} = \sup_{\xi \in \Xi} \mathfrak{W}_\xi$ искомая. Так как $\mathfrak{W} \supset \mathfrak{W}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, то каждое отображение f_ξ $(\xi \in \Xi)$ равномерно непрерывно относительно равномерности $\mathfrak{W}$. Если $\mathfrak{W}'$ — некоторая равномерность на T, относительно которой все отображения f_ξ $(\xi \in \Xi)$ равномерно непрерывны, то согласно определению $\mathfrak{W}_\xi$ имеем, что $\mathfrak{W}' \supset \mathfrak{W}_\xi$, следовательно, $\mathfrak{W}' \supset \sup_{\xi \in \Xi} \mathfrak{W}_\xi = \mathfrak{W}$.

Утверждение теоремы, касающееся предфильтра, порождающего равномерность $\mathfrak{W}$, следует из структуры точной верхней границы множества равномерностей (см. пункт 1.2).

Равномерность $\mathfrak{W}$ на множестве T, существование которой установлено в доказанной теореме, называется *порожденной* *справа семейством* $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *равномерных пространств и семейством* $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *отображений.*

Обозначим через σ топологию на T, порожденную справа семейством $\left\{\left(X_\xi, \tau_{\mathfrak{B}_\xi}\right)\right\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических пространств и семейством $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений (см. пункт II.5.1). Ввиду указанного в пункте 1.2 свойства перестановочности перехода к ассоциированной топологии и взятия точной верхней границы, с учетом конструкции топологии σ (см. теорему 1(5.II)) и равномерности $\mathfrak{B}$ на T (см. предложение I) можем написать:

$$\tau_{\mathfrak{B}} = \tau_{\sup\limits_{\xi\in\Xi} \mathfrak{B}_\xi} = \sup_{\xi\in\Xi} \tau_{\mathfrak{B}_\xi} = \sigma.$$

Таким образом,

III. *Топология на T, порожденная справа семейством топологических пространств с равномерными топологиями, совпадает с топологией, ассоциированной с равномерностью, порожденной справа данным семейством равномерных пространств.*

Рассмотрим семейство $\{(X_\xi, \mathfrak{B}_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ равномерных пространств и образуем произведение $\mathfrak{X} = \prod\limits_{\xi\in\Xi} X_\xi$. Равномерность на $\mathfrak{X}$, порожденная справа семейством $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ равномерных пространств и семейством $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ проекций (см. пункт I.2.7), называется *тихоновской равномерностью* на произведении $\mathfrak{X}$, или *равномерностью произведения* равномерных пространств. Произведение $\mathfrak{X}$, снабженное тихоновской равномерностью, называется *произведением* данного *семейства равномерных пространств*. Согласно предложению III, топология, ассоциированная с равномерностью произведения семейства равномерных пространств, совпадает с топологией произведения ассоциированных с данными равномерностями топологий (см. пункт II.5.2).

Читатель без труда покажет, что равномерное пространство $\mathfrak{X}$ с тихоновской равномерностью и семейство $\{P_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ проекций представляют собой произведение семейства $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ в категории равномерных пространств (см. I.4.3).

Исходя из структуры фильтра окружений в равномерности, порожденной справа, можно сказать, что фильтр окружений в равномерности произведения на $\mathfrak{X}$ порожден предфильтром в $\mathfrak{X}^2$, состоящим из всевозможных пересечений $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \widehat{P}_{\xi_k}^{-1}[V_k]$, где $V_k \in \mathfrak{B}_{\xi_k}$, $\xi_k \in \Xi$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbf{N}$. Ясно, что вместо фильтров $\mathfrak{B}_{\xi_k}$ можно рассматривать какие-либо их (фиксированные) базисы. Таким образом, каждое множество V из предфильтра, порождающего равномерность произведения, определяется конечным набором $\xi_1, \ldots, \xi_n$ элементов множества Ξ

и набором $V_1, \ldots, V_n$ окружений из фильтров $\mathfrak{V}_{\xi_1}, \ldots, \mathfrak{V}_{\xi_n}$ соответственно; при этом такое множество V состоит из всех пар (φ, ψ) элементов φ, ψ произведения $\mathfrak{X}$, у которых заданные проекции $P_{\xi_k}(\varphi) = \varphi_{\xi_k}$, $P_{\xi_k}(\psi) = \psi_{\xi_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ образуют пару $(\varphi_{\xi_k}, \psi_{\xi_k})$, попадающую в заданное окружение $V_k \in \mathfrak{V}_{\xi_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, остальные же проекции могут быть какими угодно.

IV. *Произведение* $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$ *не более чем счетного семейства метризуемых равномерных пространств* $\{(X_\xi, \mathfrak{V}_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ *метризуемо.*

Действительно, поскольку каждое из X_ξ $(\xi \in \Xi)$ метризуемо, то согласно теореме 1(1.III) пространство X_ξ $(\xi \in \Xi)$ отделимо и фильтр $\mathfrak{V}_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ имеет счетный базис $\mathfrak{U}_\xi$. Тогда пространство $\mathfrak{X}$ отделимо (см. IV (II.5.2)), а совокупность пересечений $\bigcap_{k=1}^{n} P_{\xi_k}^{-1}[V_k]$ $(V_k \in \mathfrak{U}_{\xi_k},\ \xi_k \in \Xi,\ k = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbf{N})$ составляет базис равномерности произведения на $\mathfrak{X}$, очевидно, счетный (см. теорему 4(6.I)). Применение теоремы 1(1.III) завершает доказательство.

2.3. Основываясь на возможности переноса равномерности справа, установим признак равномеризуемости топологического пространства. Топологическое пространство (T, τ) называется *равномеризуемым*, если на T можно задать равномерность $\mathfrak{W}$ так, что топология τ совпадет с топологией $\tau_{\mathfrak{W}}$, ассоциированной с равномерностью $\mathfrak{W}$.

Теорема 3(2.III). *Для равномеризуемости топологического пространства* (T, τ) *достаточно, чтобы его топология* τ *удовлетворяла аксиоме отделимости* T_3^+ *(см. пункт II.5.4).*

Доказательство. Обозначим через C совокупность всех вещественных конечных функций, заданных на T и непрерывных на этом множестве относительно исходной топологии τ. Для каждой $f \in C$ положим $X_f = \mathbf{R}$ со стандартной равномерностью. Пусть $\mathfrak{W}$ — равномерность на T, порожденная справа семейством $\{X_f\}$ $(f \in C)$ равномерных пространств и семейством $\{f\}$ $(f \in C)$ отображений. Согласно предложению III(2.2) топология $\tau_{\mathfrak{W}}$, ассоциированная с равномерностью $\mathfrak{W}$, есть топология, порожденная справа семейством $\{X_f\}$ $(f \in C)$ топологических пространств $X_f = \mathbf{R}$ $(f \in C)$ и семейством $\{f\}$ $(f \in C)$ отображений. Опираясь на результат теоремы 2(5.II), можно утверждать, что в условиях теоремы топологии τ и $\tau_{\mathfrak{W}}$ совпадают. Таким образом, если (T, τ)—T_3^+-пространство, то $\tau = \tau_{\mathfrak{W}}$ и (T, τ) равномеризуемо.

Замечание 1. Можно показать (однако мы не будем делать этого), что аксиома отделимости T_3^+ не только достаточна, но и необходима для равномеризуемости топологического пространства. Иначе говоря, можно показать, что топология равномерного пространства удовлетворяет аксиоме T_3^+.

Замечание. 2. В доказательстве теоремы можно было ограничиться рассмотрением подмножества в C, состоящего из всех ограниченных функций (или даже со значениями в $[0, 1]$), однако при одной и той же заданной топологии τ на T мы получали бы различные равномерности на T.

Замечание 3. В качестве конкретного примера того, что одна топология может оказаться ассоциированной с разными равномерностями, приведем числовую прямую: стандартная топология на $\mathbf{R}$ ассоциирована, очевидно, как со стандартной равномерностью, так и с равномерностью, индуцированной из $\overline{\mathbf{R}}$[4], тогда как последняя слабее стандартной. Заметим, кстати, что тождественное отображение $I : \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ непрерывно, но не равномерно непрерывно.

Следствие 1. *Всякое нормальное топологическое пространство равномеризуемо.*

В самом деле, согласно следствию 2 из теоремы 1(6.II) нормальное пространство вполне регулярно.

Следствие 2. *Компактное хаусдорфово пространство X равномеризуемо, причем единственным образом.*

Действительно, компактное хаусдорфово пространство нормально (см. VI(II.2.7)), так что равномеризуемо. Единственность равномерности на X следует из результата предложения VII(1.3): фильтр окружений в рассматриваемом случае полностью определяется топологией на X^2, тем самым, и топологией на X.

2.4. Рассмотрим множества T и X и на произведении $\mathfrak{P}(T) \times \mathfrak{P}(X^2)$ определим действующее в $\mathfrak{P}(X^T \times X^T)$ отображение F, полагая $F(B,\ U) = \{(f,\ g) \in X^T \times X^T : g \circ I_B \circ f^{-1} \subset U\}$.

Отметим некоторые полезные в дальнейшем свойства отображения F. Доказательства их основаны на соотношении (13) из § 2 гл. I, которое применительно к текущей ситуации дает равенство

$$g \circ I_B \circ f^{-1} = \bigcup_{(s,t)\in I_B} \{(f(s), g(t))\} = \{(f(t), g(t)) : t \in B\} \qquad (B \subset T), \tag{1}$$

---

[4]) Поскольку $\overline{\mathbf{R}}$ компактно, то равномерность на $\overline{\mathbf{R}}$ однозначно определяется топологией на $\overline{\mathbf{R}}$.

и проводятся путем несложных рассуждений, которые мы опустим.

I. *Если* B_1, $B_2 \subset T$ *и* $B_1 \subset B_2$, *то* $F(B_1, U) \supset F(B_2, U)$ $(U \subset X^2)$.

II. *Если* $U_1, U_2 \subset X^2$ *и* $U_1 \subset U_2$, *то* $F(B, U_1) \subset F(B, U_2)$ $(B \subset T)$.

Иначе результаты предложений I, II можно было высказать так: отображение F убывает по первому «переменному» и возрастает по второму.

Еще два свойства выражают в известном смысле сохранение отображением F точных границ.

III. *Для любого множества* $U \subset X^2$ *и любого семейства* $\{B_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *подмножеств* T *имеет место равенство*

$$F\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi, U\right) = \bigcap_{\xi \in \Xi} F(B_\xi, U). \tag{2}$$

IV. *Для любого множества* $B \subset T$ *и для любого семейства* $\{U_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *подмножеств* X^2 *имеет место равенство*

$$F\left(B, \bigcap_{\xi \in \Xi} U_\xi\right) = \bigcap_{\xi \in \Xi} F(B, U_\xi). \tag{3}$$

Если $\{B_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и $\{U_\eta\}$ $(\eta \in \mathrm{H})$ — семейства элементов из $\mathfrak{P}(T)$, $\mathfrak{P}(X^2)$ соответственно, то, используя ассоциативность точных границ, с помощью соотношений (2) и (3) легко получить, что

$$F\left(\bigcup_{\xi \in \Xi} B_\xi, \bigcap_{\eta \in \mathrm{H}} U_\eta\right) = \bigcap_{(\xi, \eta) \in \Xi \times \mathrm{H}} F(B_\xi, U_\eta). \tag{4}$$

Множества в X^2 суть отношения в X; область прибытия отображения F — отношения в X^T, и следующие два свойства связаны с этой точкой зрения.

V. *Для любого отношения* $U \subset X^2$ *имеем*

$$F(B, U^{-1}) = [F(B, U)]^{-1} \quad (B \subset T). \tag{5}$$

VI. *Для любых отношений* U, $V \subset X^2$ *имеем*

$$F(B, U \circ V) = F(B, U) \circ F(B, V) \quad (B \subset T). \tag{6}$$

Перейдем теперь к существу рассматриваемого в этом пункте вопроса. Допустим, что задана некоторая равномерность $\mathfrak{V}$ на X и фиксирована некоторая совокупность $\mathfrak{B}$ подмножеств множества T. Как следует из предложений I — IV, в том случае, если $\mathfrak{B}$ фильтруется по возрастанию, совокупность

$$F[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}] = \{F(B, U) : B \in \mathfrak{B}, U \in \mathfrak{V}\}$$

фильтруется по убыванию, всегда содержит диагональ I_{X^T} в X^T и согласно предложениям V, VI удовлетворяет второму и третьему условиям определения равномерности. Следовательно, порожденный этой совокупностью фильтр $\overline{F[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}]}$ представляет собой равномерность на X^T. Об этой равномерности будем говорить, что она *порождена совокупностью* $\mathfrak{B}$ *и равномерностью* $\mathfrak{V}$ или, короче, как о равномерности на X^T, *порожденной парой* $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$.

Из предложения II следует

VII. *Если* $\mathfrak{V}'$ *— какой-либо базис равномерности* $\mathfrak{V}$, *то совокупность* $F[\mathfrak{B}, \mathfrak{V}']$ *будет базисом равномерности на* X^T, *порожденной парой* $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$.

VIII. *Пусть* $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$*—равномерности на* X, *причем* $\mathfrak{V}_1 \subset \mathfrak{V}_2$, *а* $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ *— такие фильтрующиеся по возрастанию совокупности подмножеств множества* T, *что* $\mathfrak{B}_2$ *конфинальна* $\mathfrak{B}_1$ *(это означает, что для любого* $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ *можно указать множество* $B_2 \in \mathfrak{B}_2$, *содержащее* B_1*). В этих предположениях равномерность на* X^T, *порожденная парой* $(\mathfrak{B}_2, \mathfrak{V}_2)$, *сильнее равномерности, порожденной парой* $(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{V}_1)$, *т. е.* $\overline{F[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{V}_1]} \subset \overline{F[\mathfrak{B}_2, \mathfrak{V}_2]}$.

Справедливость результата предложения следует непосредственно из соответствующих определений.

Топологию на X^T, ассоциированную с равномерностью, порожденной парой $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$, будем, как правило, называть *топологией равномерной сходимости на множествах данной совокупности* $\mathfrak{B}$.

Заметим, что из соотношения (4) и предложения III(1.3) следует, что

$$\overline{I}_{X^T} = F\left(\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B, \bigcap_{U\in\mathfrak{V}} \overline{U}\right) = F\left(\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B, \overline{\Delta}\right), \tag{7}$$

где черта означает замыкание, а Δ — диагональ в X. Из (7), с учетом предложения III(1.3) следует

IX. *Если равномерное пространство* $(X, \mathfrak{V})$ *отделимо, а* $T = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$, *тогда равномерность, порожденная парой* $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$, *отделима.*

Если множество T не снабжено никакой структурой, то в качестве $\mathfrak{B}$ естественно брать одну из двух в некоторой мере противоположных совокупностей. Во-первых, можно рассматривать совокупность всех конечных подмножеств множества T, и полученную в этом случае равномерность на X^T называют *слабой* равномерностью. Нетрудно понять, что слабая равномерность на X^T совпадает с тихоновской равномерностью на произведении X^T семейства равномерных пространств. Во-вторых, в качестве $\mathfrak{B}$ можно рассматривать совокупность $\{T\}$, состоящую из единственного множества T, и в таком случае равномерность на X^T носит название *сильной*, или *равномерной*. Окружение в сильной равномерности на X^T, порожденное окружением U в X, будем обозначать через $\widetilde{U}$. Поскольку T — наибольший элемент в $\mathfrak{P}(T)$, то согласно предложению VIII сильная равномерность сильнее слабой, и указанные равномерности совпадают, если множество T состоит из конечного числа элементов.

Пусть $\mathfrak{A}$ — фильтр в X^T. Снабдим X^T топологией равномерности, порожденной парой $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$. Если фильтр $\mathfrak{A}$ сходится к точке $f \in X^T$ в этой топологии, говорят, что $\mathfrak{A}$ сходится к f *равномерно на множествах совокупности* $\mathfrak{B}$. Как очевидно, этот факт означает, что, каково бы ни было множество $B \in \mathfrak{B}$, для любого окружения $U \in \mathfrak{V}$ найдется такое множество $A \in \in \mathfrak{A}$, для которого $A \subset U\{t\}$ при всех $t \in B$.

Если, в частности, $\mathfrak{B}$ состоит из всех конечных подмножеств T, о сходящемся фильтре в X^T говорят как о сходящемся *поточечно* (см. I(II.5.2), II(II.5.2)), а в другом крайнем случае, когда $\mathfrak{B}$ состоит из одного множества T,— как о сходящемся *равномерно*. Равномерную сходимость $\mathfrak{A}$ к f обозначают через $\mathfrak{A} \rightrightarrows f$ и подобным образом обозначают равномерную сходимость конкретных фильтров. Ясно, что сходимость фильтра $\mathfrak{A}$ к f в топологии равномерности, порожденной парой $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$, означает равномерную сходимость следа этого фильтра на каждом множестве совокупности $\mathfrak{B}$.

Отметим суть равномерной сходимости семейства $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ отображений, действующих из данного множества T в метрическое пространство (X, ρ). Фильтр окружений равномерности метрического пространства порожден фильтрующейся по убыванию совокупностью цилиндров $B_r = p^{-1}[[0, r]] = \{(x, y) \in X^2 : \rho(x, y) \leqslant r\}$ $(r > 0)$. Сходимость $\varphi_\xi \rightrightarrows \varphi$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс $\xi_0 \in \Xi$, что $\rho(\varphi_\xi(t), \varphi(t)) \leqslant \varepsilon$ для всех $\xi \in \Xi$, $\xi \geqslant \xi_0$, $t \in T$. Соотношение $\rho(\varphi_\xi(t), \varphi(t)) \leqslant \varepsilon$ равносильно, очевидно, такому: $R(\varphi, \varphi_\xi) = \sup_{t \in T} \rho(\varphi_\xi(t), \varphi(t)) \leqslant \varepsilon$. Отсюда нетрудно усмотреть, что равномерная сходимость фильтрующегося семейства $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ к отображению φ означает сходимость к нулю числового семейства $\{R(\varphi, \varphi_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$.

С помощью понятия равномерной сходимости можно дополнить результаты предложения I(II.2.9) относительно перестановки порядка предельных переходов.

Пусть S и T — данные множества, X — отделимое равномерное пространство (с равномерностью $\mathfrak{V}$) и Φ — отображение произведения $S \times T$ в X. Предположим, что заданы фильтры (или предфильтры) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{D}$ непустых подмножеств множества S и T соответственно. Будем считать, что при каждом $s \in S$ существует предел $\lim_{\mathfrak{D}} \Phi(s, \cdot) = f(s)$ и при каждом $t \in T$ — предел $\lim_{\mathfrak{A}} \Phi(\cdot, t) = g(t)$. Множество X^T наделим равномерностью, порожденной парой $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$, где $\mathfrak{B}$ — данный возрастающий фильтр подмножеств множества T, удовлетворяющий условию $\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} B = T$ (в силу предложения IX это условие обеспечивает отделимость пространства X^T). Введем, наконец, отображение $\Psi : s \mapsto \Phi(s, \cdot)$ $(s \in S)$ множества S в пространство X^T.

После всех этих приготовлений мы в состоянии сформулировать так называемую *теорему Стокса — Зайделя*.

Теорема 4(2.III). *Пусть предфильтр $\Psi\langle\mathfrak{A}\rangle$ равномерно на каждом множестве $B \in \mathfrak{B}$ сходится к отображению g и существует предел $\lim_{\mathfrak{A}} f$. Если пересечение $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{B}$ непусто, то тогда существует предел $\lim_{\mathfrak{D}} g$, причем $\lim_{\mathfrak{D}} g = \lim_{\mathfrak{A}} f$.*

Доказательство. Учитывая результат предложения I(II.2.9), достаточно убедиться в существовании предела $\lim_{\mathfrak{A} \times \mathfrak{D}} \Phi$.

Возьмем окружение $V \in \mathfrak{V}$ и подберем такое симметричное замкнутое окружение $U \in \mathfrak{V}$, что $U^{[3]} \subset V$. Из условия существования предела $\lim_{\mathfrak{A}} f$ (обозначим его через x) вытекает, что можно указать такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $f[A] \subset U\{x\}$. Взяв множество $E \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{B}$, в силу предположения о равномерной сходимости $\Psi\langle\mathfrak{A}\rangle$ к g можем считать, что $\{g\} \times \Psi[A] \subset F(E, U)$, т. е. что для каждого $s \in A$ и $t \in E$ будет $(g(t), \Phi(s, t)) \in U$. Записывая это соотношение в виде $\Phi(s, \cdot)[E] \subset U\{g(t)\}$ и учитывая замкнутость множества U, получим $f(s) = \lim_{\mathfrak{D}} \Phi(s, \cdot) \in U\{g(t)\}$ $(s \in A)$, так что $(g(t), f(s)) \in U$ $(t \in E,\ s \in A)$. Таким образом, для любых $s \in A$, $t \in E$

$$\{(x, \Phi(s, t))\} = \{(g(t), \overline{\Phi}(s, t))\} \circ \{(f(s), g(t))\} \circ$$
$$\circ \{(x, f(s))\} \subset U^{[3]} \subset V.$$

Это означает, что $\Phi[A \times E] \subset V\{x\}$, т. е. точка x является пределом отображения Φ по предфильтру $\mathfrak{A} \times \mathfrak{D}$.

Если за S взять фильтрующееся множество Ξ, за $\mathfrak{A}$ — его фильтр Фреше и принять $\Phi : (\xi, t) \to \varphi_\xi(t)$ $((\xi, t) \in \Xi \times T)$, где $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — фильтрующееся семейство отображений топологического пространства T в пространство X, то, заменяя

T каким-либо его подпространством B, приходим к следующему результату [5].

Следствие 1. *Если каждое из отображений φ_ξ ($\xi \in \Xi$) непрерывно в точке $t \in B$, а отображение $\varphi \in X^T$ таково, что семейство $\{\varphi_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) равномерно сходится к φ на B, то сужение $\varphi|_B$ отображения φ на множество B непрерывно в точке t.*

Понимая под $\mathfrak{B}$ совокупность всех относительно компактных множеств топологического пространства, можем высказать следующий факт

Следствие 2. *Если в условиях следствия 1 пространство T локально компактно и семейство $\{\varphi_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) сходится к отображению φ в топологии равномерной сходимости на компактах, то отображение φ непрерывно в любой точке $t \in T$, в которой непрерывно каждое из отображений φ_ξ ($\xi \in \Xi$).*

§ 3. ПОЛНЫЕ РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Говоря в гл. II о пределе числового фильтра, мы установили критерий сходимости такого фильтра, называемый принципом Коши (см. теорему 2(3.II). Достоинство этого критерия заключается в том, что он позволяет судить о наличии предела данного фильтра по «внутренним» свойствам самого фильтра, тогда как если пользоваться определением предела, необходимо заранее «угадать» значение предела.

Принцип сходимости Коши существенно использует свойства равномерности на числовой прямой. К сожалению, подобный принцип сходимости в произвольном равномерном пространстве уже не имеет места. Тем более важным представляется изучение того класса пространств, для которых справедлив указанный принцип. Такие пространства называются полными. Перейдем к формальному описанию полных равномерных пространств.

3.1. Рассмотрим равномерное пространство $(X, \mathfrak{B})$ и окружение диагонали $V \in \mathfrak{B}$. Множество $A \subset X$ называют *малым порядка* V, если произведение $A \times A$ содержится в V.

В случае, когда X снабжено равномерностью метрического пространства (X, ρ), множество A — малое порядка B_r, где B_r — цилиндр радиуса $r > 0$, в том и только в том случае, если $\sup\limits_{(x,y)\in A^2} \rho(x, y) \leqslant r$. Число $\operatorname{diam}_\rho A = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} \rho(x, y)$ называют *диаметром множества* A [6], так что малость A порядка B_r

[5] Обычно именно этот факт и называют теоремой Стокса — Зайделя.

[6] Поскольку значения метрики ρ лежат в промежутке $[0, +\infty)$, в котором 0 служит наименьшим элементом, то в случае $A = \varnothing$ естественно принять $\operatorname{diam} \varnothing = 0$.

означает, что $\operatorname{diam} A \leqslant r$, т. е. что любые две точки множества A отстоят одна от другой на расстояние, не превосходящее r.

Пусть $\mathfrak{A}$ — фильтр в равномерном пространстве X, т. е. фильтр непустых множеств равномерного пространства X. Совокупность $\mathfrak{C} = \{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$ фильтруется по убыванию в упорядоченном по включению множестве $\mathfrak{P}(X^2)$. Фильтр $\widetilde{\mathfrak{C}}$ в X^2, порожденный совокупностью $\mathfrak{C}$, обозначим через $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ и будем говорить о нем как о *фильтре в X^2, порожденном фильтром $\mathfrak{A}$ в X*. Таким образом, фильтр $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ состоит из всех таких подмножеств в X^2, которые содержат произведение $A \times A$ для некоторого $A \in \mathfrak{A}$. Фильтр $\mathfrak{A}$ в X называется *сходящимся в себе* (или *фильтром Коши*, или *фундаментальным фильтром*), если фильтр $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ тоньше фильтра окружений, т. е. если $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \supset \mathfrak{V}$. Таким образом, фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе, если для любого окружения $U \in \mathfrak{V}$ найдется такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $A \times A \subset U$. Иначе можно сказать, что фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе, если он содержит множества сколь угодно малого порядка.

Предфильтр $\mathfrak{A}$ в X называется *сходящимся в себе*, если фильтр $\widetilde{\mathfrak{A}}$ в X, порожденный им, сходится в себе. Отметим, что, как очевидно, если фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе в пространстве $(X, \mathfrak{V})$, то он будет сходящимся в себе и в том случае, если X снабдить более слабой, чем $\mathfrak{V}$, равномерностью.

I. *Сходящийся фильтр $\mathfrak{A}$ в X сходится в себе.*

В самом деле, пусть V — произвольное окружение диагонали в X и U — такое симметричное окружение, что $U^{[2]} \subset V$. Допустим, что $x \in \operatorname{Lim} \mathfrak{A}$. Тогда найдется множество $A \in \mathfrak{A}$, для которого $A \subset U\{x\}$. Поскольку в этой ситуации

$$A \times A \subset U\{x\} \times U\{x\} \subset \bigcup_{z \in X} U\{z\} \times U\{z\} = U^2 \subset V.$$

(см. соотношение (1) в § 1), то фильтр $\mathfrak{A}$ сходится в себе.

Напомним (см. I.7.2), что фильтры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ в X называют *зацепляющимися* (или *зацепляющими друг друга*), если пересечение $A \cap B$ непусто для любых $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Иначе говоря, фильтры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ зацепляются, если множество $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$ ограничено сверху в множестве $\mathbf{F}_0(X)$ всех собственных фильтров в $\mathfrak{P}(X)$.

II. *Пусть фильтр $\mathfrak{B}$ сходится к точке $x \in X$. Тогда всякий сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$, зацепляющий фильтр $\mathfrak{B}$, сходится к точке x, так что* $\operatorname{Lim} \mathfrak{B} \subset \operatorname{Lim} \mathfrak{A}$.

Действительно, рассмотрим произвольное окружение $V \in \mathfrak{V}$ и найдем такое симметричное окружение $U \in \mathfrak{V}$, что $U^{[3]} \subset V$. Поскольку $\mathfrak{A}$ сходится в себе, то существует такое множество $A \in \mathfrak{A}$, что $A \times A \subset U$. В силу сходимости

$\mathfrak{B} \to x$ будет $U\{x\} \in \mathfrak{B}$, так что из зацепляемости фильтров $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ имеем $A \cap U\{x\} \neq \varnothing$. Тогда

$$U\{x\} \times A = (A \times A) \circ (U\{x\} \times U\{x\}) \subset U \circ (U \circ U) \subset V,$$

следовательно,

$$A = (U\{x\} \times A)\{x\} \subset V\{x\},$$

откуда $V\{x\} \in \mathfrak{A}$. Таким образом, фильтр окрестностей точки x содержится в $\mathfrak{A}$, что и означает сходимость $\mathfrak{A} \to x$.

III. *Пусть C — бикомпактное множество и $\mathfrak{A}$ — сходящийся в себе фильтр в X, содержащий множество C. Тогда существует такая точка $x \in C$, что $\mathfrak{A} \to x$.*

В самом деле, рассмотрим предфильтр $\mathfrak{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathfrak{A})$ в X. Расширим фильтр $\widetilde{\mathfrak{A}_C}$ в X, порожденный предфильтром $\mathfrak{A}_C$ до ультрафильтра, который обозначим через $\mathfrak{B}$. Так как $A \cap C \in \mathfrak{B}$ $(A \in \mathfrak{A})$, то $C \in \mathfrak{B}$, а тогда в силу предложения III(II.2.7) найдется такая точка $x \in C$, что $\mathfrak{B} \to x$. Но, очевидно, $\mathfrak{B}$ содержит и тем более зацепляет фильтр $\mathfrak{A}$, следовательно, $\mathfrak{A} \to x$.

IV. *Пусть сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$ в X таков, что $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A \neq \varnothing$. Тогда $\mathfrak{A}$ сходится и $\operatorname{Lim} \mathfrak{A} \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$, т. е. $\mathfrak{A}$ сходится к любой точке $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$. В частности, если X отделимо, тогда для сходящегося в себе фильтра $\mathfrak{A}$ либо $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A = \varnothing$, либо пересечение $\bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$ сводится к единственной точке x и тогда $x = \lim \mathfrak{A}$.*

Для доказательства достаточно, заметив, что фильтр $\mathfrak{B}$, состоящий из всех множеств, содержащих точку $x \in \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} A$, сходится к этой точке и что данный фильтр $\mathfrak{A}$ зацепляет фильтр $\mathfrak{B}$, воспользоваться предложением II.

V. *Фильтр окрестностей $\mathfrak{B}_x$ любой точки x равномерного пространства $(X, \mathfrak{B})$ оказывается минимальным элементом в множестве всех сходящихся в себе фильтров в X. Иначе говоря, если фильтр $\mathfrak{A}$ в X сходится в себе и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}_x$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_x$.*

Результат предложения следует непосредственно из предложения III.

Равномерное пространство X называется *полным*, если каждый сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A}$ в X сходится к некоторой точке из X.

