Джин Акияма • Мари-Джо Руис

СТРАНА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЧУДЕС

Иллюстрации Франсес Алькарас

Династия

СТРАНА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЧУДЕС

A Day's Adventure in Math Wonderland

Jin Akiyama
Tokai University, Japan

Mari-Jo Ruiz
Ateneo de Manila University, Philippines

Illustrations by Frances Alcaraz

World Scientific
NEW JERSEY · LONDON · SINGAPORE · BEIJING · SHANGHAI · HONG KONG · TAIPEI · CHENNAI

СТРАНА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЧУДЕС

Джин Акияма

Университет Токай, Япония

Мари-Джо Руис

Университет Атенео в Маниле, Филиппины

Иллюстрации Франсес Алькарас

Издание 3-е, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2014

ББК 51
УДК 22.1

Перевод с английского М. И. Бабиковой

Издание подготовлено при поддержке
Фонда Дмитрия Зимина «Династия»

Династия

Фонд некоммерческих программ «Династия» основан в 2002 году Дмитрием Борисовичем Зиминым, почетным президентом компании «Вымпелком». Приоритетные направления деятельности Фонда — развитие фундаментальной науки и образования в России, популяризация и просвещение. «Библиотека «Династии» -- проект Фонда по изданию современных научно-популярных книг, отобранных экспертами-учеными. Книга, которую вы держите в руках, выпущена в рамках этого проекта.

Более подробную информацию о фонде «Династия» вы найдете по адресу www.dynastyfdn.ru.

Джин Акияма, Мари-Джо Руис

А 39 Страна математических чудес / Перевод с англ. М. И. Бабиковой. — 3-е изд., стер. — М.: Издательство МЦНМО, 2014. — 240 с.: илл. — ISBN 978-5-4439-0132-9.

ISBN 978-981-281-476-0 (англ.)
ISBN 978-5-4439-0132-9 (рус.)

Издательство МЦНМО
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел.: (499) 241-74-93.

Подписано к печати 27.12.13. Формат 70x100/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Букварная.
Печ. л. 15. Тираж 3 000 экз. Заказ № ВЗК-07161-13.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография», филиал «Дом печати-ВЯТКА» в полном соответствии с качеством предоставленных оригиналов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. Факс (8332)53-53-80, (8332)62-10-36.
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: order@gipp.kirov.ru

Предисловие к русскому изданию

Предлагаемая книга, как и то, что в ней описывается, — музей математических моделей Mathematical Wonderland, созданный Джином Акиямой на острове Хоккайдо, — уникальны. Музеи науки давно появились во многих странах мира. В нашей стране, помимо знаменитого Политехнического музея в Москве, такой музей был и в Ленинграде. Это — Дом занимательной науки, созданный Я. И. Перельманом и существовавший с 1935 года вплоть до начала войны.

В музеях науки, как правило, есть и математические экспонаты, однако математический раздел в них занимает малую долю общей музейной экспозиции, как бы подтверждая тем самым расхожее мнение: математика, дескать, слишком «скучна и абстрактна» для широких масс. Однако в математическом музее, созданном профессором Джином Акиямой, где собраны сотни различных математических моделей, математика представлена живо, увлекательно, наглядно. Более того, у юных посетителей музея Акиямы имеется возможность потрогать модели руками, поиграть с ними и поэкспериментировать, что особенно важно для развития школьников.

Известный японский математик, специалист по комбинаторике, профессор Джин Акияма в начале своей педагогической карьеры в основном занимался образованием и подготовкой математически одарённых детей, в частности участников и победителей разного уровня олимпиад, от школьных до международных. Но со временем профессор Акияма пришёл к выводу, что гораздо важнее заниматься популяризацией математики «не у вершины пирамиды, а у её основания». «Спустившись с вершины пирамиды», Джин Акияма стал ведущим научно-популярной программы по математике на главном японском телеканале NHK. Эта программа играет важную роль по воспитанию в широких слоях японского общества уважительного отношения к науке и, особенно, к математике.

Джин Акияма очень известен в Стране восходящего солнца. Это бросается в глаза, когда оказываешься с ним на улице или заходишь в кафе, где сэнсэй сразу оказывается в центре внимания...

Акияма читает до 200 лекций в год в различных уголках страны, причём делает это темпераментно и артистично. Приглашения прочитать лекцию приходят от самых разных лиц и организаций: от школьников и учителей, от управляющих компаниями и банками, из школ, университетов, больниц и даже тюрем. И неизменно эти лекции имеют успех.

В 2007 году на Фестивале художественной математики, организованном Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН для московских школьников и учителей, Джин Акияма устроил беспрецедентное зрелище под названием «Математический цирк». Этот спектакль имел грандиозный успех.

Свои выступления Джин Акияма строит не на сугубо теоретических лекциях, а на математических опытах, которые он ставит, используя многочисленные остроумные модели. Некоторые из этих моделей, например треугольник Рело, являются материальной реализацией общеизвестных идей. Другие же модели были изготовлены по его личным идеям и являются запатентованными ноу-хау самого Джина Акиямы. Копии этих моделей и составляют экспозицию его математического музея.

Хочется надеяться, что педагогический опыт Акиямы будет использован и в России. Для изготовления большинства моделей не так уж много и нужно. Моделирование своими руками позволяет ребятам не только глубже разобраться в конкретной математической теме, но и, как хорошо известно, благотворно сказывается на их интеллектуальном развитии.

Н. Н. Андреев, Н. П. Долбилин

Посвящается Джейви Руису,

с пожеланием научиться любить математику,
как Итиро,

и

Гисаку Накамуре,

с пожеланием продолжать заниматься математикой
и после девяноста лет.

1

Математика – это здо́рово?

Раздается звонок на перемену. К площадке со всех сторон сбегаются мальчишки.

Итиро высматривает своих друзей Дзяя и Ки́но. Вот они, среди ребят, окруживших Кэнтаро. Похоже, они полностью захвачены его рассказом.

— Интересно, о чём это он говорит, — Итиро подходит поближе.

— Это было здорово! Я ездил на трёхколёсном велосипеде с квадратными колёсами... Сбега́л по музыкальной лестнице... Быстрее всех съехал с огромной горки... — Кэнтаро рассказывает без умолку.

— Где это он был? — спрашивает Итиро.

— В Математической Стране Чудес, — отвечает Кино.

— А, опять Страна Чудес, — говорит Итиро.

— Почему опять? — удивляется Дзяй.

— Моя бабушка за завтраком только об этом и говорила. Она видела её по телевизору. Говорит, будто всем ребятам нравится играть с этими математическими штуками, — отвечает Итиро. И добавляет:

— Не представляю, что там может быть интересного.

— Зря ты так про математику, — возражает Дзяй.

Итиро учится хорошо и легко, но математика кажется ему скучной. На уроках по этому предмету он едва не засыпает. К тому же домашние задания по математике отнимают слишком много времени от компьютерных игр, телевизора и ещё одного его любимого занятия — разбирания и собирания игрушечных роботов.

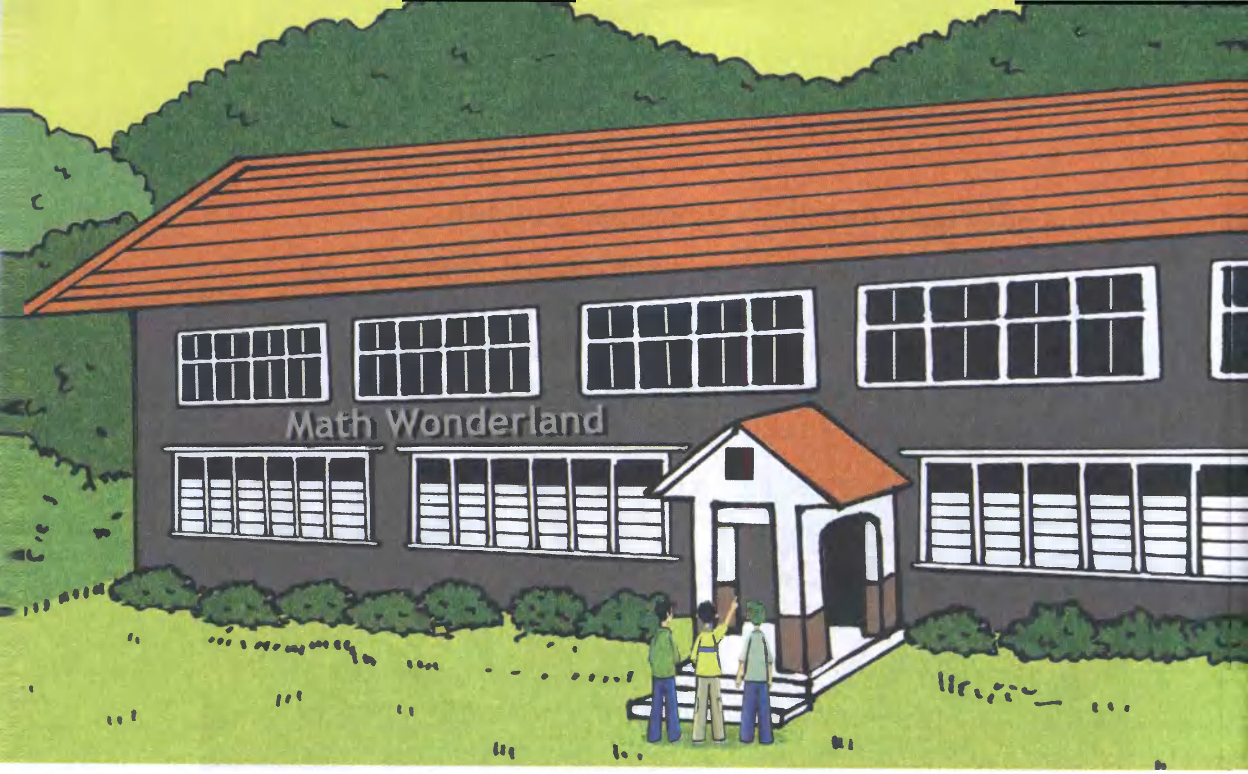
Кино, как всегда лёгкий на подъём, хлопает его по плечу:

— Поехали туда в выходные!

— Я бы тоже хотел съездить, — говорит Дзяй.

Вряд ли Итиро поехал бы один, но с друзьями — другое дело.

И вот Итиро, Дзяй и Кино садятся в автобус. Вскоре они уже стоят перед обычным двухэтажным зданием.



— Вы уверены, что мы не ошиблись? — спрашивает Кино.

Он подходит к дому первым, Дзяй и Итиро следуют за ним. На двери ребята видят вывеску:

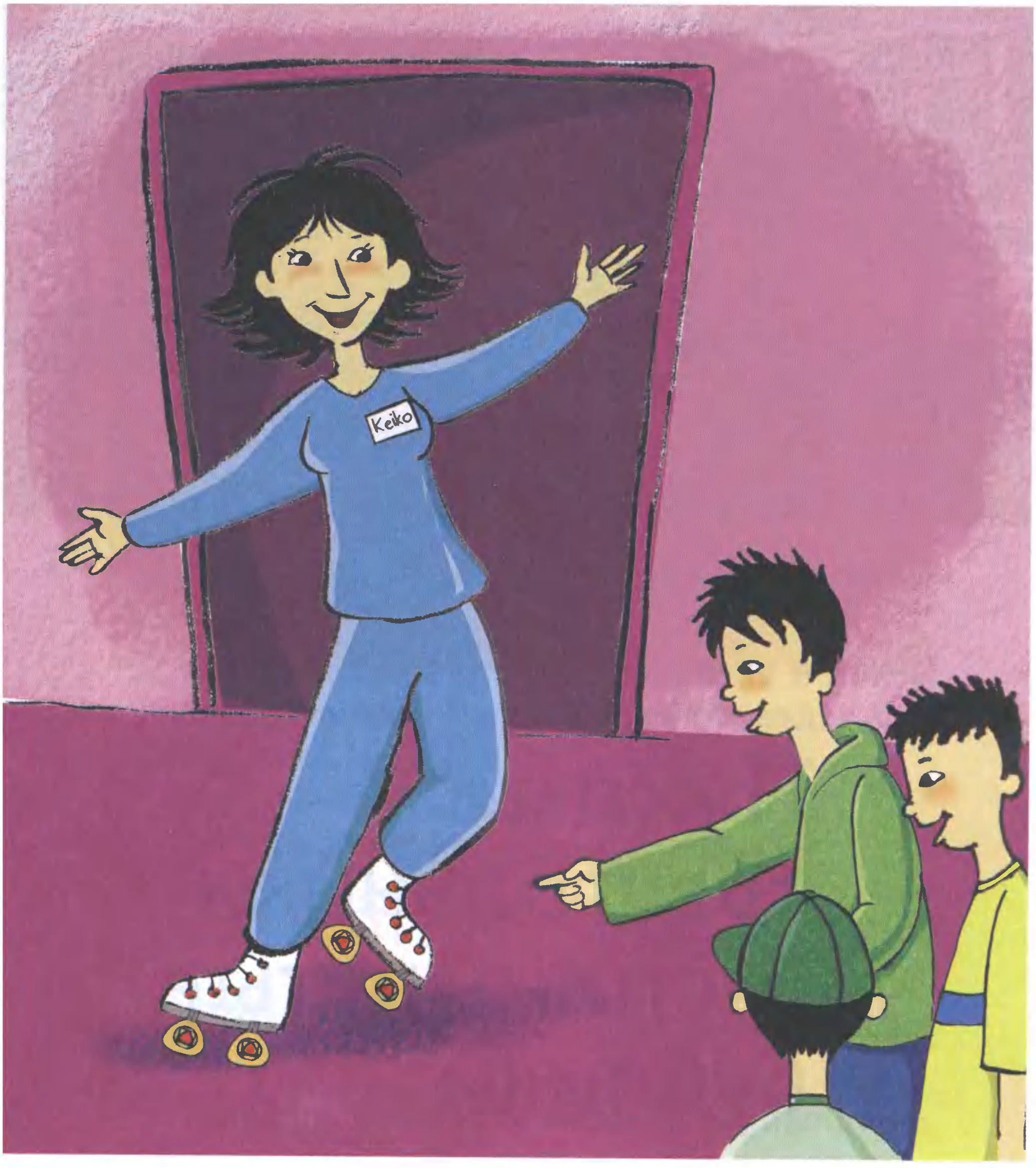
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТРАНА ЧУДЕС

Опасаясь разочароваться, они приоткрывают дверь.

Изнутри доносятся звонкие и радостные детские голоса.

2

Пухлые треугольники и сплюснутые бублики


Keiko

У входа с ними здоровается молодая женщина. На её бейдже написано имя Кэйко. Ребята сразу обращают внимание на её роликовые коньки.

— Странные колёса, — замечает Кино, — будто бублики, сплюснутые по краям.

— В центре что-то вроде пухлого треугольника, который поворачивается внутри квадрата, — добавляет Итиро.

— Причём пухлый треугольник везде касается квадрата при вращении колеса, — замечает Дзяй, наблюдая за движением роликов.

— Здорово! Никогда раньше не видел таких колёс, — говорит Кино, прикидывая, где бы купить себе такие коньки.

Но раньше, чем он успевает спросить, Кэйко говорит:

— Вы можете взять себе такие напрокат, чтобы ездить по нашей Стране Чудес.

Она ведёт ребят к стойке, где им выдают ролики. Друзьям не терпится попробовать их в действии, коньки плавно скользят по полу.

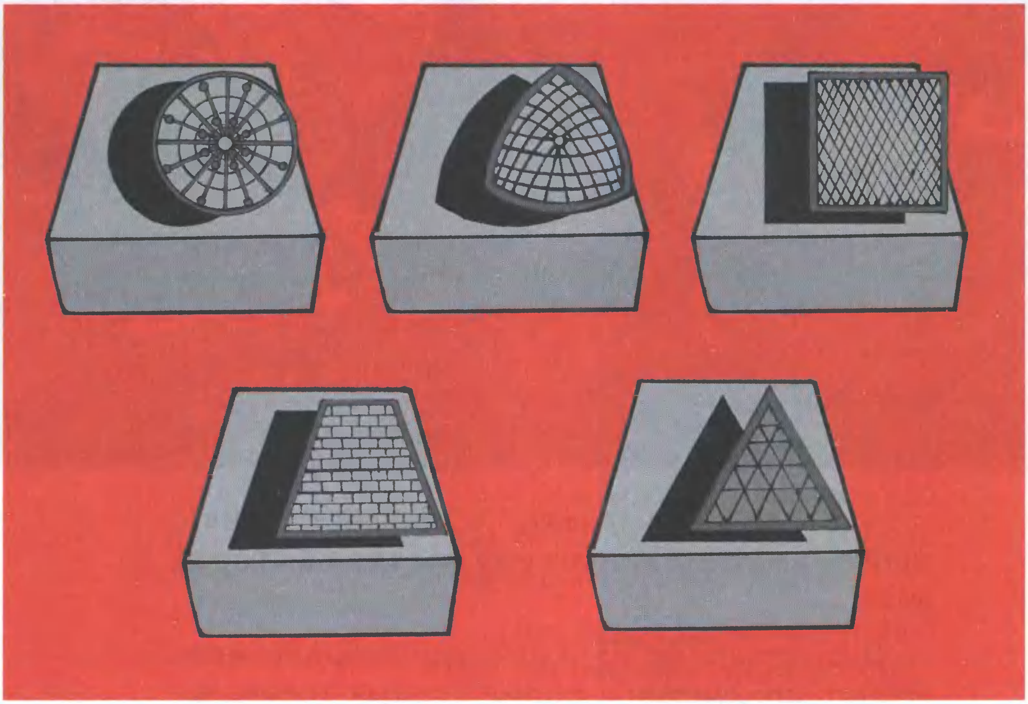
— Как же они устроены? — спрашивает Итиро.

— Вы скоро узнаете, — обещает Кэйко, провожая ребят к пологому въезду на второй этаж.

Она приводит их в зал, где собрано множество предметов в форме пухлых треугольников и сплюснутых бубликов. Табличка у двери гласит:

КРИВЫЕ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

В одном из углов виден небольшой люк, имеющий форму пухлого треугольника, и крышка той же формы. Есть и другие люки с крышками — круглый, квадратный, треугольный, трапециевидный.



Кэйко оставляет ребят с одним из сотрудников.

— Меня зовут Кодзи, — говорит он и предлагает:

— Попробуйте подвигать эти крышки и посмотрите, что получится.

Мальчики пробуют крышки по очереди. Дзяй выбирает квадратную.

— Эй, посмотрите, крышка проваливается! — зовет он друзей.

— Знаешь почему? — спрашивает Кодзи.

— Конечно! Сторона квадрата короче диагонали, поэтому, когда я поворачиваю крышку вот так, она проваливается.

Из трёх друзей Дзяй самый сообразительный.

Итиро и Кино заняты своими исследованиями.

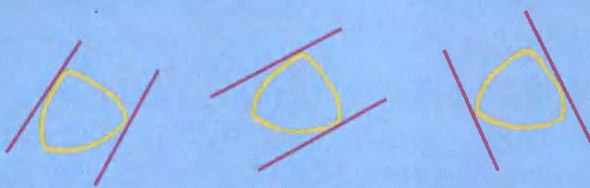
— Треугольник и трапеция тоже проваливаются, а круг и пухлый треугольник — нет, — сообщает Итиро.

— Чем же отличаются эти две фигуры? — задается вопросом Кино.

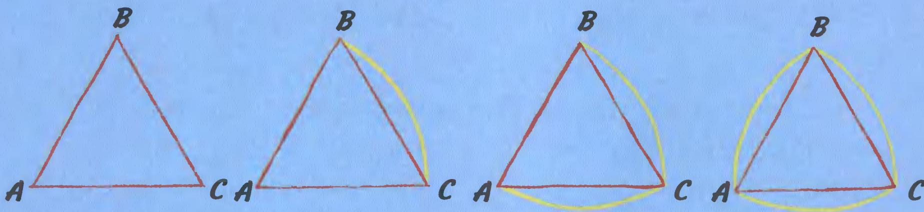
— Они ограничены кривыми постоянной ширины, — говорит Кодзи, показывая на плакаты.

Кривые постоянной ширины

Ширина кривой — это расстояние между двумя параллельными прямыми, касающимися кривой с противоположных сторон. Если это расстояние одно и то же для всех направлений, то такую кривую называют кривой постоянной ширины.



Построение треугольника Рело



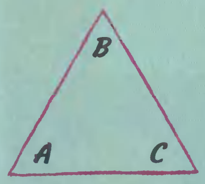
Сначала построим равносторонний треугольник *ABC*.

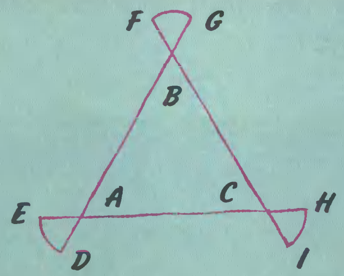
Проведём дугу *BC* окружности с центром в точке *A*, дугу *CA* окружности с центром в точке *B* и дугу *AB* окружности с центром в точке *C*.

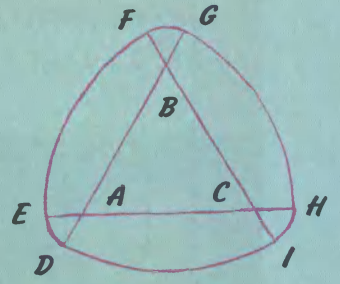
Поскольку треугольник *ABC* равносторонний, эти три окружности имеют один и тот же радиус. Дуги *BC*, *CA* и *AB* образуют границу треугольника Рело.

— Треугольник Рело — вот как называется пухлый треугольник! — радуется Кино.

Построение других кривых постоянной ширины







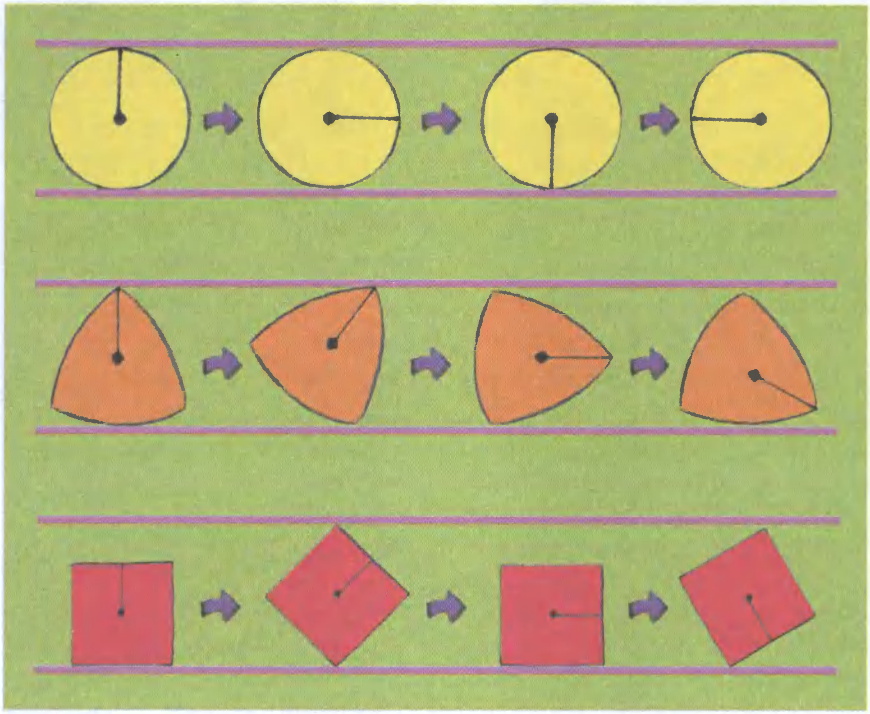
Сначала построим равносторонний треугольник *ABC*.

В каждой вершине продолжим сходящиеся в ней стороны на одно и то же небольшое расстояние. При этом вне треугольника образуются три угла по 60 градусов.

Внутри этих углов проведём дугу *DE* окружности с центром в точке *A*, дугу *FG* окружности с центром в точке *B* и дугу HI окружности с центром в точке *C*. Эти три окружности имеют одинаковый радиус, так как мы продолжали стороны треугольника на одинаковое расстояние.

Проведём дугу *FE* окружности с центром в точке *C*, дугу *GH* окружности с центром в точке *A* и дугу *ID* окружности с центром в точке *B*. Эти три окружности имеют одинаковый радиус. Все построенные дуги образуют кривую постоянной ширины.

Для иллюстрации Кодзи вращает несколько фигур между двумя параллельными прямыми. При этом круг и треугольник Рело касаются обеих прямых в каждый момент своего движения, а квадрат нет.



— Фигуры постоянной ширины ровно катятся по плоской поверхности. Чувствуете, как гладко движутся ваши коньки?

— А есть другие кривые постоянной ширины? — спрашивает Кино.

— Принцип Рело распространяется и на пятиугольники, шестиугольники и так далее, — отвечает Кодзи. Он показывает стенд, на котором выставлены монета с Бермудских островов в форме треугольника Рело и старинная английская монета в форме семиугольника Рело.

Табличка в другой части зала гласит:

КВАДРАТНОЕ ОТВЕРСТИЕ

— Эта замечательная машина сверлит квадратные отверстия! — объявляет Кодзи.

— Неужели? — сомневается Итиро.

Дзяй и Кино тоже настроены недоверчиво.

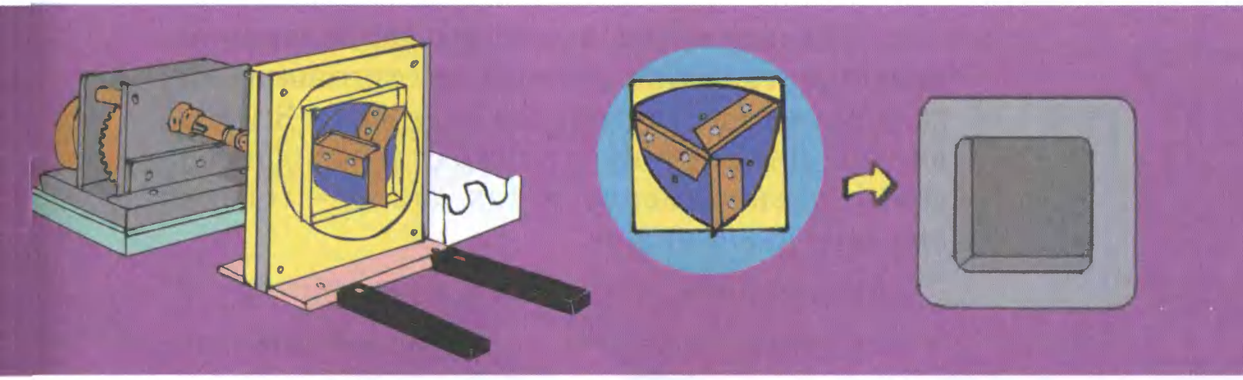
— Пусть кто-нибудь из вас подержит этот кусок пенопласта напротив резца и проверит, — предлагает Кодзи.

Итиро шагает вперёд и внимательно смотрит на машину. Его очень интересуют различные механизмы. Резец имеет вид пухлого треугольника. Когда Кодзи включает механизм, Итиро замечает, что лезвия движутся вдоль границ квадрата. Они перемещаются слева направо по верхней стороне, затем вниз по правой стороне, справа налево внизу и затем опять наверх, точно так же, как пухлый треугольник в роликовых коньках. Вращаясь, сверло касается всей границы квадрата, кроме самых угловых точек.

— Ну-ка, подставляй пенопласт, — говорит Кодзи.

Итиро так и поступает. Когда машина выключается, в куске пенопласта действительно остается квадратная дыра, хотя и немного скруглённая в углах.

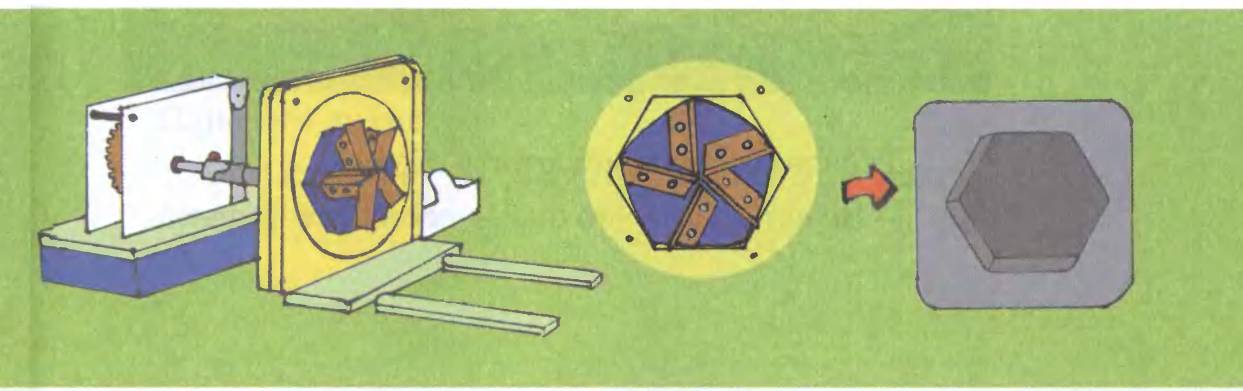
— Ух ты! — хором говорят мальчики.



Возле следующей машины написано:

ШЕСТИУГОЛЬНОЕ ОТВЕРСТИЕ

Ребята замечают, что резец этой машины образует пухлый пятиугольник. Недоверия у них уже поубавилось. Они верят, что действительно увидят шестиугольное отверстие. Чтобы окончательно в этом убедиться, Кино помогает запустить машину.



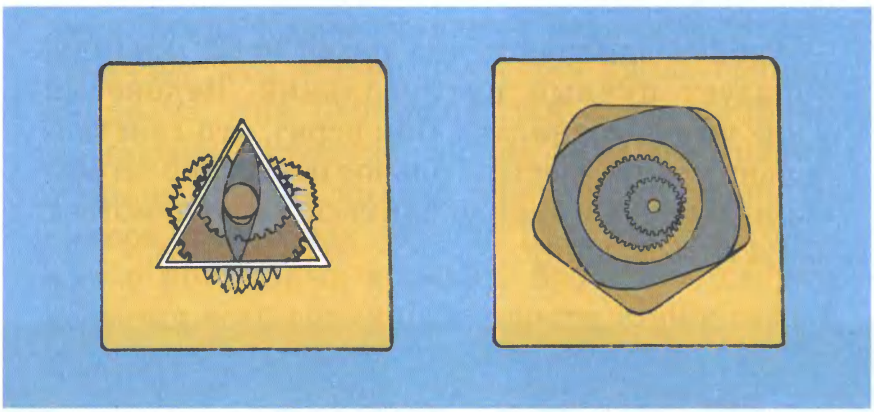
Тем временем Дзяй, который соображает быстрее всех, кое-что понял.

— Пухлый треугольник высверливает квадратное отверстие, пухлый пятиугольник высверливает шестиугольное отверстие. Всё правильно! Для восьмиугольного отверстия нужно семиугольное сверло, и так далее, — говорит он с победным видом.

— Именно так, — ободряет его Кодзи.

— А отверстия с нечетным числом сторон вы можете делать? — спрашивает Итиро.

— Да, у нас есть резцы для треугольных и пятиугольных отверстий. Но они не имеют постоянной ширины, — отвечает Кодзи.



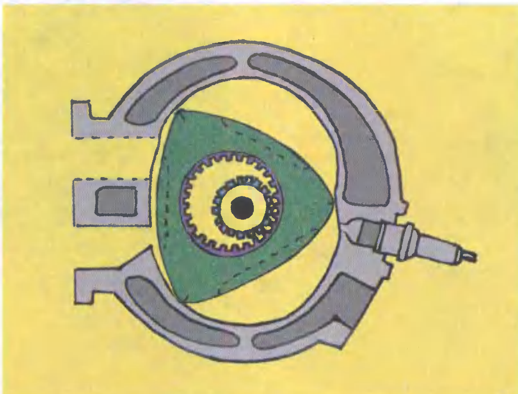
Ребята рассматривают эти лезвия.

— Но есть и кое-что ещё, — сообщает Кодзи.

Он подводит ребят к ещё одному устройству и говорит:

— Это роторная камера внутреннего сгорания — такая же, как в автомобилях.

— Здесь опять пухлый треугольник внутри капсулы, — замечает Кино.



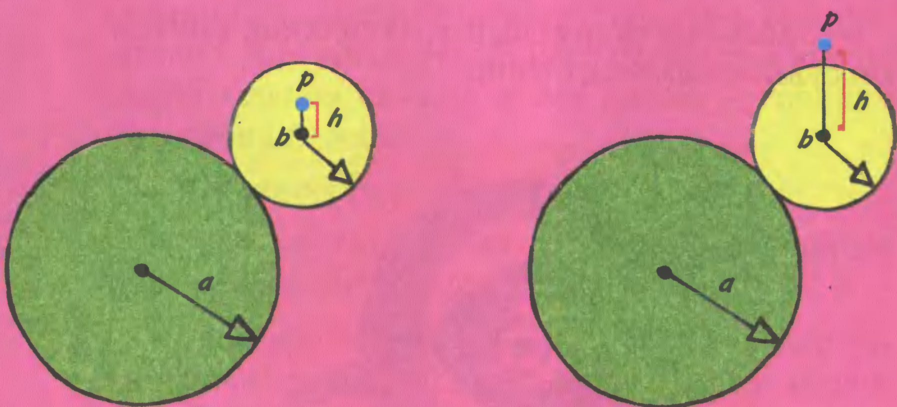
— Правильно, и эта капсула называется цилиндром двигателя, а треугольник Рело внутри него — ротор, — продолжает Кодзи.

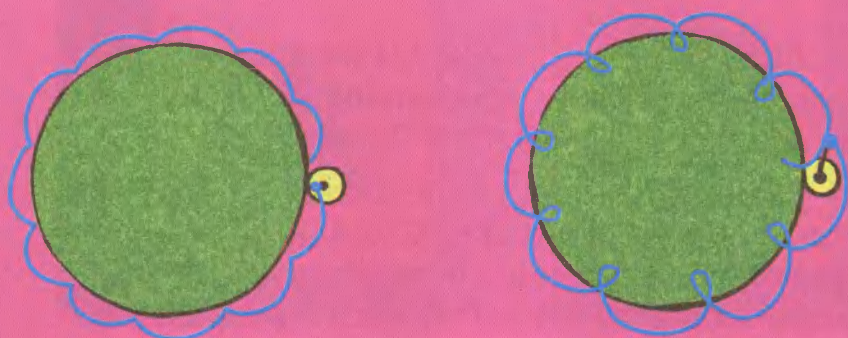
— Границей цилиндра является не окружность, как обычно, а эпитрохоида. В данном случае это след середины радиуса круга, который катится вокруг другого круга вдвое большего диаметра.

Он указывает на плакат, где показаны различные эпитрохоиды.

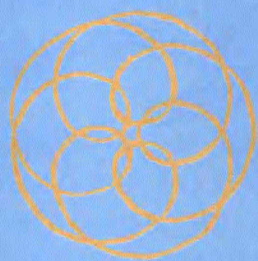
Эпитрохоида

Эпитрохоида – это кривая, описываемая точкой P, закреплённой на круге радиуса b, катящемся по окружности радиуса a.

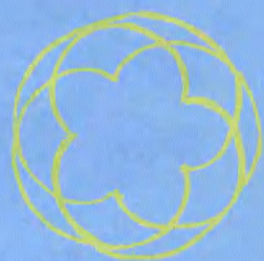




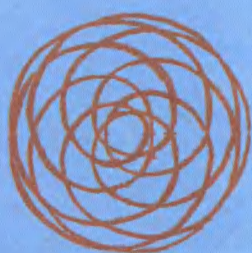
$a = 1,\ b = 0{,}2,\ h = 0{,}1$



$a = 1,\ b = 0{,}4,\ h = 1{,}2$

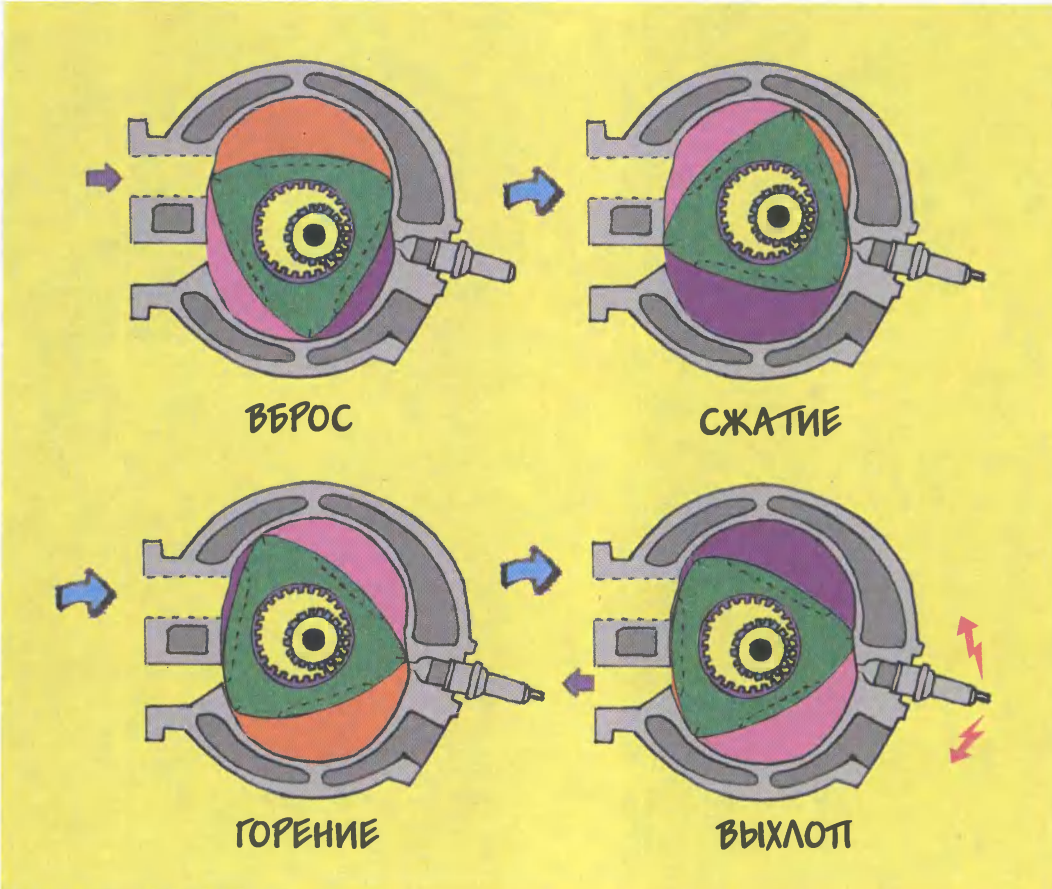


$a = 1,\ b = 0{,}6,\ h = 0{,}6$



$a = 1,\ b = 0{,}8,\ h = 2{,}6$

$a = 1,\ b = 0{,}5,\ h = 0{,}25$


ВБРОС
СЖАТИЕ
ГОРЕНИЕ
ВЫХЛОП

Кодзи показывает:

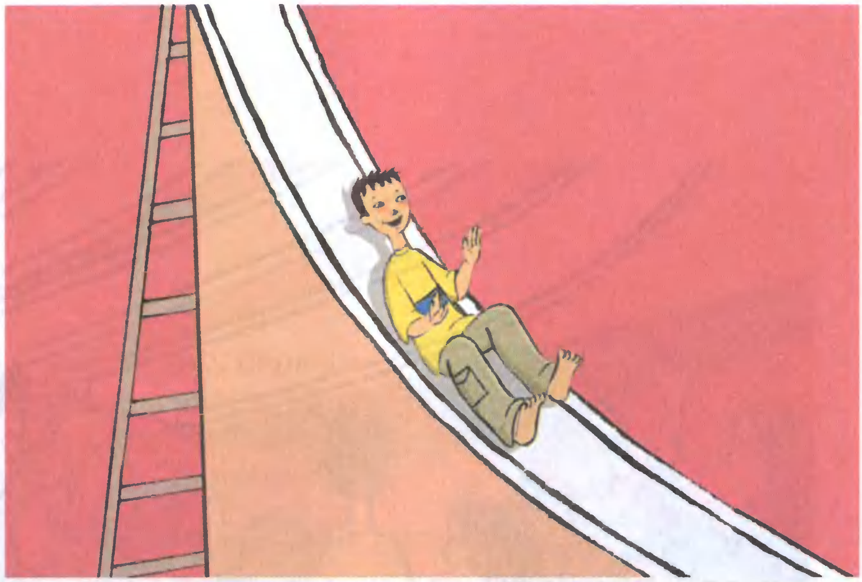
— Как вы видите, три вершины ротора касаются цилиндра в трёх точках, образуя три камеры. При вращении ротора объём каждой камеры поочередно увеличивается и уменьшается.

При расширении камеры вброса в неё втягивается смесь горючего с воздухом. Сокращение этой камеры сжимает смесь, при этом она перемещается к свечам зажигания. Они поджигают топливо. При его горении газы расширяются и толкают ротор. Это вызывает выброс выхлопных газов. Таким образом, процесс включает вброс, сжатие, горение и выхлоп. Горение создаёт тягу, которая двигает автомобиль, — заканчивает Кодзи свой рассказ.

Итиро не понял всех подробностей, но он, как и его друзья, теперь уверен, что треугольник Рело — очень полезная штука.

Они благодарят Кодзи и отправляются дальше, навстречу новым чудесам.

3



Замечательные кривые

Вдруг за следующей дверью ребята услышали радостные детские возгласы.

— Пойдёмте посмотрим, что там, — предлагает Итиро.

— Кажется, что-то интересное, — соглашается Кино.

Войдя, они увидели четыре горки, как на детских площадках, только побольше. Три из них изогнуты, а четвёртая — прямая. Наверху сидят четверо ребятишек, готовясь съезжать наперегонки.

— Конечно, первым будет тот, что на прямой горке, — говорит Кино. — Ведь известно, что самое короткое расстояние между двумя точками — по прямой.

Итиро и Дзяй не разделяют его уверенности.

— Давайте посмотрим, — осторожно говорит Дзяй.

Подают сигнал, и участники катятся вниз. Первым приезжает мальчик со второй горки слева. Как только все спустились, места наверху занимает следующая четвёрка.

И снова друзья видят, что побеждает скатившийся по второй горке.

