Г. П. АКИЛОВ
В. Н. ДЯТЛОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Петру Тем[illegible]вичу
с уважением
В. Дятлов
8 июля
1978 г.

Г. П. АКИЛОВ, В. Н. ДЯТЛОВ

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

НОВОСИБИРСК · 1978

УДК 517

Акилов Г.П., Дятлов В.Н.
Элементы функционального анализа.
Учебное пособие. НГУ, 1978, 1-77.

Настоящая книга представляет собой продолжение наших "Лекций по математическому анализу", изданных в НГУ в 1973 и 1975 гг., и включает в себя теорию дифференцирования отображений нормированных пространств. Материал первых книг используется здесь в незначительной мере. Предполагается, что читатель знаком с топологическими векторными и с локально выпуклыми пространствами. Большинство понятий и фактов излагается в общей ситуации, основные из них конкретизируются для важнейших частных случаев.

Книга предназначена студентам второго и третьего курсов математического факультета НГУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Если придерживаться той точки зрения, что в математическом анализе изучаются (числовые) функции методами, основанными на понятии сходимости и, главное, на понятиях дифференцирования и интегрирования (по Ньютону), а к функциональному анализу относится изучение наделенных характерными для анализа структурами множеств, в частности, функциональных пространств и отображений между ними, то, конечно, все связанные с локально выпуклыми и с нормированными пространствами вопросы следует отнести к функциональному анализу. Руководствуясь именно такими соображениями, т.е. становясь на узкую точку зрения в понимании содержания математического анализа, мы и придали настоящей книге название, отличное от названия наших первых двух книг по анализу, изданных в НГУ в 1973 и 1975 гг., несмотря на то, что она служит их продолжением (этим, в частности, объясняется номер единственной излагаемой здесь главы). Сразу же отметим, что материал первых двух книг здесь используется в незначительной степени и знакомиться с книгой может читатель, которому известно понятие топологического векторного пространства. Можно, конечно, ограничиться знанием нормированных пространств (или даже числовых множеств), хотя при этом всякий раз вместо топологического векторного (или локально выпуклого) пространства следует иметь в виду нормированное пространство (соответственно числовое множество). Это вряд ли помешает усвоению основных идей излагаемого в книге материала.

В книге излагаются основные моменты теории дифференцирования отображений нормированных (а иногда даже более общих) пространств, последовательно проводится идея локальной аппроксимации данного отображения линейными (непрерывными) отображениями, т.е. отображениями, согласованными с заданной структурой. Абстрактность ситуации позволяет не заслонять принципиальные моменты присущими конкретности излишествами. Учитывая однако, что во многих случаях соответствующие выводы используются в более конкретных ситуациях, зачастую в конечномерных пространствах, мы указываем специфику предъявляемых требований и получаемых результатов для случая конечномерных пространств.

Остановимся подробнее на содержании книги. В первом параграфе рассматриваются отображения из числовой прямой в локально выпуклое пространство и для них развивается теория дифференцирования. Материал этого параграфа тесно связан с содержанием Ш, IУ глав.

Рассматривая в следующем параграфе отображение из векторного пространства в локально выпуклое, мы сужаем его на некоторую прямую и получаем отображение, заданное фактически на числовой прямой. Так возникает производная по данному направлению. Если, далее, производные по всем направлениям квалифицированно, а именно линейно зависят от направлений, это и означает дифференцируемость рассматриваемого отображения в данной точке (как говорят, в смысле Гато). Если, кроме того, отображение определено в локально выпуклом пространстве, естественные требования приводят к понятию дифференцируемости по Фреше.

В третьем параграфе, определив производные и дифференциалы высших порядков, мы выясняем их роль в локальном исследовании отображения. Если дифференцируемость первого порядка означает возможность локальной аппроксимации линейным отображением, то дифференцируемость более высоких порядков уже не равносильна возможности локально аппроксимировать данное отображение полилинейными, хотя, как указывает формула Тейлора, дифференцируемое до какого-либо порядка отображение может быть локально приближено соответствующим полилинейным.

Четвертый параграф посвящен одному из главных фактов теории дифференцирования - теореме о неявном отображении. В этом факте речь идет о следующем: рассматривается соответствие из одного нормированного пространства в другое и спрашивается, можно ли при некоторых условиях гарантировать локальную однозначность данного соответствия? Конечно, использование аппарата дифференцирования для анализа поставленного вопроса предполагает квалифицированное аналитическое задание данного соответствия, и естественные условия, предъявляемые к связанным с соответствием дифференциалам, позволяют утверждать о локальной однозначности соответствия, а иногда даже об определенной квалификации получившегося отображения.

В последнем параграфе аппарат дифференцирования используется для анализа точек экстремума заданной в нормированном пространстве вещественной функции. При этом первый дифференциал позволяет указать необходимые условия экстремума, а дифференциалы более высоких порядков - и достаточные. Здесь же указаны необходимые условия относительного экстремума, т.е. экстремума сужения функции на некоторое множество.

В книге практически нет примеров, поясняющих теоретические выводы, а также упражнений, решая которые читатель мог бы контролировать усвоение материала. Мы рассчитываем на то, что читающий эту книгу, во-первых, проявит творческую активность и сумеет самостоятельно ставить перед собой вопросы и находить на них ответы (лаконичность изложения этому способствует), а во-вторых, не ограничится рамками только этой книги и будет использовать широко известные монографии по анализу, в которых примеры представлены более полно.

Книга, на наш взгляд, предназначена всем заинтересованным в изучении и использовании элементов анализа, но прежде всего - студентам II, III курсов математических специальностей университетов, которые найдут в ней основополагающие идеи теории дифференцирования и их воплощение. Книга несомненно будет полезной преподавателям анализа в университетах и пединститутах, которые могут рассматривать ее как подспорье при создании лекционных курсов по анализу.

Система ссылок и обозначений основана на том, что каждый параграф разбит на пункты и в пределах каждого пункта утверждения, не имеющие решающего, принципиального значения (мы называем их при необходимости предложениями) расположены в порядке возрастания номеров. Нумерация теорем и лемм сквозная в каждом параграфе. После порядкового номера теоремы (леммы) указаны номера параграфа и главы, в которых она расположена, и эти данные служат ориентиром при ссылках на теоремы (леммы). При ссылке на материал пункта указывается номер параграфа и номер пункта в параграфе, если пункт расположен в текущей главе ; перед указанными данными ставится номер главы, если требуемый пункт выходит за пределы текущей главы. При ссылке на предложение, не вошедшее в данный пункт, после номера предложения поставлен номер пункта, в котором содержится необходимое предложение.

Мы вновь выражаем глубокую благодарность редактору книги С.С.Кутателадзе и заведующему кафедрой математического анализа НГУ профессору Ю.Г.Решетняку за то внимание, с которым они отнеслись к книге.

Глава УП. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим векторные пространства X и Y (над одним и тем же полем скаляров R) и произвольное отображение F множества X в множество Y. Понятно, что это отображение, вообще говоря, искажает структуру векторного пространства X: линейной комбинации элементов из X вовсе не обязательно отвечает линейная комбинация соответствующих (при отображении F) элементов из Y. В этой главе речь пойдет о таких отображениях, для которых это искажение локально невелико, т.е. иначе говоря, которые допускают достаточно точную аппроксимацию линейными отображениями.

§ I. Отображения числовой прямой

Введение указанных выше понятий мы начнем с простейшего случая, когда пространство X одномерно, точнее, когда рассматриваемое отображение задано на отрезке числовой прямой (ср.IУ.I.I). Отображения отрезка в локально выпуклое пространство можно трактовать как описание некоторого протекающего во времени процесса. Элементы пространства Y, в котором лежат значения данного отображения (это пространство называется фазовым пространством данного процесса), интерпретируются при этом как возможные состояния рассматриваемого процесса. Производная - она оказывается элементом фазового пространства - истолковывается как скорость протекания процесса в данный момент. Тем самым, задав скорость процесса в каждый момент времени, с помощью интегрирования можно восстановить и сам процесс. С указанным истолкованием связаны многочисленные и разнообразные приложения понятий производной и интеграла.

I.I. Рассмотрим отображение φ отрезка T числовой прямой в локально выпуклое пространство Y (в этой ситуации говорят также, что задан путь φ в пространстве Y). Элемент

$$y_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \qquad (I)$$

называется производной отображения φ в точке t_0 и обозначается символом $\varphi'(t_0)$. При "физической" интерпретации отображения φ как процесса вектор y_0 называют скоростью процесса φ (в момент времени t_0), а в случае использования "геометрической" терминологии y_0 называют касательным вектором к пути φ (в точке t_0).

Предположим, что отображение φ имеет производную $\varphi'(t_0) = y_0$. Перепишем равенство (I) в виде

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)y_0 + \varepsilon(t) \qquad (t \in T), \qquad (2)$$

где отображение ε обладает тем свойством, что $\lim\limits_{t \to t_0} \varepsilon(t)/(t-t_0) = 0$. +)

Легко видеть, что и обратно, если отображение φ допускает представление в виде (2), то оно имеет в t_0 производную, равную y_0.

Таким образом, существование производной $\varphi'(t_0)$ равносильно наличию приближенного равенства $\varphi(t) - \varphi(t_0) \approx (t - t_0)y_0$, тем более точному, чем меньше разность $t - t_0$.

Непосредственно из определения, или с помощью соотношения (2), выводятся следующие свойства производной.

I. Пусть T – отрезок числовой прямой, φ_1, φ_2 – отображения отрезка T в отделимое локально выпуклое пространство Y, α, β – скаляры. Если в точке $t_0 \in T$ отображения φ_1 и φ_2 имеют производную, то отображение $\varphi: t \mapsto \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ $(t \in T)$ также имеет производную в точке t_0, причем $\varphi'(t_0) = \alpha\varphi_1'(t_0) + \beta\varphi_2'(t_0)$.

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством непрерывности алгебраических операций в топологическом векторном пространстве (см. УI.I.I).

П. Пусть φ – отображение отрезка T в отделимое локально выпуклое пространство Y, а α – скалярная функция, заданная на отрезке T. Если в точке $t_0 \in T$ отображение φ и функция α имеют производные, то отображение $\varphi: t \mapsto \alpha(t)\varphi(t)$ $(t \in T)$ также имеет производную в точке t_0, причем

$$\varphi'(t_0) = \alpha'(t_0)\varphi(t_0) + \alpha(t_0)\varphi'(t_0). \qquad (3)$$

+) Это обстоятельство записывают обычно в виде $\varepsilon(t) = o(t - t_0)$. При этом говорят, что ε имеет (в точке t_0) порядок малости более высокий, чем $t - t_0$.

Действительно, из условий предложения следует, что

$$\alpha(t)=\alpha(t_0)+(t-t_0)\alpha'(t_0)+o(t-t_0), \quad \varphi(t)=\varphi(t_0)+(t-t_0)\varphi'(t_0)+o(t-t_0),$$

а из непрерывности умножения на скаляр – что

$$\alpha(t)\varphi(t)=\alpha(t_0)\varphi(t_0)+(t-t_0)[\alpha(t_0)\varphi'(t_0)+\alpha'(t_0)\varphi(t_0)]+o(t-t_0),$$

откуда и вытекает требуемое.

По той же схеме устанавливается следующий результат.

III. Пусть φ – отображение отрезка T в отделимое локально выпуклое пространство Y, а α – вещественная функция, заданная на отрезке S числовой прямой, со значениями в отрезке T. Если α имеет конечную производную в точке $s_0 \in S$, а φ – производную в точке $t_0=\alpha(s_0)$, то суперпозиция $\psi=\varphi\circ\alpha$ имеет производную в точке s_0, причем

$$\psi'(s_0)=\alpha'(s_0)\varphi'(t_0)=\alpha'(s_0)\varphi'(\alpha(s_0)). \tag{4}$$

Дадим набросок доказательства соотношения (4). Для произвольного $s\in S$ $(s\neq s_0)$ на основании равенства (2) имеем

$$\frac{\varphi(\alpha(s))-\varphi(\alpha(s_0))}{s-s_0}=\frac{\alpha(s)-\alpha(s_0)}{s-s_0}\varphi'(t_0)+\frac{\varepsilon(\alpha(s))}{s-s_0}. \tag{5}$$

Взяв какую-либо непрерывную полунорму p в пространстве Y и число $\eta>0$, найдем настолько малое число $\delta>0$, что

$$p(\varepsilon(t))\leq\eta\,|t-t_0| \qquad (t\in T,\ |t-t_0|\leq\delta). \tag{6}$$

Далее, выберем вещественное число M так, что $M>|\alpha'(s_0)|$. Тогда для всех $s\in S$, достаточно близких к s_0,

$$|\alpha(s)-\alpha(s_0)|\leq M\,|s-s_0|. \tag{7}$$

В частности, если, кроме того, $|s-s_0|\leq\delta/M$, то $|\alpha(s)-\alpha(s_0)|\leq\delta$ и, следовательно, для таких s в силу (6) и (7) можно написать

$$p(\varepsilon(\alpha(s)))\leq\eta\,|\alpha(s)-\alpha(s_0)|\leq M\eta\,|\alpha(s)-\alpha(s_0)|.$$

Таким образом, для указанных $s\in S$ $(s\neq s_0)$ справедлива оценка $p(\varepsilon(\alpha(s))/(s-s_0))\leq M\eta$, так что ввиду произвольности η имеем $\lim\limits_{s\to s_0}\varepsilon(\alpha(s))/(s-s_0)=0$.

Чтобы завершить вывод, остается заметить, что первое слагаемое в правой части (5) имеет своим пределом произведение $\alpha'(s_0)\varphi'(t_0)$.

Наряду с пространством Y рассмотрим еще также локально выпуклое пространство Z и линейный непрерывный оператор A, отображающий пространство Y в пространство Z.

IV. Если отображение φ отрезка T в отделимое локально выпуклое пространство Y имеет производную в точке $t_0\in T$, то суперпозиция $\psi=A\circ\varphi$ также имеет производную в точке t_0. При этом, если Z – отделимое пространство, то

$$\psi'(t_0)=A(\varphi'(t_0)). \tag{8}$$

В самом деле, ввиду линейности оператора A,

$$\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0} = \frac{A(\varphi(t)-A(\varphi(t_0))}{t-t_0} = A\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right) \quad (t\in T,\ t\neq t_0).$$

Переход к пределу в этом равенстве приводит к (8).

Для рассматриваемых отображений имеет место теорема об оценке приращения. В ее формулировке, да и нередко в дальнейшем, нам понадобится следующее понятие. Если некоторое соотношение соблюдено для каждого $t\in T$ за возможным исключением не более чем счетного множества, будем говорить, что данное соотношение имеет место в основном на T (см. IУ.2,I).

ТЕОРЕМА I (I.7). Пусть φ – непрерывное отображение отрезка $T=[a,b]$ расширенной числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y, а h – непрерывная вещественная функция, также заданная на T. Если φ и h имеют в основном на T производную, причем в основном на T

$$p(\varphi'(t)) \leq h'(t), \tag{9}$$

где p – какая-либо непрерывная полунорма на Y, то

$$p(\varphi(b)-\varphi(a)) \leq h(b)-h(a). \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что φ удовлетворяет всем условиям теоремы, однако $p(\varphi(b)-\varphi(a))>h(b)-h(a)$. Обозначим через E множество тех точек отрезка T, в которых либо не существует производных функций φ, h, либо нарушается соотношение (9).

Пусть u – такая определенная на $\overline{\mathbb{R}}$ функция с областью значений $R_u=[0,1]$, что она строго возрастает, непрерывна на $\overline{\mathbb{R}}$ и дифференцируема на $\mathbb{R}$ (легко установить существование функции с указанными свойствами). Положим

$$f(t)=h(t)-h(a)-p(\varphi(t)-\varphi(a))+\lambda(u(t)-u(a)),$$

где число $\lambda>0$ выбрано так, что $f(b)<0$. Ясно, что f непрерывна. Множество $M=f[E]$ не более чем счетно (как образ при отображении f не более чем счетного множества), поэтому найдется такое $k\in\mathbb{R}$, что $f(b)<k<0$ и $k\bar{\in}M$.

Пусть $H=\{t\in[a,b] : f(t)\geq k\}$. Множество H не пусто, ибо $a\in H$. Обозначим $\sup H$ через t_0 и покажем, что $t_0\in H$. Действительно, допустим, что $f(t_0)<k$. Для точек $t_1,t_2\in T$ обозначим $h(t_2)-h(t_1)-p(\varphi(t_2)-\varphi(t_1))+\lambda(u(t_2)-u(t_1))$ через ψ_{t_1,t_2}. Пусть $\varepsilon>0$ таково, что $f(t_0)+\varepsilon<k$. Ввиду непрерывности u, h, φ и p найдется такая окрест-

ность U точки t_0, для точек t которой имеет место неравенство $|\psi_{t_0,t}|<\varepsilon$. Тогда для $t\in U\cap H$, используя субаддитивность полунормы p, получаем

$$f(t_0)=(h(t_0)-h(t)+h(t)-h(a))-p(\varphi(t_0)-\varphi(t)+\varphi(t)-\varphi(a))+$$
$$+\lambda(u(t_0)-u(t)+u(t)-u(a))\geq\psi_{t,t_0}+f(t)>f(t)-\varepsilon,$$

что противоречит выбору ε. Таким образом, $f(t_0)\geq\kappa$. Отсюда, в частности, следует, что $t_0<b$, ибо $f(b)<\kappa$.

В силу определения H при $t\in(t_0,b]$ имеем $f(t)<\kappa$. Тогда при таких t, снова используя субаддитивность p, получим $f(t_0)\leq\kappa-\psi_{t_0,t}$ и, учитывая непрерывность в точке t_0 функций h,φ,u и полунормы p, приходим к неравенству $f(t_0)\leq\kappa$, откуда с учетом установленного ранее следует, что $f(t_0)=\kappa$. Из этого равенства получаем, в частности, что $t_0>\alpha$. Поскольку $\kappa\,\bar{\in}\,M$, то $t_0\,\bar{\in}\,E$, следовательно, f дифференцируема в точке t_0.

Для $t\in(t_0,b)$, учитывая субаддитивность p и неравенство $f(t)<\kappa$, получаем

$$\kappa>f(t)\geq f(t_0)+\psi_{t_0,t}=\kappa+\psi_{t_0,t},$$

поэтому $\psi_{t_0,t}<0$ при $t\in(t_0,b)$, значит, $\psi_{t_0,t}/(t-t_0)<0$, откуда

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}-p\left(\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right)+\lambda\,\frac{u(t)-u(t_0)}{t-t_0}<0.$$

Переходя к пределу в точке t_0, получаем отсюда

$$h'(t_0)-p(\varphi'(t_0))+\lambda\,u'(t_0)\leq 0$$

или

$$h'(t_0)-p(\varphi'(t_0))<-\lambda\,u'(t_0)<0,$$

что противоречит предположению (9). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если φ – непрерывное отображение отрезка T расширенной числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y, причем в основном на T имеет место соотношение $\varphi'(t)=0$, то $\varphi(t)=\varphi(t_0)$ для любых двух точек $t,t_0\in T$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда Y – вещественное пространство, предположение о том, что p – полунорма, можно, как очевидно, заменить условием, что p – сублинейный функционал (см. УI.3.I), разумеется, непрерывный.

I.2. Доказанная выше теорема позволяет распространить данное в IУ.7.I определение интеграла на случай функций со значениями в локально выпуклом пространстве. Как и в элементарном случае, определение использует понятие функции ориентированного промежутка. Напомним относящиеся сюда определения и факты.

Ориентированным промежутком называется упорядоченная пара вещественных чисел. Число α называется началом, число β — концом ориентированного промежутка $\langle\alpha,\beta\rangle$ +).

Пусть T — отрезок расширенной числовой прямой. Отображение Φ множества T^2 в векторное пространство Y называется аддитивным, если для любых $\alpha,\beta,\gamma\in T$

$$\Phi(\langle\alpha,\gamma\rangle)=\Phi(\langle\alpha,\beta\rangle)+\Phi(\langle\beta,\gamma\rangle). \qquad (12)$$

Для аддитивного отображения Φ имеет место легко доказываемое по индукции соотношение: если $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in T$, то

$$\Phi(\langle\alpha_0,\alpha_n\rangle)=\sum_{k=1}^{n}\Phi(\langle\alpha_{k-1},\alpha_k\rangle). \qquad (13)$$

Понятно также, что для аддитивного отображения Φ и произвольного $\alpha\in T$ имеем $\Phi(\langle\alpha,\alpha\rangle)=0$, так что

$$\Phi(\langle\beta,\alpha\rangle)=-\Phi(\langle\alpha,\beta\rangle). \qquad (14)$$

Если g — какое-либо отображение отрезка T в пространство Y, то, полагая

$$\Phi(\langle\alpha,\beta\rangle)=g(\beta)-g(\alpha) \qquad (\alpha,\beta\in T), \qquad (15)$$

мы, очевидно, определим аддитивное отображение $\Phi: T^2\to Y$. Обратно, если $\Phi: T^2\to Y$ — данное аддитивное отображение, то, приняв

$$g(t)=\Phi(\langle t_0,t\rangle) \qquad (t\in T), \qquad (16)$$

где через t_0 обозначена какая-либо фиксированная точка отрезка T, мы получим отображение $g: T\to Y$, которое, как легко проверить, удовлетворяет вместе с Φ соотношению (15).

Аддитивное отображение $\Phi: T^2\to Y$ определяет отображение $g: T\to Y$, связанное с Φ равенством (15), однозначно с точностью до постоянного слагаемого. Точнее, если

$$g(\beta)-g(\alpha)=h(\beta)-h(\alpha) \qquad (\alpha,\beta\in T), \qquad (17)$$

то, как это сразу же вытекает из (17), разность $g(t)-h(t)$ не зависит от $t\in T$.

+) Чтобы избежать двусмысленности, мы будем обозначать ориентированный промежуток символом $\langle\alpha,\beta\rangle$, отступая от стандартного обозначения упорядоченной пары.

В дальнейшем отображение Φ, которое порождается отображением $g: T \to Y$ по формуле (I5), будем обозначать через $[g]$, а вместо $\Phi(\langle\alpha,\beta\rangle)$ будем писать в этом случае $[g]_{\alpha}^{\beta}$ $(\alpha,\beta \in T)$.

Если, подразумевая под T, как и выше, отрезок расширенной числовой прямой, снабдить множество T^2 топологией произведения, а векторное пространство Y – локально выпуклой топологией, то можно говорить о непрерывности отображения $\Phi: T^2 \to Y$. В предположении, что Φ аддитивно, имеет место следующий результат.

I. Для того чтобы отображение Φ было непрерывным в точке $\langle t_1,t_2\rangle$ ($t_1,t_2 \in T$), необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ему в силу (I5) отображение g было непрерывным в точках t_1 и t_2.

Действительно, непрерывность Φ (при условии непрерывности g) вытекает из непрерывности разности в локально выпуклом пространстве (см. УI.4.I). Обратное утверждение также становится очевидным, если принять во внимание непрерывность операции проектирования.

Рассмотрим аддитивное отображение $\Phi: T^2 \to Y$ и точку $t_0 \in T$, отличную от $\pm\infty$. Соответствие F из $\mathbb{R}$ в Y определим как совокупность всех таких пар (h,y), что $h \neq 0$ – произвольное вещественное число, а

$$y = \Phi(\langle\alpha,\beta\rangle)/(\beta-\alpha), \tag{I8}$$

где α,β – какие угодно числа из T, обладающие свойствами $\beta-\alpha=h$, $t_0 \in [\alpha\wedge\beta, \alpha\vee\beta]$.

Если Y – локально выпуклое пространство и соответствие F имеет предел в нуле, то он называется п л о т н о с т ь ю (в точке t_0) данного отображения Φ и обозначается символом $D_\Phi(t_0)$.

Если ради наглядности изложения несколько поступиться его точностью, то можно определить плотность $D_\Phi(t_0)$ как предел $\lim \Phi(\langle\alpha,\beta\rangle)/(\beta-\alpha)$ при условии, что ориентированный промежуток $\langle\alpha,\beta\rangle$ "стягивается" к точке t_0.

Содержание понятия плотности достаточно полно выясняется в следующем предложении.

П. Пусть Y – отделимое локально выпуклое пространство. Аддитивное отображение $\Phi: T^2 \to Y$ имеет плотность в точке $t_0 \in T$ $(t_0 \neq \pm\infty)$ тогда и только тогда, когда связанное с ним соотношением (I5) отображение g имеет производную в точке t_0. При этом $D_\Phi(t_0) = g'(t_0)$.

В самом деле, пусть Φ обладает плотностью в точке t_0. Нетрудно понять, что отображение

$$F_0 : h \longmapsto \frac{g(t_0+h)-g(t_0)}{h} \qquad (h \in \mathbb{R},\ h \neq 0,\ t_0+h \in T)$$

является сужением определенного выше соответствия F. Следовательно (см. I(У.2.2)), существует $g'(t_0) = \lim\limits_0 F_0 = \lim\limits_0 F = D_\Phi(t_0)$.

Предположим теперь, что существует $g'(t_0)$, и докажем, что тогда Φ обладает плотностью в точке t_0. С этой целью возьмем произвольную абсолютно выпуклую окрестность V нуля пространства Y и, основываясь на определении производной, подберем число $\delta>0$ так, что

$$\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} - g'(t_0) \in V \qquad (t \in T,\ |t-t_0| \leq \delta). \tag{19}$$

Убедимся, что тогда и

$$F[h] - g'(t_0) \subset V \qquad (h \in \mathbb{R},\ h \neq 0,\ |h| \leq \delta). \tag{20}$$

Действительно, возьмем $y \in F[h]$. Это означает, что существуют $\alpha, \beta \in T$, удовлетворяющие соотношению (18). В силу равенства (14) можно считать, что $\alpha<\beta$. Предполагая $\alpha<t_0<\beta$, имеем

$$y - g'(t_0) = \frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} - g'(t_0) = \frac{t_0-\alpha}{\beta-\alpha}\left(\frac{g(\alpha)-g(t_0)}{\alpha-t_0} - g'(t_0)\right) + \frac{\beta-t_0}{\beta-\alpha}\left(\frac{g(\beta)-g(t_0)}{\beta-t_0} - g'(t_0)\right).$$

Отсюда, учитывая, что $|(t_0-\alpha)/(\beta-\alpha)| + |(\beta-t_0)/(\beta-\alpha)| = 1$ и что V абсолютно выпукло, получаем в силу (19), что $y - g'(t_0) \in V$. Если $\alpha = t_0$ или $\beta = t_0$, то последнее соотношение просто совпадает с (19) при $t=\beta$ или соответственно при $t=\alpha$.

Включение (20) означает, что соответствие F имеет в нуле предел, т.е. отображение Φ имеет плотность в точке t_0.