Из предложения III сразу следует, что бикомпактное равномерное пространство полное. Еще один пример полного равномерного пространства доставляет числовая прямая со стандартной равномерностью (метрического пространства) — на этот счет была доказана теорема 2(3.II).

VI. *Пусть X_0 — замкнутое множество в полном равномерном пространстве X. Тогда X_0, наделенное индуцированной из X равномерностью, также полное.*

Действительно, пусть $\mathfrak{A}_0$ — сходящийся в себе фильтр в равномерном пространстве X_0. Построим сходящийся в себе фильтр $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}_0}$ в X. В силу полноты X найдется такая точка $x \in X$, что $\mathfrak{A} \to x$, в частности, $\mathfrak{A}_0$ сходится к x как базис фильтра $\mathfrak{A}$. Согласно определению фильтра $\mathfrak{A}$ множество X_0 входит в $\mathfrak{A}$, следовательно, $x \in X_0$ (см. предложение III(II.2.1)). Итак, $\mathfrak{A}_0$ сходится к точке $x \in X_0$, что и означает полноту X_0.

VII. *Пусть X — отделимое равномерное пространство. Тогда всякое его полное подпространство X_0 замкнуто.*

В самом деле, если $\mathfrak{A}$ — фильтр в X, включающий множество X_0 и сходящийся к некоторой точке $x \in X$, то след $\mathfrak{A}_{X_0} = \{A \cap X_0 : A \in \mathfrak{A}\}$ фильтра $\mathfrak{A}$ на X_0 фильтруется по убыванию. Фильтр $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{X_0}$ в X тоньше фильтра $\mathfrak{A}$, и так как $\mathfrak{A} \to x$, то и $\mathfrak{B} \to x$, стало быть, $\mathfrak{B}$ сходится в себе. Из условий предложения, поскольку $X_0 \in \mathfrak{B}$, следует, что $\mathfrak{B}$ сходится к какой-то точке из X_0, а из отделимости получаем, что этот предел фильтра $\mathfrak{B}$ должен совпадать с x, откуда $x \in X_0$, следовательно, X_0 замкнуто.

Рассмотрим множество T, равномерное пространство X, соответствие $F : T \to X$ и фильтр $\mathfrak{A}$ в T, зацепляющий $D(F)$. Соответствие F называется *сходящимся в себе по фильтру* $\mathfrak{A}$, если предфильтр $F\langle \mathfrak{A} \rangle = \{F[A] : A \in \mathfrak{A}\}$ в X сходится в себе. Очевидно, что всякое соответствие, сходящееся по фильтру $\mathfrak{A}$, сходится в себе по этому фильтру. Справедливость обратного утверждения регламентирована в следующем предложении.

VIII. *Если X — полное равномерное пространство, то всякое сходящееся в себе по фильтру $\mathfrak{A}$ соответствие F сходится по $\mathfrak{A}$ к некоторой точке из X.*

Доказательство следует непосредственно из определений. Если фильтр $\mathfrak{A}$ таков, что $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} A \cap D(F) \neq \varnothing$, то в последнем предложении требование полноты излишне. В самом деле, в этом случае $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} F[A] \neq \varnothing$ и сходящееся в себе по $\mathfrak{A}$ соответствие F сходится к любой точке из $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{A}} F[A]$ согласно предложению IV.

Фильтрующееся семейство $\varphi: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов равномерного пространства X называется *сходящимся в себе*, если фильтр Фреше [7] этого семейства сходится в себе. Свойство семейства сходиться в себе равносильно, очевидно, такому: для любого окружения V можно указать такое $\lambda \in \Xi$, что $(x_\xi, x_\eta) \in V$ для всех $\xi, \eta \in \Xi$; $\xi, \eta \geqslant \lambda$. Ясно, что сходящееся семейство сходится в себе, а если X — полное равномерное пространство, то верно и обратное: всякое сходящееся в себе семейство элементов из X сходится к некоторой точке пространства X.

IX. *Пусть* $\varphi: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — *сходящееся в себе семейство элементов из* X *и множество* $\Xi_0 \subset \Xi$ *конфинально множеству* Ξ. *Тогда если семейство* $\varphi_0: \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi_0)$ *сходится, то* φ *также сходится, причем* $\operatorname{Lim} \varphi \supset \operatorname{Lim} \varphi_0$.

Действительно, фильтр Фреше семейства φ_0 тоньше фильтра Фреше семейства φ, и требуемый результат следует из предложения V.

Оказывается, о полноте пространства X можно судить, рассматривая свойства сходящихся в себе семейств.

X. *Для полноты равномерного пространства* $(X, \mathfrak{V})$ *необходимо и достаточно, чтобы всякое сходящееся в себе семейство элементов из* X *было бы сходящимся.*

В доказательстве нуждается лишь достаточность условия. Рассмотрим фильтр $\mathfrak{A}$ в X и на множестве $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{P}(X)$ определим действующее в X соответствие $A \mapsto \{A\}$. Обозначим через $\varphi: \{x_A\}$ $(A \in \mathfrak{A})$ какой либо селектор (см. пункт I.2.7) определенного выше соответствия. Зададим на $\mathfrak{A}$ порядок, обратный порядку по включению: $A_1 \prec A_2$ $(A_1, A_2 \in \mathfrak{A})$ означает, что $A_1 \supset A_2$. При таком отношении порядка в $\mathfrak{A}$ семейство φ оказывается фильтрующимся по возрастанию. Учитывая его определение и используя сходимость в себе фильтра $\mathfrak{A}$, нетрудно показать, что семейство φ сходится в себе. Тогда согласно условию предложения семейство φ сходится, допустим, к точке $x \in X$. Так как $A \supset \{x_{A'}: A \prec A'\}$, то сходящийся к точке x фильтр Фреше семейства φ тоньше сходящегося в себе фильтра $\mathfrak{A}$, и применение предложения V завершает доказательство.

Равномерное пространство называется *секвенциально полным*, если сходится всякий сходящийся в себе и имеющий не более чем счетный базис фильтр. По аналогии с предложением X доказывается, что для секвенциальной полноты необходима и достаточна сходимость каждой сходящейся

[7]) *Фильтром Фреше семейства* φ называют фильтр в X, порожденный предфильтром $\{\varphi[[\xi, \to]] : \xi \in \Xi\}$ в X.

в себе последовательности точек данного пространства.

В случае метризуемого равномерного пространства секвенциальная полнота равносильна полноте.

XI. *Секвенциально полное метризуемое пространство X полно.*

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — сходящийся в себе фильтр в X. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдем в $\mathfrak{A}$ множество A_n, малое порядка $B_{1/n}$, т. е. такое, что $\operatorname{diam} A_n \leqslant 1/n$. Ясно, что последовательность $\{A_n\}$ можно считать убывающей. Поскольку порожденный ею фильтр $\mathfrak{B}$ имеет не более чем счетный базис и сходится в себе, он сходится. Но данный фильтр $\mathfrak{A}$, очевидно, зацепляет фильтр $\mathfrak{B}$, так что на основании предложения II сходится и $\mathfrak{A}$.

3.2. Рассмотрим отображение f, действующее из равномерного пространства $(T, \mathfrak{W})$ в равномерное пространство $(X, \mathfrak{B})$. Напомним, что через $\hat{f}$ мы обозначаем отображение $\hat{f} : [D(F)]^2 \to X$, $\hat{f} : (s, t) \mapsto (f(s), f(t))$. Отметим, что, как следует из соотношения (13) гл. I, § 2, если $\theta \subset T^2$, то

$$\hat{f}[\theta] = \bigcup_{(x,y)\in\theta} f\{x\} \times f\{y\} = f \circ \theta \circ f^{-1}. \tag{1}$$

I. *Пусть f — равномерно непрерывное отображение, действующее из равномерного пространства T в равномерное пространство X и $\mathfrak{A}$ — сходящийся в себе фильтр в T, зацепляющий $D(f)$. Тогда предфильтр $f\langle\mathfrak{A}\rangle$ в X сходится в себе в пространстве X.*

Действительно, в силу равномерной непрерывности f для произвольного окружения $V \in \mathfrak{B}$ найдется такое окружение $\theta \in \mathfrak{W}$, что $\hat{f}[\theta] \subset V$. Так как $\mathfrak{A}$ сходится в себе, то существует $A \in \mathfrak{A}$, для которого $A \times A \subset \theta$. Тогда

$$f[A] \times f[A] = \hat{f}[A \times A] = f \circ (A \times A) \circ f^{-1} \subset$$
$$\subset f \circ \theta \circ f^{-1} = \hat{f}[\theta] \subset V,$$

откуда и следует требуемое.

Теорема 1(3.III). *Пусть $\mathfrak{X}$ — произведение семейства равномерных пространств $\{(X_\xi, \mathfrak{B}_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$, снабженное равномерностью произведения. Если при каждом $\xi \in \Xi$ пространство X_ξ — полное, то $\mathfrak{X}$ — также полное равномерное пространство.*

Доказательство. В самом деле, поскольку все проекции $P_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ равномерно непрерывны, то образ $P_\xi \langle \mathfrak{A} \rangle$ сходящегося в себе фильтра $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{X}$ представляет собой сходящийся в себе предфильтр в X_ξ $(\xi \in \Xi)$. В силу полноты X_ξ, найдется такая точка $x_\xi \in X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$, что $P_\xi\langle\mathfrak{A}\rangle \underset{\xi\in\Xi}{\longrightarrow} x_\xi$. Из критерия сходимости фильтра в произведении топологических пространств (см. I(II.5.2)) получаем, что $\mathfrak{A}$ сходится к точке $x \in \mathfrak{X}$, имеющей проекции $x_\xi \in X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Полнота пространства $\mathfrak{X}$ установлена.

Пусть $\mathfrak{B}$ — такой возрастающий фильтр подмножеств множества T, что $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = T$.

Теорема 2(3.III). *Пусть X—отделимое полное равномерное пространство (с равномерностью $\mathfrak{V}$). Пространство X^T с равномерностью, порожденной парой $(\mathfrak{B}, \mathfrak{V})$, полно.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X^T сходящееся в себе фильтрующееся (по возрастанию) семейство $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$. Ввиду условия $\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = T$ семейство $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ сходится в себе и в стандартной равномерности произведения, и потому в силу теоремы 1 существует единственное (вследствие отделимости пространства X^T) отображение φ, к которому поточечно сходится данное семейство: $\varphi(t) = \lim_{\xi\in\Xi} \varphi_\xi(t)$ $(t \in T)$. Если $B \in \mathfrak{B}$ и V — какое-либо замкнутое окружение из $\mathfrak{V}$, то можно указать такой индекс $\xi_0 \in \Xi$, что $(\varphi_\xi(t), \varphi_\eta(t)) \in V$ для всех $t \in T$ и ξ, $\eta \in \Xi$ таких, что ξ, $\eta \geqslant \xi_0$. Ввиду замкнутости окружения V отсюда следует (см. III(II.2.1)), что $(\varphi_\xi(t), \varphi(t)) \in V$ для всех $t \in B$ и $\xi \in \Xi$, удовлетворяющих соотношению: $\xi \geqslant \xi_0$. Это означает, что $\varphi = \lim_{\xi\in\Xi} \varphi_\xi$ в топологии равномерной сходимости на множествах фильтра $\mathfrak{B}$.

3.3. Обсудим возможности распространения равномерно непрерывного отображения на замыкание области определения.

Теорема 3(3.III). *Пусть $(T, \mathfrak{W})$, $(X, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства, причем пространство X — отделимое и полное. Тогда всякое отображение f_0, заданное и равномерно непрерывное на плотном в T множестве T_0 (см. I.1.5), может быть единственным образом продолжено до отображения f, заданного и равномерно непрерывного на всем T.*

Доказательство. Допустим, что требуемое распространение существует. Поскольку фильтр $\mathfrak{W}_t$ окрестностей точки t зацепляет область определения T_0 отображения f_0, то в силу непрерывности f должно быть $f(t) = \lim_{\mathfrak{W}_t} f = \lim_{\mathfrak{W}_t} f_0$ для любого $t \in T$, так что если возможно хотя бы непрерывное распространение с плотного множества $T_0 \subset T$, то в силу предложения I(II.2.6) по значениям отображения f_0 оно определяется единственным образом: $f(t) = \lim_{\mathfrak{W}_t} f_0$.

Покажем, что в условиях теоремы существует $\lim_{\mathfrak{W}_t} f_0$ для любого $t \in T$. Фильтр $\mathfrak{W}_t$ сходится к t, следовательно, сходится в себе и ввиду плотности T_0 в T зацепляет множество T_0, так что согласно предложению I(3.2) предфильтр $f_0\langle\mathfrak{W}_t\rangle$ в X сходится в себе. Из полноты пространства X следует сходимость $f_0\langle\mathfrak{W}_t\rangle$ к некоторой точке из X, а из хаусдорфовости отделимого равномерного пространства X — что такая точка единственна.

Убедимся в равномерной непрерывности распространения $f : t \mapsto \lim_{\mathfrak{W}_t} f_0$ отображения f_0 на множество T. Пусть V — произвольное окружение из равномерности $\mathfrak{V}$ на X. Найдем такое симметричное окружение $U \in \mathfrak{V}$, что $U^{[3]} \subset V$. Так как f_0 равномерно непрерывно, то существует $\theta \in \mathfrak{W}$, для которого $\widehat{f_0}[\theta] \subset U$, причем в силу предложения V(1.3) окружение θ можно считать открытым (в T^2 с топологией произведения). Убедимся в том, что для $(s, t) \in \theta$ выполнено $(f(s), f(t)) \in V$ — отсюда и будет следовать равномерная непрерывность f. Поскольку окружение θ открыто, точка (s, t) входит в θ вместе с некоторой своей окрестностью, иначе говоря, существует такое окружение $\theta_0 \in \mathfrak{W}$, что $\theta_0\{s\} \times \theta_0\{t\} \subset \theta$. Далее, из определения f следует существование окружений θ_1, $\theta_2 \in \mathfrak{W}$, для которых $f_0[\theta_1\{t\}] \subset U\{f(t)\}$, $f_0[\theta_2\{s\}] \subset U\{f(s)\}$, причем можно считать, что θ_1, $\theta_2 \subset \theta_0$. Положим $\theta_3 = \theta_1 \cap \theta_2$. Если s_0, $t_0 \in \theta_3\{t\} \cap T_0$, где пересечение непусто в силу плотности T_0 в T, тогда $f_0(t_0) \in U\{f(t)\}$, или $(f(t), f(t_0)) \in U$, аналогично $(f(s), f(s_0)) \in U$. Так как $\theta_3 \subset \theta_0$, а $\theta_0[s] \times \theta_0[t] \subset \theta$, то $(f_0(s_0), f_0(t_0)) \in U$ и, поскольку s_0, $t_0 \in T_0$, то $(f(s_0), f(t_0)) \in U$. Итак, с учетом симметричности U получаем соотношения $(f(s), f(s_0)) \in U$, $(f(s_0), f(t_0)) \in U$, $(f(t_0), f(t)) \in U$, откуда $(f(s), f(t)) \in V$ и равномерная непрерывность f доказана.

3.4. При исследовании отображений метрических пространств бывает полезным следующий ниже факт, называемый *теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения*, который иногда дает возможность из свойств отображения получать информацию о свойствах его области определения.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение f из X в X называется *сжимающим*, если можно указать такое число $\alpha \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, что $\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant \alpha\rho(x', x'')$ для любых x', $x'' \in X$. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения f, если $x^* = f(x^*)$.

Теорема 4(3.III). *Пусть X — полное метрическое пространство и f — сжимающее отображение пространства X в себя. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения f.*

Доказательство. Покажем сначала, что сжимающее отображение f может иметь не более одной неподвижной точки, даже если пространство X не является полным. В самом деле, если x_1, x_2 — две различные неподвижные точки отображения f, то $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \alpha\rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, x_2)$, что невозможно.

Докажем существование неподвижной точки отображения f. Прежде всего убедимся в том, что при достаточно большом $r > 0$ шар $Q_1 = B_r\{x_0\}$, где x_0 — какая-либо фиксированная точка из X, обладает тем свойством, что $f[Q_1] \subset Q_1$. Действительно, если $x \in Q_1$, то

$$\rho(f(x), x_0) \leqslant \rho(f(x), f(x_0)) + \rho(f(x_0), x_0) \leqslant \alpha\rho(x, x_0) + \\ + \rho(f(x_0), x_0) \leqslant \alpha r + \rho(f(x_0), x_0),$$

откуда следует, что в качестве r можно взять любое число большее, чем $\rho(f(x_0), x_0)/(1 - \alpha)$.

Воспользовавшись принципом построения по индукции, создадим последовательность $\{Q_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) такую, что $Q_n = f[Q_{n-1}]$. Из выбора первого множества Q_1 и определения последовательности следует, что эта последовательность — убывающая, т. е. $Q_{n+1} \subset Q_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

Поскольку отображение f сжимающее, то, полагая $\operatorname{diam} Q_k = \sup\{\rho(x', x'') : x', x'' \in Q_k\}$ ($k \in \mathbf{N}$), при любом $n \in \mathbf{N}$ имеем $\operatorname{diam} Q_{n+1} \leqslant \alpha \operatorname{diam} Q_n$, откуда следует, что $\operatorname{diam} Q_n \leqslant \alpha^{n-1} \operatorname{diam} Q_1$ ($n \geqslant 2$).

Так как $\operatorname{diam} Q_1 \leqslant 2r < +\infty$, то из полученных оценок следует, что фильтр $\mathfrak{A}$, порожденный последовательностью $\{Q_n\}$, сходится в себе, а в силу полноты пространства X фильтр $\mathfrak{A}$ сходится к некоторой точке $x^* \in X$.

Поскольку $f[Q_{n+1}] \subset Q_n$, то фильтр $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle}$ тоньше, чем $\mathfrak{A}$, следовательно, и $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle} \to x^*$. С другой стороны, поскольку сжимающее отображение удовлетворяет условию Липшица, так что непрерывно (см. пункт 2.1), то $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle} \to f(x^*)$. Таким образом, x^* — неподвижная точка отображения f.

Замечание 1. Если X — компактное метрическое пространство, то, как можно показать, условия теоремы могут быть ослаблены, а именно, в этом случае можно требовать, чтобы f обладало лишь тем свойством, что $\rho(f(x'), f(x'')) < \rho(x', x'')$ для любых $x', x'' \in X$, $x' \neq x''$.

Замечание 2. Неподвижную точку отображения, удовлетворяющего условиям теоремы, можно получить как предел последовательности элементов пространства X.

3.5. Каждое отделимое равномерное пространство может быть взаимно однозначно погружено в полное равномерное пространство. Построение такого пространства мы осуществим в несколько этапов.

Обозначим через Ω совокупность всех сходящихся в себе фильтров в данном равномерном пространстве X (с равномерностью $\mathfrak{V}$). Множество Ω снабдим порядком, индуцированным порядком [7] в множестве всех фильтров.

I. *Пусть* Γ — *совокупность сходящихся в себе фильтров в* X, *обладающая тем свойством, что пересечение любой ее конечной части непусто. Тогда* $\psi = \inf \Gamma = \bigcup\limits_{\omega \in \Gamma} \omega \in \Omega$.

Действительно, возьмем какое-либо окружение V и для каждого $\omega \in \Gamma$ найдем такое множество $e_\omega \in \omega$, что $e_\omega \times e_\omega \subset V$. Очевидно, что объединение $e = \bigcup\limits_{\omega \in \Gamma} e_\omega$ входит в фильтр ψ. Рассмотрим произвольные элементы $x, y \in e$ и такие фильтры $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma$, что $x \in e_{\omega_1}$, $y \in e_{\omega_2}$. Из условий предложения легко следует, что фильтр $\omega_1 \vee \omega_2$ — собственный, так что пересечение $e_{\omega_1} \cap e_{\omega_2}$ непусто. Но тогда $(x, y) \in e_{\omega_1} \times e_{\omega_2} = (e_{\omega_2})^2 \circ (e_{\omega_1})^2 \subset V \circ V = V^{[2]}$. Таким образом, $e^2 \subset V^{[2]}$. Так как множества вида $V^{[2]}$ ($V \in \mathfrak{V}$) образуют базис фильтра окружений, из доказанного вытекает, что $\psi \in \Omega$.

II. *Каков бы ни был сходящийся в себе фильтр* ω, *существует единственный минимальный в множестве* Ω *фильтр* ξ, *более грубый, чем* ω.

В самом деле, в силу предложения I множество Ω удовлетворяет условиям леммы Цорна, из которой следует существование искомого минимального фильтра ξ. Единственность фильтра ξ также доказывается с помощью предложения I: если ξ_1 и ξ_2 — минимальные фильтры, более грубые, чем ω, то $\xi_1 \wedge \xi_2 \subset \omega$, так что $\xi_1 \wedge \xi_2 \in \Omega$, а это возможно лишь в случае $\xi_1 = \xi_2$.

Обозначим через Ξ совокупность всех минимальных элементов множества Ω и через Λ — отображение, сопоставляющее фильтру $\omega \in \Omega$ фильтр $\xi \in \Xi$, о котором шла речь в предложении II. Перефразируем в этих терминах результат предложения V(3.1).

III. *Какова бы ни была точка* $x \in X$, *фильтр* $\mathfrak{V}_x$ *окрестностей точки* x *входит в* Ξ.

Таким образом, топология τ равномерного пространства X является отображением множества X в множество Ξ. Обозначим через Ξ_0 область значений топологии τ, т. е. $\Xi_0 = R(\tau) = \tau[X]$[8].

---

[7] В настоящем пункте будем использовать обозначения пункта I.7.1.

[8] Полнота пространства X, очевидно, равносильна равенству $\Xi_0 = \Xi$.

IV. *Если* $\xi \in \Xi_0$ *и* $x \in \tau^{-1}\{\xi\}$, *то* $\tau^{-1}\{\xi\} = \overline{\{x\}}$. *В частности, если пространство* X *отделимо, то* τ *взаимно однозначно.*

Действительно, соотношение $\mathfrak{V}_y = \mathfrak{V}_x$ равносильно включению $y \in \overline{\{x\}}$ (см. III(1.3)).

Пусть V — окружение диагонали в пространстве X. Введем множество Q_V в Ξ^2, состоящее из всех таких пар (ξ, η), что можно указать множества $e_1 \in \xi$, $e_2 \in \eta$, для которых $e_1 \times e_2 \subset V$.

V. *Совокупность* $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{V}}$ *всех множеств вида* Q_V $(V \in \mathfrak{V})$ *является базисом равномерности в* Ξ.

В самом деле, если V_1, $V_2 \in \mathfrak{V}$ и $(\xi, \eta) \in Q_{V_1 \cap V_2}$, то существуют множества $e_1 \in \xi$, $e_2 \in \eta$ такие, что $e_1 \times e_2 \subset \subset V_1 \cap V_2$. Таким образом, $(\xi, \eta) \in Q_{V_1} \cap Q_{V_2}$, т. е. $Q_{V_1} \cap Q_{V_2} \supset \supset Q_{V_1 \cap V_2}$. Это означает, что совокупность $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{V}}$ фильтруется (по убыванию).

Так как элементы множества Ξ суть сходящиеся в себе фильтры, то для каждого $\xi \in \Xi$ и произвольного $V \in \mathfrak{V}$ найдется такое множество $e \in \xi$, что $e^2 \subset V$. Это означает, что $(\xi, \xi) \in Q_V$, т. е. что $Q_V \supset I_\Xi$.

Понятно, что если окружение V симметрично, то будет симметричным и определяемое им множество Q_V. Стало быть, в совокупности $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{V}}$ имеется коинициальная ей совокупность симметричных множеств.

Наконец, пусть V и U — такие окружения из $(\mathfrak{V})$, что $U^{[2]} \subset V$. Если $\xi, \eta, \zeta \in \Xi$ таковы, что $(\xi, \eta) \in Q_U$, $(\eta, \zeta) \in \in Q_U$, то, находя множества $e_1 \in \xi, e_2', e_2'' \in \eta$, $e_3 \in \zeta$ так, чтобы $e_1 \times e_2' \subset U$, $e_2'' \times e_3 \subset U$, учитывая, что $e_2' \cap e_2'' \neq \varnothing$, получим

$$(e_2'' \times e_3) \circ (e_1 \times e_2') = \bigcup_{x \in e_2' \cap e_2''} [(e_2' \times e_1)\{x\} \times (e_2'' \times e_3)\{x\}] =$$

$$= e_1 \times e_3 \subset U^{[2]} \subset V.$$

Следовательно, $(\xi, \zeta) \in Q_V$. Этим доказано соотношение $Q_U \circ Q_U \subset Q_V$ и вместе с ним утверждение данного предложения.

Снабжая множество Ξ равномерностью, порожденной базисом $\mathfrak{Q}_{\mathfrak{V}}$, будем в дальнейшем рассматривать Ξ как равномерное пространство.

VI. *Топология* τ *пространства* X *представляет собой равномерно непрерывное отображение пространства* X *в пространство* Ξ. *Если, кроме того,* X *отделимо, то и обратное отображение* τ^{-1} *равномерно непрерывно.*

Как обычно, положим $\widehat{\tau}: (x, y) \mapsto (\tau(x), \tau(y))$ $((x, y) \in X^2)$. Пусть $V \in \mathfrak{V}$ и U — такое симметричное окружение, что $U^{[3]} \subset V$. Для $(x, y) \in U$, как очевидно, имеем $U\{x\} \times U\{y\} \subset$

$\subset \bigcup\limits_{(s,t)\in U} (U\{s\}\times U\{t\}) = U^{[3]} \subset V$. Это означает, что $\widehat{\tau}[U] \subset Q_V$ и, следовательно, отображение τ равномерно непрерывно.

Если X — отделимое пространство и, стало быть, τ — взаимно однозначное отображение (предложение IV), то для $V \in \mathfrak{V}$ и ξ, $\eta \in \Xi_0$, связанных соотношением $(\xi, \eta) \in Q_V$, полагая $x = \tau^{-1}(\xi)$, $y = \tau^{-1}(\eta)$ и учитывая, что $\xi = \mathfrak{V}_x$, $\eta = \mathfrak{V}_y$, при некоторых U_1, $U_2 \in \mathfrak{V}$ можем написать, что $(x, y) \in U_1\{x\} \times U_2\{y\} \subset V$. Иными словами, $\widehat{\tau^{-1}}[Q_V] \subset V$, а это, очевидно, и означает равномерную непрерывность отображения τ^{-1}.

Таким образом, в предположении отделимости пространства X отображение τ осуществляет изоморфизм структур равномерного пространства в X и в подпространстве Ξ_0 пространства Ξ, что дает повод для отождествления равномерных пространств X и Ξ_0.

VII. *Каков бы ни был фильтр* $\omega \in \Omega$, *предфильтр* $\tau\langle\omega\rangle$ *в* Ξ *сходится к точке* $\xi = \Lambda(\omega)$. *В частности,* $\tau\langle\xi\rangle \to \xi$ *для любого* $\xi \in \Xi$.

Поскольку $\xi = \Lambda(\omega) \subset \omega$ и, стало быть, $\tau\langle\xi\rangle \subset \tau\langle\omega\rangle$, то для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда $\omega = \xi \in \Xi$. Итак, пусть $\xi \in \Xi$. Возьмем $V \in \mathfrak{V}$ и подберем такое окружение $U \in \mathfrak{V}$, что $U^{[2]} \subset V$. Поскольку фильтр ξ сходится в себе, в нем имеется такое множество e, что $e^2 \subset U$. Пусть x, $y \in e$, $z \in U\{x\}$. Поскольку $(y, x) \in e^2 \subset U$, $(x, z) \in U$, то $(y, z) \in U^{[2]} \subset V$. Таким образом, $e \times U\{x\} \subset V$. Но это означает, что $(\xi, \tau(x)) \in Q_V$ или, иначе, что $\tau(x) \in Q_V\{\xi\}$. Ввиду произвольности x, можем написать поэтому: $\tau\{e\} \subset Q_V\{\xi\}$, так что $\tau\langle\xi\rangle \to \xi$.

Из предложения VII вытекает

VIII. *Множество* Ξ_0 *плотно в пространстве* Ξ.

Опираясь на последний факт, докажем наконец, что Ξ — полное равномерное пространство.

IX. *Пространство* Ξ — *полное.*

Воспользуемся критерием полноты X(3.1). Пусть $\{\xi_\alpha\}$ $(\alpha \in \mathrm{A})$ — сходящееся в себе фильтрующееся семейство точек пространства Ξ. Возьмем $V \in \mathfrak{V}$ и $\alpha \in \mathrm{A}$. Согласно предложению VIII, в множестве Ξ_0 можно указать такой элемент $\xi_{V,\alpha}$, что $(\xi_\alpha, \xi_{V,\alpha}) \in Q_V$. Пусть, наконец, $x_{V,\alpha} \in \tau^{-1}\{\xi_{V,\alpha}\}$ $(V \in \mathfrak{V},\ \alpha \in \mathrm{A})$. Докажем, что семейство $\{x_{V,\alpha}\}$ $((V, \alpha) \in \mathfrak{V} \times \mathrm{A})$ сходится в себе (в пространстве X). Если, как и выше, V — произвольное окружение диагонали в X, а $U \in \mathfrak{V}$ выбрано так, чтобы было $U^{-1} = U$ и $U^{[3]} \subset V$, то, находя $\gamma \in \mathrm{A}$ из условия, что $(\xi_\alpha, \xi_\beta) \in Q_U$ для $\alpha, \beta \geqslant \gamma$ $(\alpha, \beta \in \mathrm{A})$, для указанных α и β и окружений U', U'', содержащихся в U, получим

$$(\xi_{U',\alpha}, \xi_\alpha) \in Q_{U'} \subset Q_U, \quad (\xi_\beta, \xi_{U'',\beta}) \in Q_{U''} \subset Q_U,$$

так что

$$(\varepsilon_{U',\alpha}, \xi_{U'',\beta}) \in (Q_U)^{[3]} \subset Q_V.$$

Таким образом, семейство $\{x_{V,\alpha}\}$ $((V, \alpha) \in \mathfrak{V} \times \mathrm{A})$ точек пространства X сходится в себе. Если обозначить через ω фильтр Фреше этого семейства и принять $\xi = \Lambda(\omega)$, то, согласно предложению VII, семейство $\{\tau(x_{V,\alpha})\}$ $((V, \alpha) \in \mathfrak{V} \times \mathrm{A})$, т. е. семейство $\{\xi_{V,\alpha}\}$ $((V, \alpha) \in \mathfrak{V} \times \mathrm{A})$ точек пространства Ξ сходится к точке ξ. Поэтому, каково бы ни было окружение $W \in \mathfrak{V}$, для достаточно больших $\alpha \in \mathrm{A}$ и некоторого симметричного окружения $V \in \mathfrak{V}$, содержащегося в W, будет $(\xi, \xi_{V,\alpha}) \in Q_W$. Поскольку $(\xi_{V,\alpha}, \xi_\alpha) \in Q_{V^{-1}} = Q_V \subset Q_W$, то для указанных α можно написать $(\xi, \xi_\alpha) \in Q_W \circ Q_W \subset Q_{W^{[2]}}$. Таким образом, $\xi_\alpha \to \xi$. Этим и доказана полнота пространства Ξ.