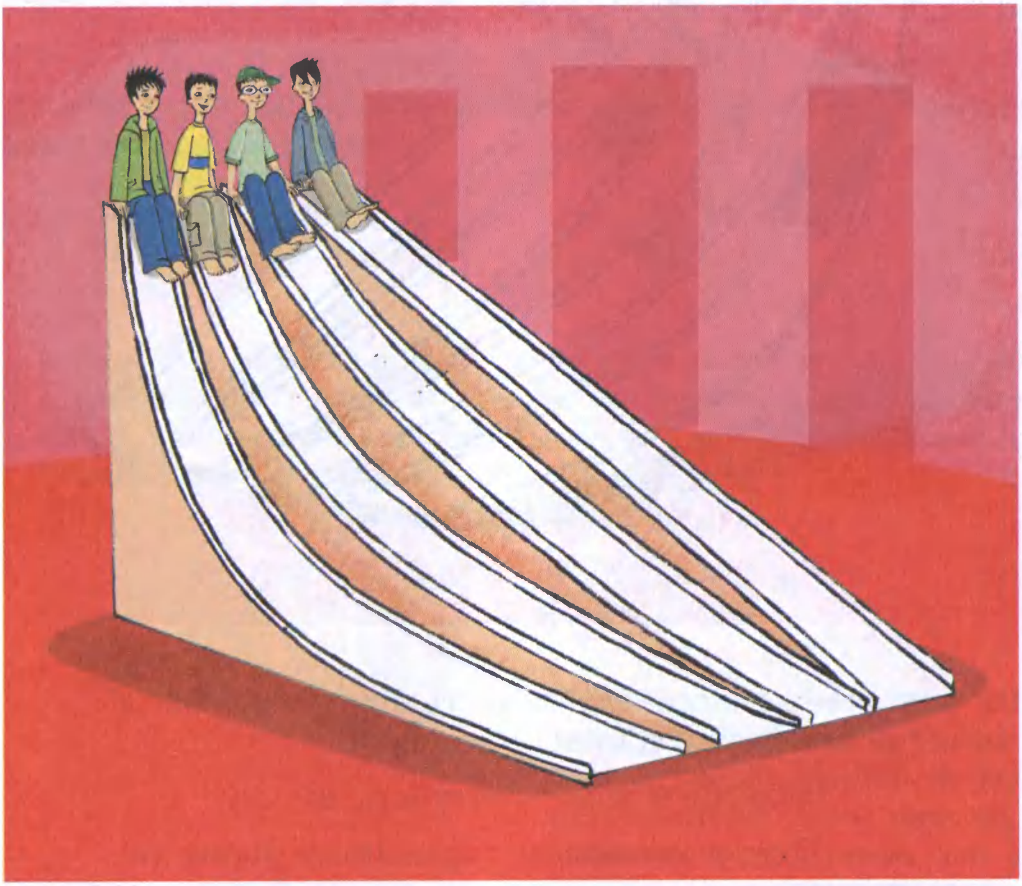
— Это совпадение или нет? — размышляет Итиро.

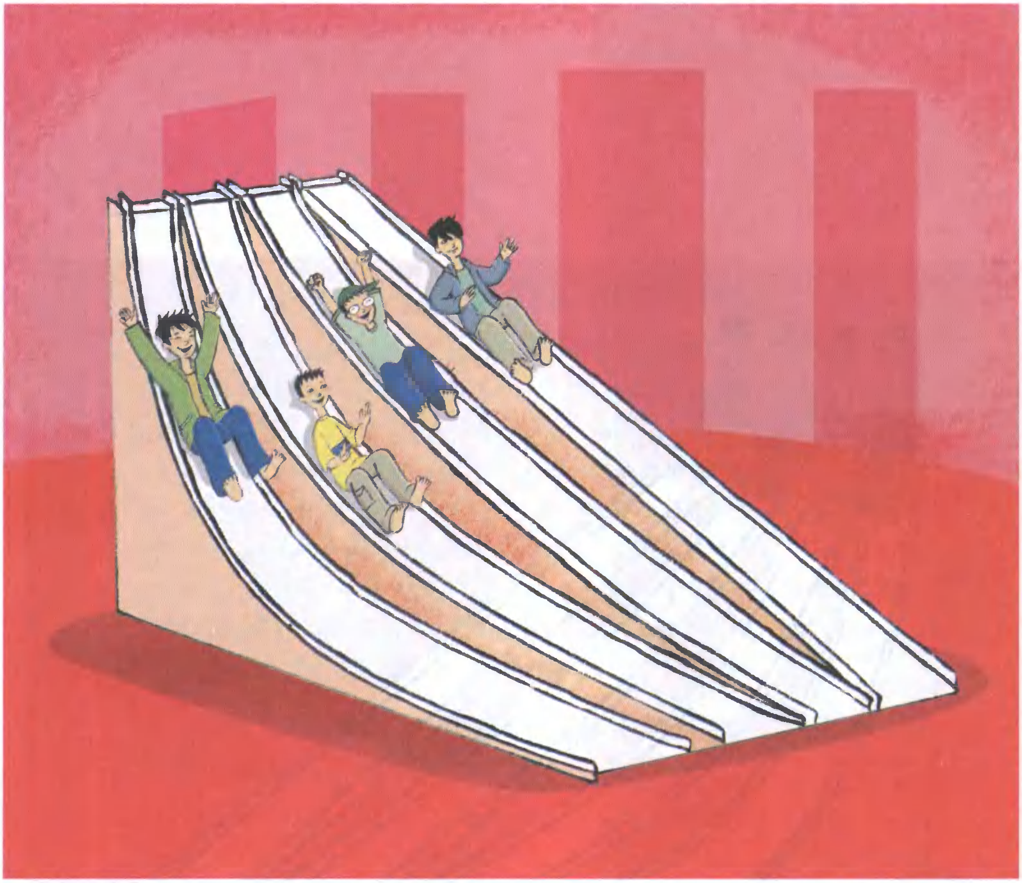
Мальчики наблюдают третий спуск, и результат опять тот же самый.

— Почему? — переглядываются они.

Сотрудника, который проводит состязание, зовут Мики. Он в очередной раз приглашает желающих скатиться, и трое друзей вызываются участвовать. К ним присоединяется ещё один мальчик. Ребята снимают свои ролики, и Мики взвешивает каждого. Более лёгким он даёт дополнительный груз, чтобы вес ребят стал одинаковым. Затем он выдаёт всем коврики, сидя на которых надо спускаться.

Каждый хочет попасть на вторую горку, но Мики определяет на неё Итиро.





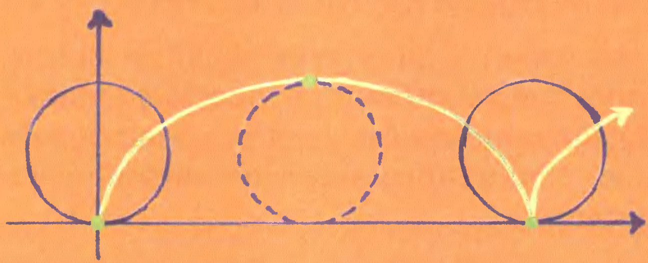
Как и следовало ожидать, Итиро спустился раньше всех. Ребята просят Мики:

— Объясните нам, пожалуйста, почему!

— Потому что вторая горка имеет форму циклоиды.

Он подводит их к плакату на стене.

Циклоида



Циклоида — это кривая, которую описывает выбранная точка окружности, катящейся по прямой линии.

Траектория наискорейшего спуска

Скатиться из одной точки в другую можно по многим кривым. Та кривая, по которой можно скатиться за наименьшее время, называется брахистохроной. Швейцарский математик Иоганн Бернулли в 1696 г. открыл, что брахистохроной является циклоида.

Таутохрона

Перевернутая циклоида имеет ещё одно свойство. Время, за которое точечная масса, двигаясь по ней под действием силы тяжести, достигает нижней точки, одно и то же независимо от точки начала движения. Кривая, обладающая этим свойством, называется таутохроной.

Это свойство циклоиды было открыто голландским ученым Христианом Гюйгенсом в 1673 г. Он использовал его в конструкции первых маятниковых часов. В них маятник качается между дугами перевернутой циклоиды, поэтому период его качания не зависит от размаха.

— Не могли бы вы это объяснить?

Дзяй имеет в виду утверждение на плакате, что циклоида обладает особым свойством: время, которое требуется телу для достижения нижней точки, не зависит от начальной точки на циклоиде.

— Хм, для настоящего объяснения нужны дифференциальные уравнения... Лучше я вам просто покажу, — предлагает Мики.

Они возвращаются к горкам.

— Пусть кто-нибудь из вас заберётся на вторую горку и по моей команде съедет вниз. Я засеку время, которое занимает спуск.

Кино вызывается участвовать в эксперименте. Он спускается за 1,34 секунды.

— А теперь съезжай ещё раз, но не с самого верха, а примерно с четверти пути вниз.

Кино так и делает. В этот раз время тоже 1,34 секунды.

— Поразительно, — говорит Итиро.

Дзяй молчит, но его лицо выражает то же самое.

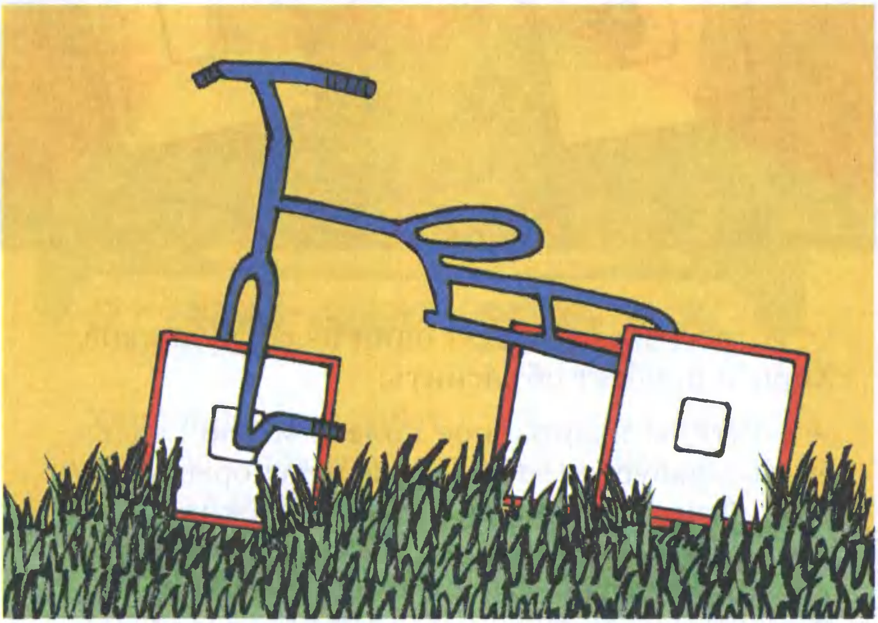
— Попробуй ещё раз, но с середины, — предлагает он.

Результат этой попытки опять 1,34 секунды. Дзяй запоминает: таутохрона.

Кино рад, что в опыте участвовал именно он.

Прощаясь с Мики, друзья замечают в другой части зала какую-то очередь. Кино идёт узнать, что там, и быстро возвращается.

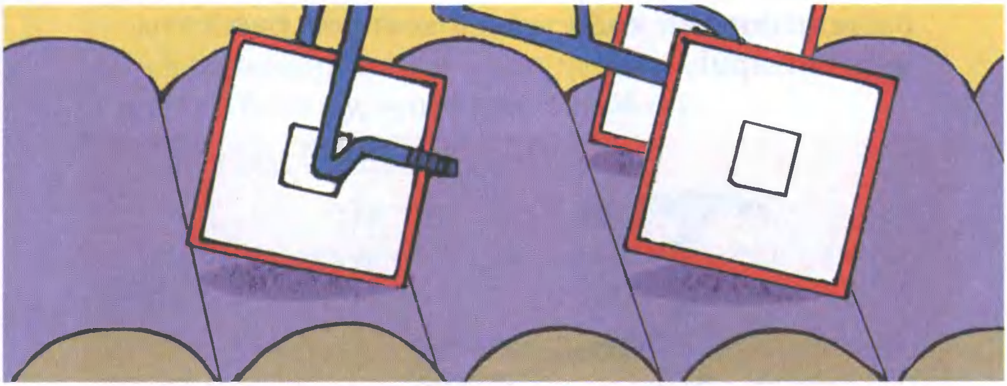
— Это тот самый трёхколёсный велосипед с квадратными колёсами, о котором рассказывал Кэнтаро!



Кино становится в очередь, а Дзяй с Итиро подходят посмотреть поближе.

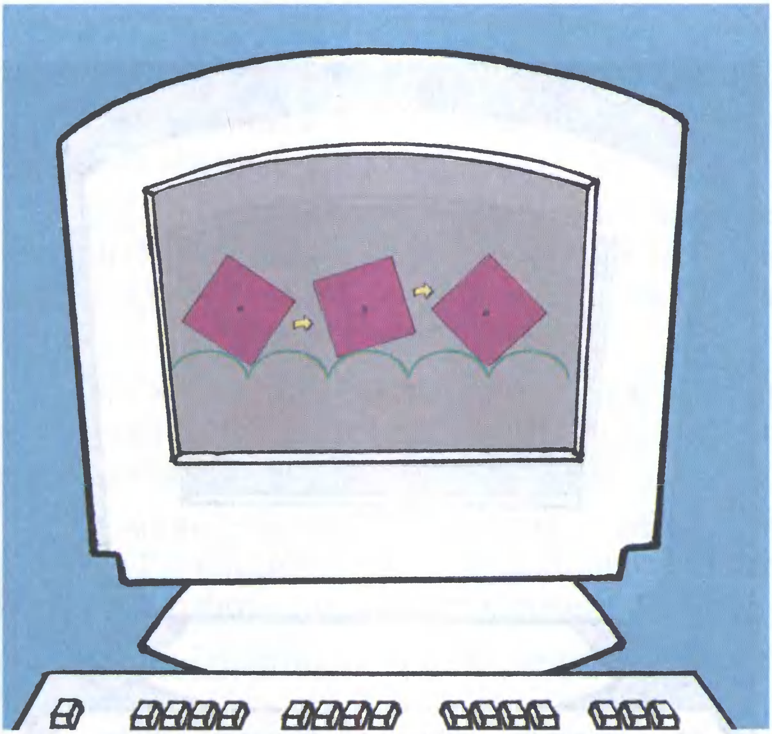
— Он, конечно, едет, но посмотри, по какой дороге. Она вся неровная, — замечает Итиро.

— Тоже, наверно, какая-нибудь особая кривая, — предполагает Дзяй. — Интересно, едет ли он по другим дорогам?



Их разговор слышит один из сотрудников, Хиро, и пробует объяснить:

— Чтобы квадратное колесо могло гладко ехать, требуется соблюдение некоторых условий. Длина стороны колеса должна быть равна длине дуги кривой. Сторона колеса при движении является касательной к кривой. При этом центр колеса должен двигаться по прямой.

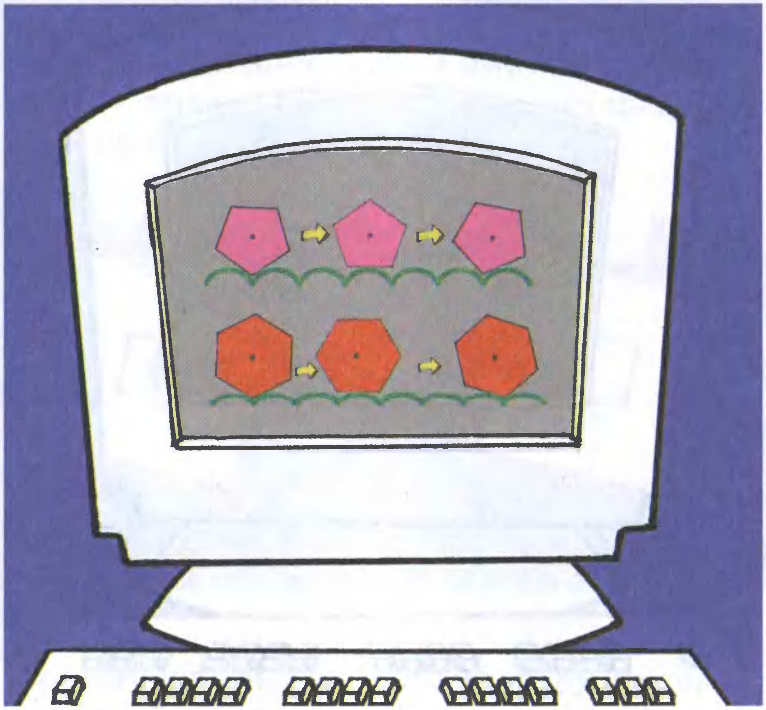


Хиро подводит ребят к экрану компьютера, на котором показано движение квадратного колеса по такой дороге.

— Полотно дороги образовано перевёрнутыми цепными линиями, соединёнными друг с другом, — говорит он.

— Что такое цепная линия? — спрашивает Итиро.

— Это кривая, которую образует провисающая цепь или верёвка, закреплённая с двух концов, — объясняет Хиро.



На экране компьютера они видят и другие многоугольники, катящиеся по дорожкам из перевёрнутых цепных линий.

— Глядите, пятиугольники и шестиугольники тоже годятся, — говорит Итиро.

— Но цепные линии становятся менее выпуклыми, — замечает Дзяй.

— А для правильных многоугольников с ещё большим числом сторон это работает? — интересуется Итиро.

— Да, но чем больше сторон, тем больше правильный многоугольник становится похож на круг, а цепные линии — на прямую, — объясняет Хиро.

Дзяй молча обдумывает тот факт, что при увеличении числа сторон форма правильного многоугольника приближается к кругу.

— У меня для вас есть задача, — объявляет Хиро. — Равносторонним треугольником колесо быть не может — догадайтесь почему!

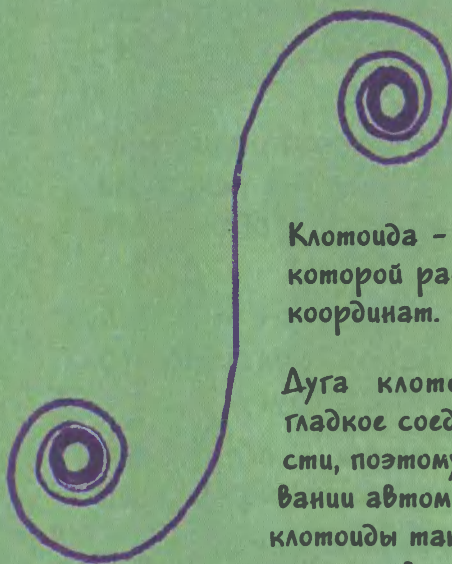
Заинтригованный Дзяй запоминает эту задачу.

Прокатившись на необычном велосипеде, Кино возвращается к друзьям. Он хлопает Итиро по плечу:

— Здорово! Только педали крутить трудновато.

Ребята подходят к плакату, посвящённому клотоиде — ещё одной кривой, пока им незнакомой.

Клотоида



Клотоида - это двойная спираль, кривизна которой растёт с расстоянием от начала координат.

Дуга клотоиды обеспечивает наиболее гладкое соединение прямой и дуги окружности, поэтому её применяют при проектировании автомобильных и железных дорог. Дуги клотоиды также используются в технике при проектировании движений роботов.

Современные аттракционы типа «американских горок» используют в своих траекториях петли из дуг клотоиды, а не круговые петли, как раньше. Если петля круговая, то вверху вагончики сильно замедляются и для прохождения петли требуется значительная начальная скорость. Поэтому в конце петли скорость вагончиков слишком велика. Эту проблему решает петля на основе клотоиды, у которой меньший радиус кривизны наверху и больший внизу.

Итиро особенно заинтересовало упоминание о робототехнике. Кино вспомнил своё катание на аттракционе «Иидзянайка[1]».

Он спрашивает:

— А петли на «Иидзянайке» — это окружности или клотоиды?

— Наверняка клотоиды, — говорит Итиро.

Дзяй спрашивает:

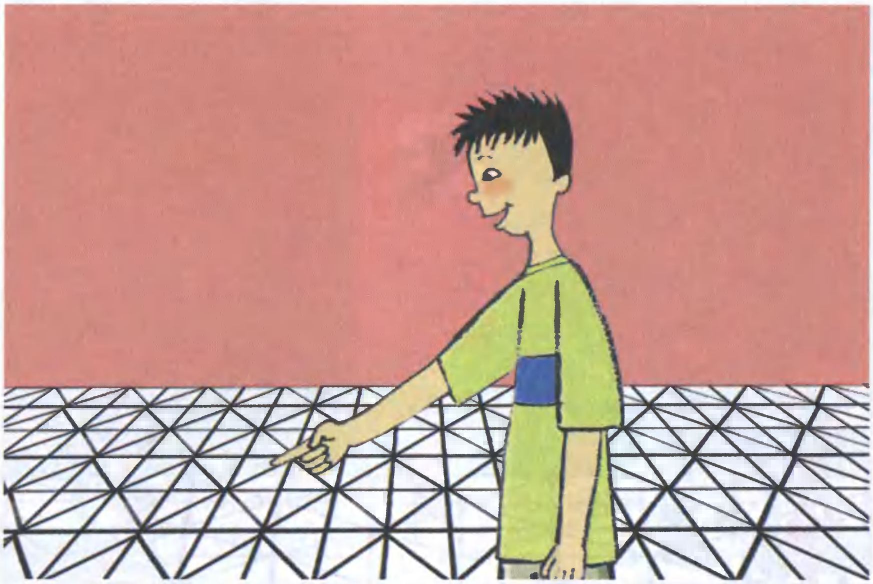
— А почему клотоидные петли безопаснее?

— Это физика, взаимодействие скорости, центростремительного ускорения и силы тяжести, — пробует объяснить Хиро.

Физика ещё остается для мальчиков белым пятном, и больше они пока не спрашивают.

1. Аттракцион типа «американские горки» из парка развлечений Fuji-Q Highland в Японии, где пассажиры подвергаются четырнадцати переворотам вниз головой (три переворота рельсов и одиннадцать переворотов сидений).

4



Зал Прямоугольных Треугольников


"All is number"

У одного из залов выстроилась очередь. На двери ребята видят вывеску:

ЗАЛ ПИФАГОРА

— Что такое пифагор? — спрашивает Кино.

— Не что, а кто, — поправляет Итиро.

— Это греческий математик, очень древний, — объясняет Дзяй.

— Наверно, очень умный, если целый зал так назвали, — говорит Кино.

Пока ребята стояли в очереди, они разглядывали зал. Там всё цветное. Ярко окрашенные стены контрастируют с полом цвета слоновой кости.

— Смотрите, весь пол вымощен треугольниками, — замечает Итиро.

— Прямоугольными равнобедренными треугольниками, — уточняет Дзяй.

Наконец они попадают внутрь. На самом видном месте висит портрет Пифагора.

"Всё есть число"

Пифагор

(ок. 580 - 500 г. до н. э.)

Пифагор был одним из самых влиятельных мыслителей Древнего мира. В городе Кротоне на юге Италии он основал свою знаменитую школу, где под его руководством изучали теорию чисел, геометрию, музыку и астрономию. О результатах пифагорейцев в теории чисел позднее написал Евклид в книгах VII, VIII и IX своих «Начал».

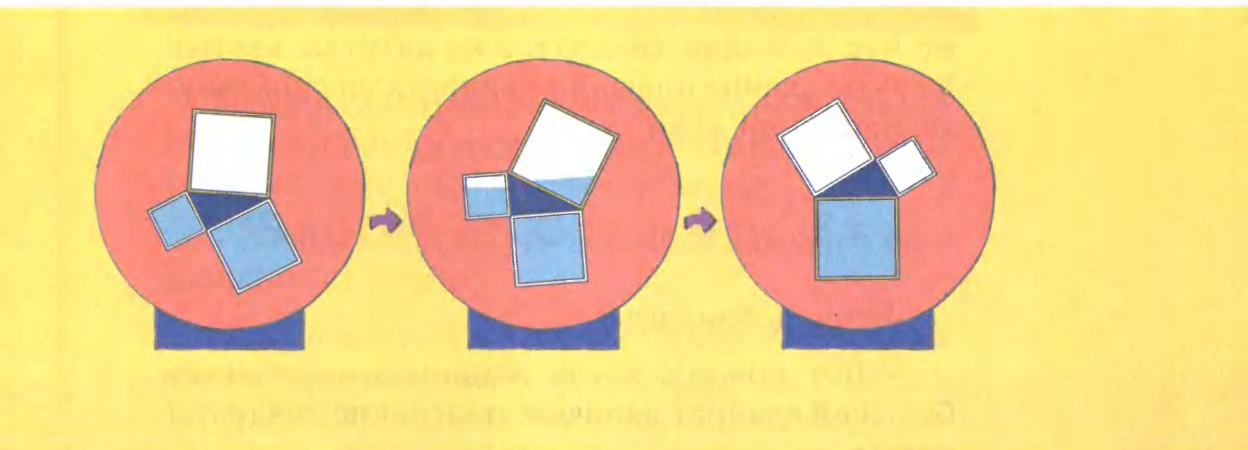
— «Всё есть число» — как это? — удивляется Кино.

Его слова слышит сотрудница зала, Михо. Она подходит и объясняет:

— Пифагор верил, что всё на свете связано с числами. Поэтому он и его последователи считали, что, изучая свойства чисел, можно разгадать все тайны мироздания.

С одной стороны зала установлены странные вращающиеся устройства. Вокруг них собралась целая толпа детей. Кино протискивается вперед, Итиро и Дзяй тоже стараются пробраться поближе.

В середине первого устройства — прямоугольный треугольник, к каждой его стороне прикреплён квадрат. Внутрь налита окрашенная жидкость.



Когда конструкция поворачивается, жидкость перетекает из двух меньших квадратов в большой.

В тот самый момент, когда большой квадрат оказывается наполнен до конца, два других совсем пусты.

На табличке рядом с устройством написано:

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

$$x^2 + y^2 = z^2$$

— И какое отношение это равенство имеет к треугольнику и квадратам? — спрашивает Кино.

Итиро думает. Наконец он говорит:

— x и y обозначают длины катетов, а z — длину гипотенузы.

— x^2 и y^2 — это площади квадратов на катетах, а z^2 — площадь квадрата на гипотенузе, — продолжает Дзяй, — так что теорема утверждает, что площади квадратов на катетах, взятые в сумме, равны площади квадрата на гипотенузе. Например, если

$x = 3$, $y = 4$ и $z = 5$, то $9 + 16 = 25$.

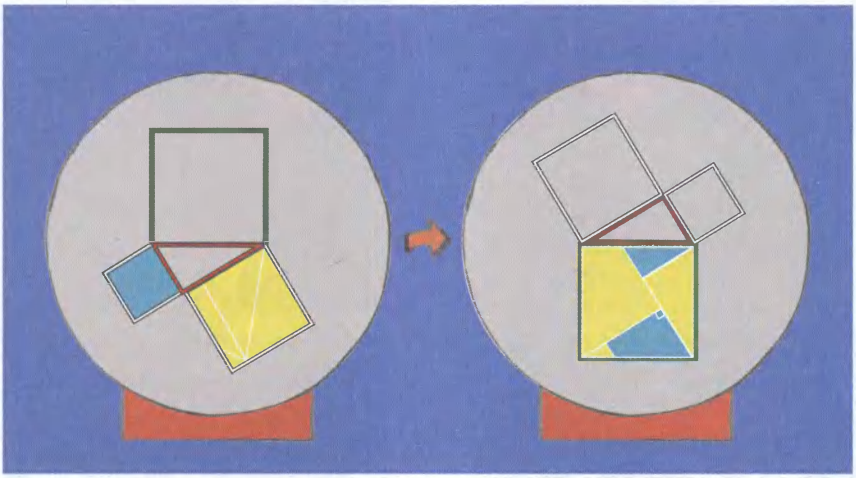
Итиро добавляет:

— Вот почему, когда жидкость наполняет большой квадрат целиком, маленькие квадраты пусты.

— А-а, понятно, — говорит Кино.

— Теорема Пифагора утверждает, что это верно для любого прямоугольного треугольника, — добавляет Михо.

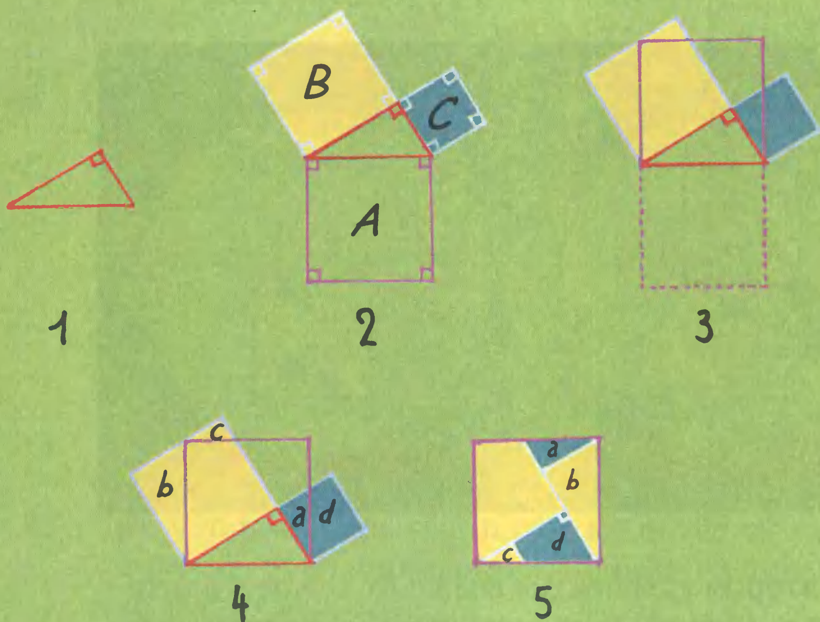
Дзяй подумал, что надо не забыть проверить эту формулу на разных прямоугольных треугольниках, когда он вернется домой. Итиро больше интересует то, каким образом всё поворачивается и как окрашенная жидкость перетекает туда-сюда. Он долго стоит и наблюдает за этим. А Кино уже идёт дальше.



Во втором устройстве всё то же самое, только вместо жидкости между квадратами перемещаются цветные пластиковые кусочки.

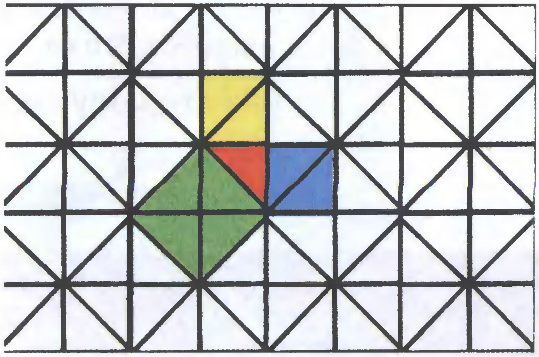
— А как квадраты разбиваются на кусочки? — спрашивает Дзяй.

Михо подводит ребят к плакату, на котором показано разбиение.


B
C
A
1
2
3
c
b
a
d
4
a
b
d
c
5

— Удивительно, как Пифагор всё это придумал, — говорит Итиро.

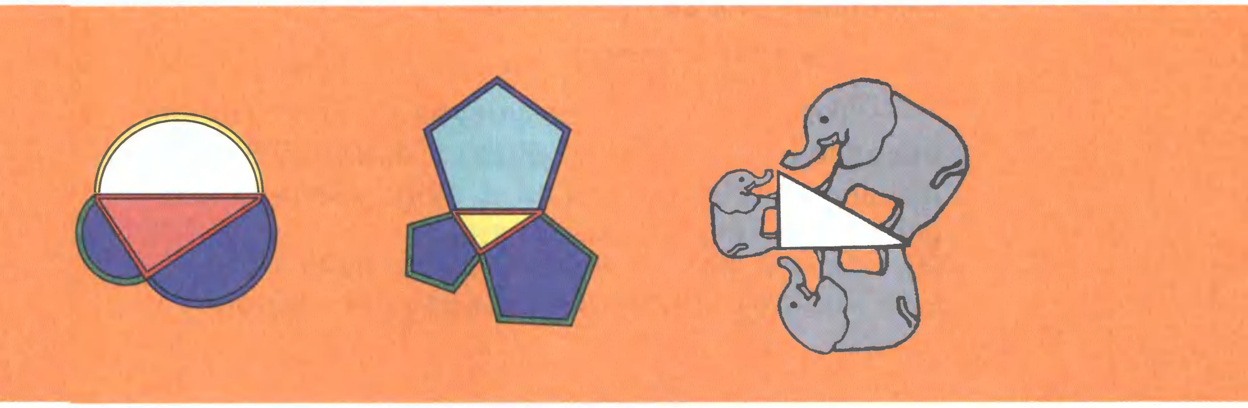
— По легенде, ему пришла в голову эта идея, когда он рассматривал мозаичный пол *в храме. Его рисунок* был подобен тому, что у нас на полу. Вы можете увидеть в этих плитках иллюстрацию теоремы Пифагора?



Ребята внимательно смотрят на пол. Постепенно они начинают видеть нужную картинку. Итиро обводит её пальцем.

— Глядите-ка, на остальных штуковинах нет квадратов, — замечает Кино.

Итиро и Дзяй поворачиваются, чтобы посмотреть. Остальные устройства сделаны аналогично, с прямоугольными треугольниками в середине.

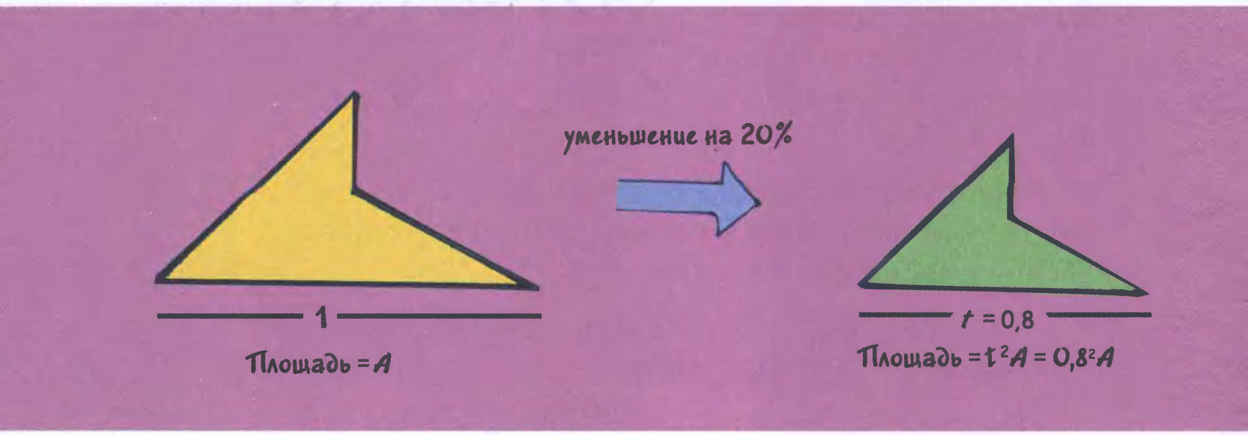


Но на их сторонах ребята видят не квадраты, а полукруги, пятиугольники и даже слонов!

— Теорему можно обобщить: эти соотношения для площадей сохраняются при замене квадратов любыми подобными фигурами, — рассказывает Михо.

— Как это получается? — пораженно спрашивает Дзяй.

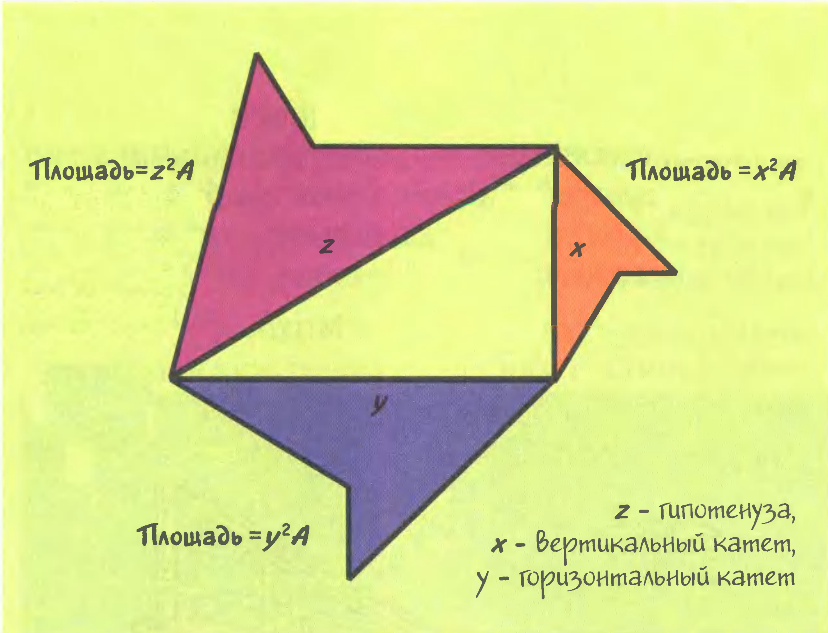
Михо ведет ребят к доске и объясняет:



— Вы замечали, как уменьшает изображение копировальная машина? Допустим, у меня есть фигура с площадью A, и я хочу, чтобы она была уменьшена на 20 процентов.

Она рисует на доске.

— Тогда полученная фигура будет подобна исходной, а её площадь будет t^2A, или $(0{,}8)^2A$, — продолжает она. — Если я буду увеличивать фигуру, всё будет аналогично.



Михо продолжает рисовать на доске.

— На сторонах прямоугольного треугольника я строю фигуры, подобные исходной. Отношение площадей зависит от отношения сторон треугольника. Теорема Пифагора утверждает, что

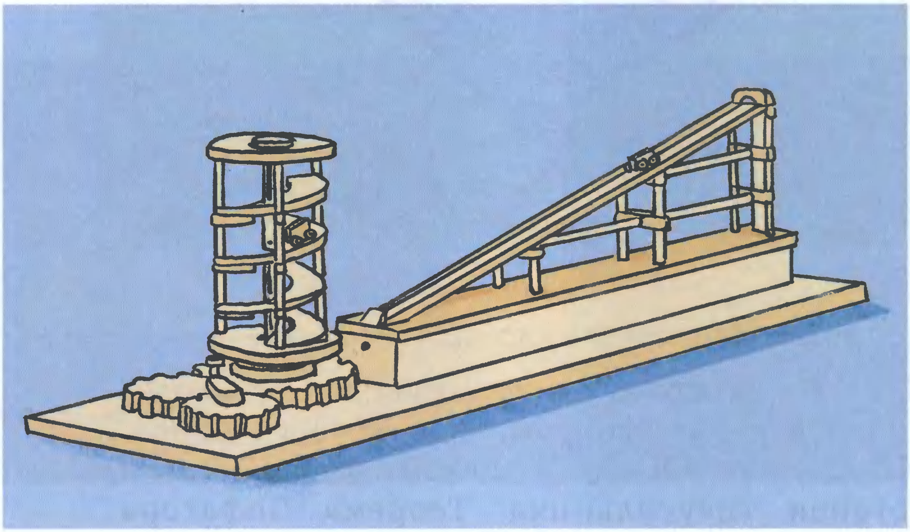
$$x^2 + y^2 = z^2,$$

так что

$$x^2 A + y^2 A = (x^2 + y^2) A = z^2 A.$$

— То есть каковы бы ни были фигуры на сторонах треугольника, если только они подобны друг другу, а их линейные размеры пропорциональны сторонам треугольника, то сумма площадей фигур на катетах будет равна площади фигуры на гипотенузе, — кивая головой, подытоживает Дзяй.

— Именно так! — говорит Михо.



В зале Пифагора ребята замечают ещё одно устройство. В нём движутся две игрушечные машинки. Одна ездит вверх и вниз по прямой горке, а другая — по винтообразной горке внутри цилиндра.

— А это что? — спрашивает Кино.

Это демонстрация того, как можно измерить длину спирали, — объясняет Михо. — Посмотрите на машинки. Они начинают съезжать одновременно и двигаются с одинаковой скоростью. Их движение управляется вот этим механизмом.

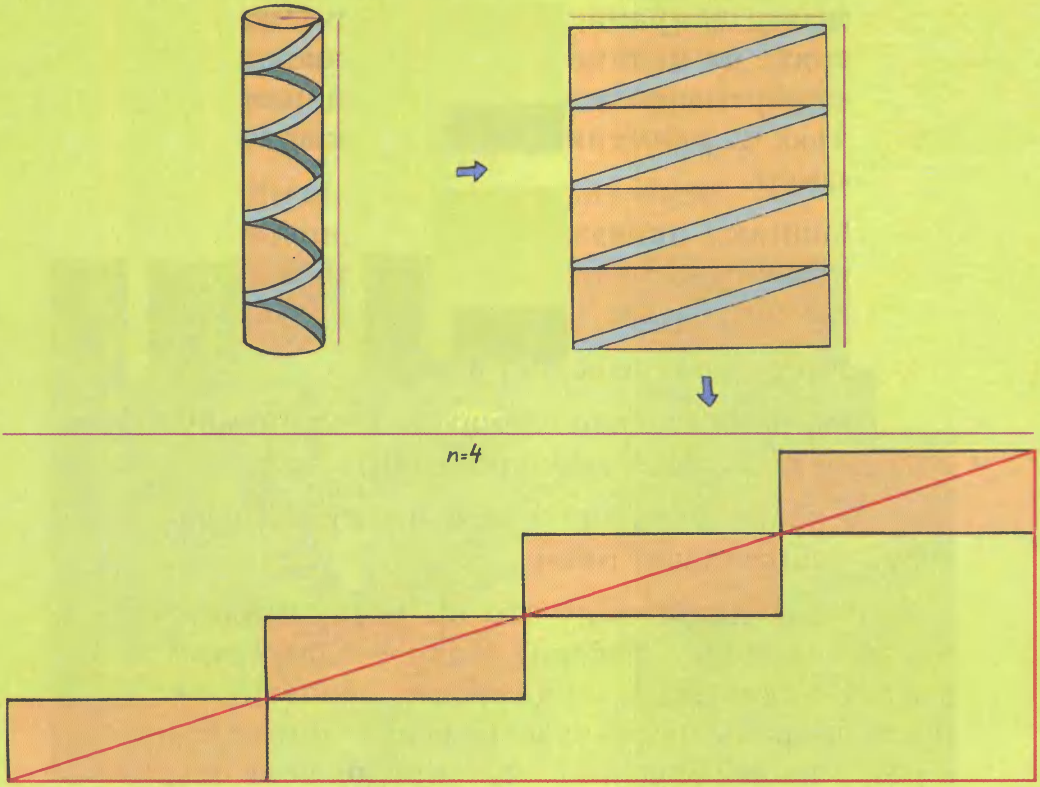
— Машинки приезжают вниз одновременно. Это значит, что длина спирали равна длине этого прямого бруска, — делает вывод Итиро.