I.3. Сказанное в предыдущем пункте позволяет дать определение интеграла от отображения со значениями в локально выпуклом пространстве. Пусть φ – отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y, заданное в основном на промежутке T расширенной числовой прямой. Аддитивное отображение $I : T^2 \longrightarrow Y$ называется (неопределенным) интегралом от отображения φ, если а) I непрерывно на T^2; б) в основном на T существует плотность $D_I(t)$; в) в основном на T выполняется равенство

$$D_I(t) = \varphi(t). \tag{21}$$

Если I есть интеграл от φ, то пишут $I = \int \varphi$ (на T), а для значений интеграла $I(\langle\alpha,\beta\rangle)$ $(\alpha,\beta \in T)$ используют обозначение $\int_\alpha^\beta \varphi$, называя этот элемент пространства Y (определенным) интегралом от α до β, а числа α и β нижним и соответственно верхним пределами интегрирования+). Пусть $I = \int \varphi$ на T. Отображение $g: T \to Y$, связанное с I соотношением (I5): $I = [g]$, т.е.

$$I(\langle \alpha, \beta \rangle) = \int_\alpha^\beta \varphi = g(\beta) - g(\alpha) \qquad (\alpha, \beta \in T), \tag{22}$$

называется **первообразной** по отношению к φ (на T). В силу предложений I и II из I.2 отображение g будет первообразной по отношению к φ тогда и только тогда, когда g непрерывно на T и в основном на T имеет место равенство

$$g'(t) = \varphi(t). \tag{23}$$

Привлекая следствие из теоремы I, получаем отсюда, что две первообразные по отношению к одному и тому же отображению φ могут отличаться разве лишь постоянным (на T) слагаемым, так что если h – другая первообразная по отношению к φ, то $[g] = [h]$. Таким образом, интеграл от отображения φ единствен.

Установленные в I.I факты для производной легко трансформируются в свойства интеграла. Ниже мы приводим сводку соответствующих результатов, опуская, как правило, очевидные доказательства.

I. Пусть φ_1, φ_2 – заданные в основном на отрезке T расширенной числовой прямой отображения в отделимое локально выпуклое пространство Y, α, β – скаляры. Если φ_1 и φ_2 имеют на T интеграл, то и отображение $\varphi: t \mapsto \alpha\varphi_1(t) + \beta\varphi_2(t)$ $(t \in \Omega_{\varphi_1} \cap \Omega_{\varphi_2})$ также имеет интеграл, причем

$$\int \varphi = \alpha \int \varphi_1 + \beta \int \varphi_2. \tag{24}$$

Предложение II(I.I) приводит к формуле **интегрирования по частям**.

II. Пусть φ – заданное в основном на отрезке T расширенной числовой прямой отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y, а λ – скалярная функция, также заданная в основном на T. Предположим, что φ и λ имеют на T первообразные g и соответственно Λ. Тогда, если одно из отображений $\Lambda\varphi: t \mapsto \Lambda(t)\varphi(t)$ $(t \in \Omega_\varphi)$ или $\lambda g: t \mapsto \lambda(t) g(t)$ $(t \in \Omega_\lambda)$ имеет на T интеграл, то и другое также имеет интеграл на T. При этом

$$\int \Lambda\varphi + \int \lambda g = [\Lambda g]. \tag{25}$$

+) Часто для обозначения интеграла употребляют не вполне корректные символы $\int \varphi(t)\,dt$, $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt$. Эти исторически сложившиеся обозначения обладают известными удобствами, особенно в случаях, когда речь идет об интеграле от конкретного отображения, или когда φ зависит от каких-либо параметров, которые можно спутать с "переменной интегрирования".

Перефразируя предложение Ш(I.I), получаем так называемую формулу замены переменных в интеграле.

Ш. Пусть φ – заданное в основном на отрезке T расширенной числовой прямой отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y; λ – непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок S расширенной числовой прямой на отрезок T и имеющая в основном на S производную. Интегралы $\int\varphi$ (на T) и $\int\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)$ (на S) существуют или нет одновременно, причем в случае существования

$$\int\limits_{\lambda(\alpha)}^{\lambda(\beta)}\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)\qquad(\alpha,\beta\in S).\tag{26}$$

В самом деле, предположим, что существует интеграл в левой части (26) и пусть g – какая-либо первообразная по отношению к φ, а E – множество всех тех точек $t\in T$, для которых нарушено (или не имеет смысла) равенство $g'(t)=\varphi(t)$. Множество E не более чем счетно, а так как λ взаимно однозначна, то не более чем счетным будет и множество $\lambda^{-1}[E]$. Пусть $s\in S\setminus\lambda^{-1}[E]$ таково, что существует производная $\lambda'(s)$. В силу предложения Ш(I.I) для этого s будет

$$(g\circ\lambda)'(s)=\lambda'(s)\cdot g'(\lambda(s))=\lambda'(s)\cdot\varphi(\lambda(s)).$$

Учитывая, что суперпозиция $g\circ\lambda$ непрерывна, на основании сказанного убеждаемся, что она служит первообразной по отношению к отображению $\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)$. Следовательно, существует интеграл $\int\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)=[g\circ\lambda]$. В частности,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)=[g\circ\lambda]_{\alpha}^{\beta}=g(\lambda(\beta))-g(\lambda(\alpha))=\int\limits_{\lambda(\alpha)}^{\lambda(\beta)}\varphi\qquad(\alpha,\beta\in T).$$

Допуская существование интеграла $\int\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)$ и полагая $\psi=\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)$, $\mu=\lambda^{-1}$, мы сведем дело к уже рассмотренному случаю, поскольку $\mu'(t)=1/\lambda'(\mu(t))$ $(t\in T)$ и $\mu'\cdot(\psi\circ\mu)=\varphi$.

Заметим, что требование взаимной однозначности функции λ может быть несколько ослаблено, а именно, если вместо этого предположить только, что множество $\lambda^{-1}[E]$ не более чем счетно, то без каких-либо существенных изменений в проведенном доказательстве можно вывести из существования интеграла $\int\varphi$ существование интеграла $\int\lambda'\cdot(\varphi\circ\lambda)$ и равенство (26).

Понятно, что указанное выше условие на множество E заведомо выполнено, если E пусто, т.е. если g служит точной первообразной по отношению к φ.

Привлекая предложение IУ(I.I), можно сформулировать следующий результат.

IУ. Пусть φ – заданное в основном на отрезке T расширенной числовой прямой отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y, а A — линейный непрерывный оператор, отображающий пространство Y в отделимое локально выпуклое пространство Z. Если существует интеграл $\int\varphi$ на T, то существует и интеграл $\int A\circ\varphi$ на T, причем

$$\int A\circ\varphi = A\circ\int\varphi. \tag{27}$$

Применяя, наконец, теорему I, убеждаемся в справедливости следующего факта.

У. Пусть φ — заданное в основном на отрезке T расширенной числовой прямой отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y, p — непрерывная полунорма на Y, λ — вещественная функция, определенная в основном на T и связанная с φ соотношением

$$p(\varphi(t))\leq\lambda(t) \qquad (t\in T \text{ в основном}). \tag{28}$$

Тогда если φ и λ имеют интегралы на T, то

$$p\Big(\int_\alpha^\beta\varphi\Big)\leq\Big|\int_\alpha^\beta\lambda\Big| \qquad (\alpha,\beta\in T). \tag{29}$$

Чтобы воспользоваться теоремой I, достаточно заметить, что в силу (I4) можно считать в(29) $\alpha\leq\beta$.

Если функция λ в предложении У задана на всем T без исключения и непрерывна на T, а $T\subset(-\infty,+\infty)$, то согласно теореме 3(8.4) условие интегрируемости λ заведомо выполнено (см. также I.5). Поэтому если и отображение φ задано на всем T и непрерывно там, то в качестве λ можно принять суперпозицию $p\circ\varphi$. Таким образом, при сделанных относительно предположениях справедлива оценка

$$p\Big(\int_\alpha^\beta\varphi\Big)\leq\Big|\int_\alpha^\beta p\circ\varphi\Big| \qquad (\alpha,\beta\in T). \tag{30}$$

Далее, если функция $p\circ\varphi$ ограничена в своей области определения, то, полагая в (29) $\lambda: t\longmapsto\sup\limits_{\tau\in\Omega_\varphi} p(\varphi(\tau))$, получим

$$p\Big(\int_\alpha^\beta\varphi\Big)\leq|\beta-\alpha|M \qquad (\alpha,\beta\in T;\ \alpha,\beta\neq\pm\infty;\ M=\sup_{\tau\in\Omega_\varphi}p(\varphi(\tau))). \tag{31}$$

I.4. Предположим, что отображение φ отрезка T числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y имеет производную в каждой точке $t\in T$. Тем самым на T определено отображение $\varphi': t\mapsto\varphi'(t)$ $(t\in T)$, которое называется **производной** данного отображения φ (на T). Производная этого отображения в точке $t_0\in T$ называется **второй производной** отображения φ в точке t_0 и обозначается через $\varphi''(t_0)$. Понятно как надлежит определить **производную** $\varphi^{(n)}(t_0)$ $(n=3,4,\dots)$ n-**го порядка** отображения φ в **точке** t_0. Для этого нужно, чтобы существовала такая окрестность V точки t_o, что для $t \in V \cap T$ существуют производные $\varphi^{(\kappa)}(t)$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, n-1)$. Производная в точке t_o отображения $\varphi^{(n-1)}: t \mapsto \varphi^{(n-1)}(t)$ и есть как раз $\varphi^{(n)}(t_o)$. Ясно также, что следует понимать под отображением $\varphi^{(n)}$ – п р о и з в о д н о й n-г о п о р я д к а отображения φ. Отметим еще, что для удобства формулировок мы будем понимать под производной нулевого порядка $\varphi^{(0)}$ само отображение φ, так что, например, символ $\varphi^{(0)}(t)$ означает просто $\varphi(t)$.

Применяя последовательно формулу интегрирования по частям, можно вывести формулу Тейлора для отображений рассмотренного вида.

ТЕОРЕМА 2 (I.7). Пусть φ – такое отображение отрезка T числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y, что при некотором $n \in \mathcal{N}$ существует определенное на T и непрерывное там отображение $\varphi^{(n-1)}$, а в основном на T существует $\varphi^{(n)}$. Тогда, каковы бы ни были точки $t_o, t \in T$, имеет место называемое формулой Тейлора равенство

$$\varphi(t) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(t-t_o)^\kappa}{\kappa!} \varphi^{(\kappa)}(t_o) + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_o}^{t} (t-s)^{n-1} \varphi^{(n)}(s)\, ds. \tag{32}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то, поскольку в условиях теоремы отображение φ служит первообразной для отображения φ', по определению интеграла $\int_{t_o}^{t} \varphi' = \varphi(t) - \varphi(t_o)$, что равносильно (32).

Предположим, что теорема доказана для некоторого натурального n и убедимся, что тогда она останется справедливой и при замене n на $n+1$.

Так как отображение $\varphi^{(n)}$ служит первообразной по отношению к отображению $\varphi^{(n+1)}$, а функция $\Lambda : s \mapsto -(t-s)^n/n$ $(s \in T)$ – первообразной (точной) по отношению к функции $\lambda : s \mapsto (t-s)^{n-1}$ $(s \in T)$, то, учитывая, что по индуктивному предположению существует интеграл $\int \lambda \cdot \varphi^{(n)}$, в силу предложения II(I.3) существует интеграл $\int \Lambda\, \varphi^{(n+1)}$. При этом согласно (25)

$$\varphi(t) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(t-t_o)^\kappa}{\kappa!} \varphi^{(\kappa)}(t_o) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_o}^{t} \lambda \cdot \varphi^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\Lambda \cdot \varphi^{(n)}\right]_{t_o}^{t} - \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_o}^{t} \Lambda \cdot \varphi^{(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(t-t_o)^n}{n} \varphi^{(n)}(t_o) + \frac{1}{n!} \int_{t_o}^{t} (t-s)^n \varphi^{(n+1)}(s)\, ds,$$

т.е.

$$\varphi(t) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{(t-t_o)^\kappa}{\kappa!} \varphi^{(\kappa)}(t_o) + \frac{1}{n!} \int_{t_o}^{t} (t-s)^n \varphi^{(n+1)}(s)\, ds,$$

что и требовалось доказать.

С помощью предложения У(I.3) может быть получена оценка интегрального слагаемого (о с т а т о ч н о г о ч л е н а) формулы Тейлора.

Пусть p – непрерывная полунорма на Y. Взяв в неравенстве (29) в качестве λ функцию $\lambda : s \mapsto (t-s)^{n-1} M$ $(s \in T)$, где $M = \sup_{\tau \in \Omega_{\varphi^{(n)}}} p(\varphi^{(n)}(\tau)) < +\infty$, и заметив, что $\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} ds = (t-t_0)/n$, в условиях теоремы 2 получим

$$p\Big(\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds\Big) \leq \Big|\int_{t_0}^{t} \lambda\Big| = M \Big|\int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} ds\Big| = \frac{|t-t_0|^n}{n} \cdot M,$$

так что

$$p\Big(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t_0)\Big) \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} \cdot \sup_{\tau \in \Omega_{\varphi^{(n)}}} p(\varphi^{(n)}(\tau)). \tag{33}$$

Допустим, что существует $\varphi^{(n)}(t_0)$. Тогда, поскольку

$$\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \varphi^{(n)}(s) ds - \frac{(t-t_0)^n}{n!} \varphi^{(n)}(t_0) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} (\varphi^{(n)}(s) - \varphi^{(n)}(t_0)) ds,$$

аналогично можно получить такую оценку:

$$p\Big(\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \varphi^{(k)}(t_0)\Big) \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} \cdot \sup_{\tau \in \Omega_{\varphi^{(n)}}} p(\varphi^{(n)}(\tau) - \varphi^{(n)}(t_0)). \tag{34}$$

I.5. До сих пор мы не затрагивали вопроса о существовании интеграла. Как и выше, здесь применима схема, использованная в элементарном случае (см. гл. IУ, § 8).

ЛЕММА I. Пусть T, T_1, T_2 – такие отрезки расширенной числовой прямой, что $T = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Если определенное в основном на T отображение φ в отделимое локально выпуклое пространство Y имеет интеграл на T_1 и на T_2 [+], то оно имеет интеграл на T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что ни один из отрезков T_1 и T_2 не является частью другого, поскольку иначе T совпадает с бо́льшим из отрезков и утверждение леммы становится тривиальным.

При сделанном допущении обе́ разности $T_1 \setminus T_2$ и $T_2 \setminus T_1$ не пусты, так что существуют $\alpha \in T_1 \setminus T_2$ и $\beta \in T_2 \setminus T_1$. Предположим для определенности, что $\alpha < \beta$, и докажем, что $T_1 \subset [-\infty, \beta]$, $T_2 \subset [\alpha, +\infty]$. Действительно, если бы, например, существовало такое $t \in T_1$, что $t > \beta$, то, поскольку $\beta > \alpha$, было бы $\beta \in [\alpha, t] \subset T_1$. Возьмем теперь какую-либо точку $t_0 \in T_1 \cap T_2$ и, введя промежутки $T_1' = [-\infty, t_0] \cap T_1$, $T_2' = [t_0, +\infty] \cap T_2$, убедимся,

+) Строго говоря, следовало бы сказать, что имеют интеграл сужения φ на $T_1 \cap \Omega_\varphi$ и на $T_2 \cap \Omega_\varphi$. В дальнейшем мы систематически будем допускать подобную вольность речи.

что $T=T_1'\cup T_2'$. В самом деле, если $t\in T$ и, кроме того, $t\leq t_0$, то непременно должно быть $t\in T_1$, так как в ином случае ($t\in T_2\setminus T_1$) мы получили бы по доказанному $\alpha<t\leq t_0$, т.е. $t\in[\alpha,t_0]\subset T_1$. Таким же образом проверяется, что из условия $t\geq t_0$ вытекает включение $t\in T_2$. Ясно, что отрезки T_1' и T_2' имеют одну единственную общую точку t_0. Поскольку $T_i'\subset T_i$ ($i=1,2$), то отображение φ имеет интеграл на каждом из отрезков T_1' и T_2'. Пусть g_1 и g_2 – первообразные по отношению к φ на отрезках T_1' и T_2' соответственно. Так как первообразная определяется по данному отображению лишь с точностью до постоянного слагаемого, то можно подобрать g_1 и g_2 так, что $g_1(t_0)=g_2(t_0)$. Это равенство обеспечивает непрерывность на T отображения g, определенного на T следующим образом: $g(t)=g_1(t)$, если $t\in T_1'$, и $g(t)=g_2(t)$, если $t\in T_2'$.

Для точек $t\in T_1'$, отличных от t_0, производная $g'(t)$ существует одновременно с производной $g_1'(t)$, причем $g'(t)=g_1'(t)$. Аналогичное утверждение имеет место и для промежутка T_2'. Таким образом, если E_1 и E_2 – исключительные множества для первообразных g_1 и g_2 соответственно и $E=E_1\cup E_2\cup\{t_0\}$, то для $t\in T\setminus E$ имеем $g'(t)=\varphi(t)$. Следовательно, g служит первообразной по отношению к φ на T.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть T – отрезок расширенной числовой прямой и $t_1,t_2,\dots,t_n$ – такие точки отрезка T, что $t_1\leq t_2\leq\dots\leq t_n$. Положим

$$T_0=[-\infty,t_1]\cap T,\ T_1=[t_1,t_2],\dots,\ T_{n-1}=[t_{n-1},t_n],\ T_n=[t_n,+\infty]\cap T.$$

Если отображение φ, заданное в основном на T, со значениями в отделимом локально выпуклом пространстве Y имеет интеграл на каждом из отрезков T_k ($k=0,1,\dots,n$), то оно имеет интеграл на всем отрезке T.

Заметим, что если обозначить через E_k исключительное множество для интеграла от φ на отрезке T_k, то исключительное множество для интеграла от φ на T отличается от объединения $\bigcup\limits_{k=0}^{n} E_k$ разве лишь точками $t_1,t_2,\dots,t_n$.

Отображение φ из отрезка T числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y называется к о н е ч н о з н а ч н ы м, если можно указать такие отрезки $T_1,T_2,\dots,T_n$ и элементы $y_1,y_2,\dots,y_n\in Y$, что $T=\bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k$ и $\varphi(t)=y_k$, если t – внутренняя точка отрезка T_k ($k=1,2,\dots,n$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Конечнозначное отображение φ отрезка T числовой прямой в отделимое локально выпуклое пространство Y имеет интеграл на T.

Действительно, если $\varphi(t)=y_0$ для всех внутренних точек t какого-либо отрезка $T_0\subset T$, то $\int_\alpha^\beta \varphi=(\beta-\alpha)y_0$ $(\alpha,\beta\in T_0)$. Сформулированный в следствии 2 результат вытекает отсюда с помощью следствия I.

В соответствии со сказанным выше исключительными для интеграла от конечнозначного отображения будут лишь точки $t_0, t_1, \dots, t_n$ — концы промежутков постоянства отображения φ.

Вопрос о существовании интеграла на открытом промежутке T расширенной числовой прямой сводится к такому же вопросу для замкнутых промежутков.

ЛЕММА 2. Пусть φ — определенное в основном на открытом промежутке расширенной числовой прямой отображение в отделимое локально выпуклое пространство Y. Если φ имеет интеграл на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в T, то φ имеет интеграл на T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T=(a,b)$. Рассмотрим такие числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n, \quad b=\lim_{n\to\infty} b_n, \quad a<a_{n+1}\le a_n\le b_n\le b_{n+1}<b \quad (n=1,2,\dots),$$

и пусть I_n — интеграл от φ на промежутке $T_n=[a_n,b_n]$. Примем $I=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Ясно, что $Q_I=\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{I_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^2=T^2$. Докажем, что так определенное соответствие I однозначно. Действительно, если $(\langle\alpha,\beta\rangle, y_1)$, $(\langle\alpha,\beta\rangle, y_2)\in I$, то по определению при некоторых $m,n\in\mathbb{N}$ будет $(\langle\alpha,\beta\rangle, y_1)\in I_m$, $(\langle\alpha,\beta\rangle, y_2)\in I_n$. Считая для определенности $m\le n$, заметим, что сужение отображения I_n на T_m^2 является интегралом от φ на T_m так что ввиду единственности интеграла оно совпадает с I_m. Следовательно, $y_1=\int_\alpha^\beta\varphi=y_2$.

Если $\langle s,t\rangle\in T^2$, то, как очевидно, множество T_n^2 будет для достаточно большого n окрестностью (в $\mathbb{R}^2$) точки $\langle s,t\rangle$. Стало быть, поскольку I_n непрерывно в этой точке, будет непрерывным и его распространение I.

Пусть теперь E_n — исключительное множество для интеграла I_n. Положим $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ и возьмем $t\in T\setminus E$. Для достаточно большого n, очевидно, $a_n<t<b_n$. Но тогда $t\in T_n\setminus E_n$ и, следовательно, существует плотность $D_{I_n}(t)=\varphi(t)$, а поскольку t — внутренняя точка промежутка T_n, то существует и плотность $D_I(t)=D_{I_n}(t)$. Заметив, что множество E не более чем счетно, заключаем о том, что I — интеграл от φ на T.

I.6. Хотя в предыдущем пункте и был указан класс отображений, имеющих интеграл (конечнозначные отображения), сам по себе он едва ли может играть заметную роль — слишком мала вероятность того, что данное отображение окажется конечнозначным. Следующая ниже теорема позволяет существенно раздвинуть рамки этого класса – в этом и состоит ее значение.

Рассмотрим отрезок T числовой прямой и отделимое локально выпуклое пространство Y. Пусть $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ – фильтрующееся семейство отображений из T в Y, каждое из которых определено в основном на T.

ТЕОРЕМА 3 (I.7). Пусть φ – отображение из T в Y. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) существует такое не более чем счетное множество $E\subset T$, что $Q_\varphi\supset T\setminus E$ и $Q_{\varphi_\xi}\supset T\setminus E$ для каждого $\xi\in\Xi$;

2) на множестве $T\setminus E$ семейство $\{\varphi_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ равномерно сходится к φ;

3) каково бы ни было $\xi\in\Xi$, отображение φ_ξ имеет интеграл $I_\xi=\int\varphi_\xi$ на T, причем исключительное множество E_ξ для интеграла I_ξ содержится в E;

4) пространство Y полное.

Тогда отображение φ имеет интеграл на T, при этом

$$\int_\alpha^\beta \varphi=\lim_{\xi\in\Xi}\int_\alpha^\beta\varphi_\xi \qquad (\alpha,\beta\in T). \tag{35}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем какую-либо фиксированную точку $t_0\in T$ и определим на T семейство отображений g_ξ, полагая $g_\xi: t\mapsto\int_{t_0}^t\varphi_\xi$ $(t\in T)$ $(\xi\in\Xi)$. Докажем, что при любом $t\in T$ семейство $\{g_\xi(t)\}$ $(\xi\in\Xi)$ элементов пространства Y сходится в себе. Действительно, если p – непрерывная полунорма на Y, то в силу (31)

$$p(g_\xi(t)-g_\eta(t))=p\Big(\int_{t_0}^t(\varphi_\xi-\varphi_\eta)\Big)\leq|t-t_0|\,\Theta_{\xi,\eta} \qquad (\xi,\eta\in\Xi), \tag{36}$$

где $\Theta_{\xi,\eta}=\sup\limits_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi_\xi(\tau)-\varphi_\eta(\tau))$ $(\xi,\eta\in\Xi)$. Но из очевидного неравенства

$$\Theta_{\xi,\eta}=\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi_\xi(\tau)-\varphi_\eta(\tau))\leq$$

$$\leq\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi_\xi(\tau)-\varphi(\tau))+\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi_\eta(\tau)-\varphi(\tau)) \tag{37}$$

вытекает, что $\lim\limits_{(\xi,\eta)\in\Xi^2}\Theta_{\xi,\eta}=0$, откуда и следует сходимость в себе семейства $\{g_\xi(t)\}$ $(\xi\in\Xi)$.

Ввиду полноты пространства Y, для каждого $t\in T$ существует предел $\lim\limits_{\xi\in\Xi}g_\xi(t)$. Докажем, что отображение $g: t\mapsto\lim\limits_{\xi\in\Xi}g_\xi(t)$ $(t\in T)$ служит первообразной по отношению к φ.

Установим прежде всего непрерывность на T отображения g. Для этого достаточно доказать, что для произвольной непрерывной полунормы p на Y и произвольной точки $\tau\in T$ имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\tau} p(g(t)-g(\tau))=0$. Поскольку $g_\xi(t)-g_\xi(\tau)=\int_\tau^t \varphi_\xi$ $(t\in T, \xi\in\Xi)$, в силу (31)

$$p(g_\xi(t)-g_\eta(t)-g_\xi(\tau)-g_\eta(\tau))=p\Big(\int\limits_\tau^t(\varphi_\xi-\varphi_\eta)\Big)\leq|t-\tau|\,\Theta_{\xi,\eta}\quad(\xi,\eta\in\Xi).$$

Переходя здесь к пределу по η (при фиксированном $\xi\in\Xi$) и используя (37), получим

$$p(g_\xi(t)-g(t)-g_\xi(\tau)+g(\tau))\leq$$
$$\leq|t-\tau|\overline{\lim_{\eta\in\Xi}}\,\Theta_{\xi,\eta}\leq|t-\tau|\sup_{s\in T\setminus E}p(\varphi(s)-\varphi_\xi(s)). \tag{38}$$

Следовательно,

$$p(g(t)-g(\tau))\leq p(g_\xi(t)-g_\xi(\tau))+|t-\tau|\sup_{s\in T\setminus E}p(\varphi(s)-\varphi_\xi(s)).$$

Но отображение g_ξ непрерывно, поэтому $\lim\limits_{t\to\tau}p(g_\xi(t)-g_\xi(\tau))=0$. Тем самым и $\lim\limits_{t\to\tau}p(g(t)-g(\tau))=0$.

Убедимся теперь, что для $t\in T\setminus E$ существует производная $g'(t)$, равная $\varphi(t)$. Для $s\in T$ имеем

$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t}-\varphi(t)=\frac{g_\xi(s)-g_\xi(t)}{s-t}-\varphi_\xi(t)+$$
$$+\frac{g(s)-g_\xi(s)-(g(t)-g_\xi(t))}{s-t}+(\varphi_\xi(t)-\varphi(t))\qquad(\xi\in\Xi).$$

Таким образом, если опять понимать под p произвольную непрерывную полунорму на Y, согласно (38)

$$p\Big(\frac{g(s)-g(t)}{s-t}-\varphi(t)\Big)\leq p\Big(\frac{g_\xi(s)-g_\xi(t)}{s-t}-\varphi_\xi(t)\Big)+$$
$$+2\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi(\tau)-\varphi_\xi(\tau))\qquad(\xi\in\Xi). \tag{39}$$

Так как $g_\xi'(t)=\varphi_\xi(t)$, то, фиксируя произвольное $\xi\in\Xi$ и переходя в (39) к пределу при $s\to t$, получим

$$\overline{\lim_{s\to t}}\,p\Big(\frac{g(s)-g(t)}{s-t}-\varphi(t)\Big)\leq 2\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi(\tau)-\varphi_\xi(\tau)).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{s\to t}}\,p\Big(\frac{g(s)-g(t)}{s-t}-\varphi(t)\Big)\leq 2\lim_{\xi\in\Xi}\sup_{\tau\in T\setminus E}p(\varphi(\tau)-\varphi_\xi(\tau))=0,$$

т.е. $\varphi(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{g(s)-g(t)}{s-t}$.

