

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физической электроники

А.Ф. Александров, М.В. Кузелев

Теоретическая плазменная электротехника

(учебное пособие)

А.Ф. Александров, М.В. Кузелев. Теоретическая плазменная электротехника. – МГУ имени М.В. Ломоносова, Физический факультет, 2011, 167 с.

Разработаны методы теоретического исследования электродинамических структур с плазменным заполнением подключенных к источникам высокочастотного напряжения при помощи внешней электрической цепи и некоторой системы электродов. Для описания плазмы использован аппарат тензора-оператора диэлектрической проницаемости в гидродинамическом приближении с учетом временной и пространственной дисперсии. Учтено влияние столкновений в плазме, пространственная неоднородность плазмы, тепловое движение частиц плазмы и наличие внешнего магнитного поля. Вычислены комплексные импедансы различных плазменных образований – газовых плазменных разрядов – емкостного и индуктивного типов. Исследованы резонансные свойства комплексных импедансов плазменных образований и установлена связь резонансов с возбуждением в плазме электромагнитных колебаний и волн разного типа. Вычислены потери энергии внешнего источника в плазме.

Для студентов и аспирантов радиофизических специальностей университетов, а также научных работников и инженеров, специализирующихся в областях физики плазмы, плазменной электроники и физики газового разряда.

Содержание

1. Методы описания плазмы	7
1.1. Необходимые сведения о плазме. Уравнение Власова	7
1.2. Многожидкостная гидродинамика холодной плазмы	12
1.3. Одножидкостная гидродинамика неизотермической плазмы	15
1.4. Учет столкновений в плазме	17
2. Электромагнитное поле в плазме	21
2.1. Уравнения Максвелла и граничные условия	21
2.2. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы	26
2.3. Потенциальное приближение	29
3. Волны в плазме	31
3.1. Волны в изотропной плазме	31
3.2. Волны в холодной магнитоактивной плазме	34
3.3. Поверхностные волны	42
3.4. Некоторые сведения о плазменных волноводах.	47
4. Основная задача и основные уравнения плазменной электротехники	52
5. Плазменные системы емкостного типа	60
5.1. Электротехнические уравнения емкостного разряда	60
5.2. Емкость одномерного плазменного конденсатора (плазменные системы малой длины)	61
5.3. Анизотропный плазменный конденсатор (плазменные системы большой длины)	68
5.4. Резонансные свойства комплексного импеданса. Потери энергии в плазме	79
5.5. Поверхностные волны в плазменных системах емкостного типа	88
6. Плазменные системы индуктивного типа	92
6.1. Электротехнические уравнения индуктивного разряда	92
6.2. Индуктивность открытого плазменного соленоида	93
6.3. Индуктивность закрытого плазменного соленоида	105
6.4. Индуктивные плазменные системы общего вида	133

7. Теория плазменного конденсатора с учетом пространственной дисперсии	136
7.1.Проникновение продольного поля в плазму	136
7.2.Плоский плазменный конденсатор	142
7.3.Сферический плазменный конденсатор	147
7.4.Цилиндрический плазменный конденсатор	157
7.5.Неизотермический плазменный конденсатор	161

Предисловие

В подавляющем большинстве учебных и монографических изданий по теории плазмы все внимание сосредоточено на описании и исследовании плазмы как таковой, безотносительно к условиям, в которых плазма находится. Разрабатываются модели описания плазмы, изучаются элементарные процессы в плазме, исследуется взаимодействие плазмы с электромагнитными полями, анализируются равновесные плазменные конфигурации, рассматриваются колебания и волны в плазме, решаются и другие проблемы общего характера. В целом такой подход оправдан из-за специфики плазмы, как системы с большим числом степеней свободы, обладающей сложными и многообразными свойствами. Однако, имеется целый ряд важных прикладных проблем, при рассмотрении которых плазму нецелесообразно, а зачастую и невозможно, считать изолированной от устройств, используемых для создания, поддержания или экспериментального изучения этой плазмы. Примером может служить обыкновенный газовый разряд в некоторой электродинамической системе – газоразрядной трубке, подключаемой с помощью системы электродов к внешней цепи с источником напряжения. Очевидно, что даже определение мощности источника, выделяемой в плазме разряда, без учета внешней цепи невозможно, т.е. рассмотрения только одной плазмы в данном случае явно недостаточно.

Вообще ситуации, когда различные плазменные образования подключаются к источнику напряжения с помощью обычной квазистационарной электрической цепи типичны для многочисленных газоразрядных экспериментальных и технологических установок, расчет которых является сложной и актуальной задачей электродинамики плазмы. Решение этой задачи и составляет предмет теоретической плазменной электротехники, излагаемой в настоящем лекционном курсе. Для электрической цепи плазма является некоторым сосредоточенным электротехническим элементом, полностью характеризваемым своим комплексным импедансом. Вместе с тем, сама плазма должна рассматриваться на языке волн и полей, как распределенная система. Основная задача теоретической плазменной электротехники как раз и состоит в разработке методов

описания распределенной плазменной системы, как элемента квазистационарной электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Очевидно, что для многочисленных приложений такое описание является важным. Другими словами речь в плазменной электротехнике идет о согласовании двух подходов при описании плазменных систем: электротехнического подхода, основанного на методе эквивалентных схем, и электродинамического, основанного на уравнениях электромагнитного поля в среде. Таким образом, плазменная электротехника находится на стыке инженерно-технических дисциплин (электротехники и радиотехники) и теоретической физики (электродинамики плазмы).

В основу курса положены современные методы описания электромагнитных процессов в плазме: гидродинамические и кинетические уравнения динамики плазмы в самосогласованном электромагнитном поле, аппарат тензора диэлектрической проницаемости плазмы, теория материальных сред с временной и пространственной дисперсией. Для успешного усвоения материала курса требуются предварительные сведения по электродинамике сплошных сред, методам математической физики, теории функций комплексной переменной и теории специальных функций.

Учебное пособие написано в соответствии с Государственными образовательными стандартами специальностей 010400 “Физика” и 013900 “Фундаментальная радиофизика и физическая электроника”. Оно рассчитано на студентов старших курсов радиофизических специальностей университетов и является дополнением по курсам «Дополнительные главы электродинамики сред с дисперсией» и «Плазменная СВЧ электроника», читаемым студентам 5-го курса кафедры физической электроники физического факультета МГУ. Авторы надеются, что учебное пособие окажется полезным студентам, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в таких областях физики, как электродинамика плазмы и плазмоподобных сред, теория волн в плазме, физика газового разряда.

1. Методы описания плазмы

1.1. Необходимые сведения о плазме. Уравнение Власова

Плазмой называют частично или полностью ионизованный газ, состоящий из очень большого числа положительно и отрицательно заряженных частиц, а в ряде случаев и из нейтральных атомов и молекул. Положительно заряженными частицами плазмы являются ионизованные атомы – положительные ионы. Отрицательно заряженными частицами являются электроны и отрицательные ионы. Отрицательные ионы в рассматриваемых здесь плазменных явлениях большой роли не играют и в дальнейшем не учитываются. Состав нейтральной компоненты определяется составом газа, в результате ионизации которого получена плазма, и степенью его ионизации. Если нейтральных частиц, в сравнении с заряженными, мало, то плазму называют сильно или полностью ионизованной. В противном случае говорят о слабоионизованной плазме. Важной особенностью плазмы, как системы разноименных заряженных частиц, является ее электрическая квазинейтральность. Квазинейтральность означает, что в среднем по достаточно большим промежуткам времени и областям пространства заряд плазмы равен нулю, то есть

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{0\alpha} = 0. \quad (1.1)$$

Здесь α – сорт частиц плазмы, e_{α} – заряд частицы сорта α , а $n_{0\alpha}$ – средняя (невозмущенная) концентрация частиц сорта α . В дальнейшем заряд электрона обозначаем просто e ($e < 0$), тогда заряд иона $e_i = Z|e|$, где Z – кратность ионизации атома. Кроме того, для простоты будем считать, что в плазме имеются ионы только одного сорта.

Под действием различных возмущающих факторов электрическая нейтральность плазмы, имеющая место только в среднем, может нарушаться в макроскопических пространственно-временных масштабах. Возникающие при этом макроскопические электромагнитные поля существенно определяют динамику заряженных частиц плазмы. Каждая заряженная частица движется в по-

ле многих других, сама влияя на электромагнитное поле. Плазменные явления, в которых участвует большое число заряженных частиц, получили название коллективных (в отличие, например, от парных столкновений, в которых участвуют только две частицы). Существование в плазме разнообразных коллективных движений является ее главной особенностью и обусловлено очевидно нарушением электрической нейтральности в макроскопических масштабах.

Характерный временной масштаб процессов, связанных с нарушением квазинейтральности плазмы, определяется ленгмюровскими (плазменными) частотами заряженных частиц сорта α

$$\omega_{L\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_{0\alpha}}{m_\alpha}}, \quad (1.2)$$

где m_α - масса частицы (в дальнейшем масса электрона $m_e = m$, а масса иона $m_i = M$). Например, при нарушении квазинейтральности в холодной электрон-ионной плазме в ней возникают продольные ленгмюровские волны плотности заряда (плазменные колебания; см. далее подразд. 3.1), частота которых в простейшем случае определяется формулой

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}. \quad (1.3)$$

Впервые ленгмюровские волны были рассмотрены в 1929 г. И. Ленгмюром (I. Langmuir), им же были введены и плазменные частоты (1.2).

Пространственный масштаб процессов, связанных с нарушением квазинейтральности плазмы, характеризуется так называемым дебаевским радиусом

$$r_D = \left(4\pi \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2 n_{0\alpha}}{k_B T_{\alpha}} \right)^{-1/2}, \quad (1.4)$$

где k_B - постоянная Больцмана, а T_{α} - температура частиц сорта α . Обычно вводят электронный r_{De} и ионный r_{Di} дебаевский радиусы, используя для этого формулу

$$\frac{1}{r_D^2} = \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2} = \frac{4\pi e^2 n_{0e}}{k_B T_e} + \frac{4\pi e^2 Z^2 n_{0i}}{k_B T_i} = \frac{\omega_{Le}^2}{V_e^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{V_i^2}, \quad (1.5)$$

где $V_e = \sqrt{k_B T_e / m}$ и $V_i = \sqrt{k_B T_i / M}$ - средние тепловые скорости электронов и ионов

соответственно. Плазма экранирует поле любого электрического заряда помещенного в плазму (т.н. пробного заряда) на расстоянии порядка дебаевского радиуса r_D , что обусловлено поляризацией плазмы. Явление получило название дебаевской экранировки. Впервые дебаевский радиус экранирования был введен в 1923 г. П. Дебаем (P. Debye) в развитой им теории электролитов. Таким образом, величина r_D определяет глубину проникновения статического поля в плазму, или характерный размер неоднородности электростатических полей. Для переменных полей соответствующие величины могут быть совершенно иными (см. далее разд. 7).

Существенным отличием плазмы от газа нейтральных частиц является дальнедействующий характер сил кулоновского взаимодействия. Для электронов потенциал взаимодействия равен e^2/r , а потенциал взаимодействия нейтральных частиц спадает с ростом r значительно быстрее (практически обращается в ноль на расстояниях порядка размера частиц). Возникает вопрос о правомерности определения плазмы как газа заряженных частиц. Известно, что система многих частиц может считаться газом, только если средняя потенциальная энергия их парного взаимодействия значительно меньше средней кинетической энергии частицы. Для электронов плазмы это сводится к неравенству

$$\eta \equiv \frac{e^2 \langle r_e \rangle}{k_B T_e} = \frac{e^2 n_{0e}^{1/3}}{k_B T_e} = \frac{1}{4\pi r_D^2 n_{0e}^{2/3}} = (4\pi)^{-1} \frac{\langle r_e \rangle^2}{r_D^2} \ll 1, \quad (1.6)$$

где $\langle r_e \rangle = n_{0e}^{-1/3}$ – среднее расстояние между электронами. Величина η , называемая плазменным (газовым) параметром, имеет в теории плазмы важное значение. Плазму можно рассматривать как газ только при выполнении неравенства (1.6).

В нулевом приближении по плазменному параметру (1.6) парными взаимодействиями заряженных частиц плазмы – столкновениями – можно пренебречь. При этом на заряженные частицы воздействуют только коллективные поля, а соответствующий подход называется приближением бесстолкновительной плазмы. Наиболее общее описание бесстолкновительной плазмы достигается с помощью кинетического уравнения для одночастичной функции распределения

$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$, зависящей (помимо времени t) от координат \mathbf{r} и импульсов \mathbf{p} частицы сорта α . Одночастичная функция распределения вводится так, что

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{r} d\mathbf{p} \quad (1.7)$$

есть число частиц сорта α , находящихся в момент времени t в элементе объема фазового пространства $d\mathbf{r} d\mathbf{p}$ около точки \mathbf{r}, \mathbf{p} ($d\mathbf{r} = dx dy dz$ и $d\mathbf{p} = dp_x dp_y dp_z$ - элементы объемов в конфигурационном и импульсном пространствах соответственно). Получим уравнение, которому удовлетворяет одночастичная функция распределения $f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ (см. Рис. 1.1).

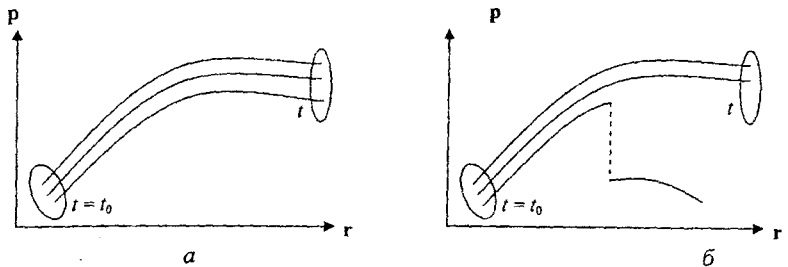


Рис. 1.1

К выводу кинетического уравнения

В произвольный момент времени t_0 число частиц в элементе объема $d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0$ около произвольной точки $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$ по определению есть $f_\alpha(t_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0) d\mathbf{r}_0 d\mathbf{p}_0$. Частица, находившаяся в момент t_0 в точке $\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0$, в момент времени t перейдет в точку фазового пространства $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, где $\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)$ - уравнения траектории в фазовом пространстве. Траектория определяется из уравнений движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right\}, \quad (1.8)$$

дополненных начальными условиями $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0$, а $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m_\alpha$. Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} - напряженность электрического и индукция магнитного полей (коллективных и внешних). В уравнениях (1.8) учтена только сила Лоренца - единственная существенная для заряженных частиц плазмы. Напомним, что в нулевом прибли-

жении по плазменному параметру силы, обусловленные столкновениями частиц плазмы между собой, не учитываются.

При движении вдоль траектории как-то трансформируются элемент фазового объема и функция распределения: $dr_0 dp_0 \rightarrow dr dp$, $f_\alpha(t_0, r_0, p_0) \rightarrow f_\alpha(t, r(t), p(t))$. Но поскольку столкновений нет, полное число частиц в элементе фазового объема сохраняется (Рис. 1.1а), то есть

$$f_\alpha(t, r(t), p(t)) dr dp = f_\alpha(t_0, r_0, p_0) dr_0 dp_0 = const. \quad (1.9)$$

Вот если бы были столкновения, то в какой-то случайный момент времени импульс частицы мог бы скачком измениться на случайную величину, и частица покинула бы рассматриваемый элемент фазового объема (Рис. 1.1б); соотношение (1.9) тогда бы не имело места. Далее, из теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема следует, что

$$dr dp = dr_0 dp_0. \quad (1.10)$$

Тогда из (1.9) и (1.10) получаем, что вдоль фазовой траектории частицы функция распределения постоянна

$$f_\alpha(t, r(t), p(t)) = const. \quad (1.11)$$

Дифференцируя равенство (1.11) по времени, получим

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial p} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (1.12)$$

Подставляя далее (1.8) в (1.12), приходим окончательно к следующему кинетическому уравнению для одночастичной функции распределения

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) называется кинетическим уравнением Власова. Оно впервые было предложено в 1937 г. профессором Московского университета А.А. Власовым. Уравнение Власова записывается для каждого сорта α заряженных частиц плазмы. Плотность тока и плотность заряда в плазме определяются при помощи функции распределения формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{p}, \\ \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Кинетическое уравнение (1.13) совместно с выражениями (1.14) и уравнениями для векторов электромагнитного поля (см. подразд. 2.1) образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение частиц плазмы с возникающими при этом электромагнитными полями. В связи с этим уравнение (1.13) называют еще кинетическим уравнением с самосогласованным полем в бесстолкновительном пределе.

1.2. Многожидкостная гидродинамика холодной плазмы

Покажем, что при определенных условиях для бесстолкновительной плазмы применимо гидродинамическое описание. Будем исходить из кинетического уравнения с самосогласованным полем (1.13). Получение гидродинамических уравнений сводится к отысканию замкнутой системы уравнений для моментов функции распределения для каждого сорта заряженных частиц:

$$\begin{aligned} N_{\alpha}(t, \mathbf{r}) &= \int f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \\ N_{\alpha}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}_{\alpha}(t, \mathbf{r}) &= \int \mathbf{v} f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Здесь N_{α} и \mathbf{V}_{α} - гидродинамические плотность и скорость частиц сорта α .

Применим к кинетическому уравнению (1.13) операторы интегрирования по импульсу $\int \mathfrak{Z} d\mathbf{p}$ и $\int \mathbf{v} \mathfrak{Z} d\mathbf{p}$, где через \mathfrak{Z} обозначена левая часть уравнения (1.13). В результате получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \nabla(N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{\alpha} \nabla) \mathbf{V}_{\alpha} + \frac{1}{m_{\alpha} N_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial r_j} \Pi_{\alpha j} &= \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}] \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ - декартовы координаты, а

$$\Pi_{\alpha j}(t, \mathbf{r}) = m_{\alpha} \int (\mathbf{v} - \mathbf{V}_{\alpha}(t, \mathbf{r})) (v_j - V_{\alpha j}(t, \mathbf{r})) f_{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) d\mathbf{p}, \quad j = x, y, z, \quad (1.17)$$

так называемый тензор давления. В уравнениях (1.16) использованы общепринятые обозначения для дифференциальных операторов

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (\mathbf{V}_\alpha \nabla) = V_{\alpha x} \frac{\partial}{\partial x} + V_{\alpha y} \frac{\partial}{\partial y} + V_{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.18)$$

Первое из уравнений (1.16) представляет собой уравнение непрерывности, второе – уравнение движения. Оно, однако, не является «гидродинамически замкнутым», так как содержит величину (1.17), пока еще не выраженную через гидродинамические характеристики плазмы (1.15). Проблема получения уравнений гидродинамики плазмы как раз и состоит в том, чтобы выразить (1.17) через гидродинамические величины (1.15). В общем случае проблема эта чрезвычайно сложна, но для важного случая холодной плазмы она решается достаточно просто.

Пусть выполнено неравенство

$$V_\alpha \ll \lambda / \tau, \quad (1.19)$$

где λ – характерный размер, а τ – характерное время некоторого процесса, протекающего в плазме (например, для плазмы в конденсаторе λ может быть расстоянием между обкладками, а за τ можно взять период напряжения на обкладках). Если так, то за время развития процесса частицы плазмы успевают сместиться с тепловой скоростью на расстояния много меньшие характерного пространственного размера. При этом плазму можно считать холодной и представить ее функцию распределения в виде

$$f_\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = N_\alpha(t, \mathbf{r}) \delta(\mathbf{p} - m_\alpha \mathbf{V}_\alpha(t, \mathbf{r})). \quad (1.20)$$

Интегрирование выражения (1.20) дает, что соотношения (1.15) выполняются автоматически, а тензор давлений (1.17) равен нулю – $\Pi_\alpha(t, \mathbf{r}) = 0$. Таким образом для холодной плазмы замкнутая система уравнений гидродинамики записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Уравнения (1.21) должны быть записаны для каждого сорта заряженных частиц α , составляющих плазму. Плотность тока и плотность заряда опреде-

ляются при помощи гидродинамических величин формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} \\ \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Гидродинамику, основанную на уравнениях (1.21) и соотношениях (1.22), называют многожидкостной гидродинамикой холодной плазмы без столкновений. Уравнения (1.21) совместно с выражениями (1.22) и уравнениями для векторов электромагнитного поля образуют полную систему уравнений, описывающих согласованное движение плазмы с возникающими при этом электромагнитными полями.