— Точно, — подтверждает Михо.

Итиро внимательно следит за механизмом, который заставляет машинки ездить.

— А какое отношение это имеет к Пифагору? — спрашивает Кино.

— Представьте себе, что вы распрямляете витки спирали, — говорит Михо. — Обозначим высоту цилиндра h, а радиус его основания r. Пусть спираль оборачивается вокруг цилиндра n раз; в нашей модели $n=4$, — продолжает она, рисуя на доске.



— Ширина каждой развернутой секции спирали равна окружности основания цилиндра. Если мы составим вместе все развернутые секции так, чтобы диагонали образовали прямую, то получится прямоугольный треугольник с катетами длины h и $n2\pi r$.

— Я понял, — говорит Дзяй. — Тогда по теореме Пифагора длина спирали равна

$$\sqrt{(n2\pi r)^2 + h^2}.$$

— Совершенно верно! — восклицает Михо, поражаясь, как быстро Дзяй усваивает её объяснения.

Его друзья воспринимают это как должное. Они привыкли, что Дзяй схватывает всё на лету.

5

Математика музыки

Ещё из комнаты Пифагора ребята слышат, что откуда-то доносится музыка. Они видят указатель:

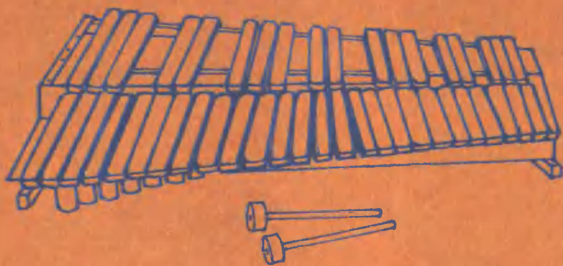
МУЗЫКАЛЬНАЯ КОМНАТА

Стрелка указывает на винтовую лестницу необычного вида. Все её ступеньки разной длины; некоторые из них покрыты ковролином. Консультант по имени Ясу просит ребят спускаться по лестнице по одному. Как всегда, Кино *вызывается идти первым. Оказывается, когда* он наступает на ступеньку, звучит какая-то музыкальная нота, у каждой ступеньки своя. Так что при движении вниз получается целая мелодия.

Итиро и Дзяй собираются спускаться вслед за ним, но им интересно посмотреть, что будет, если один пойдет первым, а другой будет следовать на расстоянии нескольких шагов. Они спрашивают Ясу, можно ли так идти. Он разрешает, но то, что ребята слышат, им не нравится.

По музыкальной лестнице мальчики спустились вниз на два этажа и оказались в подвале. Там висели два плаката, один об этой лестнице, другой — о связи математики и музыки.

Музыкальная лестница



Ксилофон – это музыкальный инструмент, составленный из деревянных пластинок различной длины, прикреплённых к основанию. Длины пластинок подобраны так, чтобы их звучание соответствовало определенным нотам. Играют на ксилофоне при помощи двух молоточков.

Наша музыкальная лестница устроена по принципу ксилофона. Ступеньками являются деревянные бруски различной длины, производящие разнообразные ноты. Так что идущий вниз по лестнице слышит простую мелодию.

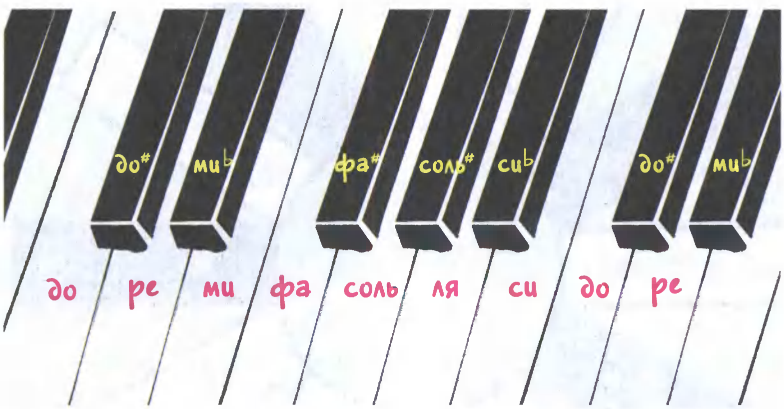
Взаимосвязь длины пластинок ксилофона и высоты звука была известна ещё Пифагору. Он изучал звучание струн различной длины и натяжения. Пифагор создал музыкальный инструмент с одной струной – монохорд. Такой инструмент производит звуки различной высоты, когда струну зажимают в какой-либо точке и дёргают. Выбором этой точки и определяется высота звука.

"Музыка есть бессознательное упражнение души в арифметике"

Готфрид Лейбниц
(1646 – 1716)

Лейбниц и Исаак Ньютон считаются родоначальниками математического анализа. Но и вне математики Лейбниц сделал очень много. В частности, он был дипломатом, историком и философом. Его часто называют последним универсальным ученым.

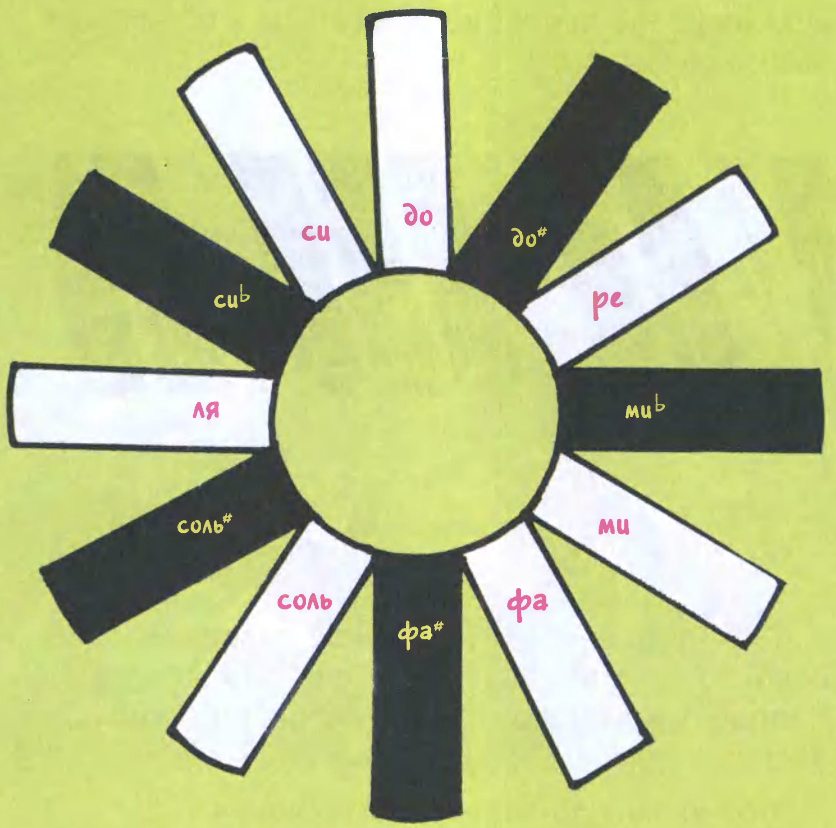
В глубине зала стоит рояль. Девушка, которую зовут Чи, играет на нём гаммы и объясняет взаимосвязь нот.



— Я буду извлекать разные созвучия, а вы сообщайте мне, какие из них благозвучны. Хлопайте в ладоши, если созвучие приятно для вашего слуха.

Она играет до-ми-соль. Все хлопают.

Аккорды звучат один за другим. Дети хлопают снова, когда Чи проигрывает до-фа-ля и си-ре-соль, переходя с первой октавы на вторую.


до
до♯
ре
ми♭
ми
фа
фа♯
соль
соль♯
ля
си♭
си

— Давайте расположим ноты по кругу, — говорит она, подводя их к рисунку. — А теперь снова посмотрим на гармоничные созвучия. На сколько отстоят друг от друга входящие в них ноты?

— 4 - 3 - 5 для до-ми-соль, — говорит Кино.

— 3 - 4 - 5 для ре-фа-ля, — добавляет кто-то ещё.

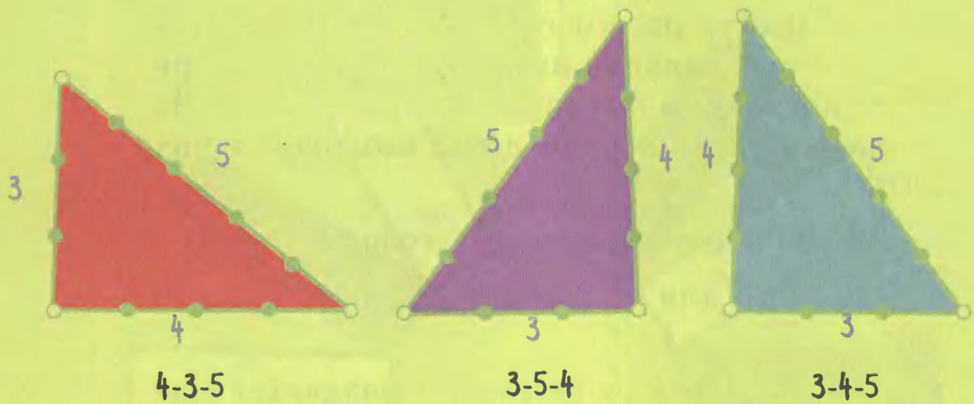
— 3 - 5 - 4 для си-ре-соль, — раздается ещё один голос.

— Эти тройки чисел ничего вам не напоминают?

Дзяй сосредоточенно думает, а затем говорит:

— Это длины сторон прямоугольных треугольников.

— Совершенно верно! — радуется Чи. Она достает несколько прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5.



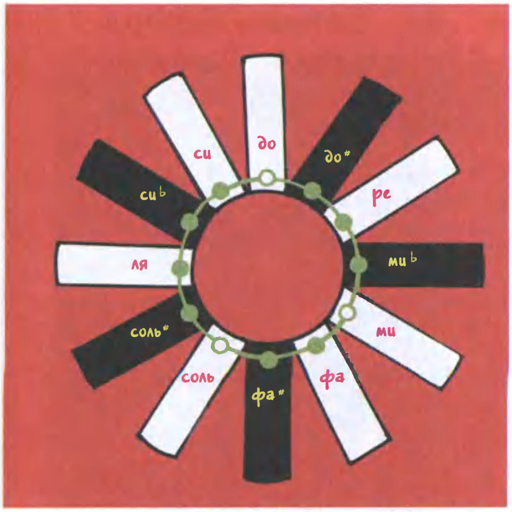
— Неужели гармонические созвучия имеют отношение к теореме Пифагора? — громко удивляется Кино, поражённый тем, что подобные вещи могут быть связаны.

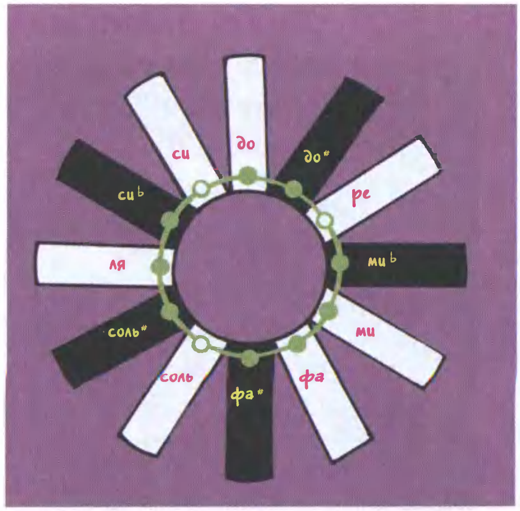
— Конечно, имеют, — с улыбкой говорит Чи.

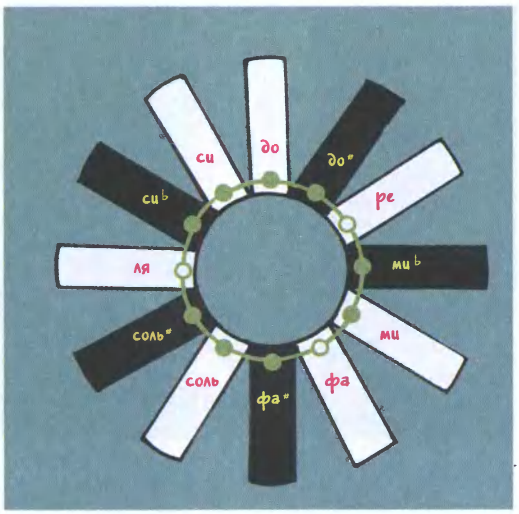
Итиро спрашивает:

— А что если сыграть аккорд с нотами, отстоящими друг от друга на 4 - 3 - 5, но начиная с до-диез? Тогда тоже получится гармоничный звук?

— Попробуйте, — предлагает Чи.


до
до♯
ре
ми♭
ми
фа
фа♯
соль
соль♯
ля
си♭
си

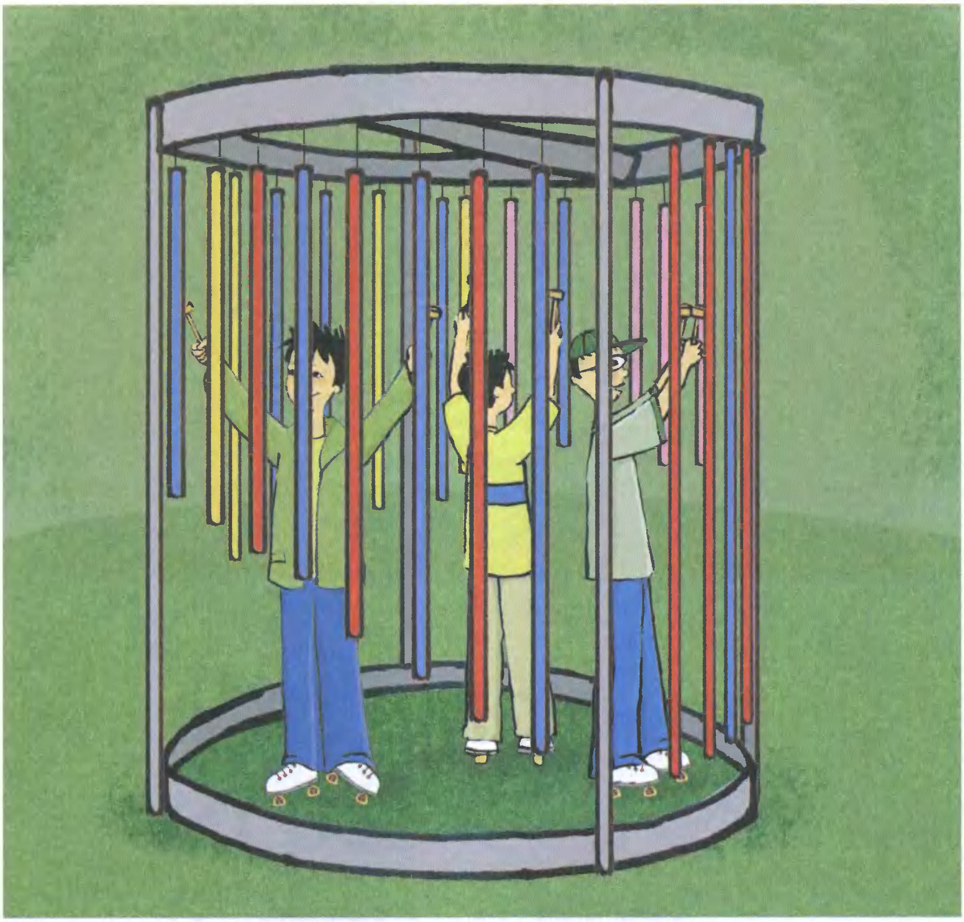

до
до♯
ре
ми♭
ми
фа
фа♯
соль
соль♯
ля
си♭
си


до
до♯
ре
ми♭
ми
фа
фа♯
соль
соль♯
ля
си♭
си

Кино проигрывает на рояле аккорд до-диез - фа - соль-диез. Дети хлопают. Они снова окружают рояль и по очереди пробуют другие созвучия.

— Обратите внимание, — добавляет Чи, — что аккорды 4 - 3 - 5 звучат радостно, а аккорды 3 - 4 - 5 — грустно.

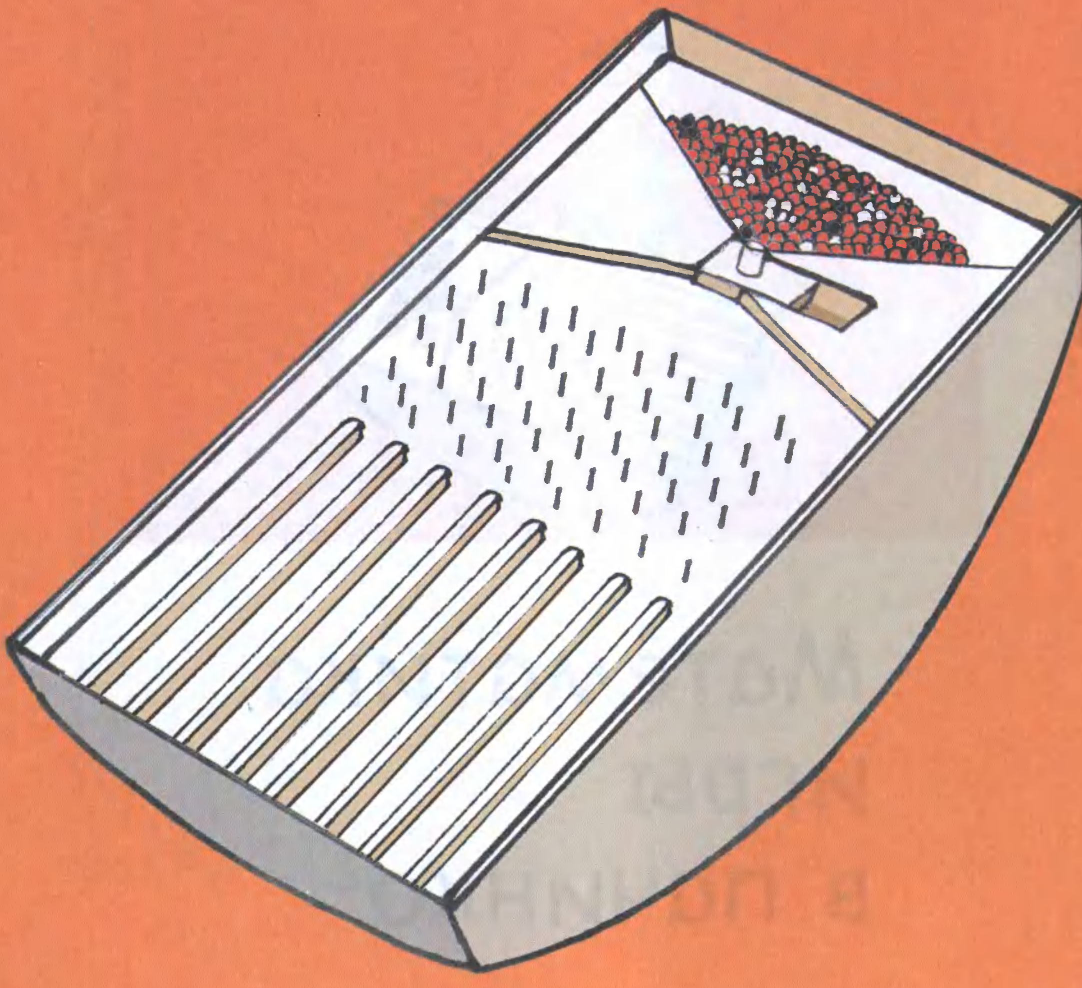
Чтобы проверить слова Чи, мальчики идут к огромному круговому ксилофону и пробуют на нём аккорды одного и другого типа.



6

Математика игры в пачинко[2]

2 Игровое устройство, гибрид пинбола и игрового автомата. Игрок управляет движением шариков, которые должны проходить через ряды штырьков



Из музыкального зала ребята переходят в другой большой зал, в котором выставлено множество интересных вещей.

Прямо на полу лежит большой деревянный предмет. У него округлое основание, как у качающейся детской кроватки. Сверху доска со множеством штырьков, расположенных аккуратными рядами. С одной стороны от штырьков — отделение, в котором лежат пластмассовые шарики, с другой — продольные желобки.

Ребята понятия не имеют, что это такое. Они опускаются на корточки, чтобы рассмотреть предмет получше. По горизонтали штырьки расставлены с одинаковым интервалом. Каждый горизонтальный ряд сдвинут относительно предыдущего на половину интервала.

— Похоже на пачинко, — наконец говорит Кино.

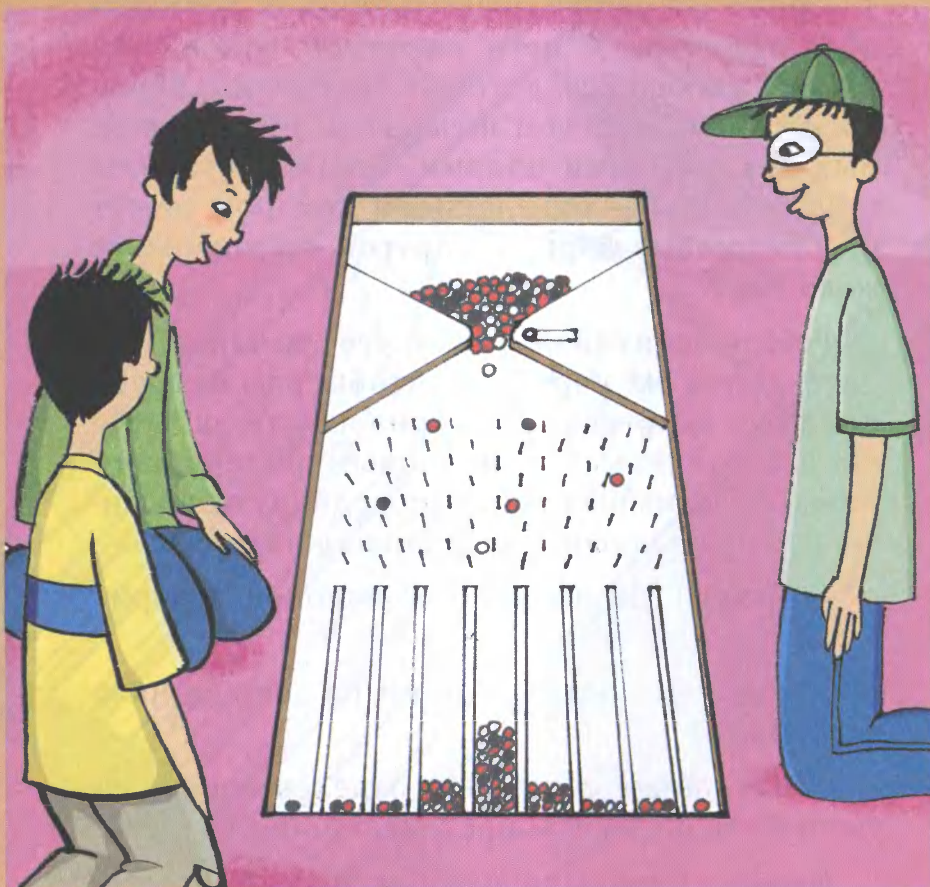
К ребятам подходит один из сотрудников зала, Норио.

— Наклоните его, чтобы отделение с шариками было повыше, — предлагает он.

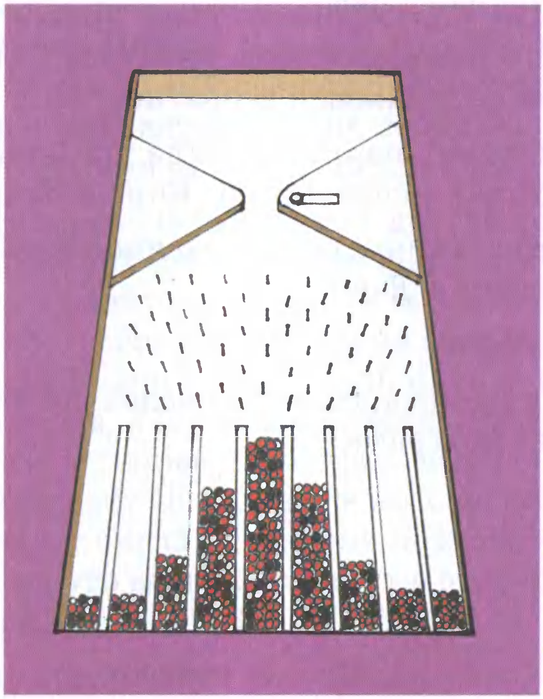
Итиро и Дзяй наклоняют устройство.

— А теперь откройте задвижку, чтобы шарики скатывались.

Кино открывает дверцу. Ребята смотрят, как шарики катятся вниз.



Когда все шарики оказываются в вертикальных желобках, ребята видят что-то вроде горы.



Заинтригованные, ребята повторяют всё снова. Перед этим Кино наклоняет устройство в обратную сторону, чтобы шарики вернулись в исходное положение.

— Похожее расположение, — констатирует Итиро.

— Оно называется нормальным распределением, — говорит Норио.

Они повторяют опыт ещё трижды — с тем же результатом. Теперь уже Дзяй наблюдал за шариками более внимательно. Шарик, попадающий на штырёк, может скатиться налево или направо с одинаковой вероятностью.

— Почему шарики всегда располагаются именно так? — спрашивают Кино и Итиро.

— Это связано с расположением штырьков? – интересуется Дзяй.

— Связано.

Видя их интерес, Норио ведёт ребят к доске и рисует диаграмму.

— Выкатываясь из дверцы, шарик попадает прямо на средний штырёк. После удара он может свалиться налево или направо с одинаковой вероятностью. Можно сказать, что вероятности относятся как 1 : 1. Тогда для двух штырьков под ним отношение вероятностей попадания шарика левее, между или правее будет 1 : 2 : 1.

На это можно посмотреть с другой точки зрения, считая возможные пути шарика. К штырьку номер 2 ведёт один путь, к штырьку номер 3 тоже один. Теперь посмотрим на следующий ряд. К штырьку номер 4 ведёт один путь, к штырьку номер 5 — два, к номеру 6 — один. Идём дальше: один путь к штырьку 7, по три к штырькам 8 и 9, один к штырьку 10. Чем ниже мы опускаемся, тем более растут числа в середине, поэтому всё больше шансов, что шарики попадут в отделения около центра.

Норио продолжает писать на доске.

— А теперь я запишу количества путей вот так. Узнаёте? — спрашивает он.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

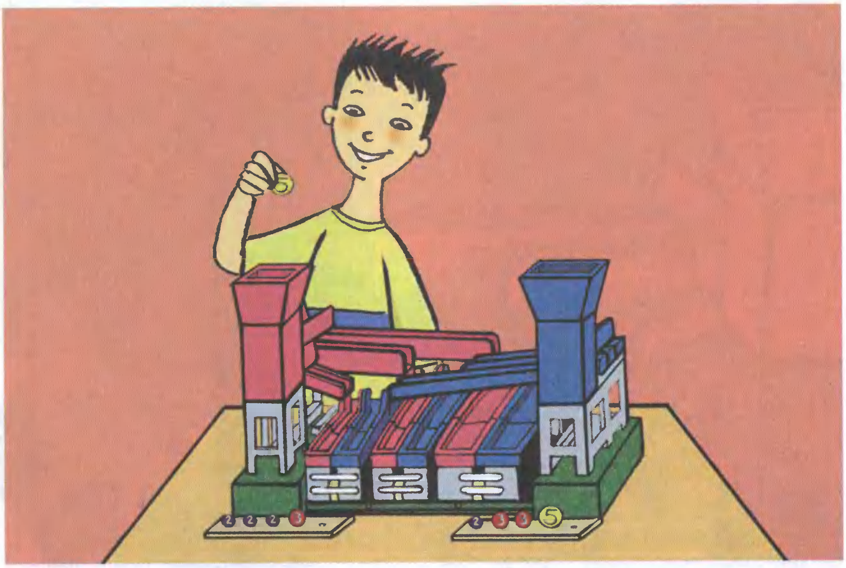
1 4 6 4 1

— Эти числа в треугольнике выглядят очень знакомо... Ребята, где мы их видели? — пытается вспомнить Кино.

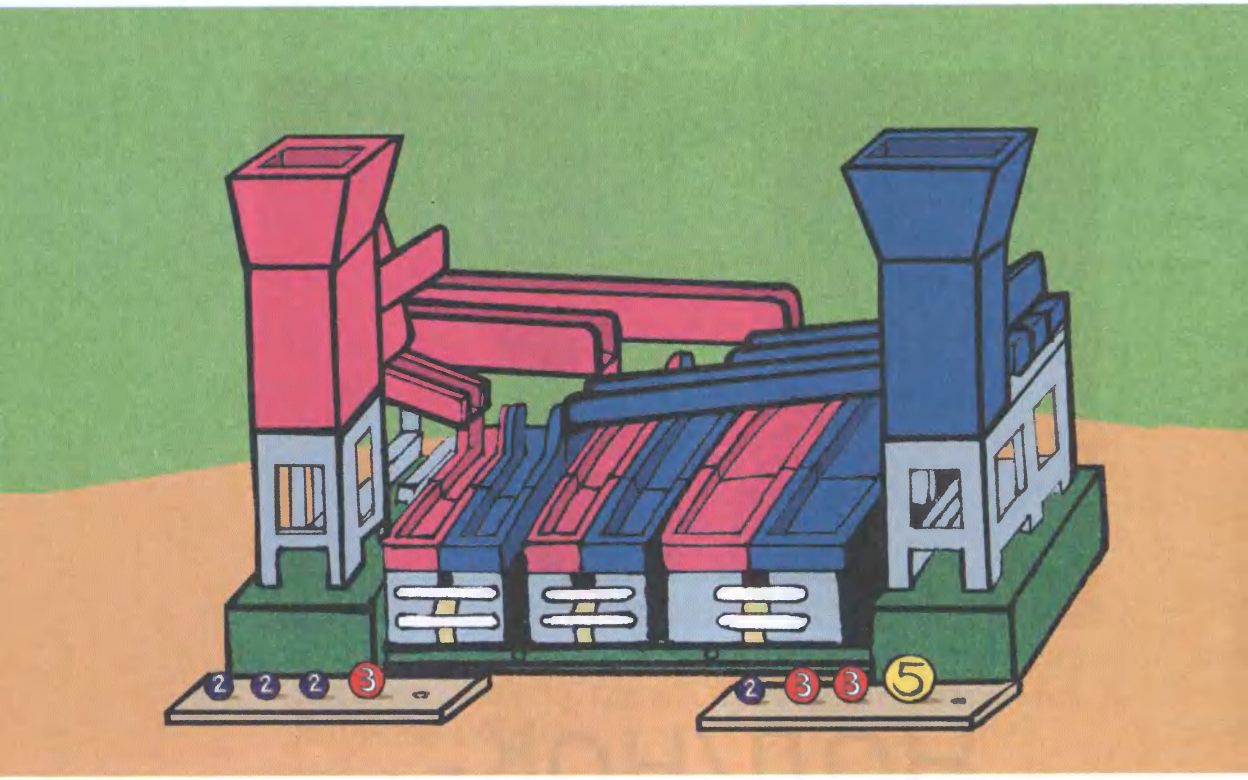
— Это треугольник Паскаля, — отвечает Итиро.

— В математике удивительно много взаимосвязей, — говорит Норио. — Треугольник Паскаля возникает в самых разных задачах.

7



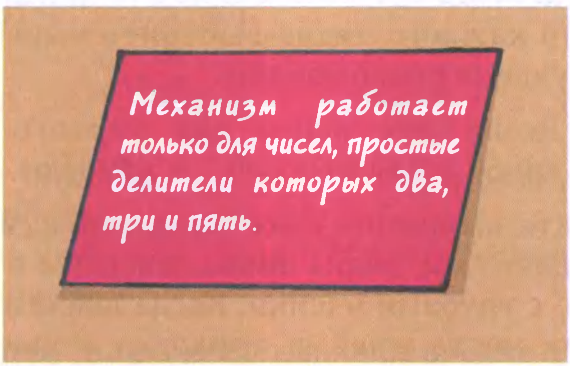
НОД/НОК-машина


2 2 2 3
2 3 3 5

Смотрите! — зовет Итиро. — Эта машина автоматически считает НОД и НОК.

Ребята только что проходили по математике наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, так что устройство их очень заинтересовало.

— Правда только для тех чисел, простые делители которых 2, 3 и 5, вот тут написано, — добавляет Итиро, указывая на табличку.



— Хорошо, — говорит Кино, — и что надо делать?

Ребята читают инструкцию.

«1. Выберите два числа и разложите их на простые множители».

Мальчики выбирают

$$a = 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

и

$$b = 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3.$$

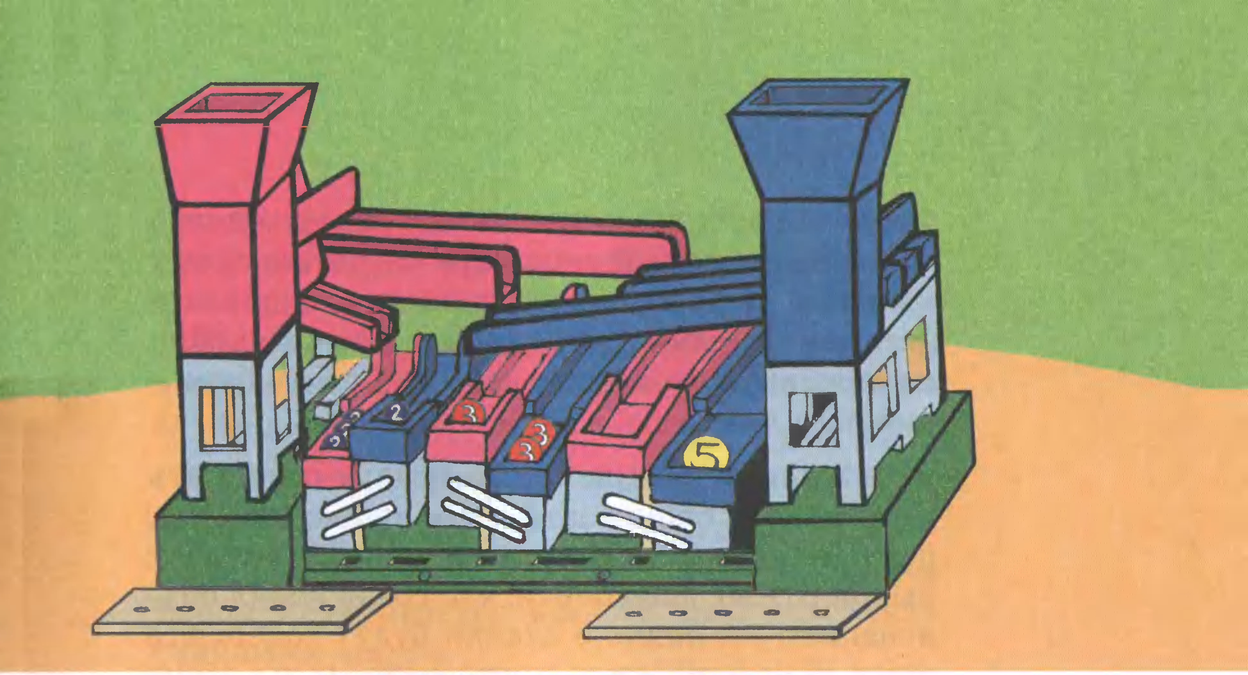
«2. На столе имеются шары с надписями 2, 3 и 5. Для каждого числа выберите шары, соответствующие разложению».

«3. Поместите шары для первого числа в одну трубу, а для второго — в другую».

Ребята выполняют всё по инструкции. Они наблюдают, как шары проваливаются в соединённые с трубами ячейки. Когда шары занимают свои места, ячейки приходят в движение, а затем останавливаются.

«4. Чтобы получить НОД, возьмите шары из ячеек наверху и перемножьте написанные на них числа. Чтобы получить НОК, проделайте то же самое с шарами из нижних ячеек».

Так мальчики получили, что



НОД = 2 × 3 = 6,

НОК = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 360.

Они видят, что результат правильный, но Итиро хочет узнать, как работает это устройство. Он подходит к консультанту, которого зовут Минору.

Минору доброжелательно объясняет:

— Когда вы помещаете шары в трубу, прежде всего они сортируются по размеру. Вы, наверное, заметили, что шары с двойкой чуть меньше шаров с тройкой, а с тройкой чуть меньше, чем с пятеркой.

За трубой находится пластина с тремя отверстиями, соответствующими размерам шаров. Отверстия расположены по возрастанию диаметра, так что через первое могут проскочить только шары с двойкой, через второе — только шары с тройкой и так далее. Шары одного размера, приходящие от двух чисел, попадают в ячейки на разных концах рычага, подобного детским качелям. Он поднимает вверх ячейки с меньшим количеством шаров, а с большим — опускает вниз.

— И тогда верхние ячейки будут содержать множители, общие для двух чисел, так что, перемножив их, мы получаем НОД, — делает вывод Итиро, довольный, что сразу понял объяснение. — А нижние ячейки будут содержать каждый из множителей, встречающихся в обоих числах, в наибольшем возможном количестве, так что их произведение даёт НОК.

— Полезное устройство, — говорит Кино. — Вот бы нам такое на урок!

Дзяй не успокаивается:

— А что если мы выберем два числа так, что кратности какого-то из простых множителей будут совпадать?

— Действительно, — поддерживает его Итиро, — что если задать

$$a = 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

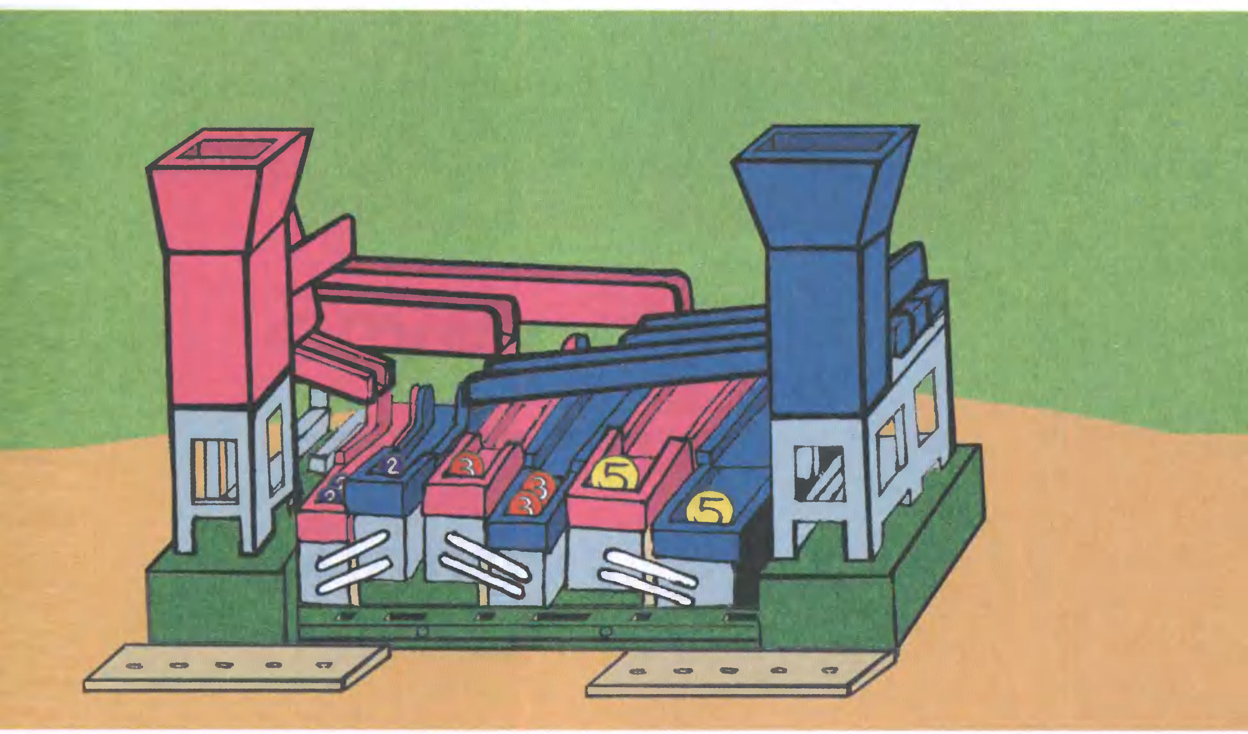
и

$$b = 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5\ ?$$

— Тогда этот множитель войдет как в НОД, так и в НОК, — отвечает Минору. — Как раз для этого случая к правым ячейкам добавлен очень маленький вес, и они будут немного ниже левых. Этот вес так мал, что в остальных случаях он не будет ни на что влиять.

Ребята проверяют сказанное, задав машине числа 90 и 60.

Действительно, правая ячейка с одним шаром 5 оказывается немного ниже, чем левая с таким же шаром.



Итак, НОД = 2 × 3 × 5 = 30,

НОК = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 180.

Итиро очень впечатлён увиденным. Он говорит:

— Теперь я понимаю формулу

$$a \times b = \text{НОД} \times \text{НОК},$$

которую мы проходили на уроке.

— А как ты её понял? — спрашивает Кино.

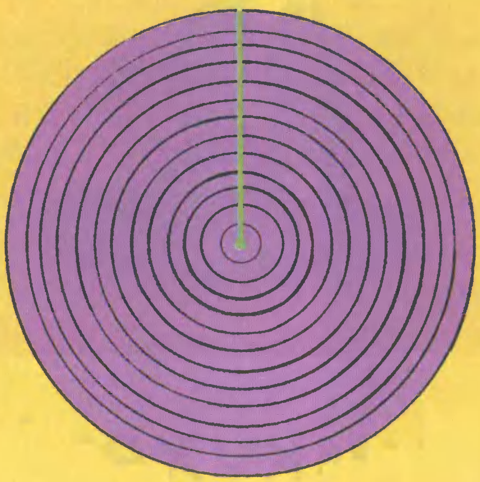
— Все шары, которые мы кладем в трубы, попадают либо в НОД, либо в НОК. Поэтому, перемножив их, мы и получаем произведение исходных чисел, — объясняет Итиро.

Минору рад, что замечательная машина помогла ребятам понять школьный материал. Друзья благодарят его и отправляются дальше.

8

Баумкухен[3], спагетти и арбуз

3. Традиционный немецкий пирог.



В зале есть ещё множество интересных вещей. На одном из столов с табличкой

ПЛОЩАДЬ КРУГА

лежит объект, похожий на круглый немецкий пирог.