Таким образом установлено, что g служит первообразной по отношению к φ на T. Иными словами, φ имеет на T интеграл.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\int_{\alpha}^{\beta}\varphi = g(\beta)-g(\alpha) = \lim_{\xi\in\Xi}\left(g_{\xi}(\beta)-g_{\xi}(\alpha)\right) = \lim_{\xi\in\Xi}\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_{\xi} \qquad (\alpha,\beta\in T).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда Ξ – множество всех натуральных чисел, нередко на роль E подходит множество $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$, где по-прежнему E_n – исключительные множества для интегралов $\int\varphi_n$. Формулировку получающегося при этом предложения мы предоставляем читателю.

I.7. Основываясь на доказанной выше теореме, установим следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 4 (I.7). Пусть T – отрезок числовой прямой. Непрерывное отображение φ отрезка T в полное отделимое локально выпуклое пространство Y имеет интеграл на T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с леммой 2(I.5) можно считать отрезок T замкнутым. Пусть, например, $T=[a,b]$. Тогда непрерывное отображение φ отрезка T в пространство Y будет и равномерно непрерывным (см. теорему I(7.5)), так что какова бы ни была окрестность нуля V пространства Y можно указать такое число $\delta_V>0$, что соотношение $|t'-t''|\leq\delta_V$ $(t',t''\in T)$ влечет включение $\varphi(t')-\varphi(t'')\in V$. Выберем рациональные числа $t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$ так, что $a=t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n\leq t_{n+1}=b$, $t_{k+1}-t_k\leq\delta_V$ $(k=0,1,\ldots,n)$, и положим $\varphi_V(t)=\varphi(t_{k+1})$ $(t\in(t_k,t_{k+1}),\ k=0,1,\ldots,n)$. Ясно, что этим определено конечнозначное отображение φ_V. При этом, если $t\in T$ и $t\neq t_j$ $(j=0,1,\ldots,n+1)$, то при некотором $k=0,1,\ldots,n$ будет $t\in(t_k,t_{k+1})$, так что

$$\varphi_V(t)-\varphi(t)=\varphi(t_{k+1})-\varphi(t)\in V. \tag{40}$$

Обозначим через E множество всех рациональных чисел промежутка T, дополненное точками a и b. Из соотношения (40) следует, что множество E, фильтрующееся (по убыванию) семейство $\{\varphi_V\}$ $(V\in\mathfrak{V})$ конечнозначных отображений и данное отображение φ удовлетворяют всем условиям теоремы 3, применение которой завершает доказательство.

I.8. Если фигурирующее в теореме 4 пространство Y нормированное, то условия указанной теоремы можно несколько ослабить.

ТЕОРЕМА 5 (I.7). Пусть φ – заданное по крайней мере на внутренности T^0 замкнутого промежутка $T=[a,b]$ расширенной числовой прямой непрерывное на T^0 отображение в полное нормированное пространство Y и λ – вещественная функция, заданная в основном на T, такая, что

$$\|\varphi(t)\|\leq\lambda(t) \qquad (t\in T^0\cap Q_\lambda). \tag{4I}$$

Тогда если λ имеет интеграл на T, то и φ имеет интеграл на T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4 интеграл от φ существует по крайней мере на отрезке $T^o=(a,b)$. Пусть g – какая-либо первообразная по отношению к φ на отрезке T^o. Если $t',t''\in T^o$, то согласно (29)

$$\|g(t'')-g(t')\| = \|\int_{t'}^{t''}\varphi\| \le |\int_{t'}^{t''}\lambda|,$$

и так как $\lim\limits_{t',t''\to b}\int_{t'}^{t''}\lambda=\int_b^b\lambda=0$, то тем более $\lim\limits_{t',t''\to b}\|g(t'')-g(t')\|=0$. Ввиду полноты пространства Y отсюда вытекает существование предела $\lim\limits_{t\to b} g(t)$. Точно так же можно убедиться в существовании предела $\lim\limits_{t\to a} g(t)$. Нетрудно понять, что отображение $\bar g$, определяемое на T следующим образом: $\bar g(t)=g(t)$, если $t\in T^o$, $\bar g(t)=\lim\limits_{\tau\to a} g(\tau)$, если $t=a$ и $\bar g(t)=\lim\limits_{\tau\to b} g(\tau)$, если $t=b$, непрерывно на T и в основном на T^o, а стало быть, и в основном на T имеем $\bar g'(t)=\varphi(t)$. Таким образом, $\bar g$ – первообразная по отношению к φ на T.

I.9. Пусть φ – отображение отрезка T расширенной числовой прямой в векторное пространство Y. В этом пункте нам удобнее трактовать φ "геометрически" как путь в пространстве Y (см. I.I). Заметим, что множество $\varphi[T]$ – область значений отображения φ – называется т р а е к т о р и е й пути φ.

В предположении, что Y – отделимое локально выпуклое пространство, будем называть путь φ г л а д к и м, если на T существует непрерывная производная φ'.

Рассмотрим непрерывный путь φ в нормированном пространстве Y, определенный на промежутке T расширенной числовой прямой. Пусть ξ – конечное подмножество промежутка T. Перенумеруем элементы множества ξ в порядке их возрастания: $\xi=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ $(t_0<t_1<\dots<t_n)$ и составим сумму

$$v_\xi=\sum_{k=1}^{n}\|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\|. \tag{42}$$

Если через Ξ обозначить совокупность всех конечных подмножеств отрезка T, упорядоченную по включению, то описанная конструкция приводит к фильтрующемуся числовому семейству $\{v_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$. Докажем, что это семейство возрастающее. Возьмем $\xi_1,\xi_2\in\Xi$ $(\xi_1<\xi_2)$. Проверяя неравенство $v_{\xi_1}\le v_{\xi_2}$, можно, очевидно, ограничиться рассмотрением случая, когда множество $\xi_2\setminus\xi_1$ состоит из единственной точки, которую мы обозначим через t; элементы множества ξ_1 обозначим через $t_0,t_1,\dots,t_n$ $(t_0<t_1<\dots<t_n)$. Предположим, что существует натуральное число m, что $t_{m-1}<t<t_m$. Тогда

$$v_{\xi_1}=\sum_{k=1}^{n}\|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\|=\|\varphi(t_m)-\varphi(t_{m-1})\|+\sum_{k=1}^{m-1}\|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\|+\sum_{k=m+1}^{n}\|\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})\|\le$$

$$\leq \|\varphi(t_m)-\varphi(t)\|+\|\varphi(t)-\varphi(t_{m-1})\|+\sum_{K=1}^{m-1}\|\varphi(t_K)-\varphi(t_{K-1})\|+\sum_{K=m+1}^{n}\|\varphi(t_K)-\varphi(t_{K-1})\|=v_{\xi_2}.$$

Если числа m с указанными свойствами не существует, то должно быть $t<t_0$ или $t>t_n$. Если, например, реализуется первая возможность, можем написать

$$v_{\xi_1}=\sum_{K=1}^{n}\|\varphi(t_K)-\varphi(t_{K-1})\|\leq\|\varphi(t_0)-\varphi(t)\|+\sum_{K=1}^{n}\|\varphi(t_K)-\varphi(t_{K-1})\|=v_{\xi_2}.$$

Аналогично исчерпывается случай $t>t_n$.

Будучи монотонным, семейство $\{v_\xi\}$ $(\xi\in\Xi)$ имеет предел (см. теорему I(4.2)), который называется длиной пути φ. Если при этом $\lim\limits_{\xi\in\Xi} v_\xi<+\infty$, то путь называется спрямляемым.

Возьмем числа $\alpha,\beta\in T$ $(\alpha\leq\beta)$ и обозначим через $s(\alpha,\beta)$ длину сужения пути φ на отрезок $[\alpha,\beta]$. Справедливо равенство

$$s(\alpha,\gamma)=s(\alpha,\beta)+s(\beta,\gamma)\qquad(\alpha,\beta,\gamma\in T,\ \alpha\leq\beta\leq\gamma). \tag{43}$$

Действительно, обозначим через Ξ совокупность всех конечных подмножеств промежутка $[\alpha,\gamma]$, а через Ξ^0 – совокупность всех конечных подмножеств этого же промежутка, содержащих точку β. Ясно, что множество Ξ^0 конфинально Ξ (см. П(У.2.2)), поэтому $\lim\limits_{\xi\in\Xi} v_\xi = \lim\limits_{\xi\in\Xi^0} v_\xi = s(\alpha,\gamma)$. Такие же множества, но применительно к промежуткам $[\alpha,\beta]$ и $[\beta,\gamma]$, обозначим через Ξ_1,Ξ_1^0 и Ξ_2,Ξ_2^0 соответственно. Понятно, что $s(\alpha,\beta)=\lim\limits_{\xi\in\Xi_1^0} v_\xi$, $s(\beta,\gamma)=\lim\limits_{\xi\in\Xi_2^0} v_\xi$. Возьмем $\xi_i^0\in\Xi_i^0$ так, чтобы v_{ξ_i} $(\xi\in\Xi_i^0,\ \xi_i\supset\xi_i^0,\ i=1,2)$ мало отличалось от $s(\alpha,\beta)$ и от $s(\beta,\gamma)$ соответственно. Точно так же найдем $\xi^0\in\Xi^0$, исходя из требования близости v_ξ к $s(\alpha,\gamma)$ $(\xi\in\Xi^0,\ \xi\supset\xi^0)$. Можно считать при этом, что $\xi^0\supset\xi_1^0\cup\xi_2^0$. Полагая $\xi_1=\xi^0\cap[\alpha,\beta]$, $\xi_2=\xi^0\cap[\beta,\gamma]$, имеем $v_{\xi^0}=v_{\xi_1}+v_{\xi_2}$, т.е., поскольку $\xi_i\supset\xi_i^0$ $(i=1,2)$, равенство (43) выполняется со сколь угодно малой погрешностью, а тогда оно верно и в точности.

Предположим, что $s(\alpha,\beta)<+\infty$ для любых $\alpha,\beta\in T$ $(\alpha\leq\beta)$. Принимая

$$\sigma(\langle\alpha,\beta\rangle)=\begin{cases} s(\alpha,\beta) & (\alpha\leq\beta)\\ -s(\alpha,\beta) & (\alpha>\beta)\end{cases}\qquad(\alpha,\beta\in T), \tag{44}$$

с помощью соотношения (43) можно легко убедиться в том, что так определенная на T^2 функция ориентированного промежутка σ аддитивна.

Докажем, что определенная выше функция σ непрерывна. Для этого в соответствии с предложением I(I.2) достаточно убедиться в непрерывности на T функции $g: t\mapsto\sigma(\langle\alpha,t\rangle)$ $(t\in T)$, где α – какая-либо фиксированная точка отрезка T. Пусть $\tau\in T$. Предполагая, что τ не совпадает с левым концом отрезка T, установим непрерывность слева функции g в точке τ. Выберем число $\alpha_0 \in T$ так, чтобы $\alpha_0 < \tau$. Так как $g(t) = g(\alpha_0) + \sigma(\langle \alpha_0, t \rangle)$, то функции g и $g_0 : t \mapsto \sigma(\langle \alpha_0, t \rangle)(t \in T)$ одновременно непрерывны или нет в точке τ. Это позволяет считать, что уже $\alpha < \tau$, так как в противном случае мы заменили бы функцию функцией g_0. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое конечное подмножество $\xi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ $(t_0 < t_1 < \ldots < t_n)$ отрезка $[\alpha, \tau]$, что

$$g(\tau) = \sigma(\langle \alpha, \tau \rangle) = s(\alpha, \tau) \leq \varepsilon + v_\xi = \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \| \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \|. \tag{45}$$

Так как $\alpha < \tau$, то можно считать, что число элементов множества ξ не меньше двух и что t_{n-1} настолько близко к $t_n = \tau$, что $\| \varphi(t_n) - \varphi(t_{n-1}) \| \leq \varepsilon$. Тогда, поскольку функция g, как очевидно, возрастающая, существует $g(\tau - 0) = \lim_{t \to \tau - 0} g(t)$, причем $g(\tau - 0) \leq g(\tau)$, поэтому в силу (45)

$$g(\tau) \leq 2\varepsilon + \sum_{k=1}^{n-1} \| \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \| \leq 2\varepsilon + s(\alpha, t_{n-1}) \leq 2\varepsilon + g(t_{n-1}) \leq 2\varepsilon + g(\tau - 0).$$

Ввиду произвольности ε это приводит к неравенству $g(\tau) \leq g(\tau - 0)$, т.е. с учетом сказанного ранее к равенству $g(\tau) = g(\tau - 0)$.

Аналогично доказывается, что g непрерывна справа.

Предположим теперь, что рассматриваемый путь не только спрямляем, но и в основном на T имеет касательный вектор.

I. Если отображение φ' непрерывно в точке $\tau_0 \in Q_{\varphi'}$, то функция σ имеет в этой точке плотность, причем

$$D_\sigma(\tau_0) = \| \varphi'(\tau_0) \|. \tag{46}$$

Действительно, пусть $\alpha, \beta \in T$, $\alpha \leq \tau_0 \leq \beta$, $\alpha \neq \beta$ и $\xi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ $(t_0 < t_1 < \ldots < t_n)$ — непустое конечное подмножество промежутка $[\alpha, \beta]$. Положим $d_\xi = t_n - t_0$, $Q = Q_{\varphi'} \cap [\alpha, \beta]$. Согласно (33)

$$\left| v_\xi - d_\xi \| \varphi'(\tau_0) \| \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \| \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) \| - \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \| \varphi'(\tau_0) \| \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \| \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) - (t_k - t_{k-1}) \varphi'(\tau_0) \| \leq \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \sup_{\tau \in Q} \| \varphi'(\tau) - \varphi'(\tau_0) \| =$$

$$= d_\xi \sup_{\tau \in Q} \| \varphi'(\tau) - \varphi'(\tau_0) \|. \tag{47}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу и принимая во внимание, что $\lim_{\xi \in \Xi} d_\xi = \beta - \alpha$, получаем оценку

$$\left| s(\alpha, \beta) - (\beta - \alpha) \| \varphi'(\tau_0) \| \right| \leq (\beta - \alpha) \sup_{\tau \in Q} \| \varphi'(\tau) - \varphi'(\tau_0) \|,$$

т.е.

$$\left| \frac{\sigma(\langle \alpha, \beta \rangle)}{\beta - \alpha} - \| \varphi'(\tau_0) \| \right| \leq \sup_{\tau \in Q} \| \varphi'(\tau) - \varphi'(\tau_0) \|.$$

Ввиду непрерывности отображения φ' в точке τ_0 правая часть в последнем неравенстве может быть сделана сколь угодно малой за счет достаточной малости разности $\beta-\alpha$. Но это и означает справедливость равенства (46).

Таким образом, если отображение φ' непрерывно на всей области своего определения, то $\sigma=\int\lambda$, где $\lambda: t\longmapsto \|\varphi'(t)\|$ $(t\in\Omega_{\varphi'})$.

Все предшествующие рассуждения существенно использовали конечность длины пути $s(\alpha,\beta)$ для любых $\alpha,\beta\in T$. Укажем одно достаточное условие этого.

П. Пусть φ – непрерывный путь в нормированном пространстве Y, определенный на замкнутом отрезке $T=[\alpha,\beta]$ числовой прямой. Если в основном на T путь φ имеет касательный вектор и функция $\lambda: t\longmapsto \|\varphi'(t)\|$ $(t\in\Omega_{\varphi'})$ ограничена, то φ спрямляем.

Предполагая, кроме того, непрерывность (на $\Omega_{\varphi'}$) отображения φ' для длины s пути φ имеем формулу

$$s=\int_a^b\lambda=\int_a^b\|\varphi'(t)\|dt. \tag{48}$$

В самом деле, рассуждая по той же схеме и используя те же обозначения, что и при выводе (47), придем к неравенству

$$v_\xi\leqslant\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})\sup_{\tau\in Q}\|\varphi'(\tau)\|=d_\xi\sup_{\tau\in Q}\|\varphi'(\tau)\|,$$

откуда, переходя к пределу, получаем

$$s(\alpha,\beta)\leqslant(\beta-\alpha)\sup_{\tau\in Q}\|\varphi'(\tau)\|<+\infty \qquad (\alpha,\beta\in T,\ \alpha\leqslant\beta).$$

В случае, когда условие ограниченности производной φ' выполнено не на всем T, а лишь на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в открытом промежутке $T^\circ=(a,b)$, формула (48) уже перестает быть верной, однако, если вместо интеграла $\int_a^b\lambda$ в ее правой части написать предел $\lim\limits_{\alpha\to a+0,\beta\to b-0}\int_\alpha^\beta\lambda$, она сохраняется и в этом случае. При этом нет надобности считать, что T – конечный промежуток. Несложный вывод указанного обобщения формулы (48) мы предоставляем читателю.

§ 2. Дифференциал

Отправляясь от данного в предыдущем параграфе определения производной отображения отрезка числовой прямой в локально выпуклое пространство, можно решить задачу об аппроксимации (вблизи данной точки) произвольного отображения векторного пространства в локально выпуклое пространство с помощью линейного отображения.

2.I. Пусть X – вещественное векторное пространство, Y – отделимое локально выпуклое пространство (также над полем $\mathbb{R}$), F – отображение из X в Y. Возьмем элемент $x_0 \in \Omega_F$ и произвольный вектор $v \in X$. Путь $\varphi: t \mapsto x_0 + tv \ (t \in \mathbb{R})$ называется прямой (проходящей через x_0 в направлении v)+). Область определения суперпозиции $\Phi = F \circ \varphi$ во всяком случае включает точку 0. Предположим, что Ω_Φ содержит и некоторую окрестность нуля. В этом случае можно говорить о производной отображения Φ в нуле, т.е. о пределе

$$\Phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(t) - \Phi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t}.$$

Если указанный предел существует, то он называется производной отображения F по направлению v (на элементе x_0) и обозначается символом $F'_v(x_0)$.

I. Если на элементе x_0 существует производная $F'_v(x_0)$ по направлению v и α – вещественное число, то на x_0 существует и производная по направлению αv, причем

$$F'_{\alpha v}(x_0) = \alpha F'_v(x_0). \tag{I}$$

Действительно, если $\psi: t \mapsto x_0 + \alpha t v \ (t \in \mathbb{R})$, $\varphi: t \mapsto x_0 + tv \ (t \in \mathbb{R})$, $\lambda: t \mapsto \alpha t \ (t \in \mathbb{R})$, то $\psi = \varphi \circ \lambda$ и, следовательно, $F \circ \psi = (F \circ \varphi) \circ \lambda$. Так как $\lambda'(0) = \alpha$, то сформулированный выше результат вытекает из предложения Ш(I.I).

В общем случае более содержательных утверждений о зависимости производной по направлению от направления сделать нельзя, хотя бы уже потому, что производной по отдельным направлениям (и таких направлений может быть чрезвычайно много) просто нет. Чтобы исключить указанное обстоятельство, дадим определение. Множество Ω в векторном пространстве X будем называть звездным относительно элемента $x_0 \in X$, если множество $\Omega - x_0$ поглощающее. Предположение о звездности относительно x_0 области определения Ω_F отображения F позволяет, очевидно, говорить о производной отображения F (на x_0) по любому направлению $v \in X$. Если для каждого $v \in X$ существует производная $F'_v(x_0)$ и такой линейный оператор A (из X в Y), что $F'_v(x_0) = A(v)$, то говорят, что F дифференцируемо в смысле Гато (на элементе x_0). Оператор A называется при этом дифференциалом Гато отображения F (на элементе x_0) и обозначается через $dF(x_0)$++).

+) Часто под прямой подразумевают не сам путь φ, а его траекторию $\varphi[\mathbb{R}]$, т.е. совокупность всех элементов из X, представимых в виде $x_0 + tv \ (t \in \mathbb{R})$.

++) Оператор A называют нередко также и производной в смысле Гато отображения F и обозначают в этом случае через $F'(x_0)$.

Таким образом,

$$F'_v(x_0) = dF(x_0)(v) \qquad (v \in X). \tag{2}$$

Дифференцируемость в смысле Гато отображения F означает, как ясно из определения, квалифицированную зависимость производной по направлению от направления. В силу предложения I, для дифференцируемости в смысле Гато отображения F достаточно, чтобы существовала производная (на элементе x_0) по любому направлению, причем

$$F'_{u+v}(x_0) = F'_u(x_0) + F'_v(x_0) \qquad (u, v \in X). \tag{3}$$

Рассматривая в определении дифференциала направления из некоторого подпространства векторного пространства X, можно прийти к понятию частного дифференциала Гато. Дадим точное определение. Пусть X_0 – подпространство векторного пространства X и множество Q_F звездно относительно элемента $x_0 \in Q_F$ по направлениям из подпространства X_0, т.е. множество $Q_F - x_0$ поглощает подпространство X_0. В этом случае, понятно, можно говорить о производной отображения F в точке x_0 по любому направлению $v \in X_0$. Если для каждого $v \in X_0$ существует производная $F'_v(x_0)$ и такой заданный на X_0 линейный оператор A, действующий в Y, что $F'_v(x_0) = A(v)$ $(v \in X_0)$, тогда говорят, что отображение F д и ф ф е р е н ц и р у е м о в смысле Гато п о п о д п р о с т р а н с т в у X_0 в точке $x_0 \in Q_F$, а оператор A называют д и ф ф е р е н ц и а л о м Г а т о отображения F в точке x_0 п о п о д п р о с т р а н с т в у X_0, или ч а с т н ы м д и ф ф е р е н ц и а л о м Г а т о, и обозначают его, как правило, через $d_{X_0}F(x_0)$.

Нетрудно понять, что если отображение F дифференцируемо в смысле Гато в точке x_0, то оно дифференцируемо в смысле Гато в точке x_0 по любому подпространству X_0 векторного пространства X, при этом $d_{X_0}F(x_0)$ представляет собой сужение оператора $dF(x_0)$ на подпространство X_0.

Предположим, что кроме пространств X и Y дано еще векторное пространство $\mathcal{X}$ и отделимое локально выпуклое пространство $\mathcal{Y}$. Пусть Φ и Ψ – линейные операторы из $\mathcal{X}$ в X и из Y в $\mathcal{Y}$ соответственно.

II. Если отображение F из X в Y имеет на элементе $x \in Q_F$ дифференциал Гато и Ψ – непрерывный оператор, то отображение $F_0 = \Psi \circ F \circ \Phi$ также имеет дифференциал Гато на любом элементе $x_0 \in \Phi^{-1}[x]$, причем

$$dF_0(x_0) = \Psi\, dF(x)\, \Phi. \tag{4}$$

(в правой части соотношения (4) стоит суперпозиция линейных операторов).

В самом деле, пусть $dF(x)=A$. Для любого $v\in X$ имеем

$$F'_v(x)=\lim_{t\to 0}\frac{F(x+tv)-F(x)}{t}=A(v).$$

Поэтому, если $w\in X$, то, воспользовавшись непрерывностью оператора Ψ, можем написать

$$\Psi A\Phi(w)=\lim_{t\to 0}\frac{\Psi(F(\Phi(x_0+tw)))-\Psi(F(\Phi(x_0)))}{t},$$

что и требовалось доказать.

С помощью предложения I(I.I) без труда получаем

Ш. Пусть F_1 и F_2 – отображения из векторного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y, имеющие на элементе $x_0\in X$ дифференциал Гато. Тогда отображение $F: x\longmapsto \alpha F_1(x)+\beta F_2(x)$ $(x\in \Omega_{F_1}\cap\Omega_{F_2})$ (α,β – данные скаляры) также имеет на x_0 дифференциал Гато, причем

$$dF(x_0)=\alpha dF_1(x_0)+\beta dF_2(x_0). \qquad (5)$$

Отметим в заключение такой очевидный факт.

IУ. Пусть F – такое отображение из векторного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y, что существуют элемент $x_0\in X$, множество $E\subset Q_F$, звездное относительно элемента x_0, и линейный оператор A из X в Y, совпадающий с F на E. Тогда A служит дифференциалом Гато отображения F на элементе x_0.

2.2. В этом пункте рассмотрим вначале свойства линейных операторов, действующих в конечномерных пространствах, и на этой основе получим свойства дифференциала Гато в случае, когда пространства X и Y конечномерны.

Пусть S и T – непустые множества. Отображение $\mathcal{A}$ произведения $S\times T$ в поле скаляров R называется матрицей (размера $S\times T$; если $S=\{1,2,\dots,m\}$, $T=\{1,2,\dots,n\}$, то о матрице размера $S\times T$ говорят как о матрице размера $m\times n$). Пусть $s\in S$. Отображение $\mathcal{A}_s: t\longmapsto\mathcal{A}(s,t)$ $(t\in T)$ называется строкой матрицы $\mathcal{A}$, соответствующей элементу $s\in S$. Аналогично определяется столбец $\mathcal{A}^t$ матрицы $\mathcal{A}$, соответствующий элементу $t\in T$, как отображение $\mathcal{A}^t: s\longmapsto\mathcal{A}(s,t)$ $(s\in T)$.

Если $\mathcal{A}$ – матрица размера $S\times T$, то, полагая $\mathcal{A}'(t,s)=\mathcal{A}(s,t)$ $(t\in T, s\in S)$, получим на $T\times S$ матрицу $\mathcal{A}'$, которая называется транспонированной по отношению к $\mathcal{A}$. Ясно, что строки транспонированной матрицы являются столбцами данной, а столбцы – строками.

Рассмотрим конечномерные векторные пространства $X=R^n=R^{\{1,2,\dots,n\}}$ и $Y=R^m=R^{\{1,2,\dots,m\}}$ и соответственно их канонические базисы E, H, состоящие из координатных отображений (см. УI.2.2). Каждому оператору $A \in L(X,Y)$ сопоставим определенную на $H\times E$ матрицу $\mathcal{A}=(a_{ij})$, принимая $a_{ij}=\mathcal{A}(i,j)=(A(\varepsilon_j))_i=\varepsilon_i(A(\varepsilon_j))$ ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$). Если, напротив, на $H\times E$ задана матрица $\mathcal{A}$, то для элемента ε_κ ($\kappa=1,2,\dots,n$) канонического базиса пространства R^n положим $\varphi(\varepsilon_\kappa)=\mathcal{A}^\kappa$. Ясно, что φ отображает множество E в R^m и потому согласно замечанию 2 к теореме I(2.6), существует единственный линейный оператор $A\in L(R^n;R^m)$, служащий распространением отображения φ . Поскольку при этом $A(\varepsilon_\kappa)=$ $=\varphi(\varepsilon_\kappa)=\mathcal{A}^\kappa$ для каждого $\kappa=1,2,\dots,n$, то, если по оператору A определить теперь матрицу, она совпадет с исходной матрицей $\mathcal{A}$.

Итак, установлено взаимно однозначное отображение между множеством $L(R^n;R^m)$ и множеством определенных на $H\times E$ матриц, причем, как нетрудно проверить, это отображение представляет собой изоморфизм векторного пространства $L(R^n;R^m)$ и векторного пространства (с покоординатными операциями) всех определенных на $H\times E$ матриц.