В рамках модели многожидкостной гидродинамики можно учесть некоторые эффекты, обусловленные наличием у частиц плазмы теплового разброса по импульсам. Для этого обратимся к общему второму уравнению (1.16). При этом ограничимся случаем изотропной плазмы. Поскольку выделенное направление в такой плазме отсутствует, то тензор давлений имеет диагональный вид $\Pi_{\alpha ij}(t, \mathbf{r}) = \Pi_{\alpha}(t, \mathbf{r}) \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера, а $\Pi_{\alpha}(t, \mathbf{r})$ - парциальное давление частиц сорта α . В случае газовой плазмы парциальное давление определяется уравнением состояния идеального газа $\Pi_{\alpha}(t, \mathbf{r}) = k_{\text{B}} N_{\alpha} T_{\alpha}$. Для того, чтобы после подстановки последнего выражения во второе уравнение (1.16) получилась замкнутая система, требуется какое-то выражение для температуры $T_{\alpha}(t, \mathbf{r})$. Предположим, что в плазме имеет место некоторый политропический процесс, т.е. $T_{\alpha} N_{\alpha}^{1-\gamma} = \text{const}$, где показатель политропы γ в рамках гидродинамики определен быть не может. Подстановка давления в уравнения (1.16) приводит к следующей системе уравнений многожидкостной гидродинамики изотропной плазмы с учетом газокинетического давления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial t} + \nabla(N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}) &\approx 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{V}_{\alpha} \nabla) \mathbf{V}_{\alpha} &= -V_{r\alpha}^2 \frac{\nabla N_{\alpha}}{N_{\alpha}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_{\alpha} \cdot \mathbf{B}] \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь $V_{r\alpha} = \sqrt{\gamma k_{\text{B}} T_{\alpha} / m_{\alpha}}$ величина, которую можно назвать тепловой скоростью

частиц сорта α при политропическом процессе. При $\gamma = 1$ имеем $V_{i\alpha} = V_{T\alpha}$.

1.3. Одножидкостная гидродинамика неизотермической плазмы

Рассмотрим теперь неизотермическую плазму, у которой температура электронной компоненты T_e отличается от температуры ионов T_i . Плазма с различными температурами электронов и ионов довольно обычна, поскольку из-за различия масс температура внутри компоненты устанавливается быстрее, чем выравниваются температуры компонент. Естественно считать, что $T_e > T_i$, так как обратное трудно реализуемо.

Пусть выполнены неравенства (сравни с (1.19))

$$V_T \ll \lambda/\tau \ll V_{T_i}. \quad (1.24)$$

Из левого неравенства (1.24) следует, что ионы можно считать холодными и описывать их уравнениями (1.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla(N_i \mathbf{V}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i &= \frac{e}{M} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Эти уравнения, по существу, характеризуют движение массы плазмы. При их записи учтена только электрическая составляющая в силе, действующей на заряд. Сделано это, потому что медленные электромагнитные процессы, обусловленные движением ионов, с хорошей точностью описываются потенциальным приближением (см. подразд. 2.3), когда

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad (1.26)$$

а скалярный потенциал $\Phi(t, \mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi = -4\pi(en_e + e_i N_i). \quad (1.27)$$

Что касается электронов, то они должны описываться кинетическим уравнением Власова, в котором согласно правому неравенству (1.24) производной по времени от функции распределения можно пренебречь. Соответствующее уравнение записывается в виде

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.28)$$

Решением данного уравнения является распределение Максвелла-Больцмана (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой)

$$f_e = A \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T_e} - \frac{e\Phi}{k_B T_e}\right), \quad (1.29)$$

где A - нормировочная постоянная. Отсюда, из (1.14) и из того, что невозмущенная концентрация электронов есть n_{0e} , находим

$$n_e = n_{0e} \exp\left(-\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right). \quad (1.30)$$

Используя (1.30), преобразуем уравнения (1.25)-(1.27) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla(N_i \mathbf{V}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i &= -Z \frac{|e|}{M} \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi &= -4\pi \left(e n_{0e} \exp\left(-\frac{e\Phi}{k_B T_e}\right) + Z |e| N_i \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

При выполнении неравенства

$$|e\Phi/k_B T_e| \ll 1, \quad (1.32)$$

согласующегося с правым неравенством (1.24), уравнения (1.31) принимают окончательно следующую форму

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla(N_i \mathbf{V}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i &= Z \frac{e}{M} \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi - \frac{1}{r_D^2} \Phi &= -4\pi e (n_{0e} - Z N_i), \end{aligned} \quad (1.33)$$

причем в силу квазинейтральности $n_{0e} = Z N_{0i}$, где $N_{0i} \equiv n_{0i}$ - невозмущенная концентрация ионов. Уравнения (1.33) и представляют собой искомую систему уравнений одножидкостной гидродинамики неизотермической плазмы. Впервые они были предложены в работах В.П. Силина и Ю.Л. Климонтовича.

Для процессов, характерный пространственный размер которых λ существенно больше дебаевского радиуса электронов r_D , из последнего уравнения системы (1.33) можно исключить потенциал электрического поля Φ

($\Delta\Phi \approx \Phi/\lambda^2 \ll \Phi/r_0^2$) и записать (1.33) в виде уравнений распространения звуковых волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla(N, \mathbf{V}_i) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i &= -\frac{V_s^2}{N_0} \nabla N_i, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где

$$V_s = \sqrt{Z \frac{k_B T_e}{M}} \quad (1.35)$$

- так называемая скорость ионного звука в плазме.

1.4. Учет столкновений в плазме

В следующем приближении по плазменному параметру (1.6) учитываются парные столкновения заряженных частиц. Учет столкновений приводит к появлению отличной от нуля правой части в уравнении (1.13)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st} = \sum_\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta}. \quad (1.36)$$

Правая часть уравнения (1.36) называется интегралом столкновений. По порядку величины

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{st}^{\alpha\beta} \approx \nu_{\alpha\beta} (f_\alpha - \tilde{f}_{0\alpha\beta}), \quad (1.37)$$

где $\nu_{\alpha\beta}$ - частота столкновений частиц сорта α с частицами сорта β (в том числе и $\beta = \alpha$), а $\tilde{f}_{0\alpha\beta}$ - некоторая функция, выражающаяся через функции распределения частиц сортов α и β в состоянии термодинамического равновесия. Поэтому уравнение нулевого приближения - кинетическое уравнение Власова (1.13) - пригодно для описания процессов, протекающих за времена, меньшие чем время свободного пробега частиц (время между двумя столкновениями), или, что то же самое для описания процессов с характерной частотой

$$\omega \gg \nu_\alpha = \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}. \quad (1.38)$$

Для таких процессов плазму, вообще говоря, можно считать бесстолкновитель-

ной. Учет столкновений частиц при этом приводит к малым поправкам. В плазменной электротехнике часто приходится иметь дело с низкочастотными процессами, когда неравенство (1.38) не является сильным, или не выполняется вообще. Кроме того, в типичных задачах плазменной электротехники важен вопрос о поглощении энергии внешних источников поля в плазме. Поэтому учет столкновений необходим безотносительно к неравенству (1.38)

Определим частоты столкновений ν_a заряженных частиц плазмы применительно к типичным в плазменной электротехнике ситуациям. Проделаем это для электронов. Частоту столкновений электронов с нейтральными атомами ν_{en} легко оценить из элементарных молекулярно-кинетических соображений. Длина свободного пробега частицы (не зависимо от ее заряда) в газе нейтральных атомов, как известно из курса общей физики, есть $l_0 = (\sigma_0 n_0)^{-1}$, где σ_0 – площадь эффективного поперечного сечения нейтральной частицы, а n_0 – средняя концентрация нейтральных частиц в плазме. Среднее время между столкновениями – величина обратная частоте столкновений – есть длина свободного пробега, деленная на среднюю относительную скорость сталкивающихся частиц. Поскольку тепловая скорость электронов значительно больше тепловой скорости нейтралов, относительная скорость по порядку величины есть V_T . Таким образом имеем

$$\nu_{en} = \frac{V_T}{l_0} \approx V_T \sigma_0 n_{0e}. \quad (1.39)$$

Частота столкновений электронов с заряженными частицами плазмы оценивается примерно также, но для определения средней длины свободного пробега элементарных молекулярно-кинетических соображений оказывается недостаточно – требуется использование теории интеграла столкновений Ландау (Л.Д. Ландау, 1936 г.). Соответствующее рассмотрение дает

$$l_e \approx \frac{(k_B T_e)^2}{4\pi e^4 n_{0e} L_K}, \quad (1.40)$$

откуда имеем

$$\nu_{ee} \approx \nu_{ei} \approx \frac{4\pi e^4 n_{0e} L_K}{(k_B T_e)^{3/2} m^{1/2}}, \quad (1.41)$$

где L_K – так называемый кулоновский логарифм, для типичной в плазменной электротехнике плазмы равный примерно десяти. Полная частота столкновений электрона в плазме есть

$$\nu_e = \nu_{en} + \nu_{ee} + \nu_{ei}. \quad (1.42)$$

Аналогичной формулой определяется и частота столкновений ионов.

Если кинетическое уравнение (1.36) с интегралом столкновений в правой части проинтегрировать по импульсам, то получится уравнение непрерывности – первое уравнение системы (1.21). Если же это уравнение сначала умножить на скорость \mathbf{v} , а затем проинтегрировать по импульсу \mathbf{p} , то получится гидродинамическое уравнение движения – второе уравнение системы (1.21), но содержащее дополнительную эффективную силу трения, обусловленную взаимодействием частиц одного сорта с частицами другого сорта. В результате получится следующая система уравнений многожидкостной холодной гидродинамики с учетом столкновений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \nabla(N_\alpha \mathbf{V}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{V}_\alpha \nabla) \mathbf{V}_\alpha &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{B}] \right\} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В случае слабоионизованной плазмы, когда определяющими являются столкновения заряженных частиц с нейтральными атомами, система (1.41) описывает динамику столкновительной плазмы не только качественно, но и количественно верно. Частоты столкновений при этом определяются либо формулами типа (1.39), либо устанавливаются на основе экспериментальных данных.

Учет столкновений в уравнениях многожидкостной гидродинамики изотропной плазмы с газокинетическим давлением (см. уравнения (1.23)) приводит к следующей системе:

$$\frac{\partial N_a}{\partial t} + \nabla(N_a \mathbf{V}_a) = 0, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + (\mathbf{V}_a \nabla) \mathbf{V}_a = -V_a^2 \frac{\nabla N_a}{N_a} + \frac{e_a}{m_a} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}_a \cdot \mathbf{B}] \right\} - \nu_a \mathbf{V}_a.$$

Очевидно, что столкновения можно учесть и в одножидкостной гидродинамике слабоионизованной неизотермической плазмы. Для этого необходимо соответствующим образом обобщить второе уравнение системы (1.33), что приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \nabla(N_i \mathbf{V}_i) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \nabla) \mathbf{V}_i = Z \frac{e}{M} \nabla \varphi - \nu_{in} \mathbf{V}_i, \quad (1.45)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{r_{D_e}^2} \varphi = -4\pi e (n_{0e} - Z N_i).$$

В дальнейшем при учете столкновений в плазме мы будем пользоваться одним из описаний, основанных на гидродинамических уравнениях (1.43), (1.44), и (1.45).

2. Электромагнитное поле в плазме

2.1. Уравнения Максвелла и граничные условия

Выше мы определили плазму как квазинейтральную систему заряженных частиц и показали, что специфические особенности плазмы проявляются, когда распределение зарядов в ней становится неоднородным, и возникают макроскопические электромагнитные поля. Электромагнитные поля в плазме могут создаваться, конечно, и внешними источниками. Существенно, что эти поля влияют на распределение и движение заряженных частиц в плазме, индуцируя в ней заряды и токи, которые сами создают электромагнитные поля, изменяя полное поле в системе. Происходит самосогласованное взаимодействие заряженных частиц плазмы и электромагнитного поля.

Уравнения электромагнитного поля в плазме с учетом индуцированных зарядов и токов, как и в любой материальной среде, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_0), \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь ρ_0 и \mathbf{j}_0 - плотности заряда и тока внешних источников, ρ и \mathbf{j} - плотности зарядов и токов, индуцированных в плазме, а \mathbf{E} и \mathbf{B} - напряженность электрического и индукция магнитного полей. Вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} определяют силу Лоренца, входящую в уравнения динамики плазмы (1.13), (1.21) и им подобные.

Уравнения поля (2.1) отличаются от уравнений поля в вакууме наличием индуцированных заряда ρ и тока \mathbf{j} . Эти величины не являются независимыми - они связаны между собой уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \tag{2.2}$$

являющимся следствием третьего и второго уравнений системы (2.1). При этом предполагается, что внешние источники ρ_0 и \mathbf{j}_0 также удовлетворяют аналогичному уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_0 = 0. \quad (2.3)$$

Плотности заряда и тока внешних источников ρ_0 и \mathbf{j}_0 считаются заданными функциями координат и времени, что же касается индуцированных величин ρ и \mathbf{j} , то они вычисляются с использованием той или иной конкретной модели плазмы. Так в модели кинетического уравнения с самосогласованным полем в бесстолкновительном пределе индуцированные плотности заряда и тока вычисляются по формулам (см. (1.14))

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d\mathbf{p}, \\ \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

в которых функция распределения f_{α} определяется из кинетического уравнения (1.13). В модели многожидкостной гидродинамики плазмы для вычисления ρ и \mathbf{j} используются следующие формулы (см. (1.22))

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha} \\ \rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} N_{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь N_{α} и \mathbf{V}_{α} определяются из квазигидродинамических уравнений (1.21) (см. также (1.43), (1.44), и (1.45)).

Соотношения типа (2.4) и (2.5) называют материальными уравнениями. Поскольку функции f_{α} , N_{α} и \mathbf{V}_{α} определяются из соответствующих уравнений динамики плазмы, содержащих вектора поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , то и индуцированные плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} являются функциями \mathbf{E} и \mathbf{B} . Следовательно, материальные уравнения типа (2.4) и (2.5) замыкают систему уравнений поля (2.1).

Перейдем к общей формулировке материальных уравнений. Используя уравнение непрерывности (2.2), плотность индуцированных зарядов ρ можно выразить через плотность тока \mathbf{j} . Следовательно, для замыкания уравнений поля достаточно одной векторной величины \mathbf{j} , выраженной через вектора \mathbf{E} и \mathbf{B} . Далее, используя первое уравнение системы (2.1), можно выразить индукцию

магнитного поля \mathbf{B} через напряженность электрического поля \mathbf{E} . В итоге материальное уравнение записывается в следующем общем виде

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

где $\hat{\sigma}$ - оператор проводимости. Для определения явного вида этого оператора требуется привлечение тех или иных конкретных моделей плазмы.

Можно объединить плотность индукционного тока \mathbf{j} с плотностью тока смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = (4\pi)^{-1} \partial \mathbf{E} / \partial t$. Для этого вводится вспомогательный вектор электрической индукции \mathbf{D} , определяемый соотношением

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 4\pi(\mathbf{j}_{\text{см}} + \mathbf{j}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \mathbf{j}. \quad (2.7)$$

Используя соотношение (2.7), уравнения поля (2.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi \rho_0, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Интегрируя (2.7) по времени и учитывая принцип причинности, вектор \mathbf{D} можно выразить в следующей форме:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j} dt' = \mathbf{E} + 4\pi \int_{-\infty}^t (\hat{\sigma} \mathbf{E}) dt' = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}. \quad (2.9)$$

В (2.9) использовано соотношение (2.6) и введен, связанный с оператором проводимости $\hat{\sigma}$, оператор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$. В общем случае оператор диэлектрической проницаемости (как и оператор проводимости) оказывается таким, что связь (2.9) (как и (2.6)) является нелинейной, нелокальной и тензорной, т.е. в общем случае формула (2.9) (как и формула (2.6)) подразумевает операцию значительно более сложную, чем простое умножение (см. далее). Соотношение (2.9) является наиболее принятой формой записи материального уравнения в электродинамике плазмы. Этой же формой материального уравнения удобно пользоваться и в плазменной электротехнике. В настоящем курсе лекций мы ограничимся линейным приближением, в рамках которого операторы $\hat{\sigma}$ и $\hat{\varepsilon}$ не зависят от напряженности самосогласованного поля \mathbf{E} (см.

следующий подраздел).

Уравнения поля (2.8) вместе с материальным уравнением (2.9) образуют полную систему уравнений, позволяющую в принципе решить любую задачу электродинамики плазмы и плазменной электротехники. Граничные условия к этой системе получаются путем интегрирования уравнений поля по физически бесконечно малому объему или физически бесконечно малому контуру, охватывающим границу раздела двух сред. В плазменной электротехнике приходится иметь дело с границами раздела плазма – вакуум, плазма – металл, вакуум – металл, граница между плазмами разной плотности и т.п. Процедура получения граничных условий из уравнений поля хорошо известна из курса электродинамики сплошных сред и здесь подробно не воспроизводится. Напомним только ряд важных для дальнейшего фактов и соотношений.

Вектора поля E и B как величины, имеющие непосредственный физический смысл (они определяют силу, действующую на заряд), являются ограниченными. Но на резких границах раздела сред они могут иметь разрывы, т.е. – обращаемые в бесконечность производные. Причиной разрывов производных векторов поля являются поверхностные (локализованные на границах раздела сред) заряды и токи. Из четвертого уравнения системы (2.1) следует непрерывность на границе раздела двух сред нормальной составляющей вектора магнитной индукции B :

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (2.10)$$

Из первого уравнения системы (2.1) следует непрерывность на границе раздела двух сред тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля E :

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (2.11)$$

Поскольку в металле, из-за очень большой (бесконечной) проводимости, электрическое поле равно нулю (иначе в металле текли бы бесконечно большие токи), то из (2.11) следует равенство нулю на границе металла тангенциальной составляющей вектора E .

Далее, из второго уравнения системы (2.1) следует условие на разрыв нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля E :

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_0),$$

$$\sigma = \lim_{l \rightarrow 2} \int_1^2 \rho dl, \quad \sigma_0 = \lim_{l \rightarrow 2} \int_1^2 \rho_0 dl, \quad (2.12)$$

где σ – поверхностная плотность индуцированных зарядов, а σ_0 – поверхностная плотность заряда внешнего источника. Интегрирование в (2.12) производится вдоль нормали к границе раздела сред так, что точка “1” находится в первой среде, а точка “2” – во второй. Из третьего уравнения системы (2.1) следует условие на разрыв тангенциальной составляющей вектора магнитной индукции B :

$$[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{i} + \mathbf{i}_0),$$

$$\mathbf{i} = \int_1^2 \mathbf{j} dl, \quad \mathbf{i}_0 = \int_1^2 \mathbf{j}_0 dl, \quad (2.13)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к границе раздела сред, направленный из первой среды во вторую, \mathbf{i} – поверхностная плотность индуцированного тока, а \mathbf{i}_0 – поверхностная плотность тока внешнего источника.

Вместо граничного условия (2.12) иногда удобнее использовать условие на разрыв нормальной составляющей вспомогательного вектора индукции электрического поля D . Оно следует из второго уравнения системы (2.8) и имеет вид

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_0, \quad (2.14)$$

где поверхностная плотность заряда внешнего источника определена в (2.12). Перечисленных граничных условий достаточно для решения любой задачи плазменной электротехники. Заметим, что граничное условие (2.13) можно записать в форме, аналогичной (2.14), т.е. исключив поверхностную плотность индуцированного тока \mathbf{i} . Но для этого потребуются введение вспомогательного вектора напряженности магнитного поля H , что в электродинамике плазмы и смежных разделах обычно не делают.