X. *Пространство Ξ отделимо.*

В самом деле, пусть $(\xi, \eta) \in \bigcap\limits_{V \in \mathfrak{V}} Q_V$. Для любого симметричного окружения $V \in \mathfrak{V}$ найдутся множества $e_1 \in \xi$, $e_2 \in \eta$ так, что $e_1 \times e_2 \subset V$, при этом можно считать, что $e_1^2, e_2^2 \subset V$. Полагая $e = e_1 \cup e_2$, получим $e^2 = e_1^2 \cup e_2^2 \cup (e_1 \times e_2) \cup \cup (e_2 \times e_1) \subset V$. Поскольку, очевидно, $e \in \xi \wedge \eta$, то фильтр $\xi \wedge \eta$ в X сходится в себе, что ввиду минимальности фильтров ξ и η возможно лишь при $\xi = \eta$.

Пусть X отделимое равномерное пространство. Полное отделимое равномерное пространство $\mathfrak{X}$ называется *пополнением данного пространства* X, если существует отображение $\varphi : X \to \mathfrak{X}$, осуществляющее изоморфизм (в категории равномерных пространств) пространства X на плотное в $\mathfrak{X}$ подпространство $\mathfrak{X}_0$[9]. В силу предложений VI, IX и X, пространство Ξ представляет собой (вместе с отображением τ) пополнение пространства X.

С точностью до изоморфизма пополнение данного отделимого равномерного пространства единственно.

---

[9] Иногда целесообразно говорить о пополнении как о паре $(\mathfrak{X}, \varphi)$.

XI. *Пусть* $(\mathfrak{X}, \varphi)$ *и* $(\mathfrak{Y}, \psi)$ — *пополнения данного отделимого равномерного пространства* X. *Отображение* $\psi\circ\varphi^{-1}$ *допускает распространение до изоморфизма пространства* $\mathfrak{X}$ *на пространство* $\mathfrak{Y}$.

В самом деле, отображения $\theta = \psi\circ\varphi^{-1}$ и $\theta^{-1} = \varphi\circ\psi^{-1}$ равномерно непрерывны и определены на плотных множествах соответствующих пространств. Поэтому существуют равномерно непрерывные распространения Θ и Θ' этих отображений на все пространство $\mathfrak{X}$ и соответственно на все $\mathfrak{Y}$. Суперпозиция $\Theta'\circ\Theta$ будет при этом распространением канонического вложения $I_{\mathfrak{X}_0}$ подпространства $\mathfrak{X}_0 = R(\varphi)$ в $\mathfrak{X}$, которое ввиду единственности должно совпадать с $I_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $\Theta'\circ\Theta = I_{\mathfrak{X}}$, Точно так же $\Theta\circ\Theta' = I_{\mathfrak{Y}}$. Но это означает, что $\Theta' = \Theta^{-1}$, так что Θ — искомый изоморфизм.

Принимая в качестве пополнения пространства X построенное выше пространство Ξ (вместе с отображением τ), мы будем обычно отождествлять элементы $x \in X$ с фильтрами $\tau(x) = \mathfrak{B}_x$ и, стало быть, считать, что X, отождествленное с Ξ_0, содержится в своем пополнении.

Если данное пространство X не отделимое, то под его пополнением подразумевается пополнение уже отделимого пространства $X/\overline{\Delta}$, где $\overline{\Delta}$ — замыкание (в пространстве X^2) диагонали пространства X. Если обозначить через τ_Δ снижение топологии τ на указанное фактор-пространство, то можно показать (предоставляем сделать это читателю), что пространство Ξ и в этом случае будет пополнением пространства X (но уже с отображением τ_Δ).

§ 4. ВПОЛНЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА В РАВНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Возможность оценки взаимной близости элементов равномерного пространства позволяет выяснять степень отклонения одного множества равномерного пространства от другого. Особое место занимают множества, «мало» отклоняющиеся от конечных,— они тесно связаны с бикомпактными множествами, и в терминах такого рода множеств удобно формулируются критерии бикомпактности множества в важных функциональных пространствах. Все это дает основание подробнее рассмотреть такие множества.

4.1. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — равномерное пространство. Множество $E \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для каждого окружения $V \in \mathfrak{B}$ существует такая конечная совокупность $\mathfrak{K} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ $n \in \mathbf{N})$ подмножеств множества X, что

$E_k \times E_k \subset V$ $(k = 1, \ldots, n)$ и $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. Иначе говоря, множество $E \subset X$ вполне ограничено, если существует его покрытие множествами, малыми любого порядка.

В определении вполне ограниченного множества можно считать множества совокупности $\mathfrak{K}$ попарно не пересекающимися и, кроме того, такими, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, ибо из любого конечного покрытия $\mathfrak{K}$ множества E можно сконструировать конечное покрытие множества E, состоящее из множеств, по крайней мере столь же малых, сколь множества первоначального покрытия, но уже попарно не пересекающихся и в объединении дающих в точности множество E. Проверку такого свойства покрытий предоставим читателю.

К определению вполне ограниченного множества можно подойти несколько иначе. Пусть $E \subset X$ и $V \in \mathfrak{B}$. Множество $A \subset X$ называется *V-сетью* для E, если $E \subset V[A] = \bigcup\limits_{x \in A} V\{x\}$, т. е. если множество E можно покрыть окрестностями $V\{x\}$ точек $x \in A$, определяемыми одним окружением $V \in \mathfrak{B}$. Иначе, A есть V-сеть для E, если для любого $y \in E$ найдется такое $x \in A$, что $(x, y) \in V$.

Если (X, ρ) — метрическое пространство, а $V = B_\varepsilon$ — цилиндр радиуса $\varepsilon > 0$, то B_ε-сеть называют просто *ε-сетью*. Таким образом, множество $A \subset X$ есть ε-сеть для $E \subset X$, если для любого $y \in E$ можно указать $x \in A$ так, что $\rho(x, y) \leqslant \varepsilon$. Можно сказать также, что A есть ε-сеть для E, если E можно покрыть шарами радиуса ε с центрами в точках множества A.

I. *Множество E равномерного пространства X вполне ограничено в том и только в том случае, если для любого окружения $V \in \mathfrak{B}$ существует конечная V-сеть для E.*

В самом деле, если E — вполне ограниченное множество в X и $V \in \mathfrak{B}$, то существует такое конечное семейство $\{E_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$, что $E_k \times E_k \subset V$ и $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$. Можно считать, что $E_k \neq \varnothing$ $(k = 1, \ldots, n)$. В каждом из E_k выберем какую-либо точку $x_k \in E_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ и покажем, что конечное множество $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$ является V-сетью для E. Действительно, так как $E_k \times E_k \subset V$, то и $\{x_k\} \times E_k \subset V$, или $E_k \subset V\{x_k\}$. Поскольку $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, то $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} V\{x_k\}$, следовательно, K есть конечная V-сеть для E.

Обратно, задавшись произвольным окружением $V \in \mathfrak{B}$, найдем симметричное окружение $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $U \circ U \subset V$.

Обозначим через L конечную U-сеть для E. Тогда $E \subset \bigcup_{x \in L} U\{x\}$ и с учетом симметричности U имеем $U\{x\} \times U\{x\} \subset U \circ U \subset V$, следовательно, совокупность $\{U\{x\}\}$ $(x \in L)$ — конечное покрытие $E \subset X$ множествами, малыми порядка V, откуда и следует, что E вполне ограничено.

Заметим, что построенная в доказательстве предложения I V-сеть содержится в E.

Можно ослабить условия доказанного предложения в части достаточности.

II. *Если для каждого окружения $V \in \mathfrak{B}$ существует вполне ограниченная V-сеть для E, то E вполне ограничено.*

Действительно, взяв $V \in \mathfrak{B}$, найдем симметричное окружение $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $U \circ U \subset V$. Построим вполне ограниченную U-сеть A для E. Так как A вполне ограничено, то по доказанному существует конечная U-сеть K для A. Тогда

$$E \subset U[A] \subset U[U[K]] = (U \circ U)[K] \subset V[K],$$

откуда следует, что конечное множество K является V-сетью для E, следовательно, E вполне ограничено.

Ясно, что в предложениях I, II можно рассматривать V-сети для V не из всего фильтра $\mathfrak{B}$, а лишь из какого-нибудь его базиса, например, только замкнутые, или, в случае метрического пространства, только ε-сети.

III. *Множества E и $\overline{E}$ вполне ограничены или нет одновременно.*

Результат предложения следует непосредственно из предложения I с учетом того, что вместо $\mathfrak{B}$ можно рассматривать базис равномерности, состоящий из замкнутых окружений.

4.2. Вполне ограниченные множества в равномерном пространстве оказываются тесно связанными с бикомпактными, и такая связь устанавливается в следующем факте, носящем название *теоремы Хаусдорфа*.

Теорема 1(4.III). *Для относительной компактности*[10] *множества E в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{B})$ необходимо, а если X полное, то и достаточно, чтобы E было вполне ограниченным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть E относительно компактно, т. е. $\overline{E}$ компактно в X. Установим существование конечной V-сети для E, каково бы ни было откры-

[10]) Напомним (см. пункт II.2.7), что множество E в топологическом пространстве называется относительно компактным, если его замыкание $\overline{E}$ компактно.

тое окружение $V \in \mathfrak{V}$. Так как образ $V\{x\}$ при каждом $x \in \bar{E}$ служит открытой окрестностью точки x, то из компактности $\bar{E}$ с помощью предложения IV(II.2.7) и примыкающих к нему замечаний следует существование такого конечного множества $K \subset \bar{E}$, что $\bar{E} \subset \bigcup_{x \in K} V\{x\} = V[K]$. Поскольку открытые окружения составляют базис фильтра окружений, то $\bar{E}$ вполне ограничено, а тогда и E также вполне ограничено.

Достаточность. Пусть X — полное равномерное пространство и E — вполне ограниченное множество в X. Рассмотрим ультрафильтр $\mathfrak{U}$ непустых множеств пространства X, включающий множество $\bar{E}$, и докажем, что $\mathfrak{U}$ сходится в себе. Возьмем некоторое окружение $V \in \mathfrak{V}$. Так как $\bar{E}$ вместе с E вполне ограничено, то найдется такое конечное семейство $\{E_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ непустых подмножеств множества X, для которого $\bar{E} \subset \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ и $E_k \times E_k \subset V$ $(k = 1, \ldots, n)$. Поскольку $\bar{E} \in \mathfrak{U}$, то $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{U}$. Согласно предложению I(I.7.3) в семействе $\{E_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ найдется множество E_l, входящее в ультрафильтр $\mathfrak{U}$. Но $E_l \times E_l \subset V$, так что ультрафильтр $\mathfrak{U}$ сходится в себе. Пространство X по условию полное, следовательно, существует такая точка $x \in X$, что $\mathfrak{U} \to x$, а поскольку $\bar{E} \in \mathfrak{U}$, то $x \in \bar{E}$. Предложение III(II.2.7) позволяет сделать вывод о бикомпактности множества $\bar{E}$. Теорема доказана.

Замечание. Нередко бывает так, что само пространство X не полное, но существует полное отделимое его подпространство X_0, содержащее E. Тогда результат теоремы Хаусдорфа в части достаточности сохраняется.

Действительно, из теоремы Хаусдорфа следует относительная компактность множества E в подпространстве X_0, а так как отделимое равномерное пространство хаусдорфово, то E относительно компактно и в X (см. следующие непосредственно за предложением II(II.2.7) замечания).

4.3. Установим критерий относительной компактности множества в метрическом пространстве, называемый *теоремой Больцано — Вейерштрасса*.

Теорема 2(4.III) *Для относительной компактности множества в метрическом пространстве необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности $\{x_n\}$ точек этого множества можно было извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. указать такую строго возрастающую последовательность*

$\{m_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) *натуральных чисел, что последовательность* $\{x_{m_n}\}$ ($n \in \mathbf{N}$) *сходится.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $E \subset X$ относительно компактно. Рассмотрим последовательность $\varphi : \{x_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) точек множества E. Фильтр Фреше $\mathfrak{A}$ этой последовательности, т. е. фильтр в X, порожденный предфильтром в X, состоящим из множеств $\varphi[[n, \to]] = \{x_k : k \in [n, \to]\}$ ($n \in \mathbf{N}$), очевидно, включает в себя относительно компактное множество E, следовательно, можно указать более тонкий, чем $\mathfrak{A}$, сходящийся фильтр $\mathfrak{C}$ в X. Пусть $x = \lim \mathfrak{C}$. Рассматривая счетный базис фильтра окрестностей точки x, состоящий из шаров $B_{1/n}\{x\}$ ($n \in \mathbf{N}$), можно утверждать, что в каждом таком шаре содержится множество фильтра $\mathfrak{C}$. Обозначим через E_n такое множество $E_n \in \mathfrak{C}$, что $E_n \subset B_{1/n}\{x\}$ $n \in \mathbf{N}$). Каждое множество E_n ($n \in \mathbf{N}$) имеет непустое пересечение с областью значений $R(\varphi)$ данной последовательности. Возьмем число m_1 так, чтобы $x_{m_1} \in E_1$, и допустим, что для некоторого натурального числа n уже построено семейство $\{m_1, \ldots, m_n\}$ натуральных чисел, обладающее свойствами: а) $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$; б) $x_{m_k} \in E_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Поскольку фильтры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ зацепляются, пересечение $E_{n+1} \cap \varphi[(m_n, \to]]$ непусто. Возьмем натуральное число m_{n+1} так, чтобы $x_{m_{n+1}} \in E_{n+1} \cap \varphi[(m_n, \to]]$. Тогда $m_{n+1} > m_n$ и $x_{m_{n+1}} \in E_{n+1}$. Согласно принципу построения по индукции существует такая строго возрастающая последовательность $\{m_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) натуральных чисел, что $x_{m_n} \in E_n$ при каждом $n \in \mathbf{N}$. Из построения последовательности $\{x_{m_n}\}$ ($n \in \mathbf{N}$) ясно, что $x_{m_n} \to x$. Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим теперь, что из всякой последовательности точек множества $E \subset X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, однако E не является относительно компактным.

Покажем вначале, что при высказанных предположениях подпространство $\overline{E}$ метрического пространства X полно. В самом деле, пусть $\{y_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность элементов из $\overline{E}$. Так как шары $B_{1/n}\{y_n\}$ ($n \in \mathbf{N}$) имеют непустое пересечение с E, для каждого натурального n в E найдется элемент x_n такой, что $\rho(x_n, y_n) \leqslant 1/n$. Нетрудно понять, что последовательность $\{x_n\}$ так же, как и $\{y_n\}$, сходится в себе:

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m) + \rho(y_m, x_m) \leqslant 1/n + 1/m + \\ + \rho(y_n, y_m).$$

Так как по условию из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, то по предложению IX(3.1) сама последовательность $\{x_n\}$ сходится. Обозначим ее предел через x. Из оценки $\rho(y_n, x) \leqslant \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x)$ легко следует, что $y_n \to x$. Полнота $\overline{E}$ установлена.

Если множество E не оказывается относительно компактным, то по теореме Хаусдорфа (с учетом замечания к ней) E не вполне ограничено. Последнее означает, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого конечного множества $K \subset E$ найдется элемент $x \in E$, для которого $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$ при всех $y \in K$. Отсюда, в частности, следует, что E непусто. Возьмем в E какой-либо элемент x_1 и предположим, что построено конечное семейство $\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ элементов из E, для которых $\rho(x_i, x_k) \geqslant \varepsilon$ $(i, k = 1, \ldots, n;\ i \neq k)$. Взяв в качестве K множество всех элементов этого семейства, найдем элемент $x_{n+1} \in E$ такой, что $\rho(x_{n+1}, x_k) \geqslant \varepsilon$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Из принципа построения по индукции можно заключить о существовании последовательности $\{x_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ точек множества E, обладающей свойством: $\rho(x_k, x_l) \geqslant \varepsilon$ при всех $k, l \in \mathrm{N}$, $k \neq l$. Выделим из $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ $(k \in \mathbf{N})$. Так как $\{x_{n_k}\}$ сходится, то она сходится в себе, следовательно, должно найтись такое $k_0 \in \mathrm{N}$, что $\rho\left(x_{n_i}, x_{n_k}\right) < \varepsilon$ при всех натуральных $i, k \geqslant k_0$, а это противоречит определению последовательности $\{x_n\}$. Теорема доказана.

4.4. Рассмотрим произвольное множество T, равномерное пространство $(X, \mathfrak{V})$ и множество X^T всех отображений множества T в множество X, снабженное сильной равномерностью. Отображение $f \in X^T$ называется *вполне ограниченным*, если его область значений $R(f)$ — вполне ограниченное множество. Совокупность всех вполне ограниченных отображений из T в X обозначим через $M(T, X)$ или просто через M. Если $X = \mathbf{R}$, то используют обозначение $M(T, \mathbf{R}) = M_T$. Очевидно, что множество M_T состоит из ограниченных функций.

I. *Множество $M(T, X)$ замкнуто в пространстве X^T (с сильной равномерностью).*

Убедимся в том, что множество значений $R(g)$ отображения $g \in \overline{M}$ вполне ограничено. Пусть V — симметричное окружение диагонали в X. Окрестность $\widetilde{V}\{g\}$ отображения g имеет с M непустое пересечение. Возьмем $f \in M \cap \widetilde{V}\{g\}$. Тогда $(g, f) \in \widetilde{V}$, или $f \circ g^{-1} \in V$, а ввиду симметричности V имеем также, что $g \circ f^{-1} \in V$. Поскольку $I_T \subset f^{-1} \circ f$, где I_T — тождественное отображение T на себя, то $g \subset g \circ I_T \subset g \circ f^{-1} \circ f \subset V \circ f$. Отсюда получаем соотношение

$$R(g) = g[T] \subset V \circ f[T] = V[f[T]] = V[R(f)].$$

Таким образом, $R(f)$ является V-сетью для $R(g)$, и так как $R(f)$ вполне ограничено, то согласно предложению II(4.1) будет вполне ограниченным и $R(g)$. Предложение доказано.

II. *Отображение $f \in X^T$ вполне ограничено в том и только в том случае, если для любого $V \in \mathfrak{V}$ существует конечное семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ попарно не пересекающихся подмножеств множества T такое, что $T = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$ и $f[T_k] \times f[T_k] \subset V$ $(k = 1, \ldots, n)$.*

Действительно, пусть $f \in M$ и V — окружение из $\mathfrak{V}$. Из полной ограниченности множества $R(f)$ следует существование такого конечного семейства $\{E_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ попарно не пересекающихся подмножеств множества X, что $R(f) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ и $E_k \times E_k \subset V$ $(k = 1, \ldots, n)$. Множества $T_k = f^{-1}[E_k]$ таковы, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} T_k = T, T_i \cap T_j = \varnothing \quad (i, j = 1, \ldots, n; i \neq j),$$

и $f[T_k] \times f[T_k] \subset V$ $(k = 1, \ldots, n)$, так что семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ требуемое.

Обратно, положим $E_k = f[T_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k = \bigcup_{k=1}^{n} f[T_k] = f[T] = R(f)$$

и, если выполнены условия предложения, то множество $R(f)$ вполне ограничено.

Теорема 3(4.III). *Пусть X — полное равномерное пространство. Множество $\mathfrak{C} \subset M(T, X)$ относительно компактно в сильной равномерности на $M(T, X)$ в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

1) *существует такое бикомпактное множество $C \subset X$, что $R(f) \subset C$ для всех $f \in \mathfrak{C}$;*

2) *для любого $V \in \mathfrak{V}$ существует такое конечное семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ подмножеств T, что $T = \bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$ и $f[T_k] \times f[T_k] \subset V$ для всех $f \in \mathfrak{C}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{\mathfrak{C}}$ — компактное множество в $M(T, X)$. Рассмотрим множество $E = \bigcup\limits_{f \in \mathfrak{C}} R(f)$ и докажем, что оно относительно компактно. Согласно теореме Хаусдорфа относительно компактное множество вполне ограничено. Взяв окружение $U \in \mathfrak{V}$, выберем в $\mathfrak{C}$ конечную $\tilde{U}$-сеть $\{f_1, \ldots, f_n\}$

($n \in \mathbf{N}$). Каждое из множеств $R(f_i)$ ($i = 1, \ldots, n$) вполне ограничено, а поскольку $M(T, X)$, будучи замкнутым множеством полного равномерного пространства X^T, само является полным равномерным пространством, то вновь по теореме Хаусдорфа $R(f_i)$ относительно компактно. Следовательно, множество $A = \bigcup_{i=1}^{n} R(f_i)$ также относительно компактно. Отсюда и из теоремы Хаусдорфа можно заключить о том, что A вполне ограничено.

Убедимся в том, что A представляет собой U-сеть для E. В самом деле, пусть $f \in \mathfrak{E}$. Так как $\{f_1, \ldots, f_n\}$ есть $\widetilde{U}$-сеть для $\mathfrak{E}$, найдется отображение f_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) такое, что $(f_i, f) \in \widetilde{U}$, и с учетом определения $\widetilde{U}$ получаем $f \subset U \circ f_i$. Отсюда следует, что

$$R(f) = U[f_i[T]] = U[R(f_i)] \subset U[A]$$

для каждого $f \in \mathfrak{E}$, тем самым $E \subset U[A]$. Мы установили, что вполне ограниченное множество A является U-сетью для E. Учитывая предложение II(4.1), можно сделать вывод о том, что E вполне ограничено, а по теореме Хаусдорфа оно относительно компактно, стало быть, компактное множество $C = \overline{E}$ удовлетворяет первому условию теоремы.

Проверим выполнение второго условия. Пусть $V \in \mathfrak{B}$ и $U \in \mathfrak{B}$ — такое симметричное окружение, что $U^{[3]} \subset V$. Найдем в множестве $\mathfrak{E}$ конечную $\widetilde{U}$-сеть $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ($k \in \mathbf{N}$). Для каждого из f_i ($i = 1, \ldots, k$) построим разбиение $\{T_j^i\}$ ($j = 1, \ldots, m_i$) множества T на попарно не пересекающиеся подмножества такие, что $f_i[T_j^i] \times f_i[T_j^i] \subset U$. Совокупность множеств вида

$$T_{j_1}^1 \cap T_{j_2}^2 \cap \ldots \cap T_{j_l}^l \quad (l = 1, \ldots, k;\ j_i = 1, \ldots, m_i, i \leqslant l)$$

образует новое конечное разбиение $\{T_q\}$ ($q = 1, \ldots, N$) множества T, причем из определения этого разбиения следует, что $f_i[T_q] \times f_i[T_q] \subset U$ для всех $i = 1, \ldots, k$; $q = 1, \ldots, N$.

Для отображения $f \in \mathfrak{E}$ можно указать такое f_i ($1 \leqslant i \leqslant k$), что $(f, f_i) \in \widetilde{U}$, т. е. что $f \subset U \circ f_i$. Тогда, принимая во внимание, что $f^{-1} \subset f_i^{-1} \circ U$, получаем

$$f[T_q] \times f[T_q] = \hat{f}[T_q^2] = f \circ T_q^2 \circ f^{-1} \subset U \circ f_i \circ T_q^2 \circ f_i^{-1} \circ$$
$$\circ U \subset U \circ (f_i[T_q] \times f_i[T_q]) \circ U \subset U^{[3]} \subset V$$
$$(i = 1, \ldots, k;\ q = 1, \ldots, N).$$

Последнее соотношение показывает, что разбиение $\{T_q\}$ $(q = 1, \ldots, N)$ требуемое.

Предположим теперь, что множество $\mathfrak{C} \subset M(T, X)$ удовлетворяет обоим условиям теоремы, и установим полную ограниченность множества $\mathfrak{C}$ — этого в силу полноты пространства $M(T, X)$ достаточно для доказательства относительной компактности множества $\mathfrak{C}$.

Пусть V — произвольное окружение из $\mathfrak{V}$. Найдем такое окружение $U \in \mathfrak{V}$, что $U \circ U \subset V$, и конечное семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ подмножеств множества T, для которых $f[T_k] \times f[T_k] \subset U$ при всех $f \in \mathfrak{C}$, $k = 1, \ldots, n$, причем множества из этого семейства можно считать непустыми и попарно не пересекающимися. Так как C бикомпактно и согласно теореме 1 и предложению III(4.1) вполне ограничено, существует конечная U-сеть K для C.

Рассмотрим произведение K^n. Поскольку множества семейства $\{T_k\}$ попарно не пересекаются, каждый элемент $z = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ порождает отображение $f_z = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (T_k \times \{x_k\})$, причем, очевидно, $f_z \in M(T, X)$. Положим $\mathfrak{K} = \{f_z\}(z \in K^n)$. Выберем из каждого T_k по элементу $t_k \in T_k$. Поскольку $f(t_k) \in R(f) \subset C$, а K представляет собой конечную U-сеть для C, то в K найдется элемент x_k такой, что $(x_k, f(t_k)) \in U$. Проделав эту процедуру для всех $k = 1, \ldots, n$, получим точку $z = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Сравним значения $f_z(t)$ и $f(t)$ на каждом элементе $t \in T$. Так как $T_i \cap T_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, то существует единственное k такое, что $t \in K^n$. В силу определения f_z получаем $f_z(t) = x_k$. Из выбора $z \in K^n$ следует, что $(f_z(t), f(t_k)) \in U$, а поскольку

$$(f(t_k), f(t)) \in f[T_k] \times f[T_k] \subset U,$$

то $(f_z(t), f(t)) \in U \circ U \subset V$. Последнее соотношение имеет место при каждом $t \in T$, следовательно, $(f_z, f) \in \widetilde{V}$, откуда можно сделать вывод о том, что $\mathfrak{K}$ — конечная $\widetilde{V}$-сеть для $\mathfrak{C}$, так что множество $\mathfrak{C}$ вполне ограничено. Теорема доказана.

Рассмотрим топологические пространства T, X и совокупность $C(T, X)$ всех непрерывных отображений пространства T в X.

III. *Если X — отделимое равномерное пространство, то множество $C(T, X)$ замкнуто в пространстве X^T (с сильной равномерностью).*

Действительно, пусть $f_0 \in \overline{C(T, X)}$. Тогда существует фильтрующееся семейство $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ элементов из $C(T, X)$, сходящееся к f_0 в топологии сильной равномерности на X^T.

Согласно следствию из теоремы Стокса — Зайделя отображение f_0 непрерывно на T, следовательно, множество $C(T, X)$ замкнуто в X^T.

Заметим, что если X — полное отделимое равномерное пространство, то $C(T, X)$ — также полное в равномерности, индуцированной сильной равномерностью на X^T. Действительно, в этом случае X^T — полное равномерное пространство, так что $C(T, X)$ полно как замкнутое множество полного равномерного пространства.

IV. *Если T — бикомпактное равномерное пространство, а X — полное отделимое равномерное пространство, то $C(T, X) \subset M(T, X)$.*

В самом деле, согласно теореме Вейерштрасса (см. теорему 5(2.II)) образ $f[T]$ бикомпактного множества T при непрерывном отображении $f: T \to X$ бикомпактен, а по теореме Хаусдорфа (с учетом предложения III(4.1)) множество $f[T]$ вполне ограничено, так что $f \in M(T, X)$, следовательно, $C(T, X) \subset \subset M(T, X)$.

Очередной факт, называемый *теоремой Арцела — Асколи*, содержит критерий относительной компактности множества в пространстве непрерывных отображений равномерных пространств.

Теорема 4(4.III). *Пусть $(T, \mathfrak{W})$, $(X, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства, причем T — бикомпактное, а X — отделимое и полное. Множество $\mathfrak{E} \subset C(T, X)$ относительно компактно в сильной равномерности в том и только в том случае, если выполнены условия*

1) *существует бикомпактное множество $C \subset X$ такое, что $R(f) \subset C$ при всех $f \in \mathfrak{E}$;*

2) *для каждого окружения V из $\mathfrak{V}$ существует окружение $\theta \in \mathfrak{W}$ такое, что $\hat{f}[\theta] \subset V$ при всех $f \in \mathfrak{E}$.*

Доказательство. Поскольку множество $\overline{\mathfrak{E}}$ компактно в $C(T, X)$, а $C(T, X) \subset M(T, X)$, то $\overline{\mathfrak{E}}$ компактно в $M(T, X)$, так что существование компактного множества C, удовлетворяющего условию 1, следует из теоремы 3.

Для проверки второго условия возьмем окружение $V \in \mathfrak{V}$ и найдем такое $U \in \mathfrak{V}$, что $U^{[8]} \subset V$. Используя полную ограниченность множества $\mathfrak{E}$, найдем конечное множество $\mathfrak{K} \subset C(T, X)$, являющееся $\tilde{U}$-сетью для $\mathfrak{E}$. Так как по теореме Кантора каждое отображение $g \in \mathfrak{K}$ равномерно непрерывно, существует окружение $\theta_g \in \mathfrak{W}$ такое, что $\hat{f}[\theta_g] \subset U$. Рассмотрим окружение $\theta = \bigcap_{g \in \mathfrak{K}} \theta_g$. Поскольку $\mathfrak{K}$ есть $\tilde{U}$-сеть для $\mathfrak{E}$, то для любого $f \in \mathfrak{E}$ можно указать $g \in \mathfrak{K}$ так, что $f \in \tilde{U}\{g\}$, или $f \circ g^{-1} \subset U$, откуда $f \subset U \circ g$. Из определения θ получаем, что

$$\hat{f}[\theta] = f \circ \theta \circ f^{-1} \subset U \circ g \circ \theta_g \circ g^{-1} \circ U \subset U \circ U \circ U \subset V,$$

так что θ — требуемое во втором условии окружение.