— Баумкухен, — говорит Кино.

На самом деле диск образован намотанной во много слоёв застёжкой-липучкой.

К ребятам подходит девушка-консультант по имени Кё и спрашивает:

— Знаете, как посчитать площадь круга?

— Нет, — отвечают они.

— Мы ещё не проходили этого в школе, — объясняет Кино.

— А площадь треугольника?

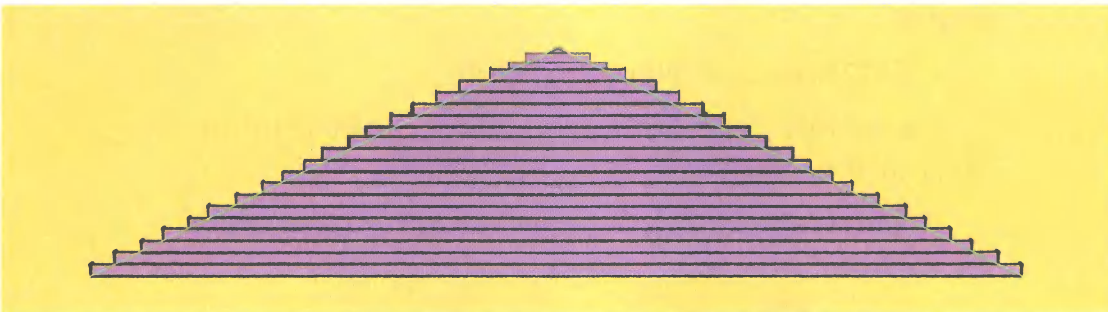
— Это мы только что проходили, — вызывается Итиро. — Половина произведения длины основания на высоту.

— Правильно, — говорит Кё. — А если мы чего-то не знаем, надо постараться свести задачу к тому, что знаем.

Поэтому сейчас мы сделаем из этого круга треугольник.

Она разрезает баумкухен вдоль радиуса, разворачивает и получает подобие треугольника.

— Теперь вместо площади круга будем искать площадь этого треугольника.



Какова длина его основания? — спрашивает Кё.

— Это периметр круга. Но его формулу мы тоже не проходили, — говорит Дзяй.

— Я вам её скажу, — говорит Кё. — Периметр круга равен $2\pi r$, где r — радиус и π — особая константа, приблизительно равная 3,14.

— Высота треугольника — это радиус круга. Таким образом, если основание треугольника равно $2\pi r$, то его площадь равна

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2, —$$

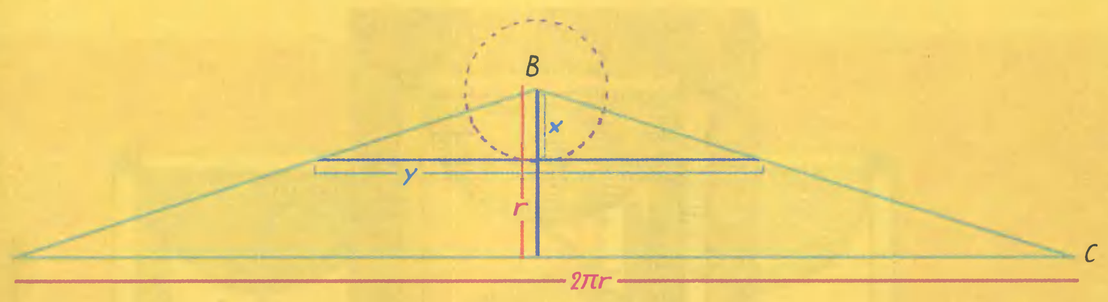
заключает Итиро.

— Отлично! Надеюсь, вы не забудете эту формулу, раз сами её вывели.

Но Дзяй не вполне убеждён.

— Эта фигура напоминает треугольник, но её края ступенчатые. Разве это не имеет значения? — спрашивает он.

— Хорошо, давайте представим, что слои очень тонкие, как бумага, — отвечает Кё. Она подводит ребят к доске и рисует на ней чертёж.

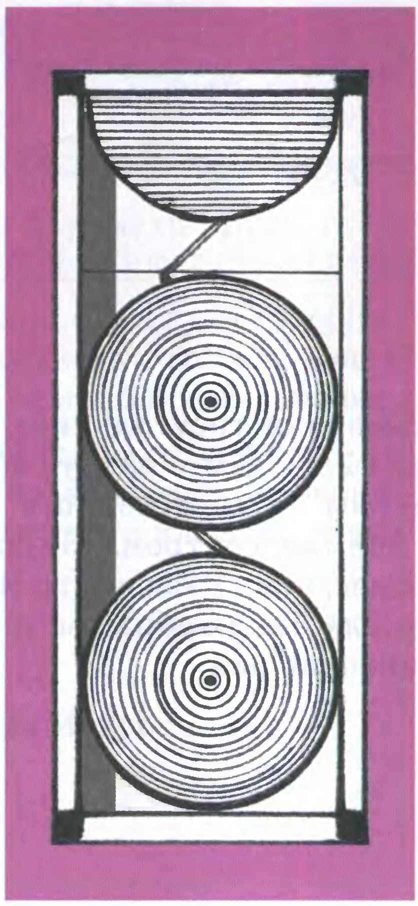


— Длина основания треугольника, как мы уже знаем, равна $2\pi r$, где r — радиус исходного круга. Рассмотрим часть исходного круга — меньший круг с тем же центром. Обозначим его радиус x (x меньше, чем r). Периметр меньшего круга равен $y = 2\pi x$. Таким образом, значения y всегда пропорциональны x.

И если значения x меняются вдоль радиуса непрерывно, то и значения y меняются непрерывно. И тогда ступеньки на сторонах *AB* и *BC* исчезают.

Дзяй понимающе кивает.

На соседнем столе стоит ещё одна модель. В ней наверху укреплена полусфера, поверхность которой обмотана тонкой прозрачной трубкой. Трубка спускается ниже и покрывает поверхность двух кругов, укреплённых под полусферой. Радиусы кругов равны радиусу полусферы.

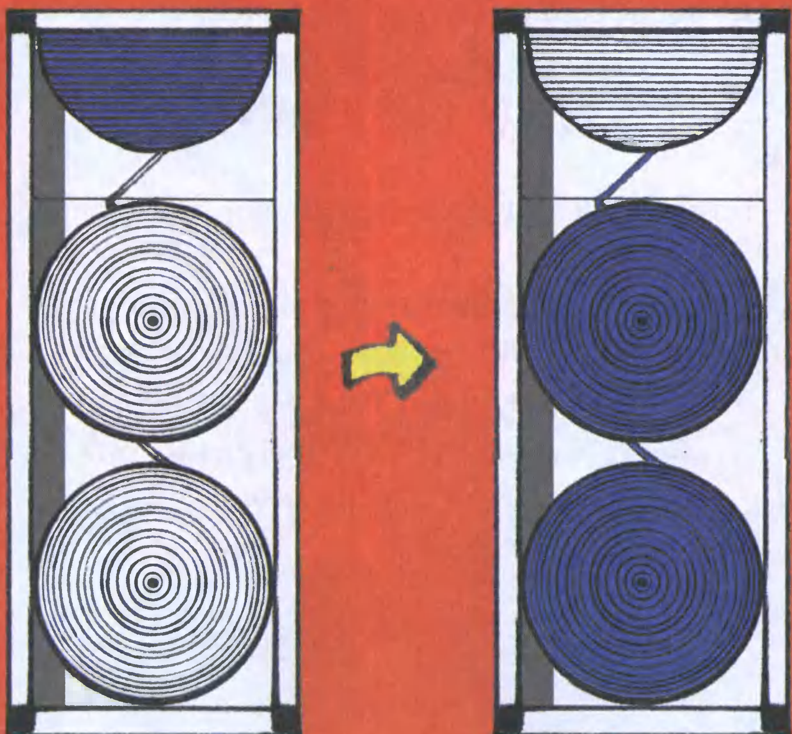


На табличке рядом написано:

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

— А это миска и две тарелки спагетти, — шутит Кё.

Она накачивает в трубку синюю жидкость — ровно столько, чтобы трубка, покрывающая поверхность полусферы, была заполнена. Затем Кё даёт жидкости стечь вниз. Когда круги полностью заполняются жидкостью, трубка, обматывающая полусферу, становится пустой.



Во время этого опыта Дзяй вспоминает зал Пифагора.

— Я понял! Можно я напишу, что это значит? — вызывается он.

Площадь полусферы = 2 x площадь круга

— Да, если они одного радиуса, — уточняет Кё.

— Следовательно,

Площадь сферы = 4 x площадь круга = $4\pi r^2$,

продолжает Дзяй.

На следующем столе табличка:

ОБЪЁМ ШАРА

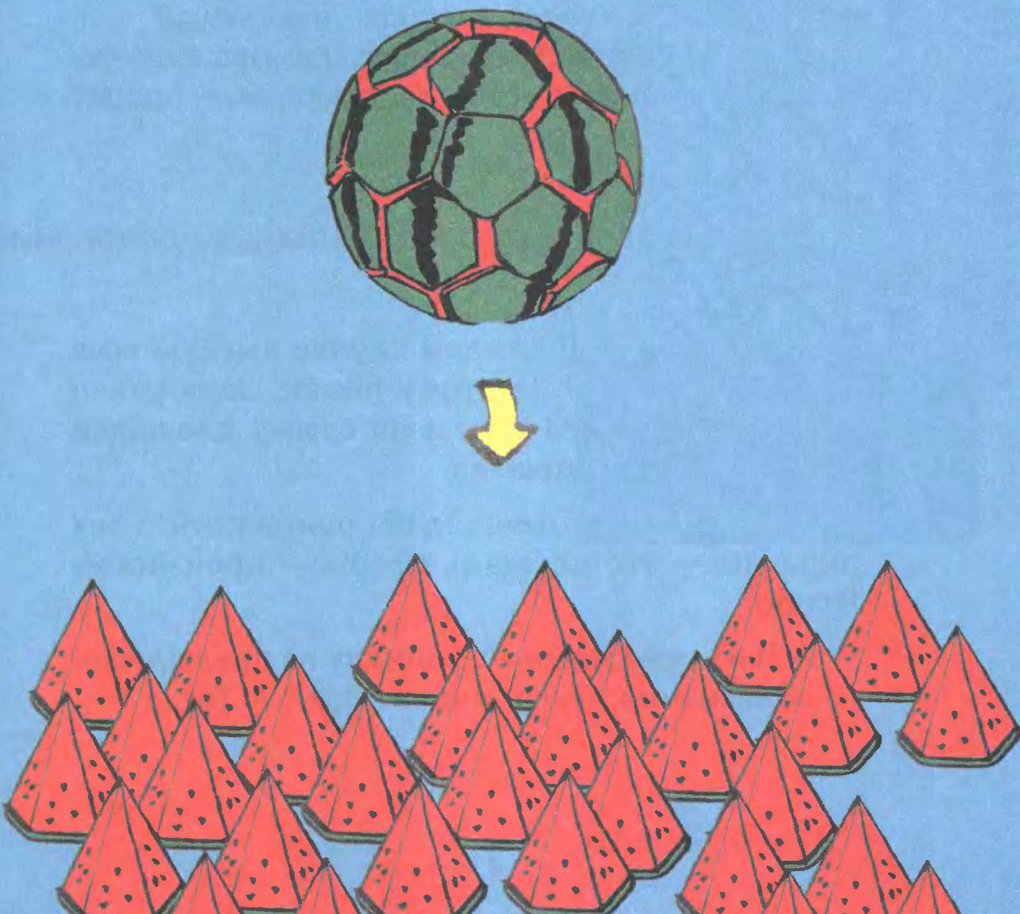
На столе лежит деревянный шар, раскрашенный под арбуз.

Итиро обнаруживает, что его можно разделить на пирамидки.

— Он нарезан, как для еды, — замечает Кино.

Итиро и Дзяй задумчиво смотрят на модель.

— Значит, объёмы кусков в сумме дают объём арбуза, — говорит Итиро.



— Именно, — одобрительно говорит Кё. — Весь арбуз представляет собой шар, а куски — это пирамидки, высоты которых равны радиусу шара.

— Вам придётся помочь нам ещё раз, ведь мы не знаем формулы объёма пирамиды, — просит Дзяй.

$$\text{Объем пирамиды} = \frac{1}{3} \times \text{высота} \times \text{площадь основания},$$

отвечает она. — В данном случае высоты всех пирамид равны *r*. Поэтому объём шара равен произведению 1/3 на *r* и на сумму площадей основания всех пирамид.

— Но сумма площадей оснований всех пирамид — это площадь сферы, — произносит Итиро.

— И мы уже знаем её формулу из предыдущего объяснения, — вспоминает Дзяй. — Тогда

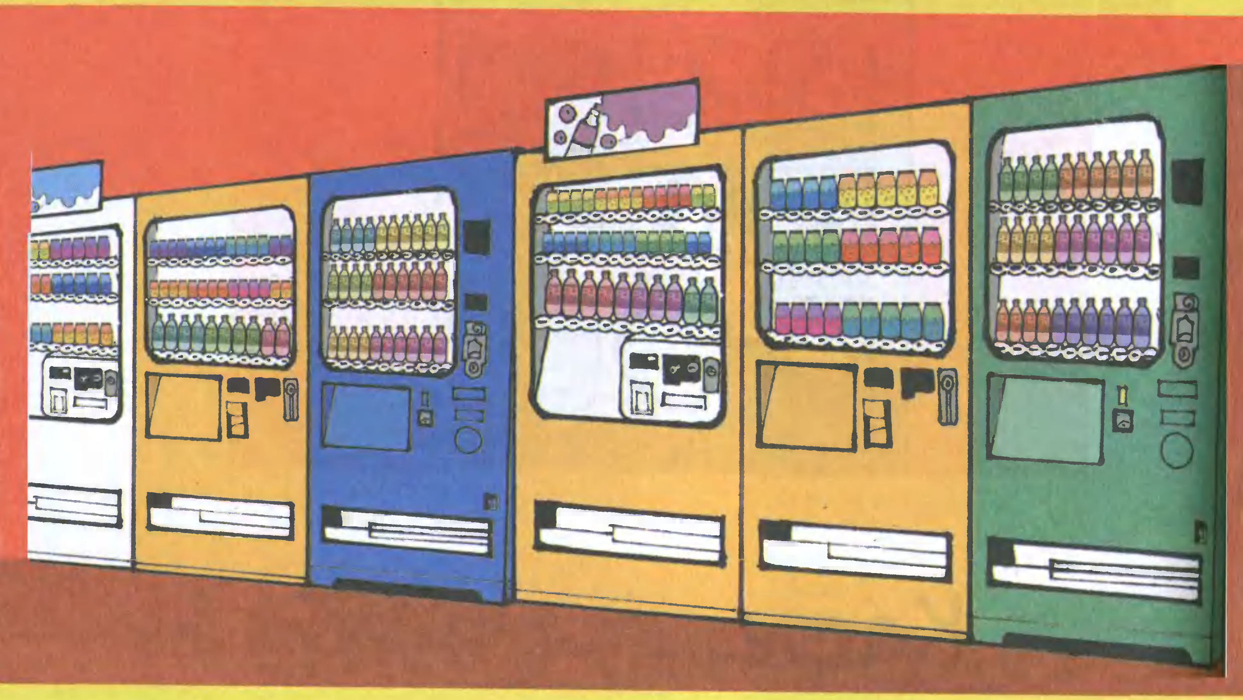
$$\text{объём шара} = \frac{1}{3} \times r \times 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Итиро и Дзяй гордятся, что смогли вывести формулы. И хотя Кино ничего не говорил, он внимательно слушал и всё понял.

— Баумкухен, спагетти, арбуз… Прямо аппетит разыгрался. Пойдём обедать! — предлагает Кино.

9

Кафе в Стране Чудес



Мальчики очень проголодались, но им не хочется тратить на обед много времени.

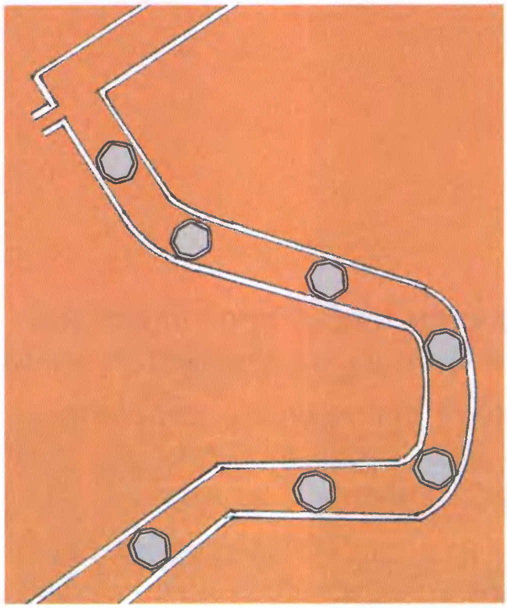
— Давайте быстренько перекусим, чтобы осталось побольше времени на осмотр, — предложил Итиро.

— Простите, где тут можно поесть? — спрашивают они проходящего мимо сотрудника.

— Вон там, — указывает он на вход в кафе.

Ребята заходят и видят множество автоматов по продаже еды.

Работница кафе говорит им, что для автоматов нужно купить жетоны. При виде жетонов мальчики оживляются.

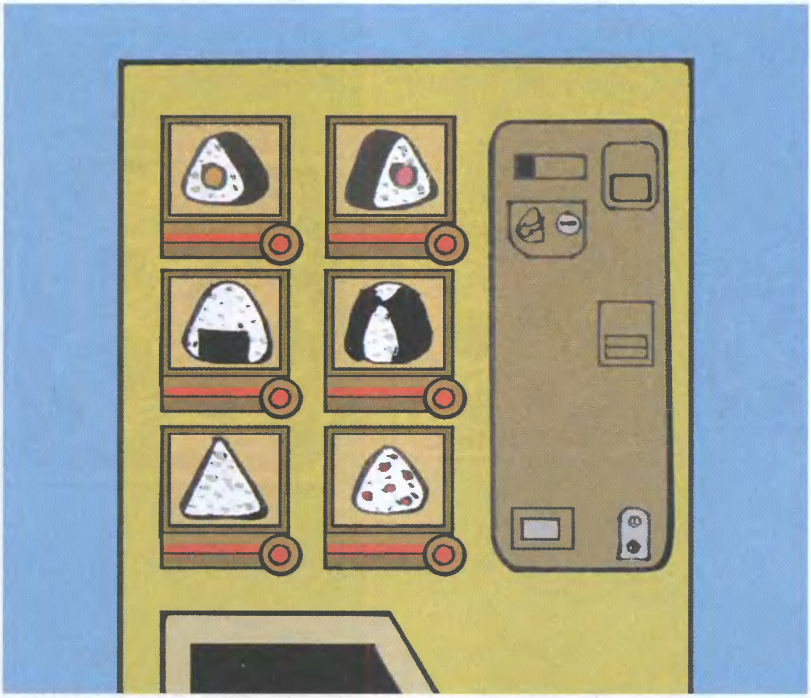


— Фигуры постоянной ширины! – замечает Итиро.

Ребята подходят к автомату и опускают жетон. Им хорошо видно передвижение жетона в автомате.

— Интересно, почему они решили сделать такие жетоны? — удивляется Кино.

— Наверное, чтобы показать, что для этих автоматов они ничуть не хуже круглых, — предполагает Дзяй.



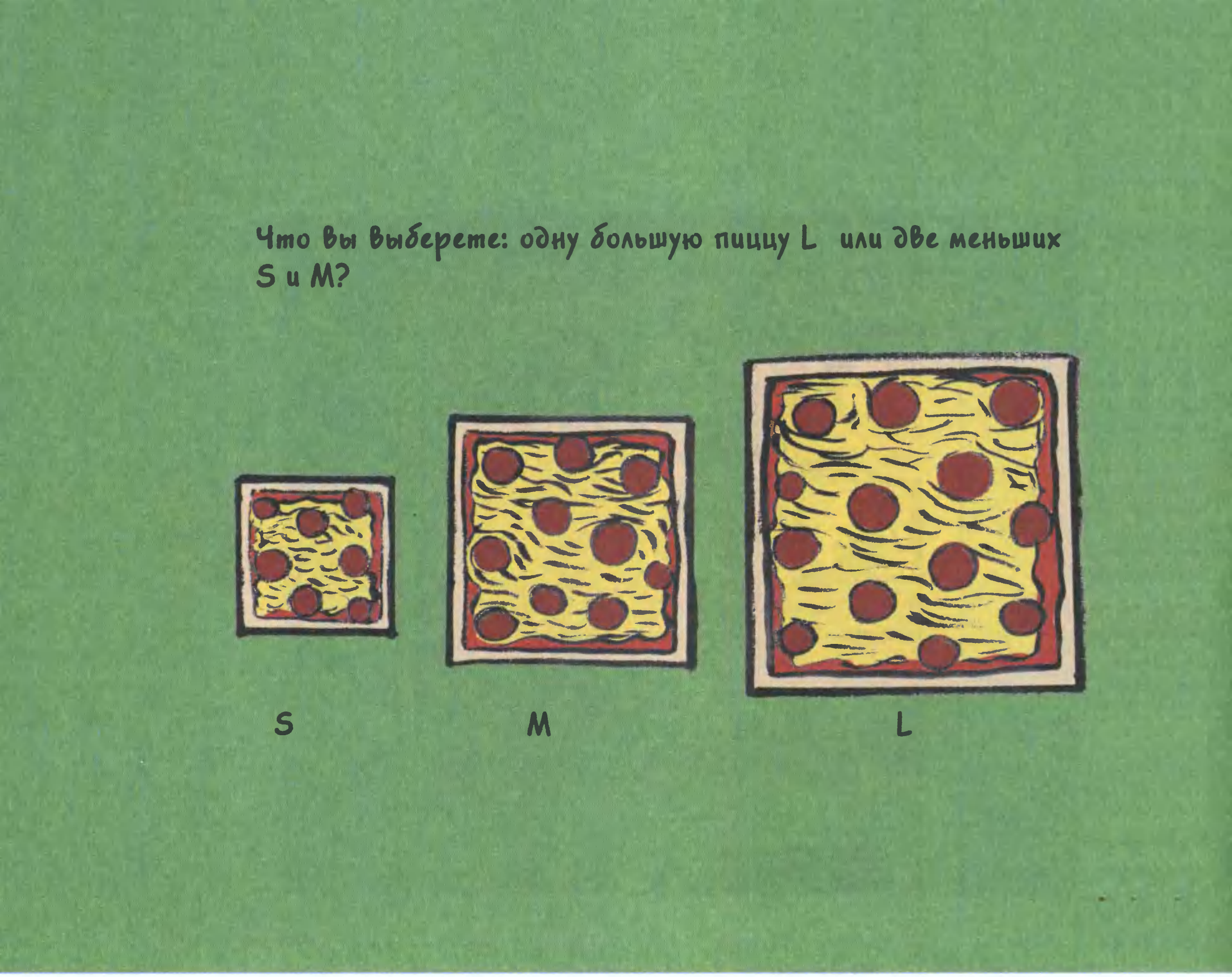
В одном из автоматов они обнаруживают онигири[4].

— Пухлый треугольник! — радуются ребята.

Купив себе еду и напитки, они идут в обеденный зал и садятся за столик. На стене напротив вывешены на плакатах математические задачи на кулинарную тему.

За едой ребята начинают обсуждать первую задачу, рисуя на бумажных салфетках.

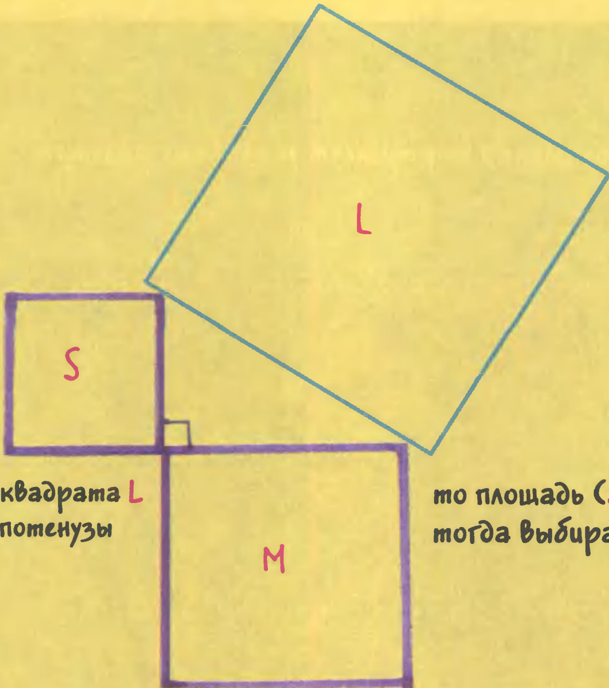
4. Традиционный японский рисовый шарик, имеющий форму треугольника Рело.



— Эти квадраты напоминают мне теорему Пифагора, — замечает Кино.

— Точно, а что если расположить их вокруг прямоугольного треугольника и посмотреть, как они подходят друг другу? — говорит Итиро.

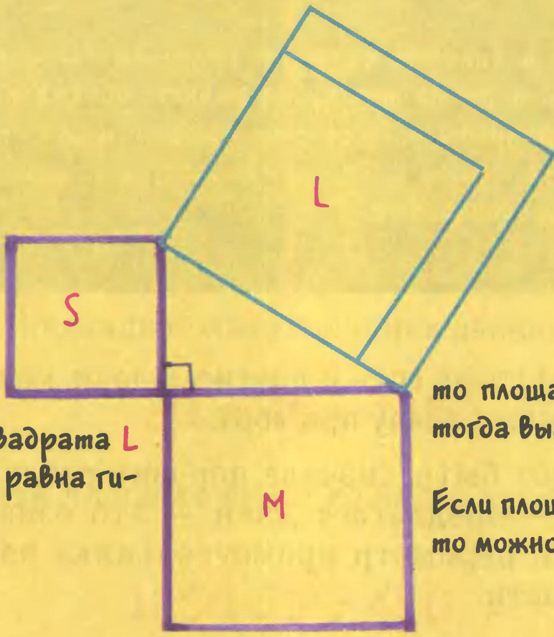
Так у них получается решение.



Если

сторона квадрата L больше гипотенузы

то площадь (S + M) < площади L, тогда выбираем L.



Если же

сторона квадрата L меньше или равна гипотенузе

то площадь (S + M) > площади L, тогда выбираем S и M.

Если площадь (S + M) = площади L, то можно выбрать и L.

Хотя на стене есть и другие задачи, мальчики выбирают задачу про торт.

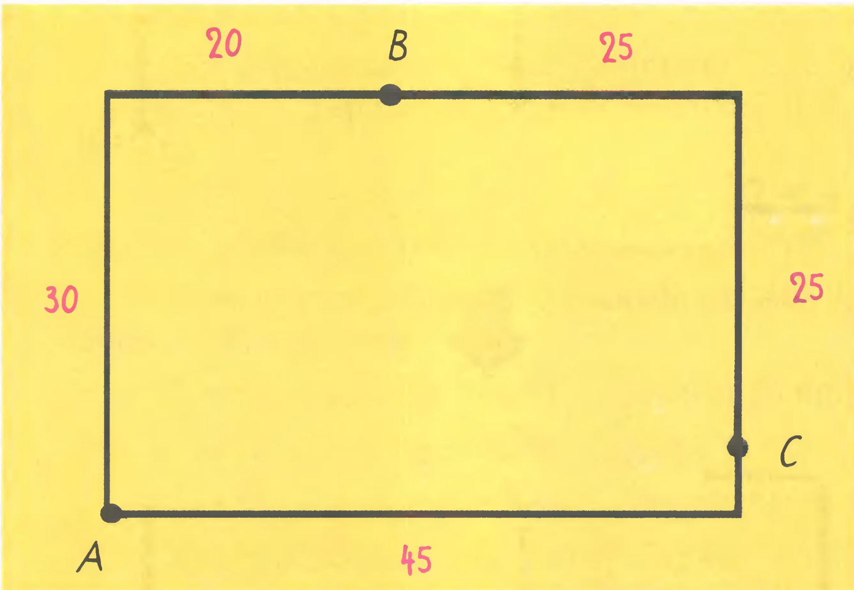
— Может быть, сначала поровну разделить глазурь? — предлагает Дзяй. — Это означает разделить периметр прямоугольника на три равные части.

Ребята начинают вычислять.

Начиная из одного угла, они делят периметр на равные части:

$$\text{периметр} = (2 \times 45) + (2 \times 30) = 150,$$

$$150 : 3 = 50$$



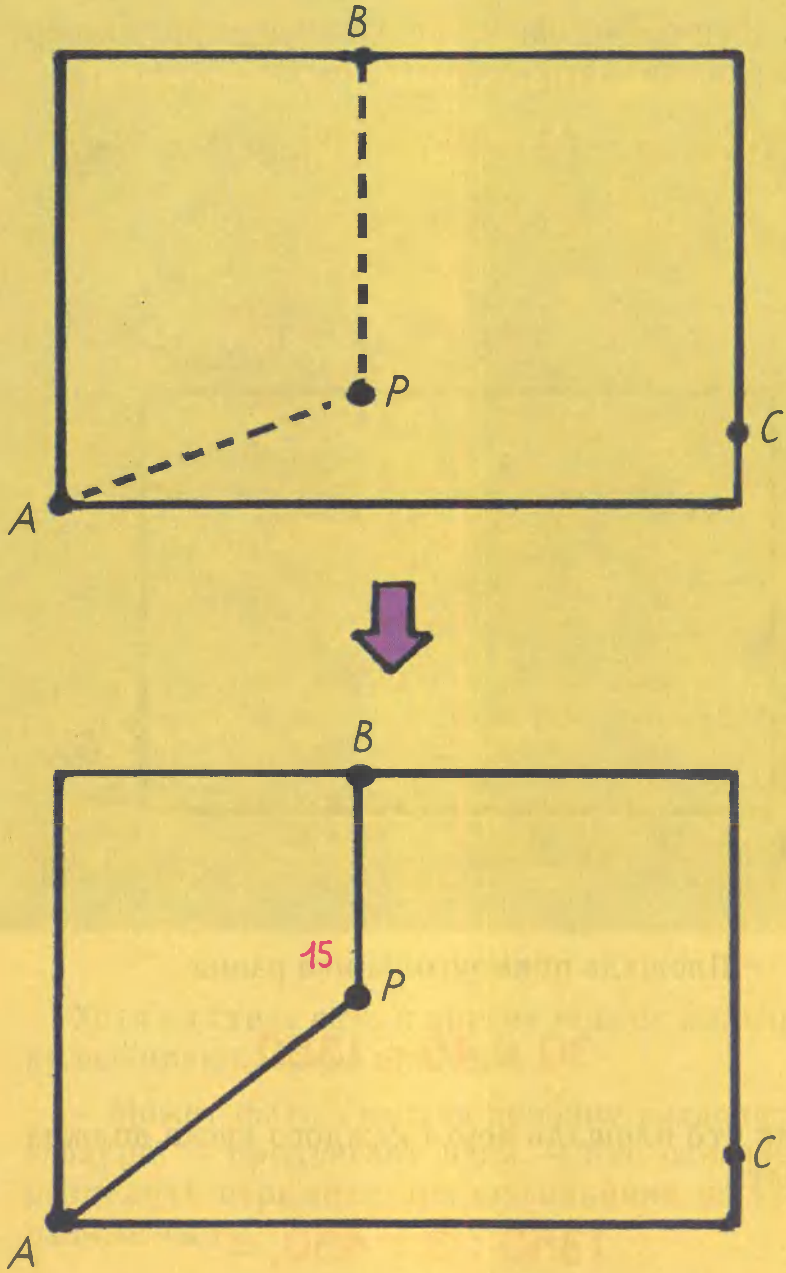
— Площадь прямоугольника равна

$$30 \times 45 = 1350,$$

так что площадь верха каждого куска должна быть

$$1350 : 3 = 450, \text{ –}$$

говорит Итиро.


B
P
C
A
B
15
P
C
A

– Также мы знаем, что для того, чтобы содержать одинаковое количество глазури, один кусок должен включать край пирога от B до C, другой от C до A и третий от A до B, – говорит Кино.

– Как определить четырёхугольник, содержащий край пирога от A до B? – спрашивает *Итиро.*

– Две его других стороны должны быть внутри прямоугольника, – размышляет Дзяй.

– А для каких четырёхугольников мы можем легко найти площадь?

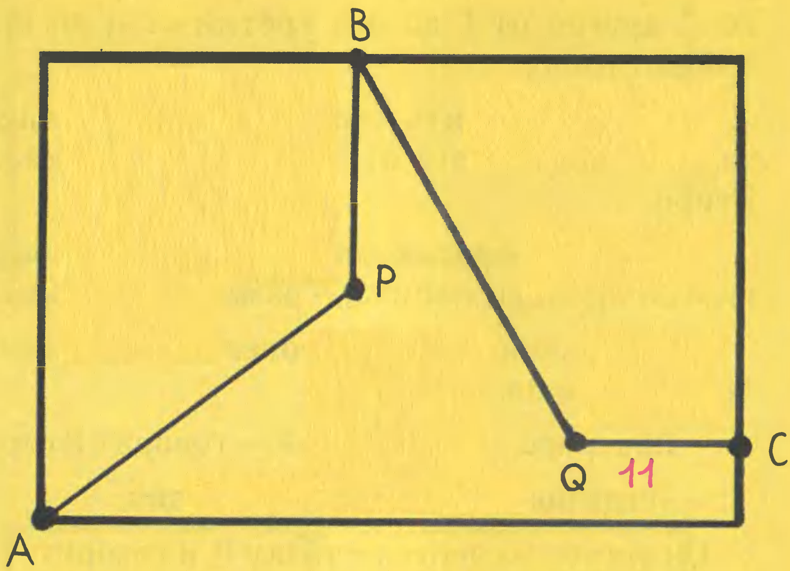
– Наверное, для трапеций, – говорит Итиро.

– Тогда попробуем, – говорит Дзяй.

Он рисует на чертеже точку P и говорит:

– Мы должны найти точку P так, чтобы площадь четырёхугольника равнялась 450.

– Надо использовать формулу для площади трапеции, – предлагает Итиро.


B
P
Q
11
C
A

$$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = 450,$$

или

$$\frac{1}{2}(30 + b_2)20 = 450$$

Они решают это уравнение для b_2 и определяют, что $b_2 = 15$. Итиро переносит точку P в правильное место.

— Точно так же мы можем построить трапецию, периметр которой включает участок от B до C, — говорит Дзяй.

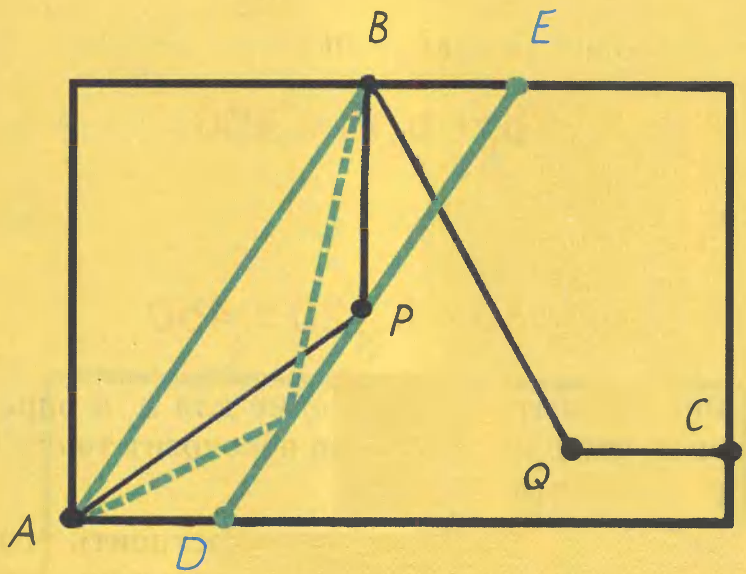
Записав равенство

$$\frac{1}{2}(25 + b_2)25 = 450,$$

ребята получают, что $b_2 = 11$. Они ставят на рисунке точку Q.

— У нас получилось три куска, в которых поровну и пирога, и глазури, но третий кусок не четырёхугольный! — сокрушается Итиро.

Они не знают, что с этим делать, и уже готовы бросить эту задачу, когда Кино замечает у автоматов какого-то сотрудника.



— Давайте попросим его помочь нам, — предлагает он.

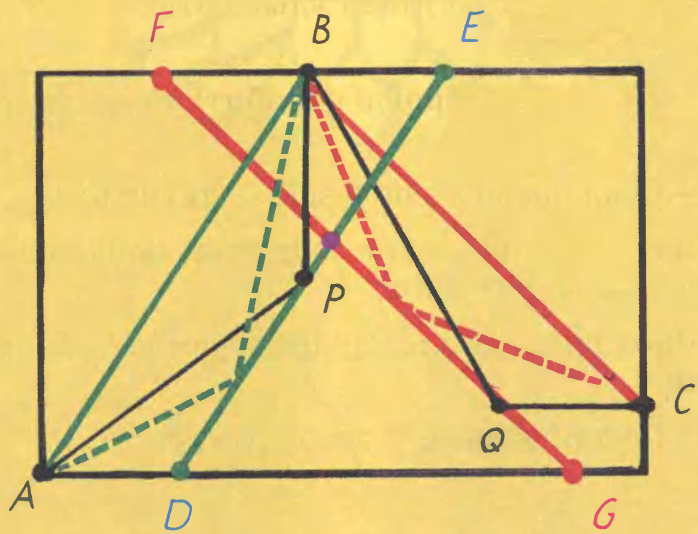
Кино подходит к сотруднику и возвращается с ним обратно к друзьям. Они рассказывают ему о своём затруднении.

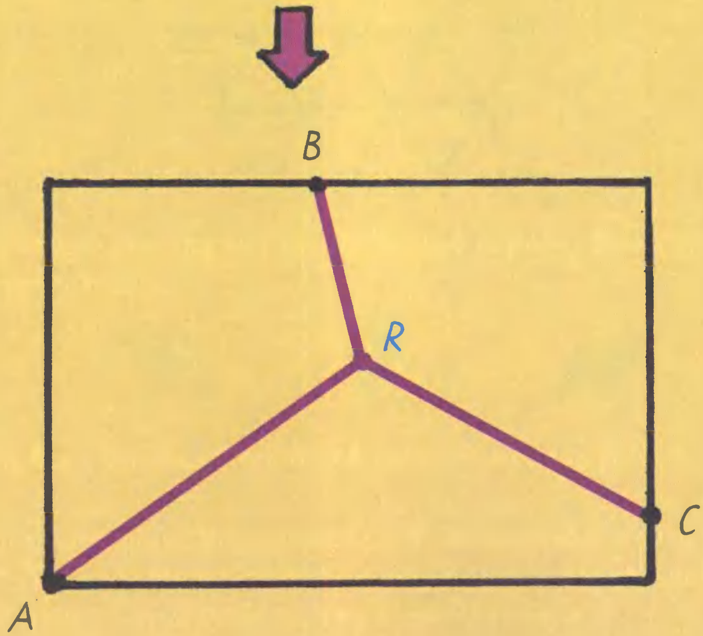
— Меня зовут Ясу, — говорит тот. — Это задача не из простых, — продолжает он. — Проведите прямую *AB* и попробуйте посмотреть на треугольники с основанием *AB* и той же высотой, что у треугольника *APB*. Все эти треугольники будут иметь ту же площадь, что и треугольник *APB*.

Ясу проводит прямую *AB* и прямую *DE*, проходящую через точку *P* и параллельную *AB*.

— Таким образом, вы можете двигать точку P как угодно по прямой DE, при этом площадь треугольника APB будет неизменна, поэтому треугольник APB можно заменить другим, — продолжает он. — А теперь проделайте то же самое с другой трапецией.

Итиро проводит прямую BC и прямую FG, параллельную ей и проходящую через точку Q.





— Теперь можно двигать точку P вдоль DE, а точку Q вдоль FG, — замечает Дзяй.

— Я понял! — восклицает Итиро. — Мы подвинем и P, и Q до точки пересечения R прямых DE и FG. Тогда третий кусок тоже будет четырёхугольным!

Мальчики счастливо улыбаются. Ясу очень рад за них.

— Молодцы, хорошо поработали, — говорит он.

— Обед прошёл с пользой, — шутит Кино.

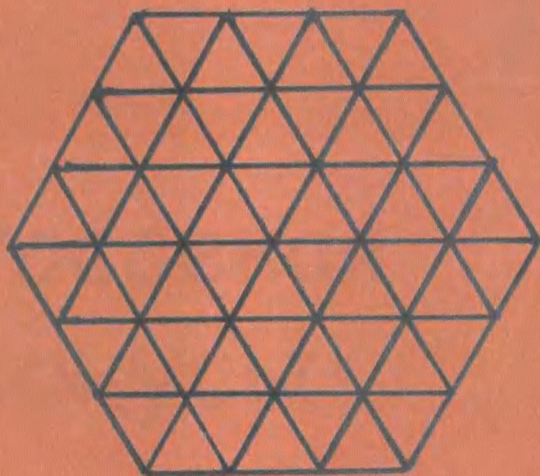
Дзяй переписывает себе ещё одну задачу, чтобы порешать дома.

Обед продолжался дольше, чем ребята ожидали.

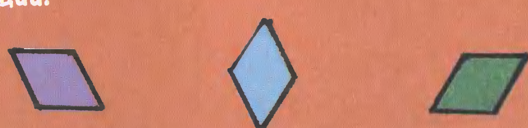
— Пошли дальше, — зовёт Итиро.

Калиссоны — это французские сладости, приготовленные из миндально-дынной пасты. Каждый кусочек как бы составлен из двух правильных треугольников, поэтому похож на ромб.

Пусть калиссоны с длиной стороны 1 складывают в шестиугольную коробку с длиной стороны 3.