2.2. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы

Получим в линейном приближении явный вид материального уравнения (2.9) для случая холодной однородной столкновительной плазмы, помещенной в постоянное внешнее магнитное поле. Такая плазма представляет большой интерес для многих задач плазменной электротехники. Исходим из линеаризованного второго уравнения системы (1.43)

$$\frac{\partial \mathbf{V}_\alpha}{\partial t} - \Omega_\alpha [\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{b}_0] = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} - \nu_\alpha \mathbf{V}_\alpha, \quad (2.15)$$

а уравнение непрерывности (первое уравнение системы (1.43)) в линейном приближении вообще не требуется. Здесь $\Omega_\alpha = e_\alpha B_0 / m_\alpha c$ - циклотронная частота частицы сорта α , $B_0 \mathbf{b}_0$ - вектор индукции внешнего магнитного поля, а \mathbf{b}_0 - единичный вектор. Плотность тока индуцированного в плазме в линейном приближении вычисляется по формуле (см. (1.22))

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha N_{0\alpha} \mathbf{V}_\alpha, \quad (2.16)$$

где $N_{0\alpha}$ - невозмущенные плотности частиц сорта α .

Пусть напряженность электрического поля имеет вид плоской волны

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{E}^*(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})), \quad (2.17)$$

где ω - частота, а \mathbf{k} - волновой вектор. Функция $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ является образом Фурье от функции $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$. Часто $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ называют комплексной амплитудой соответствующей физической величины. В дальнейшем для комплексных амплитуд будем использовать те же обозначения, что и для самих физических величин. Из (2.15), (2.16) и (2.17) следует представление для плотности тока в плазме

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \mathbf{j}^*(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})), \quad \mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.18)$$

а комплексные амплитуды плотностей тока частиц сорта α определяются из следующих линейных алгебраических уравнений:

$$i(\omega + i\nu_\alpha) \mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) + \Omega_\alpha [\mathbf{j}_\alpha(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{b}_0] = -\frac{\omega_{p\alpha}^2}{4\pi} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.19)$$

Отсюда не сложно установить связь между комплексными амплитудами $\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k})$

и $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$.

Направим ось Z вдоль внешнего магнитного поля. При этом будет $\mathbf{b}_0 = \{0, 0, 1\}$, а уравнения (2.19) запишутся в виде (аргументы у комплексных амплитуд опускаем)

$$\begin{aligned} j_{\alpha x} &= i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2} [(\omega + i\nu_\alpha)E_x + i\Omega_\alpha E_y], \\ j_{\alpha y} &= i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2} [(\omega + i\nu_\alpha)E_y - i\Omega_\alpha E_x], \\ j_{\alpha z} &= i \frac{(4\pi)^{-1} \omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_\alpha)} E_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В итоге для комплексной амплитуды плотности полного тока в плазме имеем

$$\begin{aligned} j_i(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}), \quad i, j = x, y, z, \\ \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) & \sigma_{xy}(\omega, \mathbf{k}) & 0 \\ \sigma_{yx}(\omega, \mathbf{k}) & \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{k}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}(\omega, \mathbf{k}) \end{pmatrix}, \\ \sigma_{xx}(\omega, \mathbf{k}) &= \sigma_{yy}(\omega, \mathbf{k}) = (4\pi)^{-1} i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega + i\nu_\alpha)}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2}, \\ \sigma_{xy}(\omega, \mathbf{k}) &= -\sigma_{yx}(\omega, \mathbf{k}) = -(4\pi)^{-1} \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_\alpha}{(\omega + i\nu_\alpha)^2 - \Omega_\alpha^2}, \\ \sigma_{zz}(\omega, \mathbf{k}) &= (4\pi)^{-1} i \sum_\alpha \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega + i\nu_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Величины $\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ являются компонентами комплексного тензора проводимости плазмы. Не сложно показать, что они могут быть получены в результате преобразования Фурье оператора проводимости $\hat{\sigma}$.

Поскольку для вектора электрической индукции \mathbf{D} справедливо представление аналогичное (2.17) и (2.18), то из (2.9) следует соотношение

$$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.22)$$

где $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ - комплексный тензор диэлектрической проницаемости, а δ_{ij} - символ Кронекера. С учетом (2.21) и (2.22) имеем следующие выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости холодной магнитоактивной плазмы:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{yy}(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 (\omega + i\nu_{\alpha})}{\omega [(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \Omega_{\alpha}^2]}, \\
\varepsilon_{xy}(\omega, \mathbf{k}) = -\varepsilon_{yx}(\omega, \mathbf{k}) &= -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega [(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - \Omega_{\alpha}^2]}, \\
\varepsilon_{zz}(\omega, \mathbf{k}) &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_{\alpha})}, \\
\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Зависимость комплексных тензоров проводимости $\sigma_y(\omega, \mathbf{k})$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_y(\omega, \mathbf{k})$ от ω (временная дисперсия) и от \mathbf{k} (пространственная дисперсия) связана с тем, что операторы проводимости $\hat{\sigma}$ и диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ действуют на временную и пространственные координаты вектора $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$. Согласно формулам (2.21) и (2.23) в случае холодной плазмы реальная зависимость от волнового вектора отсутствует, т.е. пространственной дисперсии нет. Рассмотрим важный для дальнейшего пример плазмы с пространственной дисперсией, а именно – горячей столкновительной изотропной плазмы. Вычислим продольную и поперечную диэлектрические проницаемости такой плазмы.

Исходим из линеаризованных уравнений (1.44). Дифференцируя второе уравнение по времени t , подставляя в него производную $\partial N_{\alpha}/\partial t$ из первого уравнения и учитывая соотношение $\mathbf{j}_{\alpha} = e_{\alpha} N_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}$, получим следующее уравнение для плотности тока частиц сорта α :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{j}_{\alpha}}{\partial t^2} = V_{\alpha}^2 \nabla(\nabla \mathbf{j}_{\alpha}) + \frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nu_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{j}_{\alpha}}{\partial t}. \tag{2.24}$$

Учитывая далее (2.17) и (2.18), для комплексной амплитуды плотности тока имеем

$$\mathbf{j}_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = i \frac{\omega_{L\alpha}^2}{4\pi [\omega (\omega + i\nu_{\alpha}) - k^2 V_{\alpha}^2]} \left[\omega \mathbf{E}' + \omega \left(1 - \frac{k^2 V_{\alpha}^2}{\omega (\omega + i\nu_{\alpha})} \right) \mathbf{E}'' \right], \tag{2.25}$$

где \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' составляющие вектора \mathbf{E} вдоль вектора \mathbf{k} и поперек него соответственно. Первое слагаемое в (2.25) определяет составляющую тока параллельную вектору \mathbf{k} (так называемый продольный ток), а второе слагаемое – составляющую тока перпендикулярную \mathbf{k} (поперечный ток). Поэтому коэффициент

перед E^l в (2.25) есть продольная проводимость частиц сорта α , а коэффициент перед E^r есть поперечная проводимость. Учитывая далее общее соотношение (2.22) и производя суммирование по сортам частиц, получим следующие формулы для продольной и поперечной диэлектрических проницаемостей горячей изотропной плазмы:

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - k^2 V_{\alpha}^2}. \quad (2.26)$$

$$\varepsilon^r(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + i\nu_{\alpha})^2 - k^2 V_{\alpha}^2} \left(1 - \frac{k^2 V_{\alpha}^2}{\omega(\omega + i\nu_{\alpha})} \right). \quad (2.27)$$

Причем имеет место соотношение

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})E^l(\omega, \mathbf{k}) + \varepsilon^r(\omega, \mathbf{k})E^r(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.28)$$

Зависимость (2.26) и (2.27) от k означает наличие пространственной дисперсии, обусловленной тепловым движением заряженных частиц плазмы.

2.3 Потенциальное приближения

При определенных условиях электрическое поле в системе с хорошей точностью является продольным. Установим эти условия. Обозначим через L характерный пространственный, а через T характерный временной масштабы некоторого нестационарного электромагнитного процесса. Предположим, что $|E^r| \ll |E^l|$. Тогда не трудно видеть, что из первого и третьего уравнений системы (2.8) следуют оценки

$$|B| \sim \frac{L}{cT} |\mathcal{E}E^l|, \quad |E^r| \sim \left(\frac{L}{cT} \right)^2 |\mathcal{E}E^l|. \quad (2.29)$$

Действительно, по порядку величины $\partial A/\partial t \sim T^{-1}A$, а $\text{rot}A \sim L^{-1}A$, A - любой из векторов поля. Если выполнено сильное неравенство

$$\eta = \frac{L}{cT} \ll 1, \quad (2.30)$$

то в нулевом приближении по параметру (2.30) из уравнений поля (2.8) получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) &= 4\pi\rho_0, \end{aligned} \tag{2.31}$$

а переменное магнитное поле \mathbf{B} в нулевом приближении по параметру (2.30) равно нулю. Электрическое поле \mathbf{E} , определяемое из уравнений (2.31) является чисто продольным, или потенциальным. Нулевое приближение по параметру (2.30) получило название потенциального приближения. Неравенство (2.30) означает, что скорость переноса возмущений в системе мала по сравнению со скоростью света. В дальнейшем мы часто будем пользоваться потенциальным приближением при описании сравнительно медленных процессов в плазме.

Заметим, что уравнения (2.31) следуют из точных уравнений (2.8), если в последних пренебречь членами $\sim \eta^2$. Но из первой оценки (2.29) видно, что переменное магнитное поле имеет первый порядок по этому параметру. Таким образом, потенциальное приближение не означает автоматического пренебрежения переменным магнитным полем. Кроме того, определяя параметр (2.30), мы не учли диэлектрическую проницаемость, т.е. формально положили $|\varepsilon| \ll 1$. Обосновывая применимость потенциального приближения, диэлектрическую проницаемость следует учитывать в каждом конкретном случае отдельно.

Если, используя соотношение (1.26), ввести скалярный потенциал $\Phi(t, r)$, то первое уравнение в (2.31) удовлетворится автоматически, а второе уравнение перейдет в обобщенное уравнение Пуассона (см. (1.27))

$$\operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) = -4\pi\rho_0. \tag{2.32}$$

Если речь идет о волновых процессах, то $L \sim k^{-1}$, а $T \sim \omega^{-1}$. Тогда, неравенство (2.30) принимает вид

$$\omega/k \ll c. \tag{2.33}$$

Таким образом, условием применимости потенциального приближения является малость фазовой скорости волны $V_{ph} = \omega/k$ по сравнению со скоростью света. Как следует из неравенств (2.30) и (2.33) переход к потенциальному приближению можно осуществить, если в уравнениях электромагнитного поля формально устремить скорость света к бесконечности.

3. Волны в плазме

3.1. Волны в изотропной плазме

Наиболее эффективное поглощение энергии внешнего источника в плазме происходит на частотах близких к частотам электромагнитных плазменных волн. Поэтому изучение плазменных волн является важной задачей, краткому рассмотрению которой посвящен данный раздел курса. Начнем с волн в изотропной безграничной плазме.

Предварительно преобразуем систему уравнений поля (2.8), исключив из нее магнитную индукцию \mathbf{B} . Внешние источники поля считаем отсутствующими. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Для электромагнитных полей вида (2.17) система (3.1) переходит в следующую систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k})) &= 0, \\ [\mathbf{k} \cdot [\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})]] &= -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D}(\omega, \mathbf{k}).\end{aligned}\quad (3.2)$$

В случае изотропной плазмы имеет место соотношение (2.28). Тогда, учитывая, что $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^r) = 0$ и $[\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^l] = 0$, преобразуем уравнения (3.2) к виду

$$\begin{aligned}\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^l) &= 0, \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^r(\omega, \mathbf{k})\right) \mathbf{E}^r &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}^l.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Из (3.3) следует существование независимых решений двух типов. Первое решение $\mathbf{E}^l \neq 0$ и $\mathbf{E}^r = 0$ описывает продольные волны. Частоты продольных волн $\omega = \omega(\mathbf{k})$ определяются из дисперсионного уравнения

$$\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.4)$$

Второе решение $\mathbf{E}^r \neq 0$ и $\mathbf{E}^l = 0$ описывает поперечные волны. Дисперсионное уравнение для частот этих волн оказывается следующим:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^r(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (3.5)$$

Вычислим частотные спектры продольных волн. При этом ограничимся случаем бесстолкновительной ($\nu_a = 0$) электронно-ионной плазмы. Используя выражение (2.26), запишем дисперсионное уравнение (3.4) в виде

$$1 - \frac{\omega_L^2}{\omega^2 - k^2 V_e^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - k^2 V_e^2} = 0. \quad (3.6)$$

В высокочастотной области, при выполнении неравенства

$$\omega \gg kV_e, kV_i \quad (3.7)$$

тепловым движением частиц плазмы можно пренебречь. Тогда, из уравнения (3.6) имеем

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_L^2} \approx \omega_{Le}, \quad (3.8)$$

где учтено, что $\omega_{Le} \gg \omega_L$. Волны с частотой (3.8) называются ленгмюровскими волнами (или плазменными колебаниями) холодной плазмы (см. также (1.3)). Учитывая малость в уравнении (3.6) ионного вклада, не сложно учесть в спектре (3.8) поправку, обусловленную тепловым движением электронов плазмы

$$\omega = \sqrt{\omega_{Le}^2 + k^2 V_e^2}. \quad (3.9)$$

Формула (3.9) справедлива пока тепловая поправка kV_e мала по сравнению с электронной ленгмюровской частотой. В противном случае ленгмюровские волны сильно поглощаются из-за затухания Ландау – эффекта, который можно описать только методом кинетического уравнения Власова (см. подраздел 1.1).

В низкочастотной области, определяемой неравенствами

$$kV_e \gg \omega \gg kV_i, \quad (3.10)$$

можно пренебречь тепловым движением ионов. При этом из уравнения (3.6) имеем спектр ионнозвуковых волн

$$\omega = \omega_L \frac{kV_{Te}}{\sqrt{\omega_{Le}^2 + k^2 V_e^2}}. \quad (3.11)$$

Из (3.10) следует, что ионнозвуковые волны возможны только в сильно неизо-термической плазме, у которой $V_{Te} \gg V_{Ti}$. Ионнозвуковые волны (3.11) можно получить также и в модели одножидкостной гидродинамики неизо-термической

плазмы (см. подраздел 1.4).

Других типов продольных волн, кроме перечисленных, в изотропной безграничной плазме нет. Продольные волны являются потенциальными, но не потому, что выполнено условие (2.30) (или (2.33)). Полный ток (ток смещения плюс ток поляризации) в продольных волнах в изотропной безграничной плазме строго равен нулю, и поэтому равно нулю магнитное поле таких волн, что и обеспечивает безусловную применимость потенциального приближения.

Заметим, что в статическом пределе ($\omega \rightarrow 0$) дисперсионное уравнение (3.6) переходит в соотношение

$$k^2 + 1/r_D^2 = 0, \quad (3.12)$$

где r_D - дебаевский радиус (1.5) (при этом под $V_{\text{те}}$ следует понимать V_{Te}). Соотношение (3.12) описывает дебаевскую экранировку статического продольного поля в плазме (см. подраздел 1.1). Как видно из (3.12) статическое продольное поле проникает в плазму на глубину порядка r_D .

При рассмотрении поперечных волн можно пренебречь столкновениями, движением ионов и тепловым движением электронов. При этом из дисперсионного уравнения (3.5) и формулы (2.7) находим частоту поперечной электромагнитной (световой) волны в плазме

$$\omega = \sqrt{k^2 c^2 + \omega_{Te}^2}. \quad (3.13)$$

Высокочастотные волны (3.13) для плазменной электротехники большого интереса не представляют. Дело в том, что характерные электротехнические частоты обычно удовлетворяют условию (2.33), т.е. оказываются существенно меньшими частоты (3.13).

В статическом пределе ($\omega^2 \ll \omega_{Te}^2$) дисперсионное уравнение (3.5) сводится к соотношению

$$k^2 + \omega_{Te}^2/c^2 = 0, \quad (3.14)$$

описывающему экранировку низкочастотного поперечного поля в плазме: низкочастотное поперечное электромагнитное поле проникает в плазму на глубину порядка c/ω_{Te} .

Дисперсионные кривые волн в изотропной плазме изображены на Рис. 3.1; реальное соотношение между частотами ω_{Lz} и ω_{Lz} и между скоростями V_{π} и c не соблюдено; изображены также и асимптоты дисперсионных кривых.

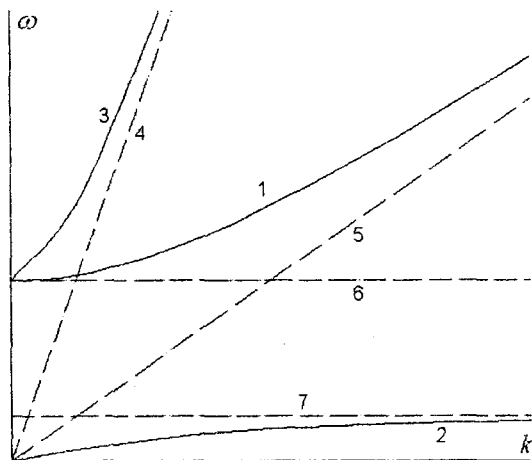


Рис. 3.1

Спектры волн в изотропной плазме: 1 – ленгмюровская волна (3.9),
2 – ионнозвуковая волна (3.11), 3 – поперечная волна (3.13),
4 – $\omega = kc$, 5 – $\omega = kV_{\pi}$, 6 – $\omega = \omega_{Lz}$, 7 – $\omega = \omega_{Lz}$

3.2. Волны в холодной магнитоактивной плазме

В плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, число различных ветвей собственных волн достаточно велико. Поэтому, ограничимся волнами наиболее важными для плазменной электротехники. При этом не будем учитывать столкновения и пренебрежем движением ионов. Тогда отличные от нуля компоненты тензора (2.23) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \equiv \varepsilon_{\perp}(\omega), \\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} &= -i \frac{\omega_{Lz}^2 \Omega_e}{\omega(\omega^2 - \Omega_e^2)} \equiv ig(\omega), \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega^2} \equiv \varepsilon_{\parallel}(\omega). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Начнем с волн, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля, т.е. вдоль оси Z . Плазму считаем безграничной. Полагая $\mathbf{k} = \{0, 0, k_z\}$ и учитывая материальное уравнение $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$, где тензор ε_{ij} определен в (3.15), получаем из (3.2) следующую систему:

$$\begin{aligned} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\omega) \right) E_x &= i \frac{\omega^2}{c^2} g(\omega) E_y, \\ \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\omega) \right) E_y &= -i \frac{\omega^2}{c^2} g(\omega) E_x, \\ \varepsilon_{\parallel}(\omega) E_z &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из (3.16) видно, что волны распадаются на продольные ($E_z \neq 0, E_x = E_y = 0$) и поперечные ($E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_z = 0$). Частоты продольных волн определяются из уравнения $\varepsilon_{\parallel}(\omega) = 0$, т.е. $\omega = \omega_{Lz}$; эти волны не отличаются от ленгмюровских волн (3.8) в изотропной плазме. Дисперсионное уравнение поперечных волн, как это следует из системы (3.16), имеет вид

$$k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\omega) = \pm \frac{\omega^2}{c^2} g(\omega) \rightarrow (\omega^2 - k_z^2 c^2)(\omega \mp \Omega_e) = \omega \omega_{Lz}^2, \quad (3.17)$$

причем двум знакам в (3.17) соответствуют два соотношения между компонентами комплексной амплитуды напряженности электрического поля

$$E_x/E_y = \pm i. \quad (3.18)$$

С учетом (2.17) соотношения (3.18) приводят к следующим выражениям для компонент напряженности электрического поля поперечных волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме вдоль внешнего магнитного поля:

$$E_x(t, z) = \pm A \sin(\omega t - k_z z + \phi), \quad E_y(t, z) = A \cos(\omega t - k_z z + \phi), \quad (3.19)$$

где A и ϕ постоянные. При $\omega > 0$ формулы (3.19) с верхним знаком описывают поле циркулярно поляризованной волны с плоскостью поляризации, вращающейся по часовой стрелке; те же формулы с нижним знаком описывают волну с противоположным направлением вращения плоскости поляризации. Волны, у которых направление вращения плоскости поляризации совпадает с направлением вращения электрона в магнитном поле, называют обыкновенными, а волны с противоположным направлением вращения плоскости поляризации - не-

обыкновенными.