Пусть теперь выполнены оба условия теоремы. Проверим, что в этом случае выполнены и условия теоремы 3. Нетрудно заметить, что в обеих теоремах первые условия совпадают, поэтому приступим сразу к проверке второго условия. Рассмотрим окружение $V \in \mathfrak{B}$. Из второго условия теоремы следует существование такого окружения $\theta \in \mathfrak{W}$, что $\hat{f}[\theta] \subset V$ $(f \in \mathfrak{S})$. Так как T бикомпактно, то множество его точек вполне ограничено. Согласно определению вполне ограниченного множества T можно разбить на конечное число попарно не пересекающихся подмножеств $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ так, что $T_k \times T_k \subset \theta$. Тогда

$$f[T_k] \times f[T_k] = \hat{f}[T_k^2] \subset \hat{f}[\theta] \subset V,$$

следовательно, конечное семейство $\{T_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет второму условию теоремы 3.

Итак, оказываются выполненными условия теоремы 3, из которой следует, что множество $\overline{\mathfrak{S}}$ компактно в $M(T, X)$. Поскольку $\overline{\mathfrak{S}} \subset C(T, X) \subset M(T, X)$, то $\overline{\mathfrak{S}}$ компактно и в $C(T, X)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство, а $X = \mathbf{R}$ или $X = \mathbf{C}$. Поскольку цилиндры B_ε $(\varepsilon > 0)$ образуют базис фильтра окружений в равномерности метрического пространства, для справедливости второго условия теоремы достаточно выполнения условия

2′) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(s) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ при всех $f \in \mathfrak{S}$, $s, t \in T$, у которых $\rho(s, t) \leqslant \delta$.

Замечание 2. Если $X = \mathbf{R}$ со стандартной равномерностью, то, поскольку замкнутый промежуток числовой прямой компактен, условие 1 теоремы следует из такого:

1′) существует $L > 0$ такое, что $|f(t)| \leqslant L$ для всех $\varphi \in \mathfrak{S}$, $t \in T$.

Глава IV

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Одной из наиболее широко используемых в анализе алгебраических структур оказывается структура векторного пространства, основные моменты которой мы изложим в начале главы. Затем будут рассмотрены составные структуры анализа, в которых принимает участие структура векторного пространства, а именно, структура топологического векторного и, в частности, локально выпуклого пространства.

§ 1. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Алгебраической основой большинства пространств, рассматриваемых в анализе, служат так называемые векторные пространства. Здесь, как и всюду раньше, мы ограничимся изложением лишь начальных сведений теории векторных пространств.

1.1. Пусть X — группа (см. I.5.1) со сложением в качестве групповой операции и R — некоторое поле (см. I.5.1). Предположим, что, кроме того, задано отображение π произведения $R\times X$ в X, результат действия которого на элемент (α, x) множества $R\times X$ обозначают $\pi(\alpha, x) = \alpha x$, обладающее свойствами:

1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ $\quad(\alpha \in R,\ x,y \in X)$;
2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ $\quad(\alpha, \beta \in R,\ x \in X)$;
3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\quad(\alpha, \beta \in R,\ x \in X)$;
4) $1x = x$ $\quad(x \in X)$.

В этой ситуации тройка (X, R, π) называется *векторным пространством над полем* R. Элементы поля R называются *скалярами*. Отображение π называется *операцией умножения на скаляр*, причем элемент αx $(\alpha \in R,\ x \in X)$ называют *произведением скаляра* α *на элемент* x.

Поскольку группа X есть, на самом деле, пара $(X,+)$, то, строго говоря, под векторным пространством следует понимать комплекс $(X, +, R, \pi)$. Как правило, в обозначениях векторного пространства мы будем указывать только множество X, лишь подразумевая все остальные составляющие имеющейся на нем структуры.

Подобно тому, как была принята (см. I.5.1) сокращенная запись $E' + E''$, где E', E'' — множества в группе X, для множеств $\mathrm{A} \subset R$ и $E \subset X$ положим $\mathrm{A}E = \{\alpha x : \alpha \in \mathrm{A},\ x \in X\}$. Если множество A состоит из единственного скаляра α, то вместо $\{\alpha\}E$ будем писать просто αE и использовать аналогичные символы в других подобных ситуациях.

Каждое поле R можно считать векторным пространством над самим собой, если под π подразумевать операцию умножения в поле R.

Чтобы построить более содержательные примеры векторных пространств, рассмотрим непустое семейство $\{X_t\}$ $(t \in T)$ векторных пространств над одним и тем же полем скаляров R. Произведение $\mathfrak{X} = \prod\limits_{t \in T} X_t$, как нетрудно проверить, оказывается группой относительно следующим образом определенной операции: в качестве суммы $x + y$ элементов $x, y \in \mathfrak{X}$ принимается такой элемент произведения $\mathfrak{X}$, что $(x + y)_t = x_t + y_t$ при каждом $t \in T$. Если для $x \in \mathfrak{X}$, $\alpha \in R$ за произведение αx принять такой элемент $u \in \mathfrak{X}$, что $u_t = \alpha x_t$ при каждом $t \in T$, то оказываются выполненными все условия определения векторного пространства, т. е. группа $\mathfrak{X}$ становится векторным пространством, которое называется *произведением* данного *семейства векторных пространств*.

Полагая, в частности, $X_t = R$ для каждого $t \in T$, получим, что множество R^T всех отображений данного множества T в поле R представляет собой векторное пространство над полем R. Согласно сказанному выше, операции сложения и умножения на скаляр определяются в R^T так:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t),\ (\alpha x)(t) = \alpha x(t)\ (x, y \in R^T,\ \alpha \in R,\ t \in T). \tag{1}$$

Рассмотрим теперь векторное пространство X и непустое множество $X_0 \subset X$. Если для любых $x, y \in X_0$, $\alpha \in R$ элементы $x + y$, αx также входят в X_0, то множество X называется *линейным*. Понятно, что эти условия можно заменить одним: если $x, y \in X_0$ и $\alpha, \beta \in R$, то и $\alpha x + \beta y$ также входит в X_0. По индукции нетрудно получить, что если $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — конечное семейство элементов линейного множества $X_0 \subset X$, а $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство скаляров с тем же множеством индексов Ξ, то сумма $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi x_\xi$, которая называется *линейной комбинацией* элементов данного семейства $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ с коэффициентами α_ξ, также принадлежит X_0.

Если снабдить линейное множество X_0 индуцированными из X алгебраическими операциями, т. е. за операцию сложения в X_0 взять сужение на X_0^2 операции сложения в X, а в качестве операции умножения на скаляр — сужение на $R \times X_0$ операции л в X, то, как нетрудно показать, получим векторное пространство над полем R. Линейное множество X_0 вместе с указанными алгебраическими операциями и полем R называется *подпространством* данного *векторного пространства* X. Впредь, говоря о линейном множестве как о векторном пространстве, мы всегда будем иметь в виду указанную выше структуру.

Нетрудно показать, что в произведении $\mathfrak{X} = \prod_{t \in T} X_t$ непустого семейства $\{X_t\}$ $(t \in T)$ векторных пространств над полем R совокупность всех таких элементов $x \in \mathfrak{X}$, что $x_t \neq 0$ лишь для t из некоторого конечного множества $T_0 \subset T$, представляет собой линейное множество, которое, следовательно, можно рассматривать как векторное пространство. Оно называется *прямой суммой* [1] данного *семейства векторных пространств* и обозначается символом $\sum_{t \in T} X_t$ или $\sum\limits_{t \in T} X_t$.

В частности, если при каждом $t \in T$ пространство X_t совпадает с полем скаляров R, прямая сумма по составу элементов тождественна множеству Σ_T всех таких отображений множества T в R, что каждое из них лишь на конечном подмножестве множества T принимает отличные от нуля значения.

Если R — либо поле $\mathbf{R}$ вещественных, либо поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, а T — некоторое множество, то векторное пространство, являющееся подпространством пространства R^T, называется в этом случае *функциональным*.

Приведем еще один пример линейного множества. Рассмотрим фильтрующееся семейство $\{X_\xi\}(\xi \in \Xi)$ векторных пространств над полем R и семейство $\{\omega_\mu^\lambda\}((\lambda,\mu) \in \Sigma)$ линейных отображений, (см. ниже, пункт 2.2), где $\omega_\mu^\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ $((\lambda,\mu) \in \Sigma)$. Допустим, что семейство $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ образует обратный спектр. В этой ситуации, как легко понять, проективный предел $\varprojlim_{\xi \in \Xi} X_\xi$ данного обратного спектра представляет собой линейное множество в произведении $\mathfrak{X} = \prod_{\xi \in \Xi} X_\xi$, так что и сам, будучи подпространством векторного пространства $\mathfrak{X}$, оказывается векторным пространством.

Рассмотрим опять произвольное векторное пространство X. Так как пересечение любого семейства линейных множеств

[1] Можно показать, что именно так устроена сумма семейства объектов в категории групп (см. I.4.3.).

само является линейным множеством, то в совокупности всех линейных множеств, содержащих данное множество $E \subset X$, существует наименьшее. Оно называется *линейной оболочкой* множества E и обозначается через $\mathscr{L}(E)$.

Теорема 1(1.IV). *Линейная оболочка $\mathscr{L}(E)$ множества E в векторном пространстве X совпадает с множеством X_0 всех элементов из X, представимых в виде*

$$x = \sum_{u \in \Theta} \alpha_u u, \tag{2}$$

где Θ — произвольное конечное подмножество множества E, а $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta)$ — произвольное семейство скаляров.

Доказательство. По определению $E \subset \mathscr{L}(E)$, поэтому множество $\mathscr{L}(E)$, будучи линейным, должно включать в себя каждую линейную комбинацию элементов множества E, так что $X_0 \subset \mathscr{L}(E)$.

Учитывая минимальность линейной оболочки, для завершения доказательства достаточно установить линейность множества X_0. Пусть x, $y \in X_0$, α, $\beta \in R$. Предположим, что $x = \sum_{u \in \Theta'} \alpha_u u$, $y = \sum_{u \in \Theta''} \beta_u u$. Положим $\Theta = \Theta' \cup \Theta''$ и $\alpha_u = 0$ для $u \in \Theta \diagdown \Theta'$, а $\beta_u = 0$ для $u \in \Theta \diagdown \Theta''$. Тогда с учетом свойств операции умножения на скаляр свойства аддитивности суммы и легко устанавливаемого свойства дистрибутивности (полного аналога этого свойства суммы конечного числового семейства, см. IV(1.6.4)) получим

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{u \in \Theta'} \alpha_u u + \beta \sum_{u \in \Theta''} \beta_u u = \alpha \sum_{u \in \Theta} \alpha_u u + \beta \sum_{u \in \Theta} \beta_u u =$$
$$= \sum_{u \in \Theta} (\alpha\alpha_u) u + \sum_{u \in \Theta} (\beta\beta_u) u = \sum_{u \in \Theta} (\alpha\alpha_u + \beta\beta_u) u.$$

Таким образом, линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ также представима в форме (2). Теорема доказана.

Замечание. Как ясно из доказательства теоремы, можно добиться того, что для данных элементов x, $y \in \mathscr{L}(E)$ множество $\Theta \subset E$, участвующее в представлении этих элементов в форме (2), будет одним и тем же.

1.2. Рассмотрим векторное пространство X и множество $E \subset X$. Говорят, что элементы множества E *линейно независимы*, если из соотношений $E_0 \subset E$ и $\mathscr{L}(E_0) = \mathscr{L}(E)$ вытекает тождество $E_0 = E$.

Множество $E \subset X$ называется *базисом* векторного пространства X, если его элементы линейно независимы и $\mathscr{L}(E) = X$.

Ясно, что всякое множество, элементы которого линейно независимы, служит базисом своей линейной оболочки.

В следующих ниже предложениях I, II, III под E понимается линейно независимое множество в X.

I. *Если* Θ — *конечное подмножество множества* E *и семейство* $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta)$ *скаляров таковы, что*

$$\sum_{u \in \Theta} \alpha_u u = 0, \tag{3}$$

то $\alpha_u = 0$ *при любом* $u \in \Theta$.

Действительно, предположим, что в множестве Θ имеется такой элемент v, что $\alpha_v \neq 0$. Тогда $v = \sum_{u \in \Theta'} (-\alpha_u/\alpha_v) u$, где $\Theta' = \Theta \setminus \{v\}$. Обозначим $E \setminus \{v\}$ через E'. Поскольку $\Theta' \subset E'$, то на основании теоремы 1 $v \in \mathscr{L}(E')$, а так как и $E' \subset \mathscr{L}(E')$, то $E = E' \cup \{v\} \subset \mathscr{L}(E')$. Отсюда вытекает соотношение $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E')$, которое противоречит линейной независимости множества E.

Предложение I допускает также легко доказываемое обращение.

II. *Если множество* $E \subset X$ *не является линейно независимым, то существуют непустое конечное множество* $\Theta \subset E$ *и семейство* $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta)$ *отличных от нуля скаляров такие, что имеет место* (3).

Рассмотрим какой-либо элемент $x \in \mathscr{L}(E)$. На основании теоремы 1 его можно представить в виде (2) с $\Theta \subset E$. Хотя такое представление и не единственно, но лишь за счет нулевых коэффициентов. Конкретнее, допустим, что имеется два представления x в виде (2):

$$x = \sum_{u \in \Theta'} \alpha_u u, \qquad x = \sum_{u \in \Theta''} \beta_u u,$$

где Θ', Θ'' — конечные подмножества множества E. Тогда

III. *Для каждого* $\alpha \in \Theta_0 = \Theta' \cap \Theta''$ *должно быть* $\alpha_u = \beta_u$. *Если* $u \in \Theta' \setminus \Theta_0$, *то* $\alpha_u = 0$ *и точно так же* $\beta_u = 0$ *при* $u \in \Theta'' \setminus \Theta_0$.

Доказательство предложения легко провести, используя предложение I.

Уточнением предложения III является следующий легко доказываемый факт.

IV. *Для каждого элемента* $x \in \mathscr{L}(E)$ *существует единственное конечное множество* $\Theta_x \subset E$ *и единственное семейство* $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta_x)$ *отличных от нуля скаляров такие, что* $x = \sum_{u \in \Theta_x} \alpha_u u$.

Используя лемму Цорна, можно установить существование достаточно обширных линейно независимых множеств. Вот точная формулировка соответствующего результата.

V. *Каково бы ни было линейно независимое множество E_0 в векторном пространстве X, существует базис E пространства X, содержащий множество E_0.*

Заметим, что поскольку пустое множество линейно независимо, то каждое векторное пространство имеет по крайней мере один базис.

По индукции доказывается

VI. *Пусть E и F — базисы векторного пространства X. Если базис E конечен, то будет конечным и базис F, причем число его элементов совпадает с числом элементов базиса E.*

Отметим, что результат предложения VI имеет место и в случае, когда векторное пространство X не имеет конечного базиса, а именно, можно доказать, что, каковы бы ни были базисы E и F векторного пространства X, существует взаимно однозначное отображение одного базиса на другой.

Если векторное пространство X имеет конечный базис (согласно предложению VI тогда и всякий другой базис в X будет конечным), то X называется *конечномерным*, а число элементов базиса (которое также не зависит от выбора базиса) — *размерностью* пространства X. Если n — размерность пространства X, то говорят, что это пространство *n-мерно*.

Векторное пространство, не имеющее конечного базиса, называется *бесконечномерным*.

С помощью предложения V легко доказать

VII. *Подпространство X_0 конечномерного векторного пространства X также конечномерно, причем размерность m пространства X_0 не больше размерности n пространства X. Если при этом $m = n$, то $X_0 = X$.*

VIII. *Пусть K — конечное множество в векторном пространстве X. Тогда линейная оболочка $\mathscr{L}(K)$ — конечномерное векторное пространство.*

Пусть T — конечное множество, состоящее из n элементов. Рассмотрим пространство R^T всех отображений множества T в R. Определим функции x_τ ($\tau \in T$), полагая $x_\tau(t) = 1$, если $t = \tau$, и $x_\tau(t) = 0$, если $t \neq \tau$, и покажем, что множество $E = \{x_\tau : \tau \in T\}$ — базис пространства R^T. Действительно, если $x = \sum\limits_{\tau \in T} \alpha_\tau x_\tau$, то для любого $t \in T$ имеем $x(t) = \sum\limits_{\tau \in T} \alpha_\tau x_\tau(t)$, так что согласно определению x получаем $x(t) = \alpha_t$. В частности, при $x = 0$ получаем $\alpha_t = 0$ для каждого $t \in T$ и, значит, множество E линейно независимо. Нетрудно убедиться в том, что $\mathscr{L}(E) = R^T$, т. е. E — базис пространства R^T.

В частности, пространство R^n конечномерно (и имеет размерность n). При $n = 1$ приходим к следующему результату: поле скаляров R, рассматриваемое как векторное пространство, одномерно (при этом в качестве базиса может быть взято множество, состоящее из единицы поля).

1.3. Если в определении линейного множества предъявить коэффициентам линейной комбинации те или иные требования, то этим будут выделены разнообразные классы множеств, играющие соответствующую роль в теории векторных пространств.

Рассмотрим векторное пространство X над полем R. Предположим, что в произведении R^2 выделено симметричное множество Γ (т. е. $\Gamma^{-1} = \Gamma$), содержащее пару $(1, 0)$. Множество E в пространстве X будем называть Γ-*множеством*, если вместе с элементами x, y множество E содержит любую их линейную комбинацию $\alpha x + \beta y$ с такими коэффициентами, что $(\alpha, \beta) \in \Gamma$.

Если Γ состоит только из пар $(1, 0)$ и $(0, 1)$, то каждое множество пространства X оказывается Γ-множеством с таким Γ. В другом крайнем случае, когда $\Gamma = R^2$, класс непустых Γ-множеств совпадает с классом линейных множеств.

Понятно, что линейное множество будет и Γ-множеством при любом Γ и, вообще, если $\Gamma_0 \supset \Gamma$, то Γ_0-множество является также и Γ-множеством.

Нетрудно понять, что пересечение любого семейства Γ-множеств само будет Γ-множеством. Поэтому, каково бы ни было множество E в данном векторном пространстве X, существует наименьшее Γ-множество, содержащее E. Это Γ-множество называется Γ-*оболочкой* множества E и обозначается символом $H_\Gamma(E)$[2]).

Поскольку линейная оболочка $\mathscr{L}(E)$ множества $E \subset X$ является и Γ-множеством, содержащим E, то

$$H_\Gamma(E) \subset \mathscr{L}(E). \tag{4}$$

Так как $E \subset H_\Gamma(E)$, то из (4) вытекает соотношение $\mathscr{L}(E) \subset \subset \mathscr{L}(H_\Gamma(E)) \subset \mathscr{L}(E)$, т. е.

$$\mathscr{L}(H_\Gamma(E)) = \mathscr{L}(E). \tag{5}$$

Из определений следуют

I. *Если E, F — какие-либо Γ-множества векторного пространства X и λ, μ — произвольные скаляры, то множество $G = \lambda E + \mu F$ также является Γ-множеством.*

II. *Пусть $\mathfrak{E}$ — фильтрующаяся по возрастанию совокупность Γ-множеств в векторном пространстве X. Тогда множество $\widehat{E} = \bigcup\limits_{E \in \mathfrak{E}} E$ — также Γ-множество в X.*

[2]) При конкретных Γ могут применяться и другие термины вместо «Γ-оболочка» и другие символы для ее обозначения. Так, например, в случае $\Gamma = R^2$ мы говорим «линейное множество» и «линейная оболочка», и пишем $\mathscr{L}(E)$ вместо $H_{R^2}(E)$. Другие примеры будут даны ниже.

Конкретные классы Г-множеств мы рассмотрим, предполагая, что поле скаляров R совпадает с $\mathbf{R}$ или с $\mathbf{C}$.

Пусть сначала Г есть множество всех таких пар $(\alpha, \beta) \in R^2$, что $\alpha + \beta = 1$. В этом случае Г-множества называются *аффинными*. Аналогично изменяются и другие термины. Аффинную оболочку множества $E \subset X$ будем обозначать через $\mathrm{Aff}(E)$.

III. *Если Z — аффинное множество, $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — конечное семейство его элементов, а $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — такое семейство скаляров, что*

$$\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi = 1, \tag{6}$$

то линейная комбинация $\sum\limits_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi x_\xi$ входит в Z.

Действительно, в силу (6) множество Ξ непусто. Если, кроме того, число n его элементов равно единице, то доказываемое утверждение очевидно. Допустим, что для некоторого натурального числа m доказываемое утверждение установлено для любого конечного семейства, множество индексов которого содержит не более чем m элементов, и рассмотрим такое семейство $\{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, что множество Ξ имеет $m+1$ элемент. Поскольку $m+1>1$, среди элементов множества Ξ найдется такой элемент ξ', что $\alpha_\xi \neq 1$. Тогда, полагая $\Xi' = \Xi \setminus \{\xi'\}$, имеем

$$\sum_{\xi \in \Xi'} \alpha_\xi (1-\alpha_{\xi'})^{-1} = (1-\alpha_{\xi'})^{-1} \sum_{\xi \in \Xi'} \alpha_\xi = (1-\alpha_{\xi'})^{-1}(1-\alpha_{\xi'}) = 1,$$

так что в силу предположения $\sum\limits_{\xi \in \Xi'} \alpha_\xi (1-\alpha_{\xi'})^{-1} x_\xi \in Z$. Но тогда по определению аффинного множества

$$(1-\alpha_{\xi'}) \sum_{\xi \in \Xi'} \alpha_\xi (1-\alpha_{\xi'})^{-1} x_\xi + \alpha_{\xi'} x_{\xi'} = \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi x_\xi \in Z.$$

Можно доказать факт, аналогичный результату теоремы 1.

IV. *Аффинная оболочка множества E векторного пространства X состоит из всех таких элементов $x \in \mathscr{L}(E)$, для которых в представлении* (2) $x = \sum\limits_{u \in \Theta} \alpha_u u$ *выполнено:*

$$\sum_{u \in \Theta} \alpha_u = 1. \tag{7}$$

В самом деле, согласно предложению III множество Z всех элементов указанного вида содержится в $\mathrm{Aff}(E)$. Докажем, что Z — афинное множество. Пусть

$$x = \sum_{u \in \Theta'} \alpha_u u, \quad y = \sum_{u \in \Theta''} \beta_u u \quad \left(\Theta', \Theta'' \subset E, \ \sum_{u \in \Theta'} \alpha_u = \sum_{u \in \Theta''} \beta_u = 1\right)$$

— произвольные элементы из Z. Согласно замечанию к теореме 1 можно считать $\Theta' = \Theta''$, при этом не нарушив условия (7). Полагая $\Theta = \Theta' = \Theta''$ и рассматривая такие скаляры α, β, что $\alpha + \beta = 1$, можем написать

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{u \in \Theta} \alpha_u u + \beta \sum_{u \in \Theta} \beta_u u = \sum_{u \in \Theta} (\alpha\alpha_u + \beta\beta_u) u.$$

Но

$$\sum_{u \in \Theta} (\alpha\alpha_u + \beta\beta_u) = \alpha \sum_{u \in \Theta} \alpha_u + \beta \sum_{u \in \Theta} \beta_u = \alpha + \beta = 1,$$

следовательно, $\alpha x + \beta y \in Z$. Поскольку $Z \supset E$, то, будучи аффинным, множество Z содержит и $\operatorname{Aff}(E)$, т. е. с учетом установленного ранее совпадает с $\operatorname{Aff}(E)$.

Класс аффинных множеств простым образом связан с классом линейных множеств. А именно, легко устанавливаются

V. *Если X_0 — линейное множество в векторном пространстве X и $x_0 \in X$, то множество $Z = x_0 + X$ аффинное.*

VI. *Если Z — аффинное множество в векторном пространстве X и $x_0 \in Z$, то множество $X_0 = Z - x_0$ линейно.*

Пусть E состоит из двух элементов u, v. Аффинная оболочка множества E называется *прямой*, проходящей через u и v. В соответствии с предложением IV соотношение $x \in \operatorname{Aff}(E) = \operatorname{Aff}(u, v)$ равносильно тому, что x можно представить в виде $x = \alpha u + (1 - \alpha)u$ при некотором $\alpha \in R$. Заметим, что такое представление единственно, так как из равенства $\alpha u + (1 - \alpha)v = \alpha_1 u + (1 - \alpha_1)v$ вытекает, что $(\alpha - \alpha_1)u = (\alpha - \alpha_1)v$, а это, если учесть, что $u \neq v$, возможно лишь при $\alpha = \alpha_1$.

Рассмотрим теперь $\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in R^2 : |\alpha| + |\beta| \leqslant 1\}$. В этом случае непустое Γ-множество называется *абсолютно выпуклым*. Поскольку всякое абсолютно выпуклое множество содержит нулевой элемент, то существует абсолютно выпуклое множество, содержащее данное множество E. Оно называется *абсолютно выпуклой оболочкой* множества E и обозначается через $\operatorname{aco}(E)$.

Для абсолютно выпуклых множеств имеют место аналоги предложений III и IV. Мы сформулируем лишь один из них — о строении абсолютно выпуклой оболочки.

VII. *Элемент x векторного пространства X принадлежит абсолютно выпуклой оболочке $\operatorname{Aco}(E)$ множества $E \subset X$ в том и только в том случае, если x можно представить в виде линейной комбинации* (2) *с коэффициентами, удовлетворяющими неравенству*

$$\sum_{u \in \Theta} |\alpha_u| \leqslant 1. \tag{8}$$

Из предложения VII вытекает

VIII. *Если V — абсолютно выпуклое множество, то*

$$\mathscr{L}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV. \tag{9}$$

В самом деле, при любом $n \in \mathbf{N}$ множество nV содержится в $\mathscr{L}(V)$. С другой стороны, если $x = \sum_{u \in \Theta} \alpha_u u$, где Θ — конечное подмножество множества V, а α_u — произвольные скаляры, то, взяв натуральное число m так, что $\sum_{u \in \Theta} |\alpha_u| \leqslant m$, в силу предложения VII получим, что $m^{-1}x = \sum_{u \in \Theta} \alpha_u m^{-1} x \in V$, поскольку $\sum_{u \in \Theta} |\alpha_u m^{-1}| \leqslant 1$. Следовательно, $x \in mV$. Остается воспользоваться теоремой 1.

Заметим, что вместо (9) можно было написать $\mathscr{L}(V) = \sum_{\alpha \in \mathbf{R}^+} \alpha V$.

Следующий класс Г-множеств получается, если за Г принять множество $\{(\alpha, \beta) \in R^2 : \alpha\beta = 0, \ |\alpha| + |\beta| \leqslant 1\}$. Непустое Г-множество в этом случае называется *уравновешенным*. Уравновешенность множества S векторного пространства X означает, как ясно из определения, что $S \neq \varnothing$ и при любом таком $\alpha \in R$, что $|\alpha| \leqslant 1$ и при любом $x \in S$ произведение αx входит в S, иными словами, что $\alpha S \subset S$ $(\alpha \in R, \ |\alpha| \leqslant 1)$. Отметим, что абсолютно выпуклое множество уравновешено.

Если E — непустое множество пространства X, то уравновешенная оболочка множества E, как легко проверить, совпадает с объединением $\bigcup_{|\alpha| \leqslant 1} \alpha E$.

Следующий класс Г-множеств получается при Г, состоящем из всех таких пар $(\alpha, \beta) \in R^2$, что α и β — вещественные неотрицательные числа и $\alpha + \beta = 1$. Такое Г-множество в векторном пространстве X называется *выпуклым*. Понятно, что каждое абсолютно выпуклое множество является выпуклым. По тем же соображениям выпуклым оказывается и любое аффинное множество. В этом случае Г-оболочка множества $E \subset X$ называется *выпуклой оболочкой* множества E и обозначается символом $\operatorname{co}(E)$.

Укажем аналоги предложений IV и VII для выпуклых множеств

IX. *Элемент x векторного пространства X принадлежит выпуклой оболочке $\operatorname{co}(E)$ множества $E \subset X$ в том и только в том случае, если его можно представить в виде линейной комбинации*

(2) *с вещественными неотрицательными коэффициентами, удовлетворяющими условию*

$$\sum_{u \in \Theta} \alpha_u = 1. \tag{10}$$

Выпуклые множества обладают следующим свойством.

X. *Если* V — *выпуклое множество*, α, β — *вещественные неотрицательные скаляры, то*

$$\alpha V + \beta V = (\alpha + \beta) V. \tag{11}$$

В самом деле, даже без предположения о выпуклости очевидно включение $(\alpha + \beta) V \subset \alpha V + \beta V$. Пусть теперь $z \in \alpha V + \beta V$. Это значит, что существуют элементы x, $y \in V$ такие, что $z = \alpha x + \beta y$. Так как можно считать $\alpha + \beta > 0$, то $(\alpha + \beta)^{-1} z = \alpha (\alpha + \beta)^{-1} x + \beta (\alpha + \beta)^{-1} y$, и ввиду того, что коэффициенты последней линейной комбинации неотрицательны, а сумма их равна единице, из выпуклости V получаем, что $(\alpha + \beta)^{-1} z \in V$, или $z \in (\alpha + \beta) V$.

Классы выпуклых и абсолютно выпуклых множеств следующим образом связаны между собой.