Предположим, что кроме заданной на $H\times E$ матрицы $\mathcal{A}$ имеется еще заданная на $E\times G$ ($G=\{1,2,\dots,\kappa\}$) матрица $\mathcal{B}$. Положим

$$\mathcal{C}(i,\ell)=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}(i,j)\,\mathcal{B}(j,\ell) \qquad (i=1,2,\dots,m;\ \ell=1,2,\dots,\kappa).$$

Матрица $\mathcal{C}$, определенная этим соотношением на произведении $H\times G$, называется произведением матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначается символом $\mathcal{A}\mathcal{B}$ (или $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$). Если трактовать строку $\mathcal{A}_i$ матрицы $\mathcal{A}$ как матрицу размера $\{i\}\times E$ и точно так же столбец $\mathcal{B}^\ell$ матрицы $\mathcal{B}$ как матрицу на произведении $E\times\{\ell\}$, то элемент $\mathcal{C}(i,\ell)$ матрицы $\mathcal{C}=\mathcal{A}\mathcal{B}$ будет произведением матриц $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}^\ell$, т.е. $\mathcal{C}(i,\ell)=\mathcal{A}_i\cdot\mathcal{B}^\ell$.

Вернемся к оператору A и определенной им матрице $\mathcal{A}$. Отождествим элемент $x\in R^n$ с "одностолбцовой" матрицей, т.е. матрицей, заданной на произведении $E\times\{0\}$: $x(j,0)=x_j$ $(j\in E)$. Аналогично поступим с элементами пространства R^m. Поскольку $x=\sum_{j=1}^{n}x_j\varepsilon_j$, то

$$A(x)=\sum_{j=1}^{n}x_jA(\varepsilon_j)=\sum_{j=1}^{n}A(\varepsilon_j)\cdot x_j=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}^jx_j,$$

т.е.

$$A(x)(i)=\varepsilon_i(A(x))=\sum_{j=1}^{n}\mathcal{A}(i,j)\,x_j=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_j \qquad (i=1,2,\dots,m).$$

Таким образом,

$$A(x)=\mathcal{A}\cdot x. \tag{6}$$

Соотношение (6) показывает, что действие оператора A на элемент $x\in R^n$ состоит в умножении матрицы $\mathcal{A}$ (не зависящей от x) на столбец x .

Учитывая, что конечномерное векторное пространство изоморфно произведению конечного числа прямых, можно вывести матричное представление линейных операторов и в произвольных конечномерных векторных пространствах. Пусть X,Y – конечномерные векторные пространства и $B\in L(X,Y)$. Выберем базис $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ в пространстве X и базис $H=\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$ в пространстве Y. Через Φ_E и Φ_H обозначим координатные изоморфизмы пространства X на R^n и соответственно пространства Y на R^m (это означает, что элементу $x=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ пространства X сопоставляется отображение $j\longmapsto x_j$ $(j=1,2,\dots,n)$, и аналогичное происходит с элементом $y\in Y$). Положим $\Psi_E=\Phi_E^{-1}, \Psi_H=\Phi_H^{-1}$. Линейный оператор $A=\Phi_H B\Psi_E$ отображает пространство R^n в пространство R^m и, следовательно, определяется матрицей $\mathcal{A}$ размера $m\times n$. Поскольку $A\Phi_E=\Phi_H B$, то для любого $x\in X$ имеем

$$\Phi_H(B(x))=A(\Phi_E(x))=\mathcal{A}\cdot\Phi_E(x), \tag{7}$$

т.е. столбец координат (относительно базиса H) элемента $B(x)$ получается умножением матрицы $\mathcal{A}$ на столбец координат (относительно базиса E) элемента x. Если через $[y]_H$, $[x]_E$ обозначить столбцы координат вектора $y\in Y$ (в базисе H) и соответственно вектора $x\in X$ (в базисе E), то соотношение (7) запишется в виде

$$[B(x)]_H=\mathcal{A}\cdot[x]_E. \tag{8}$$

В заключение, вернувшись к пространствам R^m, R^n, отметим, что если матрица $\mathcal{A}(t)=(a_{ij}(t))$ размера $m\times n$ состоит из отображений $a_{ij}(t)$ $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$, заданных и непрерывных в точках некоторого открытого множества G топологического пространства T, то отображение из G в $L(R^m,R^n)$, сопоставляющее точке $t\in G$ линейный оператор $A(t)$, определяемый матрицей $\mathcal{A}(t)$, непрерывно. Для обоснования этого утверждения достаточно заметить, что, как нетрудно показать, $\|A(t)\|\le\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2(t)\right]^{1/2}$.

Рассмотрим конечномерные векторные пространства X и Y (над полем $\mathbb{R}$) и фиксируем базисы $E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ в пространстве X и соответственно $H=\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$ в пространстве Y. Если отображение F из X в Y имеет в точке $x_0\in X$ дифференциал Гато $dF(x_0)=A$, то в соответствии со сказанным в начале пункта он определяется некоторой матрицей

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей Якоби** отображения F в точке x_0 (соответствующей базисам E и H). Согласно (7) k-й столбец матрицы Якоби совпадает со столбцом координат элемента

$A(e_k)$, т.е. со столбцом координат производной $F'_{e_k}(x_0)$ по направлению e_k. Обозначая через f_j ($j=1,2,\dots,m$) координатные функционалы в пространстве Y, т.е. функционалы, сопоставляющие элементу $y\in Y$ его j-ю координату (в базисе H), мы получим таким образом $a_{jk}=f_j(F'_{e_k}(x_0))$ или, учитывая результат предложения IУ(I.I),

$$a_{jk}=(F_j)'_{e_k}(x_0) \qquad (j=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,n), \tag{9}$$

где через F_j обозначены координатные функции отображения F, т.е. суперпозиции $F_j=f_j\circ F$.

Пусть $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^m$ и базисы в X,Y канонические. При этом отображение F можно трактовать как семейство m вещественных функций F_j (координатных функций отображения F) от n вещественных "переменных", так что $y=F(x)$ означает $\eta_j=F_j(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ ($x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$). Производную отображения F по направлению e_k называют в этом случае **ч а с т н о й п р о и з в о д н о й** по k-й переменной и нередко обозначают символом $\frac{\partial F}{\partial \xi_k}(x_0)$. Согласно общему определению

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_k}(x_0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(\xi_1^0,\dots,\xi_k^0+t,\dots,\xi_n)-F(\xi_1^0,\dots,\xi_k^0,\dots,\xi_n^0)}{t} \qquad (x_0=(\xi_1^0,\dots,\xi_n^0)).$$

Элементы матрицы Якоби в рассматриваемом случае – это просто частные производные координатных функций данного отображения: $a_{jk}=\frac{\partial F_j}{\partial \xi_k}(x_0)$ ($j=1,2,\dots,m$; $k=1,2,\dots,n$), так что матрица Якоби, обозначаемая в данном случае через $\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)}$, будет

$$\mathcal{A}=\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)}(x_0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial \xi_1}(x_0) & \frac{\partial F_m}{\partial \xi_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial \xi_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Трактуя комплекснозначную функцию F, определенную в некоторой области комплексной плоскости, как отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, мы можем (в предположении дифференцируемости в смысле Гато в точке $x_0\in\Omega_F$) связать с ней матрицу второго порядка – матрицу Якоби отображения F. Выясним условия, при которых действие дифференциала Гато $dF(x_0)=A$ равносильно умножению на некоторое комплексное число c. Обозначая, как и выше, элементы матрицы Якоби через a_{jk} и понимая элементы из $\mathbb{R}^2$ как комплексные числа, для $x,y\in\mathbb{R}^2$, связанных соотношением $y=A(x)$, будем иметь $\eta_j=a_{j1}\xi_1+a_{j2}\xi_2$ ($j=1,2$; $x=\xi_1+i\xi_2$, $y=\eta_1+i\eta_2$) и, с другой стороны, если $y=cx$, то $\eta_1=c_1\xi_1-c_2\xi_2$, $\eta_2=c_2\xi_1+c_1\xi_2$. Таким образом, если $A(x)=c\cdot x$ для каждого $x\in\mathbb{R}^2$, то $a_{11}=a_{22}$ и $a_{12}=-a_{21}$, т.е.

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}(x_0)=\frac{\partial F_2}{\partial \xi_2}(x_0), \quad \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(x_0)=-\frac{\partial F_2}{\partial \xi_1}(x_0). \tag{10}$$

Обратно, равенства (10) обеспечивают справедливость соотношения $A(x)=c\cdot x \quad (x\in R^2)$.

Предоставляем читателю доказать, что если выполнены соотношения (10) (они называются условиями Коши-Римана), то коэффициент c есть не что иное как предел $\lim\limits_{z\to 0}(F(x_0+z)-F(x_0))/z$, т.е. производная функции F в том смысле, какой ей был приписан в IУ.I.I.

2.3. Требование дифференцируемости в смысле Гато, хотя и устанавливает связь данного отображения с линейным, оказывается все же слишком слабым для того, чтобы можно было высказать сколько-нибудь содержательные утверждения. Одной из причин этого является то, что в пространстве X, в котором лежит область определения данного отображения, не предполагается никакой топологической структуры, в связи с чем не может быть использован аппарат аппроксимации. Эти соображения и приводят к необходимости уточнения понятия дифференцируемости.

Рассмотрим нормированное пространство X и отделимое локально выпуклое пространство Y. Пусть F - отображение из X в Y, которое имеет в точке $x_0\in X$ дифференциал Гато $dF(x_0)=A$. В соответствии с данным в 2.I определением это означает, что для любого $v\in X$

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t}=A(v). \tag{11}$$

Будем говорить, что отображение F д и ф ф е р е н ц и р у е м о в точке x_0 в с м ы с л е Ф р е ш е (или просто д и ф ф е р е н ц и р у е м о), и называть оператор A д и ф ф е р е н ц и а л о м Ф р е ш е, если этот оператор непрерывен и для любого ограниченного в X множества E соотношение (11) имеет место равномерно относительно $v\in E$ [+]). Последнее означает, что, какова бы ни была окрестность W нуля пространства Y, можно указать такое число $\delta>0$, что для $v\in E$ и $t\in[-\delta,\delta]$ $(t\neq 0)$ выполнены соотношения

$$x_0+tv\in Q_F, \qquad \frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t}-A(v)\in W \text{ [++)]} \tag{12}$$

+) Нередко вместо термина "дифференциал" используется термин производная (в смысле Фреше) и обозначение $F'(x_0)$.

++) Ничего не меняя в этом определении, можно применить его и к более общему случаю, когда пространство X представляет собой произвольное локально выпуклое или даже топологическое векторное пространство. Однако в такой более общей ситуации некоторые из сформулированных ниже результатов перестают быть верными.

Аналогично можно дать определение дифференцируемости в смысле Фреше по подпространству X_0 нормированного пространства X . Предположим, что в точке $x_0 \in X$ существует частный дифференциал Гато $d_{X_0} F(x_0)$. Если оператор $d_{X_0} F(x_0)$, определенный на подпространстве X_0 нормированного пространства X , непрерывен и для любого ограниченного в X_0 множества E_0 соотношение (II) выполняется равномерно относительно $v \in X_0$, тогда говорят, что F дифференцируемо в смысле Фреше п о п о д п р о с т р а н с т в у X_0 и дифференциал $d_{X_0} F(x_0)$ в этом случае называют дифференциалом Фреше отображения F в точке x_0 по подпространству X_0 или ч а с т н ы м дифференциалом Фреше. Если отображение F дифференцируемо в смысле Фреше в точке $x_0 \in X$, то оно дифференцируемо в смысле Фреше в точке x_0 по любому подпространству нормированного пространства X.

Понятно, что для проверки (I2) нет надобности перебирать все окрестности нуля пространства Y . Достаточно под W понимать окрестность из произвольного базиса фильтра окрестностей, например из совокупности всех замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей, т.е. иначе говоря, из совокупности всех (замкнутых) шаров, отвечающих всевозможным непрерывным полунормам на Y . Если p — такая полунорма и $S_{\varepsilon}^{(p)}$ — соответствующий ей шар радиуса ε , то соотношения (I2) можно записать в виде

$$x_0 + tv \in Q_F, \; p\left(\frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t} - A(v)\right) \leq \varepsilon \quad (v \in E, t \in [-\delta, \delta], t \neq 0), \qquad (I3)$$

так что ввиду произвольности ε дифференцируемость отображения F равносильна тому, что для каждой непрерывной полунормы p на Y равномерно относительно $v \in E$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t \to 0} p\left(\frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t} - A(v)\right) = 0. \qquad (I4)$$

Если соотношение (I2) (или, что то же, (I3)) имеет место для какого-нибудь множества E , то оно останется справедливым и тогда, когда в нем множество E заменено множеством $E_0 \subset E$. Это соображение позволяет производить проверку соотношения (I2) лишь для случая, когда E — шар (с центром в нуле) пространства X . Более того, если (I2) соблюдено для единичного шара и δ — отвечающее этому множеству число, то, заменяя δ на $\frac{1}{r}\delta$, можно убедиться в том, что (I2) будет выполнено и тогда, когда E — шар радиуса r . Таким образом, в определении дифференцируемости можно ограничиться случаем, когда E — единичный шар пространства X .

Рассмотрим произвольный элемент $w \in X$ с $\|w\| \leq \delta$. Представляя его в виде $w=tv$ ($t\in[-\delta,\delta]$; $\|v\|\leq 1$) и подставляя найденные таким образом t и v в (I3) (учитывая при этом, что $|t|=\|tv\|=\|w\|$), получим

$$x_0+w\in\Omega_F,\quad p(F(x_0+w)-F(x_0)-A(w))\leq\varepsilon\cdot\|w\|\qquad(\|w\|\leq\delta).\qquad\text{(I5)}$$

Обратно, пусть $\mathfrak{M}$ – какая-либо мультинорма на Y, определяющая топологию этого пространства (см. УI.5.I). Если существует такой линейный непрерывный оператор A из X в Y, что для каждых $\varepsilon>0$ и $p\in\mathfrak{M}$ найдется $\delta>0$ так, что выполнено (I5), то F дифференцируемо в точке x_0, причем оператор A служит дифференциалом Фреше отображения F в точке x_0.

Действительно, пусть W – произвольная окрестность нуля пространства Y. Тогда (см. УI.5.I) существуют такие полунормы $p_1,p_2,\ldots,p_n\in\mathfrak{M}$ и число $\varepsilon>0$, что $\varepsilon S^{(1)}\cap\varepsilon S^{(2)}\cap\ldots\cap\varepsilon S^{(n)}\subset W$, где $S^{(k)}$ – единичный шар, отвечающий полунорме p_k ($k=1,2,\ldots,n$). Если $\delta_k>0$ – такое число, что для ε и p_k выполняется (I5) и $\delta=\inf\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n\}$, $t\in[-\delta,\delta]$, $v\in X$, $\|v\|\leq 1$, то, считая $t\neq 0$, можем написать

$$p_k(F(x_0+tv)-F(x_0)-A(tv))\leq\varepsilon|t|\qquad(k=1,2,\ldots,n),$$

так что

$$\frac{F(x_0+tv)-F(x_0)}{t}-A(v)\in\varepsilon S^{(k)}\qquad(k=1,2,\ldots,n).$$

Отсюда следует, что выполнено (I2) (если под E понимать единичный шар пространства X), что и требовалось доказать.

Нередко именно соотношение (I5) и кладут в основу определения дифференцируемости (в смысле Фреше).

Сделаем некоторые выводы из определения.

I. Пусть F – дифференцируемое в точке $x_0\in X$ отображение. Тогда x_0 – внутренняя точка области определения Ω_F отображения F и F непрерывно в этой точке.

Действительно, то, что x_0 – внутренняя точка множества Ω_F, вытекает из (I5). Далее, если p – непрерывная на Y полунорма, $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ удовлетворяет соотношению (I5), то для $x\in S_\delta(x_0)$ имеем

$$p(F(x)-F(x_0))\leq\varepsilon\|x-x_0\|+p(A(x-x_0)),$$

откуда и вытекает непрерывность отображения F в точке x_0.

В связи с предложением I заметим, что если бы в определении дифференцируемости отказаться от требования непрерывности оператора $A=dF(x_0)$, то, разумеется, нельзя было бы доказать и непрерывность (в точке x_0) отображения F. Однако, предполагая заранее непрерывность в точке x_0 отображения F, можно было бы вывести из этого условия непрерывность дифференциала $dF(x_0)$. Таким образом, непрерывность самого отображения F и его дифференциала равносильны.

С помощью предложения Ш(2.I) выводим следующий результат.

II. Пусть F_1 и F_2 – отображения из нормированного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y, которые имеют в точке $x_0 \in X$ дифференциалы Фреше $dF_1(x_0)=A_1$, $dF_2(x_0)=A_2$. Если α и β – данные скаляры, то отображение $F: x \mapsto \alpha F_1(x)+\beta F_2(x)$ $(x \in \Omega_{F_1} \cap \Omega_{F_2})$ также имеет в точке x_0 дифференциал Фреше, причем $dF(x_0)=\alpha A_1+\beta A_2$.

Действительно, оператор $A=\alpha A_1+\beta A_2$ непрерывен. Далее, поскольку в силу предложения I точка x_0 – внутренняя по отношению к множествам Ω_{F_1} и Ω_{F_2}, то она будет внутренней и для их пересечения $\Omega_{F_1} \cap \Omega_{F_2}$, которое совпадает с Ω_F. Подразумевая, как и выше, под p произвольную непрерывную полунорму на Y, а под ε – также произвольное строго положительное число, найдем число $\delta>0$ так, чтобы для F_1 и F_2 были удовлетворены соотношения, аналогичные (I5). Тогда для каждого $w \in X$ с $\|w\| \leq \delta$ имеем

$$p(F(x_0+w)-F(x_0)-A(w)) \leq |\alpha|\, p(F_1(x_0+w)-F_1(x_0)-A_1(w))+$$

$$+|\beta|\, p(F_2(x_0+w)-F_2(x_0)-A_2(w)) \leq (|\alpha|+|\beta|)\, \varepsilon \|w\|,$$

откуда и вытекает сформулированный результат.

Отображение F из нормированного (или вообще из произвольного топологического векторного) пространства X в локально выпуклое пространство Y (для определения достаточно, впрочем, чтобы Y было просто векторным пространством) называется **локально линейным в точке** $x_0 \in X$, если существует такая окрестность V точки x_0 и такой линейный оператор A из X в Y, что $V \subset \Omega_F$ и $F(x)=A(x)$ для $x \in V$.

Ш. Если F – локально линейное в точке $x_0 \in X$ отображение из нормированного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y, непрерывное в точке x_0, то F дифференцируемо в точке x_0, причем $dF(x_0)=A$, где A – линейный оператор, участвующий в определении локальной линейности.

Для доказательства достаточно заметить, что оператор A, совпадая на некоторой окрестности точки x_0 с непрерывным в x_0 отображением F, непрерывен в точке x_0 и, следовательно, непрерывен всюду на X.

Для дифференцируемых отображений имеет место теорема о дифференциале суперпозиции.

IУ. Пусть X — векторное пространство, Y — нормированное пространство, Z — отделимое локально выпуклое пространство, F — отображение из X в Y, а G — из Y в Z. Если F имеет дифференциал Гато на элементе $x_0 \in X$, а G — дифференциал Фреше в точке $y_0 = F(x_0)$, то суперпозиция $H = G \circ F$ имеет дифференциал Гато на элементе x_0, причем

$$dH(x_0) = dG(y_0)\, dF(x_0). \tag{I6}$$

В самом деле, пусть $dF(x_0) = A$, $dG(y_0) = B$. Положим $G_0 : y \mapsto G(y) - B(y)$ $(y \in Q_G)$. В силу предложения II(2.I) отображение $H_2 = B \circ F$ имеет дифференциал Гато $dH_2(x_0) = B\, dF(x_0) = BA$. Поэтому, так как $H = H_1 + H_2$ $(x \in Q_H)$, где $H_1 = G_0 \circ F$, вследствие предложения III(2.I) отображения H и H_1 имеют дифференциал Гато одновременно, причем, если указанные дифференциалы существуют, то $dH(x_0) = dH_1(x_0) + BA$. Таким образом, чтобы доказать (I6), достаточно убедиться в том, что отображение H_1 имеет дифференциал Гато, равный нулю, т.е., возвращаясь к первоначальной формулировке предложения, можно считать в ней, что $G = G_0$, и, значит, $dG(y_0) = dG_0(y_0) = \mathbf{0}$.

В этом предположении возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и непрерывную полунорму p на пространстве Z и в соответствии с (I5) найдем число $\delta > 0$ так, что

$$y \in Q_G, \quad p(G(y) - G(y_0)) \le \varepsilon \|y - y_0\| \qquad (y \in Y,\ \|y - y_0\| \le \delta). \tag{I7}$$

Далее, опираясь на существование дифференциала Гато у отображения F, для данного $v \in X$ подберем такое число $\eta > 0$, что $x_0 + tv \in Q_F$ при $t \in [-\eta, \eta]$ и

$$\left\| \frac{F(x_0 + tv) - F(x_0)}{t} - A(v) \right\| \le \varepsilon \quad (t \in [-\eta, \eta],\ t \ne 0). \tag{I8}$$

Так как

$$\| F(x_0 + tv) - F(x_0) \| \le \varepsilon |t| + \|A(v)\| \cdot |t| \qquad (t \in [-\eta, \eta]), \tag{I9}$$

то в случае, если $|t|$ достаточно мало, $\|F(x_0 + tv) - F(x_0)\| \le \delta$ и, стало быть, в (I7) можно принять $y = F(x_0 + tv)$. С учетом (I9) это дает

$$p(H(x_0 + tv) - H(x_0)) \le \varepsilon \|F(x_0 + tv) - F(x_0)\| \le \varepsilon |t| (\varepsilon + \|A(v)\|),$$

т.е. для указанных t

$$p\left(\frac{H(x_0 + tv) - H(x_0)}{t} \right) \le \varepsilon (\varepsilon + \|A(v)\|). \tag{20}$$

Ввиду произвольности p и ε последнее соотношение приводит к равенству

$$\lim_{t \to 0} \frac{H(x_0 + tv) - H(x_0)}{t} = \mathbf{0}. \tag{2I}$$

Таким образом, $H'_v(x_0) = \mathbf{0}$, так что нулевой оператор служит дифференциалом Гато отображения H, что и требовалось доказать.

Развивая доказанный факт, можно установить

У. Если в условиях предложения IУ X – нормированное пространство и отображение F дифференцируемо в точке x_0 в смысле Фреше, то и отображение H дифференцируемо в смысле Фреше.

В самом деле, учитывая результат предложения II, достаточно доказать указанный факт для введенных при доказательстве предложения IУ отображений H_1 и H_2, т.е. в терминах, относящихся к первоначальной формулировке, достаточно рассмотреть два частных случая данного предложения: во-первых, когда $G=B$ – линейный непрерывный оператор из Y в Z и, во-вторых, когда $dG(y_0)=0$.

Если E – ограниченное множество пространства X и ε – строго положительное число, то можно найти число $\eta>0$ так, что соотношение (18) будет удовлетворено одновременно для всех $v\in E$. Поэтому, если p, как и выше, – произвольная непрерывная полунорма на Z, то, поскольку ввиду непрерывности оператора B существует такое число M, что $p(B(y))\leq M\|y\|$ $(y\in Y)$, можно написать

$$p\left(\frac{B(F(x_0+tv)-B(F(x_0))}{t}-BA(v)\right)\leq M\varepsilon \qquad (v\in E),$$

откуда и вытекает, что в данном случае $(H(x_0+tv)-H(x_0))/t$ равномерно относительно $v\in E$ сходится к $BA(v)$. Остается заметить, что BA – непрерывный оператор.

Рассмотрим теперь второй случай: $dG(y_0)=0$. Вновь возвращаясь к доказательству предложения IУ, видим, что в условиях данного предложения вследствие оценки $\|A(v)\|\leq\|A\|\|v\|\leq K\|A\|$ $(v\in E, K=\sup\limits_{v\in E}\|v\|)$ неравенство $\|F(x_0+tv)-F(x_0)\|\leq\delta$ будет выполнено для всех достаточно малых $|t|$ и для всех $v\in E$. Следовательно, и (20) имеет место для всех $v\in E$. Заменяя в правой части (20) $\|A(v)\|$ на $K\|A\|$, получим тогда, что предельное соотношение (21) имеет место равномерно относительно $v\in E$ – второй случай также исчерпан.

2.4. В общем случае затруднительно высказать сколько-нибудь приемлемые условия дифференцируемости данного отображения. Однако в случае, когда пространства X и Y конечномерны, дело обстоит иначе.

Пусть сначала X – произвольное нормированное пространство, а Y – конечномерное (размерности m) отделимое локально выпуклое пространство. Выберем в Y базис $H=\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$ и обозначим через f_j $(j=1,2,\dots,m)$ координатные функционалы, т.е. функционалы, сопоставляющие элементу $y\in Y$ его j-ю координату (в базисе H).

Очевидно, что f_j – линейный функционал, а так как Y конечномерно, то он и непрерывен (см. I(УI.5.5)).

I. Пусть F – отображение из пространства X в пространство Y. Для дифференцируемости (в смысле Фреше) отображения F в точке $x_0 \in X$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были дифференцируемы координатные функции отображения F, т.е. функции $F_j = f_j \circ F$ $(j=1,2,\dots,m)$.

Необходимость этого условия вытекает из предложения У(2.3). Для доказательства достаточности введем отображения $H_j : x \mapsto F_j(x) h_j$ $(x \in Q_F;\ j=1,2,\dots,m)$. Ясно, что дифференцируемость функции F_j равносильна дифференцируемости (в той же точке) отображения H_j. Но $F(x) = H_1(x) + H_2(x) + \dots + H_m(x)$ $(x \in Q_F)$, и на основании предложения П(2.3) из дифференцируемости всех отображений H_j в точке x_0 вытекает дифференцируемость отображения F.

Заметим, что аналогичное утверждение можно доказать и для дифференцируемости в смысле Гато. При этом, понятно, предположение о нормированности пространства X излишне.

Будем теперь считать конечномерным (размерности n) и пространство X. Пусть $E=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис в X.

П. Пусть F – отображение из X в Y и V – окрестность точки $x_0 \in X$ такие, что $V \subset Q_F$ и для каждого $x \in V$ существует производная $F'_{e_k}(x)$ $(k=1,2,\dots,n)$. Если отображения $\lambda_k : x \mapsto F'_{e_k}(x)$ $(x \in V)$ $(k=1,2,\dots,n)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке данное отображение F дифференцируемо в смысле Фреше. Если λ_k непрерывны в каждой точке множества V^o, то отображение $x \mapsto dF(x)$ непрерывно на V^o.

Заметим прежде всего, что в силу предложения I можно доказывать этот факт для случая, когда $Y=\mathbb{R}$, т.е. когда F – вещественная функция.

Далее, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, т.е. определяют одну и ту же топологию и, следовательно, один и тот же запас ограниченных множеств, то дифференцируемость функции F не зависит от того, какой именно нормой снабдить пространство X. Поэтому можно считать, что данная норма на X определяется равенством $\|x\| = \max\limits_{k=1,2,\dots,n} |\xi_k|$, где $\{\xi_k\}$ – столбец координат элемента $x \in X$ в базисе E.