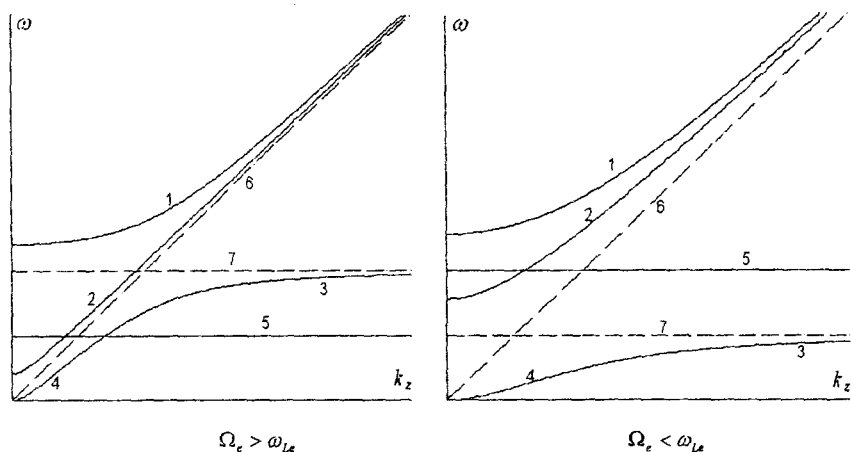


Рис. 3.2

Спектры волн холодной плазмы, распространяющихся вдоль внешнего магнитного поля: 1 – обыкновенная электромагнитная волна (3.20), 2 – необыкновенная электромагнитная волна (3.20), 3 – электронно-циклотронная волна (3.21), 4 – геликон (3.22), 5 – $\omega = \omega_{Lc}$, 6 – $\omega = kc$, 7 – $\omega = \Omega_e$.

При решении дисперсионного уравнения (3.17) для определенности считаем, что $\Omega_e > 0$). В области высоких частот из уравнения (3.17) имеем следующие спектры обыкновенной (верхний знак) и необыкновенной (нижний знак) высокочастотных электромагнитных волн:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{k_z^2 c^2 + \omega_{Lc}^2 \frac{k_z c}{k_z c \mp \Omega_e}}, & \omega_{Lc}^2 \ll k_z c |k_z c \mp \Omega_e|, \\ \sqrt{\omega_{Lc}^2 + \Omega_e^2 / 4 \pm \Omega_e / 2}, & k_z c \ll \omega, \end{cases} \quad (3.20)$$

Можно сказать, что волны (3.20) порождаются волной (3.13) измененной внешним магнитным полем. Это хорошо видно из сравнения верхних спектров (3.20) со спектром (3.13). В промежуточной области частот из (3.17) находим спектр обыкновенной электронно-циклотронной волны

$$\omega = \Omega_e + \Omega_e \frac{\omega_{Lc}^2}{\Omega_e^2 - k_z^2 c^2}, \quad \omega_{Lc}^2 \ll |\Omega_e^2 - k_z^2 c^2|. \quad (3.21)$$

Наконец, в низкочастотной области из (3.17) имеем спектр обыкновенной низ-

кочастотной волны, называемой геликоном

$$\omega = k_z^2 c^2 \frac{\Omega_e}{\omega_{Le}^2}, \quad k_z^2 c^2 \ll \omega_{Le}^2. \quad (3.22)$$

Низкочастотные волны электронно-циклотронная и геликон представляют значительный интерес для плазменной электротехники. Характерные дисперсионные кривые поперечных и продольной волн распространяющихся в холодной магнитоактивной плазме вдоль внешнего магнитного поля приведены на Рис. 3.2.

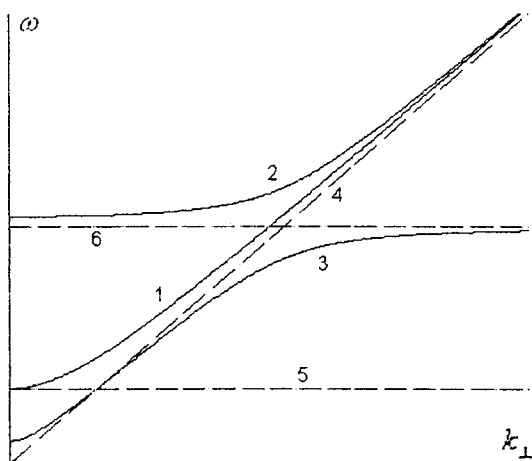


Рис. 3.3

Спектры волн холодной плазмы, распространяющихся поперек внешнего магнитного поля: 1 – поперечная электромагнитная волна В-типа, 2 – продольно-поперечная электромагнитная волна Е-типа, 3 – циклотронная волна Е-типа, 4 – $\omega = kc$, 5 – $\omega = \omega_{Le}$, 6 – $\omega = \Omega_g$

Рассмотрим теперь волны, распространяющиеся перпендикулярно к внешнему магнитному полю (Рис. 3.3). Полагая $\mathbf{k} = \{k_\perp, 0, 0\}$ и учитывая материальное уравнение $D_i = \epsilon_{ij} E_j$, где тензор ϵ_{ij} определен в (3.15), получаем из (3.2) следующую систему:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\perp}(\omega)E_x + ig(\omega)E_y &= 0, \\
\left(k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}(\omega)\right)E_y &= -i \frac{\omega^2}{c^2} g(\omega)E_x, \\
\left(k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel}(\omega)\right)E_z &= 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Исследуемые волны распадаются на чисто поперечную волну B -типа ($E_z \neq 0, E_x = E_y = 0$), спектр которой описывается формулой (3.13), т.е. является таким же, как и в отсутствие магнитного поля (потому что в этой волне $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$). Первые два уравнения системы (3.23) определяют продольно-поперечную волну E -типа ($E_x \neq 0, E_y \neq 0, E_z = 0$), дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{\perp}^2(\omega) - g^2(\omega)}{\varepsilon_{\parallel}(\omega)} = 0 \rightarrow (\omega^2 - \omega_{Lx}^2)^2 - \omega^2 \Omega_g^2 = k_{\perp}^2 c^2 (\omega^2 - \Omega_g^2), \tag{3.24}$$

где $\Omega_g = \sqrt{\omega_{Lx}^2 + \Omega_z^2}$ - верхняя гибридная частота^(*). При $k_{\perp}^2 c^2 \ll \Omega_g^2$ частоты волн даются нижними формулами (3.20), а в противоположном пределе одна из частот (меньшая) выходит на Ω_g , а вторая частота стремится к $k_{\perp} c$. Характерные дисперсионные кривые поперечной и продольно-поперечных волн распространяющихся в холодной магнитоактивной плазме поперек внешнего магнитного поля приведены на Рис. 3.3. Заметим, что дисперсионное уравнение (3.24) имеет еще корень $\omega = 0$, который соответствует геликону (3.22) (см. далее формулу (3.33)).

Рассмотрение волн распространяющихся под произвольным углом к внешнему магнитному полю начнем с важного предельного случая сильного внешнего магнитного поля ($\omega_{Lx}^2 \ll \Omega_z^2, \omega^2 \ll \Omega_z^2$), когда в тензоре (3.15) можно положить $\varepsilon_{\perp} = 1$ и $g = 0$. Этот предел называют также случаем полностью замагниченной плазмы. Положим $\mathbf{k} = \{k_{\perp}, 0, k_{\parallel}\}$. При этом для случая полностью замагниченной плазмы уравнения (3.2) преобразуются к следующей системе од-

(*) Согласно принятой в высокочастотной электродинамике терминологии волна называется волной B -типа, если в этой волне вектор напряженности электрического поля перпендикулярен направлению распространения волны, т.е. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$. Если же проекция вектора напряженности электрического поля на направление распространения волны отлична от нуля ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \neq 0$), то волну называют волной E -типа.

родных линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_y &= 0, \\ \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_x - k_{\perp} k_z E_z &= 0, \\ \left(k_{\perp}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1(\omega)\right) E_z - k_{\perp} k_z E_x &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2$. Видно, что волны в полностью замагниченной плазме распадаются на волну B -типа, у которой $E_y \neq 0, E_x = E_z = 0$, и на волну E -типа, у которой $E_x \neq 0, E_z \neq 0, E_y = 0$. У волны B -типа вектор \mathbf{E} перпендикулярен вектору индукции сильного внешнего магнитного поля, полностью исключаяющего поперечные движения электронов. Для этой волны наличие плазмы не существенно, поэтому ее частота $\omega = kc$ оказывается такой же, как у электромагнитной волны в вакууме.

Дисперсионное уравнение для волны E -типа следует из второго и третьего уравнений системы (3.25) и имеет вид

$$k_{\perp}^2 + \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2}\right) = 0. \quad (3.26)$$

Решения уравнения (3.26) определяются формулами

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left((k_{\perp}^2 + k_z^2) c^2 + \omega_{Le}^2 \pm \sqrt{[(k_{\perp}^2 + k_z^2) c^2 + \omega_{Le}^2]^2 - 4k_z^2 c^2 \omega_{Le}^2} \right). \quad (3.27)$$

Высокочастотное решение (верхний знак в (3.27)) описывает обычную электромагнитную (световую) волну в плазме типа волны (3.13). Значительно более важным для плазменной электротехники является низкочастотное решение (нижний знак в (3.27)), определяющее так называемую «косую» ленгмюровскую волну в анизотропной плазме. Для частоты этой волны из (3.27) имеем следующее приближенное выражение:

$$\omega = \frac{\omega_{Le} k_z c}{\sqrt{(k_{\perp}^2 + k_z^2) c^2 + \omega_{Le}^2}}, \quad (3.28)$$

применимое как при $k_{\perp} c \ll \omega_{Le}$, так и в противоположном пределе (при этом

должно быть $k_{\perp} \neq 0$). Дисперсионные кривые волн в полностью замагниченной плазме, построенные по формуле (3.27) со знаком минус, представлены на Рис. 3.4.

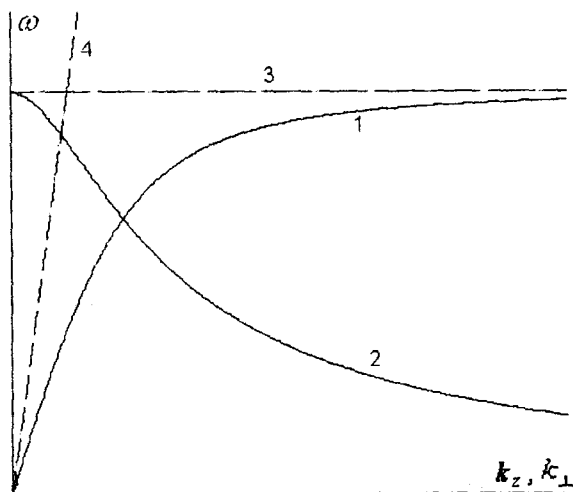


Рис. 3.4

Частота косой ленгмюровской волны в полностью замагниченной плазме:
 1 — в зависимости от k_z при $k_{\perp} = \text{const}$, 2 — в зависимости от k_{\perp} при $k_z = \text{const}$,
 3 — $\omega = \omega_{Lz}$, 4 — $\omega = kc$

На примере косой ленгмюровской волны продемонстрируем применение потенциального приближения. При выполнении неравенства (2.33) дисперсионное уравнение (3.26) существенно упрощается, и его решение записывается в виде

$$\omega = \omega_{Lz} \frac{k_z}{\sqrt{k_{\perp}^2 + k_z^2}}. \quad (3.29)$$

Формула (3.29) получается из (3.28), если в последней формально устремить скорость света к бесконечности. Из уравнения (3.26) и формулы (3.29) видно, что в данном конкретном случае неравенство (2.33) сводится к следующему:

$$\omega_{Lz}/k_{\perp} \ll c. \quad (3.30)$$

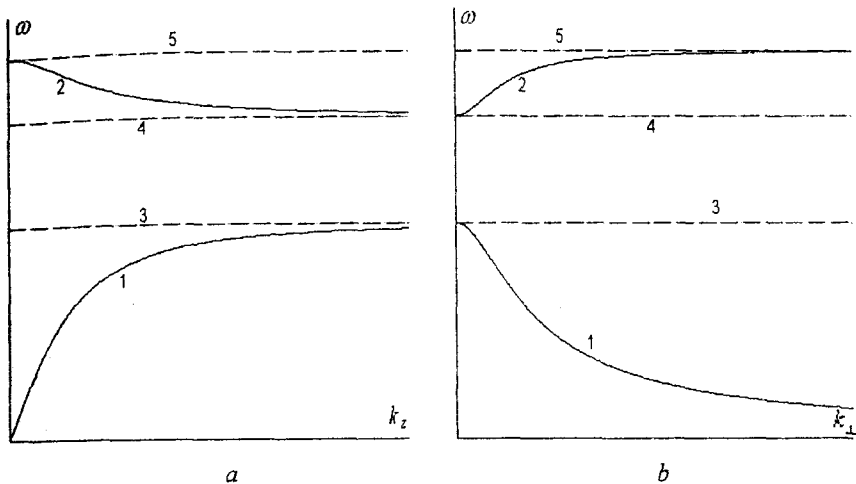


Рис. 3.5

Спектры потенциальных волн в магнитоактивной плазме: а – в зависимости от k_z при $k_{\perp} = \text{const}$, б – в зависимости от k_{\perp} при $k_z = \text{const}$; 1 – косая ленгмювская волна, 2 – косая циклотронная волна, 3 – $\omega = \omega_{Lz}$, 4 – $\omega = \Omega_e$, 5 – $\omega = \Omega_g$

Рассмотрим еще в потенциальном приближении плазменные волны, распространяющиеся под произвольным углом к произвольному внешнему магнитному полю. Расписывая в уравнении (2.32) выражение $\mathbf{\epsilon} \text{ grad } \Phi$ по компонентам $\epsilon_{ij} k_j \Phi$, получим дисперсионное уравнение $k_i k_j \epsilon_{ij}(\omega) = 0$, где по дважды повторяющемуся индексу производится суммирование. С учетом выражений (3.15) последнее уравнение записывается в виде

$$k_{\perp}^2 \left(1 - \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \right) + k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega^2} \right) = 0. \quad (3.31)$$

В длинноволновом пределе решения уравнения (3.31) определяются следующими приближенными формулами:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_{Lz}^2 \frac{k_z^2 \Omega_e^2}{k_{\perp}^2 \Omega_g^2}, & k_z^2 \omega_{Lz}^2 \ll k_{\perp}^2 \Omega_g^2, \\ \omega^2 &= \Omega_g^2 - \omega_{Lz}^2 \frac{k_z^2 \Omega_e^2}{k_{\perp}^2 \Omega_g^2}, & k_z^2 \omega_{Lz}^2 \Omega_e^2 \ll k_{\perp}^2 \Omega_g^4. \end{aligned} \quad (3.32a)$$

Первая формула (3.32а) описывает дисперсию «косой» ленгмюровской волны, а второе – «косой» циклотронной волны. В коротковолновом пределе частоты волн определяются формулами

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \omega_{Le}^2 + \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}{\omega_{Le}^2 - \Omega_e^2}, \\ \omega^2 &= \Omega_e^2 + \frac{k_{\perp}^2}{k_z^2} \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega_{Le}^2}.\end{aligned}\tag{3.32б}$$

Характерные дисперсионные кривые «косых» потенциальных волн в магнитоактивной плазме приведены на Рис. 3.5.

В заключение приведем без вывода важное для дальнейшего приближенное выражение для частоты низкочастотной ($\omega \ll \omega_{Le}, \Omega_e$) непотенциальной плазменной волны, распространяющейся под углом к внешнему магнитному полю

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 k_z^2 c^2 (k_z^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2)}{(\omega_{Le}^2 + k_{\perp}^2 c^2)(k_z^2 c^2 \Omega_e^2 + \omega_{Le}^4)}.\tag{3.33}$$

Из формулы (3.33) в соответствующих предельных случаях получаются более простые спектры (3.22), (3.28) и первый спектр (3.32а).

3.3. Поверхностные волны

До сих пор мы исследовали волны в безграничной однородной плазме. Волны в такой плазме существуют во всем ее объеме, т.е. являются объемными волнами. С наличием у плазмы границ связан еще один тип волн, называемых поверхностными волнами. Рассмотрим их в потенциальном приближении на примере изотропной холодной электронной плазмы без столкновений. При неоднородной плотности плазмы ее продольную диэлектрическую проницаемость следует взять в виде $\varepsilon'(\omega, \mathbf{r}) = 1 - \omega_{Le}^2(\mathbf{r})/\omega^2$. Тогда уравнение Пуассона (2.32) запишется следующим образом (при $\rho_0 = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\varepsilon'(\omega, \mathbf{r}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right) = 0.\tag{3.34}$$

Пусть плотность плазмы зависит от координаты x . В этом случае потен-

циал волны, распространяющейся в направлении оси Z имеет вид

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = \Phi(\omega, x) \exp(-i\omega t + ik_z z). \quad (3.35)$$

Подставляя (3.35) в уравнение (3.34), находим следующее уравнение для неоднородной комплексной амплитуды $\Phi(\omega, x)$:

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{\omega_{ix}^2(x)}{\omega^2} \right) \frac{d\Phi}{dx} \right] - k_z^2 \left(1 - \frac{\omega_{ix}^2(x)}{\omega^2} \right) \Phi = 0. \quad (3.36)$$

Пусть однородная плазма занимает полупространство $x \geq 0$, область $x < 0$ вакуумная, а граница плазмы $x = 0$ резкая. При этом во всем пространстве за исключением границы плазмы уравнение (3.36) записывается в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - k_z^2\Phi = 0, \quad (3.37)$$

а его ограниченное на бесконечности решение определяется формулой

$$\Phi = \begin{cases} A \exp(k_z x), & x < 0 \\ B \exp(-k_z x), & x > 0 \end{cases}, \quad (3.38)$$

где A и B - постоянные.

На границе плазмы, в точке разрыва функции $\varepsilon'(\omega, x)$, уравнение (3.36) не применимо. Его заменяют условия сшивки потенциала

$$\{\Phi\}_{x=0} = 0, \quad \left\{ \left(1 - \frac{\omega_{ix}^2(x)}{\omega^2} \right) \frac{d\Phi}{dx} \right\}_{x=0} = 0, \quad (3.39)$$

где $\{f\}_{x=0} = f(x+0) - f(x-0)$. Первое условие (3.39) следует из того, что величина $E_x = -d\Phi/dx$ должна быть конечной, второе условие получается из уравнения (3.36) интегрированием по бесконечно малой окрестности точки $x = 0^{(*)}$. Подставляя решение (3.38) в условия (3.39), получаем следующую систему алгебраических уравнений для определения постоянных A и B :

$$\begin{aligned} A - B &= 0, \\ A + \varepsilon'(\omega)(1 - \omega_{ix}^2/\omega^2)B &= 0, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $\varepsilon'(\omega) = (1 - \omega_{ix}^2/\omega^2)$, а через $\omega_{ix} = \text{const}$ обозначена электронная ленгмюровская частота плазмы в области $x > 0$.

(*) Первое условие (3.39) очевидно следует из (2.11), а второе условие (3.39) можно получить из общего граничного условия (2.14).

Из системы (3.40) получается дисперсионное уравнение $1 + \varepsilon'(\omega) = 0$, из которого следует выражение для частоты волны

$$\omega = \omega_{Lz} / \sqrt{2}. \quad (3.41)$$

Структура электрического поля волны определяется при $A = B$ из формулы (3.38) и имеет вид

$$E_z = iE_0 \begin{cases} \exp(k_z x), & x < 0 \\ \exp(-k_z x), & x > 0 \end{cases}, \quad E_x = E_0 \begin{cases} \exp(k_z x), & x < 0 \\ -\exp(-k_z x), & x > 0 \end{cases}, \quad (3.42)$$

где E_0 - постоянная. Поле (3.42) экспоненциально затухает в обе стороны от границы плазмы. Поэтому волна (3.41) является поверхностной. В области $x > 0$ уравнение (3.36) удовлетворяется также, если $\varepsilon'(\omega) = 0$. Поэтому в рассматриваемой плазме кроме поверхностной волны существует и обычная объемная ленгмюровская волна с частотой $\omega = \omega_{Lz}$.