XI. *Множество векторного пространства абсолютно выпукло в том и только в том случае, если оно выпукло и уравновешено.*

Учитывая сделанное ранее замечание, достаточно показать, что выпуклое уравновешенное множество $V \subset X$ будет абсолютно выпуклым. Пусть x, $y \in V$ и скаляры α, β удовлетворяют условию $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$. Если $\alpha\beta = 0$, то $\alpha x + \beta y \in V$ вследствие уравновешенности множества V. В случае, когда $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, опять используя уравновешенность множества V, имеем $(|\alpha| + |\beta|) \alpha |\alpha|^{-1} x \in V$, $(|\alpha| + |\beta|) \beta |\beta|^{-1} y \in V$. А тогда вследствие выпуклости V

$$\alpha x + \beta y = \frac{|\alpha|}{|\alpha| + |\beta|} (|\alpha| + |\beta|) \frac{\alpha}{|\alpha|} x + \\ + \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|} (|\alpha| + |\beta|) \frac{\beta}{|\beta|} y \in V.$$

Пусть u и v — различные элементы векторного пространства X. Выпуклая оболочка $\operatorname{co}(\{u, v\}) = \operatorname{co}(u, v)$ называется *отрезком* с концами u и v. Согласно предложению IX, каждый элемент $x \in \operatorname{co}(u, v)$ допускает представление в виде

$$x = \alpha u + (1 - \alpha) v \qquad (\alpha \in \mathbf{R},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{12}$$

Поскольку отрезок $\operatorname{co}(u, v)$ содержится в прямой $\operatorname{Aff}(u, v)$, проходящей через u, v, то представление (12) единственно.

Единственным образом определяются и концы отрезка. Точнее говоря, если для двух пар элементов u, v и u_1, v_1 имеем $\mathrm{co}(u, v) = \mathrm{co}(u_1, v_1)$, то множества $\{u, v\}$ и $\{u_1, v_1\}$ совпадают. Несложное доказательство этого факта предоставим читателю.

Следующий рассматриваемый нами класс Г-множеств возникает при Г, состоящем из всех пар вещественных неотрицательных чисел. Непустое Г-множество в этом случае называется *конусом* (или говорят еще *выпуклым конусом*), а наименьший конус, содержащий данное множество, *конической оболочкой* этого множества.

Не входя в очевидные подробности, укажем, что коническая оболочка какого-либо множества состоит из всевозможных линейных комбинаций элементов этого множества с вещественными неотрицательными коэффициентами.

Если x — отличный от нулевого элемент векторного пространства X, то коническая оболочка одноэлементного множества $\{x\}$ называется *лучом*, проходящим через x. Он, очевидно, состоит из всех элементов вида αx, где α — произвольный вещественный неотрицательный скаляр. Предоставляем читателю возможность убедиться самостоятельно в том, что коническая оболочка произвольного выпуклого множества $V \subset X$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{\alpha \geqslant 0} \alpha V$.

Отметим, что, хотя формально определения выпуклого множества и конуса имеют смысл как в случае $R = \mathbf{R}$, так и при $R = \mathbf{C}$, по существу, эти понятия представляют интерес лишь для вещественного случая ($R = \mathbf{R}$). Для таких пространств имеет место, например, следующий факт.

XII. *Пусть K — конус в векторном пространстве X над полем вещественных чисел. Линейная оболочка $\mathscr{L}(K)$ множества K состоит из всех элементов $x \in X$, представимых в виде разности элементов из K.*

В самом деле, представим $x \in \mathscr{L}(E)$ в форме (2). Если $\Theta^+ = \{u \in \Theta : \alpha_u \geqslant 0\}$, $\Theta^- = \{u \in \Theta : \alpha_u < 0\}$, то $\Theta = \Theta^+ \cup \Theta^-$, $\Theta^+ \cap \Theta^- = \varnothing$, поэтому

$$x = \sum_{u \in \Theta} \alpha_u u = \sum_{u \in \Theta^+} \alpha_u u - \sum_{u \in \Theta^-} (-\alpha_u) u, \tag{13}$$

и остается заметить, что обе линейные комбинации в правой части (13) принадлежат конусу K.

Последний из рассматриваемых конкретных классов Г-множеств получается при $\Gamma = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 : \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \alpha + \beta \leqslant 1\}$. Множество из этого класса называется *коническим отрезком*. Установим связь конических отрезков с выпуклыми множествами пространства X.

XIII. *Множество $E \subset X$ представляет собой конический отрезок в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нуль.*

Действительно, конический отрезок $E \subset X$ включает нуль и является выпуклым множеством.

Рассмотрим теперь такое выпуклое множество $E \in X$, что $0 \in E$. Пусть $x, y \in E$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta \leqslant 1$. Если $\alpha, \beta = 0$, то $\alpha x + \beta y \in E$. Предположим, что хотя бы один из скаляров α, β отличен от нуля. Так как $0 \leqslant \alpha(\alpha + \beta)^{-1} \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta(\alpha + \beta)^{-1} \leqslant 1$ и $\alpha(\alpha + \beta)^{-1} + \beta(\alpha + \beta)^{-1} = 1$, то $\alpha(\alpha + \beta)^{-1}x + \beta(\alpha + \beta)^{-1}y \in E$, или $(\alpha + \beta)^{-1}(\alpha x + \beta y) \in E$, откуда $(\alpha x + \beta y) \in (\alpha + \beta)E$, т. е. $\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)u$, где u — некоторый элемент из E. Остается лишь заметить, что если $u \in E$ и $0 < \gamma \leqslant 1$, то из условий предложения следует: $\gamma u = (1 - \gamma)0 + \gamma u \in E$, так что если $\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)u$, где $u \in E$, то и $\alpha x + \beta y \in E$. Предложение доказано.

§ 2. ОТОБРАЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

При изучении векторных пространств немаловажную роль играют отображения таких пространств, «сохраняющие» структуру векторного пространства. Однако удобнее предварительно провести краткое исследование несколько более общего объекта.

2.1. Рассмотрим векторные пространства X, Y над одним полем скаляров R и линейное множество A в произведении $X \times Y$ данных векторных пространств. Соответствие (A, X, Y) называется *линейным соответствием* из X в Y. Ясно, что одновременно с A линейным будет и обратное соответствие (A^{-1}, Y, X). Отметим, что область определения $D(A)$ и множество значений $R(A)$ линейного соответствия представляют собой линейные множества в X и в Y соответственно. Легко доказать

I. *Образ $A[E]$* Г-*множества $E \subset X$ при линейном соответствии A является* Г-*множеством в пространстве Y.*

Будем говорить, что структуры векторных пространств X_1 и Y согласованы, если пересечение $Y \cap X_1$ является подпространством каждого из данных пространств.

II. *Пусть A — линейное соответствие из X в Y и B — линейное соответствие из векторного пространства X_1 в векторное пространство Y. Если структуры векторных пространств Y и X_1 согласованы, то суперпозиция $B \circ A$ — линейное соответствие из X в Y.*

III. *Для того чтобы линейное соответствие (A, X, Y) было однозначным, необходимо и достаточно, чтобы $A\{0\} = \{0\}$.*

IV. *Пусть A — линейное соответствие из X в Y. Если $x \in X$ и α — отличный от нулевого скаляр, то $A\{\alpha x\} = \alpha A\{x\}$. Если по крайней мере один из элементов x_1, x_2 входит в $D(A)$,* то $A\{x_1 + x_2\} = A\{x_1\} + A\{x_2\}$.

В самом деле, если $x \notin D(A)$, то и $\alpha x \notin D(A)$. В этом случае оба множества $A\{\alpha x\}$ и $\alpha A\{x\}$ пусты — равенство $A\{\alpha x\} = \alpha A\{x\}$ выполняется тривиальным образом. Если $x \in D(A)$, то и $\alpha x \in D(A)$. Пусть $y \in A\{\alpha x\}$. Тогда $(\alpha x, y) \in A$ и $\alpha(x, \alpha^{-1}y) \in A$. Ввиду линейности A получим, что $(x, \alpha^{-1}y) \in A$, или $\alpha^{-1}y \in A\{x\}$, следовательно, $y \in \alpha A\{x\}$, так что $A\{\alpha x\} = \alpha A\{x\}$. Противоположное включение легко устанавливается подобным способом.

Предположим, что $x_1 \in D(A)$, $x_2 \notin D(A)$. Тогда $x_1 + x_2 \notin D(A)$, ибо иначе и элемент $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$ вошел бы в $D(A)$. Значит, в этом случае $A(x_1 + x_2\} = \varnothing$ и $A\{x_1\} + A\{x_2\} = A\{x_1\} + \varnothing = \varnothing$. Допустим, что x_1, $x_2 \in D(A)$ и $y_i \in A\{x_i\}$ $(i = 1, 2)$. Тогда $(x_i, y_i) \in A$ $(i = 1, 2)$, а ввиду линейности A получим, что $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in A$, следовательно, $y_1 + y_2 \in A\{x_1 + x_2\}$, так что $A\{x_1\} + A\{x_2\} \subset A\{x_1 + x_2\}$. Аналогично устанавливается и противоположное включение.

2.2. Пусть X, Y — векторные пространства над полем скаляров R. Однозначное линейное соответствие A из X в Y называется *линейным оператором* (или линейным отображением) из X в Y. Линейный оператор, переводящий векторное пространство X в поле скаляров, называется *линейным функционалом* на X. Поскольку область определения линейного оператора представляет собой линейное множество, т. е. подпространство пространства X, то, заменяя, если необходимо, пространство X этим подпространством, можно добиться того, что рассматриваемый линейный оператор будет определен на всем данном пространстве. Именно это и будет предполагаться в дальнейшем без особых оговорок. Фиксироваться будут лишь отступления от этого правила.

Линейный оператор $A : X \to Y$ обладает, очевидно, тем свойством, что

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2) \tag{1}$$

для любых x_1, $x_2 \in X$, α, $\beta \in R$, и, как легко показать, это свойство является характеристическим для линейности отображения $A : X \to Y$.

Таким образом, линейный оператор является гомоморфизмом групп X и Y.

По индукции можно показать, что

$$A\left(\sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi x_\xi\right) = \sum_{\xi \in \Xi} \alpha_\xi A(x_\xi)$$

для любого конечного семейства $\{x_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) элементов пространства X и семейства $\{\alpha_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) скаляров.

Нетрудно понять, что линейная комбинация $\alpha A_1 + \beta A_2$ линейных операторов $A_i: X \to Y$ ($i = 1, 2$) со скалярами α, $\beta \in R$ представляет собой линейный оператор, так что совокупность всех линейных операторов, переводящих векторное пространство X в векторное пространство Y, оказывается линейным множеством в векторном пространстве Y^X, следовательно, само является векторным пространством над полем R с покоординатными операциями суммы и умножения на скаляр. Это векторное пространство будем обозначать через $L(X, Y)$. В случае $Y = R$ векторное пространство $L(X, R)$, т. е. пространство всех линейных функционалов на X, будем обозначать через X'.

В дополнение к предложению I(2.1) докажем

I. *Пусть* $A \in L(X, Y)$ *и* $\Gamma \subset R^2$. *Тогда для любого множества* $E \subset X$ *имеет место равенство* $A[H_\Gamma(E)] = H_\Gamma(A[E])$, *т. е. образ* Γ*-оболочки множества* $E \subset X$ *при линейном отображении* $A: X \to Y$ *совпадает с* Γ*-оболочкой образа* $A[E]$.

Заметим, что в силу предложения I(2.1) образ $A[H_\Gamma(E)]$ представляет собой Γ-множество, содержащее, очевидно, $A[E]$. Пусть G — какое-либо Γ-множество пространства Y, содержащее $A[E]$. Ввиду линейности $R(A)$ можно считать, что $G \subset R(A)$. Тогда $E \subset A^{-1}[A[E]] \subset A^{-1}[G]$, откуда, вновь используя предложение I(2.1), получаем, что $H_\Gamma(E) \subset A^{-1}[G]$, а из однозначности A — что $A[H_\Gamma(E)] \subset A[A^{-1}[G]] = G$.

Множество $A^{-1}(0) = \ker A$ называется *ядром* линейного оператора $A \in L(X, Y)$. Поскольку множество $\{0\} \subset Y$ линейно, то $\ker A$ — линейное множество пространства X.

Пусть X, Y, Z — векторные пространства над полем R и $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$. Суперпозиция $B \circ A$ (она нередко называется *произведением операторов* A и B и обозначается через BA), очевидно, однозначна, так что является линейным оператором (из X в Z). Ясно, что если оба оператора A и B взаимно однозначны, то таким же будет их произведение.

Таким образом, класс всех векторных пространств с линейными операторами в качестве морфизмов и суперпозицией в качестве закона композиции представляет собой категорию. Изоморфизм объектов X, Y категории векторных пространств будем называть изоморфизмом пространств X, Y.

Укажем несколько простых примеров линейных операторов.

Рассмотрим непустое семейство $\{X_t\}$ ($t \in T$) векторных пространств над одним и тем же полем скаляров R. Положим $\mathfrak{X} = \prod_{t \in T} X_t$. Пусть, далее, T_0 — непустое подмножество множества T и $\mathfrak{X}_0 = \prod_{t \in T_0} X_t$. Как ясно из определения, проекция P_{T_0} с множеством индексов T_0 (см. I.2.7) является линейным оператором из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}_0$. Если, в частности, $X_t = R$ при каждом $t \in T$, т. е. если $\mathfrak{X} = R^T$, а $\mathfrak{X}_0 = R^{T_0}$, то проекция P_{T_0} сопоставляет отображению $x \in R^T$ его сужение на множество T_0. Предполагая, что T_0 состоит из единственного элемента τ, получаем $R^{T_0} = X_\tau = R$, так что проекция P_τ является линейным функционалом, который обычно обозначают символом ε_τ. Понятно, что функционал ε_τ сопоставляет отображению $x \in R^T$ его значение на элементе τ, т. е. $\varepsilon_\tau(x) = x(\tau)$. Функционал ε_τ можно рассматривать и на любом подпространстве пространства R^T.

Отображение P множества X в себя называется *идемпотентным*, если $P \circ P = P$. Линейный идемпотентный оператор, переводящий векторное пространство X в себя, называется *проектором* на X. Если P — проектор, то оператор $Q = I - P$, где $I : X \to X$ — тождественное отображение, также проектор, поскольку

$$Q^2(x) = (I - P)(x - P(x)) = I(x) - P(x) - \\ - P(x) + P^2(x) = (I - P)(x) = Q(x).$$

Пусть P — проектор на X. Множество $X_P = \{x \in X : : P(x) = x\}$ непусто и линейно в X. Подпространства X_P, X_Q обладают тем свойством, что каждое из них *алгебраически дополняет*[3] другое до пространства X, т. е. что $X_P \cap X_Q = \{0\}$ и $X_P + X_Q = X$. Нетрудно показать, что и обратно, если X_1, X_2 — алгебраически дополнительные подпространства в X, то можно указать такой проектор P на X, что $X_1 = X_P$, $X_2 = X_Q$, где $Q = I - P$. Действительно, можно показать, что условия $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, $X_1 + X_2 = X$ равносильны тому, что всякий элемент $x \in X$ единственным образом может быть представлен в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, а тогда оператор $P : x \mapsto x_1$ оказывается требуемым. Таким образом, можно сказать, что существует проектор на всякое подпространство векторного пространства X.

Рассмотрим множество E в векторном пространстве X. Пусть Y — векторное пространство с тем же полем скаляров R, что и у X, и φ — отображение множества E в множество Y. Поставим вопрос о том, при каких условиях существует линейный оператор $A \in L(\mathscr{L}(E), Y)$, являющийся распространением

[3] Говорят также, что X_P, X_Q алгебраически дополнительны, или что X_Q служит алгебраическим дополнением X_P до X, или что X является алгебраической суммой пространств X_P, X_Q.

φ? Ответом на поставленный вопрос служит следующий факт.

Теорема 1(2.IV). *Для существования линейного оператора $A: \mathscr{L}(E) \to Y$ такого, что $A(x) = \varphi(x)$ для любого $x \in E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного подмножества Θ множества E и семейства скаляров $\{\alpha_x\}$ $(x \in \Theta)$ таких, что $\sum\limits_{x\in\Theta} \alpha_x x = 0$, было выполнено $\sum\limits_{x\in\Theta} \alpha_x \varphi(x) = 0$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности заметим, что линейное множество $\mathscr{L}(E)$ можно считать совпадающим с X. Далее, согласно теореме 1(1.IV) элемент $x \in X$ может быть представлен в виде $x = \sum\limits_{u\in\Theta} \alpha_u u$, где Θ — конечное подмножество множества E, а $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta)$ — семейство скаляров. Имея в виду такое представление, определим соответствие (A, X, Y), полагая

$$A = \Big\{(x, y) \in X \times Y : y = \sum_{u\in\Theta} \alpha_u \varphi(u)\Big\}. \tag{2}$$

Докажем однозначность A. Действительно, пусть $(x, y_1) \in A$, $(x, y_2) \in A$ и $x = \sum\limits_{u\in\Theta} \alpha_u u$, $x = \sum\limits_{u\in\Theta'} \beta_u u$ — два представления элемента x в виде (2) из § 1. Можно считать $\Theta = \Theta'$, иначе следует расширить семейства $\{\alpha_u\}$ $(u \in \Theta)$, $\{\beta_u\}$ $(u \in \Theta')$ за счет нулевых членов. Тогда $y_1 = \sum\limits_{u\in\Theta} \alpha_u \varphi(u)$, $y_2 = \sum\limits_{u\in\Theta} \beta_u \varphi(u)$.

Так как $0 = \sum\limits_{u\in\Theta} (\alpha_u - \beta_u) u$, то $0 = \sum\limits_{u\in\Theta} (\alpha_u - \beta_u) \varphi(u)$ по условию, следовательно, $y_1 = y_2$ и A — однозначное соответствие.

Установим линейность A. Пусть $x_1 = \sum\limits_{u\in\Theta} \alpha_u u$, $x_2 = \sum\limits_{u\in\Theta'} \beta_u u$, $\alpha, \beta \in R$. Как и прежде, можно считать $\Theta = \Theta'$. Тогда

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = \sum_{u\in\Theta} (\alpha\alpha_u + \beta\beta_u) u$$

и

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \sum_{u\in\Theta} (\alpha\alpha_u + \beta\beta_u) u =$$
$$= \sum_{u\in\Theta} \alpha\alpha_u \varphi(u) + \sum_{u\in\Theta} \beta\beta_u \varphi(u) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2),$$

так что отображение A линейно. Теорема доказана.

Замечание 1. Линейное распространение A отображения φ с данного множества E единственно.

Замечание 2. Если E — линейно независимое множество в пространстве X, то условие теоремы выполнено, так что в этом случае любое отображение φ можно распространить с множества E до линейного оператора, определенного на $\mathscr{L}(E)$. В частности, если E — базис X, то всякое отображение φ распространимо с E на X до линейного оператора.

Замечание 3. Множество значений построенного в теореме оператора A совпадает с линейной оболочкой $\mathscr{L}(\varphi[E])$ множества $\varphi[E]$.

Замечание 4. Если отображение φ взаимно однозначно и множества $E \subset X$ и $\varphi[E] = F$ линейно независимы, то оператор A взаимно однозначен.

Замечание 5. Если в условиях замечания 4 множества E, $F = \varphi(E]$ — базисы пространств X, Y соответственно, то в силу замечания 3 оператор A будет в этом случае изоморфизмом пространства X на пространство Y. При этом обратный оператор A^{-1} является линейным распространением отображения $\psi = \varphi^{-1}$ базиса F в множество X.

Замечание 6. Образ $A[X]$ конечномерного пространства при линейном отображении $A : X \to Y$ имеет конечную размерность, не превосходящую размерности пространства X.

Следствие 1. *Если векторные пространства X и Y над одним и тем же полем скаляров R обладают равномощными базисами, то они изоморфны.*

Следствие 2. *Конечномерные пространства одинаковой размерности изоморфны.*

Следствие 3. *Векторное n-мерное пространство X над полем R изоморфно пространству R^n.*

2.3. Рассмотрим векторное пространство X и отношение эквивалентности ρ на множестве X. Говорят, что отношение ρ *согласовано* со структурой векторного пространства X, если ρ — линейное множество в X^2.

Положим $X_0 = \rho\{0\}$. Поскольку $\{0\}$ — линейное множество в X, то X_0 — также линейное множество в X. Так как $(x, x) \in \rho$ при каждом $x \in X$, то ввиду линейности множества ρ соотношения $(x, y) \in \rho$ и $(0, y - x) \in \rho$ равносильны. Таким образом, для согласованного со структурой векторного пространства отношения эквивалентности ρ эквивалентность элементов $x, y \in X$ равносильна тому, что $y - x \in \rho\{0\} = X_0$. Следовательно, задать линейное отношение эквивалентности ρ — все равно, что указать линейное множество $X_0 \subset X$. При этом, если заранее задано линейное множество X_0, то с помощью указанной выше процедуры оно порождает такое линейное отношение эквивалентности ρ в X, что $X_0 = \rho\{0\}$. Имея в виду возможность задания линейного отношения эквивалентности ρ указанием только образа $\rho\{0\} = X_0$, фактор-множество X/ρ обозначают зачастую через X/X_0.

Линейность отношения эквивалентности ρ в X позволяет каноническим образом навести на X/X_0 структуру векторного пространства. А именно, положим $\rho\{x_1\} + \rho\{x_2\} = \rho\{x_1 + x_2\}$ (x_1, $x_2 \in X$), $\alpha\rho\{x\} = \rho\{\alpha\ x\}$ ($x \in X$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$), $X_0 = \rho\{0\}$. Основываясь на предложении IV(2.1) и на том факте, что X — векторное пространство, нетрудно проверить, что так определенные операции на X/X_0 удовлетворяют требованиям, указанным в определении векторного пространства, причем роль нейтрального элемента группы X/X_0 играет образ $X_0 = \rho\{0\}$. Векторное пространство X/X_0 будем называть *фактор-пространством векторного пространства* X *по подпространству* $X_0 \subset X$.

Непосредственно из определений операций суммы и умножения на скаляр в X/X_0 и из определения канонического отображения $\varphi : X \to X/X_0$ (см. I.2.6) следует, что φ — линейное отображение векторного пространства X на фактор-пространство X/X_0. Отображение φ будем называть в дальнейшем *каноническим гомоморфизмом* пространства X на фактор-пространство X/X_0.

Предложение V(I.2.6) об условиях существования снижения в случае, когда речь идет о фактор-пространстве векторного пространства, приводит к следующему результату.

Теорема 2(2.IV). *Пусть X, Y — векторные пространства над одним полем скаляров R, X_0 — подпространство векторного пространства X, A — линейный оператор, определенный на X, со значениями в Y. Для того чтобы оператор A допускал снижение A_ρ на фактор-пространство X/X_0 ($X_0 = \rho\{0\}$) необходимо и достаточно, чтобы $X_0 \subset A^{-1}[0] = \ker A$. Если это условие выполнено, то снижение A_ρ будет линейным оператором.*

Снижение A_ρ будет взаимно однозначным в том и только в том случае, если $X_\rho = \ker A$.

Доказательство. Необходимость и достаточность условия теоремы без особого труда следуют из предложения V(I.2.6) с учетом специфики фактор-пространства векторного пространства.

Предполагая выполненными условия теоремы, докажем линейность снижения A_ρ. Действительно, если x_1, $x_2 \in X$, α, $\beta \in R$, α, $\beta \neq 0$, то

$$
\begin{aligned}
A_\rho(\alpha\rho\{x_1\} + \beta\rho\{x_2\}) &= A_\rho(\rho\{\alpha x_1 + \beta x_2\}) = \\
&= A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2) = \\
&= \alpha A_\rho(\rho\{x_1\}) + \beta A_\rho(\rho\{x_2\}).
\end{aligned}
$$

Если снижение A_ρ взаимно однозначно, то из включения $x \in \ker A$ согласно предложению V(I.2.6) должно вытекать соотношение $x \in X_0$, так что $X_0 \supset \ker A$, следовательно, $X_0 = \ker A$. Если, наоборот, $X_0 = \ker A$ и $A_\rho(\rho\{x\}) = 0$ для некоторого $x \in X$, то $x \in A^{-1}\{0\} = X_0$, стало быть, $\rho\{x\} = \rho\{0\} = X_0$, так что оператор A_ρ взаимно однозначен.

2.4. В этом пункте будут установлены свойства вещественных функций на векторном пространстве, тесно связанных с выпуклыми и абсолютно выпуклыми множествами данного векторного пространства.

Рассмотрим векторное пространство X над полем R, где R есть $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Теорема 3(2.IV). *Для любого конического отрезка $C \subset X$ существует единственная функция $p: X \to \overline{\mathbf{R}}$, принимающая положительные значения и такая, что*

$$\{p < t\} \subset tC \subset \{p \leqslant t\} \tag{3}$$

для любого $t > 0$. Эта функция называется функционалом Минковского (множества C) [4].

Доказательство. Определим семейство $\{u_t\}$ $(t \in \mathbf{R})$ подмножеств множества X, полагая $U_t = tC$ при $t>0$ и $U_t = \varnothing$ при $t \leqslant 0$, и покажем, что это семейство удовлетворяет условиям леммы 1 из пункта II.6.1, а именно, проверим, что семейство $\{U_t\}$ $(t \in \mathbf{R})$ возрастающее.

Так как $0 \in C$ (см. XIII(1.3)), то, используя выпуклость множества C, для $x \in C$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ получаем $\alpha x = \alpha x + (1-\alpha)0 \in C$. Пусть $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ и $t_1 < t_2$. Если $t_1 < 0$, то включение $U_{t_1} \subset U_{t_2}$ очевидно. Рассмотрим поэтому случай $t_1 > 0$. Возьмем элемент $x \in t_1C$ и запишем его в виде $x = t_1x' = t_2(t_1t_2^{-1}x')$, где $x' \in C$. Поскольку $0 < t_1t_2 < 1$, то по доказанному вместе с x' в множество C входит и элемент $t_1t_2^{-1}x$, откуда $x = t_2(t_1t_2^{-1}x') \in t_2C$ и включение $U_{t_1} \subset U_{t_2}$ установлено.

Воспользовавшись результатом упомянутой леммы, заключаем о существовании функции p', удовлетворяющей соотношению $\{p' < t\} \subset U_t \subset \{p' \leqslant t\}$ $(t \in \mathbf{R})$, а поскольку $\mathbf{R}$ плотно в $\overline{\mathbf{R}}$, то на основании предложения II(II.6.1) такая функция единственна. Так как $\{p' < t\} = \{p' \leqslant t\} = \varnothing = U_t$ для каждого $t \leqslant 0$, из доказанного без труда вытекает существование и единственность функции, удовлетворяющей соотношению (3) и принимающей положительные значения.

Функционал Минковского множества C при условиях на множество C, фигурирующих в теореме, может, вообще говоря, принимать значение $+\infty$. Ниже будет сформулировано условие, которое обеспечит конечность функционала Минковского.

---

[4] Иногда p называют также *калибровочной функцией* множества C.

Пусть E — множество в векторном пространстве X. Говорят, что множество $S \subset X$ *поглощает множество* E, если можно указать такое вещественное $\varepsilon > 0$, что $\alpha E \subset S$ при всех α, у которых $|\alpha| \leqslant \varepsilon$. Если E состоит из единственной точки x и S поглощает E, то в этом случае говорят, что S *поглощает точку* x. Множество S, поглощающее каждую точку $x \in X$, называют *поглощающим*.

I. *Пусть X — векторное пространство над полем* $\mathbf{R}$ *вещественных чисел. Если выпуклое множество $D \subset X$ удовлетворяет условию: для любого $x \in X$ можно указать такое $r > 0$, что $rx \in D$, тогда D — поглощающее множество.*

В самом деле, возьмем $r_1, r_2 > 0$ так, что $r_1 x \in D$, $-r_2 x \in D$, и положим $r = r_1 \wedge r_2$. Очевидно, $\mathbf{0} \in D$, а тогда в силу выпуклости D имеем $\lambda(r_1 x) + (1 - \lambda)\mathbf{0} \in D$, $\lambda(-r_2 x) + (1 - \lambda)\mathbf{0} \in D$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$, откуда $\beta x \in D$ при $|\beta| \leqslant r$, следовательно, D — поглощающее множество.

II. *Пусть X — векторное пространство над полем R. Предположим, что абсолютно выпуклое множество $D \subset X$ и точка $x \in X$ таковы, что для некоторого $r > 0$ выполнено $rx \in D$. Тогда множество D поглощает точку x.*

Заметим прежде всего, что поскольку D абсолютно выпукло, то $\mathbf{0} \in D$. Далее, если $rx \in D$, то опять же в силу абсолютной выпуклости D получаем, что $\lambda rx \in D$ при $|\lambda| \leqslant 1$. Следовательно, если $|\beta| \leqslant r$, то, подобрав λ так, что $\beta = \lambda r$, где $\lambda \in R$ и $|\lambda| \leqslant 1$, получим $\beta x = \lambda rx \in D$.

III. *Функционал Минковского поглощающего выпуклого множества $C \subset X$ принимает конечные значения.*

Действительно, если $x \in X$, то поскольку множество C поглощающее, найдется такое $\alpha > 0$, что $\alpha x \in C$, откуда $x \in \alpha^{-1}C$, следовательно, $x \in \bigcup_{t>0} tC$, и остается воспользоваться результатом предложения III(II.6.1).

IV. *Пусть p — функционал Минковского конического отрезка C. Тогда*

1) *$p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$;*

2) *p положительно однороден, т. е. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для всех $x \in X$ и $\alpha \in R$, $\alpha \geqslant 0$;*

3) *p субаддитивен, т. е. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для любых $x, y \in X$.*

Первое свойство не нуждается в проверке. Убедимся в выполнении второго свойства. Пусть сначала $\alpha = 0$. Так как $\{p \leqslant 0\} = \bigcap_{t>0} U_t = \bigcap_{t>0} tC$ и $\mathbf{0} \in tC$ $(t > 0)$, то $\mathbf{0} \in \{p \leqslant 0\}$, или $p(\mathbf{0}) \leqslant 0$, что вместе с соотношением $p(\mathbf{0}) \geqslant 0$ дает равенство $p(\mathbf{0}) = 0$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha > 0$. Определим функцию $q : x \mapsto \alpha^{-1}p(\alpha x)$ ($x \in X$) и докажем, что q является функционалом Минковского множества C. Действительно, если $x \in \{q < t\}$ и $t > 0$, то $p(\alpha x) < \alpha t$, поэтому $\alpha x \in \alpha t C$, откуда $x \in tC$, так что $\{q < t\} \subset tC$ ($t > 0$). Далее, если $x \notin \{q \leqslant t\}$ ($t > 0$), то $p(\alpha x) > \alpha t$ и $\alpha x \notin \alpha t C$, следовательно, $x \notin tC$, т. е. $tC \subset \{q \leqslant t\}$.