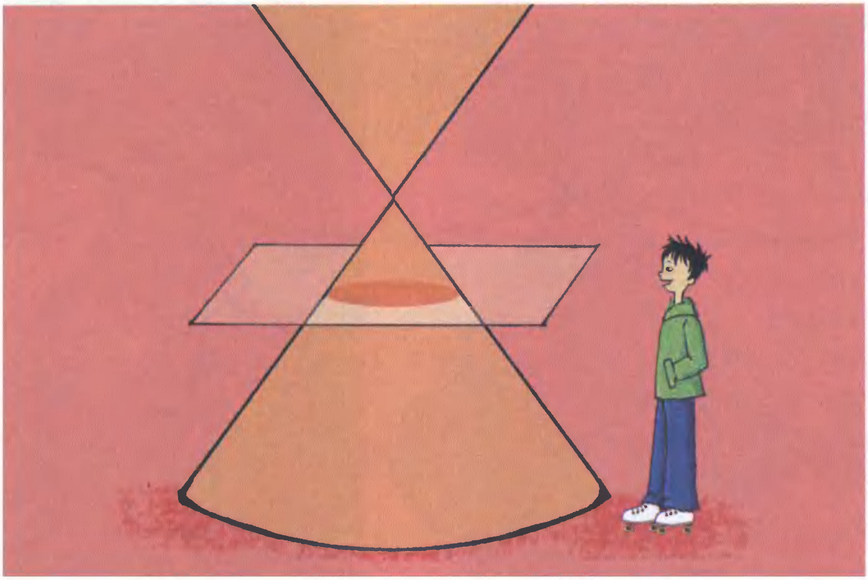
Для каждого кусочка при укладывании в коробку возможны только три ориентации:



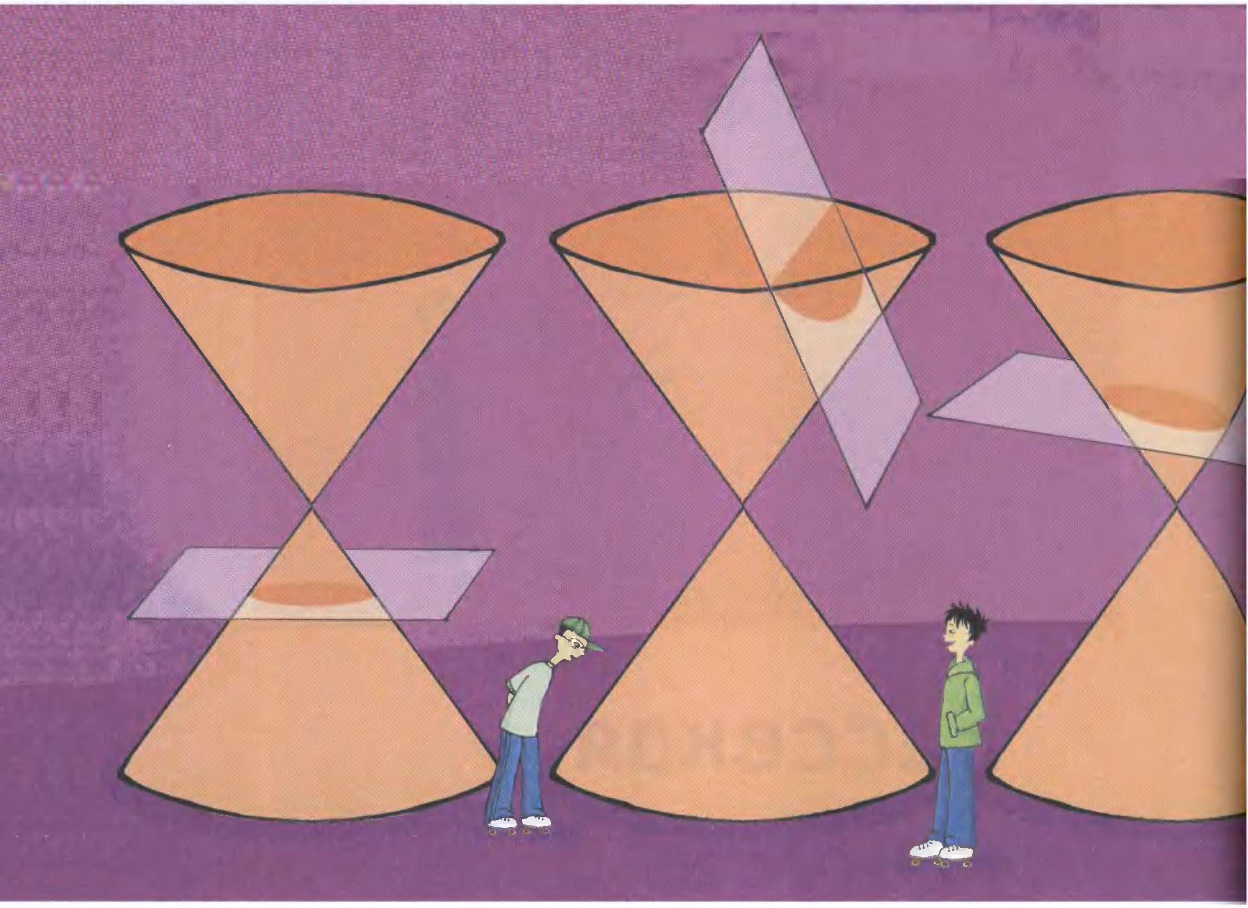
но для всей коробки вариантов укладки гораздо больше.

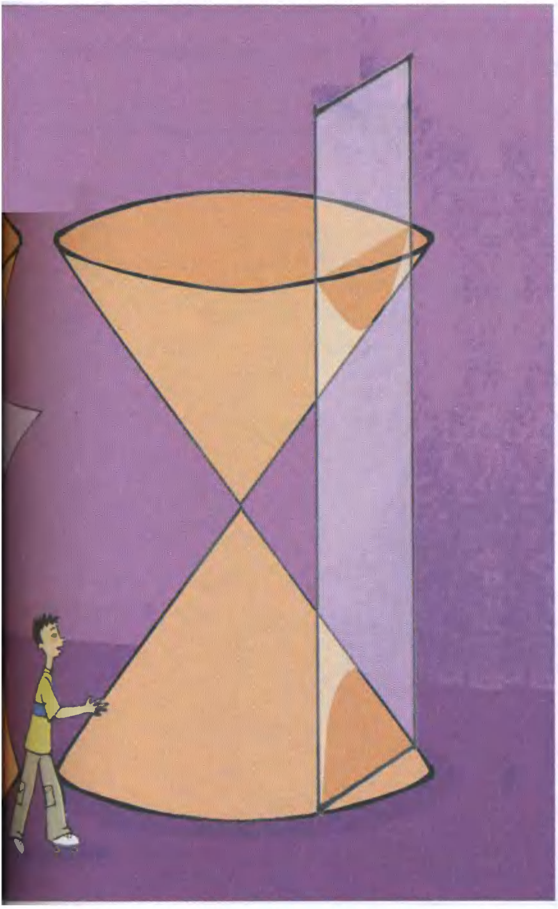
Найдите несколько разных способов заполнения коробки калиссонами. Для каждого способа посчитайте число калиссонов каждой ориентации и сравните их. Что можно заметить?

10



Рассекая конусы





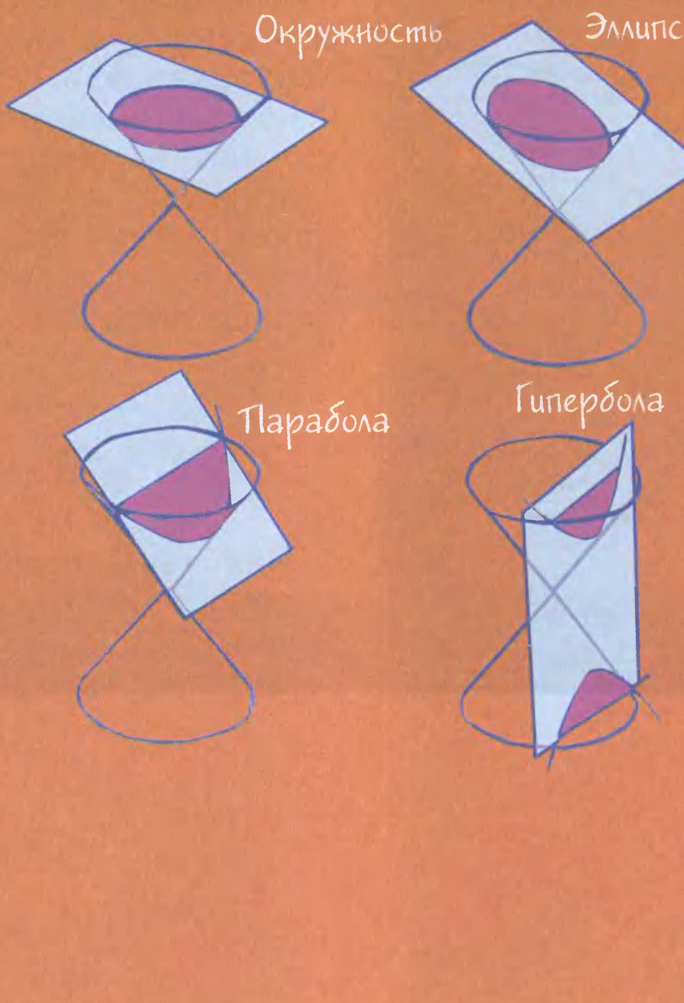
Выйдя из кафе, ребята видят, что у входа в следующую комнату находятся четыре огромных двойных конуса из полупрозрачного пластика. Приблизившись, они заметили, что каждый конус пересечён плоскостью и образованные пересечениями кривые хорошо видны. Конусы установлены у входа с вывеской:

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Мальчики решают зайти внутрь. У самого входа висит плакат, объясняющий, что такое конические сечения.

Конические сечения

Коническое сечение — это кривая, образованная пересечением плоскости с поверхностью двойного прямого кругового конуса. Наклон плоскости по отношению к оси конуса определяет, какая кривая получается при пересечении: окружность, эллипс, парабола или гипербола.



Конические сечения изучали ещё древнегреческие геометры Евклид (ок. 300 г. до н. э.), Архимед (ок. 287 - 212 гг. до н. э.), Аполлоний (ок. 260 - 190 гг. до н. э.).

Конические сечения играют в математике важнейшую роль. Иоганн Кеплер (1571 - 1630) открыл, что планеты обращаются вокруг Солнца по эллиптическим, а не круговым орбитам, как считалось раньше. В 1672 г. Лоран Кассегрен изобрёл телескоп на основе гиперболических и параболических зеркал. Эта схема используется и в телескопе «Хаббл». Английский астроном Эдмунд Галлей (1656 - 1742) использовал свойство эллиптичности орбит для предсказания, что комета, названная позже его именем, должна появляться каждые 76 лет.

Из всех этих кривых друзьям знакома разве что окружность. Но видя, что в зале много ребят, они приободряются.

Мальчики подходят к столу, похожему на бильярдный. Его игровое поле имеет форму эллипса — ребята уже узнают эту кривую.

Рядом стоит инструктор по имени Сацу. Он говорит:

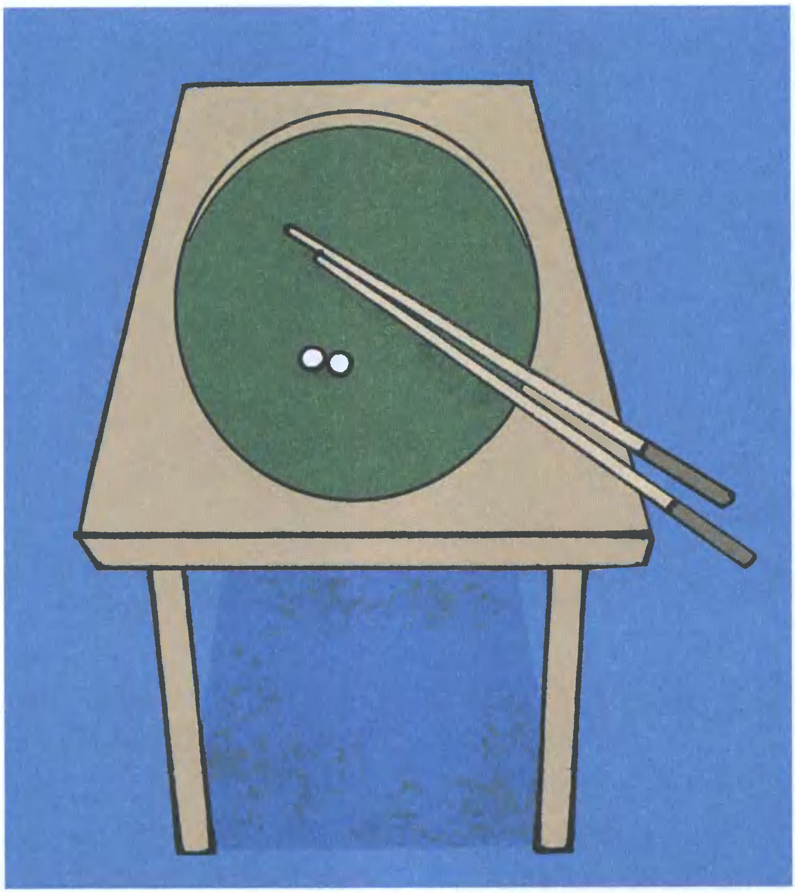
— Это бильярд, в который нельзя проиграть.

— А как в него играют? — спрашивает Кино.

— У эллипса есть две специальные точки, каждая из которых называется «фокус». Давайте положим по шару в каждый фокус.

Он аккуратно кладёт шары в отмеченные точки.

— Теперь вы можете спорить на что угодно, что если ударить кием один из шаров, то, отразившись от борта, первый шар столкнётся со вторым, — продолжает Сацу. — Попробуйте сами.

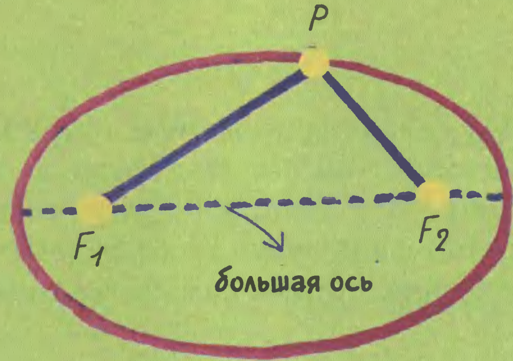


Итиро берёт кий и ударяет по одному из шаров. Тот отскакивает от границы эллипса и действительно попадает во второй шар.

Затем пробуют Кино и Дзяй.

— Почему так получается? — спрашивают мальчики.

— Это особенное свойство эллипса, — отвечает Сацу и подводит ребят к стенду, рассказывающему об этой кривой.

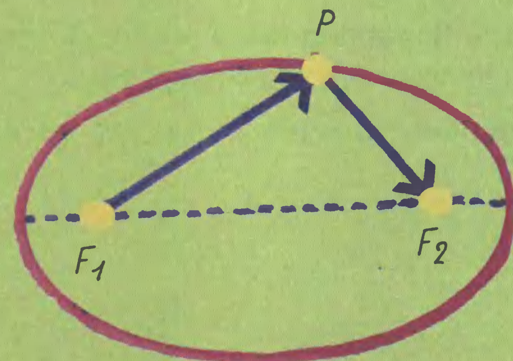


Эллипс

Эллипс представляет собой множество таких точек P на плоскости, что суммарное расстояние от P до двух фиксированных точек плоскости, F_1 и F_2, является одним и тем же. Точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса.

Отражение от эллиптического зеркала

Луч света, исходящий из фокуса и направленный в какую-либо точку P на эллипсе, отражается в точке P вдоль прямой, проходящей через второй фокус.



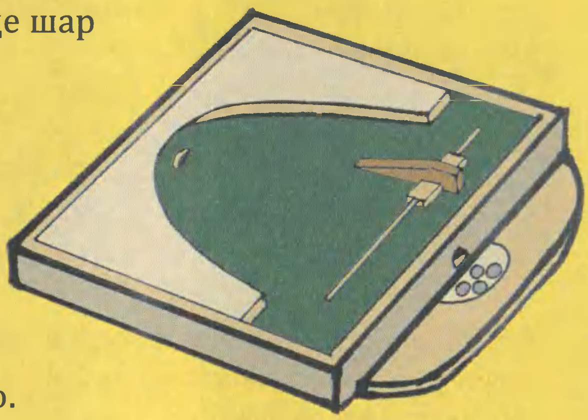
— Когда вы ударяете по шару в точке F_1, неважно в какую сторону он летит, отразится он всегда в направлении F_2, — заявляет Сацу. — Отражение от других конических сечений тоже замечательно. Сейчас я продемонстрирую вам отражение от параболы.

Он подводит ребят к другому столу, на котором они видят нечто вроде настольной игры.

Передвигающаяся пушка стреляет шариками, которые всё время попадают в лунку.

Дзяй сосредоточенно думает.

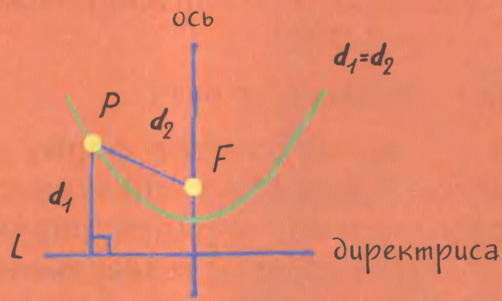
— В том бильярде шар всегда после отражения попадает в фокус. Так, может быть, эта лунка тоже фокус?



Сацу поражен, что Дзяй увидел аналогию так ясно.

— Именно так, — отвечает он. — Парабола имеет один фокус, в котором и находится это отверстие.

Он показывает мальчикам плакат, посвящённый параболе.

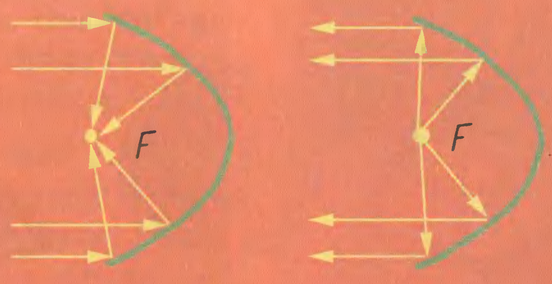


Парабола

Парабола образована всеми точками P плоскости, равноудаленными от данной точки F, называемой фокусом параболы, и данной прямой L, называемой директрисой параболы.

Отражение от параболы

Луч света, направленный внутрь параболы параллельно её оси симметрии, отражается от параболы в её фокус. Если источник света находится в фокусе, то при отражении от параболы лучи образуют параллельный пучок.



— У вас дома есть параболическая антенна для телевизора?

— Да, — отвечают ребята.

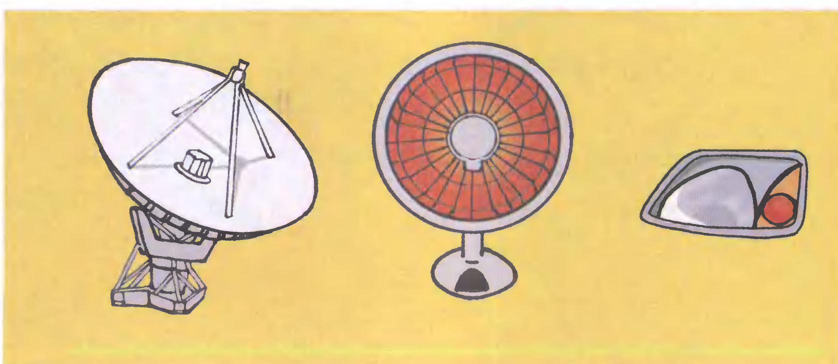
— Так вот, она имеет форму параболоида, который действует практически так же. В фокусе антенны концентрируются лучи, в которых закодирован телевизионный сигнал. Это повышает качество изображения и звука в ваших телевизорах.

Мальчики слушают Сацу с удивлением. Они никак не ожидали, что чёткость изображения в телевизоре имеет отношение к математике.

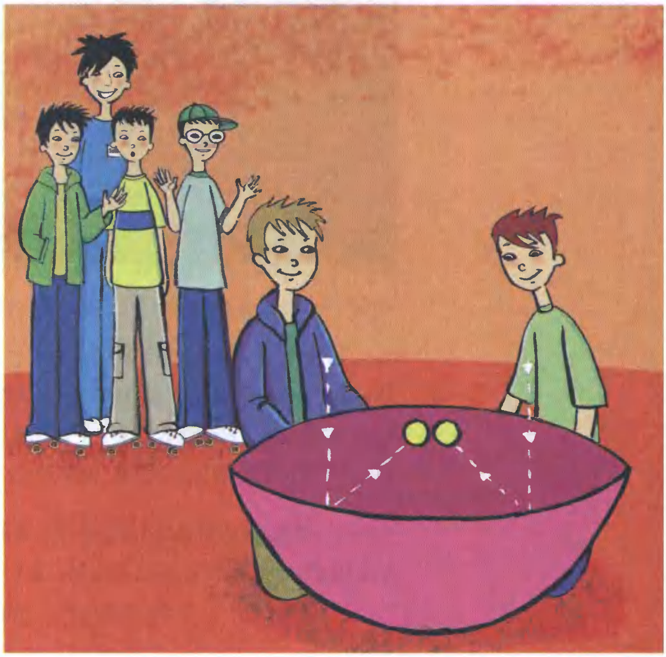
— А как из параболы получается параболоид? — спрашивает Дзяй.

— Надо просто повернуть её в пространстве на 180 градусов вокруг своей оси, — отвечает Сацу.

Здесь же выставлено несколько устройств, использующих свойство отражения от параболоида. Сацу показывает ребятам параболическую антенну, галогеновый обогреватель и автомобильную фару.



Рядом стоит большая чаша в форме параболоида. Двое ребят роняют в неё по мячику, стараясь делать это одновременно, с одинаковой высоты и на одинаковом расстоянии от центра. Мячики каждый раз сталкиваются друг с другом, причём в одной и той же точке.



Мальчики некоторое время наблюдают за экспериментом. Они догадываются, что точка столкновения и есть фокус.[1]

— У нас ещё есть демонстрация свойств параболоида на улице, хотите посмотреть? — предлагает Сацу.

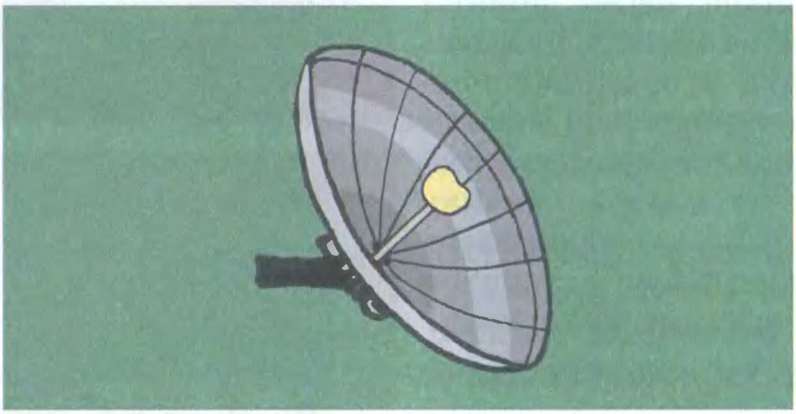
1. Так бывает только в Стране Чудес. В жизни шарики немного отклоняются от фокуса. – *Прим. редактора.*

Все поднимаются по лестнице и выходят во двор Страны Чудес. Сацу ведёт ребят к месту, где расположен параболоид. Глядя по сторонам, они видят, что вокруг выставлено много интересных объектов.

— О, сколько всего, что мы здесь ещё не видели, — замечает Кино.

— Мы можем сюда вернуться, когда посмотрим всё внутри, — предлагает Итиро.

— Если хватит времени. Там ещё много осталось, — говорит Дзяй.



Сацу показывает ребятам параболоид, в фокусе которого закреплена картофелина. Он направляет устройство так, чтобы солнечные лучи падали на него вдоль оси.

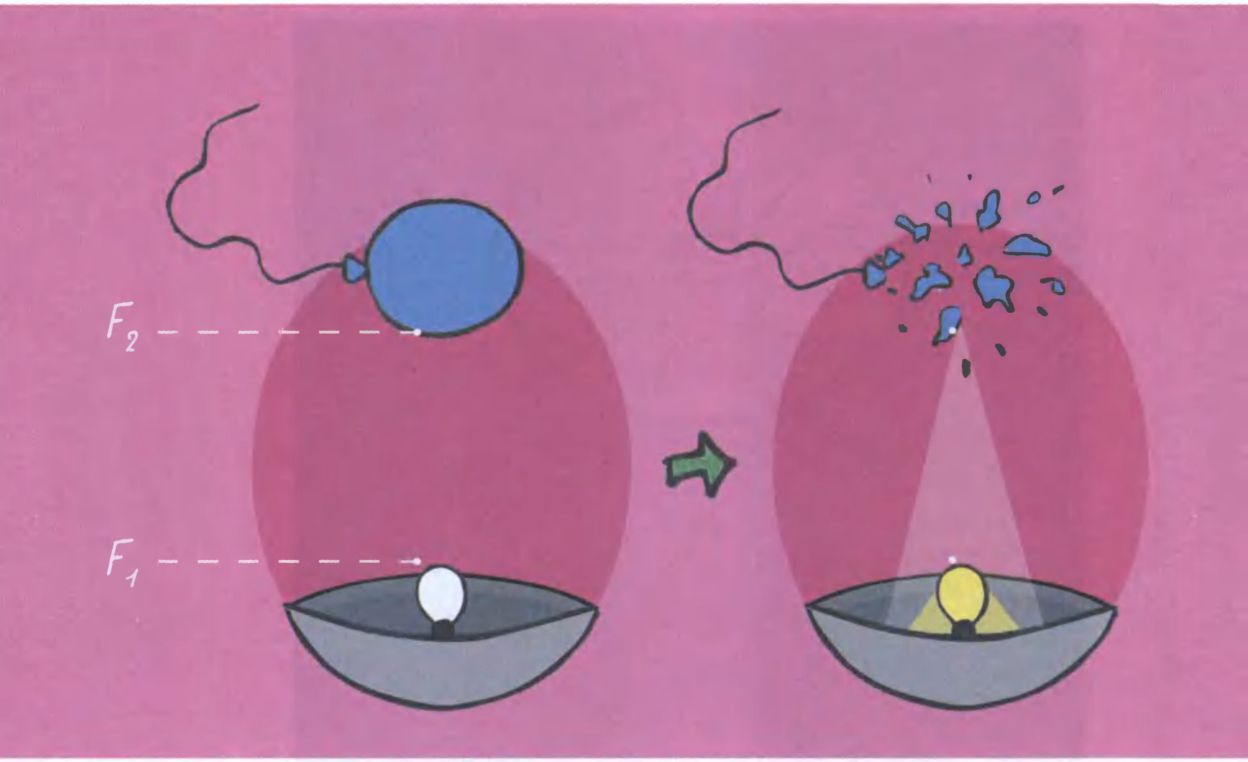
— Вы увидите, что эта картошка скоро испечётся, — обещает он.

Тем временем Сацу показывает ребятам настоящее походное устройство для приготовления еды. Оно состоит из отражающего параболоида, который можно ориентировать по солнцу, и подставки для чайника или кастрюльки.

— Давайте сварим яйцо, — предлагает Сацу. Он наполняет чайник водой и опускает в неё яйцо.

Ребятам очень нравятся эти эксперименты. Через некоторое время кожура картошки темнеет, а вода в чайнике закипает.

— Такие штуки очень подходят для пикника, — говорит Кино.



Отдав ребятам испечённую картошку и сваренное яйцо, Сацу ведёт их обратно в зал конических сечений.

Там они подходят к чаше, в центре которой укреплена электрическая лампочка.

— Это часть эллипсоида, — говорит Сацу, — и лампочка находится в одном из его фокусов.

— А это для чего? — нетерпеливо спрашивает Итиро.

— Сейчас увидишь. Надуй, пожалуйста, этот шарик и держи его в районе второго фокуса.

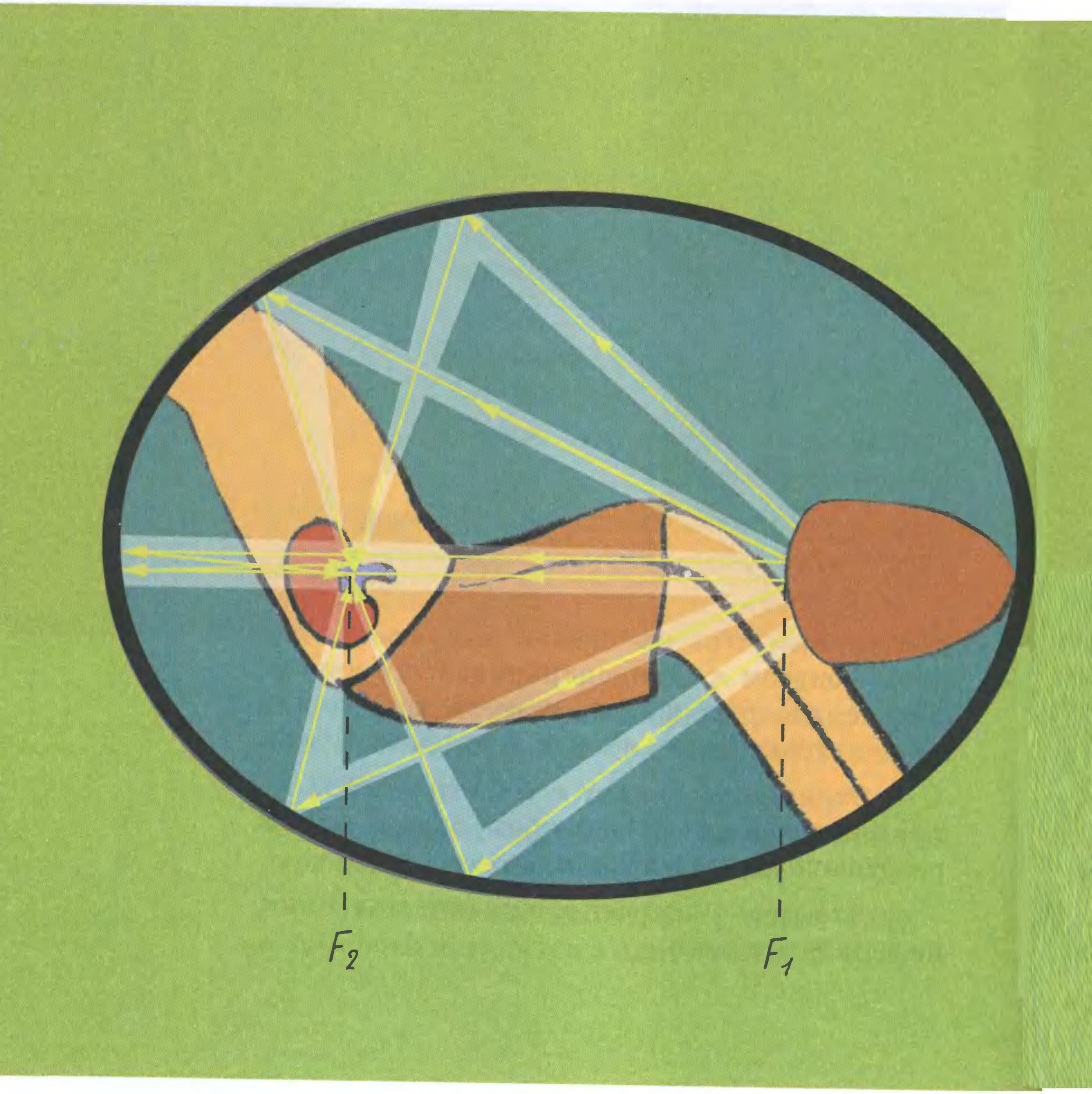
Итиро так и делает. Сацу включает лампочку, и шарик лопается.

— Можете объяснить, что произошло? — спрашивает Сацу.

— Я думаю, что свет, выходя из одного фокуса, был отражён частью эллипсоида под этим фокусом и сконцентрировался в другом фокусе, где был шарик, и из-за нагревания в одной точке шарик лопнул, — отвечает Итиро.

— Отлично! — хвалит его Сацу. — Этот же принцип сейчас используют врачи, чтобы разрушать камни в почках.

— Что-что? — переспрашивают мальчики, не вполне понимая.


F_2
F_1

— Камни в почках бывают очень болезненны и могут вызвать воспаление. Раньше единственным способом их удаления была операция, но недавно придумали новую медицинскую процедуру — бесконтактную литотрипсию. Устройство для этой процедуры включает в себя эллипсоид. Врач располагает пациента так, что камни в его почках находятся в одном из фокусов этого эллипсоида. Затем из второго фокуса начинают исходить звуковые волны. Они отражаются от эллипсоида и попадают в место расположения камней. Эти звуковые волны дробят почечные камни, так что операция уже не нужна.

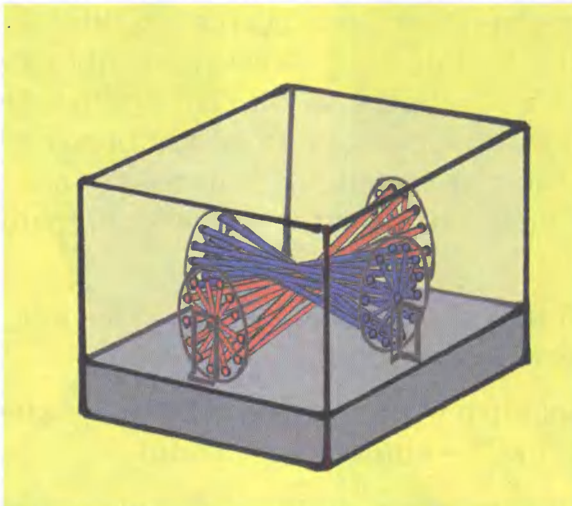
Дзяй пытается представить себе, как может выглядеть эта машина.

— Выходит, чтобы стать врачом, нужно знать математику? — спрашивает Кино.

— Современная медицина очень много использует математику. Дискретное моделирование нужно, чтобы отслеживать развитие опухолей, с помощью дифференциальных уравнений моделируют распространение эпидемий, а ещё есть современный аппарат — томограф, который делает более точные снимки, чем рентген, и для их правильной интерпретации надо понимать математический анализ, — отвечает Сацу.

На мальчиков это производит большое впечатление, хотя они не имеют ни малейшего понятия о разделах математики, которые упоминал Сацу.

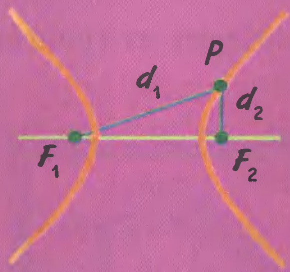
— А это что? — спрашивает Итиро, внимание которого привлекла какая-то вращающаяся модель.



— Это демонстрация того, как с помощью механической передачи можно преобразовать вращение вокруг одной оси во вращение вокруг другой, — объясняет Сацу. — Некоторые типы передач, которые используют в автомобилях и других устройствах, основаны на гиперболоидах. Здесь вы видите два гиперболоида, которые касаются друг друга вдоль прямой. Вращение одного из них вокруг своей оси вынуждает другой вращаться вокруг своей, так что передача меняет ось вращения.

Рядом находится плакат с информацией о гиперболе.

$|d_1 - d_2| = \text{Constant}$

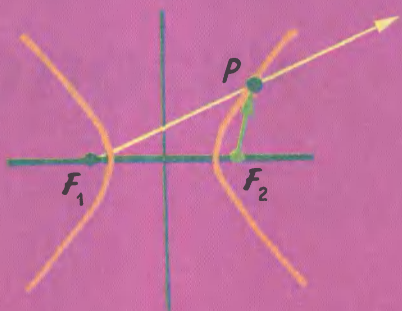


Гипербола

Гипербола образована такими точками P плоскости, что модуль разности расстояний от P до двух заданных точек плоскости F_1 и F_2 одинаков для всех точек P.

Отражение от гиперболы

Луч света, исходящий из фокуса гиперболы, отражается от гиперболы так, как если бы он исходил из другого фокуса.



Ребята благодарят Сацу и направляются к выходу.

— Пошли посмотрим, что ещё есть на улице, — предлагает Кино.

— Но мы даже не видели первый этаж! — протестует Итиро.

— Мы всегда можем приехать ещё , — говорит Дзяй. — Может, правда посмотрим первый этаж?

— Ну, как хотите, — соглашается Кино.

Они поднимаются по лестнице на первый этаж.

11

Перекрученные полоски

Вернувшись на первый этаж, ребята видят помещение, в котором дети сидят за столами, вырезая и склеивая что-то из бумаги. Итиро, Кино и Дзяй не большие любители этого занятия, но увлечённость детей притягивает их, и они немного задерживаются у двери.

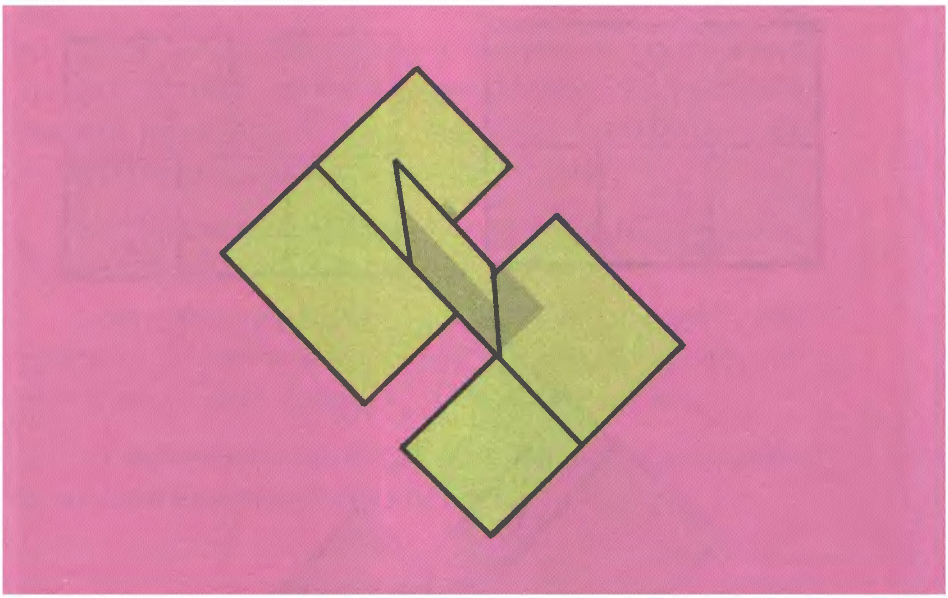
Один из инструкторов, Тоси, замечает мальчиков и приглашает их присоединиться к ребятам.

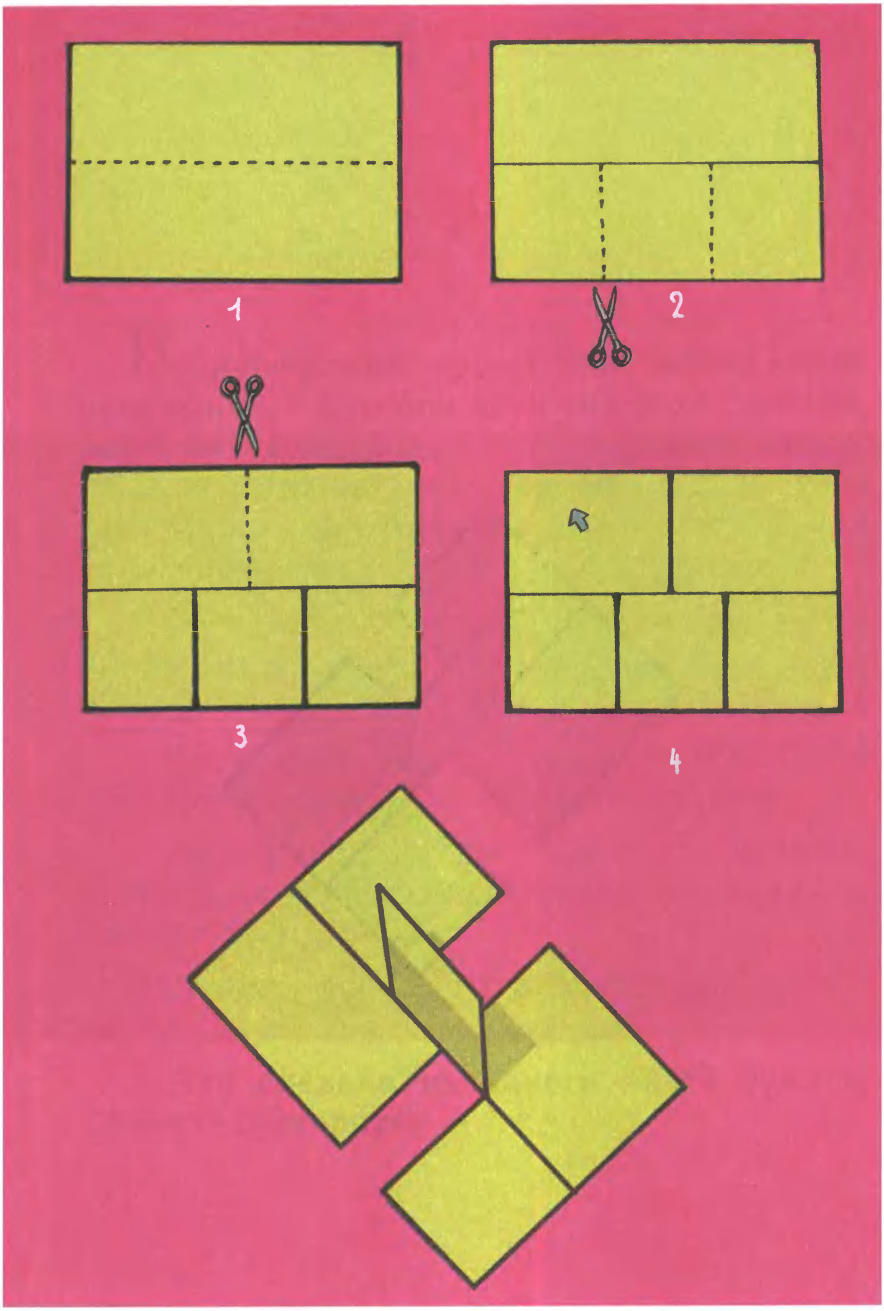
— Вы можете сесть там, — указывает он на стол с несколькими свободными местами.

— Ну что, ребята? Вы только что пришли, давайте-ка устроим небольшую разминку, — говорит Тоси.

Он показывает всем конструкцию из бумаги.

— Это сделано из одного листа бумаги. Сможете повторить?




1
2
3
4

— Трудная задача, — говорит Кино.

Итиро и Дзяй внимательно смотрят на модель. Дзяй сразу же замечает, в чём фокус, Итиро раздумывает дольше, но потом тоже понимает. А вот Кино, подобно многим другим ребятам, никак не может догадаться.