Более важными для плазменной электротехники являются поверхностные волны в слое плазмы, заключенном между проводящими плоскостями, параллельными слою - плазменный конденсатор. Пусть проводящие плоскости расположены при $x = -\Delta$ и $x = L + \Delta$, однородная плазма занимает область $0 \leq x \leq L$. В каждой из трех областей $(-\Delta, 0)$, $(0, L)$ и $(L, L + \Delta)$ решения уравнения (3.37) записываются в виде $\Phi = A_s \exp(k_s x) + B_s \exp(-k_s x)$, где s - номер области. Подставляя эти решения в условия сшивки (3.39), учитывая, что на проводящих плоскостях потенциал равен нулю и исключая постоянные A_s и B_s , не сложно получить следующее дисперсионное уравнение поверхностных волн рассматриваемого плазменного слоя:

$$\frac{1 + \varepsilon'(\omega) \operatorname{th}(k_z \Delta)}{1 - \varepsilon'(\omega) \operatorname{th}(k_z \Delta)} = \pm \exp(-k_z L). \quad (3.43)$$

Наличие в уравнении (3.43) двух знаков свидетельствует о том, что в плазменном слое имеются две поверхностные волны, что связано с наличием двух границ плазмы.

Оба решения уравнения (3.43) определяются формулами

$$\omega = \omega_{Lz} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{th}(k_z \Delta)} \frac{1 \mp \exp(-k_z L)}{1 \pm \exp(-k_z L)} \right)^{-1/2}. \quad (3.44)$$

При $k_z L, k_z \Delta \gg 1$ решения (3.44) переходят в спектр (3.41). В противоположном пределе из (3.44) имеем два выражения для частот поверхностных волн

$$\omega = \omega_{Lz} \sqrt{\frac{2\Delta}{L + 2\Delta}}, \quad \omega = \omega_{Lz} k_z \sqrt{\frac{\Delta L}{2}}. \quad (3.45)$$

Для нас наибольший интерес представляет первый из корней (3.45), который, сводя величины $d = L + 2\Delta$ - расстояние между обкладками конденсатора и $d_0 = 2\Delta$ - общий размер вакуумного зазора, запишем в виде

$$\omega = \omega_{Lz} \sqrt{d_0/d} \equiv \omega_{Ge}, \quad (3.46)$$

где ω_{Ge} - так называемая геометрическая плазменная частота. Поскольку в плазменном слое есть еще объемная волна с частотой ω_{Lz} , можно утверждать: плазменный конденсатор имеет две собственные частоты ω_{Ge} и ω_{Lz} .

Поверхностные волны имеются и в том случае, когда граница плазмы не является резкой. Правда при этом поверхностные волны становятся затухающими. Рассмотрим опять плазменное полупространство, но предположим, что в области $0 < x < l$ электронная ленгмюровская частота монотонно возрастает от нуля до ω_{Lz} . В областях $x < 0$ и $x > l$ решения уравнения (3.36), сводящегося к (3.37), по-прежнему даются формулами (3.38). Решая уравнение (3.36) в области плазменной границы, ограничимся длинноволновым пределом $k_z l \ll 1$. При этом в уравнении (3.36) можно отбросить недифференциальный член и в результате получить следующее решение:

$$\Phi = C_1 \int_0^x \frac{dx'}{\omega^2 - \omega_{Lz}^2(x')} + C_2, \quad (3.47)$$

где $C_{1,2}$ - постоянные. Поскольку уравнение (3.36) справедливо при всех x , потенциал Φ и его производная $d\Phi/dx$ непрерывны при $x = 0, l$. Подставляя решения (3.38) и (3.47) в соответствующие условия непрерывности, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{2\omega^2 - \omega_{Le}^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{Le}^2)} + k_z l \int_0^l \frac{dx}{\omega^2 - \omega_{Le}^2(x)} = 0. \quad (3.48)$$

При $l = 0$, т.е. для плазмы с резкой границей, из уравнения (3.48) следует спектр (3.41).

Положим $\omega_{Le}^2(x) = (x/l)\omega_{Le}^2$. Тогда дисперсионное уравнение (3.48) преобразуется к виду

$$\frac{2\omega^2/\omega_{Le}^2 - 1}{\omega^2/\omega_{Le}^2(1 - \omega^2/\omega_{Le}^2)} + k_z l \int_0^1 \frac{dy}{y - \omega^2/\omega_{Le}^2} = 0. \quad (3.49)$$

Проблема вычисления интеграла в (3.49) требует отдельного обсуждения, поскольку выражение под интегралом имеет особую точку $y = \omega^2/\omega_{Le}^2$. При выводе дисперсионного уравнения (3.49) возмущения в плазме брались пропорциональными $\exp(-i\omega t)$. Поскольку при $t \rightarrow -\infty$ возмущения отсутствуют (принцип причинности), то у частоты ω имеется положительная мнимая часть, т.е. особая точка расположена выше контура интегрирования – отрезка $[0, 1]$ оси y . Тогда вычисление интеграла дает

$$\int_0^1 \frac{dy}{y - \omega^2/\omega_{Le}^2} = \ln(1 - \omega^2/\omega_{Le}^2) - \ln(-\omega^2/\omega_{Le}^2) = \ln \frac{1 - \omega^2/\omega_{Le}^2}{\omega^2/\omega_{Le}^2} + i\pi, \quad (3.50)$$

где учтено соотношение $\ln(-z) = \ln(z) - i\pi \operatorname{sign}(\operatorname{Im} z)$. С другой стороны, как решение дисперсионного уравнения (3.49), частота ω может иметь только отрицательную мнимую часть (в равновесной системе колебания со временем должны затухать). Поэтому результат (3.50) необходимо аналитически продолжить из верхней полуплоскости комплексной плоскости ω на нижнюю полуплоскость. Делается это путем деформации контура интегрирования так, что он всегда обходит особую точку снизу (правило Ландау). Не сложно показать, что аналитическое продолжение интеграла по-прежнему дается формулой (3.50). В итоге для всей комплексной плоскости ω дисперсионное уравнение (3.49) записывается в виде

$$\frac{2\omega^2/\omega_{Le}^2 - 1}{\omega^2/\omega_{Le}^2(1 - \omega^2/\omega_{Le}^2)} + k_z l \left(\ln \frac{1 - \omega^2/\omega_{Le}^2}{\omega^2/\omega_{Le}^2} + i\pi \right) = 0. \quad (3.51)$$

Откуда при $k_z l \ll 1$ для комплексной частоты поверхностной волны получаем

выражение

$$\omega = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2}} - i \frac{\pi}{4} \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{2}} k_z l. \quad (3.52)$$

Декремент затухания поверхностной волны дается мнимой частью частоты (3.52). Физический механизм этого затухания состоит в следующем. В неоднородной плазме спектр ленгмюровских волн является локальным $\omega = \omega_{pe}(x)$, т.е. в каждой точке колебания происходят на своей частоте. При совпадении частоты (3.41) с плазменной частотой в какой-то точке x происходит резонансное возбуждение в этой точке локальной ленгмюровской волны (плазменный резонанс). На это затрачивается энергия поверхностной волны, что и приводит к ее затуханию. Подчеркнем, что такое затухание не связано со столкновениями электронов плазмы.

3.4. Некоторые сведения о плазменных волноводах

В предыдущем подразделе мы уже имели дело с плазменным волноводом. Действительно, плоский слой плазмы, заключенный между двумя проводящими плоскостями, является простейшей моделью плазменной волноводной структуры. Не менее важными для плазменной электротехники являются осесимметричные цилиндрические волноводы. Общая теории таких систем достаточно сложна. Поэтому мы остановимся здесь только на тех вопросах, которые представляют интерес для дальнейшего.

Рассмотрим однородный плазменный цилиндр радиуса r_p в магнитном поле направленном вдоль оси цилиндра (ось Z), помещенный в проводящий цилиндрический кожух радиуса $R \geq r_p$. В потенциальном приближении электродинамические свойства плазменного цилиндра описываются уравнением (см. уравнение (2.32))

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\varepsilon_{\perp}(\omega, r) \frac{d\Phi}{dr} \right) - k_z^2 \varepsilon_{\parallel}(\omega, r) \Phi = 0. \quad (3.53)$$

Здесь $\Phi(\omega, r)$ - комплексная амплитуда скалярного потенциала, r - цилиндрическая координата, а $\varepsilon_{\perp}(\omega, r)$ и $\varepsilon_{\parallel}(\omega, r)$ определены формулами (3.15), в которых

ω_{Lz}^2 является функцией r , причем

$$\omega_{Lz}^2(r) = \begin{cases} \omega_{Lz}^2 = \text{const}, & r \leq r_p \\ 0, & r > r_p \end{cases} \quad (3.54)$$

Граничные условия для уравнения (3.53) следуют из (2.11) и (2.14) и имеют вид (см. также (3.39))

$$\{\Phi(r)\}_r = 0, \quad \left\{ \varepsilon_{\perp}(\omega, r) \frac{d\Phi(r)}{dr} \right\}_r = 0, \quad \Phi(R) = 0. \quad (3.55)$$

Ограниченное в нуле решение уравнения (3.53) имеет вид

$$\Phi = \begin{cases} A I_0(k_z \sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} r), & r < r_p \\ B I_0(k_z r) + C K_0(k_z r), & r > r_p \end{cases}, \quad (3.56)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ - функции Инфельда и Макдональда соответственно. Подставляя (3.56) в граничные условия (3.55) и исключая постоянные A, B и C , получаем следующее дисперсионное уравнение для спектров частот потенциальных волн плазменного волновода:

$$\varepsilon_{\perp} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \frac{I_1(k_z \sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} r_p)}{I_0(k_z \sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} r_p)} = \frac{I_1(k_z r_p) K_0(k_z R) + K_1(k_z r_p) I_0(k_z R)}{I_0(k_z r_p) K_0(k_z R) - K_0(k_z r_p) I_0(k_z R)}. \quad (3.57)$$

В случае волновода полностью заполненного плазмой $r_p = R$ и дисперсионное уравнение (3.57) переходит в следующее:

$$I_0(k_z \sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} R) = 0. \quad (3.58)$$

Последнее уравнение имеет решение только при выполнении неравенства $\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp} < 0$, что есть условие существования в плазме объемных волн. При этом из уравнения (3.58) следует соотношение

$$k_{\perp}^2 \varepsilon_{\perp} + k_z^2 \varepsilon_{\parallel} = 0, \quad k_{\perp} = \frac{\mu_{0s}}{R}, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.59)$$

где μ_{0s} - корни уравнения $J_0(x) = 0$, а $J_0(x)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Соотношение (3.59) совпадает с дисперсионным уравнением объемных волн (3.31), но в отличие от последнего величины k_{\perp} в нем не произвольные числа, определяются радиусом волновода. В остальном же все, что говорилось об объемных волнах в безграничной плазме (см. (3.32а), (3.32б) и Рис. 3.5) имеет ме

сто и в волноводе.

Дисперсионное уравнение вида (3.59) сохраняется и при $r_p < R$, только величина k_{\perp} в этом случае будет функцией k_{\parallel} . Уточнять эту величину в рамках данного курса нет необходимости. Важно, что объемные косые ленгмюровские и циклотронные волны типа (3.32а) и (3.32б) существуют и в плазменном цилиндре со свободной поверхностью.

В случае $r_p < R$ дисперсионное уравнение (3.57) описывает также и поверхностные волны. Область частот, в которой существуют эти волны определяется неравенством

$$\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp} > 0 \rightarrow \frac{(\omega^2 - \omega_{Le}^2)(\omega^2 - \Omega_e^2)}{\omega^2(\omega^2 - \Omega_e^2)}. \quad (3.60)$$

Неравенству (3.60) удовлетворяют частоты из диапазона

$$\Omega_e < \omega < \omega_{Le}, \quad (3.61)$$

в котором только и возможны поверхностные волны. Заметим, что неравенство (3.60) выполнено и при $\omega_{Le} < \omega < \Omega_e$, но при $\Omega_e > \omega_{Le}$ в этом частотном диапазоне у уравнения (3.57) вообще нет решений.

Считая неравенство (3.61) выполненным, проанализируем дисперсионное уравнение (3.57). При $k_{\parallel} r_p \gg 1$, используя асимптотики функций $I_0(x)$ и $K_0(x)$ при большом значении аргумента, преобразуем уравнение (3.57) к виду $\varepsilon_{\perp} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}/\varepsilon_{\perp}} = -1$. Откуда, с учетом (3.61), имеем следующий спектр:

$$\omega = \Omega_e / \sqrt{2} = \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)/2}. \quad (3.62)$$

При выполнении неравенства $k_{\parallel} R \ll 1$, используя асимптотики функций $I_0(x)$ и $K_0(x)$ при малом значении аргумента, дисперсионное уравнение (3.57) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\parallel} k_{\parallel}^2 r_p^2 \ln \frac{R}{r_p} + 1 = 0. \quad (3.63)$$

Из уравнения (3.63), с учетом неравенства $k_{\parallel} r_p \ll 1$, получаем следующее выражение для частоты:

$$\omega = \frac{\omega_{Lz}}{\sqrt{2}} k_z r_p \sqrt{\ln \frac{R}{r_p}}. \quad (3.64)$$

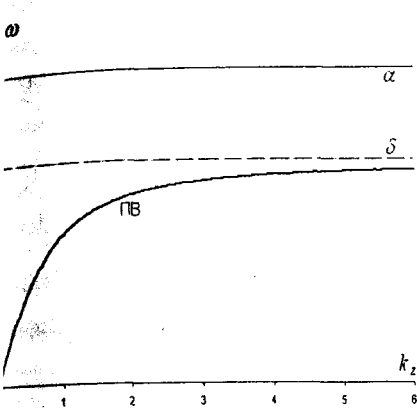
Как видим в длинноволновой части спектра частота не зависит от электронной циклотронной частоты Ω_e . Однако, если частота (3.64) меньше Ω_e , она определяет не поверхностную волну, а объемную. Структура потенциала электрического поля волны (3.64) определяется формулой

$$\Phi(r) = A \begin{cases} 1, & r < r_p \\ \ln(R/r)/\ln(R/r_p), & r > r_p \end{cases}, \quad (3.65)$$

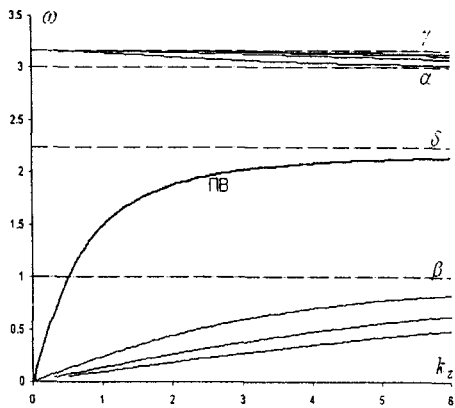
получающейся из (3.56) при $k_z R \ll 1$. Условие применимости формул (3.64) и (3.65), вместе с условием применимости потенциального приближения (2.33), имеют вид

$$k_z r_p \ln(R/r_p) \ll 1, \quad r_p \ln(R/r_p) \ll c/\omega_{Lz}. \quad (3.66)$$

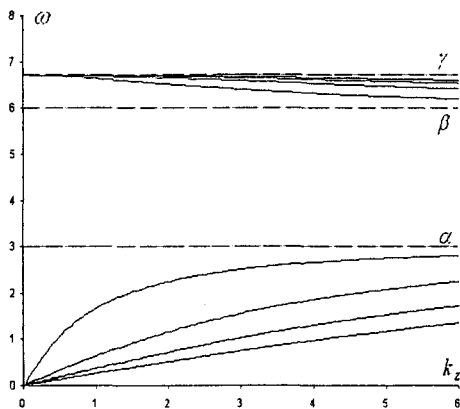
Спектры частот потенциальных волн плазменного волновода при $\omega_{Lz} = 3 \cdot 10^{10}$ рад/с, $R = 3$ см, $r_p = 1$ см и при различных Ω_e представлены на Рис. 3.6. В случае Рис. 3.6а $\Omega_e = 0$, при этом имеется только поверхностная волна (3.64) – (3.62), а также объемная ленгмюровская волна $\omega = \omega_{Lz}$. При $\Omega_e = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с $< \omega_{Lz}$ (Рис. 3.6б) помимо поверхностной волны (3.64) – (3.62) имеются объемные «косые» ленгмюровские волны (в области $\omega < \Omega_e$) и объемные «косые» циклотронные волны (в области $\omega_{Lz} < \omega < \Omega_e$). Волна (3.64) – (3.62) является собственно поверхностной только при $\Omega_e < \omega < \Omega_e / \sqrt{2}$, а при $\omega < \Omega_e$ она переходит в объемную волны. Наконец, при $\Omega_e = 6 \cdot 10^{10}$ рад/с $> \omega_{Lz}$ (Рис. 3.6в) имеются только «косые» объемные волны.



а



б



в

Рис. 3.6

Спектры потенциальных волн плазменного цилиндра в волноводе: ПВ – поверхностная волна, α - $\omega = \omega_{pe}$, β - $\omega = \Omega_e$, γ - $\omega = \Omega_g$, δ - $\omega = \Omega_g / \sqrt{2}$.

а: $\Omega_e = 0$; б: $\Omega_e = 1 \cdot 10^{10}$ рад/с; в: $\Omega_e = 6 \cdot 10^{10}$ рад/с

4. Основная задача и основные уравнения плазменной электротехники

В многочисленных газоразрядных экспериментальных и технологических установках различные плазменные образования подключаются к внешнему источнику с напряжением

$$U(t) = \frac{1}{2} [U(\omega) \exp(-i\omega t) + U^*(\omega) \exp(i\omega t)] \quad (4.1)$$

при помощи обычной квазистационарной электрической цепи. Здесь $U(\omega)$ - комплексная амплитуда напряжения, а ω - рабочая частота источника. Условие квазистационарности цепи будем записывать в виде

$$\omega \ll c/\mathfrak{R} \quad (\lambda_0 \gg \mathfrak{R}), \quad (4.2)$$

где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ - длина электромагнитной волны в вакууме, а \mathfrak{R} - линейный размер цепи (включая и размер плазмы \mathfrak{R}_p). На Рис. 4.1 схематически изображены цепи с конденсатором (а) и соленоидом (б) с плазменным заполнением ($Z_{\text{п}}$ - импеданс цепи без учета импеданса плазменного образования). Если не вдаваться в технические детали, то фактически на рисунке представлены схемы газовых разрядов емкостного (а) и индуктивного (б) типов.

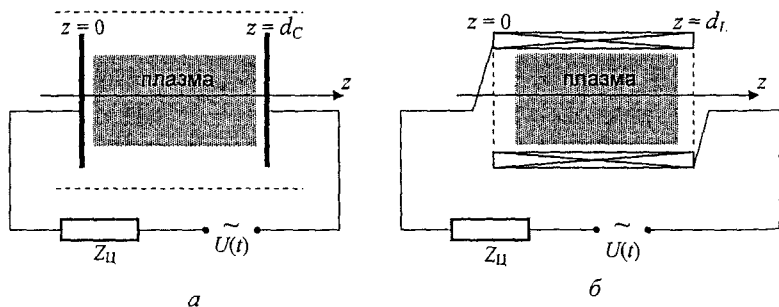


Рис. 4.1
Электрические цепи с плазменным конденсатором (а)
и плазменным соленоидом (б)

В силу условия квазистационарности (4.2) по отношению к цепи плазма проявляет себя как сосредоточенный элемент с некоторыми емкостью, индуктивностью

гивностью и активным сопротивлением. С другой стороны в плазме возможны медленные электромагнитные волны, фазовые скорости которых V_{ph} малы по сравнению со скоростью света, а поэтому может быть выполнено неравенство

$$\omega > V_{ph}/R_p \quad (\lambda_p < R_p), \quad (4.3)$$

где $\lambda_p = 2\pi V_{ph}/\omega$ - длина волны в плазме. Следовательно сама плазма в цепи должна рассматриваться на языке волн и полей, как распределенная система. Основная задача теоретической плазменной электротехники как раз и состоит в разработке методов описания распределенной плазменной системы, как элемента квазистационарной электрической цепи с сосредоточенными параметрами. Очевидно, что для многочисленных приложений такое описание является важным. Другими словами речь в плазменной электротехнике идет о согласовании двух подходов при описании плазменных систем: электротехнического подхода, основанного на методе эквивалентных схем, и электродинамического, основанного на уравнениях электромагнитного поля в среде.