В силу единственности функционала Минковского данного множества C получаем, что $p(x) = \alpha^{-1}p(\alpha x)$, т. е. получаем требуемое равенство.

Приступая к доказательству последнего свойства, рассмотрим произвольные элементы x, y из X. Обозначим $p(x)$, $p(y)$ через τ', τ'' соответственно и возьмем какие-либо t', $t'' \in \mathbf{R}$ так, что $t' > \tau'$, $t'' > \tau''$. Тогда $x \in t'C$, $y \in t''C$ и имеет место равенство

$$(t' + t'')^{-1}(x + y) = t'(t' + t'')^{-1}t'^{-1}x + \\ + t''(t' + t'')^{-1}t''^{-1}y.$$

Но $t'(t' + t'')^{-1}$, $t''(t' + t'')^{-1} > 0$, $t'(t' + t'')^{-1} + t''(t' + t'')^{-1} = 1$, и так как множество C выпукло, то $(t' + t'')^{-1} \times (x + y) \in C$, т. е. $(x + y) \in (t' + t'')C$, следовательно, $p(x + y) \leqslant t' + t''$. В силу произвольности t', t'' получаем $p(x + y) \leqslant \tau' + \tau'' = p(x) + p(y)$. Предложение доказано.

Оказывается, свойства функционала Минковского, отмеченные в предложении IV, являются характеристическими.

V. *Пусть q — вещественная функция, принимающая положительные значения и обладающая свойствами положительной однородности и субаддитивности. Тогда множества $C_0 = \{q < 1\}$, $C_1 = \{q \leqslant 1\}$ выпуклы, $\mathbf{0} \in C_0$ и функция q представляет собой функционал Минковского любого выпуклого множества C, удовлетворяющего соотношению $C_0 \subset C \subset C_1$.*

Пусть x, $y \in C_0$ и скаляры α, β таковы, что α, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$. Из свойств функции q следует, что

$$q(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha q(x) + \beta q(y) < \alpha + \beta = 1,$$

следовательно, множество C_0 выпуклое. Аналогично доказывается и выпуклость множества C_1. Включение $\mathbf{0} \in C_0$ очевидно.

Убедимся в том, что q представляет собой функционал Минковского любого такого выпуклого множества C, что $C_0 \subset C \subset C_1$, т. е. убедимся в справедливости соотношения

$$\{q < t\} \subset tC \subset \{q \leqslant t\}$$

для $t > 0$. Пусть $x \in X$ и $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$ таковы, что $q(x) < t$. Тогда $q(t^{-1}x) = t^{-1}q(x) < 1$, откуда $t^{-1}x \in C_0 \subset C$, следовательно, $x \in tC$.

Возьмем теперь такие x и t, что $q(x) > t > 0$. В этом случае $tq(t^{-1}x) = q(tt^{-1}x) = q(x) > t$, а тогда $q(t^{-1}x) > 1$ и $t^{-1}x \notin C_1$. Из включения $C \subset C_1$ следует, что $t^{-1}x \notin C$, откуда $x \notin tC$. Таким образом, $tC \subset \{q \leqslant t\}$ и требуемое соотношение установлено.

VI. *Если в условиях предложения V функция q конечна, то множества C_0, C_1 поглощающие.*

В самом деле, пусть x — точка из X. Возьмем $\delta > 0$, так что $\delta q(x) < 1$. Тогда $q(\delta x) = \delta q(x) < 1$, следовательно, $\delta x \in C_0$ и в силу предложения II множество C_0 поглощает точку x, а ввиду произвольности x оказывается поглощающим множеством. Этим свойством обладает также и множество C_1, поскольку $C_1 \supset C_0$.

Положительно однородную субаддитивную функцию p на векторном пространстве X называют *сублинейным функционалом на X*. Результат предложения V указывает на то, что положительный сублинейный функционал p на X представляет собой функционал Минковского любого такого выпуклого множества C, что $\{p < 1\} \subset C \subset \{p \leqslant 1\}$.

Пусть p — положительный сублинейный функционал и r — строго положительное вещественное число. Множество $S_r^{(p)} = \{p \leqslant r\}$ называется (замкнутым) шаром радиуса r, соответствующим функционалу p [5]. Множество $^\circ S_r^{(p)} = \{p < r\}$ называется *открытым шаром* радиуса r, соответствующим функционалу p.

Для элементов $x \in S_r$ из положительной однородности p следует, что $p(r^{-1}x) = r^{-1}p(x) \leqslant 1$, так что $x \in rS_1$. Обратно, если $y \in rS_1$, то $r^{-1}p(y) = p(r^{-1}y) \leqslant 1$, откуда $y \in S_r$. Таким образом,

$$S_r = rS_1 \qquad (r > 0). \tag{4}$$

Аналогичное соотношение имеет место и для открытых шаров.

Рассмотрим положительные сублинейные функционалы p, q. Поскольку p, q являются функционалами Минковского множеств $S_1^{(p)}$, $S_1^{(q)}$, то, как следует из предложения I(II.6.1) и определения функционала Минковского, соотношение $p(x) \leqslant q(x)$ $(x \in X)$ равносильно включению $S_1^{(p)} \supset S_1^{(q)}$. Понятно, что в последнем рассуждении замкнутые шары можно заменить открытыми.

Говорят, что функционал q *мажорирует* функционал p, и записывают это в виде $p \prec q$, или $q \succ p$, если можно указать такое число $K > 0$, что $p(x) \leqslant Kq(x)$ для всех $x \in X$. Функцио-

[5] Указание на функционал p иногда будет опущено.

налы p, q называют *эквивалентными*, если $p \prec q$ и $q \succ p$, при этом используют обозначение $p \sim q$.

Учитывая, что Kq — положительный сублинейный функционал, непосредственно из определений и соотношения (4) получаем

VII. *Функционал q мажорирует функционал p в том и только в том случае, если найдется такое число $r > 0$, что* $S_1^{(p)} \supset S_r^{(q)}$.

Функционал Минковского абсолютно выпуклого множества обладает лучшей по сравнению с положительной однородностью квалификацией.

VIII. *Функционал Минковского p абсолютно выпуклого множества C удовлетворяет соотношению*

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \tag{5}$$

для всех $\alpha \in R$, $x \in X$.

Для $\alpha = 0$ свойство (5) очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Рассмотрим функцию $q : x \mapsto |\alpha|^{-1} p(\alpha x)$ и покажем, что q — функционал Минковского множества C. Действительно, если $q(x) < t$ ($x \in X$, $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$), от $p(\alpha x) < |\alpha| t$, откуда $\alpha x \in |\alpha| tC$ и $\alpha |\alpha|^{-1} t^{-1} x \in C$. В силу уравновешенности множества C (см. XI(1.3)) получаем $t^{-1} x \in C$ или $x \in tC$.

Пусть теперь $x \notin \{q \leqslant t\}$, т. е. $p(\alpha x) > t|\alpha|$. Тогда $\alpha x \notin$ $\notin t|\alpha| C$ и $\alpha |\alpha|^{-1} t^{-1} x \notin C$. Отсюда и из уравновешенности C следует, что $|\alpha| \alpha \alpha |\alpha|^{-1} t^{-1} x \in C$, или $t^{-1} x \leqslant C$ и, наконец, $x \notin tC$. Таким образом, $tC \subset \{q \leqslant t\}$, следовательно, q — функционал Минковского множества C. Из свойства единственности такого функционала для данного множества C имеем равенство $p(x) = |\alpha|^{-1} p(\alpha x)$ ($x \in X$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$), что и требовалось.

IX. *Если положительная субаддитивная функция p такова, что $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, то множества $\{p < 1\}$, $\{p \leqslant 1\}$ абсолютно выпуклы.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предложения V.

Вещественная субаддитивная функция p на X, удовлетворяющая условию (5), называется *полунормой* на X. Таким образом, функция p — полунорма на X, если она обладает свойствами

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \quad (\alpha \in R,\ x \in X), \tag{6}$$

$$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \quad (x, y \in X). \tag{7}$$

Нетрудно понять, что одновременное выполнение соотношений (6), (7) равносильно справедливости неравенства

$$p(\alpha x + \beta y) \leqslant |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) \ (\alpha, \beta \in R,\ x, y \in X) \tag{8}$$

Из определения полунормы сразу следует ее положительность: $0 = p(x - x) \leqslant p(x) + p(-x) = 2p(x)$. Таким образом, полунорма, будучи положительным сублинейным функционалом, является функционалом Минковского любого такого выпуклого множества C, что ${}^{\circ}S_1^{(p)} \subset C \subset S_1^{(p)}$, где ${}^{\circ}S_1^{(p)}$, $S_1^{(p)}$ — открытый и замкнутый шары, отвечающие полунорме p.

Как следует из предложения XI, шары ${}^{\circ}S_1^{(p)}$, $S_1^{(p)}$ — абсолютно выпуклые множества.

Среди полунорм на X выделяют обладающие свойством

$$q^{-1}\{0\} = \{x \in X : q(x) = 0\} = \{\mathbf{0}\}. \qquad (9)$$

Полунорму, удовлетворяющую соотношению (9), называют *нормой* на X. Иначе можно сказать, что нормой является такая полунорма q, у которой равенство $q(x) = 0$ возможно лишь при $x = \mathbf{0}$.

§ 3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этом параграфе мы впервые столкнемся со структурой, объединяющей две элементарные структуры — топологического пространства и векторного пространства. Разумеется, для того чтобы такое слияние структур было плодотворным, объединяемые структуры должны быть так или иначе согласованы друг с другом. Обычно, когда речь идет об объединении топологических и алгебраических структур, в роли условия согласования выступает требование непрерывности рассматриваемых алгебраических операций. Так обстоит дело и в данном случае.

3.1. Рассмотрим векторное пространство X над полем R, где R — либо поле $\mathbf{R}$ вещественных, либо $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Предположим, что на X задана топология τ. Снабдим множества $X \times X$ и $R \times X$ топологией произведения, где топология на R — стандартная. В этой ситуации топология τ называется *линейной* (или согласованной со структурой векторного пространства), если операции суммы $(x, y) \mapsto x + y$ и умножения на скаляр $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ непрерывны. Упорядоченная пара (X, τ), в которой X — векторное пространство, а τ — линейная топология на X, называется *топологическим векторным пространством* [6]).

Как и прежде в подобных ситуациях, допуская вольность речи и опуская явное указание топологии τ, мы нередко будем говорить о топологическом векторном пространстве X.

---

[6]) Иногда используют термин «линейное топологическое пространство».

Поскольку суперпозиция двух линейных операторов есть линейный оператор и суперпозиция двух непрерывных отображений — непрерывное отображение, класс всех топологических векторных пространств с линейными непрерывными отображениями в качестве морфизмов образует категорию.

Рассмотрим топологическое векторное пространство X и подпространство X_0 векторного пространства X. Операции сложения и умножения на скаляр в X_0 непрерывны относительно индуцированных из $X \times X$ и $R \times X$ топологий на $X_0 \times X_0$ и $R \times X_0$, так что линейная топология τ на X индуцирует на подпространство X_0 векторного пространства линейную топологию τ_0, и упорядоченная пара (X_0, τ_0) называется *подпространством топологического векторного пространства* (X, τ).

Отметим элементарные свойства линейной топологии, легко следующие из условий согласования структур топологического и векторного пространства.

I. *Пусть x_0 — некоторая точка топологического векторного пространства X. Тогда* с д в и г $f_{x_0} : x \mapsto x + x_0$ *представляет собой гомеоморфизм пространства X на себя, т. е.* $\tau(f_{x_0}(x)) = f_{x_0}\langle \tau(x) \rangle (x \in X)$, *или* $\tau(x + x_0) = x_0 + \tau(x)$ $(x \in X)$, *где* $x_0 + \tau(x) = \{x + U : U \in \tau(x)\}$. *В частности,* $\tau(y) = y + \tau(0)$ *для любой точки* $y \in X$.

II. *Гомотетия* $g_\alpha : x \mapsto \alpha x$ *с любым ненулевым скаляром* $\alpha \in R$ *представляет собой гомеоморфизм топологического векторного пространства X на себя, т. е.* $\tau(g_\alpha(x)) = g_\alpha\langle \tau(x)\rangle$ $(x \in X)$, *или* $\tau(\alpha x) = \alpha\tau(x)$ $(x \in X)$, *где* $\alpha\tau(x) = \{\alpha U : U \in \tau(x)\}$. *Иначе говоря, фильтр* $\tau(\alpha x)$ *окрестностей точки* $\alpha x \in X$ *состоит из всех множеств* αU, *где* $U \in \tau(x)$.

Как указано в предложении I, линейная топология на X полностью определяется заданием фильтра (или базиса фильтра) окрестностей какой-либо фиксированной точки. Обычно в качестве такой точки берут нулевой элемент пространства X, в связи с чем уместно ввести особое обозначение для фильтра окрестностей нуля. Этот фильтр будем зачастую обозначать через $\mathcal{U}$, так что $\mathcal{U} = \tau(0)$.

III. *Фильтр окрестностей нуля топологического векторного пространства состоит из поглощающих множеств.*

Действительно, для любой точки $x \in X$ отображение $\alpha \mapsto \alpha x$ $(\alpha \in R)$ непрерывно при $\alpha = 0$, следовательно, какова бы ни была окрестность $U \in \mathcal{U}$, можно указать такое $r > 0$, что $\alpha x \in U$ при всех $\alpha \in R$, у которых $|\alpha| \leqslant r$, так что множество U — поглощающее.

Из непрерывности суммы в точке $(0, 0)$ легко следует

IV. *Для любой окрестности* $V \in \mathcal{U}$ *можно указать такую окрестность* $U \in \mathcal{U}$, *что* $U + U \subset V$.

Установим еще одно свойство фильтра $\mathcal{U}$.

V. *Фильтр $\mathcal{U}$ окрестностей нуля топологического векторного пространства X обладает базисом, состоящим из уравновешенных множеств.*

Действительно, пусть $U \in \mathcal{U}$. Используя непрерывность отображения $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ в точке $(0, \mathbf{0})$, найдем окрестность $V \in \mathcal{U}$ и число $r > 0$ такие, что $\alpha V \subset U$ для всех α, у которых $|\alpha| \leqslant r$. Положим $W = \bigcup_{|\alpha| \leqslant r} \alpha U$. Ясно, что W — окрестность нулевого элемента. Поскольку для любого такого скаляра β, что $|\beta| \leqslant 1$, имеем $\beta W = \bigcup_{|\alpha| \leqslant r} \alpha\beta U \subset U$, то W — уравновешенное множество. Остается отметить, что $W \subset V$.

Оказывается, свойства линейной топологии на X, установленные в предложениях III—V, являются характеристическими. Однако удобнее установить несколько более общий факт.

Теорема 1(3.IV). *Пусть X — векторное пространство и $\mathcal{U}$ — фильтр в X, состоящий из поглощающих множеств и обладающий свойствами:*

1) *фильтр $\mathcal{U}$ обладает базисом, состоящим из уравновешенных множеств;*

2) *для любого множества $V \in \mathcal{U}$ можно указать такое множество $U \in \mathcal{U}$, что $U + U \subset V$.*

Тогда фильтр $\mathfrak{V}$ в X^2, порожденный совокупностью всех множеств

$$W_U = \{(x, y) \in X^2 : y - x \in U\} \qquad (U \in \mathcal{U}),$$

представляет собой равномерность на X. Топология $\tau_{\mathfrak{V}}$ этой равномерности линейна и фильтр $\mathcal{U}$ совпадает с фильтром $\tau_{\mathfrak{V}}(\mathbf{0})$ окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{V}}$.

Доказательство. Отметим прежде всего свойства множеств W_U $(U \in \mathcal{U})$. Если $U, V \in \mathcal{U}$ и $U \subset V$, то, понятно, $W_U \subset W_V$. Отсюда и из фильтруемости по убыванию совокупности $\mathcal{U}$ следует, что $\{W_U : U \in \mathcal{U}\}$ фильтруется по убыванию. Каждое множество W_U $(U \in \mathcal{U})$ содержит диагональ Δ в X, так что, в частности, множества W_U $(U \in \mathcal{U})$ непусты. Покажем, что фильтр $\mathfrak{V}$ в X^2, порожденный совокупностью $\{W_U : U \in \mathcal{U}\}$, представляет собой равномерность на X.

Действительно, если множество $U \in \mathcal{U}$ уравновешенное, то, очевидно, $W_U^{-1} = W_U$, и из условия 1) вытекает, что фильтр $\mathfrak{V}$ обладает базисом, состоящим из симметричных множеств. Из определения множества W_U $(U \in \mathcal{U})$ следует, что $W_U\{x\} = x + U$ $(x \in X)$, откуда для любого множества $A \subset X$ получаем

$$W_U[A] = \bigcup_{x \in A} W_U\{x\} = \bigcup_{x \in A} (x + U) = A + U. \tag{1}$$

Используя соотношение (1), для множеств U', $U'' \in \mathcal{U}$ можем написать

$$(W_{U'} \circ W_{U''})\{x\} = W_{U'}[W_{U''}\{x\}] = W_{U'}[x + U''] = \\ = x + U' + U'' = W_{U'+U''}\{x\}. \tag{2}$$

Из условия 2) теперь получим, что фильтр $\mathfrak{B}$ удовлетворяет последнему требованию определения равномерности (см. пункт III.1.1), так что $\mathfrak{B}$ — равномерность на X.

Непосредственно из определения равномерности $\mathfrak{B}$ следует, что фильтр $\tau_{\mathfrak{B}}(x)$ окрестностей точки $x \in X$ порожден совокупностью множеств $W_U\{x\} = x + U$ $(U \in \mathcal{U})$, так что, в частности, $\tau_{\mathfrak{B}}(0) = \mathcal{U}$.

Установим линейность топологии $\tau = \tau_{\mathfrak{B}}$. Пусть x_0, $y_0 \in X$ и $V' \in \tau(x_0 + y_0)$. Так как $V' = x_0 + y_0 + V$, где $V \in \mathcal{U}$, то, взяв такую окрестность $U \in \mathcal{U}$, что $U + U \subset V$, получим

$$x_0 + U + y_0 + U = \\ = x_0 + y_0 + U + U \subset x_0 + y_0 + V = V',$$

и для вывода непрерывности операции сложения остается лишь заметить, что $x_0 + U \in \tau(x_0)$, $y_0 + U \in \tau(y_0)$.

Прежде чем начинать доказательство непрерывности операции умножения на скаляр, заметим, что если $V \in \mathcal{U}$ и $\lambda \in R$, то можно указать такую окрестность $U \in \mathcal{U}$, что $\lambda U \subset V$. Действительно, возьмем такое натуральное число n, что $|\lambda| < n$, и, воспользовавшись предложением II(III.1.1) и условием 1), найдем уравновешенное множество $U \in \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию $W_U^{[n]} \subset W_V$. Тогда

$$\lambda U = n\left(\lambda n^{-1} U\right) \subset n U \subset W_U^{[n]}\{0\} \subset W_V\{0\} = V.$$

Пусть теперь $\lambda_0 \in R$, $x_0 \in X$. Возьмем окрестность $V \in \mathcal{U}$ и найдем такую уравновешенную окрестность $U \in \mathcal{U}$, что $W_U^{[3]} \subset W_V$. Представим разность $\lambda x - \lambda_0 x_0$ в виде

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda_0 (x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 + (\lambda - \lambda_0)(x - x_0).$$

Возьмем окрестность $U' \in \mathcal{U}$, обладающую свойством $\lambda_0 U' \subset$ $\subset U$. Далее, поскольку множество U поглощающее, найдется такое $\varepsilon > 0$ (можно считать $\varepsilon \leqslant 1$), что $(\lambda - \lambda_0)x_0 \in U$ при всех $\lambda - \lambda_0$, для которых $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$. Поскольку U — уравновешенное множество, а $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, то $(\lambda - \lambda_0)(x - x_0) \in$ $\in U$, если только $x - x_0 \in U$. Итак, для $\lambda \in R$, $x \in X$, удовлетворяющих соотношениям $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \varepsilon$, $x - x_0 \in U \cap U'$, имеет место включение

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in U + U + U = W_U^{[3]}\{0\} \subset W_V\{0\} = V,$$

откуда и следует непрерывность операции умножения на скаляр. Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Если τ — линейная топология на векторном пространстве X, то в силу предложений III—V фильтр $\mathcal{U} = \tau(0)$ удовлетворяет условиям теоремы. При этом, очевидно, топология $\tau_{\mathfrak{B}}$, порожденная введенной в теореме равномерностью $\mathfrak{B}$, совпадает с τ. Таким образом, можно утверждать, что топологическое векторное пространство всегда равномеризуемо. Указанную в теореме равномерность будем называть *стандартной равномерностью топологического векторного пространства* и, если не оговорено иного, рассматривая равномерность в топологическом векторном пространстве, всегда будем иметь в виду стандартную равномерность. Таким образом, фильтр окружений в стандартной равномерности топологического векторного пространства X порожден предфильтром в X^2, состоящим из множеств

$$W_U = \{(x, y) \in X^2 : y - x \in U\} \cdot (U \in \tau(0)). \qquad (3)$$

Ясно, что в образовании стандартной равномерности топологического векторного пространства может участвовать не весь фильтр $\tau(0)$, а какой-либо его (фиксированный) базис.

Замечание 2. Если на векторном пространстве X задана топология μ, то для проверки ее линейности можно воспользоваться результатом теоремы 1. При этом достаточно доказать, что μ удовлетворяет условиям предложения I: $\mu(x) = x + \mu(0)$ $(x \in X)$ и что для фильтра $\mu(0)$ соблюдены условия теоремы.

Отметим свойства топологических векторных пространств, основанные на его равномеризуемости.

VI. *Каковы бы ни были окрестность $U \in \mathcal{U} = \tau(0)$ и натуральное число n, найдется такая окрестность $V \in \mathcal{U}$, что $V + V + \ldots + V \subset U$, где в сумме участвует n слагаемых.*

Действительно, заметим, что из (3) легко следует равенство

$$W_V^{[n]}[0] = V + V + \ldots + V \qquad (V \in \mathcal{U}),$$

где сумма состоит из n слагаемых, и воспользоваться результатом предложения II(III.1.1).

VII. *Фильтр $\mathcal{U}$ окрестностей нуля топологического векторного пространства обладает базисом, состоящим из замкнутых множеств.*

Действительно, согласно предложению VIII(III.1.3) топология на X, будучи равномеризуемой, удовлетворяет аксиоме отделимости T_3, и остается сослаться на предложение IV(II.1.7).

VIII. *Пусть E — Г-множество в топологическом векторном пространстве X. Тогда замыкание $\overline{E}$ также представляет собой Г-множество в X.*

В самом деле, пусть $(\alpha, \beta) \in \Gamma$. Введем отображение $\Phi : (x, y) \mapsto \alpha x + \beta y$ $((x, y) \in X^2)$. По определению линейной топологии оно непрерывно. Но для каждого множества $A \subset X$, очевидно, $\overline{A}^2 = \overline{A^2}$. Поэтому согласно теореме 3(2.II) $\Phi[\overline{E}^2] = \Phi[\overline{E^2}] \subset \overline{\Phi[E^2]} \subset \overline{E}$, так что замыкание E — Г-множество.

С использованием этой же идеи, но со ссылкой на теорему Тихонова, доказывается

IX. *Если E_1, E_2 — бикомпактные множества топологического векторного пространства X и α, $\beta \in R$, то множество $\alpha E_1 + \beta E_2$ бикомпактно. Если X — отделимое пространство, а E_1, E_2 относительно компактны, то и множество $\alpha E_1 + \beta E_2$ относительно компактно.*

X. *Если E_1, E_2 — вполне ограниченные множества пространства X и α, $\beta \in R$, то множество $\alpha E_1 + \beta E_2$ вполне ограничено.*

Действительно, возьмем окрестность V нулевого элемента и найдем такую окрестность U этого элемента, что $\alpha U + \beta U \subset V$. Обозначая через W отвечающее окрестности V окружение диагонали, а через W_0 — окружение, соответствующее окрестности U, подберем конечные W_0-сети K_1 и K_2 для множеств E_1 и E_2 соответственно. Полагая $K = \alpha K_1 + \beta K_2$, получим

$$W[K] = V + K \supset \alpha(U + K_1) + \beta(U + K_2) =$$
$$= \alpha W_0[K_1] + \beta W_0[K_2] \supset \alpha E_1 + \beta E_2.$$

Таким образом, конечное множество K служит W-сетью для множества $\alpha E_1 + \beta E_2$.

В силу предложения I, если x — элемент топологического векторного пространства X, то множество $F \subset X$ и множество $x + F$ одновременно замкнуты или нет. Поэтому на основании предложения I(II.1.7).

XI. *Топологическое векторное пространство X отделимо тогда и только тогда, когда замкнуто множество $\{0\}$*

Используя предложения III(III.1.3) и IV(III.1.3) и обозначая, как всегда, через Δ диагональ произведения X^2, а через $\overline{\Delta}$ — ее замыкание в X^2, для каждого $x \in X$ получаем $\overline{\Delta}\{x\} = \bigcap_{W \in \mathfrak{B}} W\{x\} = \overline{\{x\}} = x + \overline{\{0\}}$, так что

$$\overline{\Delta} = \{(x, y) \in X^2 : y - x \in \overline{\{0\}}\}. \tag{4}$$

В дальнейшем нам понадобится свойство множества в топологическом векторном пространстве, указанное в следующем определении. Множество $E \subset X$ называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля пространства X. Совокупность всех ограниченных множеств в X будем обозначать через $\mathfrak{B}(X)$.

3.2. Рассмотрим множество T и топологическое векторное пространство Y. Пусть $\mathfrak{B}$ — возрастающий фильтр подмножеств T. Отображение $f: T \to Y$, *ограниченное на* каждом *множестве* фильтра $\mathfrak{B}$ (т. е. такое, что $f[E]$ ограничено для любого $E \in \mathfrak{B}$), будем называть *ограниченным на фильтре* $\mathfrak{B}$. Совокупность всех ограниченных на фильтре $\mathfrak{B}$ отображений в Y, обозначаемое в дальнейшем через $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$, представляет собой, как очевидно, линейное множество в векторном пространстве Y^T, значит, само является векторным пространством с покоординатными операциями.

Зададим на $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ равномерность, порожденную фильтром $\mathfrak{B}$ и стандартной равномерностью топологического векторного пространства (см. III.2.4). Топологию этой равномерности будем обозначать через $\beta(\tau, \mathfrak{B})$, где через τ обозначена топология на Y.

I. *Топология* $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ *линейна.*

Действительно, в рассматриваемой ситуации окружение диагонали $F(E, U)$ в $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ порождается множеством $E \in \mathfrak{B}$ и окрестностью нуля $U \in \tau(0)$ следующим образом (см. III.2.4):

$$F(E, U) = \{(f, g) : f, g \in \mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y),$$
$$f(t) - g(t) \in U, t \in E\}.$$

Учитывая замечание к теореме 1, достаточно показать, что фильтр $\mathscr{U}_{\mathfrak{B}}$ в $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$, порожденный фильтрующейся по убыванию совокупностью множеств $U_E = \{f \in \mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y) : f(t) \in U \ \forall\, t \in E\}$, где $E \in \mathfrak{B}$, $U \in \mathscr{U} = \tau(0)$, удовлетворяет условиям теоремы 1. Действительно, если $E \in \mathfrak{B}$ и $g \in \mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$, то ввиду ограниченности множества $g[E]$ множество U_E поглощает g, так что фильтр $\mathscr{U}_{\mathfrak{B}}$ состоит из поглощающих множеств. Далее, ясно, что множество U_E, порожденное уравновешенной окрестностью нуля $U \in \mathscr{U}$, уравновешено, а если $U \subset V$, то $U_E \subset V_E$ $(E \in \mathfrak{B})$, значит, $\mathscr{U}_{\mathfrak{B}}$ имеет базис из уравновешенных множеств.

Наконец, пусть $V \in \mathscr{U}$ и U — такая окрестность нуля, что $U + U \subset V$. Если $f \in U_E + U_E$, т. е. если $f = f_1 + f_2$, где $f_1, f_2 \in U_E$, то $f(t) = (f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) \in U + U \subset$ $\subset V$ для всех $t \in E$, значит, $f \in V_E$.

Как и в общем случае (см. III.2.4), топологию $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ на $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ будем называть *топологией равномерной сходимости на множествах фильтра* $\mathfrak{B}$.

II. *Если* Y — *полное топологическое векторное пространство и* $\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E = T$, *то* $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ — *полное топологическое векторное пространство.*

В самом деле, учитывая результаты предложения VI(III.3.1) и теоремы 2(3.III), достаточно установить замкнутость $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ в Y^T, наделенном топологией равномерной сходимости на множествах фильтра $\mathfrak{B}$. Пусть $\{f_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — сходящееся к отображению f семейство отображений множества T в Y. Возьмем какое-либо множество $E \in \mathfrak{B}$. Поскольку семейство f_ξ сходится к f равномерно на E, то, такова бы ни была уравновешенная окрестность $U \in \mathcal{U}$, найдется такое ξ_0, что $(f - f_\xi)(t) \in U$ для всех $\xi \geqslant \xi_0$ и $t \in E$, или $f[E] \subset f_\xi[E] + U$ $(\xi \geqslant \xi_0)$. Так как множество $f_{\xi_0}[E]$ ограничено, найдется такое $r > 0$, что $\alpha f_{\xi_0}[E] \subset U$, если только $|\alpha| \leqslant r$. Тогда $\alpha f[E] \subset \alpha f_{\xi_0}[E] + \alpha U \subset U + rU$, откуда и следует ограниченность f на множестве E.

Таким образом, $f \in \mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$, и на основании предложения IV(II.2.3) множество $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ замкнуто.