Пусть число $\delta > 0$ настолько мало, что шар $S_\delta(x_0)$ содержится в V. Возьмем $w \in X$ с $\|w\| \le \delta$ и обозначим координаты элемента w через $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Положим $w_k = \sum_{i=1}^{k} \zeta_i e_i$ $(k=0,1,\dots,n)$, так что, в частности, $w_0 = 0$, $w_n = w$. Понятно, что $\|w_k\| \le \|w\| \le \delta$, поэтому $x_0 + w_k \in S_\delta(x_0) \subset Q_F$

($\kappa=0,1,\dots,n$). Представим разность $F(x_0+w)-F(x_0)$ в виде

$$F(x_0+w)-F(x_0)=F(x_0+w_n)-F(x_0+w_0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(F(x_0+w_\kappa)-F(x_0+w_{\kappa-1})\right). \qquad (22)$$

Заметим, что если число t принадлежит замкнутому промежутку T_κ с концами 0 и ζ_κ, то $x_0+w_{\kappa-1}+te_\kappa\in S_\delta(x_0)$, так что функция $\varphi_\kappa: t\mapsto F(x_0+w_{\kappa-1}+te_\kappa)$ $(t\in T_\kappa)$ имеет по условию производную на отрезке T_κ: $\varphi_\kappa'(t)=F'_{e_\kappa}(x_0+w_{\kappa-1}+te_\kappa)(t\in T_\kappa)$. Поэтому в соответствии с формулой Лагранжа (см. следствие из теоремы 4(3.4)) можно указать такую точку $\tau_\kappa\in T_\kappa$, что

$$F(x_0+w_\kappa)-F(x_0+w_{\kappa-1})=F(x_0+w_{\kappa-1}+\zeta_\kappa e_\kappa)-F(x_0+w_{\kappa-1})=\varphi_\kappa(\zeta_\kappa)-\varphi_\kappa(0)=$$

$$=\varphi'(\tau_\kappa)\zeta_\kappa=F'_{e_\kappa}(x_0+w_{\kappa-1}+\tau_\kappa e_\kappa)\cdot\zeta_\kappa=\lambda_\kappa(x_\kappa)\zeta_\kappa \qquad (x_\kappa=x_0+w_{\kappa-1}+\tau_\kappa e_\kappa).$$

Подставляя это в (22), получим $F(x_0+w)-F(x_0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\lambda_\kappa(x_\kappa)\zeta_\kappa$. Заметим теперь, что формула $A(x)=\sum_{\kappa=1}^{n}\lambda_\kappa(x_0)\xi_\kappa$ $\left(x=\sum_{\kappa=1}^{n}\xi_\kappa e_\kappa\in X\right)$ определяет линейный и, стало быть, ввиду конечномерности пространства X, непрерывный функционал A на X. Поскольку для $w\in X$ с $\|w\|\le\delta$ имеем

$$F(x_0+w)-F(x_0)-A(w)=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\lambda_\kappa(x_\kappa)-\lambda_\kappa(x_0)\right)\zeta_\kappa \qquad (23)$$

и все x_κ ($\kappa=1,2,\dots,n$) входят в шар $S_\delta(x_0)$, то вследствие непрерывности функций λ_κ в точке x_0 множители $\lambda_\kappa(x_\kappa)-\lambda_\kappa(x_0)$ могут быть за счет достаточного уменьшения δ сделаны настолько малыми, что $\sum_{\kappa=1}^{n}|\lambda_\kappa(x_\kappa)-\lambda_\kappa(x_0)|\le\varepsilon$, где ε — произвольное заданное наперед строго положительное число. Если δ выбрано указанным образом и $\|w\|\le\delta$, из (23) следует, что $|F(x_0+w)-F(x_0)-A(w)|\le\varepsilon\|w\|$, а это ввиду произвольности ε и означает дифференцируемость функции F в точке x_0.

Заключительное утверждение предложения легко следует из результатов пункта 2.2.

Можно было доказать и более общий по форме факт. Рассмотрим нормированные пространства X, Y, отображение F из X в Y и два алгебраически дополнительных подпространства X_0, X_1 нормированного пространства X, т.е. такие подпространства, что $X=X_0+X_1$ и $X_0\cap X_1=\{0\}$. Если для каждого x из некоторой окрестности V элемента $x_0\in X$ существуют непрерывные частные дифференциалы Гато $d_{X_0}F(x)$, $d_{X_1}F(x)$ и отображения $x\longmapsto d_{X_0}F(x)$, $x\longmapsto d_{X_1}F(x)$ $(x\in V)$ непрерывны в точке x_0 как отображения из X в нормированное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$, тогда F дифференцируемо в смысле Фреше в точке x_0. Понятно, что можно рассматривать не два подпространства X_0, X_1, а любой конечный набор

$X_0, X_1, \ldots, X_\nu$ подпространств нормированного пространства X, что $X = X_0 + X_1 + \ldots + X_\nu$, $X_0 \cap X_1 \cap \ldots \cap X_\nu = \{0\}$.

§ 3. Дифференциалы высших порядков

Понятие дифференциала порядка $n = 1, 2, \ldots$ тесно связано с полилинейными операторами, поэтому первый пункт настоящего параграфа посвятим элементарным свойствам полилинейных операторов.

3.I. Рассмотрим произведение $\mathcal{X} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ векторных пространств $X_1, X_2, \ldots, X_n$, векторное пространство Y и отображение A из $\mathcal{X}$ в Y. Если для каждого i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и для каждого фиксированного набора $\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ $(x_k \in X_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq i)$ отображение $A_i : x \longmapsto A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ из X_i в Y линейно, тогда A называют полилинейным оператором из $\mathcal{X}$ в Y или, если хотят подчеркнуть число векторных пространств, говорят об n-линейном операторе A. В случае $n = 2$ говорят о билинейном операторе. Если все $X_1, X_2, \ldots, X_n$ совпадают с векторным пространством X, то полилинейный оператор A, определенный на $\mathcal{X}$, называют n-линейным оператором на X и совокупность таких операторов обозначают через $L_n(X, Y)$.

Если $Y = \mathbb{R}$ и все X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют $\mathbb{R}$ в качестве поля скаляров, то полилинейный оператор, переводящий $\mathcal{X}$ в $\mathbb{R}$, называют полилинейным (или n-линейным) функционалом на $\mathcal{X}$.

Используя определение полилинейного оператора, нетрудно показать, что множество $L_n(\mathcal{X}, Y)$ n-линейных операторов из $\mathcal{X}$ в Y представляет собой подпространство векторного пространства всех отображений из $\mathcal{X}$ в Y, следовательно, само является векторным пространством.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — нормированные пространства, а произведение $\mathcal{X}$ снабжено тихоновской топологией. Через $S^i_{r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будем обозначать шар в пространстве X_i с центром в нуле и радиуса r_i. Шары единичного радиуса обозначаются через S^i. Определим на векторном пространстве $L_n(\mathcal{X}, Y)$ действующее в $\overline{\mathbb{R}}$ отображение p, полагая $p : A \mapsto \sup_{x_i \in S^i} \|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|$. Очевидно, что $p(A_1 + A_2) \leq p(A_1) + p(A_2)$ и $p(\alpha A) = |\alpha|\, p(A)$ для любых $\alpha \in \mathbb{R}$; $A, A_1, A_2 \in L_n(\mathcal{X}, Y)$.

I. Для любых оператора $A \in L_n(\mathcal{X}, Y)$ и элемента $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$ имеет место неравенство

$$\|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| \leq p(A) \cdot \|x_1\| \cdot \|x_2\| \cdot \ldots \cdot \|x_n\|, \qquad (\mathrm{I})$$

называемое в дальнейшем **нормативным**.

Действительно, неравенство, очевидно, выполнено, если $p(A)=+\infty$, либо если среди x_i ($i=1,2,\dots,n$) есть нулевой элемент. Предположим, что $x_i\neq\mathbb{0}$ для всех $i=1,2,\dots,n$. Тогда $\frac{1}{\|x_i\|}x_i\in S^i$ и, исходя из определения, имеем

$$p(A)\geq\left\|A\left(\frac{1}{\|x_1\|}x_1,\frac{1}{\|x_2\|}x_2,\dots,\frac{1}{\|x_n\|}x_n\right)\right\|=\frac{1}{\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdot\ldots\cdot\|x_n\|}\|A(x_1,x_2,\dots,x_n)\|,$$

что и требовалось.

Заметим, что, как нетрудно понять, значение $p(A)$ ($A\in L_n(\mathcal{X},Y)$) равно $p(A)=\inf\{K\in\overline{R}:\|A(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leq K\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdot\ldots\cdot\|x_n\|,(x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathcal{X}\}$.

Из нормативного неравенства, в частности, следует, что если $p(A)=0$, то оператор A нулевой. Таким образом, отображение p обладает всеми свойствами нормы, кроме условия конечности.

Полилинейный оператор A называется **ограниченным**, если $p(A)$ конечно.

II. Для любого оператора $A\in L_n(\mathcal{X},Y)$ равносильны следующие утверждения: 1) оператор A непрерывен; 2) оператор A непрерывен в точке $\mathbb{0}\in\mathcal{X}$; 3) оператор A ограничен.

Доказательство проведем по такой схеме: 1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)$\Longrightarrow$1).

То, что из 1) следует 2), очевидно.

Пусть A непрерывен в нуле. Тогда можно указать такие $\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n>0$, что $\|A(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leq 1$, если только $\|x_i\|\leq\delta_i$ ($i=1,2,\dots,n$). Отсюда непосредственно следует, что для любых $x_i\in S^i$ имеет место соотношение $\|A(x_1,x_2,\dots,x_n)\|\leq 1/\delta_1\delta_2\dots\delta_n$, так что $p(A)$ конечно.

Доказательство того, что из 3) следует 1), проведем только для билинейного оператора A. Доказательство общего случая принципиальных отличий не имеет, однако запись его заняла бы много больший объем. Итак, предположим, что билинейный оператор $A\in L_2(X_1\times X_2,Y)$ ограничен, и рассмотрим какую-либо точку $(x_1^\circ,x_2^\circ)\in X_1\times X_2$. Так как

$$A(x_1,x_2)-A(x_1^\circ,x_2^\circ)=A(x_1-x_1^\circ,x_2-x_2^\circ)+A(x_1^\circ,x_2-x_2^\circ)+A(x_1-x_1^\circ,x_2^\circ)\quad((x_1,x_2)\in X_1\times X_2),$$

то из ограниченности A имеем $\|A(x_1-x_1^\circ,x_2-x_2^\circ)\|\leq K_1\|x_1-x_1^\circ\|\cdot\|x_2-x_2^\circ\|$,

$\|A(x_1^\circ,x_2-x_2^\circ)\|\leq K_2\|x_1^\circ\|\cdot\|x_2-x_2^\circ\|$, $\|A(x_1-x_1^\circ,x_2^\circ)\|\leq K_3\cdot\|x_1-x_1^\circ\|\cdot\|x_2^\circ\|$,

где $K_1,K_2,K_3\in R$, откуда и следует непрерывность A в точке (x_1°,x_2°).

Из доказанного предложения следует, что, во-первых, совокупность $\mathcal{L}_n(\mathcal{X},Y)$ непрерывных полилинейных операторов представляет собой подпространство векторного пространства $L_n(\mathcal{X},Y)$ и, во-вторых, что отображение p на операторах из $\mathcal{L}_n(\mathcal{X},Y)$ принимает конечные значения. Учитывая сказанное ранее, приходим к выводу, что отображение $A\longmapsto p(A)$ ($A\in\mathcal{L}_n(\mathcal{X},Y)$) – норма на $\mathcal{L}_n(\mathcal{X},Y)$, так что $\mathcal{L}_n(\mathcal{X},Y)$ с введенной нормой – нормированное пространство. Значение $p(A)$ на элементе $A\in\mathcal{L}_n(\mathfrak{X},Y)$ будем в дальнейшем обозначать стандартным символом $\|A\|$.

Отметим, что если полилинейный оператор A непрерывен, то непрерывен и каждый линейный оператор $A_i: x\mapsto A(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)\ (x\in X_i)$, где $x_k\ (k=1,2,\dots,n;\ k\neq i)$ – какие-либо фиксированные элементы из X_k соответственно.

Установим связь полилинейных операторов с линейными.

Ш. Пусть $X_1,X_2,\dots,X_n,Y$ – векторные пространства над одним полем скаляров $\mathbb{R}$. Векторное пространство $L_n(\mathfrak{X},Y)$ изоморфно векторному пространству $\widetilde{L}=L(X_1,L(X_2,\dots,L(X_n,Y)\dots)$ (n скобок). При этом можно указать такой изоморфизм $\varphi:\widetilde{L}\longrightarrow L_n(\mathfrak{X},Y)$, что если, кроме того, пространства $X_1,X_2,\dots,X_n,Y$ нормированные, то сужение изоморфизма φ на $\widetilde{\mathcal{L}}=\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,\dots,\mathcal{L}(X_n,Y)\dots)$ будет изоморфизмом нормированных пространств $\widetilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}_n(\mathfrak{X},Y)$.

Проведем доказательство для $n=2$. Пусть $A\in L_2(X_1\times X_2,Y)$. Фиксируем элемент $x_1\in X_1$ и рассмотрим линейный оператор $A_{x_1}: x_2\longmapsto A(x_1,x_2)(x_2\in X_2)$. Пусть $B_A: x_1\longmapsto A_{x_1}$ – отображение пространства X_1 в векторное пространство $L(X_2,Y)$. Нетрудно проверить, что отображение B_A линейно. Если, кроме того, пространства X_1,X_2,Y нормированные, то, очевидно, если $A\in\mathcal{L}_2(X_1\times X_2,Y)$, то $A_{x_1}\in\mathcal{L}(X_2,Y)$ и $\|A_{x_1}\|\leq\|A\|\cdot\|x_1\|$. В этом случае отображение B_A ограничено, ибо $\|B_A(x_1)\|\leq\|A_{x_1}\|\leq\|A\|\cdot\|x_1\|$. Из последнего неравенства следует, в частности, что $\|B_A\|\leq\|A\|$.

Сопоставляя указанным способом каждому оператору $A\in L_2(X_1\times X_2,Y)$ оператор $B_A\in L(X_1,L(X_2,Y))$, определим отображение φ пространства $L_2(X_1\times X_2,Y)$ в пространство $L(X_1,L(X_2,Y))$. Из определения φ ясно, что разным операторам из $L_2(X_1\times X_2,Y)$ отвечают разные операторы из $L(X_1,L(X_2,Y))$, так что φ взаимно однозначно. Отображение φ линейно, ибо для любых $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha A_1+\beta A_2)(x_1)(x_2)=B_{\alpha A_1+\beta A_2}(x_1)(x_2)=(\alpha A_1+\beta A_2)_{x_1}(x_2)=$$

$$=(\alpha A_1+\beta A_2)(x_1,x_2)=\alpha A_1(x_1,x_2)+\beta A_2(x_1,x_2)=\alpha(A_1)_{x_1}(x_2)+\beta(A_2)_{x_1}(x_2)=$$

$$=(\alpha B_{A_1}+\beta B_{A_2})(x_1)(x_2)=(\alpha\varphi(A_1)+\beta\varphi(A_2))(x_1,x_2).$$

Если пространства X_1,X_2,Y нормированные, то, поскольку $\|\varphi(A)\|=\|B_A\|\leq\leq\|A\|$, то φ переводит $\mathcal{L}_2(X_1\times X_2,Y)$ в $\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))$.

Покажем, что каждый оператор $B\in L(X_1,L(X_2,Y))$ оказывается образом некоторого оператора $A\in L_2(X_1\times X_2,Y)$ при отображении φ. Действительно, рассмотрим оператор $A:(x_1,x_2)\mapsto B(x_1)(x_2)$. Ясно, что $A\in L_2(X_1\times X_2,Y)$, причем $\varphi(A)(x_1)(x_2)=B_A(x_1)(x_2)=A_{x_1}(x_2)=A(x_1,x_2)=B(x_1)(x_2)$. Таким образом, отображение φ действует на все $L(X_1,L(X_2,Y))$ и указанное сопоставление оператору $B\in L(X_1,L(X_2,Y))$ оператора $A\in L(X_1\times X_2,Y)$ представляет собой обратное φ отображение φ^{-1}. Итак, φ – изоморфизм векторных пространств $L_2(X_1\times X_2,Y)$ и $L(X_1,L(X_2,Y))$.

Если X_1,X_2,Y – нормированные пространства, $A\in\mathcal{L}_2(X_1\times X_2,Y)$ и $B=\varphi(A)$, то $\|A(x_1,x_2)\|=\|B(x_1)(x_2)\|\leq\|B(x_1)\|\cdot\|x_2\|\leq\|B\|\cdot\|x_1\|\cdot\|x_2\|$, так что $\|A\|\leq\|\varphi(A)\|$, откуда с учетом установленного ранее неравенства $\|\varphi(A)\|\leq\|A\|$ следует равенство $\|\varphi(A)\|=\|A\|$. Итак, φ в этом случае служит изоморфизмом нормированных пространств $\mathcal{L}_2(X_1\times X_2,Y)$ и $\mathcal{L}(X_1,\mathcal{L}(X_2,Y))$.

Для случая $n=2$ предложение полностью доказано. Обоснование результата предложения для любого натурального n может быть проведено по индукции, причем индуктивный переход осуществляется по схеме, аналогичной рассмотренному случаю, поэтому подробное доказательство общего случая мы оставим читателю.

Заметим, что, как нетрудно понять, если $X_1,X_2,\dots,X_n,Y$ – нормированные пространства и одно из векторных пространств $L_n(X_1\times\ldots\times X_n,Y)$, $L(X_1,L(X_2,\dots,L(X_n,Y)\dots))$ состоит из непрерывных операторов, то другое также будет состоять из непрерывных операторов.

Укажем пример полилинейного оператора. Рассмотрим векторные пространства X,Y и оператор $A\in L_n(X,Y)$. Сопоставим оператору A оператор $S(A):X^n\longrightarrow Y$, определенный соотношением $S(A)(x_1,x_2,\dots,x_n)=$ $=\frac{1}{n!}\sum A(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})$, где $i_1,i_2,\dots,i_n$ – перестановка множества $\{1,2,\dots,n\}$ и суммирование ведется по всевозможным таким перестановкам. Понятно, что $S(A)$ – симметричный n-линейный оператор, т.е. он обладает свойством принимать одно и то же значение на каждом элементе $(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})\in X^n$, где $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ – перестановка $\{1,2,\dots,n\}$. Отметим, что S – проектор на векторном пространстве $L_n(X,Y)$, и порожденное им подпространство состоит из симметричных n-линейных операторов на X.

Обсудим специфику n-линейных операторов на X в случае, когда X – конечномерное векторное пространство. Заметим прежде всего, что в этом случае, как нетрудно понять, все операторы из $L(X,L(X,\dots$ $\dots,L(X,Y)\dots)$ (n скобок) непрерывны, а отсюда можно заключить, что каждый полилинейный оператор на конечномерном векторном пространстве непрерывен (см. предложение Ш).

Аналогично линейному полилинейный оператор $A\in L_n(X,Y)$, заданный на конечномерном векторном пространстве X, определяется некоторой "многомерной" матрицей. Предположим, что X имеет размерность ν и фиксируем в X базис $E=\{e_1,e_2,\dots,e_\nu\}$. Полилинейный оператор $A\in L_n(X,Y)$ определяет отображение $\mathcal{A}\in Y^{S^n}$, где $S=\{1,2,\dots,\nu\}$, по правилу

$$\mathcal{A}:(i_1,i_2,\dots,i_n)\longmapsto A(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n}) \quad (1\le i_\kappa\le\nu;\ \kappa=1,2,\dots,n).$$

Обратно, если $\mathcal{A}\in Y^{S^n}$, тогда отображение

$$A:(x_1,x_2,\dots,x_n)\mapsto \sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_n\le\nu}\mathcal{A}(i_1,i_2,\dots,i_n)\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_n^{i_n}, \tag{2}$$

где $x_\kappa=\sum_{j=1}^{\nu}x_j^{i_j}e_j$, полилинейно, и, кроме того, $A(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})=\mathcal{A}(i_1,i_2,\dots,i_n)$. В этом смысле n-линейный оператор A можно отождествить с отображением $\mathcal{A}\in Y^{S^n}$, определенным согласно указанному выше правилу.

Если Y также конечномерно и $H=\{h_1,h_2,\dots,h_m\}$ – базис в Y, тогда полилинейный оператор A можно отождествить с отображением $\mathcal{A}\in \mathbb{R}^{S^n\times T}$ ($S=\{1,2,\dots,\nu\}$, $T=\{1,2,\dots,m\}$) по аналогичному (2) правилу

$$[A(x_1,x_2,\dots,x_n)]_j=\sum_{1\le i_1,i_2,\dots,i_n\le\nu}\mathcal{A}(i_1,i_2,\dots,i_n,j)\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\dots\xi_n^{i_n}, \tag{3}$$

где $[y]_j$ $(j=1,2,\dots,m)$ – координаты вектора $y\in Y$ в разложении по базису H и $\mathcal{A}(i_1,i_2,\dots,i_n,j)=[A(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})]_j$.

3.2. Вернемся к ситуации, описанной в 2.I: дано векторное пространство X над полем $\mathbb{R}$, отделимое локально выпуклое пространство Y (также над полем $\mathbb{R}$) и отображение F из X в Y. Возьмем элемент $x_0\in\Omega_F$ и конечное семейство $v_1,v_2,\dots,v_n$ из X. Для данного $\delta>0$ обозначим через E_δ^κ совокупность всех элементов из X, представимых в виде $x_0+\sum_{j=\kappa+1}^{n}t_jv_j$ $(\kappa=0,1,\dots,n)$ с $t_j\in(-\delta,\delta)$ $(j=1,2,\dots,n)$ и предположим, что для достаточно малого δ множество E_δ^0 содержится в Ω_F.

Положим $\lambda_0:x\longmapsto F(x)$ $(x\in E_\delta^0)$. Допустим, что для некоторого целого m $(m=0,1,\dots,n-1)$ при каждом целом κ $(\kappa=0,1,\dots,m)$ на множестве E_δ^κ задано действующее в Y отображение λ_κ, причем для любого $\kappa=0,1,\dots,m-1$ отображение λ_κ имеет производную по направлению $v_{\kappa+1}$ в каждой точке множества $E_\delta^{\kappa+1}$, и имеют место соотношения

$$\lambda_{\kappa+1}(x)=(\lambda_\kappa)'_{v_{\kappa+1}}(x) \quad (\kappa=0,1,\dots,m-1;\ x\in E_\delta^{\kappa+1}). \tag{4}$$

Пусть отображение λ_m имеет производную по направлению v_{m+1} в каждой точке множества E_δ^{m+1}. Определим на множестве E_δ^{m+1} отображение λ_{m+1}, полагая $\lambda_{m+1}(x)=(\lambda_m)'_{v_{m+1}}(x)$ для $x\in E_\delta^{m+1}$. Тем самым, принятые допущения позволяют по индукции определить для любого $m=0,1,\dots,n$ семейство отображений $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ таким образом, что отображение λ_κ ($\kappa = 0, 1, \ldots, m$) определено на множестве E_δ^κ и имеет место соотношение (4) при $\kappa = 0, 1, \ldots, m$.

При $m = n$ значение $\lambda_n(x_0)$ отображения λ_n в точке x_0 называют *производной порядка n отображения F в точке x_0 по направлениям $v_1, v_2, \ldots, v_n$* и обозначают через $F^{(n)}_{v_1 v_2 \ldots v_n}(x_0)$. Таким образом,

$$F^{(n)}_{v_1 v_2 \ldots v_n}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F^{(n-1)}_{v_1 v_2 \ldots v_{n-1}}(x_0 + t v_n) - F^{(n-1)}_{v_1 v_2 \ldots v_{n-1}}(x_0)}{t}.$$

В случае, если $v_1 = v_2 = \ldots = v_n = v$, производную порядка n по направлениям $v_1, v_2, \ldots, v_n$ обозначают через $F^{(n)}_{v^n}(x_0)$. Производную второго порядка по направлениям $u, v \in X$ обозначают через $F''_{uv}(x_0)$ и, руководствуясь соображениями удобства, аналогичные обозначения используют для производных более высоких порядков.

В случае, когда $X = \mathbb{R}^\kappa$, производную порядка n по направлениям $e_{\xi_1}, e_{\xi_2}, \ldots, e_{\xi_n}$ векторов канонического базиса, называют частной производной отображения F в точке x_0 порядка n (по переменным $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$) и обозначают через $\frac{\partial^n F}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \ldots \partial \xi_n}(x_0)$. В конкретных ситуациях используют и другие обозначения частных производных порядка n.

Пусть F – отображение из векторного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y. Возьмем элементы $x_0 \in \Omega_F$, $v \in X$ и скаляры $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ так, чтобы отрезок $\{x_0 + tv : t \in [a, b]\}$ содержался в Ω_F. Определим на промежутке $[a, b]$ отображение $\varphi : t \mapsto F(x_0 + tv)$ ($t \in [a, b]$).

I. Для существования производной $\varphi^{(n)}(t)$ в точке $t \in [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv)$, причем в случае существования

$$\varphi^{(n)}(t) = F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv). \tag{5}$$

Действительно, если $n = 1$, тогда

$$\varphi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi(t+\tau) - \varphi(t)}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(x_0 + tv + \tau v) - F(x_0 + tv)}{\tau} = F'_v(x_0 + tv),$$

причем, ясно, существование $\varphi'(t)$ равносильно существованию $F'_v(x_0 + tv)$.

Допустим, что результат предложения установлен для некоторого натурального n. Тогда, поскольку

$$\frac{\varphi^{(n)}(t+\tau) - \varphi^{(n)}(t)}{\tau} = \frac{F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv + \tau v) - F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv)}{\tau},$$

то производные

$$\varphi^{(n+1)}(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\varphi^{(n)}(t+\tau) - \varphi^{(n)}(t)}{\tau}, \quad F^{(n+1)}_{v^{n+1}}(x_0 + tv) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv + \tau v) - F^{(n)}_{v^n}(x_0 + tv)}{\tau}$$

существуют или нет одновременно, причем в случае существования должно быть $\varphi^{(n+1)}(t)=F^{(n+1)}_{v^{n+1}}(x_0+tv)$. Доказательство завершается по индукции.

Основным аппаратом исследования отображения, использующим производные высших порядков, служит формула Тейлора. Конечно, формула (32) из § I, примененная к определенному выше отображению φ, может служить и для анализа отображения F, однако бывает удобно использовать формулу Тейлора, записанную в терминах отображения F.

ТЕОРЕМА I (3.7). Пусть F — отображение топологического векторного пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y и x_0, x_1 — такие точки из Ω_F, что отрезок $K=\{x_t=x_0+t(x_1-x_0): t\in T=[0,1]\}$ содержится в $\overset{o}{\Omega}_F$. Если при некотором натуральном n существует в основном на K производная $F^{(n)}_{v^n}(x)$ $(v=x_1-x_0)$ и для любого $x\in K$ существует производная $F^{(n-1)}_{v^{n-1}}(x)$, причем отображение $x\longmapsto F^{(n-1)}_{v^{n-1}}(x)$ $(x\in K)$ непрерывно на K, то имеет место равенство

$$F(x_1)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}F^{(k)}_{v^k}(x_0)+\frac{1}{(n-1)}\int_0^1(1-s)^{n-1}F^{(n)}_{v^n}(x_0+sv)\,ds, \quad (6)$$

называемое формулой Тейлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на промежутке T отображение $\varphi: t\longmapsto F(x_0+tv)$ $(t\in T)$. Из условий теоремы, с учетом предложения I, следует, что в точках $t\in T$ существует производная $\varphi^{(n-1)}(t)$, при этом отображение $t\longmapsto\varphi^{(n-1)}(t)$ непрерывно в каждой точке промежутка T. Кроме того, в основном на T существует производная порядка n отображения φ. В силу теоремы 2(I.7) имеет место соотношение (32) из § I, которое для функции $\varphi(t)=F(x_0+tv)$ и точек $t_0=0$ и $t_1=1$ примет вид (6), что и требовалось.