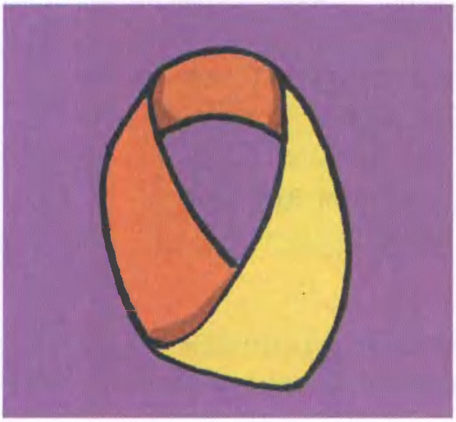
Дзяй объясняет:

— Надо сложить лист пополам вдоль длинной стороны. Одну половину разделить на три равные части и разрезать по разделительным линиям до сгиба. Вторую половину разделить на две равные части и тоже разрезать до сгиба. Затем повернуть две крайних части на 180 градусов, поднять среднюю. И всё!

Тем временем Итиро терпеливо показывает Кино все эти действия.

Тоси обходит столы, чтобы посмотреть, как движется работа, раздаёт советы и помогает тут и там, пока наконец не справятся все.

— С бумагой можно делать множество удивительных вещей, — говорит он.



Тоси берёт полоску бумаги, окрашенную с одной стороны в жёлтый, а с другой в оранжевый цвет.

— Сейчас я переверну один конец этой полоски и склею с другим.

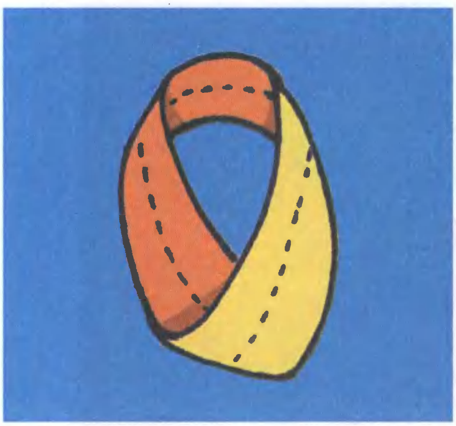
Он выполняет это и говорит:

— Хотите верьте, хотите нет, но теперь у этой полоски только одна сторона!

— Он сказал «одна сторона»? — спрашивает Кино своих друзей.

— Простите, как Вы сказали? — обращается к Тоси Итиро.

— Подойди сюда, будешь мне помогать, — предлагает Тоси в ответ. — Отметь, пожалуйста, на поверхности какую-нибудь точку. Теперь проведи через эту точку линию вдоль полосы.



Итиро всё это выполняет, и в конце концов его карандаш приходит в исходную точку. Взглянув на всю полосу, Итиро видит, что линия проходит и по желтой, и по оранжевой поверхности!

По классу прокатывается гул восхищения.

— Это специальная поверхность, она называется лента Мёбиуса, — рассказывает Тоси.

— Благодаря свойству, которое мы только что продемонстрировали, ленту Мёбиуса хорошо применять в качестве ленты конвейера. Скорость её износа вдвое ниже, чем у обычного кольца.

Затем он говорит:

— А сейчас вы ещё больше удивитесь.

Дети с нетерпением ждут, что будет.

Тоси берёт ленту Мёбиуса и начинает разрезать её вдоль середины ленты.

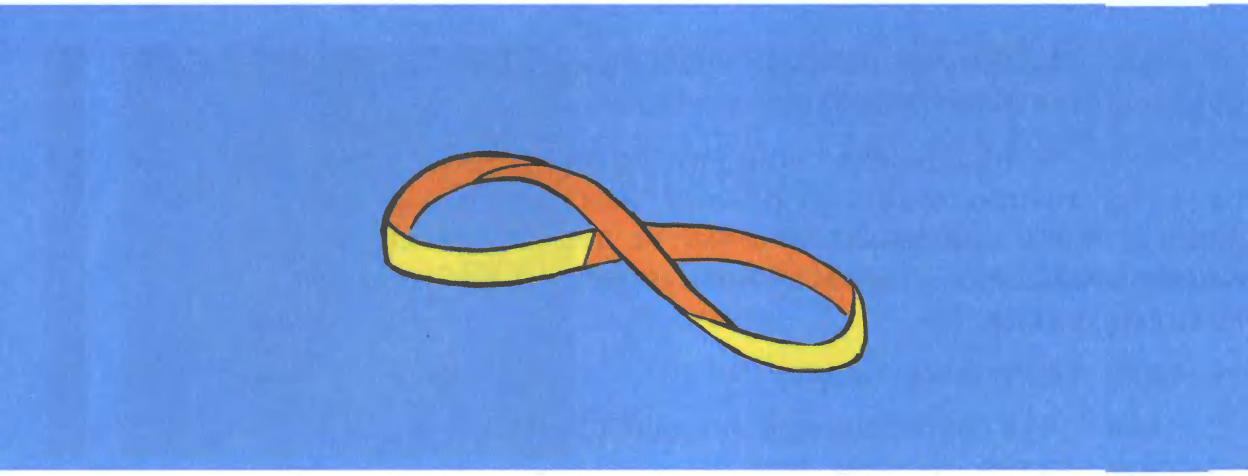
— Ну, кто догадается, что сейчас получится? — интригует он зрителей.

— Две ленты Мёбиуса половинной ширины! — говорит одна храбрая девочка.

Тоси заканчивает разрезать и показывает результат: одно длинное кольцо, перекрученное дважды.

Дети не верят своим глазам и радостно аплодируют.

Консультанты начинают раздавать им полоски бумаги, карандаши, ножницы и клей.



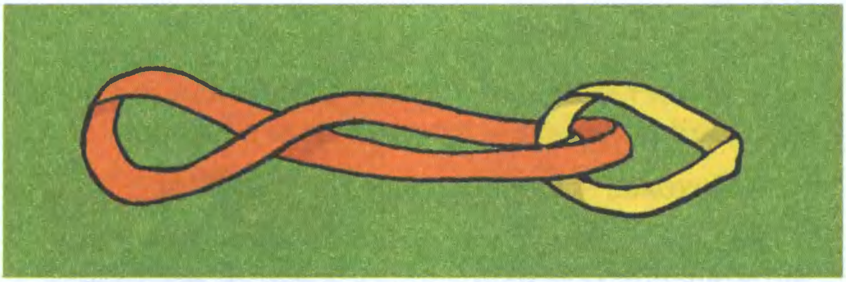
Тоси говорит:

— А теперь сделайте себе каждый по ленте Мёбиуса. Затем проведите две параллельные линии вдоль ленты и разрежьте по ним. И посмотрим, что получится.

— Может быть, мы получим одну очень длинную ленту с тремя переворотами? – предположил Итиро.

Дети берутся за дело, и класс погружается в тишину. Через некоторое время начинают раздаваться возгласы удивления и восхищения. И вот Кино держит перед собой две ленты Мёбиуса, сцепленные друг с другом, — более короткая с одним переворотом и более длинная с двумя.

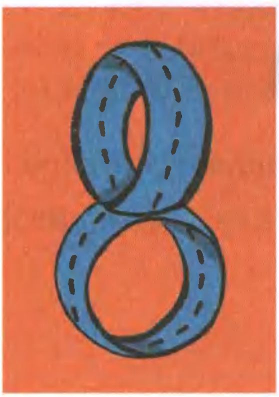
— Хм, никак не ожидал! — говорит Дзяй.— А если сделать три разреза, четыре и так далее?



— Попробуй дома, — говорит Тоси, — может быть, найдётся какая-нибудь закономерность.

Друзьям очень любопытно, что из этого получится, и они договариваются провести эксперимент, когда вернутся. Дзяй делает ещё одну мысленную пометку: лента Мёбиуса, три разреза, четыре разреза и так далее до обнаружения закономерности.

Тоси берёт две бумажные ленты, склеенные в обычные кольца. Он располагает их так, что кольца соприкасаются перпендикулярно друг другу, и склеивает в этом положении. Посередине каждой ленты заранее проведена продольная линия.



— Кто хочет мне помочь и сделать разрез по этим линиям? — спрашивает Тоси. — А остальные пусть подумают, что должно получиться.

Кино, как всегда, охотно вызывается.

— Может быть, это будет одно кольцо вдвое меньшей ширины, — предполагает Итиро.

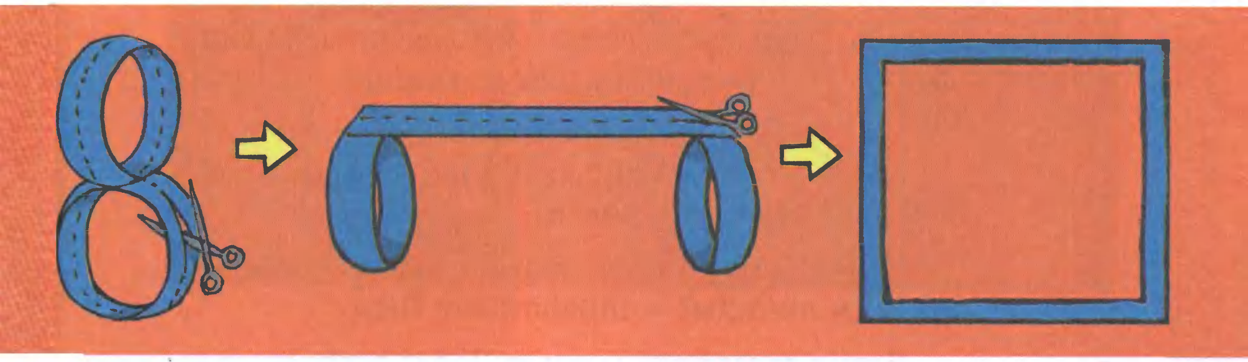
— Похоже, — говорит Дзяй.

Все наблюдают, как Кино работает ножницами. Когда он наконец заканчивает, все с изумлением видят квадратную рамку.

— Как это получилось? — удивляется Итиро.

Тоси берёт неразрезанную пару склеенных колец.

— Из этого пересечения получаются углы рамки, — показывает он на место склейки.



Затем он разрезает ещё раз, медленно.

Дзяй и Итиро всё ещё обсуждают полученный результат, когда Тоси объявляет следующий эксперимент.

— Вот две ленты Мёбиуса, склеенные перпендикулярно друг другу, как те кольца, — говорит он.

Как и раньше, вдоль середины полос проведены продольные линии.

— Что получится, если сделать разрезы по этим линиям? — спрашивает Тоси.

Дети растерянно молчат. После всего увиденного они опасаются высказывать предположения, но очень хотят попробовать сами.

Помощники раздают всем такие же модели, как у Тоси. Ребята сразу принимаются за работу, чтобы поскорее увидеть результат.

У Итиро получаются два кольца, похожие на сердце и сцепленные между собой. У Кино

и Дзяя получаются несцепленные кольца, тоже в форме сердец.

Трое друзей, как и все остальные, поражены и озадачены.

Кино задаёт вопрос, который вертится у всех на языке:

— Как это выходит, что у кого-то из нас получаются отдельные сердца, а у кого-то сцепленные?

— Очень хороший вопрос, — говорит Тоси. — Именно так рассуждает математик. Он должен наблюдать, экспериментировать и задавать хорошие вопросы. А ответ вы сейчас получите сами.

Он разделяет детей на две группы. Первой группе он поручает сделать две ленты Мёбиуса с переворотом в одну и ту же сторону, затем склеить их и разрезать, как в последнем эксперименте. Второй группе следует сделать одну ленту Мёбиуса с переворотом в одну сторону, другую — с переворотом в другую сторону, а затем так же склеить и разрезать.

Через несколько минут Тоси спрашивает:

— Ну, кто получил сцепленные сердца?

— Вторая группа! — отвечает хор голосов.

Тоси подытоживает:

— Чтобы получить сцепленные сердца, переворачивайте полосы при изготовлении ленты Мёбиуса в разные стороны. Чтобы получить отдельные, переворачивайте их в одну и ту же сторону.

Ребята совершенно покорены.

— А ещё? — просят они.

— Я дам вам упражнение домой,— говорит Тоси.

Приготовьте достаточно большой бумажный крест. Обозначим его горизонтальную часть *А*, а вертикальную *Б*. Проведите продольную линию по середине части *А*.

Проведите две линии вдоль *Б*, которые делят *Б* на три равные части по ширине. Склейте концы части *А* без перекручивания. Перекрутите конец части *Б* один раз и склейте с другим концом.

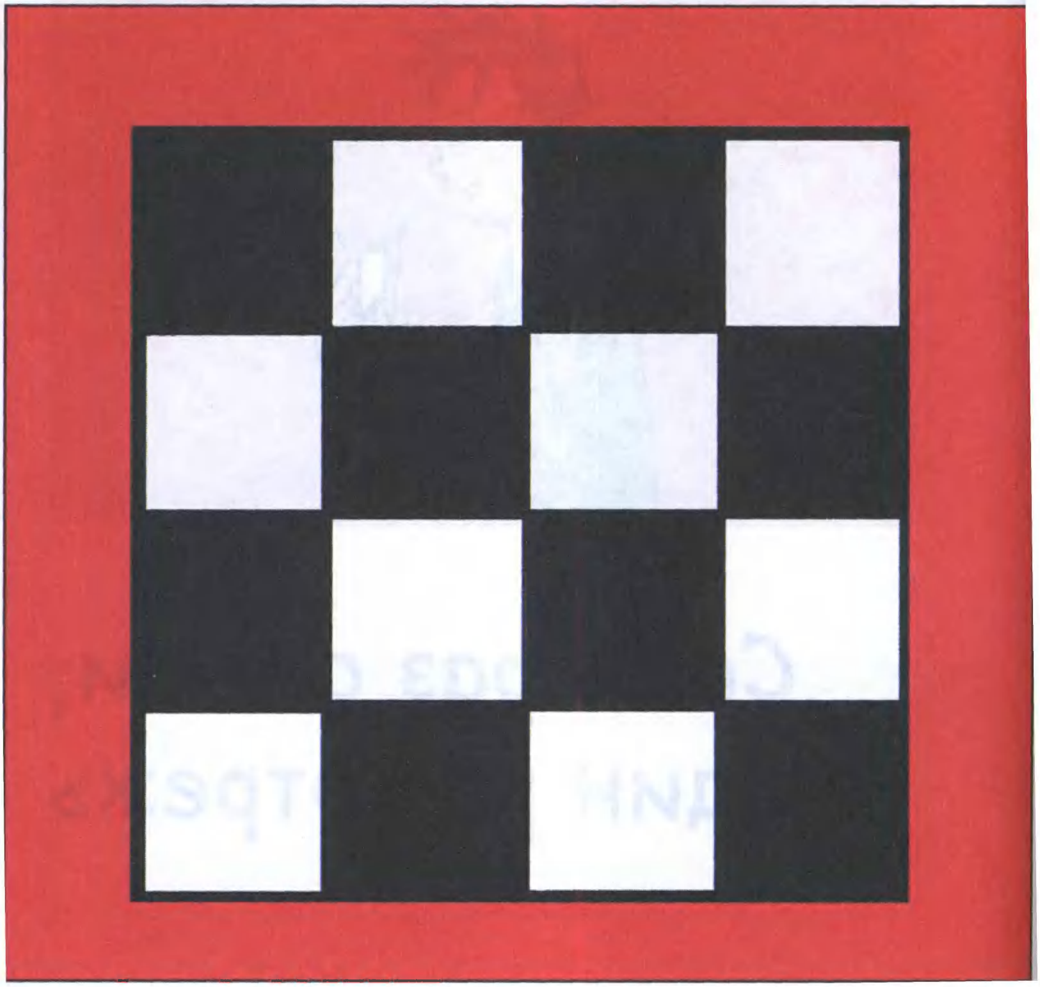
Разрежьте сначала по продольным линиям части *Б*, а затем по линии *А*.

Что получилось?

Затем Тоси пошёл встречать новую группу ребят.

12

Семь раз сложи, один раз отрежь



В следующем зале к друзьям подходит консультант.

— Меня зовут Юдзи, — говорит он. — Вместе с Тоси вы получали замечательные результаты, перекручивая бумажные полоски. Я хочу показать вам, что не менее удивительные вещи получаются при складывании бумаги.

Юдзи берёт в руки бумажный квадрат 4 x 4, разбитый на клетки, раскрашенные в шахматном порядке, и говорит:

— Сейчас я сложу этот лист так, что один прямой разрез ножницами отделит все чёрные квадраты от белых.

Он складывает лист несколько раз, затем взмахивает ножницами, и все чёрные квадраты падают на пол.

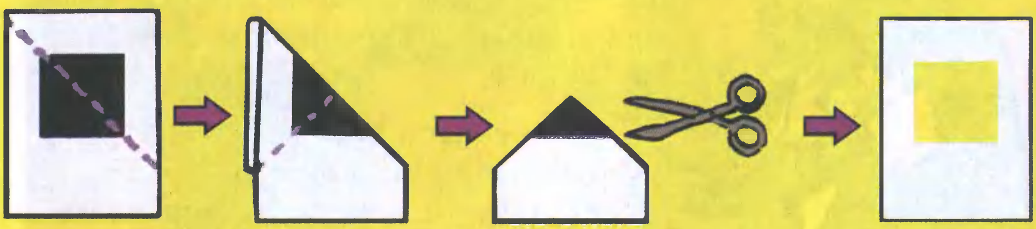
Дети хлопают в ладоши. Трое друзей смотрят, широко открыв глаза от удивления.

— А вы для начала попробуйте простые фигуры, — говорит Юдзи.

Помощники раздают листочки, на каждом из которых нарисован один чёрный квадрат.

— Сложите бумагу так, чтобы вырезать чёрный квадрат одним прямолинейным разрезом.

Эта задача ребятам кажется нетрудной, и они с энтузиазмом её решают. Вот так:



— Давайте обсудим ваше решение, — говорит Юдзи. — Как вы его нашли?

— Надо было совместить все кромки квадрата, — отвечает Кино.

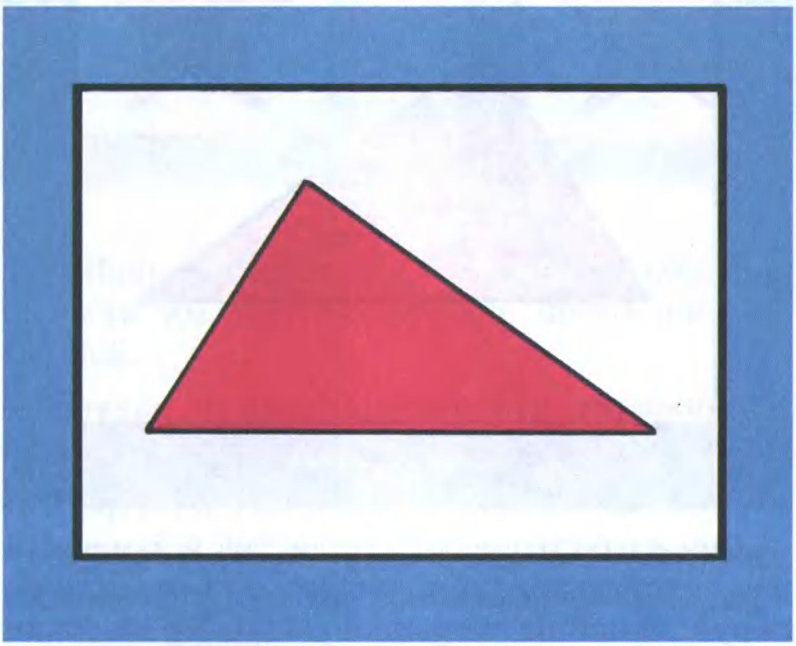
— А вы заметили, что для этого вам приходилось делить углы пополам? — спрашивает Юдзи.

Мальчики ещё раз смотрят на свои листочки.

— Да, мы это делали два раза, — соглашается Итиро.

— Но деления угла пополам обычно недостаточно, — говорит Юдзи. — Надо учитывать ещё один момент. Линии границ должны быть выровнены вдоль всего предполагаемого разреза.

Затем он предлагает ещё одно упражнение. Ребятам раздают листочки с треугольником. Задание аналогичное: сложить их так, чтобы отделить фигуру одним разрезом.



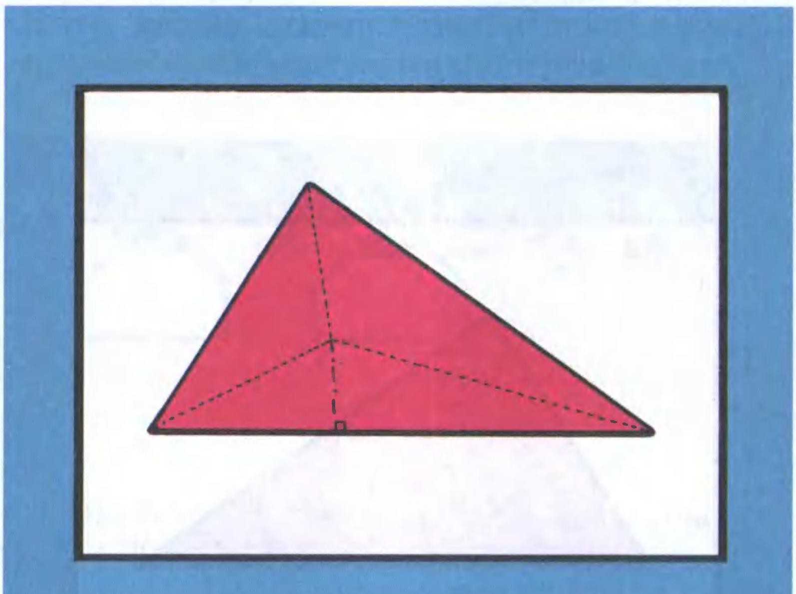
Над этой задачей приходится подумать. Она труднее первой, так как треугольник не равносторонний и даже не равнобедренный.

— На этот раз выровнять линии не так легко, — замечает Кино.

— Может, попробуем делить углы пополам, как сказал Юдзи? — предлагает Итиро.

Он складывает листок по биссектрисам углов, и это сразу даёт решение.

— Смотрите, у меня получилось! — зовёт он друзей.



Они рассматривают его листок и замечают, что четвёртый сгиб проходит по перпендикуляру к одной из сторон, опущенному из точки пересечения биссектрис.

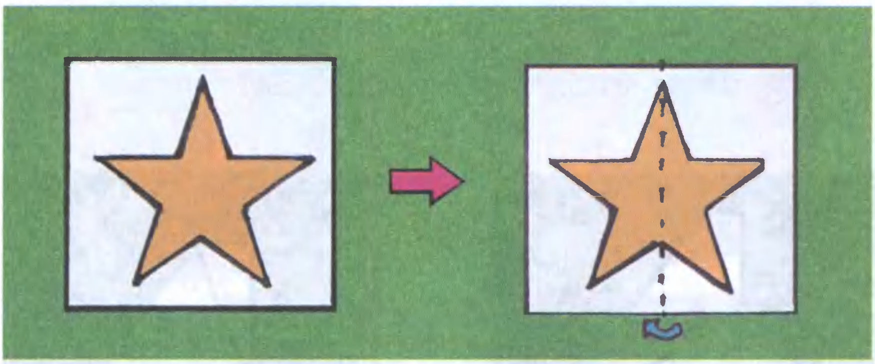
— Здорово, — говорит Дзяй. — А если четвёртый сгиб пустить по перпендикуляру к другой стороне, тогда тоже получится?

Ребята проверяют это на перпендикулярах к двум другим сторонам, и оказывается, что и так тоже можно сделать.

Наблюдающий за ними Юдзи говорит:

— У вас правильный подход к математике. Вы задаёте хорошие вопросы и исследуете альтернативы.

Мальчики польщены его похвалой.



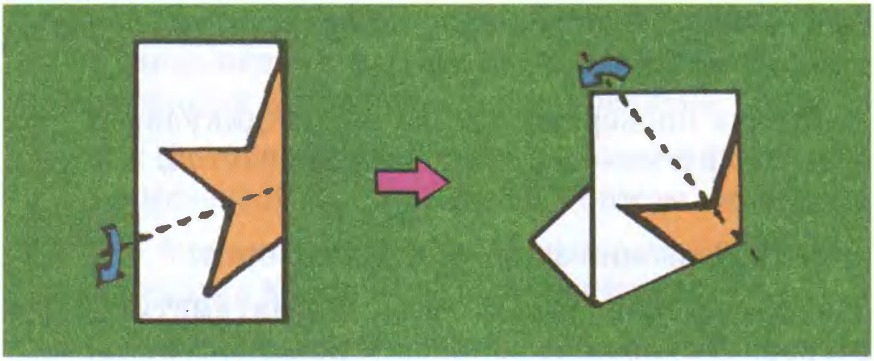
— Попробуйте-ка это, — говорит Юдзи, протягивая им три листочка с пятиконечной звездой.

Друзья решают делать это упражнение вместе.

— Ну, у кого есть идеи? — спрашивает Итиро.

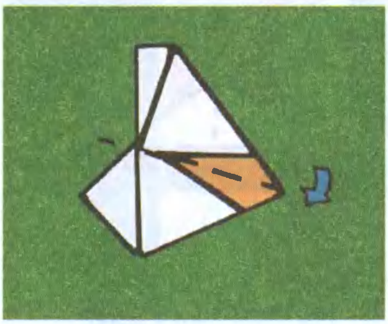
— Я думаю, надо так сложить по биссектрисе верхнего угла, чтобы совпали границы с двух сторон, — предлагает Дзяй.

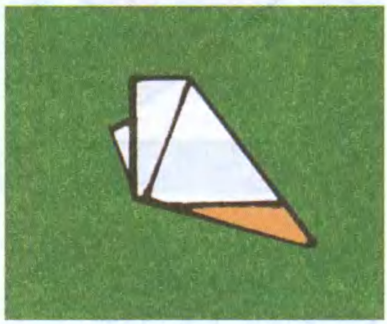
Ребята складывают листок и некоторое время смотрят на него.



— Знаю, знаю! — радостно восклицает Итиро. — Можно совместить два луча, если сложить так.

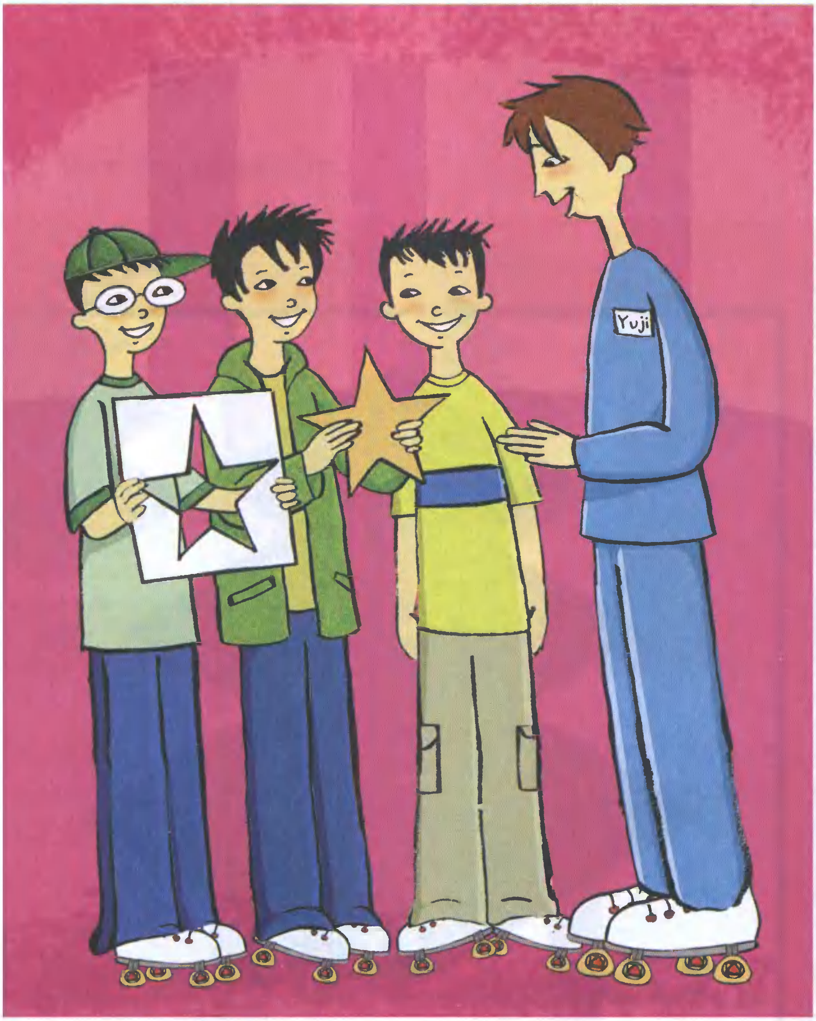
Он берёт листок и складывает его.





— Тогда три линии можно совместить двумя складываниями, — продолжает Дзяй.

Кино делает разрез ножницами, и от листка отделяется звезда.



— Мы всё сделали.

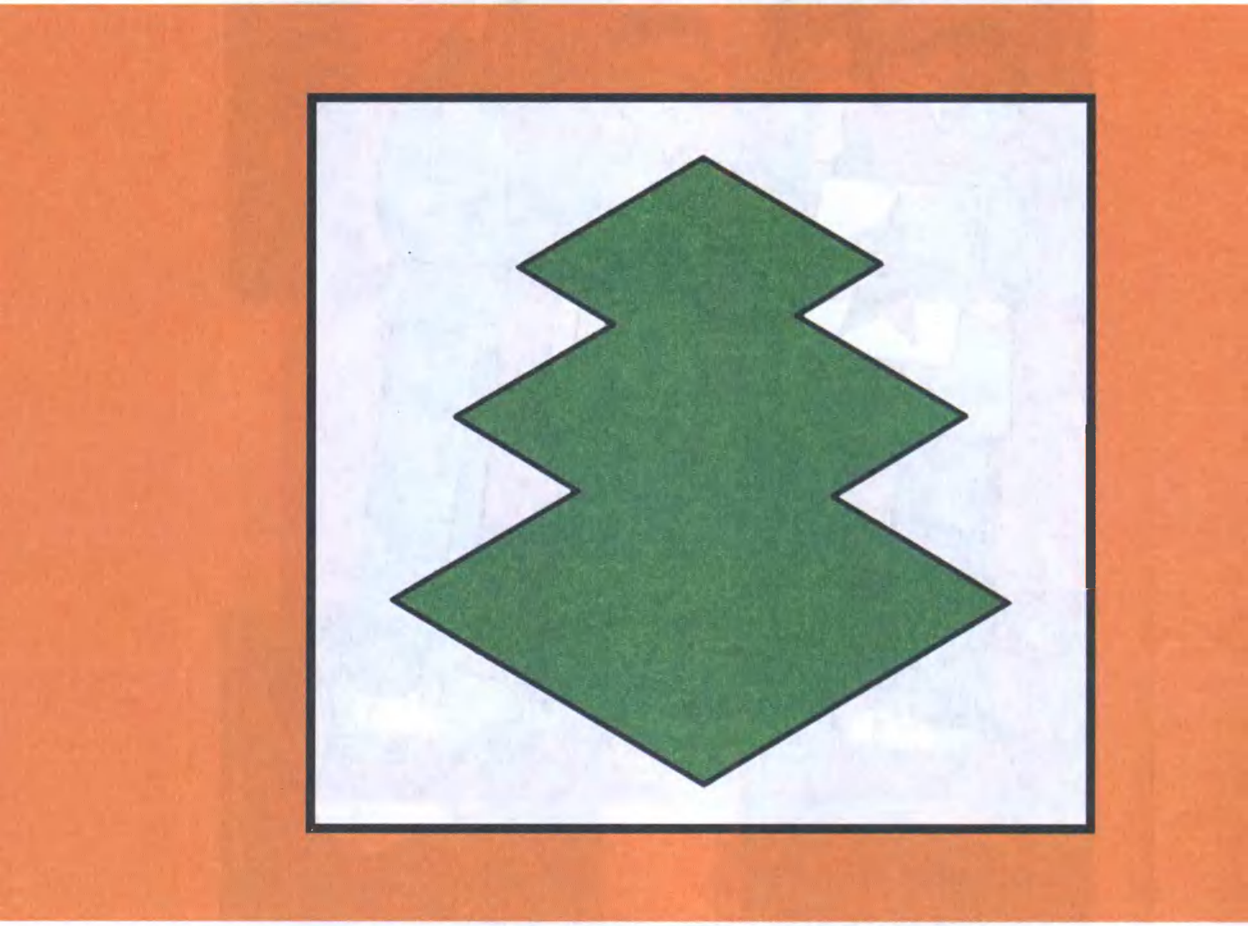
Они показывают свою работу Юдзи.

— Молодцы! — говорит он.

Другие дети смотрят на троицу с восхищением и немного с завистью, ведь они далеко впереди остальных.

— Продолжим? — спрашивает Юдзи у трёх друзей.

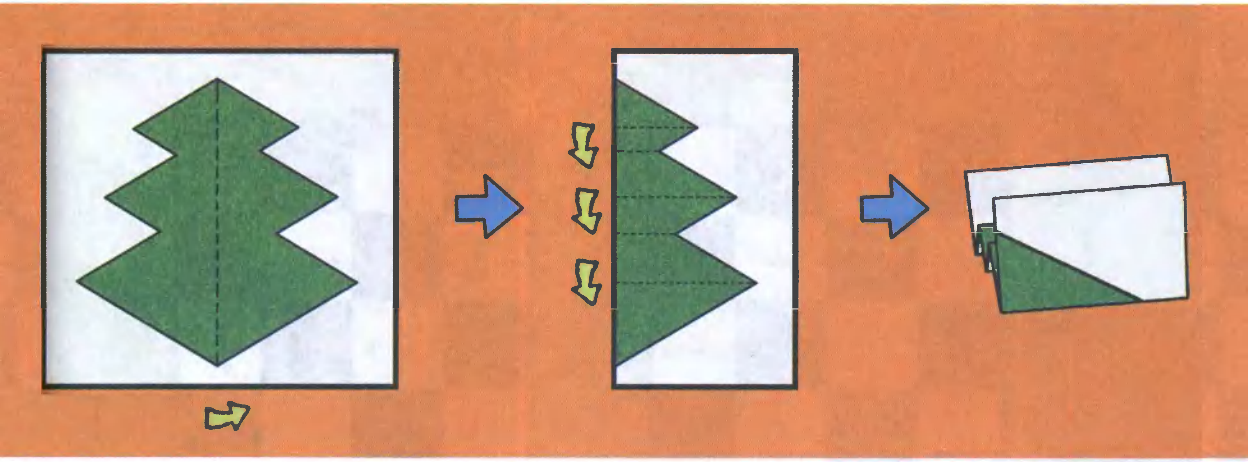
— Да!



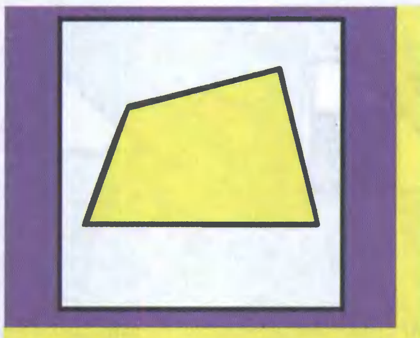
Он предлагает им новую фигуру, сообщая, что это старинный японский геральдический знак.

Над этим заданием они думают дольше, но в конце концов выполняют и его, к своему большому удовлетворению.

Вот это решение:

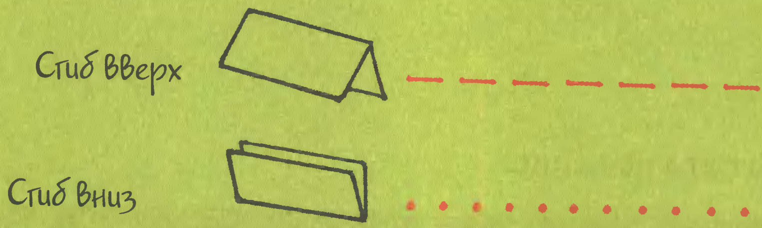


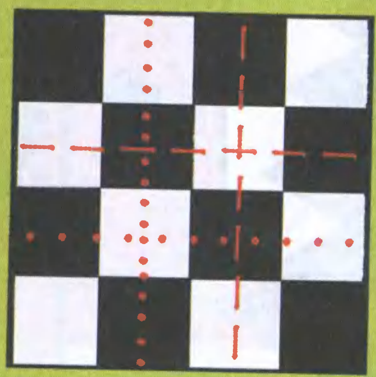
Юдзи даёт мальчикам ещё одно задание домой. Он вручает им листок с четырёхугольником.



Когда все дети справились со звездой, Юдзи говорит:

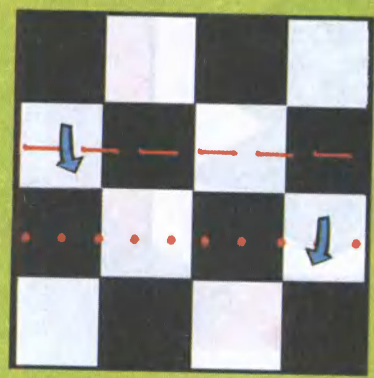
— Сейчас, когда у вас появился некоторый опыт с задачами такого рода, я покажу вам, как складывать «шахматную доску», разрезание которой я показывал в самом начале.



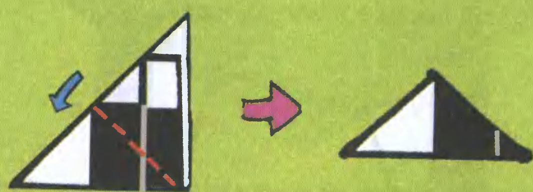


1

Расположение сгибов



2

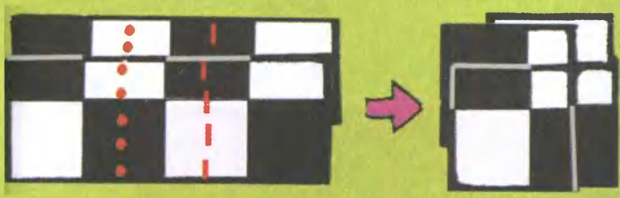


5

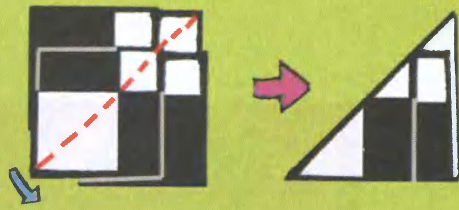
Юдзи подробно объясняет каждый шаг до единственного разреза, который отделяет все чёрные квадраты.

— А для шахматных досок большего размера этот способ годится? — спрашивает Дзяй.

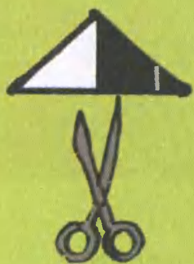
— Только если число квадратов на каждой стороне чётно, — отвечает Юдзи. — Для нечётного числа решение надо чуть-чуть изменить.



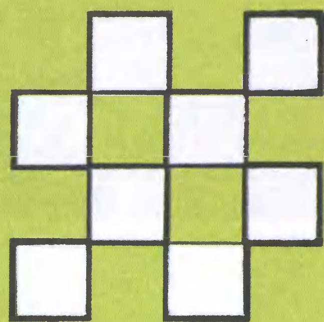
3



4



6



7

Разрежьте по линии, чуть правее середины.

— Хорошая задачка для гостей, — говорит Кино.

Дзяй записывает себе ещё одну задачу: попробовать разрезать доску размера 3 × 3.

Трое друзей очень признательны Юдзи. Они подходят, чтобы поблагодарить его.

13

Пазлы из тетраэдров

Ребята слышат оживлённый шум в одном из залов. И тут же они встречают свою первую провожатую — Кэйко.

— Вам повезло! — говорит она. — Как раз сейчас здесь находится профессор Ямааки. Это он собрал всю коллекцию наших моделей. Вы можете послушать его в этой аудитории.

Толпа детей всё прибывает, но троим друзьям удаётся протиснуться поближе. Всеобщее внимание приковано к человеку в очках с бородой китайского мудреца. На его растрёпанных чёрных с проседью волосах повязана цветастая бандана. Он дружелюбно и весело разговаривает с несколькими ребятами.

— Сегодня я собираюсь многое вам показать, — наконец говорит профессор, обращаясь ко всем.

— У него знакомое лицо, — шепчет Итиро своим друзьям. — Кажется, я его встречал, только не помню где.

— Вы знаете, кто такой Эшер? — спрашивает профессор.

Большинство детей отрицательно качают головами, но Итиро кивает. Он поднимает руку и говорит:

— Это знаменитый художник.

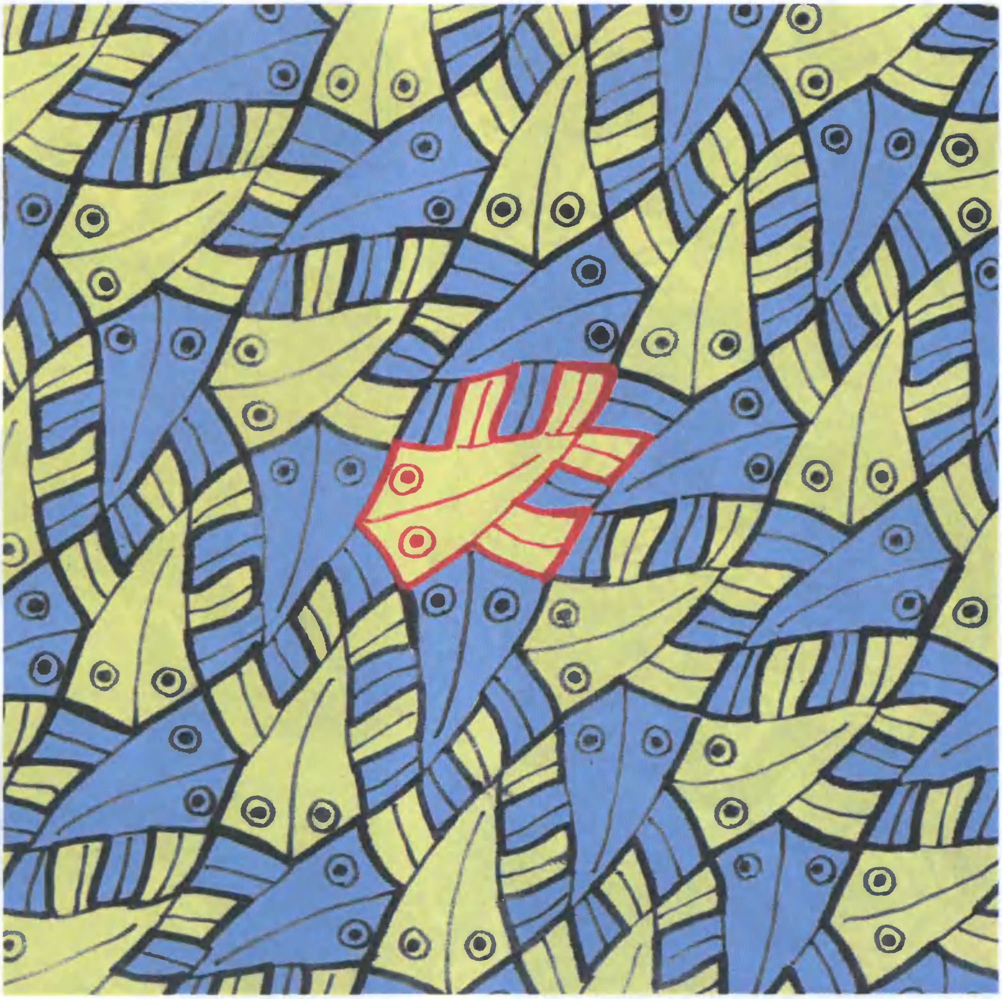
— Откуда ты знаешь? — тихонько спрашивает Кино.