3.3. Если в условиях предыдущего пункта в роли T выступает топологическое векторное пространство X (с тем же полем скаляров, что и у Y), то можно рассматривать классы линейных отображений. Особое место среди них занимает класс $\mathscr{L}(X, Y)$ всех линейных непрерывных отображений (мы будем говорить обычно: линейных непрерывных операторов), отображающих пространство X в пространство Y. Поскольку $\mathscr{L}(X, Y)$ есть пересечение линейного (в векторном пространстве Y^X) множества $L(X, Y)$ всех линейных операторов из X в Y и также линейного множества $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений пространства X в пространство Y, то $\mathscr{L}(X, Y)$ будет линейным множеством в векторном пространстве Y^X, которое тем самым можно рассматривать как векторное пространство (над полем R). Пространство $\mathscr{L}(X, R)$ всех линейных непрерывных функционалов на X называется *сопряженным* по отношению к пространству X и обозначается через X^* (или, что по ряду причин менее удобно, через X')[7].

Докажем следующий результат.

---

[7] Иногда возникает необходимость рассматривать линейные непрерывные отображения, область определения которых есть часть пространства X. Обычным приемом рассмотрение таких отображений сводится к изучению линейных операторов, определенных на некотором подпространстве пространства X.

I. *Линейный оператор A, отображающий пространство X в пространство Y и непрерывный в какой-либо точке пространства X, непрерывен.*

Действительно, для $x \in X$ и $y \in Y$ под f_x и g_y будем понимать сдвиг на x и соответственно на y в пространствах X и Y. Так как ввиду линейности оператора A для каждого $x \in A$ будет $A = g_{A(x)}^{-1} \circ A \circ f_x$, то в силу предложений I (3.1) и IV(II.2.5) оператор A непрерывен в каждой точке пространства X.

Заметим, что непрерывный оператор A, как нетрудно понять, будет и равномерно непрерывным (если иметь в виду стандартные равномерности в X и в Y).

Понимая под $\mathfrak{B}(X)$, как и в 3.1, совокупность всех ограниченных множеств пространства X, докажем

II. *Имеет место включение $\mathscr{L}(X;\ Y) \subset \mathscr{B}(X,\ \mathfrak{B}(X);\ Y)$.*

В самом деле, пусть $A \in \mathscr{L}(X;\ Y)$, $B \in \mathfrak{B}(X)$. Возьмем окрестность W нулевого элемента пространства Y. Поскольку множество $V = A^{-1}[W]$ будет окрестностью нулевого элемента пространства X (см. II.2.5), найдется такое строго положительное число r, что $\alpha B \subset V$ для всех таких $\alpha \in R$, что $|\alpha| \leqslant r$. Тем самым для этих α будет $\alpha A[B] = A[\alpha B] \subset A[V] = W$. Следовательно, $A[B]$ — ограниченное множество пространства Y, т. е. $A \in \mathscr{B}(X,\ \mathfrak{B}(X);\ Y)$.

Линейное отображение, ограниченное на фильтре $\mathfrak{B}(X)$, называется *ограниченным* (линейным) *оператором*. Результат предложения II поэтому можно высказать так: любой линейный непрерывный оператор ограничен. Необходимо иметь в виду, что обратное, вообще говоря, неверно.

Хотя в конкретных ситуациях можно указать и более тонкий, чем $\mathfrak{B}(X)$, возрастающий фильтр $\mathfrak{B}$, для которого справедливо предложение II[8], в общем случае, например, когда $Y = X$, фильтр $\mathfrak{B}(X)$ оказывается самым тонким из таких фильтров: тождественное отображение I_X ограничено на $\mathfrak{B}$ лишь тогда, когда $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}(X)$.

Исходя из предложения II, можно снабжать векторное пространство $\mathscr{L}(X;\ Y)$ разнообразными линейными топологиями.

Пусть $\mathfrak{B}$ — возрастающий фильтр, содержащийся в фильтре $\mathfrak{B}(X)$ всех ограниченных множеств пространства X. Из предложения II вытекает, что $\mathscr{L}(X,\ Y) \subset \mathscr{B}(X,\ \mathfrak{B};\ Y)$, так что топология $\beta(\tau,\ \mathfrak{B})$ (через τ обозначена топология пространства Y) в пространстве $\mathscr{B}(X,\ \mathfrak{B};\ Y)$ индуцирует в подпространстве

[8] Дело в том, что даже при невырожденных пространствах X и Y с отделимыми топологиями пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ может сводиться к единственному элементу.

$\mathscr{L}(X; Y)$ линейную топологию, которую мы будем по понятным причинам называть *топологией равномерной сходимости на множествах фильтра* $\mathfrak{B}$ и обозначать, хотя это и не вполне последовательно, также символом $\beta(\tau, \mathfrak{B})$. Топологическое пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ с топологией $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ мы будем обозначать, когда это необходимо, через $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}; Y)$.

Отметим некоторые частные случаи. Если $\mathfrak{B}$ состоит из всех конечных подмножеств пространства X, то топология $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ называется *сильной операторной топологией* в пространстве $\mathscr{L}(X; Y)$. В случае же $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$ о топологии $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ говорят как о *равномерной операторной топологии*. Наконец, если под $\mathfrak{B}$ понимается совокупность всех относительно компактных множеств пространства X, то $\beta(\tau, \mathfrak{B})$ называют *компактной операторной топологией*.

Используя предложение IX(III.2.4), нетрудно получить

III. *Если Y — отделимое пространство и множество $T = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ поглощающее, то пространство $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}; Y)$ отделимое.*

Действительно, линейный оператор, обращающийся в 0 на поглощающем множестве, как очевидно, нулевой.

В условиях предложения III пространство $\mathscr{L}(X, Y)$ можно рассматривать как подпространство пространства $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$.

Чтобы сформулировать условия полноты пространства $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}; Y)$, введем наряду с векторным пространством $\mathscr{L}(X,Y)$ более широкое векторное пространство $\mathscr{L}_b(X; \mathfrak{B}; Y)$ ($\mathfrak{B} \subset \subset \mathfrak{B}(X)$) всех линейных ограниченных на фильтре $\mathfrak{B}$ операторов, отображающих X в Y. Понятно, что $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ совпадает с пересечением $L(X; Y) \cap \mathscr{B}(X, \mathfrak{B}; Y)$ пространства $L(X; Y)$ всех линейных операторов (из X в Y) с пространством ограниченных на фильтре $\mathfrak{B}$ отображений (также из X в Y). Предполагая пространство Y отделимым и множество $T = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ поглощающим, на основании предложения III(II.2.1) заключаем о замкнутости множества $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ в произведении Y^T с тихоновской топологией и тем более с топологией равномерной сходимости на множествах из $\mathfrak{B}$. Тем самым пространство $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ замкнуто в пространстве $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$ и, следовательно, в предположении полноты пространства Y пространство $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ полное. Поскольку, вообще говоря, $\mathscr{L}(X, Y) \neq \neq \mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ даже при $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(X)$, заключение о полноте пространства $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}; Y)$ может и не иметь места, несмотря на соблюдение всех упомянутых выше условий.

Однако (в условиях предложения III) имеет место следующий факт.

IV. *Если Y — полное топологическое векторное пространство и $\mathfrak{F}$ — замкнутое в пространстве $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ множество такое, что любой оператор $A \in \mathfrak{F}$, сужение которого на каждое множество $B \in \mathfrak{B}$ непрерывно, непрерывен, то пересечение $\mathfrak{F} \cap \mathscr{L}(X; Y)$ замкнуто в пространстве $\mathscr{L}_b(X, \mathfrak{B}; Y)$ и, следовательно, представляет собой полное равномерное пространство в равномерности, индуцированной стандартной равномерностью топологического векторного пространства $\mathscr{B}(T, \mathfrak{B}; Y)$.*

Укажем на одно условие, обеспечивающее совпадение пространства $\mathscr{L}(X; Y)$ с пространством $\mathscr{L}_b(X, Y)$ всех ограниченных операторов и, стало быть, при соответствующих предположениях относительно пространства Y, гарантирующего полноту пространства $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}(X), Y)$.

Топологическое векторное пространство X называется *борнологическим* (или *ограниченно-замкнутым*), если каждое его множество V, поглощающее любое ограниченное множество, является окрестностью нулевого элемента.

Понятно, что борнологическим будет пространство, обладающее ограниченной окрестностью нулевого элемента, хотя, конечно, такого рода пространствами далеко не исчерпывается класс борнологических пространств.

V. *Если X — борнологическое пространство, то, каково бы ни было пространство Y, каждый линейный ограниченный оператор A (из X в Y) непрерывен.*

Действительно, если W — окрестность нулевого элемента пространства Y, то, как нетрудно проверить, прообраз $V = A^{-1}[W]$ поглощает каждое ограниченное множество пространства X; следовательно, по условию V — окрестность нулевого элемента пространства X. Стало быть, оператор A непрерывен в точке $\mathbf{0}$, а потому $A \in \mathscr{L}(X; Y)$ (предложение I).

Сопоставляя это с предложением IV, получаем

VI. *Если Y — полное отделимое пространство, а X — борнологическое пространство, то пространство $\mathscr{L}(X, \mathfrak{B}(X); Y)$ полное.*

3.4. Займемся вопросами порождения линейных топологий. Не оговаривая этого каждый раз, будем считать, что все одновременно рассматриваемые векторные пространства имеют одно и то же поле скаляров R.

Прежде всего непосредственно из определения линейной топологии с учетом теоремы 1(3.III) получаем

I. *Произведение семейства топологических векторных пространств, снабженное тихоновской топологией, представляет собой топологическое векторное пространство. Если при этом все пространства данного семейства полные, то будет полным и их произведение.*

Далее, имеем

II. *Пусть X, Y — векторные пространства и A — линейный оператор, отображающий пространство X в пространство Y. Прообраз μ (при отображении A) линейной топологии σ на Y является линейной топологией.*

Действительно, поскольку согласно I(II.5.1) $\mu(x) = A^{-1}\langle\sigma(A(x))\rangle$ $(x \in X)$, то $\mu(0) = \widetilde{A^{-1}\langle\sigma(0)\rangle}$. Из линейности топологии σ и линейности отношения A^{-1} легко вытекает, что фильтр $\mu(0)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а так как

$$\mu(x) = \widetilde{A^{-1}\langle\sigma(A(x))\rangle} = \widetilde{A^{-1}\langle A(x) + \sigma(0)\rangle} = $$
$$= x + \widetilde{A^{-1}\langle\sigma(0)\rangle} = x + \mu(0),$$

то согласно замечанию 2 к теореме 1 топология μ линейна.

Рассмотрим векторное пространство X, семейство $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических векторных пространств и семейство $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ линейных операторов: $A_\xi : X \to X_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Образуем произведение $\mathfrak{X} = \prod_{\xi\in\Xi} X_\xi$. Поскольку, очевидно, при каждом $\xi \in \Xi$ оператор проектирования $\Psi_\xi : \mathfrak{X} \to X_\xi$ линеен, то будет линейным и такое отображение A пространства X в произведение, координатные отображения которого совпадают с A_ξ. Учитывая результаты предложений I и II, получаем на основании I(II.5.3)

III. *Топология на векторном пространстве X, порожденная справа семейством $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических векторных пространств и семейством $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ линейных операторов, линейна.*

В частности,

IV. *Проективный предел обратного спектра топологических векторных пространств с линейными вложениями представляет собой топологическое векторное пространство. Если при этом все пространства, участвующие в данном обратном спектре, отделимые и полные, то будет полным и проективный предел.*

Для доказательства последнего утверждения достаточно сослаться на предложение IV(II.5.3).

Следствием предложения III является и такой важный результат.

Теорема 2(3.IV). *Пусть X — векторное пространство и $\mathfrak{T}(X)$ совокупность всех топологий на X (не обязательно линейных). Точная верхняя граница (в упорядоченном множестве $\mathfrak{T}(X)$) множества $\mathfrak{S}$ линейных топологий на X представляет собой линейную топологию.*

Доказательство. Примем в предложении III $\Xi = \mathfrak{S}$, $(X_\tau, \tau) = (X_\tau)$ $(\tau \in \mathfrak{S})$, $A_\tau = I_X$ $(\tau \in \mathfrak{S})$. При этом топология, порожденная справа на X образованными семействами, совпадает с $\sup \mathfrak{S}$.

Следствие. Совокупность $\mathfrak{L}(X)$ всех линейных топологий на данном векторном пространстве X представляет собой полную решетку.

Замечание 1. Понятно, что если $\mathfrak{S}$ — множество линейных топологий на векторном пространстве X и $\mu = \sup \mathfrak{S}$, то стандартная равномерность топологического векторного пространства (X, μ) есть точная верхняя граница стандартных равномерностей семейства $\{(X, \tau)\}$ $(\tau \in \mathfrak{S})$ топологических векторных пространств.

Замечание 2. Результат теоремы означает, что множество $\mathfrak{L}(X)$ правильно вверх в упорядоченном множестве $\mathfrak{T}(X)$. Следует особо подчеркнуть, что правильным вниз множество $\mathfrak{L}(X)$ бывает лишь в исключительных случаях! Дело здесь в том, что топология $\inf \mathfrak{S}$ является образом топологии в прямой сумме некоторых топологических векторных пространств, а говорить о какой-либо структуре векторного пространства в прямой сумме векторных пространств не представляется возможным.

Перейдем к обсуждению порождения топологии слева. Пусть X, Y — векторные пространства над одним полем R и $A \in \mathscr{L}(X, Y)$. Допустим, что на X задана линейная топология τ.

IV. *Топология σ на Y, порожденная слева линейной топологией τ и отображением A, линейна.*

Для доказательства достаточно указать на соотношение (3) из пункта II.5.5 и сослаться на замечание 2 к теореме 2.

В рассматриваемой ситуации можно указать более простую конструкцию топологии σ на Y, порожденной слева линейной топологией τ на X и таким отображением $A \in \mathscr{L}(X, Y)$, что $R(A) = Y$. Поскольку ввиду линейности топологии σ при ее задании решающее значение имеет фильтр $\sigma(0)$ окрестностей нуля, ограничимся выяснением структуры этого фильтра. Заметим, что если G — открытое множество пространства X, то его насыщение $A^{-1}[A[G]]$ (которое, как нетрудно показать, в данном случае совпадает с множеством $G + \ker A$) окажется также открытым множеством. Учитывая теперь результат предложений II(II.5.5) и VI(II.5.5), можно утверждать, что фильтр $\sigma(0)$ порожден предфильтром в Y, состоящим из образов при отображении A окрестностей ядра $\ker A$. Ясно, что всякая окрестность множества $\ker A$ представляет собой окрестность нуля в X и, с другой стороны, для любой окрестности $U \in \tau(0)$ множество $\ker A + U$ — окрестность ядра $\ker A$, причем $A[\ker A + U] = A[U]$, так что фильтр окрестностей нуля в топологии σ совпадает с фильтром в Y, порожденным предфильтром $A\langle\sigma(0)\rangle$ в Y.

Имея в виду сделанное после доказательства предложения IV(II.5.5) замечание, можно сказать, что (в случае $R(A) = Y$) оператор $A : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ — открытое отображение.

Непосредственно из предложения V(II.5.5) следует, что топология на Y, порожденная слева отображением $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и линейной топологией σ на Y, отделима в том и только в том случае, если ядро $\ker A$ — замкнутое множество пространства X.

В качестве примера порождения линейной топологии слева рассмотрим задание топологии на фактор-пространстве векторного пространства. Пусть (X, τ) — топологическое векторное пространство, X_0 — подпространство векторного пространства X и X/X_0 — фактор-пространство X по X_0 (см. п. 2.3). Обозначим, как обычно, через φ канонический гомоморфизм X на X/X_0. Топология τ_{X_0} фактор-пространства (см. II.5.5), как порожденная слева линейной топологией τ и линейным отображением φ, согласно предложению IV линейна. Как следует из общей ситуации, фильтр окрестностей нуля в топологии фактор-пространства X/X_0 порожден предфильтром $\varphi\langle\tau(0)\rangle$ в X/X_0. Канонический гомоморфизм будет открытым отображением X на X/X_0. Отделимость топологии τ_{X_0} равносильна замкнутости множества X_0.

Рассмотрим кроме X топологическое векторное пространство Y с тем же, что и у X, полем скаляров R, линейный оператор $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ и предположим, что оператор A допускает снижение A_{X_0} на фактор-пространство X/X_0.

V. *Оператор A_{X_0} непрерывен в том и только в том случае, если непрерывен оператор A.*

Действительно, так как $A = A_{X_0}\circ\varphi$, то из непрерывности снижения следует непрерывность оператора A. Если же непрерывен оператор A, то, поскольку $A_{X_0}^{-1}[G] = \varphi\left[A^{-1}[G]\right]$ для любого множества $G \subset Y$, привлекая открытость гомоморфизма φ, приходим к непрерывности оператора A_{X_0} (см. теорему 3(2.II)).

Пусть $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство топологических векторных пространств над полем R, Y — векторное пространство над тем же полем R и $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — семейство таких отображений, что $A_\xi \in \mathscr{L}(X_\xi, Y)$ $(\xi \in \Xi)$. Топология на Y, порожденная слева семейством топологий $\{\tau_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ и семейством отображений $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$, может, вообще говоря, не оказаться линейной (напомним, что такая топология представляет собой точную н и ж н ю ю границу соответствующего множества топологий, которая, как было отмечено в замечании 2 к теореме 2, может не быть линейной топологией). Тем не менее, опираясь на теорему 2, можно утверждать, что существует сильнейшая из линейных топологий на Y, относительно которых каждое отображение семейства $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ непрерывно. Эта топология, как нетрудно понять, представляет собой точную нижнюю границу (в $\mathfrak{L}(X)$) множества всех линейных топологий на Y, порожденных слева топологиями τ_ξ и отображениями A_ξ $(\xi \in \Xi)$. Указанную топологию будем называть топологией, *порожденной слева семейством* $\{\tau_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *линейных топологий* (или семейством $\{(X_\xi, \tau_\xi)\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологических векторных пространств) *и семейством* $\{A_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *линейных отображений*, где $A_\xi : X_\xi \to Y$. Заметим, что эта топология, вообще говоря, слабее топологии, порождаемой слева теми же объектами без учета линейности.

В заключение рассмотрим задание топологии на индуктивном пределе, ограничившись, правда, указанной ниже ситуацией.

Пусть X — векторное пространство над полем R и $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ — прямой спектр подпространств пространства X. Как отмечено в I.5.4, в этом случае индуктивный предел данного спектра можно отождествить с объединением $\bigcup\limits_{\xi \in \Xi} X_\xi$, которое ввиду фильтруемости по возрастанию семейства $\{X_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ оказывается линейным множеством пространства X. Будем, ради простоты, считать, что $X = \underrightarrow{\lim}_{\xi \in \Xi} X_\xi$.

Допустим, что на каждом X_ξ задана линейная топология τ_ξ $(\xi \in \Xi)$. Приходится констатировать, что индуктивный предел прямого спектра $\{\tau_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ топологий, введенный в рассмотрение в пункте II.5.5, может не обладать свойством линейности. Некоторый намек на эту ситуацию был сделан в конце упомянутого пункта. В связи с этим под *индуктивным пределом прямого спектра* $\{\tau_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *линейных топологий* будем понимать топологию на X, порожденную слева семейством $\{\tau_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ линейных топологий и семейством $\{I_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ линейных отображений, где $I_\xi : x \mapsto x$ $(x \in X_\xi)$.

§ 4. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Среди всех топологических векторных пространств особую роль играют так называемые локально выпуклые пространства. Их значение объясняется в основном тем, что в таких пространствах предполагается существование в известной мере обширного набора абсолютно выпуклых окрестностей нуля, а с последним обстоятельством тесно связано «количество» линейных непрерывных функционалов на данном топологическом векторном пространстве — вопрос отнюдь не праздный при изучении топологических векторных пространств.

4.1. Линейная топология τ на векторном пространстве X называется *локально выпуклой*, если фильтр $\mathcal{U}$ окрестностей нуля в этой топологии имеет базис, состоящий из абсолютно выпуклых множеств. Топологическое векторное пространство, топология которого локально выпукла, называется *локально выпуклым пространством.*

Класс всех локально выпуклых пространств образует (полную) подкатегорию категории топологических векторных пространств.

Из определения индуцированной топологии следует, что подпространство локально выпуклого пространства локально выпукло.

Топология τ_{X_0} фактор-пространства X/X_0 локально выпуклого пространства X оказывается также локально выпуклой. Чтобы убедиться в этом, достаточно указать на то, что множества $\varphi[U]$, где $U \in \mathcal{U}$, образуют базис фильтра окрестностей нуля в топологии τ_{X_0}, и заметить, что если U — абсолютно выпуклое множество, то его образ $\varphi[U]$ при линейном отображении φ сохранит указанное свойство.

I. *Совокупность $\mathfrak{L}_0(X)$ всех локально выпуклых топологий на данном векторном пространстве X представляет собой полную решетку.*

Действительно, согласно предложению I(I.3.3), достаточно показать, что каждое множество $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}_0(X)$ имеет точную верхнюю границу, а в силу предложения I(I.3.4) для этого достаточно установить правильность вверх множества локально выпуклых топологий на X в упорядоченном множестве $\mathfrak{L}(X)$ всех линейных топологий на X, иначе говоря, достаточно убедиться в том, что топология $\mu = \sup \mathfrak{S}$ локально выпукла [9]. Учитывая структуру фильтра окрестностей нуля в топологии $\sup \mathfrak{S}$ и тот факт, что пересечение конечной совокупности абсолютно выпуклых множеств есть множество абсолютно выпуклое, можно сказать, что предложение доказано.

Заметим, что в предложении I фактически доказано, что совокупность $\mathfrak{L}_0(X)$ правильна вверх в упорядоченном множестве $\mathfrak{L}(X)$ всех линейных топологий на X. Нетрудно показать, что правильным вниз $\mathfrak{L}_0(X)$ в $\mathfrak{L}(X)$ не будет, т. е. точная нижняя граница (в $\mathfrak{L}(X)$) множества локально выпуклых топологий на X может не оказаться локально выпуклой.

[9] Учитывая указанную в замечании 1 к теореме 2 правильность вверх множества $\mathfrak{L}(X)$ линейных топологий на X, в данном случае безразлично, в каком из упорядоченных множеств $\mathfrak{L}(X)$, $\mathfrak{T}(X)$ рассматривается точная верхняя граница множества $\mathfrak{S}$.

II. *Функционал Минковского всякой выпуклой окрестности нуля топологического векторного пространства равномерно непрерывен.*

Действительно, пусть C — выпуклая окрестность нуля в пространстве X и p — функционал Минковского множества C. Используя свойство субаддитивности функционала p, для любых x, $y \in X$ имеем $p(x) \leqslant p(y) + p(x-y)$, $p(y) \leqslant p(x) + p(y-x)$, откуда $|p(x) - p(y)| \leqslant p(x-y) \vee p(y-x)$. Если ε — некоторое строго положительное число, а x — какой-либо элемент из X, то, взяв $y \in x + \varepsilon(C \cap (-C))$, имеем $y - x \in \varepsilon C$, $y - x \in -\varepsilon C$, так что и $p(x-y) \vee p(y-x) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $|p(y) - p(x)| \leqslant \varepsilon$ для $x, y \in X$, $y - x \in \varepsilon(C \cap (-C))$, что и означает равномерную непрерывность функционала p.

Рассмотрим абсолютно выпуклое поглощающее множество C в векторном пространстве X. Обозначим через $\mathscr{V}$ фильтр в X, порожденный предфильтром $\{rC : r > 0\}$ в X. Каждое множество rC $(r > 0)$ — поглощающее и уравновешенное, следовательно, фильтр $\mathscr{V}$ обладает базисом из поглощающих уравновешенных множеств. Далее, если $V \in \mathscr{V}$ и $r > 0$ — такое, что $rC \subset V$, то, полагая $U = {}^r/_2 C$, получим $U + U \subset V$. Итак, фильтр $\mathscr{V}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 1(3.IV), так что отображение $\tau_C : x \mapsto x + \mathscr{V}$ $(x \in X)$ — линейная топология на X, очевидно, локально выпуклая. Множество C служит окрестностью нуля в топологии τ_C и понятно, что τ_C — слабейшая из линейных топологий, обладающих этим свойством. Таким образом,

III. *Для каждого абсолютно выпуклого поглощающего множества C в векторном пространстве X существует слабейшая из линейных топологий на X, в которых C является окрестностью нуля. Эта топология, обозначаемая через τ_C, локально выпукла, и фильтр окрестностей нуля в ней порожден предфильтром $\{rC : r > 0\}$ в X.*

Заметим, кстати, что функционал Минковского p_C множества C представляет собой непрерывную в топологии τ_C полунорму на X. Понятно, что если p — какая-либо полунорма на X, то локально выпуклая топология τ_C, где $\{p < 1\} \subset C \subset \{p \leqslant 1\}$, оказывается слабейшей из линейных топологий на X, обеспечивающих непрерывность полунормы p. Фильтр окрестностей нуля в этой топологии порожден совокупностью $\{S_r^{(p)} : r > 0\}$ шаров, отвечающих полунорме p.

IV. *Пусть $\mathfrak{A}$ — заданная совокупность абсолютно выпуклых поглощающих множеств векторного пространства X. Среди всевозможных линейных топологий, в каждой из которых все множества совокупности $\mathfrak{A}$ служат окрестностями нуля, существует слабейшая. Эта топология локально выпукла.*

В самом деле, определим топологию τ, полагая $\tau = \sup\limits_{C \in \mathfrak{A}} \tau_C$. Из предложения I следует локальная выпуклость τ. Если теперь τ' — некоторая топология на X, удовлетворяющая условиям предложения, то, как следует из определения τ_C, имеем $\tau' \geqslant \tau_C$, так что $\tau' \geqslant \sup\limits_{C \in \mathfrak{A}} \tau_C$. Предложение доказано.

Из определения топологии $\tau = \sup\limits_{C \in \mathfrak{A}} \tau_C$ следует, что фильтр окрестностей нуля в этой топологии порожден предфильтром в X, состоящим из всевозможных конечных пересечений

$$r_1 C_1 \cap \ldots \cap r_n C_n \quad (r_k > 0,\ C_k \in \mathfrak{A},\ k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbf{N}).$$

Принимая во внимание, что

$$r(C_1 \cap \ldots \cap C_n) = rC_1 \cap \ldots \cap rC_n \subset r_1 C_1 \cap \ldots \cap r_n C_n,$$

где $0 < r \leqslant r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$, получаем, что предфильтр $\{r(C_1 \cap \ldots$
$\ldots \cap C_n) : r > 0,\ C_k \in \mathfrak{A},\ k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbf{N}\}$

в X также порождает фильтр окрестностей нуля в топологии τ. Ясно, что функционал Минковского p_C каждого множества $C \in \mathfrak{A}$ непрерывен.

4.2. Рассмотрим какую-либо совокупность $\mathfrak{M}$ полунорм на векторном пространстве X. Упорядоченная пара $(X, \mathfrak{M})$ называется *мультинормированным пространством*, а совокупность $\mathfrak{M}$ — *мультинормой* на X. Если $\mathfrak{M}$ состоит из единственной полунормы p, тогда (X, p) называется *полунормированным пространством*, а если p к тому же оказывается нормой — то *нормированным пространством*. В случае, когда в $\mathfrak{M}$ входит счетное число полунорм, пространство $(X, \mathfrak{M})$ называют *счетно-нормированным*. Как обычно в подобных ситуациях, указатели мультинормы иногда будут опущены.

Если в предложении IV(4.1) в качестве совокупности $\mathfrak{A}$ взять совокупность всех шаров $\{p < 1\}$ $(p \in \mathfrak{M})$, то слабейшая из линейных топологий на X, в которой все множества данной совокупности являются окрестностями нуля, обладает, очевидно, тем свойством, что она слабейшая из линейных топологий на X, в которых все полунормы из мультинормы $\mathfrak{M}$ непрерывны. Эта топология называется *топологией мультинормированного пространства* $(X, \mathfrak{M})$, или топологией, *ассоциированной с мультинормой* $\mathfrak{M}$, и обозначается, как правило, через $\tau_{\mathfrak{M}}$. Из замечаний к предложению IV следует, что фильтр окрестностей нуля в топологии мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$ порожден совокупностью

$$\{S_r^{(p_1)} \cap \ldots \cap S_r^{(p_n)} : r > 0,\ p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{M}\}$$

пересечений всевозможных конечных наборов шаров, отвечающих полунормам из $\mathfrak{M}$. Можно сказать также, что окрестность нуля в $\tau_{\mathfrak{M}}$ — такое множество V, что $S_r^{(p_1)} \cap \ldots \cap S_r^{(p_n)} \subset V$ для некоторых $r > 0$ и $p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{M}$. Если мультинорма $\mathfrak{M}$ *фильтруется*, т. е. с каждым конечным множеством $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ включает в себя полунорму, мажорирующую все полунормы из множества $\mathfrak{M}'$, то, как следует из определений и предложения VII(2.4), фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}$ обладает базисом, состоящим из множеств $rS_1^{(p)}$ $(r > 0,\ p \in \mathfrak{M})$.

Всякое локально выпуклое пространство (X, τ) *мультинормируемо*, т. е. на X можно задать мультинорму $\mathfrak{M}$ так, что топология $\tau_{\mathfrak{M}}$ мультинормированного пространства $(X, \mathfrak{M})$ совпадет с исходной локальной выпуклой топологией τ. В качестве такой мультинормы можно взять, например, совокупность всех непрерывных на X полунорм. Впредь, говоря о мультинорме в локально выпуклом пространстве, мы будем предполагать, что ассоциированная с ней топология есть топология данного локально выпуклого пространства.

Понятно, что если только X не сводится к единственному, нулевому, элементу, то на X можно указать много мультинорм, приводящих к одной и той же локально выпуклой топологии.

Пусть $(X, \mathfrak{M})$ — мультинормированное пространство и X_0 — подпространство векторного пространства X. Совокупность $\mathfrak{M}_0$ сужений на X_0 полунорм из $\mathfrak{M}$ называется *сужением мультинормы* $\mathfrak{M}$ *на* X_0, а пара $(X_0, \mathfrak{M}_0)$ — *подпространством мультинормированного пространства* $(X, \mathfrak{M})$. Нетрудно понять, что топология пространства $(X_0, \mathfrak{M}_0)$ совпадает с топологией, индуцированной на X_0 топологией пространства $(X, \mathfrak{M})$. Отсюда, в частности, следует, что на подпространстве локально выпуклого пространства всегда есть мультинорма, состоящая из полунорм, распространимых до полунорм на X с сохранением непрерывности. Особо подчеркнем, что если пространство X — нормированное, то среди непрерывных распространений на X нормы на X_0 есть норма исходного пространства.