Метод решения сформулированной задачи следующий: в области пространства занятой плазмой записывают уравнения электромагнитного поля и уравнения динамики плазмы, а граничные условия к этим уравнениям формулируют с учетом устройств (электродов, катушек и др.), при помощи которых плазма подключается в цепь. Результатом является уравнение для тока во внешней цепи (электротехническое уравнение внешней цепи), которое дополняет уравнения поля и динамики плазмы, решаемые в области пространства, занятой плазмой. Следуя такому подходу, удается ввести сосредоточенные параметры плазменного образования – емкость $C_p(\omega)$, индуктивность $L_p(\omega)$ и активное сопротивление $R_p(\omega)$ (или комплексный импеданс $Z_p(\omega)$), и выразить их через основные параметры плазмы.

В настоящем курсе лекций вопросы создания и поддержания плазмы вообще не затрагиваются, а сама плазма описывается в линейном приближении. Рассматриваются цилиндрические плазменные образования, для чего вводятся цилиндрические координаты r, φ, z , где z - продольная координата – вдоль пер-

пендикуляра к обкладкам плоского конденсатора (Рис. 4.1а), или вдоль оси соленоида (Рис. 4.1б). Причем исследуются только азимутально симметричные системы, а поэтому полагается $\partial/\partial\varphi = 0$.

Предположим, что тензор диэлектрической проницаемости плазмы в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}(\omega) & \varepsilon_{r\varphi}(\omega) & 0 \\ \varepsilon_{\varphi r}(\omega) & \varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(\omega) \end{pmatrix}, \quad i, j = r, \varphi, z. \quad (4.4)$$

В простейшей модели холодной электронной магнитоактивной плазмы со столкновениями компоненты тензора (4.4) получаются из формул (2.23)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}(\omega) = \varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega) = \varepsilon_{\perp}(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2(\omega + i\nu_e)}{\omega[(\omega + i\nu_e)^2 - \Omega_e^2]}, \\ \varepsilon_{r\varphi}(\omega) = -\varepsilon_{\varphi r}(\omega) = ig(\omega) &= -i \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e}{\omega[(\omega + i\nu_e)^2 - \Omega_e^2]}, \\ \varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon_{\parallel}(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega + i\nu_e)}. \end{aligned} \quad (4.4a)$$

Напомним, что здесь ω_{Le} - электронная ленгмюровская частота, ν_e - эффективная частота столкновений электронов, Ω_e - электронная циклотронная частота. В случае неоднородной плазмы ω_{Le} является функцией координат z и r . Обратим внимание, что при наличии диссипативных эффектов (т.е. столкновений), у тензора (4.4) имеется антиэрмитовская часть: разделив действительную и мнимую части, можно записать $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon'_{ij}(\omega) + i\varepsilon''_{ij}(\omega)$. При $\nu_e \rightarrow 0$ антиэрмитовская часть ε''_{ij} обращается в ноль.

Для плазмы с тензором диэлектрической проницаемости (4.4) в случае азимутально симметричных монохроматических возмущений частоты ω после перехода к комплексным амплитудам система уравнений Максвелла (2.8) записывается в виде

$$\frac{\partial E_{\varphi}}{\partial z} = -\frac{\omega}{c} B_r,$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{dE_z}{dr} = i \frac{\omega}{c} B_{\varphi},$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_{\varphi}) = i \frac{\omega}{c} B_z,$$

$$\frac{\partial B_{\varphi}}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{rr}(\omega) E_r + i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{r\varphi}(\omega) E_{\varphi} - \frac{4\pi}{c} j_{0r}(z, r), \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{dB_z}{dr} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\varphi r}(\omega) E_r - i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{\varphi\varphi}(\omega) E_{\varphi} + \frac{4\pi}{c} j_{0\varphi}(z, r),$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{\varphi}) = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon_{zz}(\omega) E_z + \frac{4\pi}{c} j_{0z}(z, r),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{rr} E_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{zz} E_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{r\varphi} E_{\varphi}) = 4\pi \rho_0(z, r).$$

Здесь $\mathbf{j}_0(z, r) = \{j_{0r}, j_{0\varphi}, j_{0z}\}$ и $\rho_0(z, r)$ - комплексные амплитуды плотности тока и плотности заряда внешних источников поля в плазме. В нашем случае внешними источниками являются конденсатор (Рис. 4.1а), или соленоид (Рис. 4.1б). Плотность заряда $\rho_0(z, r)$ обусловлена поверхностными зарядами на обкладках конденсатора, а плотность тока $\mathbf{j}_0(z, r)$ определяется токами, текущими по обмотке соленоида. Первые три уравнения системы (4.5) получаются при покомпонентной записи уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t$, следующие три уравнения получаются из уравнения $\text{rot } \mathbf{B} = (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t + (4\pi/c) \mathbf{j}_0$, последнее уравнение системы (4.5) есть уравнение $\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho_0$, где $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ - индукция электрического поля, а ε - оператор диэлектрической проницаемости плазмы (см. (2.9)). Поскольку ток в соленоиде преимущественно является азимутальным, будем полагать, что $j_{0r} = j_{0z} = 0$.

Исключая величины B_r, B_{φ}, B_z , получаем из (4.5) следующие уравнения для комплексных амплитуд компонент вектора напряженности электрического поля E_r, E_{φ}, E_z (последнее уравнение системы (4.5) переписывается без изменений):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_r}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{rr} E_r + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r\varphi} E_\varphi &= 0, \\
\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi\varphi} E_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi z} E_z &= -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} j_{0\varphi}(z, r), \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} E_z &= 0, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{rr} E_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{zz} E_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{r\varphi} E_\varphi) &= 4\pi \rho_0(z, r).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Заметим, что цепи с конденсатором и с индуктивностью могут быть запитаны разными внешними источниками напряжения, а поэтому функции $\rho_0(z, r)$ и $j_{0\varphi}(z, r)$ в (4.6) не обязательно связаны общим уравнением непрерывности (2.3).

Перейдем к определению плотностей тока и заряда внешнего источника. Начнем с плотности тока. Предположим, что обмотка соленоида локализована на цилиндрической поверхности $r = r_L$, т.е. ток соленоида является поверхностным током. В этом случае плотность тока внешнего источника можно определить при помощи дельта-функции

$$j_{0\varphi}(z, r) = J(z) \delta(r - r_L), \tag{4.7}$$

где $J(z)$ - некоторая функция только продольной координаты z . Пусть N_L - полное число витков в обмотке соленоида, а I - ток в витке. Очевидно, что в квазистационарном приближении (4.2) ток I является также и током во всей внешней цепи. Тогда имеет место соотношение

$$\int_0^{d_L} dz \int_{r_1-h}^{r_1+h} dr j_{0\varphi}(z, r) = N_L I. \tag{4.8}$$

Здесь d_L - длина соленоида, а $2h$ - толщина обмотки соленоида, т.е. интегрирование в (4.8) производится по продольному сечению обмотки соленоида (на Рис. 4.1б это сечение изображено прямоугольником со скрещенными прямыми). В модели соленоида с поверхностным током (4.7) предполагается, что $h \rightarrow +0$. Подставляя (4.7) в (4.8), имеем

$$I = \frac{1}{N_L} \int_0^{d_L} J(z) dz. \tag{4.9}$$

Если плотность числа витков обмотки соленоида постоянна, то для функции

$J(z)$ имеет место следующее представление:

$$J(z) = \frac{N_L I}{d_L} = \text{const.} \quad (4.9a)$$

Определим теперь плотность внешних зарядов. Обкладки плоского конденсатора, подключенного во внешнюю цепь (см. Рис. 4.1a), являются местом локализации поверхностных электрических зарядов. Поэтому плотность заряда внешнего источника можно определить при помощи дельта-функций следующим образом:

$$\rho_0(z, r) = \sigma(r)[\delta(z) - \delta(z - d_c)], \quad (4.10)$$

где d_c - расстояние между обкладками конденсатора, а $\sigma(r)$ - функция только поперечной координаты r . Очевидно, что $\sigma(r)$ есть поверхностная плотность электрического заряда на обкладке конденсатора. При записи формулы (4.10), предполагалось, что распределения зарядов на левой и правой обкладках конденсатора различаются только знаком, что в квазистационарном приближении обязательно имеет место (при одинаковых обкладках). Полный заряд на обкладке конденсатора вычисляется по формуле

$$Q = 2\pi \int_0^{r_c} \sigma(r) r dr, \quad (4.11)$$

где r_c - радиус обкладки. Учитывая связь заряда обкладки с током во внешней цепи $I = dQ/dt$, или для комплексных амплитуд $I = -i\omega Q$ (напомним, что в соответствии с принятой в подразд. 2.2. договоренностью физические величины и их комплексные амплитуды обозначаются одинаково), имеем

$$I = -i\omega 2\pi \int_0^{r_c} \sigma(r) r dr. \quad (4.12)$$

Если поверхностный заряд равномерно распределен по обкладке конденсатора, то для функции $\sigma(r)$ имеет место следующее представление:

$$\sigma(r) = i \frac{I}{\omega S} = \text{const}, \quad (4.12a)$$

где S - площадь обкладки. Соотношения (4.9) и (4.12) являются ключевыми, поскольку связывают внешнюю цепь (ток I) с полем в плазме. Связь осуществля-

ется через граничные условия для уравнений (4.6), к формулировке которых мы и переходим.

Граничные условия получаются непосредственно из самих уравнений поля. Возьмем второе уравнение (4.6), подставим в него функцию (4.7) и проинтегрируем уравнение по r в пределах от $r_L - h$ до $r_L + h$ ($h \rightarrow +0$). В результате получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r}(r_L + 0) - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r}(r_L - 0) \equiv \left\{ \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial r} \right\}_{r_L} = -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} J(z). \quad (4.13)$$

Соотношение (4.13) определяет величину скачка тангенциальной составляющей индукции магнитного поля $B_z(r)$ на поверхности с током (4.7). Это соотношение является одним из искомым граничных условий для уравнений (4.6). Граничное условие (4.13) можно конечно получить и из общего граничного условия (2.13), если в последнем магнитную индукцию выразить через напряженность электрического поля и использовать выражение (4.7).

Далее, возьмем четвертое уравнение (4.6), подставим в него функцию (4.10) и проинтегрируем по z от $0 - h$ до $0 + h$, или от $d_c - h$ до $d_c + h$ ($h \rightarrow +0$). В результате получим следующие соотношения:

$$\varepsilon_{\pm\pm} E_{i,0} = 4\pi \sigma(r), \quad \varepsilon_{\pm\pm} E_{i,d_c-0} = 4\pi \sigma(r). \quad (4.14)$$

При получении (4.14) было учтено, что напряженность электрического поля при $z \leq 0 - h$ и $z \geq d_c + h$, т.е. внутри обкладки конденсатора, равна нулю. Соотношения (4.12) определяют нормальную составляющую индукции электрического поля на заряженной поверхности обкладки конденсатора и является вторым из искомым граничных условий для уравнений (4.6). Граничное условие (4.14) можно также получить и из общего граничного условия (2.12).

Кроме принципиально важных граничных условий (4.13) и (4.14) для решения уравнений (4.6) необходимы условия и на других поверхностях, ограничивающих плазменное образование (на Рис. 4.1 эти поверхности условно обозначены пунктирными линиями). На этих поверхностях мы будем требовать или равенства нулю тангенциальных составляющих напряженности электриче-

ского поля, или отсутствия поверхностных зарядов.

Итак, можно наметить следующую схему решения задач теоретической плазменной электротехники. Вне электродов, т.е. вне обмотки соленоида и обкладок конденсатора, решаются уравнения (4.6) с нулевыми правыми частями

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{rr} E_r + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r\varphi} E_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi\varphi} E_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi r} E_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} E_z &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{rr} E_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{zz} E_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_{r\varphi} E_\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Чтобы уравнения поля (4.6) удовлетворялись и на электродах, решения уравнений (4.15) подставляются в граничные условия (4.13) и (4.14). Тем самым устанавливается связь между электромагнитным полем в плазме и вспомогательными функциями $J(z)$ и $\sigma(r)$. Далее, посредством соотношений (4.9) и (4.12) функции $J(z)$ и $\sigma(r)$ (а тем самым и электромагнитное поле в плазме) связываются с током I в электрической цепи. И наконец, при помощи закона Ома для полной цепи (электротехнического уравнения внешней цепи)

$$U = [Z_{\text{ц}}(\omega) + Z_p(\omega)] I, \quad (4.16)$$

где U - комплексная амплитуда напряжения источника (4.1), а $Z_{\text{ц}}(\omega)$ - импеданс цепи (см. Рис. 4.1), выражается комплексный импеданс плазменного образования $Z_p(\omega)$ через диэлектрическую проницаемость (4.4) и геометрические характеристики плазменного образования. Что касается уравнения цепи (4.16), то для каждого конкретного случая оно устанавливается отдельно на основе самых общих законов электродинамики материальных сред.

5. Плазменные системы емкостного типа

5.1. Электротехнические уравнения емкостного разряда

Приступим теперь к реализации программы, намеченной в предыдущем разделе. Начнем с электротехнической модели разряда емкостного типа. Рассмотрим изображенную на Рис. 4.1а цепь с плазменным конденсатором. Ориентируясь на обычные параметры существующих емкостных разрядов, считаем, что выполнено неравенство (2.30), позволяющее описывать электромагнитное поле в потенциальном приближении. Учитывая интегральную форму уравнения ноля $\text{rot } \mathbf{E} = 0$, запишем следующее электротехническое уравнение цепи:

$$\int_U E_z d\xi + \int_{\text{плем}} E_z d\xi + \int_0^{d_c} E_z dz = 0. \quad (5.1)$$

Здесь под ξ понимается координата “вдоль” цепи. Первый интеграл в (5.1) берется по области внешнего источника, второй – по всей цепи, исключая плазменный конденсатор, третий интеграл вычисляется по области конденсатора с плазмой, а d_c – расстояние между обкладками конденсатора (см. Рис. 4.1а). Внутри источника, который мы считаем идеальным, $E_z = -E_{cr}$, где E_{cr} – напряженность поля сторонней силы. Поэтому первый интеграл в (5.1) равен напряжению источника (4.1) (со знаком минус). Второй интеграл в (5.1) по закону Ома есть $I Z_{\text{ц}}$, где I – ток в цепи, а $Z_{\text{ц}}$ – ее импеданс. Поэтому уравнение цепи (5.1) преобразуется к виду (для комплексных амплитуд)

$$U = I Z_{\text{ц}} + \int_0^{d_c} E_z dz. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.2) очевидно отражает закон Ома (4.16) и в последствии будет использовано для определения импеданса плазменного конденсатора.

Уравнения для поля в конденсаторе получаются из системы (4.15), если в ней формально устремить c^2 к бесконечности. При этом из второго уравнения будем иметь $E_{\parallel} = 0$, а остальные уравнения системы (4.15) дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varepsilon_r E_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_z E_z) &= 0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Суммируя далее формулы (4.14) и (4.12), запишем следующие граничные условия для первого уравнения системы (5.3):

$$\varepsilon_r E_r|_{r=0} = 4\pi \sigma(r), \quad \varepsilon_z E_z|_{d_c=0} = 4\pi \sigma(r), \quad 2\pi S^{-1} \int_0^{r_c} \sigma(r) r dr = i \frac{I}{\omega S}, \quad (5.4)$$

где $S = \pi r_c^2$ - площадь обкладки конденсатора. Другие граничные условия для уравнений (5.3), если они потребуются, будут сформулированы позже. Краевая задача (5.3), (5.4) лежит в основе излагаемой ниже теории плазменного конденсатора.

Из граничных условий (5.4) следует, что решения уравнений (5.3), в частности функция $E_z(z, r)$ пропорциональна току I . Поэтому, подставляя $E_z(z, r)$ в уравнение цепи (5.2), можно получить закон Ома в форме (4.16). Однако, аналитически это удастся сделать только в двух противоположных случаях, к рассмотрению которых мы и переходим.

5.2. Емкость одномерного плазменного конденсатора (плазменные системы малой длины)

В первом случае короткого конденсатора, когда длина конденсатора d_c мала по сравнению с его поперечным размером r_c ($d_c \ll r_c$), можно пренебречь краевыми эффектами и считать плазму однородной в поперечном направлении. Тогда, полагая $E_r = 0$ и считая поверхностную плотность заряда $\sigma(r)$ постоянной, запишем решение первого уравнения (5.3) с граничными условиями (5.4) в виде

$$E_z(\omega, z) = 4\pi \frac{i}{\omega S \varepsilon_z(\omega, z)} I, \quad 0 < z < d_c. \quad (5.5)$$

Подставляя (5.5) в (5.2), получим следующее электротехническое уравнение цепи с плазменным конденсатором:

$$U = I Z_{\text{ц}} + I \frac{i}{\omega C_0} d_C^{-1} \int_0^{d_C} \frac{dz}{\varepsilon_{\text{ц}}(\omega, z)} \equiv I Z_{\text{ц}} + I Z_p(\omega), \quad (5.6)$$

где $C_0 = S/4\pi d_C$ - емкость вакуумного плоского конденсатора. В (5.6) по определению введен комплексный импеданс короткого плазменного конденсатора

$$Z_p(\omega) = Z'_p(\omega) + i Z''_p(\omega) = i \frac{1}{\omega C_0} d_C^{-1} \int_0^{d_C} \frac{dz}{\varepsilon_{\text{ц}}(\omega, z)}, \quad (5.7)$$

при этом (5.6) имеет вид общего электротехнического уравнения (4.16). Разделяя в (5.7) действительную и мнимую части, можно, как это делается в электротехнике (т.е. фактически по определению), ввести вещественные активное сопротивление $R_p(\omega)$ и емкость $C_p(\omega)$ плазменного конденсатора

$$\begin{aligned} Z_p(\omega) &\equiv R_p(\omega) + i \frac{1}{\omega C_p(\omega)}, \\ R_p(\omega) &= \frac{1}{\omega C_0} d_C^{-1} \int_0^{d_C} \frac{\varepsilon''_{\text{ц}} dz}{(\varepsilon'_{\text{ц}})^2 + (\varepsilon''_{\text{ц}})^2}, \\ \frac{1}{C_p(\omega)} &= \frac{1}{C_0} d_C^{-1} \int_0^{d_C} \frac{\varepsilon'_{\text{ц}} dz}{(\varepsilon'_{\text{ц}})^2 + (\varepsilon''_{\text{ц}})^2}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\varepsilon'_{\text{ц}}$ - действительная и $\varepsilon''_{\text{ц}}$ - мнимая части диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{ц}}(\omega, z)$.

Если диэлектрическая проницаемость плазмы определяется формулами (4.4а), а плотность плазмы в конденсаторе постоянна, то общие формулы (5.7), (5.8) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} Z_p(\omega) &= i \frac{1}{\omega C_0} \frac{\omega(\omega + i\nu_e)}{\omega(\omega + i\nu_e) - \omega_{\text{Ле}}^2}, \\ R_p(\omega) &= \frac{1}{C_0} \frac{\nu_e \omega_{\text{Ле}}^2}{(\omega^2 - \omega_{\text{Ле}}^2)^2 + \omega^2 \nu_e^2}, \\ C_p(\omega) &= C_0 \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{Ле}}^2)^2 + \omega^2 \nu_e^2}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{\text{Ле}}^2 + \nu_e^2)}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Когда столкновений нет, т.е. $\nu_e = 0$, для емкости плазменного конденсатора имеем

$$C_p(\omega) = C_0 (1 - \omega_{\text{Ле}}^2/\omega^2), \quad (5.10)$$

а активное сопротивление $R_p(\omega) = 0$. Формула (5.10) согласуется с известным из

общей физики результатом, согласно которому емкость конденсатора с однородным диэлектрическим заполнением равна произведению диэлектрической проницаемости заполнения на емкость соответствующего вакуумного конденсатора. Характерные частотные зависимости действительной и мнимой частей импеданса (5.9) представлены на Рис. 5.1. По горизонтальной оси отложена безразмерная частота ω/ω_{Lz} , а по вертикали – безразмерная величина $\omega_{Lz} C_0 Z_p(\omega)$. Рисунок построен для случая $v_e/\omega_{Lz} = 0.1$. Действительная часть импеданса всегда положительна, а мнимая часть – меняет знак. Поскольку при $\epsilon_{zz}(\omega, z) = const$ напряженность электрического поля (5.5) в пространстве между обкладками конденсатора постоянна, то потенциал электрического поля в конденсаторе является линейной функцией координаты z .