— Мне мама показывала его альбом, — отвечает Итиро.

Он был очарован тем, как сливались и преображались фигуры на гравюрах Эшера.

— Правильно, — говорит профессор Ямааки.

Он показывает несколько копий работ Эшера.



— Фигуры на этих картинах неограниченно повторяются, покрывая всю плоскость. Обратите внимание, что нет ни пустых мест, ни перекрытий, — продолжает он.

— Повторяющийся узор такого рода, покрывающий плоскость, называется замощением[5], — говорит он.

5 - Строго говоря, замощение не должно использовать зеркальные копии элементов, но некоторые замощения Эшера их включают.

– Точно как пазл, в котором все элементы одной формы, – вставляет Дзяй.

– Очень хорошее наблюдение, – говорит профессор Ямааки и обещает:

– Сегодня я всех вас сделаю художниками, подобными Эшеру.

Профессор берёт в руки бумажную модель трёхмерной фигуры.

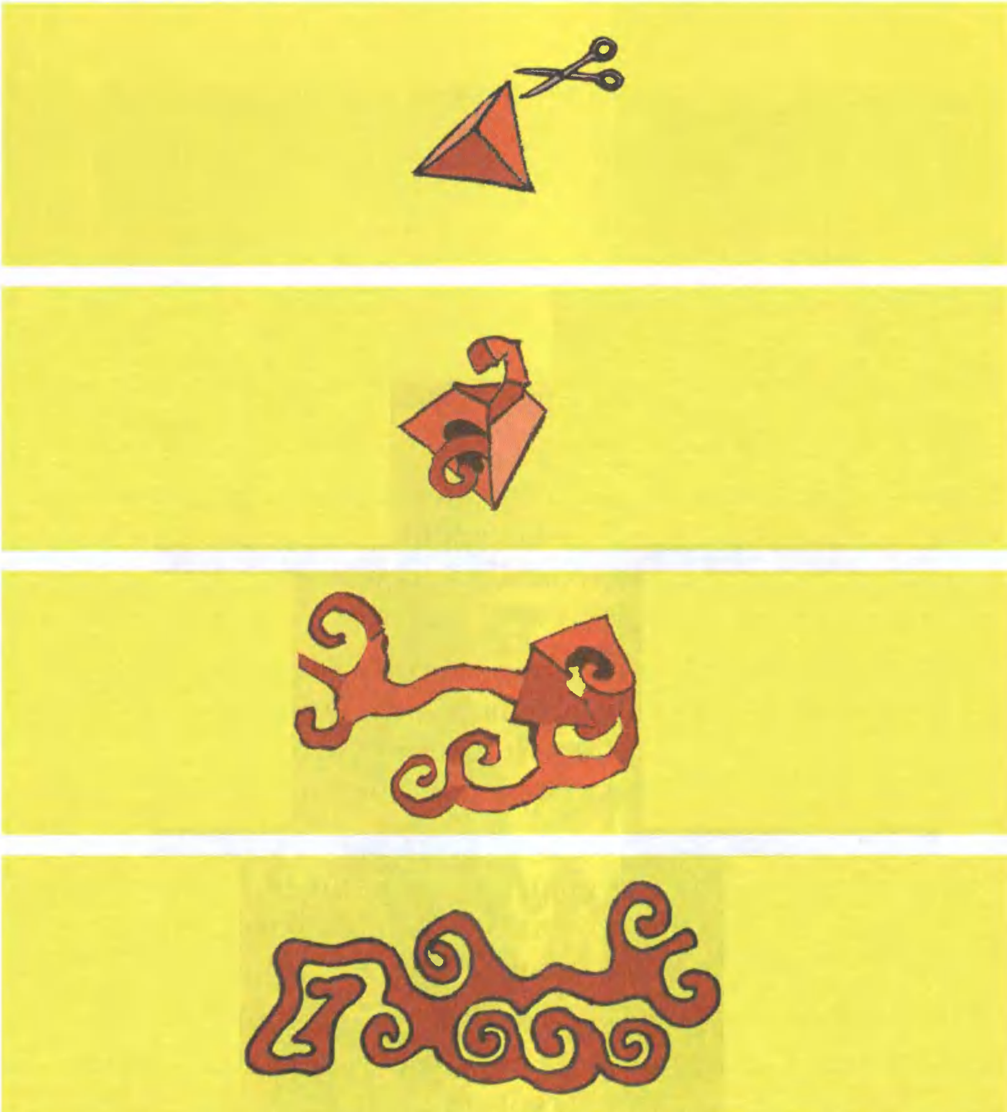
— Видите эту фигуру? У неё четыре грани, которые являются равносторонними треугольниками одного размера. Она называется правильным тетраэдром.

На столе за спиной профессора лежит множество других тетраэдров. Помощники начинают раздавать их детям. Кроме того, каждому выдают ножницы, большой лист и немного клея.

Ребята получают ярко раскрашенные тетраэдры и вертят их в руках, проверяя слова профессора насчёт треугольников.

— Прошу вас аккуратно разрезать поверхность вашего тетраэдра так, чтобы она оставалась одним куском и чтобы его можно было бы ровно разложить на столе, — говорит профессор Ямааки.

— А как это сделать? — спрашивает Кино.



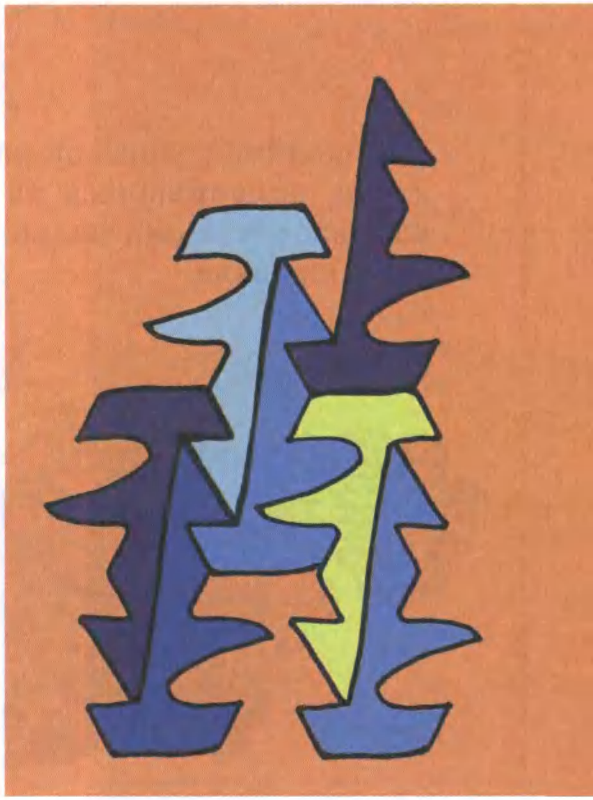
Профессор Ямааки показывает, как можно разрезать тетраэдр.

— Фокус в том, что нужно сделать один длинный разрез, который проходит через все вершины. Вы обнаружите, что ваши тетраэдры состоят из нескольких слоёв, каждый своего цвета, — говорит он.

Закончив разрез, он раскладывает на столе куски, получившиеся из разных слоёв, и показывает, что они подходят друг к другу, как кусочки пазла.

— Можете резать как угодно, только следите, чтобы вся поверхность оставалась целым куском и чтобы его можно было плоско разложить, — повторяет профессор. — После этого наклейте ваши работы на листы бумаги.

Улитки Дзяя



Парусники Кино

Ребята сразу входят во вкус. Итиро задумал узор из роботов. Дзяй пробует сделать что-то очень закрученное. Кино довольствуется простым разрезом.

Роботы Итиро

Профессор Ямааки обходит детей и показывает самые лучшие работы. Все хлопают, когда он поднимает вверх роботов Итиро.

— Это одно из моих последних открытий, — говорит профессор. — Независимо от того, как вы разрезаете поверхность обычного тетраэдра, если только она остается одним куском и раскладывается в плоскую фигуру, эта фигура замощает плоскость.

— Значит, можно делать какие угодно узоры! — радуется Итиро.

— Но сначала надо приготовить тетраэдры, — замечает Кино.

Дзяй уже обдумывает, какие узоры он попробует вырезать дома.

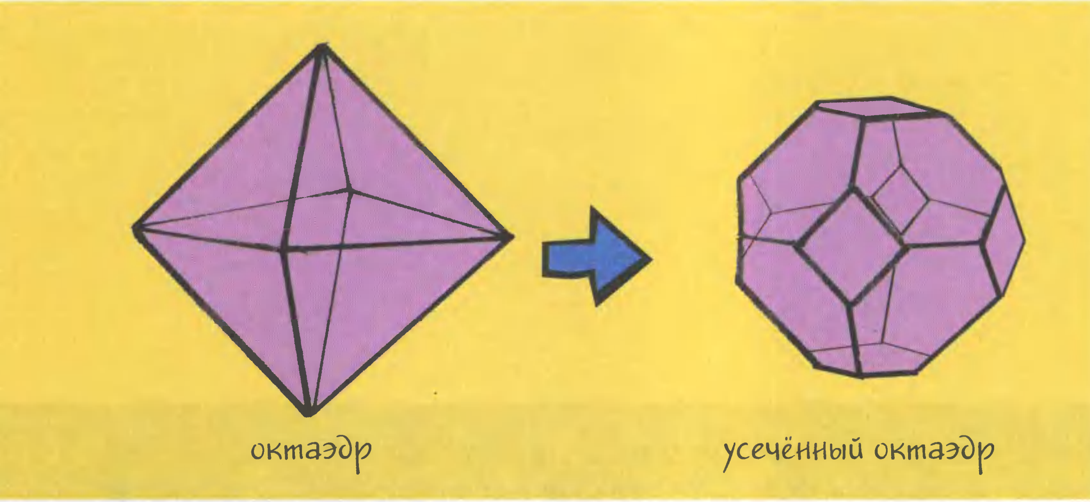
14

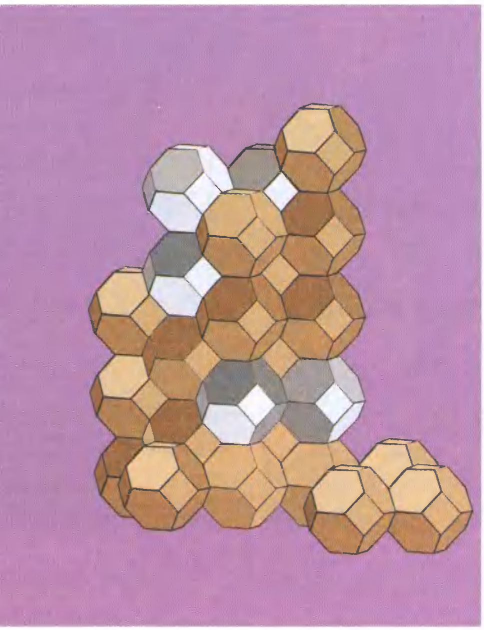
Замощения при помощи многогранников

Все идут за профессором в другой зал. Там прямо на полу лежат деревянные блоки разной формы. Несколько ребят пробуют составлять их вместе, словно кусочки трёхмерного пазла.

— Только что я показывал вам, как замощать плоскость. Подобно тому как замощают плоскость, можно замостить и пространство, — говорит профессор Ямааки. — Посмотрите на ребят, как раз этим они и занимаются.

Он подходит к сидящим на полу детям и поднимает одну деревянную фигуру.

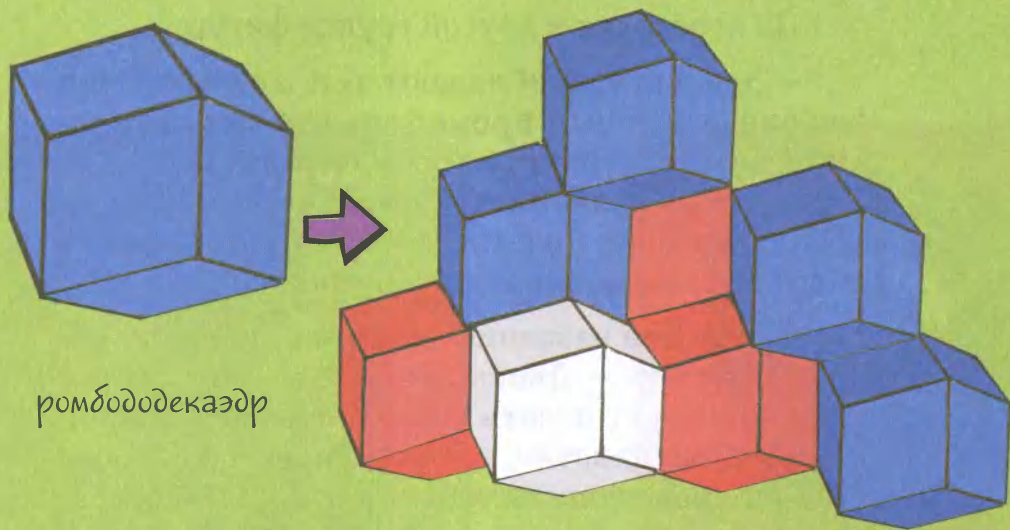




— Это усечённый октаэдр. У него 14 граней, из них восемь правильных шестиугольников и шесть квадратов, — говорит профессор. — Эту фигуру можно сделать из октаэдра, срезав шесть его вершин.

Он показывает детям октаэдр и делает рубящие движения, словно отсекая вершины.

— Усечённые октаэдры замощают пространство. Это значит, что ими можно заполнить трёхмерное пространство без перекрытий и пустых мест.



Он поднимает другую фигуру.

— Это ромбододекаэдр. У него 12 граней, каждая из которых является ромбом. Ромбододекаэдр тоже замощает пространство. Многогранников, которые замощают пространство, много.

Он переходит к другой группе фигур.

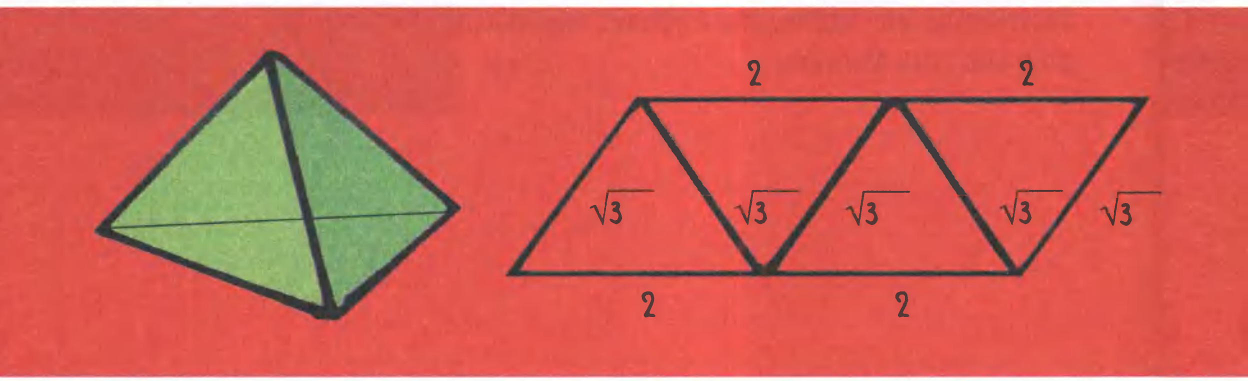
— Эти фигуры обладают тем же свойством, но они особенные. Кроме того, что они сами замощают пространство, их поверхность можно разрезать и разложить в плоские фигуры, которые замощают плоскость. Мы будем называть их фигурами двойного назначения.

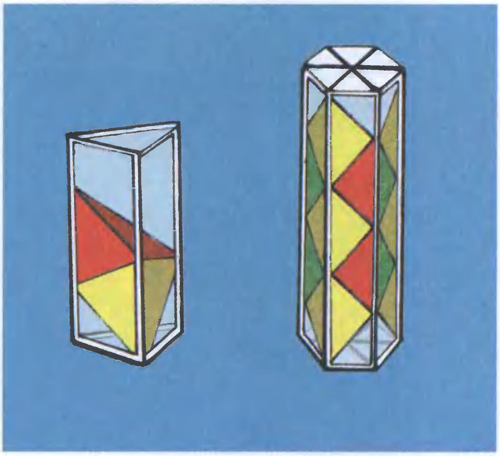
— Хорошее название, легко запомнить, — говорит Итиро. — Двойного назначения, потому что они могут делать сразу две вещи — заполнять пространство, а с помощью некоторого разреза поверхности заполнять и плоскость.

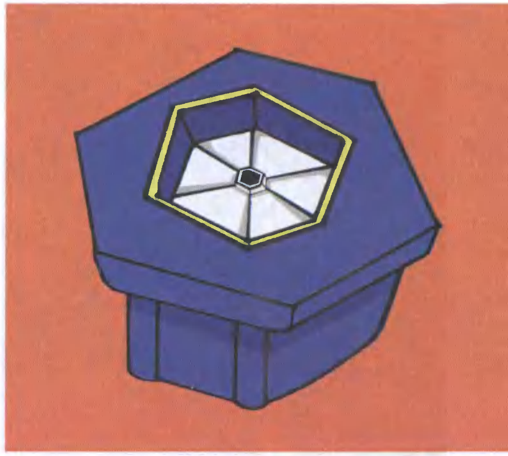
— Тогда те, которые только заполняют пространство, должны называться фигурами одинарного назначения, — замечает Кино.

— Я не возражаю, — говорит профессор, услышав его реплику. — Давайте фигуры, замощающие пространство, но развёрткой которых нельзя замостить плоскость, называть фигурами одинарного назначения.

Он продолжает:



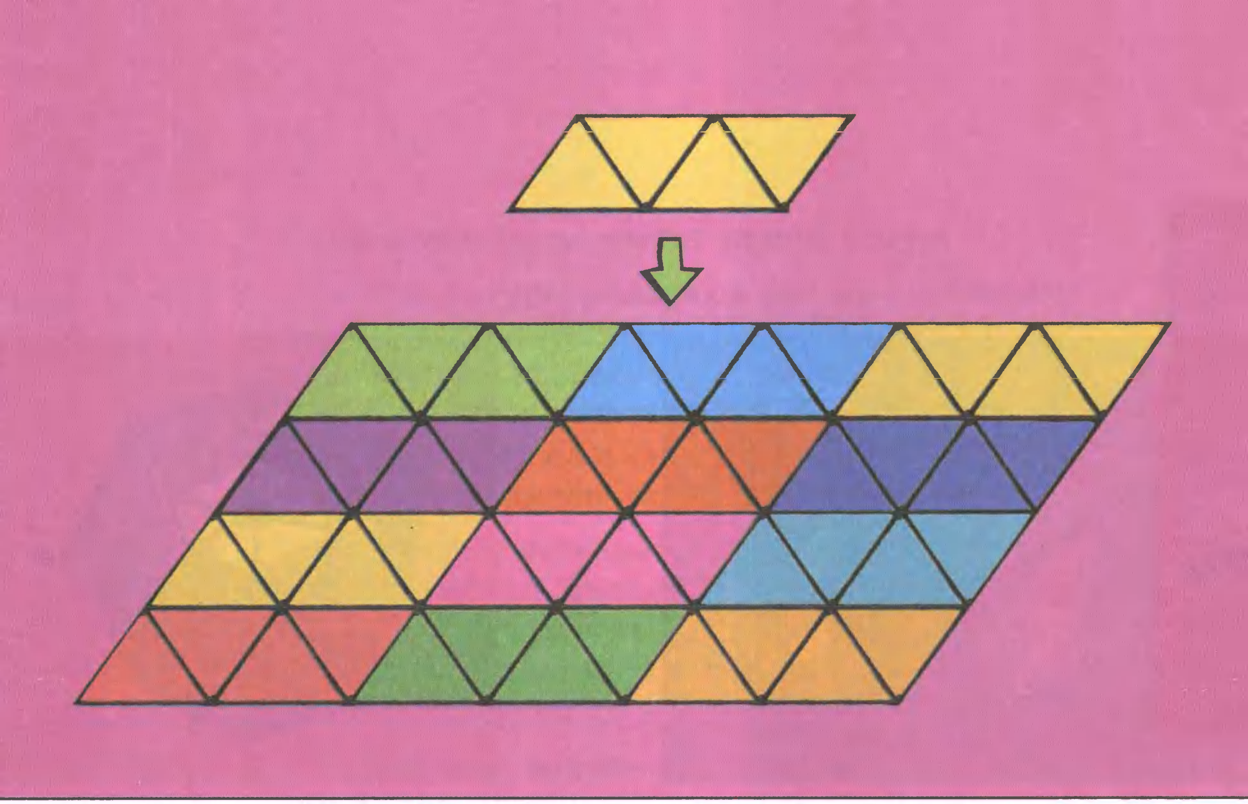




— Среди фигур двойного назначения — многогранник, форму которого имеют «треугольные» бумажные пакеты для молока или сока. Это неправильный тетраэдр, грани которого — равнобедренные треугольники со сторонами, относящимися друг к другу как $2 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$.

Видите, их можно поставить друг на друга так, чтобы они образовали правильную треугольную призму. В свою очередь, треугольные призмы можно составить вместе, образовав правильную шестиугольную призму. А это как раз способ транспортировки «треугольных» пакетов.

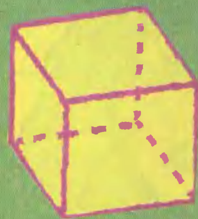
Профессор берёт в руки «треугольный» пакет из-под молока, разрезает его и раскладывает в плоскую фигуру.



— Она определённо может замостить плоскость, — говорит он о разрезанной поверхности. — И кубы, конечно, тоже являются фигурами двойного назначения. Если разрезать поверхность куба только вдоль ребер, то все варианты полученных плоских фигур замощают плоскость.

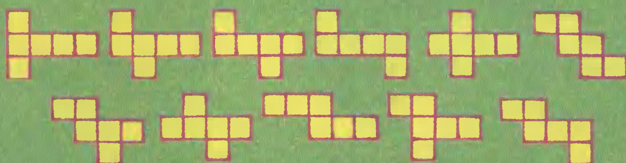
Он подводит ребят к плакату, на котором показаны эти замощения.

Замощение плоскости рёберными развёртками куба

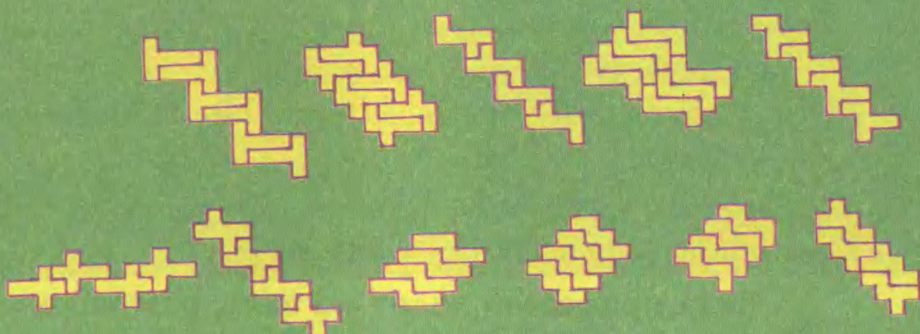


Рёберная развёртка многогранника — это связная плоская фигура, полученная разрезанием поверхности многогранника вдоль некоторых рёбер.

Все возможные рёберные развёртки куба



Замощение плоскости рёберными развёртками куба



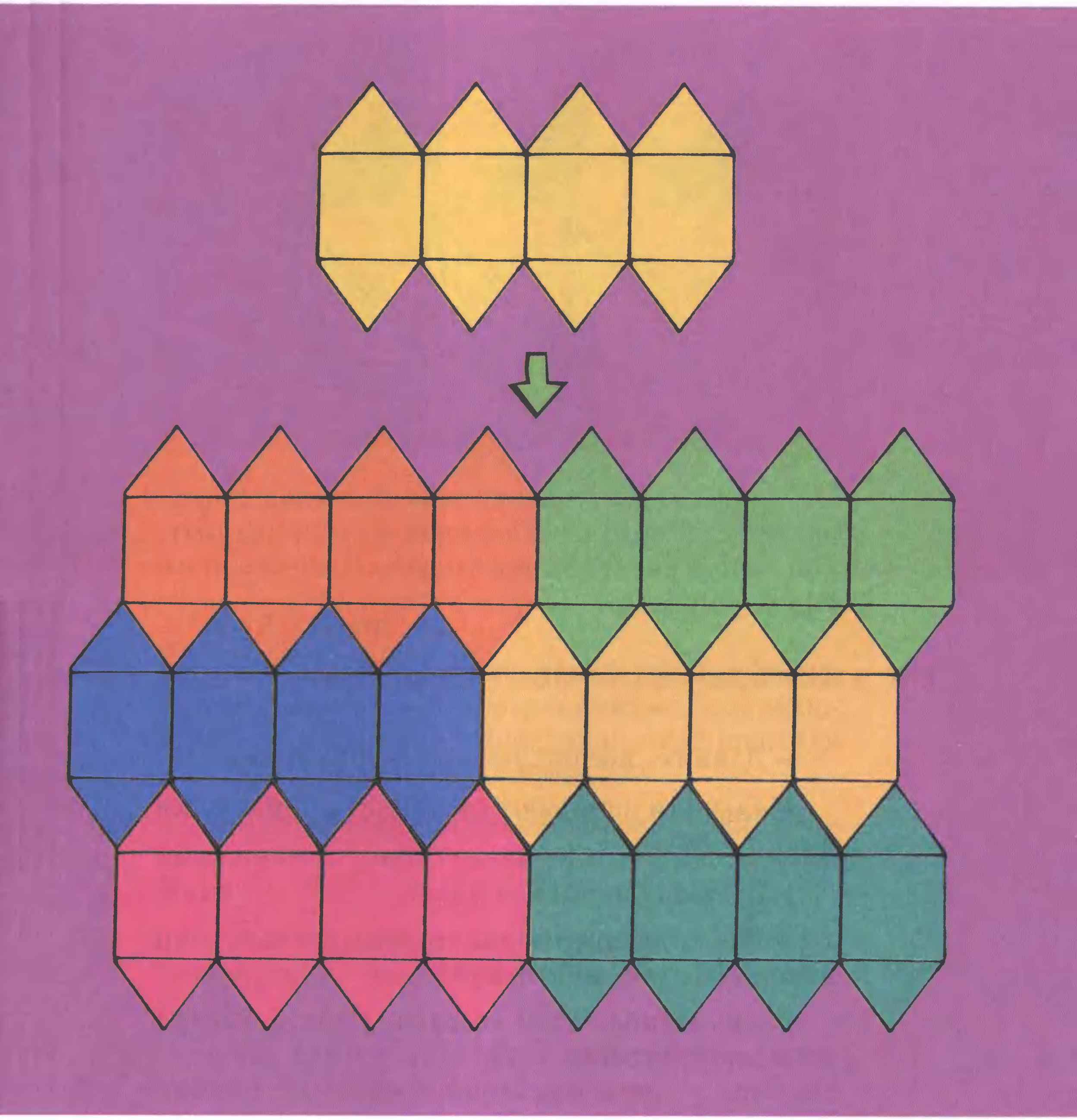
Профессор поднимает ещё одну деревянную фигуру.

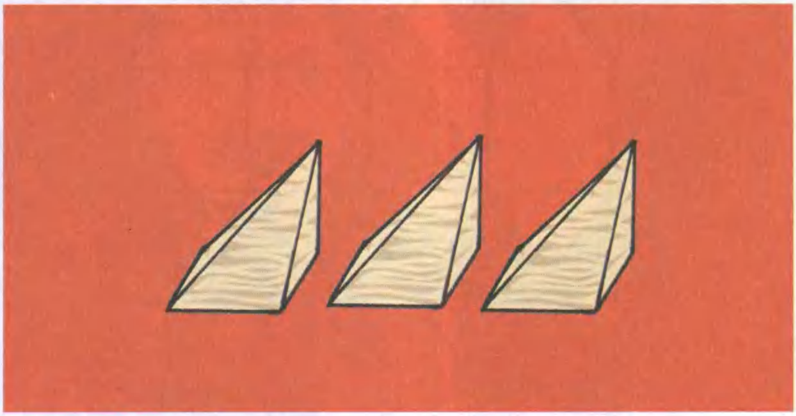
— Многогранников двойного назначения существует бесконечно много, но среди известных фигур этот неправильный двенадцатигранник имеет наибольшее число граней. Это куб, к двум противоположным граням которого присоединены правильные пирамиды.

Он разрезает бумажную модель такого же двенадцатигранника, раскладывает её в плоскую фигуру и показывает, что она замощает плоскость.

«Может быть, я смогу открыть новую фигуру двойного назначения», — думает Дзяй.

Пока профессор ходит по залу, разговаривая с детьми, трое друзей идут посмотреть на другие многогранники одинарного и двойного назначения, выставленные для обозрения.





На одном столе стоят три одинаковые скошенные пирамиды. У каждой из них квадратное основание и четыре треугольные стороны. Рядом написано:

Их этих трёх фрагментов можно собрать куб.

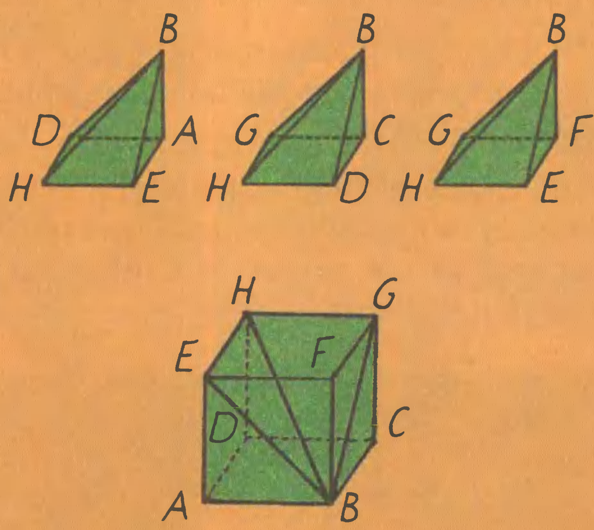
— Давайте попробуем, — говорит Кино.

Мальчики начинают составлять пирамидки друг с другом.

У Итиро появляется идея:

— Поскольку основания квадратные, они должны быть гранями куба.

Вооружённые этой мыслью, ребята быстро добиваются успеха.



Дзяй говорит:

— Поскольку куб составлен из равных фигур, они должны быть многогранниками, замощающими пространство. Интересно, эта пирамида – фигура одинарного назначения?

— Что значит одинарного назначения? — спрашивает ребят консультант по имени Масао.

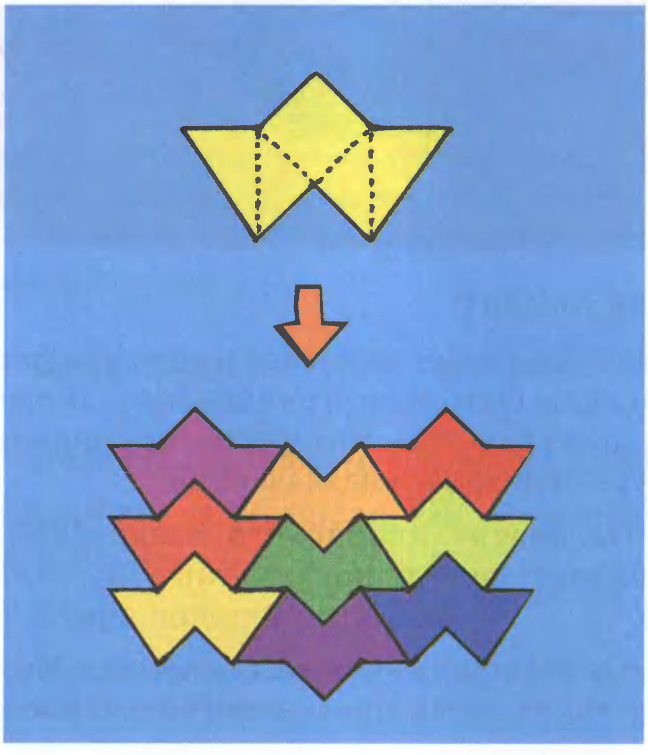
— Это мы придумали название для фигур, замощающих лишь пространство, — отвечает Кино.

— На самом деле этот многогранник не только замощает пространство, — говорит Масао. — Его поверхность можно разрезать так, что она будет замощать плоскость. Хотите понять, как именно следует сделать этот разрез?

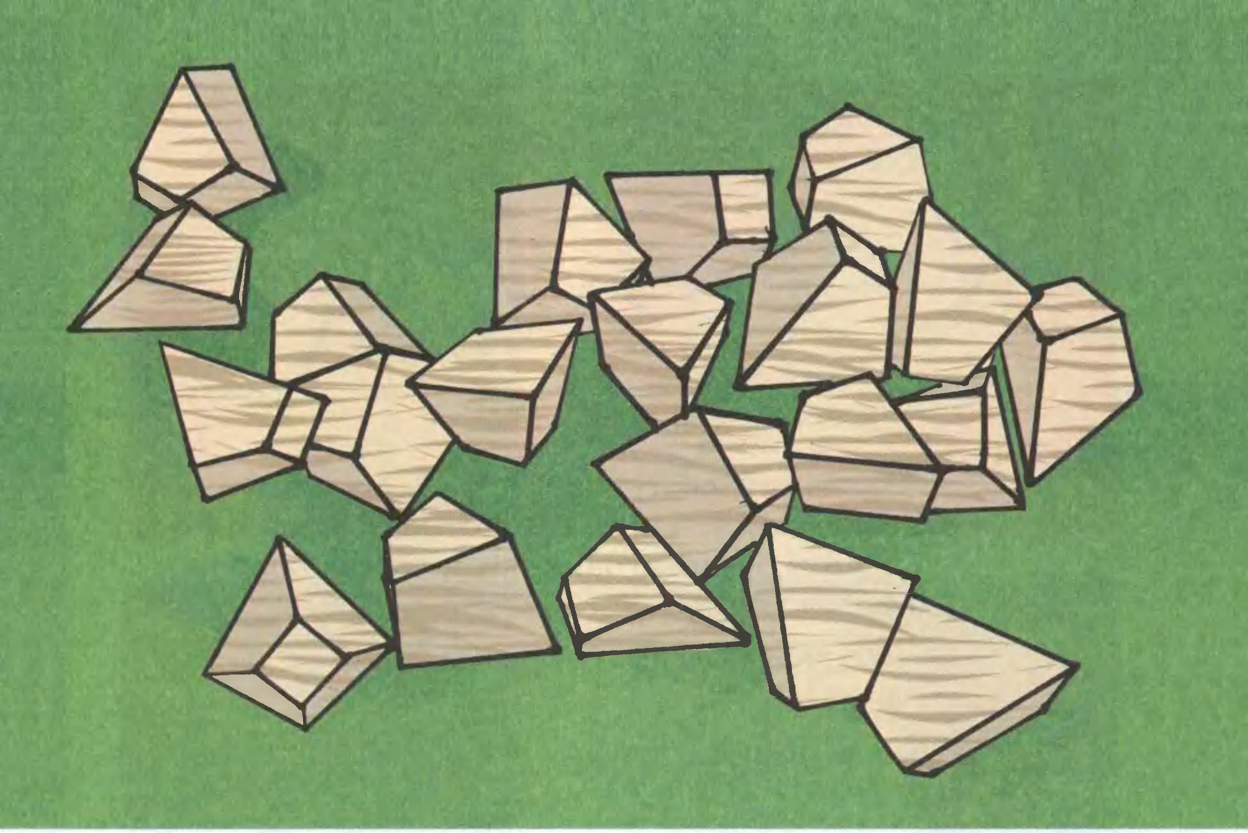
Он даёт ребятам бумагу и карандаши.

— Нарисуйте грани многогранника и попробуйте составить замощающую развёртку, — советует Масао друзьям.

Это оказывается не так просто, ребята рисуют множество развёрток, которые одна за другой оказываются неподходящими. Но в конце концов они находят нужную.



— Молодцы! — говорит Масао, проверив, как идут дела у ребят.



На другом столе лежит множество одинаковых многогранников необычной формы. У каждого из них шесть четырёхугольных граней.

— Этот многогранник особый, — говорит Масао. — Все эти деревянные фигуры профессору Ямааки прислал плотник, который видел по телевизору одну из его лекций о замощении пространства.

— А как такой многогранник называется? — спрашивает Кино.

— У него пока нет названия. Хотите придумать? — предлагает ребятам Масао.

Мальчики совещаются. Они берут слова, относящиеся к фигуре: «плотник», «четырёхугольник», «шестигранник», и составляют название как их аббревиатуру.

— Мы назвали его П-4-гексаэдром, — сообщают они Масао.

— Значит, так и будем его называть, — говорит тот.

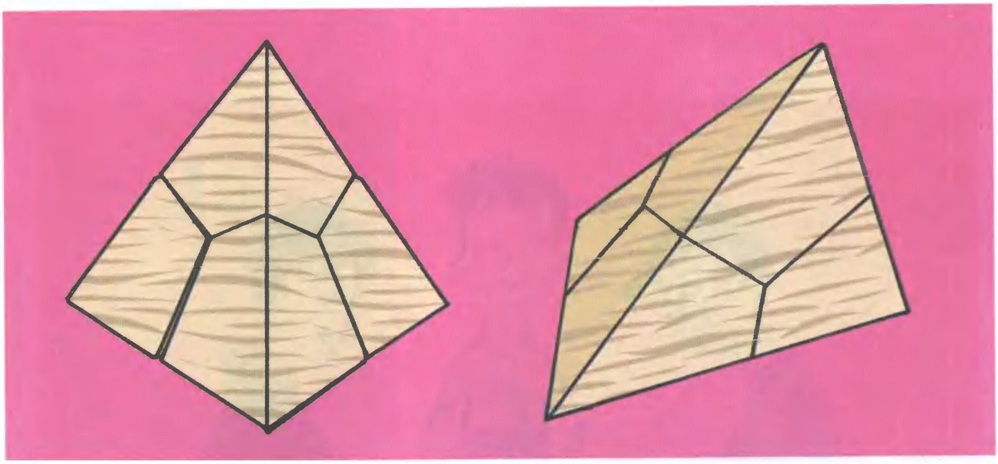
— Это многогранник одинарного назначения? — спрашивает Итиро.

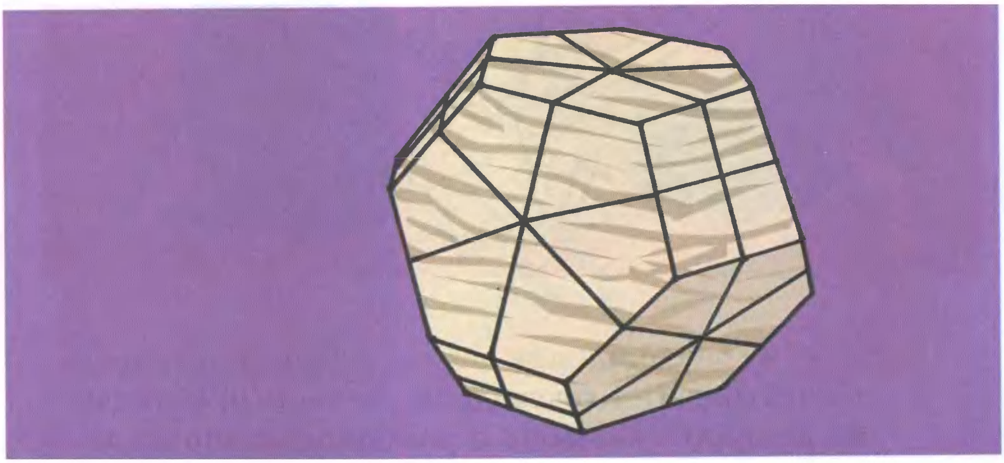
— Да, он замощает лишь пространство, — отвечает Масао.

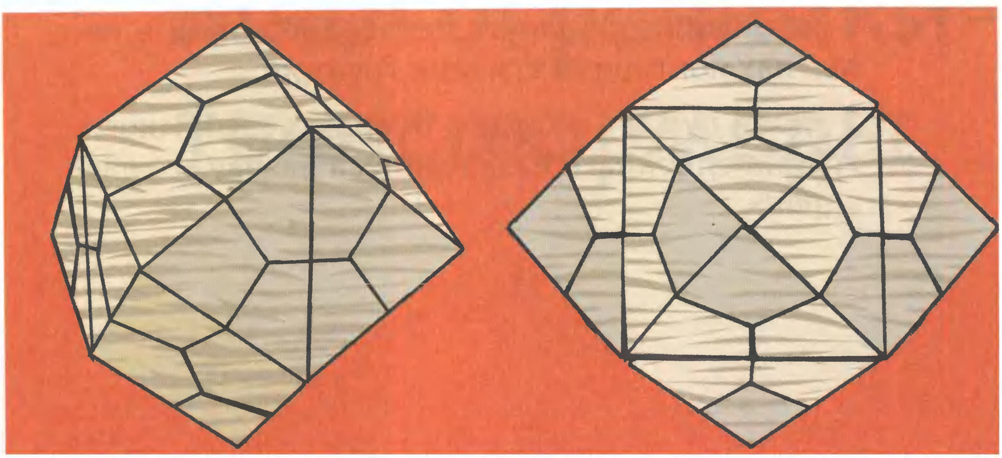
Он подводит ребят к фигурам, составленным из множества П-4-гексаэдров.

— Смотрите, из них можно сложить другие многогранники, замощающие пространство.

Ребята видят «треугольный» пакет, усечённый октаэдр и ромбододекаэдр.