В доказанной теореме отклонение значений $F(x)$ от значений полинома Тейлора $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}F^{(k)}_{v^k}(x_0)$ функции F, называемое остаточным членом, было записано в интегральной форме. Используя оценку (33) из § I, укажем (в условиях теоремы) оценку остаточного члена формулы Тейлора:

$$p\Big(F(x_1)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}F^{(k)}_{v^k}(x_0)\Big)\le\frac{1}{n!}\sup\Big\{p\big(F^{(n)}_{v^n}(x_0+tv)\big): x_0+tv\in\Omega_{F^{(n)}_{v^n}},\ t\in T\Big\}, \quad (7)$$

где p — любая непрерывная полунорма на Y.

Из соотношения (34), § I, предполагая существование производной $F^{(n)}_{v^n}(x_0)$, можно дать такую оценку остатка:

$$p\Big(F(x_1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}F^{(k)}_{v^k}(x_0)\Big)\le\frac{1}{n}\sup\Big\{p\big(F^{(n)}_{v^n}(x_0+tv)-F^{(n)}_{v^n}(x_0)\big): x+tv\in\Omega_{F^{(n)}_{v^n}},\ t\in T\Big\}. \quad (8)$$

Из (7), в частности, следует, что в условиях теоремы при $n=1$

для любой непрерывной полунормы p на Y имеет место соотношение

$$p(F(x_1)-F(x_0))\leq \sup\{p(F_v'(x_0+tv)) : x_0+tv\in Q_{F_v'},\ t\in T\}. \qquad (9)$$

Рассматривая в (9) в качестве F отображение $F-A$, где A – линейный непрерывный оператор из X в Y, получим такую оценку:

$$p(F(x)-F(x_0)-A(x-x_0))\leq \sup\{p(F_v'(x_0+tv)-A(v)) : x_0+tv\in Q_{F_v'},\ t\in T\}, \qquad (10)$$

где p – какая-либо непрерывная полунорма на Y .

В определении производной порядка n по направлениям $v_1,v_2,\dots,v_n$ несомненно существен порядок следования векторов $v_1,v_2,\dots,v_n$. В общем случае нельзя утверждать, что производные по направлениям $v_1,v_2,\dots,v_n$ и $v_{i_1},v_{i_2},\dots,v_{i_n}$, где $\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ – перестановка множества индексов $\{1,2,\dots,n\}$, совпадают. Однако при некоторых условиях такое равенство может быть получено.

ТЕОРЕМА 2 (3.7). Пусть X – отделимое топологическое векторное пространство, Y – отделимое локально выпуклое пространство. Рассмотрим отображение $F: X\longrightarrow Y$, точку $x_0\in Q_F$ и векторы $u,v\in X$. Предположим, что найдутся такие $\delta_1,\delta_2>0$, что в точках $x_0+su+tv$, где $s\in[0,\delta_1]=T_1, t\in[0,\delta_2]=T_2$ существуют $F''_{uv}(x_0+su+tv)$, $F''_{vu}(x_0+su+tv)$ и, кроме того, производные $F''_{uv}(x)$, $F''_{vu}(x)$ непрерывны в точке x_0 как отображения из X в Y . Тогда имеет место равенство

$$F''_{uv}(x_0)=F''_{vu}(x_0). \qquad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $Y=\mathbb{R}$. При каждом $t\in T_2$ определим на отрезке T_1 функцию $\varphi_t : s\mapsto F(x_0+su+tv)-F(x_0+su)$ $(s\in T_1)$. Из условий теоремы легко следует, что функция φ непрерывна на T_1 и в каждой точке $s\in T_1$ существует $\varphi_t'(s)$, при этом

$$\varphi_t'(s)=F_u'(x_0+su+tv)-F_u'(x_0+su). \qquad (12)$$

В силу теоремы Лагранжа (см. следствие из теоремы 4(3.4)), на отрезке $(0,s)$ существует такая точка σ_s , что $\varphi_t(s)-\varphi_t(0)=\varphi_t'(\sigma_s)\cdot s$.

Рассмотрим на отрезке T_2 функцию $\Phi : t\mapsto F_u'(x_0+\sigma_s u+tv)$ и заметим, что согласно (12) $\Phi(t)-\Phi(0)=\varphi_t'(\sigma_s)$. Условия теоремы позволяют применить теорему Лагранжа к функции Φ на отрезке $[0,t]$, согласно которой существует такая точка $\tau_t\in(0,t)$, что $\Phi(t)-\Phi(0)=\Phi'(\tau_t)\cdot t$.

Заметив, что $\Phi'(\tau_t)=F''_{uv}(x_0+\sigma_s u+\tau_t v)$, из определений функций φ_t,Φ получаем, что $\varphi_t(s)-\varphi_t(0)=\varphi_t'(\sigma_s)(s)=[\Phi(t)-\Phi(0)]s=\Phi'(\tau_t)st= =F''_{uv}(x_0+\sigma_s u+\tau_t v)st$.

Если мы сначала вместо функции φ_t рассмотрим функцию $\psi_s : t\longmapsto F(x_0+su+tv)-F(x+tv)(t\in T_2)$ и проведем аналогичные рассуждения, то в итоге получим $\psi_s(t)-\psi_s(0)=F''_{vu}(x_0+\tilde{\sigma}_s u+\tilde{\tau}_t v)st$, где $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\tau}_t$ — возникшие вследствие применения теоремы Лагранжа числа из промежутков $(0,s)$, $(0,t)$ соответственно. Поскольку

$$\varphi_t(s)-\varphi_t(0)=F(x_0+su+tv)-F(x_0+su)-F(x_0+tv)+F(x_0)=\psi_s(t)-\psi_s(0),$$

то $F''_{uv}(x_0+\sigma_s u+\tau_t v)=F''_{vu}(x_0+\tilde{\sigma}_s u+\tilde{\tau}_t v)$.

Пусть ε — произвольное строго положительное число. Поскольку производные $F''_{uv}(x)$, $F''_{vu}(x)$ непрерывны в точке x_0, найдется такое $\delta>0$, что для точек s,t, у которых $|s|,|t|<\delta$, имеют место соотношения

$$|F''_{uv}(x_0+su+tv)-F''_{uv}(x_0)|<\varepsilon/2, \quad |F''_{vu}(x_0+su+tv)-F''_{vu}(x_0)|<\varepsilon/2.$$

Так как $\sigma_s, \tilde{\sigma}_s \in (0,s)$, $\tilde{\tau}_t, \tau_t \in (0,t)$, то для тех же s,t выполнено

$$|F''_{uv}(x_0)-F''_{vu}(x_0)|\le|F''_{uv}(x_0)-F''_{uv}(x_0+\sigma_s u+\tau_t v)|+|F''_{vu}(x_0+\tilde{\sigma}_s u+\tilde{\tau}_t v)-F''_{vu}(x_0)|<\varepsilon,$$

что возможно лишь при $F''_{uv}(x_0)=F''_{vu}(x_0)$.

Пусть теперь Y — произвольное отделимое локально выпуклое пространство. Возьмем какой-либо ненулевой линейный непрерывный функционал f на Y и рассмотрим отображение $G=f\circ F$ из X в $\mathbb{R}$. Легко убедиться в том, что если существуют $F''_{uv}(x)$, $F''_{vu}(x)$ в некоторой точке $x\in X$, то существуют и производные $G''_{uv}(x)$, $G''_{vu}(x)$, причем $G''_{uv}(x)=f(F''_{uv}(x))$, $G''_{vu}(x)=f(F''_{vu}(x))$. Из первой части доказательства следует, что если выполнены условия теоремы, то $f(F''_{uv}(x_0))=f(F''_{vu}(x_0))$, что в силу теоремы о достаточном числе функционалов в отделимом локально выпуклом пространстве возможно лишь при $F''_{uv}(x_0)=F''_{vu}(x_0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Допустим, что существуют производные $F^{(n)}_{u_1u_2\dots u_n}(x_0+\sum_{k=1}^{n}t_k u_k)$ и $F^{(n)}_{u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_n}}(x_0+\sum_{k=1}^{n}t_k u_k)$ отображения $F:X\to Y$ в точках множества $T=\{x_0+\sum_{k=1}^{n}t_k u_k : t_k\in[0,\delta], \delta>0\}$ по направлениям соответственно $u_1,u_2,\dots,u_n$ и $u_{i_1},u_{i_2},\dots,u_{i_n}$, где $i_1,i_2,\dots,i_n$ — перестановка множества $\{1,2,\dots,n\}$. Если, кроме того, отображения $x\mapsto F^{(n)}_{u_1u_2\dots u_n}(x)$, $x\mapsto F^{(n)}_{u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_n}}(x)$ непрерывны в точке x_0, то имеет место равенство

$$F^{(n)}_{u_1u_2\dots u_n}(x_0)=F^{(n)}_{u_{i_1}u_{i_2}\dots u_{i_n}}(x_0).$$

В справедливости замечания нетрудно убедиться, используя доказанную теорему и тот факт, что всякую перестановку можно представить в виде суперпозиции конечного числа элементарных перестановок+), т.е. таких, которые "меняют местами" какие-то два элемента, оставляя другие на месте.

3.3. Говоря о производных высших порядков, мы не предъявляли никаких требований к зависимости их от направлений. В этом плане

+) Транспозиций

обычно особо выделяют ситуации, в которых производные до порядка n в данной точке представляют собой полилинейные операторы по направлениям, участвующим в их образовании. Находясь на таком пути, можно индуктивно определить дифференциал Гато порядка n как соответствующий n-линейный оператор. Мы, однако, поступим несколько иначе, хотя, конечно, придем впоследствии к указанному свойству дифференциала Гато.

Рассмотрим векторное пространство X, локально выпуклое отделимое пространство Y и отображение F из X в Y. Допустим, что отображение F имеет дифференциал Гато в точках некоторого множества $E \subset \Omega_F$, звездного относительно точки $x_0 \in \Omega_F$. Тогда можно говорить о дифференциале Гато отображения $\Phi : x \mapsto dF(x)\ (x \in E)$, действующего из X в векторное пространство линейных операторов $L(X,Y)$, позаботившись предварительно о топологии на $L(X,Y)$. Снабдим $L(X,Y)$ сильной операторной топологией, т.е. топологией, индуцированной на $L(X,Y)$ топологией слабой равномерности на Y^X (эту топологию называют также топологией равномерной сходимости на совокупности всех конечных подмножеств в X). В этой ситуации под дифференциалом Гато $d^2F(x_0)$ порядка 2 в точке x_0 понимают дифференциал Гато отображения Φ, т.е. $d^2F(x_0) = d\Phi(x_0)$. Таким образом, дифференциал $d^2F(x_0)$ — это, по определению, линейный оператор, действующий из из X в $L(X,Y)$. Но, как было установлено в 3.I, векторное пространство $L(X, L(X,Y))$ изоморфно векторному пространству $L_2(X,Y)$ билинейных операторов из X в Y и, учитывая этот изоморфизм, мы нередко будем рассматривать $d^2F(x_0)$ как билинейный оператор из X в Y.

Так как при фиксированном $u \in X$ отображение $\Psi_1 : x \mapsto dF(x)(u)$ есть суперпозиция отображения $x \mapsto dF(x)$ и линейного оператора $\Phi(x) \longmapsto \Phi(x)(u)$ $(x \in X)$, то, используя предложение IУ(I.I), имеем $d\Psi_1(x_0)(v) = d^2F(x_0)(u)(v) = d^2F(x_0)(u,v)$.

В силу выбора топологии на $L(X,Y)$ соотношение

$$d^2F(x_0)(v) = \lim_{t\to 0} \frac{dF(x_0+tv) - dF(x_0)}{t}$$

означает, что для любого $u \in X$ должно быть

$$d^2F(x_0)(u,v) = \lim_{t\to 0} \frac{dF(x_0+tv)(u) - dF(x_0)(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{F_u'(x_0+tv) - F_u'(x_0)}{t} = F_{uv}''(x_0).$$

Таким образом,

$$d^2F(x_0)(u,v) = F_{uv}''(x_0), \tag{I3}$$

так что если существует $d^2F(x_0)$, то существует производная $F''_{uv}(x_0)$ по любым направлениям $u,v\in X$ и имеет место соотношение (I3).

Определим индуктивно дифференциал Гато порядка $n=3,4,\ldots$. Допустим, что для некоторого натурального n при каждом $m=1,2,\ldots,n-1$ определен дифференциал Гато $d^mF(x)$ порядка m на элементе x (удовлетворяющем необходимым требованиям), как m-линейный оператор из X в Y, обладающий свойством

$$d^mF(x)(u_1,u_2,\ldots,u_m)=F^{(m)}_{u_1u_2\ldots u_m}(x)$$

для любых направлений $u_1,u_2,\ldots,u_m\in X$. Снабдим векторное пространство $L_{n-1}(X,Y)$ топологией равномерной сходимости на совокупности всех конечных подмножеств множества X^{n-1}. Предположим, что на элементах x некоторого звездного относительно x_0 множества в X существует дифференциал Гато $d^{n-1}F(x)$. Если в этой ситуации существует дифференциал Гато отображения $x\mapsto d^{n-1}F(x)$ в точке x_0, его называют д и ф ф е р е н ц и а л о м Г а т о п о р я д к а n о т о б р а ж е н и я F в т о ч к е x_0 и обозначают через $d^nF(x_0)$. Таким образом, по индукции определено понятие дифференциала Гато[+] $d^nF(x_0)$ в точке x_0 любого порядка $n=1,2,\ldots$.

Проводя обоснования, аналогичные тем, которые были использованы для соответствующих фактов о дифференциале Гато второго порядка, можно показать, что для любых $v_1,v_2,\ldots,v_n\in X$

$$d\Psi(x_0)(v)=d^{n+1}F(x_0)(v_1,v_2,\ldots,v_n,v), \tag{I4}$$

где $\Psi\colon x\longmapsto d^nF(x)(v_1,v_2,\ldots,v_n)$. Если существует $d^nF(x_0)$, то F имеет в точке x_0 производные порядка n по любым направлениям и

$$d^nF(x_0)(v_1,v_2,\ldots,v_n)=F^{(n)}_{v_1v_2\ldots v_n}(x_0). \tag{I5}$$

Значение отображения $d^nF(x_0)$ на элементах $v_1=v_2=\ldots=v_n=v$ будем обозначать через $d^nF(x_0)(v^n)$.

Основываясь на связи дифференциалов высших порядков с производными высших порядков, можно записать формулу Тейлора в терминах дифференциалов.

I. Пусть F – отображение из локально выпуклого пространства X в отделимое локально выпуклое пространство Y и x_0 – точка из Q_F. Допустим, что в точках некоторой выпуклой окрестности U точки

[+]) Отметим, что, как и при $n=1$, вместо термина "дифференциал" иногда используют термин "производная" (в смысле Гато порядка n в точке x_0) и обозначение $F^{(n)}(x_0)$ вместо $d^nF(x_0)$.

$x_0 \in \Omega_F$ отображение F имеет дифференциалы до порядка n и отображение $x \mapsto d^{n-1}F(x)$ непрерывно на U. Тогда для таких элементов $v \in X$, что $x_0+v \in U$, имеет место равенство

$$F(x_0+v)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^kF(x_0)(v^k)+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1(1-s)^{n-1}d^nF(x_0+sv)(v^n)ds. \quad (16)$$

Для доказательства следует только заметить, что условия предложения гарантируют выполнение условий теоремы I и что вследствие (I5) соотношение (6) непосредственно влечет (I3).

Запишем в терминах дифференциалов оценки, аналогичные оценкам (7) – (I0). Допустим, что выполнены условия предложения I. Тогда для любой непрерывной полунормы p на Y

$$p\Big(F(x_0+v)-F(x_0)-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}d^kF(x_0)(v^k)\Big)\le\frac{1}{n!}\sup_{t\in[0,1]}p\big(d^nF(x_0+tv)(v^n)\big), \quad (17)$$

$$p\Big(F(x_0+v)-F(x_0)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^kF(x_0)(v^k)\Big)\le\frac{1}{n!}\sup_{t\in[0,1]}p\Big(\big(d^nF(x_0+tv)-d^nF(x_0)\big)(v^n)\Big), \quad (18)$$

$$p\big(F(x_0+v)-F(x_0)\big)\le\sup_{t\in[0,1]}p\big(dF(x_0+tv)(v)\big). \quad (19)$$

Если A – линейный непрерывный оператор из X в Y, то

$$p\big(F(x_0+v)-F(x_0)-A(v)\big)\le\sup_{t\in[0,1]}p\big(dF(x_0+tv)(v)-A(v)\big). \quad (20)$$

Если, в частности, X, Y – нормированные пространства, то из (I9), (20) соответственно следуют оценки

$$\|F(x_0+v)-F(x_0)\|\le\sup_{t\in[0,1]}\|dF(x_0+tv)(v)\|\le\|v\|\sup_{t\in[0,1]}\|dF(x_0+tv)\|, \quad (21)$$

$$\|F(x_0+v)-F(x_0)-A(v)\|\le\sup_{t\in[0,1]}\|dF(x_0+tv)(v)-A(v)\|\le\|v\|\sup_{t\in[0,1]}\|dF(x_0+tv)-A\|. \quad (22)$$

П. Пусть X – топологическое векторное пространство, Y – отделимое локально выпуклое пространство. Предположим, что для точек x некоторой окрестности U точки $x_0 \in \Omega_F$ существует дифференциал $d^nF(x)$ и отображения $x \longmapsto d^kF(x)$ при каждом $k=2,3,\dots,n$ непрерывны в точке x_0. Тогда $d^nF(x_0)$ – симметричный полилинейный оператор.

Результат предложения вытекает из теоремы 2 и замечания к ней.

3.4. Обсудим в некоторых частных случаях отдельные моменты, связанные с дифференциалом Гато.

Пусть сначала $X=\mathbb{R}$, а Y – отделимое локально выпуклое пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $F: X \longrightarrow Y$, имеющее в точке $x_0 \in X$ дифференциал Гато порядка n. Поскольку n-линейный оператор $d^nF(x_0)$ в этом случае действует следующим образом (см.3.I):

$$d^nF(x_0)(v_1,v_2,\ldots,v_n)=v_1v_2\ldots v_n\cdot a \qquad (v_1,v_2,\ldots,v_n\in X),$$
где $a=F(1,1,\ldots,1)\in Y$, то дифференциал $d^nF(x_0)$ в случае $X=\mathbb{R}$ можно трактовать как элемент пространства Y.

Предположим, что X,Y конечномерны и имеют размерности ν,μ соответственно. Фиксируем базисы $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_\nu\}$ в X и $H=\{h_1,h_2,\ldots,h_\mu\}$ в Y. Пусть $F:X\to Y$ – отображение, имеющее в точке x_0 дифференциал Гато порядка $n=1,2,\ldots$. В соответствии со сказанным в 3.I оператор $d^nF(x_0)$ определяется некоторым отображением $\mathcal{A}\in\mathbb{R}^{S^n\times T}$, где $S=\{1,2,\ldots,\nu\}$, $T=\{1,2,\ldots,\mu\}$ по правилу (см. формулу (3)):

$$[d^nF(x_0)(v_1,v_2,\ldots,v_n)]_j=\sum_{1\le i_1,i_2,\ldots,i_n\le\nu} v_1^{(i_1)}v_2^{(i_2)}\ldots v_n^{(i_n)}\cdot a_{i_1i_2\ldots i_nj} \qquad (1\le j\le\mu), \tag{23}$$

где $a_{i_1i_2\ldots i_nj}=\mathcal{A}(i_1,i_2,\ldots,i_n,j)=[d^nF(x_0)(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})]_j$ – координата с номером j в разложении вектора $d^n(x_0)(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n})$ по базису H, и $[v_k]_E=(v_k^{(1)},v_k^{(2)},\ldots,v_k^{(\nu)})$ – координаты вектора v_k в разложении по базису E.

Пусть $X=\mathbb{R}^\nu$, $Y=\mathbb{R}^\mu$. Возьмем, как обычно, в качестве базисов в X,Y канонические базисы (см. 2.2). Рассмотрим отображение $F:X\to Y$. Если в точке $x_0\in X$ существует производная $F^{(n)}_{e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_n}}(x_0)$ $(1\le i_1,i_2,\ldots,i_n\le\nu)$, ее называют частной производной порядка n (или n-го порядка) по координатам с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_n$. Частную производную по $i_1,i_2,\ldots,i_n$ обозначают через $F^{(n)}_{i_1i_2\ldots i_n}(x_0)$ или через $\frac{\partial^nF}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}}(x_0)$.

Как следует из соотношения (15), если существует $d^nF(x_0)$, тогда существуют все частные производные до порядка n отображения F в точке x_0, при этом

$$F^{(n)}_{i_1i_2\ldots i_n}(x_0)=d^nF(x_0)(e_{i_1},e_{i_2},\ldots,e_{i_n}) \qquad (1\le i_1,i_2,\ldots,i_n\le\nu). \tag{24}$$

Учитывая еще и соотношение (23), приходим в рассматриваемом случае к соотношению

$$d^nF(x_0)(v_1,v_2,\ldots,v_n)=\sum_{1\le i_1,i_2,\ldots,i_n\le\nu} F^{(n)}_{i_1i_2\ldots i_n}(x_0)\,v_1^{(i_1)}v_2^{(i_2)}\ldots v_n^{(i_n)}, \tag{25}$$

где $v_1,v_2,\ldots,v_n\in X$ и $v_k^{(i_k)}$ – координата с номером i_k вектора v_k $(k=1,2,\ldots,n;\ 1\le i_k\le n)$.

Напрасно думать, что из существования всех частных производных порядка n в точке x_0 следует существование дифференциала $d^nF(x_0)$.

3.5. Если на X, как и на Y, задана топология, можно в определении дифференциала порядка $n=1,2,\ldots$ рассматривать отличные от используемой ранее топологии на пространстве $L(X,Y)$ линейных операторов из X в Y.

Пусть X – нормированное пространство, Y – отделимое локально выпуклое пространство, F – отображение из X в Y и $x_0\in Q_F$. Допустим, что в точках x некоторой окрестности U точки x_0 существует дифференциал Фреше $dF(x)$. Снабдим векторное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ линейных непрерывных операторов из X в Y топологией, индуцированной топологией сильной равномерности на Y^X (такую топологию называют равномерной операторной топологией, или топологией равномерной сходимости на совокупности ограниченных множеств пространства X). В этой ситуации дифференциал Фреше отображения $\Phi : x \mapsto dF(x)$ $(x \in U)$ называют дифференциалом Фреше второго порядка отображения F в точке x_0. В соответствии с определением дифференциала Фреше (см. пункт 2.3) и выбором топологии на $\mathcal{L}(X,Y)$ дифференциал Гато $d^2F(x_0)$ будет дифференциалом Фреше в том и только в том случае, если он непрерывен и соотношение

$$\lim_{t\to 0} \frac{dF(x_0+tv)(u) - dF(x_0)(u)}{t} = d^2F(x_0)(u,v) \tag{26}$$

выполняется равномерно относительно $u, v \in S$, где S – единичный шар пространства X.

Подобно тому, как было установлено соотношение (I2) из § 2, можно показать, что дифференцируемость по Фреше отображения F (второго порядка, в точке x_0) равносильна существованию такого непрерывного билинейного оператора $A : X^2 \to Y$, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любой непрерывной полунормы p на Y найдется $\delta > 0$ так, что

$$p(dF(x_0+v)(u) - dF(x_0)(u) - A(u,v)) \le \varepsilon \|u\| \|v\|, \tag{27}$$

где $\|u\| \le \delta$, $\|v\| \le \delta$. Если существует дифференциал Фреше $d^2F(x_0)$, то билинейный оператор A, удовлетворяющий соотношению (27), есть не что иное, как билинейный оператор, соответствующий $d^2F(x_0)$ при изоморфизме нормированных пространств $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$ и $\mathcal{L}_2(X,Y)$ (см. 3.I). Имея в виду указанный изоморфизм, мы будем отождествлять $d^2F(x_0)$ с соответствующим ему билинейным оператором.

Перейдем к определению дифференциала Фреше порядка $n = 3, 4, \ldots$. Допустим, что отображение $F : X \to Y$ имеет при некотором натуральном n и при каждом $m = 1, 2, \ldots, n-1$ в точке $x_0 \in \Omega_F$ (отвечающей соответствующим условиям) дифференциал Фреше порядка m, рассматриваемый как непрерывный дифференциал Гато $d^mF(x_0)$, удовлетворяющий подобному (27) условию: для любого $\varepsilon > 0$ и для любой непрерывной полунормы p на Y найдется такое $\delta > 0$, что при всех $u_1, u_2, \ldots, u_m \in X$, у которых $\|u_k\| \le \delta$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, имеет место соотношение

$$p(d^{m-1}F(x_0+u_m)(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) - d^{m-1}F(x_0)(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) -$$
$$- d^mF(x_0)(u_1, u_2, \ldots, u_m)) \le \varepsilon \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \ldots \cdot \|u_m\|.$$

Снабдим пространство $\mathcal{L}_{n-1}(X,Y)$ $(n-1)$-линейных операторов из X в Y топологией равномерной сходимости на совокупности всех ограниченных множеств пространства X^{n-1}. Если дифференциал Фреше $d^{n-1}F(x)$ существует в точках x некоторой окрестности U точки x_0 и существует дифференциал Фреше отображения $x \longmapsto d^{n-1}F(x)$, он называется дифференциалом Фреше порядка n отображения F в точке x_0. Тем самым определено понятие дифференциала Фреше любого порядка $n=1,2,\ldots$ в данной точке.

Согласно определению дифференциала Фреше, дифференциал Гато $d^nF(x_0)$ будет дифференциалом Фреше в том и только в том случае, если он непрерывен и соотношение

$$\lim_{t\to 0}\frac{d^{n-1}F(x_0+tv)(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})-d^{n-1}F(x_0)(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})}{t}=d^nF(x_0)(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},v) \quad (28)$$

выполняется равномерно относительно $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},v$ из некоторого шара пространства X.

Для дифференциала Фреше может быть получено соотношение типа (27), а именно, отображение F дифференцируемо по Фреше в точке x_0 до порядка n в том и только в том случае, если существует такой оператор $A\in\mathcal{L}_n(X,Y)$, что для любого $\varepsilon>0$ и любой непрерывной полунормы p на Y можно указать такое $\delta>0$, что

$$p\left(d^{n-1}F(x_0+v)(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})-d^{n-1}F(x_0)(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1})-A(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},v)\right)\leq$$

$$\leq \varepsilon\cdot\|u_1\|\cdot\|u_2\|\cdot\ldots\cdot\|u_{n-1}\|\cdot\|v\|$$

для всех $u_1,u_2,\ldots,u_{n-1},v$ с $\|u_k\|\leq\delta$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$, $\|v\|\leq\delta$.