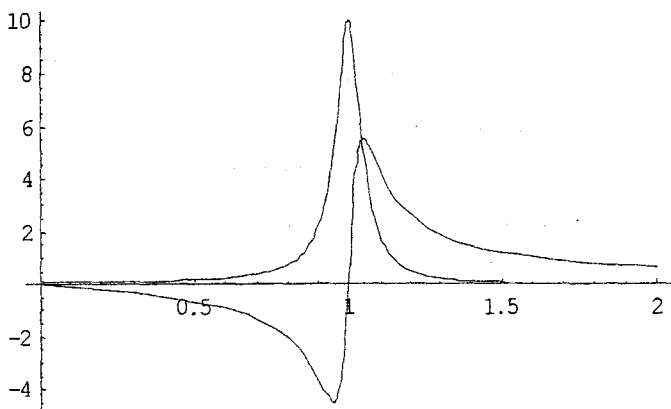


Рис. 5.1

Комплексный импеданс короткого плазменного конденсатора с однородным плазменным заполнением при $v_e/\omega_{Lz} = 0.1$

Предположим теперь, что плазма заполняет конденсатор не полностью, а имеются вакуумные зазоры около обкладок, т.е.

$$\omega_{Lz}^2(z) = \begin{cases} 0, & 0 < z < \Delta \\ \omega_{Lz}^2 = const, & \Delta \leq z \leq d_C - \Delta \\ 0, & d_C - \Delta < z < d_C \end{cases} \quad (5.11)$$

Подстановка функции (5.11) в формулу (5.7) дает следующий результат:

$$Z_p(\omega) = i \frac{1}{\omega C_0} \frac{\omega(\omega + i\nu_e) - \omega_{Ge}^2}{\omega(\omega + i\nu_e) - \omega_{Le}^2}, \quad (5.12)$$

где $\omega_{Ge} = \omega_{Le} \sqrt{2\Delta/d_c}$ - геометрическая плазменная частота (см. формулу (3.46)).

Разделяя в (5.12) действительную и мнимую части, вводим активное сопротивление и емкость плазменного конденсатора с вакуумными зазорами

$$\begin{aligned} R_p(\omega) &= \frac{1}{C_0} \frac{\nu_e (\omega_{Le}^2 - \omega_{Ge}^2)}{(\omega^2 - \omega_{Le}^2)^2 + \omega^2 \nu_e^2}, \\ C_p(\omega) &= C_0 \frac{(\omega^2 - \omega_{Le}^2)^2 + \omega^2 \nu_e^2}{(\omega^2 - \omega_{Ge}^2)(\omega^2 - \omega_{Le}^2) + \omega^2 \nu_e^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку $\omega_{Le}^2 > \omega_{Ge}^2$, то всегда $R_p(\omega) > 0$. При $\nu_e = 0$ для емкости плазменного конденсатора с зазорами имеем

$$C_p(\omega) = C_0 \frac{\omega^2 - \omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_{Ge}^2}, \quad (5.14)$$

а активное сопротивление $R_p(\omega)$, как это и должно быть, обращается в ноль. Емкость (5.14) имеет две резонансные точки - ноль и полюс. Ноль связан с возбуждением в конденсаторе объемной ленгмюровской волны плазмы, а полюс обусловлен возбуждением поверхностной волны плазменного слоя (см. первую формулу (3.45) и формулу (3.46)). В дальнейшем резонансные свойства комплексного импеданса (5.12) мы обсудим более подробно.

Формулу (5.12) можно переписать и по другому

$$\begin{aligned} Z_p(\omega) &= 2Z_\Delta(\omega) + \tilde{Z}_p(\omega), \\ Z_\Delta(\omega) &= \frac{i}{\omega C_{0\Delta}}, \quad \tilde{Z}_p(\omega) = i \frac{1}{\omega \tilde{C}_0} \frac{\omega(\omega + i\nu_e)}{\omega(\omega + i\nu_e) - \omega_{Le}^2}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $C_{0\Delta} = S/4\pi\Delta$ и $\tilde{C}_0 = S/4\pi(d_c - 2\Delta)$ - емкости вакуумных конденсаторов с расстояниями между обкладками Δ и $d_c - 2\Delta$ соответственно. Из формулы (5.15) следует, что импеданс плазменного конденсатора с вакуумными зазорами равен сумме импедансов зазоров и импеданса плазменного конденсатора без зазоров. Этот результат можно было предвидеть. Действительно, если на границах плазмы поместить бесконечно тонкие проводящие плоскости, то емкость не из-

меняется, но плазменный конденсатор с зазорами превратится в последовательное соединение двух вакуумных конденсаторов $C_{0\Delta}$ и плазменного конденсатора без зазоров. Таким образом, собственно к свойствам плазмы резонанс на геометрической плазменной частоте отношения не имеет, поскольку обусловлен геометрией электродов.

Для случая $\omega \ll \nu_e, \omega_{Le}$ формула (5.15) преобразуется к виду

$$Z_p(\omega) = i \frac{2}{\omega C_{0\Delta}} + \frac{\nu_e}{C_0 \omega_{Le}^2}. \quad (5.16)$$

Второе слагаемое в (5.16) есть активное сопротивление слоя сильно столкновительной плазмы (его можно записать в виде $R_p = (d_c - 2\Delta)/S\sigma_p$, где $\sigma_p = \omega_{Le}^2/4\pi\nu_e$ - проводимость плазмы). Если выполнено неравенство

$$\frac{\omega \nu_e}{\omega_{Le}^2} \gg \frac{2\Delta}{d_c - 2\Delta}, \quad (5.17)$$

то плазменный конденсатор в цепи эквивалентен обычному активному сопротивлению, через который протекает ток проводимости (хотя реального переноса заряда через плазму нет из-за наличия вакуумных зазоров). При выполнении неравенства обратного (5.17) плазма эквивалентна идеально проводящей среде.

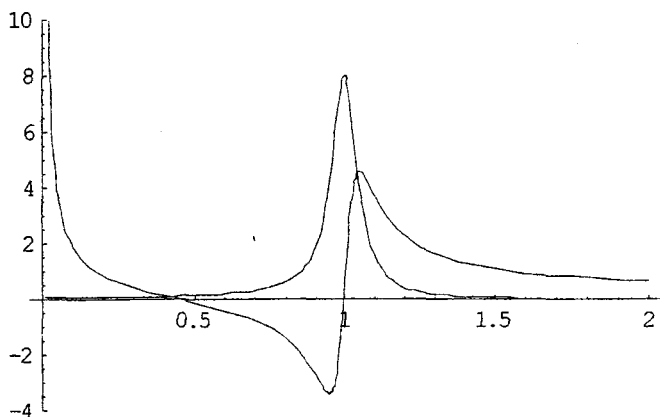


Рис. 5.2

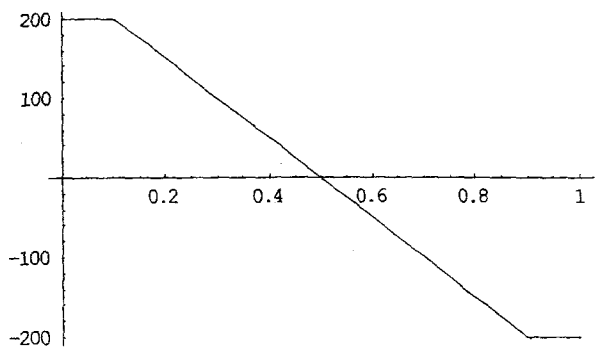
Комплексный импеданс короткого плазменного конденсатора с вакуумными зазорами при $\nu_e/\omega_{Le} = 0.1$ и $\omega_{Ge}^2/\omega_{Le}^2 = 0.2$

Действительная и мнимая части импеданса (5.12) при $v_e/\omega_{Le} = 0.1$ и $\omega_{Ge}^2/\omega_{Le}^2 = 0.2$ представлены на Рис. 5.2, который имеет смысл сравнить с Рис. 5.1. Как видим действительная часть импеданса (она определяет активное сопротивление плазмы) примерно такая же, как и в случае конденсатора без зазоров. У мнимой части появилась еще одна точка смены знака. Кроме того, мнимая часть импеданса (5.12) (она определяет емкость плазменного конденсатора) при $\omega = 0$ имеет полюс. Это обусловлено тем, что вакуумные зазоры конденсатора для постоянной составляющей тока являются разрывами в цепи (см. формулу (5.16)).

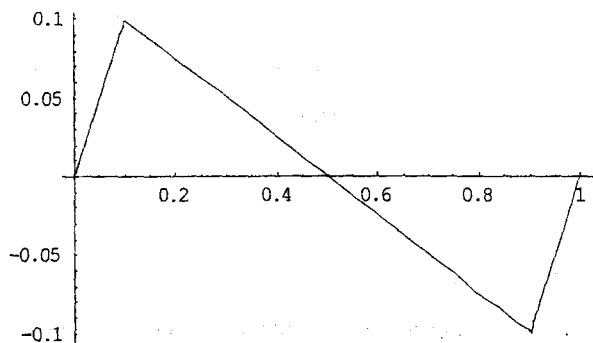
Рассмотрим распределение потенциала электрического поля в плазменном конденсаторе малой длины с вакуумными зазорами. При этом ограничимся случаем бесстолкновительной плазмы $v_e = 0$. Потенциал определяется формулой

$$\Phi(\omega, z) = - \int_0^z E_z(\omega, z') dz', \quad 0 < z < d_c, \quad (5.18)$$

где напряженность $E_z(\omega, z)$ приведена в (5.5), $\epsilon_{zz} = 1 - \omega_{Le}^2(z)/\omega^2$, а ленгмюровская частота дается формулой (5.11). На Рис. 5.3 изображены две наиболее характерные функции (5.18) (по горизонтальной оси отложена безразмерная координата z/d_c , по вертикальной оси – потенциал в относительных единицах): при $\omega \approx \omega_{Le}$, когда импеданс (5.12) стремится к бесконечности (Рис. 5.3а), и при $\omega \approx \omega_{Ge}$, когда импеданс проходит через ноль (Рис. 5.3б). Мы видим качественно разное распределение потенциала по длине конденсатора: если при $\omega \approx \omega_{Le}$ падение напряжения между обкладками велико, то при $\omega \approx \omega_{Ge}$ падение напряжения близко к нулю. В дальнейшем, в подразделе 5.4, мы увидим, что такое поведение потенциалов связано с резонансными свойствами плазменного конденсатора.



a



б

Рис. 5.3

Распределение потенциала подлине конденсатора малой длины с зазорами:

a - $\omega \approx \omega_{Lz}$, б - $\omega \approx \omega_{ce}$

Как видно из формул (5.9) и (5.13), при $\nu_e \rightarrow 0$ активное сопротивление плазмы в конденсаторе $R_p(\omega)$ равно нулю. Однако, имеется физический механизм, приводящий к появлению активного сопротивления даже в бесстолкновительной плазме. Пусть в отсутствии столкновений продольная диэлектрическая проницаемость плазмы определяется формулой $\epsilon_{\parallel} = 1 - \omega_{Lz}^2(z)/\omega^2$, т.е. плазма неоднородна по длине конденсатора. Будем считать, что неоднородность плазмы является плавной, т.е. функция $\omega_{Lz}^2(z)$ непрерывна вместе со своей первой производной. Тогда, при $\omega < \omega_{Lz \max}$, где $\omega_{Lz \max}$ - максимальная ленгмюров-

ская частота плазмы, под интегралом в формуле (5.7) возникает особенность.

Для устранения этой особенности используем формулу

$$\int_0^{d_c} \frac{dz}{1 - \omega_{Lz}^2(z)/\omega^2} = \text{V.p.} \int_0^{d_c} \frac{dz}{1 - \omega_{Lz}^2(z)/\omega^2} - i\pi \sum_j \left| \frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega_{Lz}^2}{dz} \right|_{z=z_{0j}}^{-1}, \quad (5.19)$$

где $z_{0j}(\omega)$ - точки плазменного резонанса, определяемые из уравнения $\omega^2 = \omega_{Lz}^2(z)$, а обозначение *V.p.* означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения. При получении формулы (5.19) использовалась известная формула Сохоцкого

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int f(x) \frac{dx}{x \pm ih} = \text{V.p.} \int f(x) \frac{dx}{x} \mp i\pi f(0) \quad (5.20)$$

и было положено $\omega = \omega + i\delta$ ($\delta \rightarrow +0$), что означает включение напряжения внешнего источника (4.1) в бесконечном прошлом (т.е. $U(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$).

С учетом (5.19) вместо (5.8) имеем следующие формулы:

$$R_p(\omega) = \frac{\pi}{\omega C_0} d_c^{-1} \sum_j \left| \frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega_{Lz}^2}{dz} \right|_{z=z_{0j}}^{-1}, \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{C_p} = \frac{1}{C_0} d_c^{-1} \left[\text{V.p.} \int_0^{d_c} \frac{dz}{1 - \omega_{Lz}^2(z)/\omega^2} \right].$$

Первая формула в (5.21) определяет бесстолкновительное активное сопротивление плазмы, обусловленное резонансным возбуждением локальных ленгмюровских волн в точках плазменного резонанса $\omega = \omega_{Lz}(z)$. Бесстолкновительное сопротивление является основным, если оно превосходит величину, определяемую второй формулой (5.8). Физическая природа бесстолкновительного сопротивления (5.21) такая же, как и бесстолкновительного затухания поверхностных волн в неоднородной плазме, исследованного в подразд. 3.3 – формула (3.52).

5.3. Анизотропный плазменный конденсатор

(плазменные системы большой длины)

Рассмотрим теперь случай длинного конденсатора, $d_c \gg r_c$. При этом плотность плазмы будем считать постоянной в области, где решаются уравнения (5.3). Вводя по формуле (1.26) скалярный потенциал $\Phi(\omega, z, r)$

($E_r = -\partial\Phi/\partial r$, $E_z = -\partial\Phi/\partial z$), запишем эти уравнения и граничные условия к ним в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_{zz}(\omega)}{\varepsilon_{rr}(\omega)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (5.22)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, r) \right|_{z=0, z=d_c} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, r) \right|_{z=d_c} = -4\pi \frac{1}{\varepsilon_{zz}(\omega)} \sigma(r).$$

Заметим, что краевая задача (5.22) может быть получена также из уравнения (2.32) и формулы (4.10). Для решения задачи (5.22) требуются еще краевые условия на боковой поверхности плазменного образования (условно она показана пунктиром на Рис. 4.1а), формулировка которых связана с определенными трудностями. Поэтому при формулировке поперечных граничных условий, ограничимся рассуждениями и предположениями качественного характера. Учтем, что плазма обычно заключается в цилиндрический изолирующий кожух, вне которого электрическое поле мало. Пусть поперечный размер области локализации электрического поля $R_c \sim r_c$ удовлетворяет неравенству $R_c \ll d_c$.

Представим потенциал электрического поля в виде

$$\Phi(z, r) = \Theta(z)\psi(r), \quad (5.23)$$

где $\psi(r)$ -функция, определяющая поперечное распределение потенциала в плазме. Заметим, что представление (5.23) справедливо и в случае конденсатора малой длины, когда применимо одномерное приближение, и $\psi(r) = \text{const}$. Можно ожидать, что (5.23) имеет место и в противоположном случае плазменных систем большой длины, когда разряд имеет вид плазменного канала (плазменного столба), и зависимость потенциала от координаты r является существенно более сильной, чем его зависимость от координаты z . Очевидно, что вблизи от обкладок конденсатора (на расстояниях меньших и порядка r_c) представление (5.23) несправедливо. Однако, при большой длине плазменного столба, когда $d_c \gg R_c$, влияние приэлектродных областей незначительно и может быть учтено только качественно.

Введем поперечное волновое число поля в плазме k_1 и эффективную по-

верхностную плотность заряда обкладки $\langle \sigma \rangle$ по следующим формулам:

$$k_{\perp}^2 = \frac{\int_0^{R_c} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 r dr}{\int_0^{R_c} \psi^2 r dr}, \quad \langle \sigma \rangle = \frac{\int_0^{R_c} \sigma \psi r dr}{\int_0^{R_c} \psi^2 r dr}. \quad (5.24)$$

Очевидно, что $k_{\perp} \sim R_c^{-1}$, а для эффективной поверхностной плотности можно использовать выражение $\langle \sigma \rangle = Q S^{-1} G$, где Q - заряд обкладки (см. (4.11)), а G - некоторый геометрический фактор. В рамках излагаемого подхода величины k_{\perp} и G вычислить не удается. Поэтому мы их используем как некоторые феноменологические постоянные, возможную величину которых уточним ниже. Подставляя (5.23) в уравнение и граничные условия (5.22), домножая их на $\psi(r)$ и интегрируя по $r dr$ от нуля до R_c , преобразуем задачу (5.22) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} - k_{\perp}^2 \frac{\epsilon_{\pi}}{\epsilon_{\alpha}} \Theta &= 0, \\ \frac{d\Theta}{dz} (0+0) = \frac{d\Theta}{dz} (d_c - 0) &= -4\pi \frac{1}{\epsilon_{\alpha}} \langle \sigma \rangle. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5.25) имеет вид $\Theta = A \exp(\kappa z) + B \exp(-\kappa z)$, где A и B - постоянные, а $\kappa = k_{\perp} \sqrt{\epsilon_{\pi}/\epsilon_{\alpha}}$. Подставляя это решение в краевые условия (5.25) и определяя постоянные A и B , находим следующее решение краевой задачи (5.25):

$$\Theta(z) = -4\pi \frac{Q}{S \epsilon_{\alpha}} G \frac{\text{ch}(\kappa z) - \text{ch}[\kappa(d_c - z)]}{\kappa \text{sh}(\kappa d_c)}. \quad (5.26)$$

Подстановка решения (5.26) в (5.23) и (5.23) в (5.2) приводит нас к следующему уравнению цепи с плазменным конденсатором большой длины:

$$U = I Z_{\text{ц}} + I \frac{2i}{\omega C_0} \frac{1}{\epsilon_{\alpha}} G \frac{\text{ch}(\kappa d_c) - 1}{\kappa d_c \text{sh}(\kappa d_c)} \rightarrow U = I Z_{\text{ц}} + I Z_p(\omega), \quad (5.27)$$

где использовано общее соотношение (4.16) и введена величина

$$Z_p(\omega) = \frac{i}{\omega C_0 \epsilon_{\alpha}} G \cdot \frac{2[\text{ch}(k_{\perp} d_c \sqrt{\epsilon_{\pi}/\epsilon_{\alpha}}) - 1]}{k_{\perp} d_c \sqrt{\epsilon_{\pi}/\epsilon_{\alpha}} \text{sh}(k_{\perp} d_c \sqrt{\epsilon_{\pi}/\epsilon_{\alpha}})}, \quad (5.28)$$

являющаяся комплексным импедансом рассматриваемого плазменного конденсатора. Разделяя действительную и мнимую части $Z_p = Z'_p + iZ''_p$ с помощью формул $R_p(\omega) = Z'_p(\omega)$ и $C_p(\omega) = [\omega Z''_p(\omega)]^{-1}$ можно ввести активное сопротивление и

емкость плазменного конденсатора. Ввиду громоздкости мы здесь соответствующие формулы не приводим.

В частном случае изотропной плазмы, когда $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp}$, формула (5.28) преобразуется к виду ($k_{\perp} d_c \gg 1$)

$$Z_p(\omega) = \frac{i}{\omega C_0 \varepsilon_{\perp}} G \frac{2[\operatorname{ch}(k_{\perp} d_c) - 1]}{k_{\perp} d_c \operatorname{sh}(k_{\perp} d_c)} \approx \frac{i 2G}{\omega C_0 k_{\perp} d_c \varepsilon_{\perp}}. \quad (5.29)$$

Используем формулу (5.29) для оценки геометрического фактора G . При $r_c \ll d_c$ рассматриваемый конденсатор представляет собой систему проводников, находящихся в изотропной среде на большом расстоянии друг от друга. Взаимная емкость такой системы проводников приблизительно равна $\varepsilon_{\perp} r_c / 2$. Выражая через эту емкость импеданс и сравнивая результат с (5.29), имеем оценку $G \approx k_{\perp} r_c / 4 \sim r_c / R_c \sim 1$.