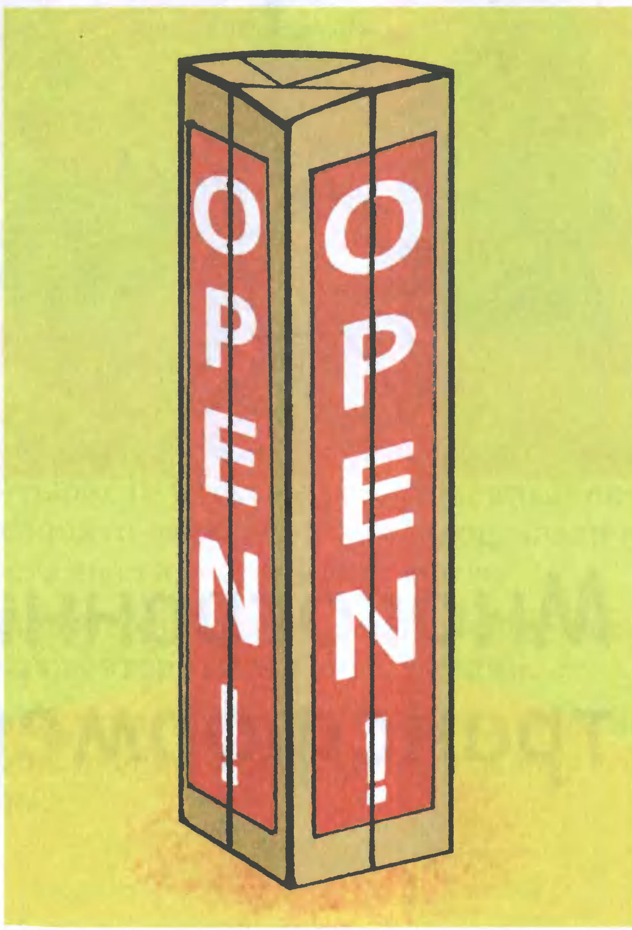
— «Треугольный» пакет можно составить из четырёх П-4-гексаэдров, усечённый октаэдр из двадцати четырёх, а ромбододекаэдр из девяноста шести, — добавляет Масао.

Мальчики проводят некоторое время в попытках повторить эти конструкции.

Дзяй думает: «Когда я открою новый многогранник двойного назначения, я назову его дзяэдрон».

15

Многогранники-трансформеры

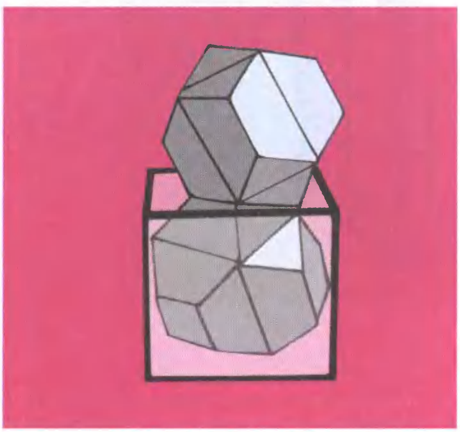

OPEN!
OPEN!

Профессор Ямааки переходит к другому столу. На нём стоит треугольная призма со словом «open» (открыто).

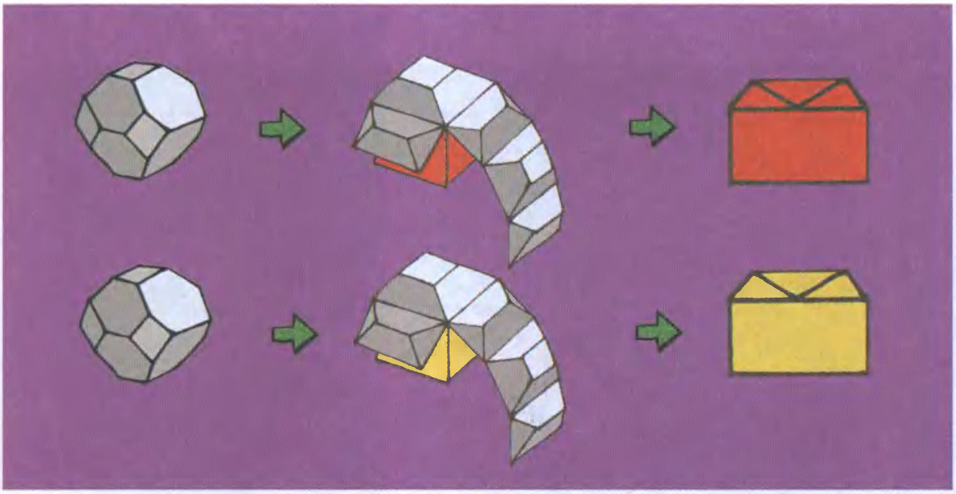
Профессор берёт со стола два одинаковых многогранника.

— Это усечённые октаэдры, — говорит он.

Затем он показывает прозрачный пластмассовый ящик.



— Я хочу поместить их в этот ящик.



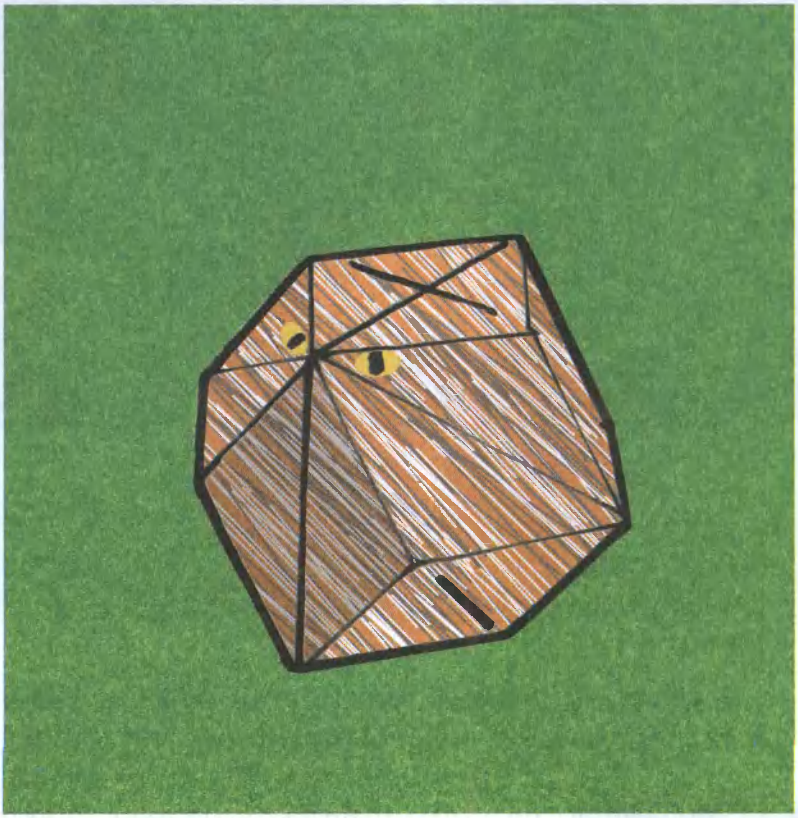
Большинству ребят это кажется невозможным, так как размеры фигур лишь немногим меньше размеров ящика. И действительно, первые попытки профессора кончаются неудачей.

Тогда несколькими быстрыми движениями он выворачивает многогранники наизнанку и получает два одинаковых параллелепипеда, которые легко входят в ящик.

Это производит большой эффект. Все аплодируют!

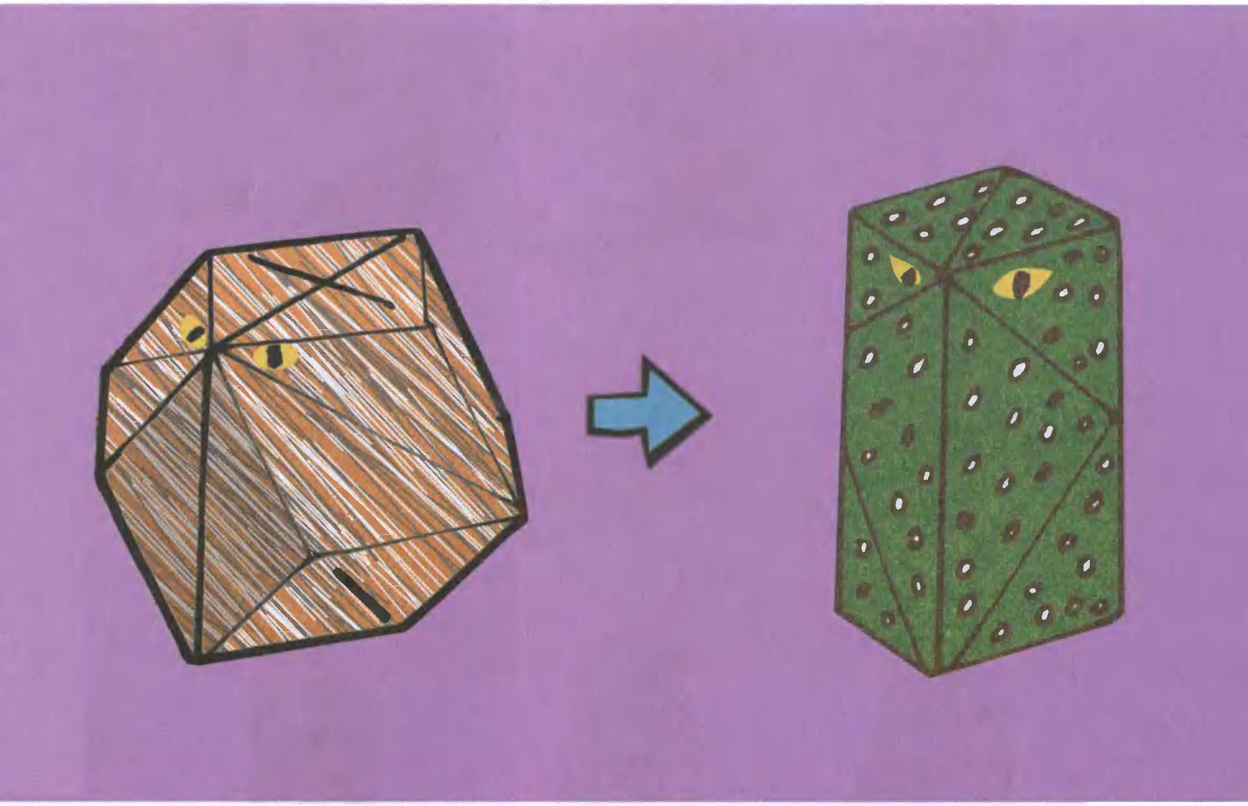
— Иногда, чтобы решить задачу, приходится изменить способ мышления, — улыбается профессор.

Дзяй запоминает: на задачу можно смотреть с разных сторон.



Затем профессор достает многогранник, раскрашенный под лису.

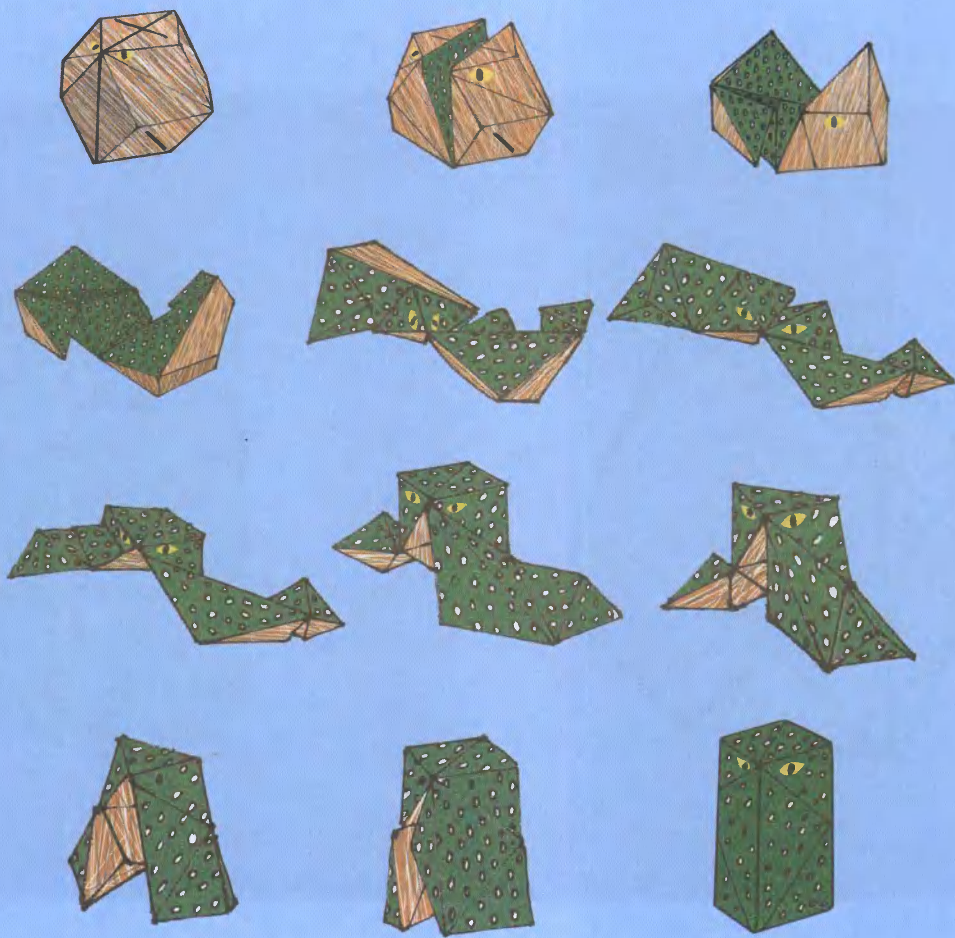
— Это ромбододекаэдр, но пока будем считать его лисой, — говорит он.



Он тянет за какую-то веревочку, и фигура выворачивается, превращаясь в параллелепипед, раскрашенный под змею.

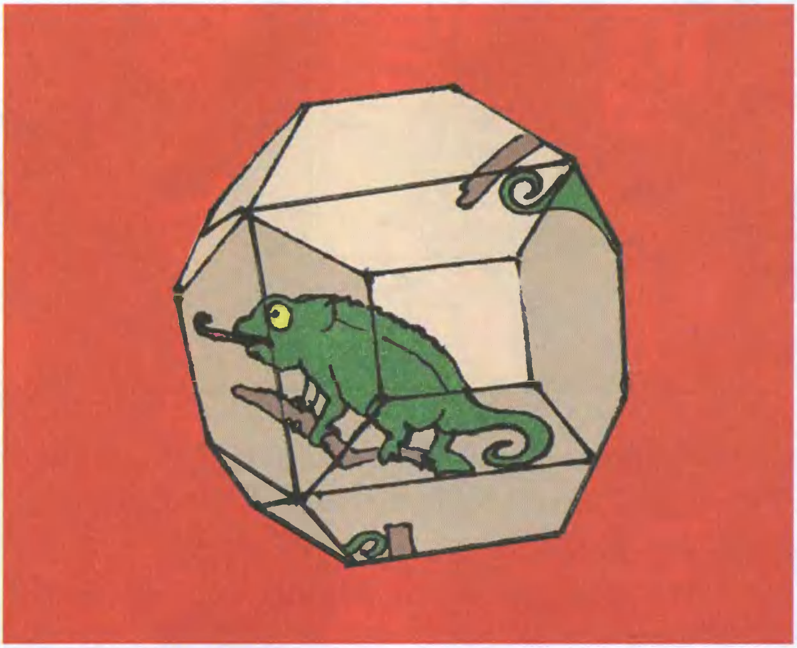
— Змея съела лису! — говорит он озорным голосом.

Зрители смотрят, раскрыв рот.



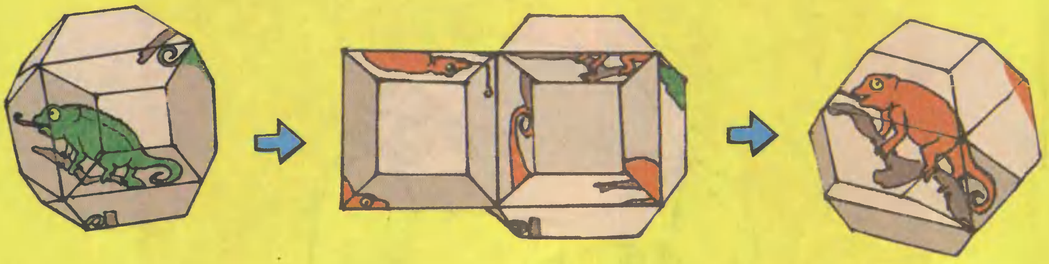
Он повторяет трюк медленно, шаг за шагом, чтобы дети могли видеть, что происходит.

— Некоторые многогранники можно разрезать особым образом и как бы вывернуть наизнанку, образуя другие тела. Я называю их «трансформерами». Иногда многогранник можно преобразовать в равный самому себе.



Он показывает ещё одну фигуру. На ней нарисованы зелёные хамелеоны.

— Это тоже усечённый октаэдр, — говорит профессор.



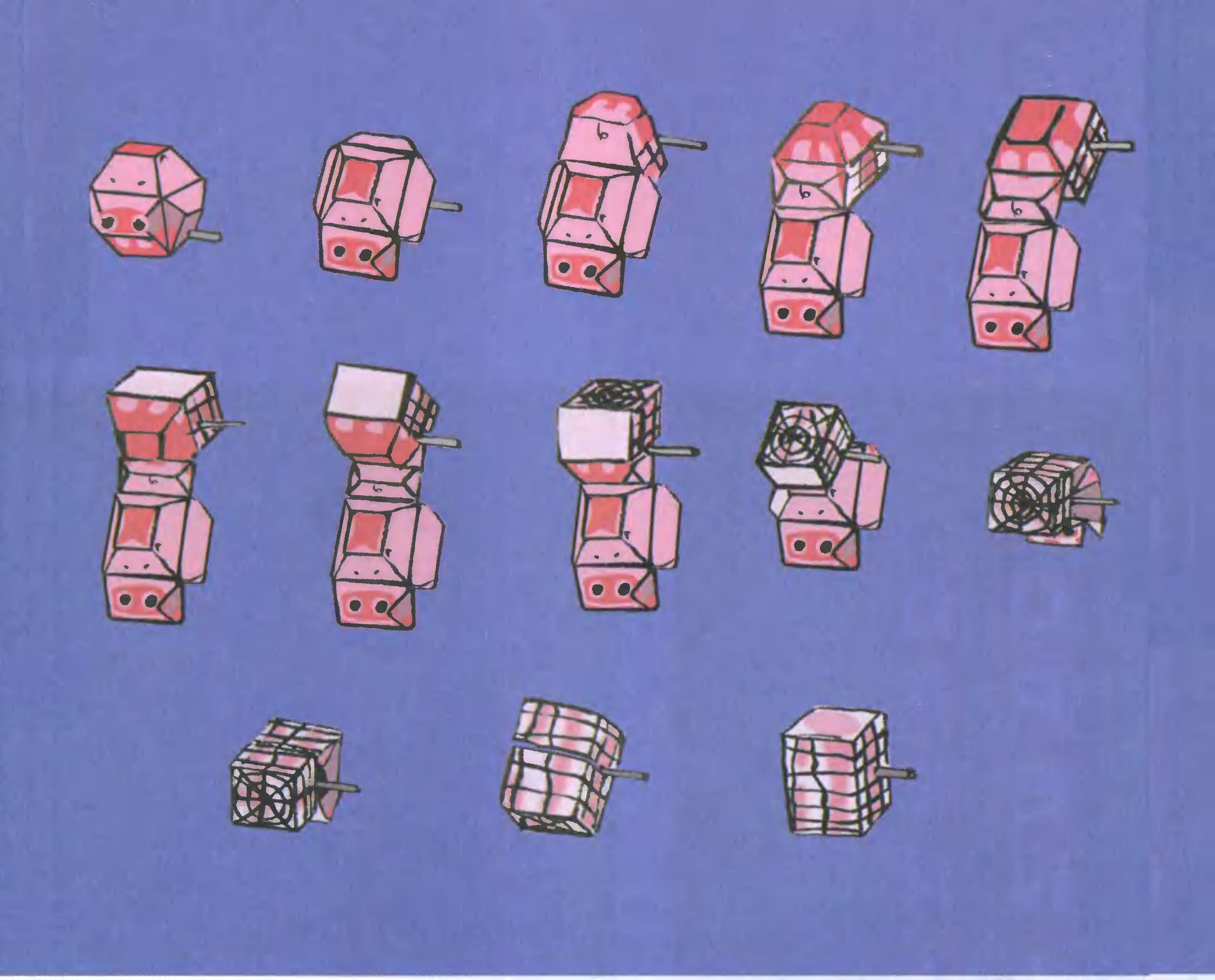
Он выворачивает его в другой усечённый октаэдр, на котором нарисованы оранжевые хамелеоны.

— Это пример многогранника, который выворачивается наизнанку, превращаясь в точно такую же фигуру. Такие многогранники я называю «хамелеонами», — продолжает он.

Дзяй заметил одну вещь.

— Значит, одну и ту же фигуру можно вывернуть по-разному, в два совсем разных многогранника? — спрашивает он профессора Ямааки.

— Очень хорошее наблюдение, — говорит профессор. — Мы преобразовали первый усечённый октаэдр в параллелепипед, а второй усечённый октаэдр, с хамелеонами, — в другой усечённый октаэдр. Некоторые многогранники можно преобразовать в два или более других.



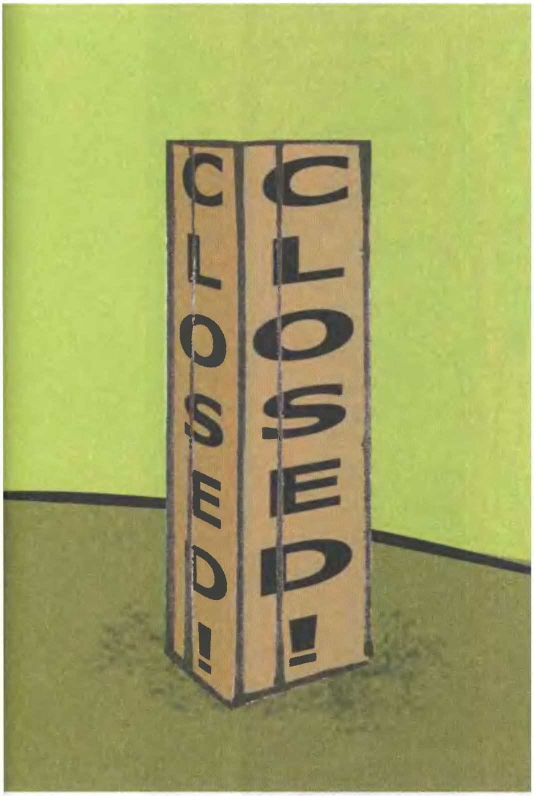
Я смастерил довольно много фигур, которые можно выворачивать с образованием других фигур. Многие из них выставлены здесь.

Он достает ещё один многогранник, который раскрашен под свинью. Дзяй замечает, что это тоже усечённый октаэдр.

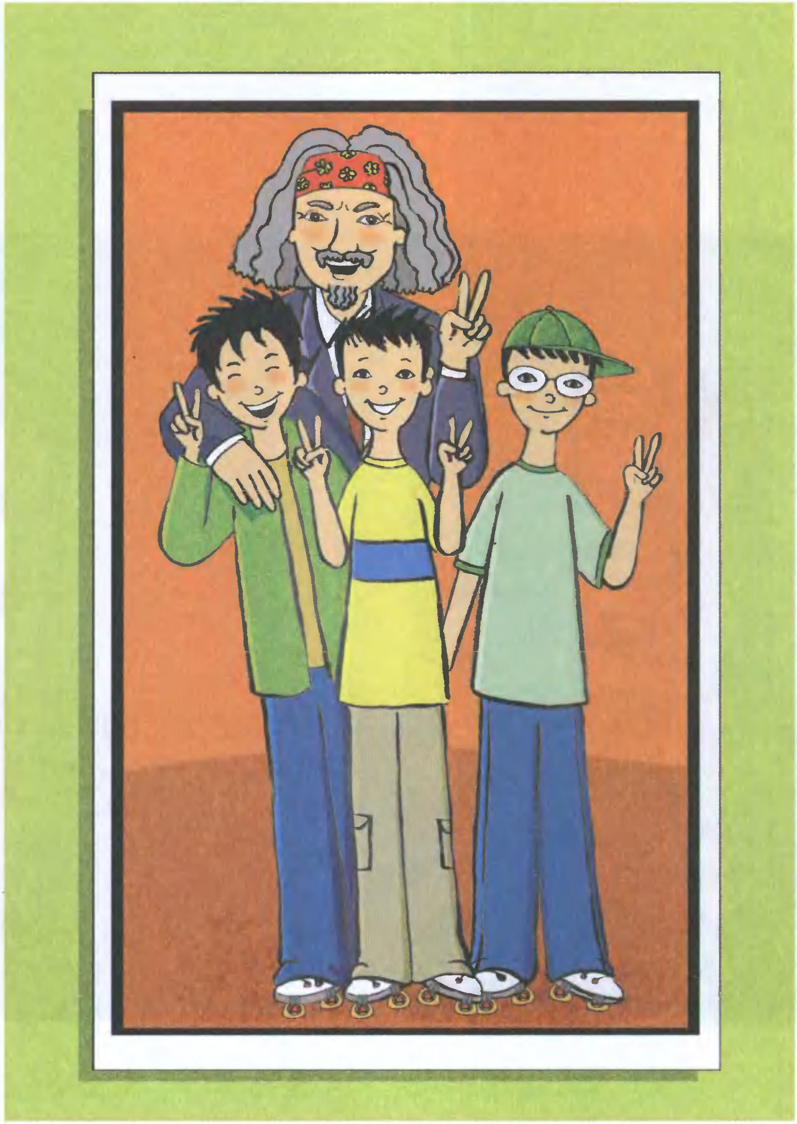
К фигуре присоединен стержень. Профессор Ямааки крутит его, свинья выворачивается и превращается в кусок ветчины! Дети весело смеются.


OPEN!
OPEN!


OPEN!
OPEN!

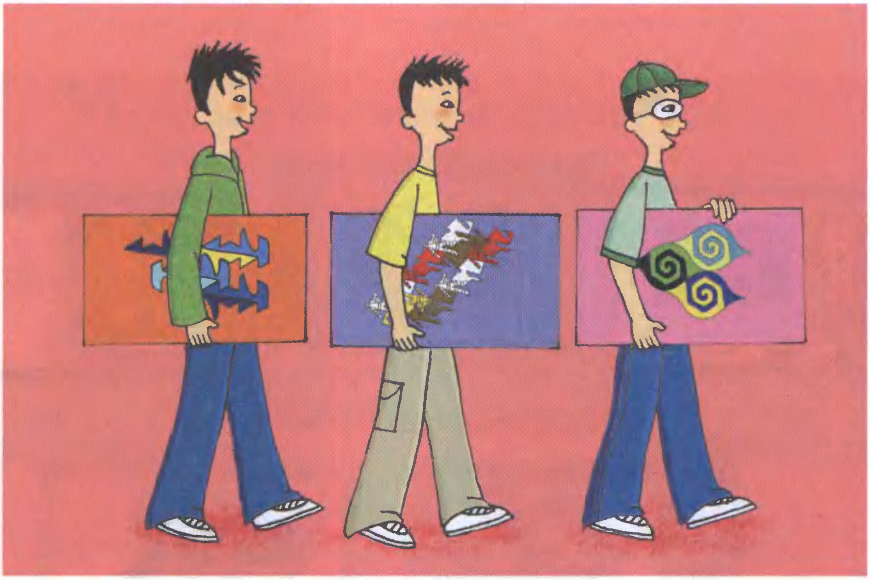


Наконец профессор берёт треугольную призму со словом «open» (открыто) и преобразует её в точно такую же треугольную призму со словом «closed» (закрыто). Таким образом он объявляет о конце своего выступления.



Кино, Итиро и Дзяй переполнены впечатлениями — пожалуй, даже слишком. Они встают в очередь, чтобы получить автограф профессора Ямааки и сфотографироваться вместе с ним.

16



Дорога домой

Мальчики остаются в Стране Чудес до самого закрытия. Наконец они идут сдавать свои ролики. С собой они уносят листочки с задачами, бумажные модели и вырезанные фигуры.

По пути к выходу ребята проходят мимо нескольких телевизионных экранов. На каждом из них профессор Ямааки, и на каждом он показывает что-то своё.

— А, вот почему его лицо такое знакомое, — говорит Итиро. — Я же видел его по телевизору.

Друзья снова встречают Кэйко. Она протягивает им тетрадь.

— Здесь посетители оставляют свои комментарии. Не хотите что-нибудь написать?

Мальчики по очереди пишут.

Раньше я не любил математику, но теперь думаю, что она всё-таки может мне понравиться. Очень понравилась машина, которая делает квадратные отверстия! И ещё машина, которая считает НОД и НОК.

Итиро

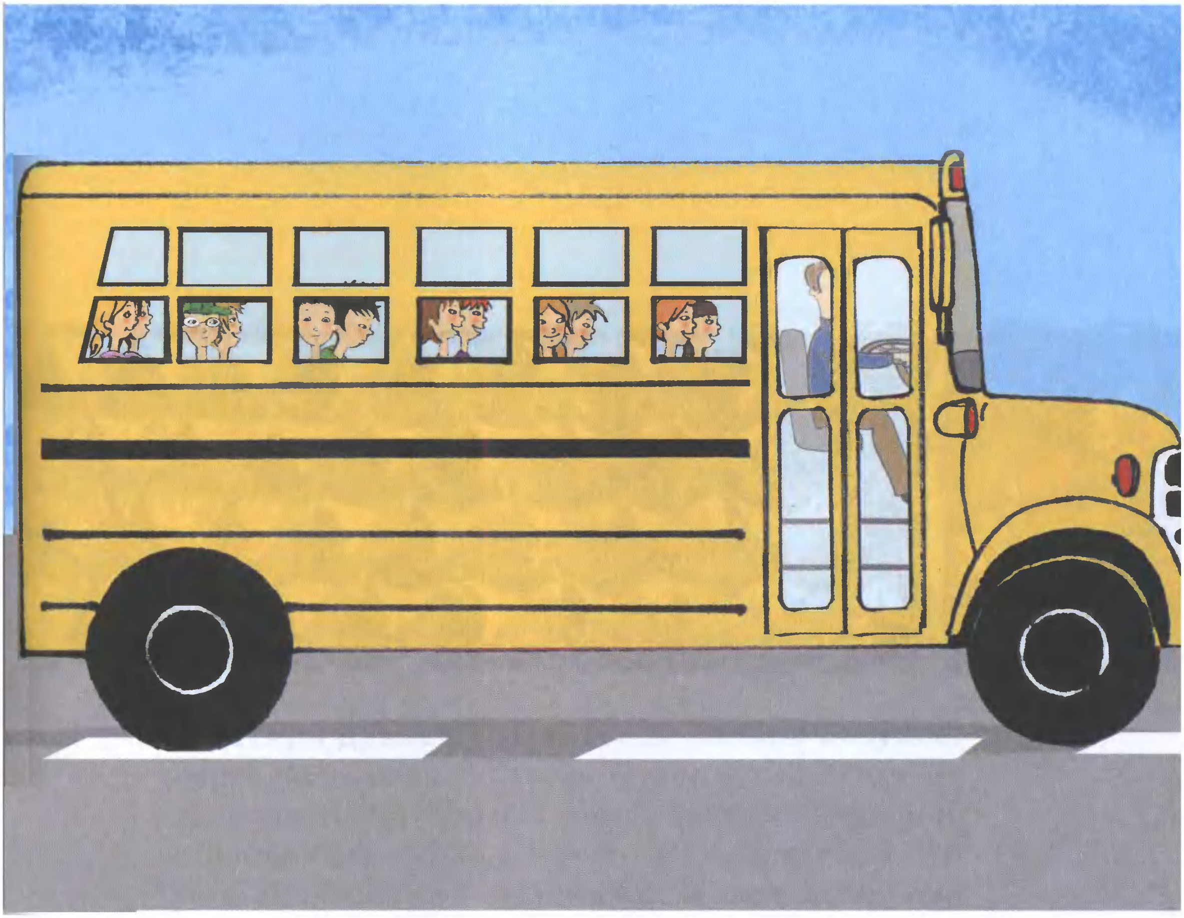
Математика – это здорово! Но я узнал это только здесь. Больше всего понравились горки. И ещё, где можно купить такие ролики?

Кино

Поразительно и заставляет напрягаться! Мне никогда не приходилось столько думать, как сегодня, и мне это очень понравилось. Интересно, могу ли я стать математиком.

Дзяй

P.S. Мы не успели посмотреть всё. Мы ещё вернёмся.



Мальчики очень устали, и всю обратную дорогу они молчат. Каждый погружён в свои мысли.

Итиро думает, что в конце концов бабушка оказалась права. В Стране Чудес действительно здорово. И математика может быть интересной. Сцепленные сердца — это для бабушки, а его узор из роботов — для мамы. Может быть, она даже повесит его в своей комнате рядом с гравюрой Эшера.

Кино вспоминает все замечательные вещи, которые он пробовал делать. Ещё он думает, что бы такое рассказать о своей поездке, чтобы переплюнуть Кэнтаро.

Дзяй перебирает в уме математические эксперименты, которые он будет ставить дома, и задачи, которые ему предстоит решить.

БЛАГОДАРНОСТИ

От Джозефа О'Рурке мы узнали о существовании велосипедов с квадратными колесами в нескольких музеях науки в США, а Стен Вэгон подтвердил это.

О задаче одного разреза мы узнали из лекции Эрика Д. Демэйна «Folding and Unfolding Linkages, Paper and Polyhedra» на конференции «Japan Conference on Discrete and Computational Geometry 2000». Он также любезно предоставил разрешение на использование некоторых из его схем складок в телевизионных лекциях Джина Акиямы.

Себастьян фон Вутенау Майер и Клаудиа Масферрер Леон изобрели устройство колеса с осью, которое в этой книге использовано в роликовых коньках. Колёса имеют постоянную ширину, а оси в поперечном сечении являются треугольниками Рело, окруженными квадратной рамкой, внутри которой они поворачиваются.

Большинство моделей математической Страны Чудес изготовили Ясуюки Ямагучи и Минору Канзаки.

Модели для треугольных и пятиугольных отверстий были предоставлены Йошиюки Кавазоэ и Икуро Сато.

И. Сато и Х. Накагава предоставили замощающие пространство многогранники, которые в этой книге названы П-4-гексаэдрами.

Компания «M. C. Escher Company-Holland» любезно разрешила использование перепечаток работ Эшера в этой книге.

ПОЯСНЕНИЯ

Компания «Hyatt» получила в 1921 г. в США патент на бур, который делает квадратные отверстия. В этом устройстве лезвие неподвижно, а рама вращается. Весит оно 200 кг. Устройство в математической Стране Чудес имеет вращающиеся лезвия, гибкую ось и неподвижную раму и является переносным.

В 1889 г. английский исследователь Фрэнсис Гальтон разработал доску со штырьками для демонстрации нормального распределения (называемую quincunx, или доска Гальтона). Верхняя часть приспособления из гл. 6 основана на конструкции доски Гальтона; качающееся основание добавлено, чтобы было проще наклонять устройство для демонстрации и затем возвращать шарики в исходное положение.

Mathematical Art Catalog, Research Institute of Educational Development, Tokai University, 1999.

Mathematical Art in ICME 9 Catalog, Research Institute of Educational Development, Tokai University and Chiba Convention Bureau, 2000.

Глава 2

J. Akiyama, *A Book of Mathematical Problems for Someone Special* (in Japanese), Gentosha, Tokyo, 1999.

C. Gardner, *Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, Simon and Schuster, Inc., New York, 1974.

P. Rexford, "Sunk Ships Sail Again in Coins," *The Washington Times*, Sept. 6, 2006.

S. von Wuthenau Mayer and C. Masferrer Leon, private communication.

http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/cwidth.shtml.

http://www.engin.swarthmore.edu/~nlaport1/wankel.html.

Глава 3

W. Dunham, *Journey Through Genius*, Penguin Books, New York, 1990.

D. H. Shin and S. Singh, Path Generation for Robot Vehicles Using Composite Clothoid Segment, tech report CMU-RI-TR-90-31, Robotics, Carnegie Mellon University, 1990.

S. Wagon, *Mathematica in Action*, W. H. Freeman and Company, New York, 1991.

D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, London, 1991.

http://cage.rug.ac.be/~hs/wheels.html.

http://ffden2.phys.uaf.edu/211_fall2002.web.dir/Shawna_Sastomoinen/Clothoid_Loop.htm.

http://ffden2.phys.uaf.edu/211_fall2002.web.dir/Shawna_Sastomoinen/Roller_Coasters.htm.

http://knuttz.net/hosted_pages/Eejanaika-Roller-Coaster.

http://mathworld.wolfram.com/Tautochrone_Problem.html.

http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html.

http://www.2dcurers.com/spiral/spirale.html.

http://www.phy6.org/stargaze/Sclothoid.htm.

http://www.teachingtools.com/GoFigure/FlyerCarpets.htm.

http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/Epitrochoid_dir/ epitrochoid.html.

Math Trek: Riding on Square Wheels by I. Peterson in http://www.sciencenews.org/20040403/mathtrek.asp.

Глава 4

J. Akiyama et al., *Models and Experiments for Junior High School and High School Students* (in Japanese), Suken, Tokyo, 1999.

C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

I. Moscovich, *Leonardo's Minor and Other Puzzles,* Sterling Publishing Co., Inc., N.Y. 2004.

How Did Pythagoras Do It? by E. von Glaserfield in http://www.univie.ac.at/constructivism/EvG/

Глава 5

http://www.us.es/ewcg04/cosmoakiyama.pdf.

Глава 6

J. Akiyama and N. Torigoe, Teaching probability distributions with a cradle pinball device, Proc. 8th Southeast Asian Conf. on Math. Ed., Ateneo de Manila University, 1999, 69-76.

http://www.subtangent.com/maths/ig-quincunx.php.

Глава 9

G. David and C. Tomei, The problem of the calissons, *American Math. Monthly*, 96, 5(1989) 429-431.

Глава 10

C. Clawson, *Mathematical Sorcery,* Plenum Trade, New York, 1999.

R. Cooke, *The History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

S. A. Garfunkel et al., For All Practical Purposes: Introduction to Contemporary Mathematics (4th ed.), W. H. Freeman and Company, New York, 1997.

D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Auschailiche Geometri*e, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932.

M. Sobel and N. Lerner, *Algebra and Trigonometry* (5th ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.

http://www.us.es/ecwg04/cosmoakiyama.pdf.

Глава 11

M. Gardner, *Are Universes Thicker than Blackberries?*, W. W. Norton and Company, New York, 2003.

K. Tsübota, Pleasant Math, *Hands on Math* (in Japanese), Kyoiku Publishing Co. Ltd., Tokyo, 2004.

Глава 12

E. Demaine and M. Demaine, Fold and Cut Magic in *Tribute to a Mathemagician*, B. Cipra, et al. (eds.), A. K. Peters Limited, Wellesley, MA., 2005.

E. Demaine, Folding and unfolding linkages, paper, polyhedra, *Discrete and Comput. Geom.*, LCNS 2098, J. Akiyama, M. Kano and M. Urabe (eds.), Springer-Verlag (2001), 1-30.

Глава 13

J. Akiyama, Tilemakers and semi-tilemakers, *American Math. Monthly*, 114 (2007), 602-609.

J. Akiyama, You Can Be an Artist like Escher: Art from Tilings of Plane, Research Institute of Educational Development, Tokai University, Tokyo, 2006.

D. Schattschneider, *M. C. Escher: Visions of Symmetry,* W. H. Freeman and Company, New York, 1990.

Глава 14

J. Akiyama and G. Nakamura, A lesson on double-packable solids, *Teaching Mathematics and its Applications*, 18 No.1, Oxford University Press (1999) 30 - 33.

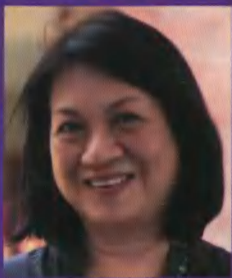
I. Sato and H. Nakagawa, *Wooden Polyhedra* (in Japanese), NPO Center for Collaborative Interdisciplinary Sciences, Sendai, 2006.

Глава 15

J. Akiyama and G. Nakamura, Dudeney dissections of polygons and polyhedrons, a survey, *Discrete and Comput. Geom.*, LCNS 2098, J. Akiyama, M. Kano and M. Urabe (eds.), Springer-Verlag (2001) 1-30.

СОДЕРЖАНИЕ

Джин Акияма — профессор математики университета Токай в Токио и директор Института развития образования при этом университете. С 1991 года он выступает с лекциями по телевидению на японском национальном канале NHK. В них использовались первоначальные версии моделей, представленных в основанном им музее «Страна математических чудес». Публикации профессора Акиямы относятся к дискретной геометрии, теории графов и вопросам математического образования.



Мари-Джо Руис — профессор и член попечительского совета университета Атенео в Маниле (Филиппины), лауреат нескольких национальных премий в области педагогики. Ранее она была президентом Математической ассоциации Юго-Восточной Азии. Её научные интересы относятся к теории графов и исследованию операций.

Оба автора были членами оргкомитета проходившей под эгидой ЮНЕСКО передвижной выставки «Познакомьтесь с математикой» (Experiencing mathematics), первая экспозиция которой состоялась в Дании в 2004 году в связи с X международным конгрессом по вопросам математического образования. Джин Акияма — главный редактор международного математического журнала «Graphs and Combinatorics», М.-Дж. Руис — член его редакционной коллегии.

Страна математических чудес, по которой путешествуют дети — герои этой книжки, существует и в действительности: так называется музей интерактивных математических моделей на японском острове Хоккайдо. Он был создан Джином Акиямой в 2003 году. Занимательные модели, описанные в книге (многие из них автор демонстрировал и в Японии, и за её пределами), призваны помочь детям открыть для себя удивительные закономерности и осознать всевозможные математические чудеса.

Три школьника проводят целый день в стране математических чудес, экспериментируя с представленными там моделями и участвуя в математических играх. В конце дня они покидают музей с осознанием красоты и необходимости математики в повседневной жизни.

В книге описываются сюжеты, взятые из научных работ авторов и не встречавшиеся ранее в литературе по занимательной математике: многогранники-трансформеры, замощения плоскости развёртками тетраэдров, многогранники «двойного назначения». Эта книга и развлекает, и рассказывает о новом, и даже в какой-то мере обучает математике.

Книга адресована детям школьного возраста, их родителям и учителям.

Элементы
elementy.ru
Династия
ISBN 978-5-4439-0132-9
9 785443 901329