Мы не будем приводить подробных обоснований фактов, относящихся к дифференциалам высших порядков.

§ 4. Теорема о неявном отображении

Настоящий параграф посвящен одному из основных фактов математического анализа – теореме о неявном отображении, в которой речь идет о возможности выделения локально однозначных ветвей некоторого соответствия из одного нормированного пространства в другое. Использование аппарата локального исследования отображения предусматривает соответствующую форму условий этой теоремы. Прежде чем приступать к теореме, отведем немного места фактам, используемым в ее доказательстве и имеющим самостоятельный интерес.

Все рассматриваемые далее пространства, если явно не оговорено, нормированные.

4.I. Пусть (X,ρ) – метрическое пространство. Отображение f из X в X называется **с ж и м а ю щ и м**, если существует такое число $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<1$, что $\rho(f(x'),f(x''))\leq\alpha\rho(x',x'')$ для любых $x',x''\in X$. Точка $x^*\in X$ называется **н е п о д в и ж н о й т о ч к о й** отображения f, если $x^*=f(x^*)$.

ТЕОРЕМА I (4.7). Пусть X – полное метрическое пространство и f – сжимающее отображение пространства (X,ρ) в себя. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что сжимающее отображение может иметь не более одной неподвижной точки, даже если пространство X не является полным. В самом деле, если x_1, x_2 – две различные неподвижные точки отображения f, то $\rho(x_1,x_2)=\rho(f(x_1), f(x_2))\leq\alpha\rho(x_1,x_2)<\rho(x_1,x_2)$, что невозможно.

Докажем существование неподвижной точки отображения f. Прежде всего убедимся в том, что при достаточно большом $r>0$ шар $Q_1=B_r[x_0]$, где x_0 – какая-либо фиксированная точка из X, обладает тем свойством, что $f[Q_1]\subset Q_1$. Действительно, если $x\in Q_1$, то

$$\rho(f(x),x_0)\leq\rho(f(x),f(x_0))+\rho(f(x_0),x_0)\leq\alpha\rho(x,x_0)+\rho(f(x_0),x_0)\leq\alpha r+\rho(f(x_0),x_0),$$

откуда следует, что за r можно взять любое число, большее, чем $\rho(f(x_0),x_0)/(1-\alpha)$.

Воспользовавшись принципом построения по индукции, создадим последовательность $\{Q_n\}$ $(n\in\mathbb{N})$ такую, что $Q_n=f[Q_{n-1}]$. Из выбора множества Q_1 и определения последовательности следует, что эта последовательность убывающая, т.е. $Q_{n+1}\subset Q_n$ для любого $n=1,2,\dots$.

Поскольку отображение f сжимающее, то, полагая $\operatorname{diam} Q_k=\sup\{\rho(x',x''):x',x''\in Q_k\}$ $(k\in\mathbb{N})$, при любом $n\in\mathbb{N}$ имеем $\operatorname{diam} Q_{n+1}\leq\alpha\operatorname{diam} Q_n$, откуда следует, что $\operatorname{diam} Q_n\leq\alpha^{n-1}\operatorname{diam} Q_1$ $(n\geq 2)$.

Так как $\operatorname{diam} Q_1\leq 2r<+\infty$, то из полученных оценок следует, что фильтр $\mathfrak{A}$, порожденный последовательностью $\{Q_n\}$, сходится в себе, а в силу полноты пространства X фильтр $\mathfrak{A}$ сходится к некоторой точке $x^*\in X$.

Поскольку $f[Q_{n+1}]\subset Q_n$, то фильтр $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle}$ тоньше, чем $\mathfrak{A}$, следовательно, и $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle}\longrightarrow x^*$. С другой стороны, поскольку сжимающее отображение удовлетворяет условию Липшица, так что непрерывно, то $\widetilde{f\langle\mathfrak{A}\rangle}\longrightarrow f(x^*)$. Таким образом, x^* – неподвижная точка отображения f.

ЗАМЕЧАНИЕ. Неподвижную точку отображения, удовлетворяющего условиям теоремы, можно получить как предел последовательности элементов пространства X.+)

Доказываемый ниже факт носит название теоремы о неподвижной точке дифференцируемого отображения.

ТЕОРЕМА 2 (4.7). Пусть X – полное нормированное пространство, F – отображение из X в себя и x_0 – точка из внутренности Ω_F^o. Предположим, что в каждой точке x некоторого шара $B_R[x_0]$, лежащего в Ω_F^o, существует дифференциал Гато $dF(x)$, причем $\|dF(x)\| \le \alpha < 1$ для $x \in B_R[x_0]$. Тогда если $R > r = \delta/(1-\alpha)$, где $\delta = \|F(x_0) - x_0\|$, то существует единственная точка $x^* \in B_r[x_0]$ такая, что $x^* = F(x^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $B_r[x_0]$ – замкнутое множество в полном метрическом пространстве, то оно представляет собой полное подпространство X. Так как для $x \in B_r[x_0]$ в силу оценки (2I) из § 3 имеем $\|F(x) - x_0\| \le \|F(x) - F(x_0)\| + \|F(x_0) - x_0\| \le \alpha\,\|x - x_0\| + \delta \le \alpha r + \delta = r$, то область значений Δ_F отображения F содержится в $B_r[x_0]$.

Возьмем произвольно точки $x', x'' \in B_r[x_0]$ и обозначим $x'' - x'$ через v. Так как шар в нормированном пространстве представляет собой выпуклое множество, то отрезок $\{x' + tv : t \in [0,1]\}$ содержится в $B_r[x_0]$. Вновь используя оценку (2I) из § 3, получим

$$\|F(x'') - F(x')\| \le \|x'' - x'\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \|dF(x' + tv)\| \le \alpha \cdot \|x'' - x'\|,$$

следовательно, сужение F на $B_r[x_0]$ – сжимающее отображение $B_r[x_0]$ в себя. Согласно теореме I существует такая точка $x^* \in B_r[x_0]$, что $x^* = F(x^*)$, что и требовалось.

Используя доказанные теоремы, установим некоторые факты, касающиеся существования обратных операторов.

I. Пусть X – полное нормированное пространство и A – переводящий X в X линейный оператор, у которого $\|A\| < 1$. Тогда существует обратный $(I-A)^{-1}$ к оператору $I-A$ (где I – тождественное отображение X на себя), определенный на всем X, и имеет место следующая оценка его нормы:

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}\,. \tag{I}$$

В самом деле, пусть y – некоторый элемент из X. Применим теорему 2 к отображению $F: x \longmapsto A(x) + y$ с $x_0 = 0$ и $\alpha = \|A\|$ (проверка выполнения условий теоремы не представляет труда и мы ее опустим). Согласно результату этой теоремы существует единственное $x^* \in B_r[0]$, где $r = \|y\|/(1 - \|A\|)$, для которого $x^* = F(x^*)$ или $x^* - A x^* = (I-A)(x) = y$,

+) $x^* = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n}(x_0)$ – метод простых итераций.

откуда следует однозначность соответствия $(I-A)^{-1}$. Поскольку $(I-A)(y)=x^*\in B_r[\mathbb{O}]$, то $\|(I-A)^{-1}(y)\|\leq\|y\|/(1-\|A\|)$, откуда $\|(I-A)^{-1}(y)\|/\|y\|\leq 1/(1-\|A\|)$, и в силу произвольности $y\in X$ получаем $\|(I-A)^{-1}\|\leq 1/(1-\|A\|)$. Предложение доказано.

II. Пусть X,Y — нормированные пространства и A_0 — линейный гомеоморфизм X на Y. Если хотя бы одно из пространств X,Y полное и $A:X\longrightarrow Y$ — такой определенный на X линейный непрерывный оператор, что $\|A-A_0\|\leq 1/\|A_0^{-1}\|$, то A имеет обратный, определенный на всем Y, и выполнена оценка

$$\|A^{-1}\|\leq\|A_0^{-1}\|/(1-\|I-A_0^{-1}A\|), \qquad (2)$$

где I — тождественное отображение X на себя.

Рассмотрим суперпозицию $D=A_0^{-1}A$ операторов A, A_0^{-1}. Поскольку $\|D\|\leq\|A_0^{-1}\|\cdot\|A\|$ и A_0^{-1},A непрерывны, то и D также непрерывен. Так как $I-D=A_0^{-1}A_0-A_0^{-1}A=A_0^{-1}(A_0-A)$, то согласно условиям $\|I-D\|\leq\leq\|A_0^{-1}\|\cdot\|A_0-A\|<1$. Если одно из пространств X,Y полное, то, как нетрудно показать, полным будет и другое пространство, так что в силу теоремы 2 оператор $D=I-(I-D)$ имеет непрерывный обратный.

Рассмотрим оператор $B=D^{-1}A_0^{-1}$. Из условий на A_0,D следует, что B определён на всем Y и непрерывен как суперпозиция непрерывных операторов. Так как $BA=D^{-1}A_0^{-1}A=D^{-1}D=I$ и $AB=AD^{-1}A_0^{-1}=$ $=A_0A_0^{-1}AD^{-1}A_0^{-1}=A_0DD^{-1}A_0^{-1}$ — тождественное отображение Y на себя, то B — обратный к A оператор. Наконец, учитывая (I), имеем

$$\|B\|=\|D^{-1}A_0^{-1}\|\leq\|D^{-1}\|\cdot\|A_0^{-1}\|\leq\|A_0^{-1}\|/(1-\|I-D\|)=\|A_0^{-1}\|/(1-\|I-A_0^{-1}A\|),$$

и предложение доказано.

4.2. Этот пункт посвящен теореме о неявном отображении. Пусть X,Y,Z — нормированные пространства, H — отображение, действующее из $X\times Y$ в Z. Рассмотрим соответствие $\Phi=\{(x,y)\in X\times Y:\ H(x,y)=\mathbb{O}\}$.

Следующую лемму, фактически представляющую собой часть доказательства теоремы о неявном отображении, назовем леммой о решении уравнения $H(x,y)=\mathbb{O}$

ЛЕММА. Предположим, что выполнены следующие условия:

I) Y — полное пространство;

2) найдется такая точка (x_0,y_0) из внутренности $\overset{o}{Q_H}$, что $H(x_0,y_0)=\mathbb{O}$;

3) отображение H непрерывно в точке (x_0,y_0);

4) найдется такая окрестность U точки (x_0,y_0), что в каждой точке $(x,y)\in U$ существует непрерывный частный дифференциал Гато $d_{II}H(x,y)$ отображения H по подпространству $\{\mathbb{O}\}\times Y$ векторного прост-

ранства $X\times Y$;

5) отображение $(x,y)\longmapsto d_{II}H(x,y)$ из $X\times Y$ в $\mathcal{L}(Y,Z)$ непрерывно в точке (x_0,y_0);

6) существует обратный к оператору $d_{II}H(x_0,y_0)$.

Тогда можно указать такие окрестности V_{x_0} точки x_0 и W_{y_0} точки y_0, что для каждого $x\in V_{x_0}$ существует единственное $y^*\in W_{y_0}$, удовлетворяющее соотношению $H(x,y^*)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $[d_{II}H(x_0,y_0)]^{-1}$ через Γ_0. Возьмем $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<1$ и, воспользовавшись непрерывностью отображения $(x,y)\longmapsto d_{II}H(x,y)$, найдем ρ_1,R так, что $B_{\rho_1}[x_0]\times B_R[y_0]\subset U$ и

$$\|d_{II}H(x,y)-d_{II}H(x_0,y_0)\|\leqslant\alpha/\|\Gamma_0\| \tag{3}$$

для точек $(x,y)\in B_{\rho_1}[x_0]\times B_R[y_0]$.

В силу непрерывности отображения H в точке (x_0,y_0) найдется такое $\rho<\rho_1$, что если $\|x-x_0\|\leqslant\rho$, то

$$\|H(x,y_0)-H(x_0,y_0)\|<R(1-\alpha)/\|\Gamma_0\|. \tag{4}$$

Возьмем какую-либо точку x из $B_\rho[x_0]$ и покажем, что отображение $F_x: y\mapsto y-\Gamma_0(H(x,y))$ удовлетворяет требованиям теоремы о неподвижной точке дифференцируемого отображения. Отметим, что, согласно условиям, пространство Y полное, точка y_0 входит во внутренность $\overset{\circ}{\Omega}_{F_x}$ и в каждой точке y из $B_R[y]$ существует дифференциал Гато $dF_x(y)=I-\Gamma_0 d_{II}H(x,y)$, где I – тождественное отображение Y на себя. Далее, из (3) следует, что

$$\|dF_x(y)\|=\|\Gamma_0 d_{II}H(x_0,y_0)-\Gamma_0 d_{II}H(x,y)\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\Gamma_0\|\cdot\|d_{II}H(x_0,y_0)-d_{II}H(x,y)\|\leqslant\|\Gamma_0\|\cdot\alpha/\|\Gamma_0\|=\alpha<1.$$

Наконец, учитывая, что $H(x_0,y_0)=0$, из (4) получаем

$$\delta=\|F_x(y_0)-y_0\|=\|\Gamma_0(H(x,y_0))\|=\|\Gamma_0(H(x,y_0))-\Gamma_0(H(x_0,y_0))\|\leqslant$$

$$\leqslant\|\Gamma_0\|\cdot\|H(x,y_0)-H(x_0,y_0)\|<\|\Gamma_0\|\cdot R\cdot(1-\alpha)/\|\Gamma_0\|=R\cdot(1-\alpha), \tag{5}$$

так что все условия теоремы 2 соблюдены.

Обозначим через y^* лежащую в шаре $B_r[y_0]$, где $r=\delta/(1-\alpha)$, неподвижную точку отображения F_x. Равенство $y^*=F_x(y^*)$ означает, что $\Gamma_0(H(x,y^*))=0$, а это в силу взаимной однозначности Γ_0 возможно лишь при $H(x,y^*)=0$. Так как $y^*\in B_r[y_0]$, то из (5) получаем, что $\|y^*-y_0\|\leqslant\delta/(1-\alpha)<R$.

Итак, для каждого x из $V_{x_0}=B_\rho[x_0]$ найдется $y^*\in W_{y_0}=\overset{\circ}{B}_R[y_0]$ такой, что $H(x,y^*)=0$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из доказательства леммы, точка y^* удовлетворяет соотношению

$$\|y^*-y_0\|\leqslant \|\Gamma_0(H(x,y_0))\|/(1-\alpha)\leqslant \|\Gamma_0\|\cdot\|H(x,y_0)\|/(1-\alpha). \qquad (6)$$

Сформулируем теперь т е о р е м у о н е я в н о м о т о б р а ж е н и и.

ТЕОРЕМА 3 (4.7). Предположим, что выполнены все условия леммы. Тогда существуют такие окрестности V_{x_0}, W_{y_0} соответственно точек x_0, y_0 и такое единственное отображение Φ, переводящее V_{x_0} в W_{y_0}, что $H(x,\Phi(x))=0$ для всех $x\in V_{x_0}$. При этом $y_0=\Phi(x_0)$ и отображение Φ непрерывно в точке x_0. Если, кроме того, найдется окрестность U_1 точки (x_0,y_0) такая, что в каждой точке $(x,y)\in U_1$ существует непрерывный частный дифференциал Гато $d_I H(x,y)$ отображения H по подпространству $X\times\{0\}$ векторного пространства $X\times Y$, и отображение $(x,y)\longmapsto d_I H(x,y)$ из $X\times Y$ в $\mathcal{L}(X,Z)$ непрерывно в точке (x_0,y_0), тогда Φ дифференцируемо в в смысле Фреше в точке x_0 и дифференциал $d\Phi(x_0)$ равен суперпозиции

$$d\Phi(x_0)=-\Gamma_0\, d_I H(x_0,y_0). \qquad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись леммой, в точках окрестности V_{x_0}, взятой из результата леммы, определим отображение Φ, принимая в качестве значения $\Phi(x)$ ($x\in V_{x_0}$) такую точку y^*, что $H(x,y^*)=0$, и проверим, что отображение Φ удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Единственность Φ следует непосредственно из единственности неподвижной точки y^*, отвечающей точке x. Отсюда же, в частности, вытекает, что $y_0=\Phi(x_0)$.

Непрерывность Φ в точке x_0 следует из непрерывности H в точке (x_0,y_0) и оценки

$$\|\Phi(x)-\Phi(x_0)\|\leqslant\|\Gamma_0\|\cdot\|H(x,y_0)\|/(1-\alpha)=\|\Gamma_0\|\cdot\|H(x,y_0)-H(x_0,y_0)\|/(1-\alpha),$$

вытекающей из (6).

Докажем дифференцируемость Φ в точке x_0. Рассмотрим точку $x\in V_{x_0}$ и введем обозначения $y=\Phi(x)$, $x-x_0=v$, $y-y_0=w$. Так как отрезки $[x_0,x]=\{x_0+tv:\ t\in[0,1]\}$, $[y_0,y]=\{y+tw:\ t\in[0,1]\}$ содержатся соответственно в V_{x_0}, W_{y_0} и отображения $x\mapsto H(x,y)$, $y\mapsto H(x_0,y)$ дифференцируемы в смысле Гато в точках из этих отрезков, то на основании оценки (21) из § 3

$$\| H(x,y)-H(x_0,y_0)-(d_I H(x_0,y_0)(v)+d_{II} H(x_0,y_0)(w)\| \leq$$

$$\leq \| H(x,y)-H(x_0,y)-d_I H(x_0,y_0)(v)\| + \| H(x_0,y_0)-H(x_0,y)-d_{II} H(x_0,y_0)(w)\| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y)(v)-d_I H(x_0,y_0)(v)\| + \sup_{t\in[0,1]} \| d_{II} H(x_0,y_0+tw)(w)-d_{II} H(x_0,y_0)(w)\| \leq$$

$$\leq \|v\|\cdot \sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y)-d_I H(x_0,y)\| + \|w\|\cdot \sup_{t\in[0,1]} \| d_{II} H(x_0,y_0+tw)-d_{II} H(x_0,y_0)\| . \quad (8)$$

Так как дифференциалы $d_I H(x,y)$, $d_{II} H(x,y)$ непрерывны в точке (x_0,y_0), то по произвольному $\varepsilon>0$ можно указать такие λ,μ, $0<\lambda<\rho$, $0<\mu<R$, что

$$\sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y)-d_I H(x_0,y_0)\| \leq \varepsilon, \quad \sup_{t\in[0,1]} \| d_{II} H(x_0,y_0+tw)-d_{II} H(x_0,y_0)\| \leq \varepsilon, \quad (9)$$

если только $\|v\|\leq\lambda$, $\|w\|\leq\mu$.

Исходя из неравенства (6) и используя оценку (20) из § 3, получим

$$\|y-y_0\| \leq \|\Gamma_0\|\cdot\| H(x,y_0)-H(x_0,y_0)\|/(1-\alpha) \leq \|\Gamma_0\|\cdot\|v\|\cdot \sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y_0)\|/(1-\alpha). \quad (10)$$

Учитывая неравенства (8), (9), (10), имеем

$$\| \Phi(x)-\Phi(x_0)-(-\Gamma_0(d_I H(x_0,y_0)(v)))\| = \| w+\Gamma_0(d_I H(x_0,y_0)(v))\| =$$

$$= \| \Gamma_0(d_{II} H(x_0,y_0)(w)+\Gamma_0(d_I H(x_0,y_0)(v))\| \leq \|\Gamma_0\|\cdot\| d_{II} H(x_0,y_0)(w)-d_I H(x_0,y_0)(v)\| =$$

$$= \|\Gamma_0\|\cdot\| H(x,y)-H(x_0,y_0)-d_{II} H(x_0,y_0)(w)-d_I H(x_0,y_0)(v)\| \leq$$

$$\leq \|\Gamma_0\|\cdot\left(\varepsilon\cdot\|v\|+\varepsilon\cdot\|\Gamma_0\|\cdot(1-\alpha)^{-1}\cdot \sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y_0)\|\cdot\|v\|\right) =$$

$$= \varepsilon\cdot\|v\|\cdot\|\Gamma_0\|\cdot\left(1-\|\Gamma_0\|\cdot(1-\alpha)^{-1} \sup_{t\in[0,1]} \| d_I H(x_0+tv,y_0)\|\right),$$

если только $\|v\|\leq\lambda$, откуда и следует дифференцируемость в смысле Фреше отображения Φ в точке x_0 и равенство $d\Phi(x_0)=-\Gamma_0 d_I H(x_0,y_0)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если H непрерывно в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), тогда отображение Φ непрерывно в точках некоторой окрестности точки x_0.

Можно считать H непрерывным в $V_{x_0}\times W_{y_0}$. Возьмем какое-либо $R^*<R$, где R – радиус шара W_{y_0}, и, воспользовавшись непрерывностью Φ в x_0, найдем такое $\rho^*<\rho$, что $\|\Phi(x)-y_0\|\leq R^*$, если только $\|x-x_0\|\leq\rho^*$.

Покажем, что Φ непрерывно в шаре $B_{\rho^*}[x_0]$. Рассмотрим какую-либо точку $x^* \in B_{\rho^*}[x_0]$ и обозначим через y^* значение $y^* = \Phi(x^*)$. Возьмем шар $B_r[y^*]$ с тем условием, что $B_r[y^*] \subset W_{y_0}$. Исходя из непрерывности отображения H в точке (x^*, y^*), найдем такое ρ_0, что $B_{\rho_0}[x^*] \subset V_{x_0}$ и $\| H(x,y^*)\| = \| H(x,y^*) - H(x^*,y^*)\| \le r\cdot(1-\alpha)/\|\Gamma_0\|$.

Убедимся в том, что образ шара $B_{\rho_0}[x^*]$ лежит в шаре $B_r[y^*]$. Действительно, пусть $x \in B_{\rho_0}[x^*]$. Поскольку значение $\Phi(x)$ определялось как неподвижная точка отображения $F_x : y \mapsto y - \Gamma_0(H(x,y))$, достаточно показать, что для рассматриваемого x такая неподвижная точка лежит в шаре $B_r[y^*]$. В самом деле, поскольку $B_r[y^*] \subset W_{y_0}$, то, согласно условиям теоремы, существует дифференциал $dF_x(y)$ в каждой точке $y \in B_r[y^*]$ и $\|dF_x(y)\| \le \alpha < 1$. Кроме того, $\delta = \|F_x(y^*) - y^*\| \le \|\Gamma_0\|\cdot\|H(x,y^*)\| \le r\cdot(1-\alpha)$, следовательно, в шаре $B_r[y^*]$ существует единственная неподвижная точка отображения F_x, а так как $B_r[y^*] \subset W_{y_0}$, то этой неподвижной точкой является в точности $\Phi(x)$. Итак, доказано, что $\Phi(x) \in B_r[y^*]$ для любого $x \in B_{\rho_0}[x^*]$, а это и означает непрерывность Φ в точке x^*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположим, что частные дифференциалы $d_I H(x,y)$, $d_{II} H(x,y)$ непрерывны в каждой точке (x,y) некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда отображение Φ дифференцируемо в смысле Фреше в некоторой окрестности точки x_0.

Воспользовавшись условиями замечания и непрерывностью частного дифференциала $d_{II} H(x,y)$ в точке (x_0, y_0), возьмем такие ρ, R, что в точках (x^*, y^*) из произведения $B^\circ_\rho[x_0] \times B^\circ_R[y_0]$ открытых шаров $B^0_\rho[x_0] \subset V_{x_0}$; $B^\circ_R[x_0] \subset W_{y_0}$ непрерывны оба частных дифференциала и, кроме того,

$$\| d_{II} H(x^*, y^*) - d_{II} H(x_0, y_0)\| \le 1/\|\Gamma_0\|. \tag{II}$$

Убедимся в выполнении всех условий теоремы о неявном отображении, если вместо точки (x_0, y_0) взять (x^*, y^*). Нетрудно заметить, что в проверке нуждается лишь существование обратного к оператору $d_{II} H(x^*, y^*)$, а это следует из предложения П(4.I) на основании оценки (II). Таким образом, существуют окрестности V_{x^*}, W_{y^*} точек x^*, y^* и определенное на V_{x^*} отображение Φ^*, действующее в W_{y^*}, такие, что $y^* = \Phi^*(x^*)$ и Φ^* дифференцируемо в смысле Фреше в точке x^*.

Поскольку $V_{x^*} \cap B_\rho[x_0] \subset V_{x_0}$, $W_{y^*} \cap B_R[y_0] \subset W_{y_0}$, а отображение $\Phi : V_{x_0} \longrightarrow W_{y_0}$, удовлетворяющее условию $H(x, \Phi(x)) = 0$ $(x \in V_{x_0})$, единственно, то значения отображений Φ, Φ^* совпадают в общей части их областей определения, следовательно, в некоторой окрестности точки x^*, откуда и вытекает дифференцируемость отображения Φ в точке x^*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что выполнены условия 2,3 леммы и, кроме того,

I$'$) X – полное пространство;

4$'$) существует окрестность U_1 точки (x_0, y_0), в каждой точке (x,y) которой существует непрерывный дифференциал Гато $d_I H(x,y)$ по подпространству $X \times \{0\}$;

5$'$) отображение $(x,y) \longmapsto d_I H(x,y)$ $((x,y) \in U_1)$ непрерывно в точке (x_0, y_0) ;

6$'$) существует обратный к оператору $d_I H(x_0, y_0)$.

Тогда можно указать такие окрестности V'_{x_0}, W'_{y_0} точек x_0, y_0 соответственно и единственное определенное на W'_{y_0} отображение Φ_1, действующее в V'_{x_0}, что $H(\Phi_1(y), y) = 0$ для всех $y \in W'_{y_0}$. При этом $x_0 = \Phi_1(y_0)$ и отображение Φ_1 непрерывно в y_0. Если, кроме того, в каждой точке (x, y) некоторой окрестности элемента (x_0, y_0) существует непрерывный дифференциал Гато $d_{II} H(x,y)$ по подпространству $\{0\} \times Y$, причем отображение $(x,y) \mapsto d_{II} H(x,y)$ непрерывно в точке (x_0, y_0), тогда Φ_1 дифференцируемо в смысле Фреше в точке y_0 и дифференциал $d\Phi_1(y_0)$ равен суперпозиции $d\Phi_1(y_0) = -[d_{II} H(x_0, y_0)]^{-1} d_I H(x_0, y_0)$.

Замечание 3 отражает равноправие пространств X, Y.

4.3. В качестве одного из приложений теоремы о неявном отображении отметим следующий факт, называемый **теоремой об обратном отображении**.