Исходя из связи мультинормированных и локально выпуклых пространств, в рамках теории мультинормированных пространств можно говорить о топологических понятиях и фактах, имея в виду соответствующее понятие или факт относительно ассоциированной с данной мультинормой топологии. Например, можно говорить о замкнутых и открытых множествах в мультинормированном пространстве, о сходимости фильтров в мультинормированном пространстве и т. п., каждый раз подразумевая замкнутость или открытость множеств или сходимость в топологии мультинормированного пространства. Если идет речь о каком-то топологическом свойстве мультинормы, надо понимать это так, что топология, ассоциированная с данной мультинормой, обладает этим свойством.

Выясним, как в терминах мультинормы формулируются некоторые определения и утверждения, связанные с локально выпуклыми пространствами.

I. *Мультинормированное пространство* $(X, \mathfrak{M})$ *отделимо в том и только в том случае, если для любого ненулевого элемента* $x \in X$ *можно указать такую полунорму* $p \in \mathfrak{M}$, *что* $p(x) > 0$.

Предположим, что мультинорма $\mathfrak{M}$ отделима. Тогда $\bigcap\limits_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$, где $\mathcal{U}$ — фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}$. Если элемент $x \in X$ таков, что $p(x) = 0$ для любой полунормы $p \in \mathfrak{M}$, тогда x входит в любую окрестность нуля, следовательно, $x = 0$.

Допустим, что для каждого ненулевого элемента $x \in X$ можно указать такую полунорму $p \in \mathfrak{M}$, что $p(x) > 0$. Тогда $\bigcap \{S_r^{(p)} : p \in \mathfrak{M},\ r > 0\} = \{0\}$, откуда и следует отделимость пространства $(X, \mathfrak{M})$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — мультинормы на X. Говорят, что мультинорма $\mathfrak{M}_1$ *мажорирует* [10] мультинорму $\mathfrak{M}_2$ (и обозначают это обстоятельство через $\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$ или $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_1$), если для любой полунормы $q \in \mathfrak{M}_2$ можно указать такую полунорму $p \in \mathfrak{M}_1$, что $p > q$. Если каждая из мультинорм $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ мажорирует другую, такие мультинормы называют *эквивалентными* и обозначают через $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$.

Привлекая определения отношения порядка в множестве топологий и в множестве фильтров, а также учитывая предложение VII(2.4), нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

II. *Мультинорма* $\mathfrak{M}_1$ *мажорирует мультинорму* $\mathfrak{M}_2$ *в том и только в том случае, если ассоциированная с* $\mathfrak{M}_1$ *топология сильнее топологии, ассоциированной с* $\mathfrak{M}_2$. *В частности, мультинормы* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *эквивалентны в том и только в том случае, если ассоциированные с ними топологии совпадают.*

Укажем, как в терминах мультинормы формулируются сходимость и сходимость в себе семейств элементов мультинормированного пространства X.

III. *Фильтрующееся семейство* $\varphi : \{x_\xi\}$ $(\xi \in \Xi)$ *элементов мультинормированного пространства* X *сходится к точке*

[10]) Отметим, что отношение мажорирования между мультинормами представляет собой отношение предпорядка на множестве всех мультинорм на X, т. е. это отношение рефлексивно и транзитивно.

$x \in X$ в том и только в том случае, если $p(x_\xi - x) \to 0$ для каждой полунормы $p \in \mathfrak{M}$.

IV. *Сходимость в себе фильтрующегося семейства φ равносильна тому, что для любой полунормы $p \in \mathfrak{M}$ фильтрующееся числовое семейство $\{p(x_\xi - x_\eta)\}$ $((\xi, \eta) \in \Xi \times \Xi)$ сходится к нулю.*

Справедливость последних предложений следует непосредственно из определений сходимости и топологии мультинормированного пространства.

V. *Множество E мультинормированного пространства X ограничено в том и только в том случае, если $\sup p[E] < +\infty$ для любой полунормы $p \in \mathfrak{M}$.*

Действительно, ограниченное множество $E \subset X$ поглощается любой окрестностью нуля пространства $(X, \tau_{\mathfrak{M}})$, в частности, каждой окрестностью $S^{(p)}$ $(p \in \mathfrak{M})$, откуда легко следует, что $\sup p[E] < +\infty$ для каждой полунормы $p \in \mathfrak{M}$.

Допустим теперь, что $\sup p[E] < +\infty$, какова бы ни была полунорма $p \in \mathfrak{M}$. Поскольку фильтр окрестностей нуля в топологии мультинормированного пространства порожден предфильтром в X, состоящим из всевозможных пересечений $S_r^{(p_1)} \cap \ldots \cap S_r^{(p_n)}$ $(p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{M}, n \in \mathbf{N})$, то для доказательства ограниченности множества E достаточно установить его поглощение каждым шаром $S^{(p)}$ $(p \in \mathfrak{M})$, что в свою очередь без труда вытекает из конечности $\sup p[E]$.

В заключение настоящего пункта рассмотрим условия, равносильные непрерывности данного линейного оператора из X в Y.

VI. *Пусть (X, τ), (Y, σ) — локально выпуклые пространства. Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен в том и только в том случае, если для любой непрерывной полунормы q на Y суперпозиция $q \circ A$ представляет собой непрерывную полунорму на X.*

В самом деле, пусть оператор A непрерывен и q — непрерывная полунорма на Y. Используя непрерывность оператора A, найдем такую окрестность $U \in \tau(0)$, что $A[U] \subset S^{(q)}$. Тогда $q[A[U]] \leqslant 1$, т. е. $U \subset S^{(q \circ A)}$, откуда следует, что $S^{(q \circ A)}$ — окрестность нуля в пространстве X, так что согласно предложению II(4.1) полунорма $q \circ A$ непрерывна.

Допустим, что полунорма $q \circ A$ непрерывна при любой непрерывной полунорме q на Y, и возьмем абсолютно выпуклую окрестность V нуля в Y. Функционал Минковского q множества V — непрерывная полунорма на Y, следовательно, полунорма $q \circ A$ на X непрерывна. Пусть U — такое множество в X, что $q[A(x)] < 1$ для каждого $x \in U$. Тогда $A[U] \subset \{q < 1\} \subset \subset V$, откуда и следует непрерывность оператора A.

VII. *Пусть (X, τ) — локально выпуклое пространство, $(Y, \mathfrak{N})$ — мультинормированное пространство. Линейный оператор $A : X \to Y$ непрерывен в том и только в том случае, если для любой полунормы $q \in \mathfrak{N}$ полунорма $q \circ A$ на X непрерывна.*

Результат предложения следует из предложения VI с учетом определения топологии мультинормированного пространства.

VIII. *Пусть $(X, \mathfrak{M})$, $(Y, \mathfrak{N})$ — мультинормированные пространства. Для непрерывности линейного оператора $A : :X \to Y$ достаточно, а если мультинорма $\mathfrak{M}$ фильтруется, то и необходимо, чтобы для любой полунормы $q \in \mathfrak{N}$ можно было указать такие полунорму $p \in \mathfrak{M}$ и число $M_{p,q}$ что*

$$q(A(x)) \leqslant M_{p,q}p(x) \tag{1}$$

для всех $x \in X$.

Для доказательства этого предложения достаточно сослаться на предложение VII и на устройство топологии мультинормированного пространства с фильтрующейся мультинормой.

4.3. Рассмотрим фактор-пространство X/X_0 векторного пространства X по подпространству X_0. Пусть p — полунорма на X. Поскольку шар $S_1^{(p)}$ — абсолютно выпуклое, поглощающее множество в X, этими же свойствами будет обладать и множество $Q = \varphi[S_1^{(p)}]$, как образ множества $S_1^{(p)}$ при линейном отображении φ, действующем на X/X_0. Следовательно, функционал Минковского множества Q представляет собой полунорму на X/X_0, называемую *фактор-полунормой* полунормы p.

Установим связь полунормы с ее фактор-полунормой.

I. *Пусть p — полунорма на X и p_0 — ее фактор-полунорма. Тогда*

$$p_0(\varphi(x)) = \inf_{x' \in \varphi(x)} p(x') = \inf p[\varphi^{-1}\{x\}]. \tag{2}$$

Действительно, если $x' \in \varphi(x)$ и t — некоторое строго большее, чем $p(x')$, число, то $x' \in \{p < t\} \subset tS_1^{(p)}$, значит, $\varphi(x) = \varphi(x') \in \varphi[tS_1^{(p)}] = tQ$. Тем самым $p_0(\varphi(x)) \leqslant t$, и ввиду произвольности t должно быть $p_0(\varphi(x)) \leqslant p(x)$.

Подразумевая теперь под t произвольное число, строго большее чем $p_0(\varphi(x))$, можно написать, что $\varphi(x) \in tQ = \varphi[tS_1^{(p)}]$, так что найдется такой элемент $x_0 \in tS_1^{(p)}$, что $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Поскольку $tS_1^{(p)} = S_t^{(p)} = \{p \leqslant t\}$, то $p(x_0) \leqslant t$, тем более $\inf p[\varphi^{-1}[\varphi(x)]] \leqslant t$ и, стало быть, вновь используя произвольность t, будем иметь $\inf p[\varphi^{-1}[\varphi(x)]] \leqslant p_0(\varphi(x))$. Предложение доказано.

Полунорма p_0, вообще говоря, не будет нормой даже в том случае, когда p — норма.

II. *Если p — полунорма на X, тогда полунорма p_0 является нормой в том и только в том случае, если множество X_0 замкнуто в полунормированном пространстве (X, p).*

Действительно, пусть p_0 — норма. Если $x_0 \notin X_0$, то $\varphi(x_0) \neq \neq 0$, следовательно, $p_0(\varphi(x_0)) \neq 0$, т. е. $\inf p[\varphi^{-1}\{x_0\}] > 0$, откуда $p(x_0) > 0$. Окрестность $x_0 + \{p < {}^1/_2\, p(x_0)\}$ точки x_0, очевидно, не пересекается с X_0, так что дополнение X_0' открыто, а X_0 — замкнуто.

Допустим теперь, что X_0 замкнуто, и рассмотрим такой элемент $\varphi(x) \in X/X_0$, что $p_0(\varphi(x)) = \inf p[\varphi^{-1}\{x\}] = 0$. Используя замкнутость X_0, нетрудно показать, что в этом случае $0 \in \varphi(x)$, следовательно, $\varphi(x) = \varphi(0) = 0$. Таким образом, p_0 — норма на X/X_0.

Пусть $\mathfrak{M}$ — мультинорма на X и $\mathfrak{M}_0$ — совокупность фактор-полунорм p_0, где $p \in \mathfrak{M}$. Из определения ассоциированной с мультинормой топологии следует, что фильтр окрестностей нуля в топологии $\tau_{\mathfrak{M}_0}$ порожден предфильтром

$$\{r\varphi[S_1^{(p_1)}] \cap \ldots \cap \varphi[S_1^{(p_n)}] : r > 0,\, p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{M},\, n \in \mathbf{N}\}$$

в X/X_0. Поскольку фильтр окрестностей нуля в топологии τ_{X_0} порожден предфильтром $\{r\varphi[S_1^{(p_1)} \cap \ldots \cap S_1^{(p_n)}] : r > 0,\, p_1, \ldots$ $\ldots, p_n \in \mathfrak{M}\}$ в X/X_0 и имеет место включение

$$\varphi[S_1^{(p_1)} \cap \ldots \cap S_1^{(p_n)}] \subset \varphi[S_1^{(p_1)}] \cap \ldots \cap \varphi[S_1^{(p_n)}],$$

то топология τ_{X_0}, вообще говоря, сильнее топологии $\tau_{\mathfrak{M}_0}$, ассоциированной с мультинормой $\mathfrak{M}_0$. В некоторых случаях, однако, эти топологии совпадают.

III. *Если мультинорма $\mathfrak{M}$ фильтруется, то $\tau_{\mathfrak{M}_0} = \tau_{X_0}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что если $\mathfrak{M}$ фильтруется, то совокупность множеств $r\varphi[S_1^{(p)}]$ $(p \in \mathfrak{M},\, r > 0)$ порождает фильтр окрестностей нуля как в топологии $\tau_{\mathfrak{M}_0}$, так и в топологии τ_{X_0}.

4.4. Из мультинормированных пространств проще всего устроены нормированные пространства, поэтому не удивительно, что они наиболее подробно изучены. С другой стороны, на многих конкретных функциональных пространствах естественным образом задается норма. Это приводит к тому, что нормированные пространства оказываются одним из наиболее широко используемых объектов анализа и заслуживают подробного и полного изложения. Мы, однако, лишь кратко остановимся на некоторых вопросах, касающихся нормированных пространств. Так как нередко в рассмотрении одновременно участвуют несколько нормированных пространств и к тому же часто с конкретными векторными пространствами связывают некоторую «стандартную» норму, удобно обозначать норму элемента в разных векторных пространствах одним символом. Общепринято обозначать норму символом $\|\cdot\|$, так что, например, норма элемента x в нормированном пространстве X обозначается через $\|x\|$. Преимущество такой унификации состоит по крайней мере в том, что, приходя к рассмотрению нового векторного пространства, на котором предполагается заданной одна норма, не надо каждый раз оговаривать обозначение этой нормы. Конечно, необходимо отдавать себе отчет в том, где определена та или иная норма.

Пусть X — нормированное пространство. Из определения нормы непосредственно следует, что отображение $\rho : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ — метрика на X. Равномерность метрического пространства (X, ρ), очевидно, совпадает с равномерностью на X, которая определяется топологией данного нормированного пространства. Стало быть, топология нормированного пространства метризуема, а вместе с этим обладает всеми присущими метрическим пространствам свойствами.

Сравнительно простое устройство топологии нормированного пространства естественно приводит к вопросу: как по данной линейной топологии на X узнать, нормируемо ли данное топологическое векторное пространство, т. е. можно ли задать на X норму так, что топология полученного нормированного пространства совпадет с исходной топологией? Ниже мы установим критерий нормируемости топологического векторного пространства, известный под названием *теоремы Колмогорова* о нормируемости.

Теорема 1(4.IV). *Топологическое векторное пространство X нормируемо в том и только в том случае, если оно отделимо и обладает абсолютно выпуклой ограниченной окрестностью нуля.*

Доказательство. Если X нормируемо, то, как отмечалось, оно метризуемо, следовательно, топология пространства X отделима. Если к этому добавить, что шар единичного радиуса с центром в нуле — абсолютно выпуклая и, очевидно, ограниченная окрестность нуля, то доказательство второй части теоремы закончено.

Предположим, что (X, τ) — отделимое топологическое векторное пространство и C — абсолютно выпуклая ограниченная окрестность нуля в X. Обозначим через p функционал Минковского множества C. Из ограниченности C следует, что совокупность $\{rC : r > 0\}$ — базис фильтра $\tau(0)$, откуда, учитывая, что $\{p < 1\} \subset C$, получаем, что совокупность множеств $\{p < r\}$, где $r > 0$, также служит базисом фильтра $\tau(0)$.

Покажем, что p — норма. В самом деле, пусть $x \neq 0$. Поскольку пространство X отделимо, найдется такая окрестность $V \in \tau(0)$, что $x \notin V$, при этом можно считать, что $V = \{p < r\}$ $(r > 0)$. Тогда получим, что $p(x) \geqslant r$, так что $p(x) \neq 0$ и p — норма. Теорема полностью доказана.

Рассмотрим нормированные пространства X, Y и линейный оператор $A : X \to Y$. Обозначим через K, H соответственно шары единичного радиуса в пространствах X, Y. Элемент $\|A\| = \sup\limits_{x \in K} \|A(x)\|$ из $\bar{\mathbf{R}}$ называется *нормой линейного оператора* A. Используя линейность A, нетрудно показать что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A(x)\|$. Далее.

I. *Пусть* $A \in L(X, Y)$. *Тогда*

$$\|A(x)\| \leqslant \|A\| \, \|x\| \tag{3}$$

для всех $x \in X$. *Неравенство* (3) *называют* *нормативным*.

II. *Предположим, что положительное число* $t \in \mathbf{R}$ *таково, что* $\|A(x)\| \leqslant t\|x\|$ *для всех* $x \in X$. *Тогда* $\|A\| \leqslant t$.

Из предложения II следует, в частности, что норма оператора A может быть найдена как $\inf\{t > 0 : \|A(x)\| \leqslant t\|x\| \ , x \in X\}$.

III. *Пусть* $A \in L(X, Y)$. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *оператор* A *непрерывен;*
2) *оператор* A *ограничен;*
3) *норма оператора* A *конечна.*

Учитывая результат предложения II(3.2), достаточно доказать, что из второго утверждения следует третье, а из третьего — первое.

Пусть оператор $A \in L(X, Y)$ ограничен. Тогда, в частности, образ $A[K]$ будет ограниченным множеством пространства Y, следовательно, для любого шара εH радиуса $\varepsilon > 0$, отвечающего норме на Y, можно указать число $r > 0$ так, что $rA[K] \subset \varepsilon H$, или что $A[K] \subset r^{-1}\varepsilon H$, откуда $\|A\| \leqslant r^{-1}\varepsilon$.

Допустим теперь, что $\|A\| < +\infty$. Тогда из нормативного неравенства следует, что оператор A удовлетворяет условию Липшица, так что оказывается непрерывным.

Непосредственно из определения устанавливается

IV. *Отображение* $A \mapsto \|A\|$, *заданное на векторном пространстве* $\mathscr{L}(X, Y)$ *всех линейных непрерывных операторов, действующих из* X *в* Y, *представляет собой норму на* $\mathscr{L}(X, Y)$.

V. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ — *линейный непрерывный оператор, допускающий снижение* A_0 *на фактор-пространство* X/X_0 *по подпространству* $X_0 \subset X$. *Тогда* $\|A_0\| = \|A\|$.

Действительно, так как $A = A_0 \circ \varphi$, то поскольку $\|\varphi\| \leqslant 1$ имеем $\|A\| \leqslant \|A_0\| \, \|\varphi\| \leqslant \|A_0\|$. С другой стороны, для каждого элемента $x \in X$ и произвольного числа $\varepsilon > 0$ на основании структуры фактор-нормы можно указать такой элемент $x' \in \varphi(x)$, что $\|x'\| \leqslant (1+\varepsilon) \, \|\varphi(x)\|$. Тогда $\|A_0 \, (\varphi(x))\| = \|A_0(\varphi(x'))\| = \|A(x')\| \leqslant \|A\| \, \|x'\| \leqslant (1+\varepsilon) \, \|A\| \, \|\varphi(x)\|$. Следовательно, $\|A_0\| \leqslant (1+\varepsilon) \, \|A\|$, т. е. ввиду произвольности ε получаем, что $\|A_0\| \leqslant \|A\|$.

Заметим, что если $X_0 \neq X$, то $\|\varphi\| = 1$.

4.5. В заключение обсудим структуру линейных топологий на конечномерном векторном пространстве.

Пусть X — конечномерное векторное пространство размерности n. Фиксируем в X базис $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ и рассмотрим на X норму $q : x \mapsto |\alpha_1| \vee \ldots \vee |\alpha_n|$, где $\alpha_k \, (k = 1, \ldots, n)$—координаты вектора x в разложении по базису E[11].

Лемма 1. Любая отделимая линейная топология τ на X совпадает с топологией μ нормированного пространства (X, q).

Доказательство. Покажем сначала, что $\tau \leqslant \mu$. Пусть $V \in \tau(\mathbf{0})$. В силу предложения VI (3.1) найдется такая окрестность $U \in \tau(\mathbf{0})$, что $U + \ldots + U \subset V$, где в сумме участвует n слагаемых. Так как U — поглощающее множество, то для каждого e_k $(k = 1, \ldots, n)$ можно указать такое $r_k > 0$, что $\alpha e_k \in U$, если $|\alpha| \leqslant r_k$. Полагая $r = r_1 \wedge \ldots \wedge r_n$, получаем, что $\alpha x_k \in U$ при $|\alpha| \leqslant r$.

Рассмотрим теперь $x \in \{q < r\}$. Согласно определению нормы q имеем $|\alpha_k| \leqslant q(x) < r$, следовательно, $\alpha_k e_k \in U$ $(k = 1, \ldots, n)$, а тогда $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \in U + \ldots + U \subset V$. Поскольку $\{q < r\}$ — окрестность нуля в топологии μ, то тем самым $\tau \leqslant \mu$.

Для доказательства соотношения $\tau \geqslant \mu$ достаточно показать, что шар $S_1 = \{q \leqslant 1\}$ содержит некоторую окрестность нуля в топологии τ. Рассмотрим пространство R^n и обозначим через ψ такое отображение пространства X на векторное пространство R^n, что $\psi(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Нетрудно понять, что отображение ψ взаимно однозначно и линейно. Если при этом на R^n задать норму p, полагая $p(t) = q(\psi^{-1}(t))$ $(t \in R^n)$, то ψ становится гомеоморфизмом нормированных пространств (X, q) и (R^n, p). Положим $S = \psi[S_1]$. Непосредственно из определения S и ψ следует, что $S = M^n$, где $M = \{x \in R : |x| \leqslant 1\}$. Так как M — замкнутое и ограниченное, а значит, компактное в R множество (см. следствие 2 из теоремы I(3.II)

[11]) Мы не останавливаемся на очевидной проверке того, что отображение q — действительно норма.

и предложение I (II.2.8)) то в силу (II.2.8) множество S также компактно, следовательно, компактно и множество $S_1 = \psi^{-1}[S]$ как образ компактного множества при непрерывном отображении (см. теорему 5(2.II)). Множество $\{q=1\}$, будучи замкнутым в топологии μ подмножеством компактного множества S_1, само компактно. Но по доказанному $\tau \leqslant \mu$, а это равносильно непрерывности тождественного отображения $I:(X, \mu) \to (X, \tau)$. Еще раз используя теорему 5(2.II), получаем, что множество $\{q = 1\}$ компактно и в топологии τ.

Так как топология τ отделима, то $\bigcap\limits_{U \in \tau(0)} U = \{0\}$, поэтому $\left(\bigcap\limits_{U \in \tau(0)} U\right) \cap \{q = 1\} = \varnothing$. Поскольку множество $\{q = 1\}$ компактно, то согласно предложению I(II.2.7) фильтр окрестностей нуля не зацепляет этого множества, следовательно, найдется окрестность $V \in \tau(0)$ (ее, очевидно, можно считать уравновешенной) такая, что $V \cap \{q = 1\} = \varnothing$. Покажем, что $V \subset S_1$. Действительно, предположим, что нашелся такой элемент $y \in V$, что $q(y) > 1$. Тогда $(q(y))^{-1}y \in \{q = 1\}$ и $(q(y))^{-1}y \in (q(y))^{-1} V$. Так как V — уравновешенная окрестность и $0 < (q(y))^{-1} < 1$, то $(q(y))^{-1}y \in V$, а тогда $(q(y))^{-1}y \in V \cap \{q = 1\}$, что невозможно. Таким образом, нашлась окрестность $V \in \tau(0)$, содержащаяся в S_1, а это и означает, что $\mu \leqslant \tau$, т. е. вместе с установленным ранее $\mu = \tau$. Лемма доказана.

Следующий результат, непосредственно вытекающий из леммы 1, называют *теоремой Рисса*.

Теорема 2(4.IV). *Отделимая линейная топология на конечномерном векторном пространстве единственна.*

Замечание. Пусть p, q—две нормы на конечномерном векторном пространстве X. Топологии нормированных пространств (X, p), (X, q) отделимы, так что из теоремы Рисса следует эквивалентность норм p, q. Иначе можно сказать, что любые две нормы на конечномерном векторном пространстве эквивалентны.

Посмотрим теперь, как дело обстоит в случае, когда топология τ на конечномерном векторном пространстве X может и не быть отделимой. Положим $X_0 = \overline{\{0\}}$. Выберем в X базис $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ так, что $\{e_1, \ldots, e_m\}$ $(1 \leqslant m < n)$ образуют базис в подпространстве X_0 векторного пространства X (если $X_0 = \{0\}$, полагаем $m = 0$ и $e_0 = 0$). Определим на X полунорму, полагая $p(x) = |\alpha_{m+1}| \vee \ldots \vee |\alpha_n|$, где α_k $(k = 1, \ldots, n)$ — координаты элемента x в разложении по заданному базису.

Обозначим через ν топологию полунормированного пространства (X, p).

Лемма 2. *Линейная топология τ на X совпадает с определенной выше топологией ν.*

Доказательство. Пусть $E_k = \{\alpha e_k : \alpha \in R, |\alpha| \leqslant 1\}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Покажем, что при $k > m$ множества E_k

ограничены в топологии τ. Действительно, пусть $V \in \tau(0)$ и $U \subset V$ — уравновешенная окрестность нуля. Так как U — поглощающее множество, а n — фиксированное натуральное число, то найдется такое $r > 0$, что $\beta e_k \in U$ для $|\beta| \leqslant r$ и $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\beta(\alpha e_k) \in \alpha U$, а поскольку $\alpha U \subset U \subset V$ при $|\alpha| \leqslant 1$, то $\beta E_k \subset V$, следовательно, E_k поглощается окрестностью V, а вследствие произвольности V множество E_k ограничено.

Множество X_0 также ограничено, ибо по определению поглощается каждой окрестностью нуля. Учитывая непрерывность операции сложения в топологическом векторном пространстве, можно сказать, что множество $X_0 + E_{m+1} + \ldots + E_n$ ограничено. Заметим теперь, что $X_0 + E_{m+1} + \ldots + E_n = S_1^{(p)}$, и из ограниченности множества $S_1^{(p)}$ можно заключить о том, что для любой окрестности $V \in \tau(0)$ найдется такое $r > 0$, что $rS_1^{(p)} \subset V$, а это в свою очередь означает справедливость соотношения $\nu \geqslant \tau$ между топологиями τ и ν.

Обозначим через Y линейную оболочку $\mathscr{L}(e_{m+1}, \ldots, e_n)$ множества $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Легко видеть, что топологии τ, ν, индуцированные на Y топологиями τ, ν, отделимы, так что согласно теореме Рисса они совпадают.

Пусть $P : x \mapsto \sum\limits_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k \left(x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right)$ — проектор на подпространство Y. Убедимся в его непрерывности как отображения из (X, τ) в (Y, ν). Отметим прежде всего, что $P^{-1}\{0\} = X_0$, а тогда в силу теоремы 2(2.IV) снижение $P_0 : X/X_0 \to Y$ оператора P на фактор-пространство X/X_0 представляет собой взаимно однозначное отображение множества X/X_0 на Y. Пусть σ — какая-либо линейная топология на X/X_0, относительно которой снижение P_0 непрерывно (очевидно, такая топология существует). Поскольку

$$\bigcap_{V \in \nu(0)} P_0^{-1}[V] = P_0^{-1}\left[\bigcap_{V \in \nu(0)} V\right] = P_0^{-1}\{0\} = \{0\},$$

а множества $P_0^{-1}[V]$ входят в фильтр окрестностей нуля в топологии σ, то σ отделима. Кроме того, поскольку X_0 замкнуто, то топология τ_{X_0} на X/X_0 также отделима и по лемме 1 $\sigma = \tau_{X_0}$. Следовательно, оператор P_0 непрерывен и в топологии τ_{X_0} на X/X_0, а тогда непрерывен и оператор $P = P_0 \circ \varphi$, где φ — канонический гомоморфизм X на X/X_0.

Пусть S — отвечающий полунорме p шар единичного радиуса в пространстве Y. Так как оператор $P : (X, \tau) \to (Y, \nu)$ непрерывен, то $P^{-1}[S \cap Y]$ — окрестность нуля в (X, τ). Из определения S имеем $P^{-1}[S \cap Y] = S_1$, где $S_1 = \{p \leqslant 1\}$ — отвечающий полунорме p единичный шар в пространстве X.

Итак, S_1 — окрестность нуля в (X, ν), откуда, в свою очередь, следует, что $\nu \leqslant \tau$, а вместе с доказанным выше — что $\nu = \tau$.

Теорема 3(4. IV). *Топологии ρ, λ на конечномерном векторном пространстве X связаны соотношением $\lambda \leqslant \rho$ в том и только в том случае, если* $\bigcap\limits_{V \in \rho(0)} V \subset \bigcap\limits_{V \in \lambda(0)} V$.

Доказательство. Действительно, если $\rho \geqslant \lambda$, то по определению отношения порядка в множестве топологий на X это означает, что $\rho(0) \supset \lambda(0)$, следовательно, $\bigcap\limits_{V \in \rho(0)} V \subset \bigcap\limits_{V \in \lambda(0)} V$.

Допустим теперь, что $\{0\} \neq X_0 = \bigcap\limits_{V \in \rho(0)} V \subset \bigcap\limits_{V \in \lambda(0)} V = X_1$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в X так, что $\{e_1, \ldots, e_m\}$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ — базис в X_0, а $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_k\}$ $(m \leqslant k \leqslant n)$ — базис в X_1. Обозначим через $S_1^{(p)}$, $S_1^{(q)}$ шары единичного радиуса, отвечающие полунормам

$$p: x \mapsto |\alpha_{m+1}| \vee \ldots \vee |\alpha_n|, \quad q: x \mapsto |\alpha_{k+1}| \vee \ldots \vee |\alpha_n|$$

соответственно. Очевидно, что $S_1^{(p)} \subset S_1^q$, а в силу леммы топологии ρ и λ совпадают с топологиями полунормированных пространств (X, p) и (X, q) соответственно. Из сказанного можно сделать вывод о том, что $\rho \geqslant \lambda$.

Следствие. *Отделимая линейная топология на конечномерном векторном пространстве сильнее любой неотделимой линейной топологии на этом пространстве.*

Используя установленные в этом пункте результаты, нетрудно показать

I. *Пусть X, Y — топологические векторные пространства, причем топология пространства X отделима. Тогда всякий действующий в Y линейный оператор A с конечномерной областью определения $X' \subset X$ непрерывен.*

II. *Пусть X, Y — векторные пространства, причем Y конечномерно и заданная на нем линейная топология отделима. Тогда оператор $A \in L(X, Y)$ непрерывен в том и только в том случае, если его ядро $X_0 = A^{-1}\{0\}$ замкнуто.*

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

1 р. 60 к.