ТЕОРЕМА 4 (4.7). Пусть X – нормированное пространство, Y – полное нормированное пространство. Рассмотрим отображение F, действующее из Y в X, и точку y_0 из внутренности Ω_F^0. Предположим, что F непрерывно в y_0 и в каждой точке y некоторой окрестности точки y_0 существует непрерывный дифференциал Гато $dF(y)$, непрерывный в y_0 как отображение из Y в $\mathcal{L}(Y, X)$, а дифференциал $dF(y_0)$ является гомеоморфизмом пространств Y, X. Тогда существуют такие окрестности U_{y_0}, U_{x_0} точек y_0, $x_0 = F(y_0)$, что F взаимно однозначно на U_{y_0} и $F[U_{y_0}] = U_{x_0}$. Обратное к F отображение $\Psi: U_{x_0} \longrightarrow U_{y_0}$, $\Psi[U_{x_0}] = U_{y_0}$, непрерывно в x_0, дифференцируемо в этой точке и $d\Psi(x_0) = [dF(y_0)]^{-1}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим на множестве $X \times \Omega_F$ отображение $H: X \times Y \to X$, полагая $H: (x,y) \mapsto x - F(y)$. Ясно, что H непрерывно в (x_0, y_0) и $H(x_0,y_0)=0$. В каждой точке (x, y) некоторой окрестности V точки (x_0, y_0) существует частный дифференциал $d_{II} H(x,y)=-dF(y)$ по подпространству $\{0\}\times Y$, непрерывный в (x_0, y_0) как отображение из $X\times Y$ в $\mathcal{L}(Y,X)$. Более того, поскольку $dF(y_0)$ – гомеоморфизм пространств Y, X, существует обратный $\Gamma_0=[d_{II} H(x_0,y_0)]^{-1}$ к оператору $d_{II} H(x_0,y_0)$, заданный и непрерывный на всем X.

Итак, в рассматриваемой ситуации удовлетворены все условия теоремы о неявном отображении, следовательно, найдутся такие окрестности V_{x_0}, V_{y_0} точек x_0, y_0 и такое единственное отображение Ψ: $: V_{x_0}\longrightarrow V_{y_0}$, что $x - F(\Psi(x))=0$ для всех $x\in V_{x_0}$, притом Ψ непрерывно в x_0 и дифференцируемо в этой точке в смысле Фреше.

Обозначим через U_{y_0} окрестность $F^{-1}[V_{x_0}]\cap V_{y_0}$ точки y_0. Поскольку U_{y_0} содержится в V_{y_0}, то F взаимно однозначно на U_{y_0}. Прообраз $U_{x_0}=\Psi^{-1}[U_{y_0}]$ – окрестность точки x_0, так как $U_{y_0}\subset V_{y_0}$ и Ψ непрерывно в x_0. Нетрудно понять, что F взаимно однозначно отображает U_{y_0} на U_{x_0}, следовательно, сужение Ψ на U_{x_0} – обратное к сужению F на U_{y_0} отображение и $\Psi[U_{x_0}]=U_{y_0}$. Так как U_{x_0} – окрестность точки x_0, то для сужения Ψ на U_{x_0} сохраняются свойства непрерывности и дифференцируемости в смысле Фреше в точке x_0. Наконец, так как $d_I H(x_0,y_0)$ – тождественное отображение X на X, то из (7) получаем $d\Psi(y_0)=-\Gamma_0\, d_I H(x_0,y_0)=-\Gamma_0=[dF(y_0)]^{-1}$, и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $F: Y\longrightarrow X$ – отображение, заданное на открытом в Y множестве G. Если в каждой точке $y\in G$ выполнены условия теоремы об обратном отображении, то F называют регулярным (на G). Используя результат теоремы, нетрудно показать, что регулярное на G отображение F открыто, т.е. образ любого открытого множества в G является открытым множеством в X.

4.4. Коротко обсудим специфику некоторых условий и результатов теорем о неявном и об обратном отображении в случае, когда $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$, $Z=\mathbb{R}^\nu$

Так как условия теорем, использующие структуру нормированного пространства, носят топологический характер, а в рассматриваемом случае все нормы эквивалентны (см. замечание к теореме 3(5.6)) и приводят к одной и той же отделимой линейной топологии, то выбор нормы на векторных пространствах X,Y,Z не существен.

Пусть отображение H обращается в нуль во внутренней точке (x_0,y_0) из области определения Q_H. Напомним (см. П.2.4), что достаточным условием существования дифференциала Фреше $d_{II} H(x,y)$ и непрерывности в точке (x_0, y_0) отображения $(x,y)\mapsto d_{II} H(x,y)$ служит существование непрерывных частных производных $\frac{\partial H}{\partial y_k}(x,y)$ в точках (x,y), $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ некоторой окрестности U точки (x_0,y_0). В этом случае оператор $d_{II}H(x,y)$ определяется матрицей Якоби $\frac{D(H_1,\dots,H_\nu)}{D(y_1,\dots,y_n)}(x,y)$.

Существование обратного к оператору $d_{II}H(x_0,y_0)$, определенного на всем Z, возможно лишь в случае, когда $n=\nu$, и, как известно, равносильно отличию от нуля якобиана, т.е. определителя матрицы $\frac{D(H_1,\dots,H_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}(x_0,y_0)$.

Результат теоремы с неявном отображении можно трактовать как локальную разрешимость системы уравнений

$$
\begin{gathered}
H_1(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
H_n(x_1,x_2,\dots,x_m,y_1,y_2,\dots,y_n)=0
\end{gathered}
$$

с n неизвестными $y_1,y_2,\dots,y_n$ и параметрами $x_1,x_2,\dots,x_m$. Иначе говоря, если выполнены все условия теоремы, то существуют такие n функций $\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_n$, определенные в точках $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ некоторой окрестности точки $x_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0)$, что

$$
\begin{gathered}
H_1(x_1,x_2,\dots,x_m,\Phi_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\dots,\Phi_n(x_1,x_2,\dots,x_m))=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
H_n(x_1,x_2,\dots,x_m,\Phi_1(x_1,x_2,\dots,x_m),\dots,\Phi_n(x_1,x_2,\dots,x_m))=0.
\end{gathered}
$$

Переходя к условиям теоремы об обратном отображении, следует, пожалуй, отметить лишь то обстоятельство, что существование взаимно однозначного дифференциала $dF(y_0)$ отображения $F: Y\to X$ равносильно отличию от нуля якобиана $\frac{D(F_1,\dots,F_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}(y_0)$.

Непрерывность дифференциала $dF(y_0)$ обеспечивается непрерывностью всех частных производных $\frac{\partial F}{\partial y_k}(y_0)$ ($k=1,2,\dots,n$).

Результат теоремы можно рассматривать как локальную разрешимость системы

$$
\begin{gathered}
F_1(y_1,y_2,\dots,y_n)=x_1,\\
\dots\dots\dots\dots\\
F_n(y_1,y_2,\dots,y_n)=x_n
\end{gathered}
$$

n уравнений с n неизвестными $y_1,y_2,\dots,y_n$.

§ 5. Локальные экстремумы

В этом параграфе будем вести речь об исследовании локальных экстремумов функции с использованием аппарата дифференцирования. Под функцией здесь будем понимать отображение, действующее в множество вещественных чисел.

5.I. Рассмотрим топологическое пространство X и функцию $f:$ $: X \longrightarrow R$. Пусть точка $x_0 \in Q_f$ такова, что существует окрестность точки x_0, для которой $f(x_0)=\sup f[U \cap Q_f]$(соответственно $f(x_0)=$ $=\inf f[U \cap Q_f]$). Тогда говорят, что функция f имеет в точке x_0 локальный максимум (соответственно минимум), и точку x_0 называют точкой локального максимума (минимума) функции f . Если x_0 – точка локального максимума или минимума, говорят, что f имеет в x_0 локальный экстремум.

В первом предложении устанавливаются необходимые условия локального экстремума в точке x_0 дифференцируемой в этой точке функции.

I. Пусть X – топологическое векторное пространство, f – определенная в X функция и x_0 – точка из Q_f^o. Предположим, что в точке x_0 функция f имеет локальный экстремум. Тогда если f дифференцируема в этой точке в смысле Гато, то $df(x_0)$ – нулевой функционал.

Возьмем какой-либо элемент $v \in X$. Так как $x_0 \in Q_f^o$, то найдутся $a, b \in R$, $a<0<b$ такие, что $\{ x_0+tv : t \in [a,b] \} \subset Q_f$. Определим на $[a,b]$ функцию $\varphi : t \mapsto f(x_0+tv)$. Если f дифференцируема в x_0, то φ дифференцируема при $t=0$ и имеет место равенство $\varphi'(0)=df(x_0)(v)$. Если x_0 – точка локального экстремума функции f , то $t=0$ – точка локального экстремума функции φ . Согласно теореме I(3.4) имеем $df(x_0)(v)=\varphi'(0)=0$, и в силу произвольности $v \in X$ функционал $df(x_0)$ нулевой.

Аналогично случаю $X=R$, используя формулу Тейлора, можно установить достаточные условия локального экстремума в том случае, когда X – произвольное нормированное пространство. Полилинейный функционал ℓ на X называется положительно (отрицательно) определенным, если найдется такое $m>0$, что $\ell(\underbrace{v,v,\dots,v}_{n}) \geq m \cdot \|v\|^n$ (соответственно $\ell(\underbrace{v,v,\dots,v}_{n}) \leq$ $\leq -m \|v\|^n$) для всех $v \in X$. Говорят, что функционал ℓ знакоопределенный, если он либо положительно, либо отрицательно определенный. Функционал ℓ называют знаконеопределенным, если среди его значений $\ell(u,u,\dots,u)$ ($u \in X$) есть как строго положительные, так и строго отрицательные, Заметим, что n-линейный функционал при нечетном n не может быть знакоопределенным.

ТЕОРЕМА I (5.7). Пусть X – нормированное пространство, f – определенная в X функция и $x_0 \in Q_f^0$. Предположим, что f имеет непрерывные дифференциалы Гато до второго порядка в точках некоторой окрестности V точки x_0 и что отображение $x \longmapsto d^2f(x)$ $(x \in V)$ непрерывно в точке x_0. Допустим, что $df(x_0)=0$. Тогда если функционал $d^2f(x_0)$ знакоопределенный, то x_0 является точкой экстремума функции f, минимума, если $d^2f(x_0)$ – положительно определенный функционал, и максимума, если отрицательно. В случае знаконеопределенности функционала $d^2f(x_0)$ точка x_0 не является точкой экстремума функции f.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся оценкой (I8) из § 3, которая с учетом того, что $df(x_0)=0$, в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$|f(x)-f(x_0)-\frac{1}{2}d^2f(x_0)(v,v)| \leq \frac{\|v\|^2}{2}\cdot \sup_{t\in[0,1]} \|d^2f(x_0+tv)-d^2f(x_0)\|, \tag{I}$$

или

$$-\frac{\|v\|^2}{2}\sup_{t\in[0,1]}\|d^2f(x_0+tv)-d^2f(x_0)\|+d^2f(x_0)(v,v)\leq f(x)-f(x_0)\leq$$
$$\leq \frac{\|v\|^2}{2}\cdot\sup_{t\in[0,1]}\|d^2f(x_0+tv)-d^2f(x_0)\|+d^2f(x_0)(v,v), \tag{2}$$

где $v=x-x_0$. Если $d^2f(x_0)$ – положительно определенный функционал и m – такое число, что $d^2f(x_0)(v,v)\geq m\cdot\|v\|^2$, то, найдя в силу непрерывности $d^2f(x)$ в x_0 такое $\delta>0$, что $\|d^2f(x)-d^2f(x_0)\|\leq m/2$, если только $\|x-x_0\|\leq\delta$, из оценки (2) получим

$$-\frac{m\cdot\|v\|^2}{2}+\frac{1}{2}d^2f(x_0)(v,v)\leq f(x)-f(x_0)\leq\frac{m\|v\|^2}{2}+\frac{1}{2}d^2f(x_0)(v,v).$$

Отсюда

$$f(x)-f(x_0)\geq-\frac{m\cdot\|v\|^2}{2}+\frac{1}{2}d^2f(x_0)(v,v)\geq-\frac{m\cdot\|v\|^2}{2}+\frac{m\cdot\|v\|^2}{2}=0,$$

следовательно, x_0 – точка минимума функции f.

Случай отрицательно определенного билинейного функционала легко сводится к рассмотренному.

Предположим, что функционал $d^2f(x_0)$ знаконеопределенный. Это означает, что найдутся такие два элемента $v_1, v_2\in X$, что $a=d^2f(x_0)(v_1,v_1)<0$, $b=d^2f(x_0)(v_2,v_2)>0$. Воспользовавшись непрерывностью $d^2f(x)$ в точке x_0, найдем $r<1$ так, что $\|d^2f(x)-d^2f(x_0)\|\leq\frac{1}{2}c$, где $c=\min(|a|,|b|)$, если только $\|x-x_0\|\leq r$. Тогда, выбрав τ, $0\leq\tau\leq 1$, с тем расчетом, чтобы $\tau\cdot\|v_1\|\leq r$, из (2) имеем

$$f(x_0+\tau v_1)-f(x_0)\leq$$
$$\leq\frac{\tau^2}{2}\left[d^2f(x_0)(v_1,v_1)+\|v_1\|^2\cdot\sup_{t\in[0,1]}\|d^2f(x_0+tv)-d^2f(x_0)\|\right]\leq$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\left[a+\frac{c}{2}\right] \leq \frac{\tau^2 a}{4} < 0.$$

Аналогично показывается, что $f(x_0+\sigma v_2)-f(x_0)>0$ ($0<\sigma\leq \tau/\|v_2\|$), следовательно, в этом случае x_0 не является точкой локального экстремума функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ I. Из доказательства теоремы, а точнее, из соотношения (2) ясно, что для нахождения точек экстремума можно использовать и дифференциалы более высоких порядков. Мы сформулируем только соответствующий факт, доказательство же его предоставим читателю.

Предположим, что функция f имеет в точке x_0 непрерывные дифференциалы Гато до порядка $n\geq 2$, отображение $x\mapsto d^n f(x)$ непрерывно в точке x_0 и функционалы $d^k f(x_0)(k=1,2,\ldots,n-1)$ нулевые. Тогда если функционал $d^n f(x_0)$ знакоопределен, то x_0 – точка локального экстремума функции f , минимума в случае положительной определенности $d^n f(x_0)$ и максимума – в случае отрицательной. Если $d^n f(x_0)$ – знаконеопределенный функционал, то x_0 не является точкой локального экстремума.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что если в условиях теоремы или замечания I первый отличный от нуля функционал $d^n f(x_0)$ лишь положительный или отрицательный, то основанный на формуле Тейлора аппарат не позволяет судить об экстремальности точки x_0.

Коротко обсудим случай $X=R^\nu$. Если отображение $f:R^\nu\to R$ имеет в точке $x_0\in Q_f^0$ все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$ ($k=1,2,\ldots,\nu$), тогда f дифференцируемо в этой точке (предложение II(2.4)) и, поскольку дифференциал Гато определяется составленной из частных производных матрицей Якоби (см. 2.2), то равенство $df(x_0)=\mathbb{0}$ равносильно тому, что $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)=\mathbb{0}$ ($k=1,2,\ldots,\nu$).

Если, кроме того, существуют все частные производные второго порядка в точке x_0, тогда $d^2 f(x_0)(u,v)=\sum_{i,j=1}^{\nu} f''_{ij}(x_0)\,u_i v_j$ $(u=(u_1,u_2,\ldots,u_\nu),$ $v=(v_1,v_2,\ldots,v_\nu))$ и знакоопределенность билинейного функционала означает знакоопределенность квадратичной формы, определяемой матрицей, составленной из производных $f''_{ij}(x_0)$ ($i,j=1,2,\ldots,\nu$).

5.2. Рассмотрим определенную в X функцию и такое множество $M\subset X$, что $M\cap Q_f\neq\varnothing$. Точку локального экстремума сужения f на множество M называют точкой экстремума *относительно множества* M , или точкой *относительного экстремума* f , а значение f в этой точке называют экстремумом f относительно M, или относительным экстремумом функции f .

Следующую теорему назовем теоремой о необходимых условиях относительного экстремума.

ТЕОРЕМА 2(5.7). Пусть X, Y – нормированные пространства, f – вещественная функция, заданная в точках из X и G – отображение из X в Y. Рассмотрим множество $M=\{x\in X: G(x)=\mathbb{0}\}$, точку $x_0\in M\cap\Omega_f^0\cap\Omega_G^0$ и предположим, что выполнены следующие условия:

1) Y – полное нормированное пространство;

2) существует дифференциал Гато $df(x_0)$;

3) в точках некоторой окрестности $U\subset\Omega_G^0$ точки x_0 существует непрерывный дифференциал Гато $dG(x)$ $(x\in U)$ и отображение $x\longmapsto dG(x)(x\in U)$ непрерывно в точке x_0;

4) существует непрерывный правый обратный к $dG(x_0)$, т.е. такой оператор Γ_0, что $dG(x_0)\Gamma_0=I_Y$, где I_Y – тождественное отображение Y на себя;

5) в точке x_0 функция f имеет экстремум относительно множества M.

Тогда можно указать такой функционал λ на Y, что $df(x_0)-\lambda\, dG(x_0)=\mathbb{0}$. Иначе говоря, при высказанных условиях дифференциал Гато функции $f(x)-\lambda\, G(x)$ в точке x_0 представляет собой тождественно равный нулю функционал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем справедливость теоремы только для случая, когда x_0 – точка минимума f относительно M. Случай максимума легко к этому сводится.

Рассмотрим непрерывный оператор $P=\Gamma_0\, dG(x_0)$, определенный на X и принимающий значения также в X. Поскольку $P^2=\Gamma_0 dG(x_0)\Gamma_0 dG(x_0)=\Gamma_0 dG(x_0)=P$, то P – проектор в X. Обозначим через Q дополнительный к P проектор $Q=I_X-P$ и через X_P, X_Q – алгебраически дополнительные подпространства векторного пространства X, порожденные соответственно проекторами P, Q (определения см. в УI.2.I). На произведении $X_P\times X_Q$ определим действующее в Y отображение H, полагая $H:(x_1,x_2)\longmapsto G(x_1+x_2)$, и покажем, что удовлетворены все условия теоремы о неявном отображении.

Действительно, поскольку $G(x_0)=\mathbb{0}$ и x_0 единственным образом представимо в виде суммы $x_0=x_P^0+x_Q^0$, где $x_P^0=P(x_0)\in X_P$, $x_Q^0=Q(x_0)\in X_Q$, то $H(x_P^0,x_Q^0)=G(x_0)=\mathbb{0}$. Непрерывность H в (x_P^0,x_Q^0) следует из непрерывности операции сложения в топологическом векторном пространстве и непрерывности G в точке x_0.

В силу непрерывности операции сложения окрестность U содержит окрестность вида U_P+U_Q , где U_P – окрестность точки x_P^0, а U_Q – окрестность точки x_Q^0, в связи с чем можно считать, что $U=U_P+U_Q$.

Поскольку G дифференцируемо в смысле Гато в точках $x\in U$, то существуют частные дифференциалы $d_P G(x), d_Q G(x)$ отображения G по подпространствам X_P, X_Q соответственно. Так как

$$d_P G(x)(v)=\lim_{t\to 0}\frac{G(x+tv)-G(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{H(x_P+tv,x_Q)-H(x_P,x_Q)}{t}=d_I H(x_P,x_Q),$$

$$d_Q G(x)(w)=\lim_{t\to 0}\frac{G(x+tw)-G(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{H(x_P,x_Q+tw)-H(x_P,x_Q)}{t}=d_{II} H(x_P,x_Q)$$

для $x_P\in U_P, x_Q\in U_Q, v\in X_P, w\in X_Q$, то при каждом $(x_P,x_Q)\in U_P\times U_Q$ существуют дифференциалы Гато $d_I H(x_P,x_Q)=d_P G(x)$, $d_{II}H(x_P,x_Q)=d_Q G(x)$ по подпространствам X_P, X_Q соответственно. Заметим, что из непрерывности отображения $x\longmapsto dG(x)$ в точке x_0 следует непрерывность отображений $(x_P,x_Q)\longmapsto d_I H(x_P,x_Q)$, $(x_P,x_Q)\longmapsto d_{II}H(x_P,x_Q)$ в точке (x_P^0,x_Q^0).

Покажем, что Γ_0 – обратный к $d_I H(x_P^0,x_Q^0)$ оператор. Заметим, что Γ_0 определен на всем Y и множество его значений совпадает с подпространством X_P. Возьмем элементы $v\in X_P$, $y=\Gamma_0^{-1}(v)$. Так как $dG(x_0)(\Gamma_0(y))=$ $=y$, то

$$\Gamma_0(d_I H(x_P^0,x_Q^0)(v))=(\Gamma_0 d_P G(x_0)\Gamma_0)(y)=\Gamma_0(y)=v$$

и для каждого $v\in X_P$

$$(d_I H(x_P^0,x_Q^0)\Gamma_0)(y)=d_P G(x_0)(\Gamma_0(y))=dG(x_0)(\Gamma_0(y))=y$$

для любого $y\in Y$, следовательно, Γ_0 представляет собой обратный к $d_I H(x_P^0,x_Q^0)$ оператор.

Итак, мы убедились в выполнении всех условий замечания 3 к теореме о неявном отображении, так что согласно результату этого замечания найдутся окрестности V, W точек x_P^0, x_Q^0 в нормированных пространствах X_P, X_Q соответственно и единственное отображение ψ , определенное на W и действующее в V такие, что $H(\psi(x_Q),x_Q)=$ $=G(\psi(x_Q)+x_Q)=0$ для всех $x_Q\in W$. Кроме того, $\psi(x_Q^0)=x_P^0$, отображение ψ имеет в точке x_Q^0 дифференциал Гато, равный $d\psi(x_Q^0)=-\Gamma_0 d_{II}H(x_P^0,x_Q^0)$. Понятно, что можно считать V, W содержащимися соответственно в U_P, U_Q , иначе говоря, можно считать, что выполнено включение $V+W\subset U$.

Определим на W функцию $f_0: z\longmapsto f(\psi(z)+z)$ ($z\in W$) и покажем, что $x_Q^0=Q(x_0)$ – точка локального минимума функции f_0. Рассмотрим какое-либо $z\in W$. Тогда $x=\psi(z)+z\in V+W\subset U$, кроме того, $G(x)=G(\psi(z)+z)=0$, так что $x \in M$. Согласно предположению $f(x) \geq f(x_0)$, откуда, учитывая, что $x = \Psi(z) + z$, $x_0 = x_P^0 + x_Q^0$, имеем $f_0(z) = f(\Psi(z)+z) \geq f(\Psi(x_Q^0) + x_Q^0) = f_0(x_Q^0)$, следовательно, x_Q^0 – точка локального минимума функции f_0.

Найдем дифференциал функции f в точке x_Q^0: $df_0(x_Q^0) = df(\Psi(x_Q^0)+x_Q^0) =$

$$= df(\Psi(x_Q^0)+x_Q^0)d[\Psi(x_Q^0)+x_Q^0] = df(x_0)(d\Psi(x_Q^0)+I_X) = -df(x_0)\Gamma_0 dG(x_0) + df(x_0).$$

Рассмотрим на пространстве Y функционал $\lambda: y \mapsto df(x_0)(\Gamma_0(y))$ $(y \in Y)$ и покажем, что функционал $F = df(x_0) - \lambda\, dG(x_0)$ нулевой. Действительно, если $v \in X$, то, поскольку x_Q^0 – точка локального экстремума функции f_0, для $v_Q \in X_Q$ имеем $df_0(x_Q^0)(v_Q) = 0$, следовательно,

$$F(v_Q) = df(x_0)(v_Q) - \lambda\, dG(x_0)(v_Q) =$$

$$= df(x_0)(v_Q) - df(x_0)(\Gamma_0(dG(x_0)(v_Q))) = df_0(x_Q^0)(v_Q) = 0.$$

Для элементов $v_P \in X_P$ выполнено

$$F(v_P) = df(x_0)(v_P) - (df(x_0)\Gamma_0 dG(x_0))(v_P) = df(x_0)(v_P) - df(x_0)(v_P) = 0.$$

Наконец, для $v \in X$, воспользовавшись разложением $v = v_P + v_Q$, получаем $F(v) = F(v_P + v_Q) = F(v_P) + F(v_Q) = 0$, что и требовалось.

5.3. Выясним специфику требований и результатов теоремы о необходимых условиях относительного экстремума в некоторых частных случаях, не приводя при этом доказательств сформулированных ниже фактов из теории векторных пространств.

Предположим сначала, что пространство Y конечномерно и имеет размерность m. Фиксируем какой-либо базис $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ в Y. Обозначим через G_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) координатные функционалы отображения G. Дифференцируемость в смысле Гато отображения G в некоторой точке x_0 равносильна дифференцируемости в этой точке всех функций G_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), при этом $dG(x_0) = (f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0))$, где $f_i(x_0) = dG_i(x_0)$ (см. пункт 2.4).

Обращая внимание на условия существования обратного к $dG(x_0)$ оператора, отметим в этом плане такой факт.

I. Предположим, что мы находимся в описанной выше ситуации. Тогда равносильны следующие утверждения:

I) существует правый обратный к оператору $dG(x_0)$;

2) функционалы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы как элементы векторного пространства X' всех линейных функционалов на X;

3) множество значений оператора $dG(x_0)$ совпадает с Y.

К имеющимся предположениям добавим предположение о том, что пространство X также конечномерно. Тогда можно сформулировать критерий существования правого обратного к $dG(x_0)$ в терминах, относящихся к производным по базисным направлениям. Допустим, что размерность X равна ν , и фиксируем в X базис $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_\nu\}$. Напомним (см. 2.2), что в этом случае линейный оператор $dG(x_0)$ определяется матрицей Якоби отображения G в точке x_0.

П. Оператор $dG(x_0)$ имеет правый обратный в том и только в том случае, если ранг матрицы Якоби отображения G в точке x_0 равен размерности m пространства Y.

Коротко обсудим результат теоремы в рассматриваемом случае. Предположим, что Y конечномерно и в нем фиксирован базис H . Тогда линейный функционал λ определяется вектором-столбцом $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)' \in R^m$ (см. 2.2): если $w=\sum_{k=1}^{m} w_k h_k$ - элемент пространства Y, то $\lambda(w)=\sum_{k=1}^{m} \lambda_k w_k$.

Если теперь предположить, что выполнены все условия теоремы, то результат ее можно сформулировать в такой форме: найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$df(x_0)-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k dG_k(x_0)=0. \qquad (3)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ называют **множителями Лагранжа**.

В случае, когда $X=R^\nu$, $Y=R^m$ и в качестве базисов выбраны канонические базисы, соотношение (3) можно записать как систему равенств

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(x_0)-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \varepsilon_i}(x_0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,\nu). \qquad (4)$$

Отметим, что система (4) может быть использована для получения информации о точках относительного экстремума функции f , а именно, добавляя к (4) соотношения, определяющие множество M , можно утверждать, что все точки относительного экстремума функции f лежат в множестве решений системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_i}(x_0)-\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial \varepsilon_i}(x_0)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,\nu), \\ &G_k(x_0)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,m), \end{aligned} \qquad (5)$$

состоящей из $\nu+m$ уравнений и имеющей $\nu+m$ неизвестных: m координат вектора $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ и ν координат вектора $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_\nu^0)$. Напрасно думать, что все решения системы (5) приводят к точкам экстремума функции f относительно M - решений может оказаться больше, чем точек относительного экстремума.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Глеб Павлович Акилов

Владимир Николаевич Дятлов

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Темплан 1978, поз.73

Ответственный редактор С.С.Кутателадзе

Редактор М.Н.Рашевская

Корректор О.А.Каратыгина

Обложка художника Н.А.Савельевой

Подписано в печать 24.03.78		Тираж 600 экз.
Формат 60x84, I/I6.	Бумага оберточная	Цена 25 коп.
Заказ № 393	Объем 4,75 п.л. 4,5 уч.-изд.л.	

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
ротапринт НГУ, 630090, Новосибирск, 90, Пирогова, 2.