Можно оценить геометрический фактор G и иначе. Хотя формула (5.28) получена при $k_{\perp} d_c \gg 1$, формально перейдем в ней к пределу $k_{\perp} d_c \rightarrow 1$, что дает $Z_p = iG / (\omega C_0 \varepsilon_{\perp})$. Последнее выражение совпадет с импедансом короткого конденсатора, если положить $G = 1$ (см. формулу (5.8), из которой в случае однородной плазмы следует $Z_p = i / (\omega C_0 \varepsilon_{\perp})$). Таким образом, имеется достаточно оснований, чтобы во всех последующих расчетах полагать фактор G равным единице. Из приведенных рассуждений также следует, что между случаями длинного и короткого конденсаторов с точки зрения их математического описания принципиальных различий нет. Однако, при $k_{\perp} d_c > 1$ появляется важное физическое отличие: в длинном конденсаторе при $\varepsilon_{\parallel} \neq \varepsilon_{\perp}$ (анизотропная плазма) оказывается возможным резонансное возбуждение объемных ленгмюровских волн плазменного столба.

Перейдем теперь к подробному исследованию комплексного импеданса (5.28) плазменного конденсатора большой длины. Если диссипация в плазме отсутствует и $\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp} > 0$, то импеданс (5.28) ни при каком значении ω не может обращаться в ноль; он также не может обращаться в бесконечность нигде, кроме единственной точки $\omega = \omega_{L\perp}$ (в этой точке $\varepsilon_{\perp} = 0$). Поэтому при $\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp} > 0$ им-

педанс (5.28) качественно не отличается от импеданса (5.7) короткого плазменного конденсатора. На Рис. 5.4 показан комплексный импеданс (5.28) длинного ($\kappa d_c = 10$) конденсатора с изотропным ($\epsilon_r = \epsilon_z$) плазменным заполнением. Видно полное качественное сходство с Рис. 5.1.

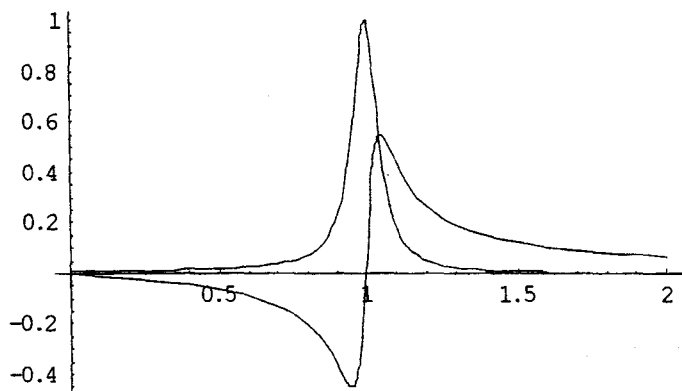


Рис. 5.4

Комплексный импеданс длинного плазменного конденсатора с однородным плазменным заполнением при $\epsilon_r = \epsilon_z$ и $v_e/\omega_{pe} = 0.1$

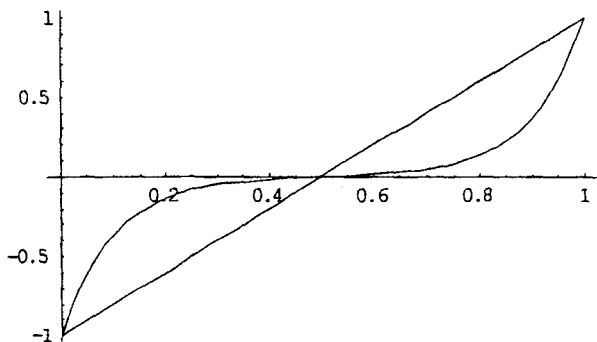


Рис. 5.5

Распределение потенциала подлине конденсатора большой длины при $\epsilon_r = \epsilon_z$

Типичное распределение потенциала на оси длинного плазменного конденсатора при $kd_c = 10$ и $\epsilon_r = \epsilon_z$ показано на Рис. 5.5 (по горизонтальной оси отложена безразмерная координата z/d_c , по вертикальной оси – потенциал в относительных единицах; прямая линия – потенциал в коротком конденсаторе без зазоров)

Иная ситуация имеет место при $\epsilon_r/\epsilon_z < 0$, что возможно только в анизотропной плазме (диссипацию пока считаем отсутствующей). Обозначим $k_z^2 = -k_1^2(\epsilon_r/\epsilon_z) > 0$. Тогда, при $k_z = k_m = \pi(2n-1)/d_c$, где n – натуральные числа, импеданс (5.28) обращается в бесконечность; при $k_z = k_m = 2\pi n/d_c$ импеданс (5.28) обращается в ноль. Но как показано в разд. 3 (см. уравнение (3.59)) соотношение

$$k_1^2 \epsilon_r + k_m^2 \epsilon_z = 0 \quad (\epsilon_r = \epsilon_1, \epsilon_z = \epsilon_2) \quad (5.30)$$

есть дисперсионное уравнение, определяющее спектры частот объемных косых ленгмюровских волн в ограниченной плазме, а k_m являются продольными волновыми числами таких волн.

Таким образом, обращение импеданса (5.28) в бесконечность и в ноль (при $v_e = 0$) происходит при резонансе внешнего источника с какой-либо из собственных волн плазмы в конденсаторе. При этом под k_1 в (5.28) и (5.30) следует понимать одну из величин μ_0/R_C . Для иллюстрации на Рис. 5.6 показаны действительная и мнимая части импеданса плазменного конденсатора (5.28) в сильном внешнем магнитном поле ($\Omega_e \gg \omega_{Le}$, при этом $\epsilon_r = 1$) в зависимости от частоты внешнего источника при $k_1 d_c = 15$ и $v_e/\omega_{Le} = 0.05$ ($G = 1$). По горизонтальной оси отложена безразмерная частота ω/ω_{Le} , по вертикальной – комплексный импеданс (5.28), умноженный на $\omega_{Le} C_0$.

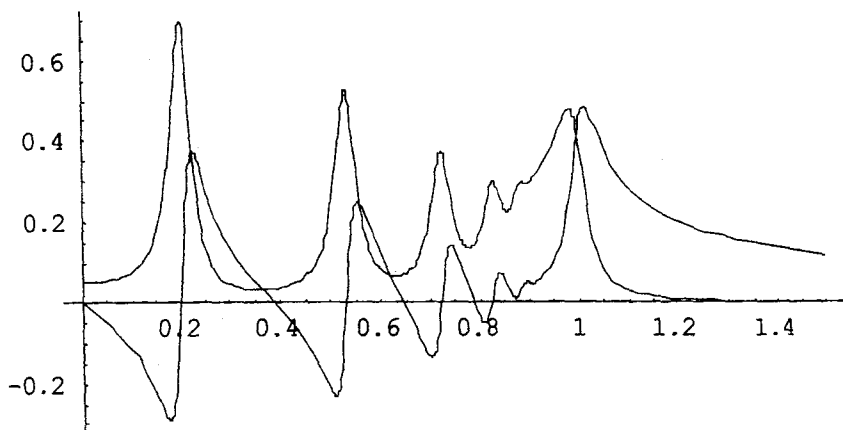


Рис. 5.6

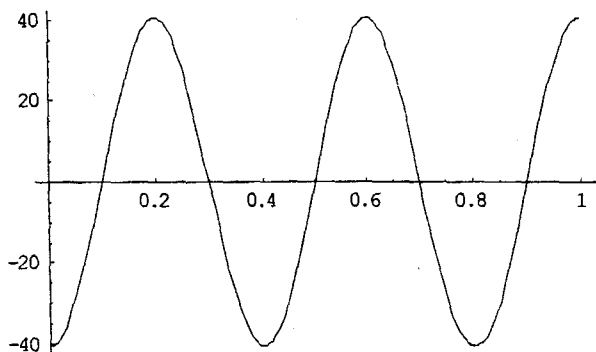
Комплексный импеданс плазменного конденсатора в сильном магнитном поле при $k_{\perp}d_c = 15$ и $v_e/\omega_{ce} = 0.05$

Обозначим через $\omega_n^{(\infty)}$ частоты, на которых при $v_e = 0$ импеданс (5.28) обращается в бесконечность, а через $\omega_n^{(0)}$ обозначим частоты, на которых импеданс (5.28) обращается в ноль. Если исключить точку $\omega = \omega_{ce}$, то все частоты $\omega_n^{(0, \infty)}$ являются корнями уравнения (5.30). Из Рис. 5.6 и общих аналитических свойств функции (5.28) следует, что в окрестности точек $\omega_n^{(\infty)}$ и $\omega_n^{(0)}$, при $v_e \neq 0$ имеют место следующие представления:

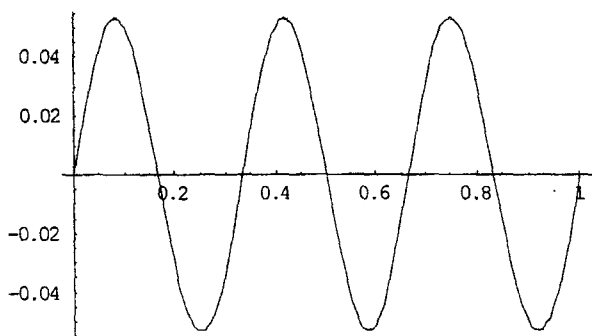
$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \omega_n^{(\infty)}: Z_p(\omega) &= iA_n \frac{1}{\omega - \omega_n^{(\infty)} + i\alpha_n} = \frac{A_n \alpha_n}{(\omega - \omega_n^{(\infty)})^2 + \alpha_n^2} + i \frac{A_n (\omega - \omega_n^{(\infty)})}{(\omega - \omega_n^{(\infty)})^2 + \alpha_n^2}, \\ \omega \rightarrow \omega_n^{(0)}: Z_p(\omega) &= -iA_0 (\omega - \omega_n^{(0)} + i\alpha_0) = A_0 \alpha_0 - iA_0 (\omega - \omega_n^{(0)}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

где A_n, A_0, α_n и α_0 - положительные постоянные. Согласно первой формуле (5.31) в резонансных точках $\omega = \omega_n^{(\infty)}$ действительная часть импеданса максимальна, а мнимая часть обращается в ноль. На Рис. 5.6 отчетливо видны четыре такие точки ($n=1, 2, 3, 4$), точка $n=5$ только наметилась, а резонансы с более высокими n при взятом для расчетов значении частоты столкновений v_e не проявились вообще. Далее, в соответствии со второй формулой (5.31) в точках $\omega = \omega_n^{(0)}$ мни-

мная часть импеданса проходит через ноль (с отрицательным наклоном), а действительная часть достигает минимума. На Рис. 5.6 отчетливо видны три такие точки ($n=1, 2, 3$).



a



б

Рис. 5.7

Распределение потенциала в длинном конденсаторе при $n=3$:

a - $\omega \approx \omega_n^{(3)}$, *б* - $\omega \approx \omega_n^{(0)}$

Рассмотрим распределение потенциала в длинном конденсаторе на частоте ω , близкой к одной из резонансных частот. При $\omega = \omega_n^{(n)}$ имеем $k_m = \pi(2n-1)/d_c$, поэтому на длине конденсатора укладывается нечетное число полуволн (длина полуволны есть $\lambda_n/2 = \pi/k_m = d_c/(2n-1)$). При этом разность по-

тенциалов между обкладками конденсатора максимальна (Рис. 5.7а). При $\omega = \omega_n^{(0)}$ имеем $k_m = \pi(2n)/d_c$, поэтому на длине конденсатора укладывается четное число полуволн (длина полуволны есть $\lambda_n/2 = \pi/k_m = d_c/(2n)$). При этом разность потенциалов между обкладками конденсатора близка к нулю (Рис. 5.7б). Рис. 5.7 построен для случая $n=3$ для тех же параметров конденсатора, что были взяты при построении Рис. 5.6. По пространственному распределению потенциала видно, что резонансы $\omega = \omega_n^{(\infty)}$ и $\omega = \omega_n^{(0)}$ отличаются по физическим процессам, протекающим в плазменном конденсаторе, хотя и в том, и в другом случаях имеет место резонансное возбуждение внешним источником косых ленгмюровских волн в ограниченной анизотропной плазме. Заметим, что по величине напряжения на конденсаторе (максимальное или нулевое) распределения потенциалов, показанные на Рис. 5.7. и Рис. 5.3 имеют очевидное сходство. Дело в том, что резонанс $\omega = \omega_{Lz}$ в коротком конденсаторе относится к типу $\omega = \omega^{(\infty)}$, а резонанс $\omega = \omega_{Gz}$ является резонансом типа $\omega = \omega^{(0)}$.

Помимо особых точек $\omega_n^{(\infty)}$, связанных с корнями дисперсионного уравнения (5.30), импеданс (5.28) обращается в бесконечность и в точке $\omega = \omega_{Lz}$, являющейся нулем величины $\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_z}$. Эту особенность мы уже обсудили ранее для случая изотропной плазмы: при $\varepsilon_r = \varepsilon_z$ особенность в точке $\omega = \omega_{Lz}$ сводится к той же, что и в случае короткого конденсатора, т.е. импеданс плазменного конденсатора большой длины качественно верно описывается формулой (5.12) – см. Рис. 5.4. Если же плазма анизотропна, то импеданс (5.28) имеет корневую особенность, которую нельзя свести к простым формулам типа (5.31). Действительно, при $|\varepsilon_z| \ll \varepsilon_r \sim 1$ из (5.28) следует

$$Z_p \sim \frac{2i(k_{\perp} d_c)^{-1}}{\omega C_0 \sqrt{\varepsilon_z}} \left(\omega \approx \omega_{Lz} \rightarrow Z_p(\omega) \sim \frac{i\sqrt{2}(k_{\perp} d_c)^{-1}}{C_0 \sqrt{\omega_{Lz}(\omega - \omega_{Lz} + i\nu_e/2)}} \right). \quad (5.32)$$

При $\omega = \omega_{Lz}$ из (5.32) имеем $Z_p = 2(1+i)(k_{\perp} d_c)^{-1}/(C_0 \sqrt{\nu_e \omega_{Lz}})$. Последняя величина хорошо согласуется со значениями действительной и мнимой частей импеданса (они равны), показанными на Рис. 5.6 при $\omega/\omega_{Lz} = 1$.

При произвольной величине электронной циклотронной частоты Ω_e структура комплексного импеданса (5.28) усложняется. Дело в том, что при Ω_e отличной от нуля и от бесконечности у дисперсионного уравнения (5.30) имеются два решения (они приведены в формулах (3.32а) и (3.32б)). Одно решение принадлежит области частот от нуля до $\min(\omega_{Lz}, \Omega_e)$, а второе – расположено в диапазоне от $\max(\omega_{Lz}, \Omega_e)$ до Ω_e . В этих частотных областях в плазменном конденсаторе возможно резонансное возбуждение волн на разных частотах и при разных значениях продольных волновых чисел k_z . Поэтому должны наблюдаться две группы резонансов – в низкочастотной и более высокочастотной областях. Если частота столкновений мала, то число наблюдаемых резонансов может быть достаточно велико.

На Рис. 5.8 представлены действительные части импеданса (5.28) при $k_1 d_c = 15$ и $\nu_e/\omega_{Lz} = 0.02$ для двух значений внешнего магнитного поля – сравнительно сильного $\Omega_e = 1.5 \omega_{Lz}$ (Рис. 5.8а) и слабого $\Omega_e = 0.5 \omega_{Lz}$ (Рис. 5.8б). В случае сильного магнитного поля одна группа примерно из шести-семи резонансов лежит в области частот $\omega/\omega_{Lz} < 1$. Эти резонансы обусловлены возбуждением «косой» ленгмюровской волны. Вторая группа из четырех резонансов, связанная с «косой» циклотронной волной, лежит в области частот от циклотронной частоты до верхней гибридной. При увеличении циклотронной частоты вторая группа резонансов смещается в более высокочастотную область, а первая группа – практически не меняется (сравни с Рис. 5.6). В случае слабого внешнего магнитного поля одна группа из четырех резонансов расположена в области частот меньших Ω_e , а вторая группа, достаточно тесная, принадлежит диапазону от ω_{Lz} до Ω_e . При уменьшении внешнего магнитного поля первая группа резонансов исчезает, а вторая вырождается в резонанс $\omega = \omega_{Lz}$ (см Рис. 5.4).

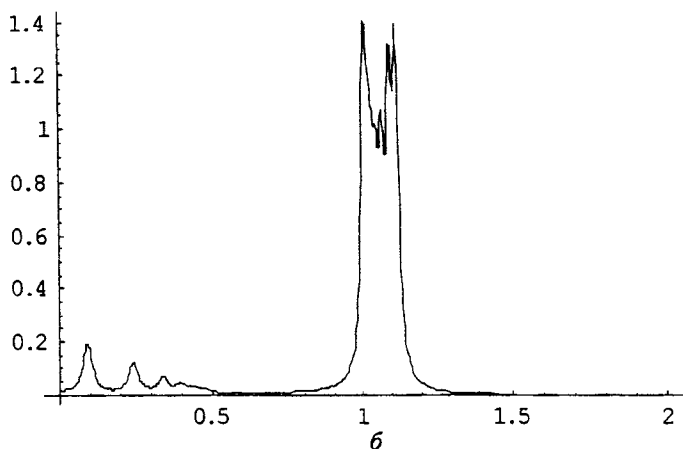
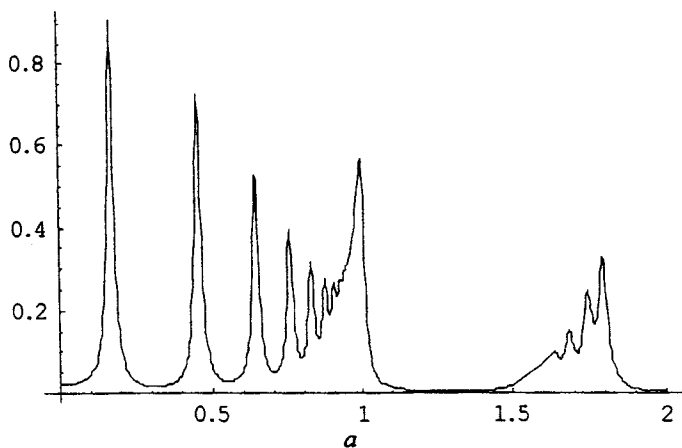


Рис. 5.8

Действительная часть импеданса конденсатора большой длины:
 а – сильное магнитное поле $\Omega_e = 1.5 \omega_{ce}$, б – слабое магнитное поле $\Omega_e = 0.5 \omega_{ce}$

На любом из Рис. 5.8 при $\omega = \omega_{ce}$ присутствует корневой резонанс (5.32). Только при $\Omega_e \rightarrow 0$ он трансформируется в обычный резонанс типа резонанса в первой формуле (5.9).

5.4. Резонансные свойства комплексного импеданса. Потери энергии в плазме

При исследовании резонансных свойств комплексного импеданса плазменного конденсатора $Z_p(\omega)$ и выяснении смысла его полюсов $\omega = \omega^{(p)}$ и нулей $\omega = \omega^{(0)}$ нам понадобятся некоторые элементарные сведения из электротехники.

Известно, что импедансы обычных (не плазменных) емкости C и индуктивности L определяются формулами

$$Z_C = \frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = -i\omega L. \quad (5.33)$$

Импеданс последовательного соединения емкости и индуктивности есть

$$Z_{\Sigma} = Z_C + Z_L = -i\omega L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}, \quad (5.34)$$

а при параллельном соединении емкости и индуктивности импеданс оказывается следующим

$$Z_{\parallel} = \frac{Z_C Z_L}{Z_C + Z_L} = \frac{i}{\omega C} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (5.35)$$

Здесь $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - резонансная частота последовательного контура. Смену знака у импеданса при переходе частоты ω через ω_0 можно трактовать как переход соединения емкости с индуктивностью от системы емкостного типа к индуктивной системе, или наоборот. При $\omega \rightarrow \omega_0$ импеданс последовательного соединения Z_{Σ} стремится к нулю, при этом к нулю стремится падение напряжения на соединении, а ток в цепи достигает максимума (так называемый резонанс напряжений). Импеданс параллельного соединения Z_{\parallel} при $\omega \rightarrow \omega_0$ обращается в бесконечность (имеет полюс), при этом ток в цепи стремится к нулю, а падение напряжения на соединении достигает напряжения на источнике (так называемый резонанс токов). Напомним, что при резонансе токов через конденсатор и индуктивность протекают большие токи, но во внешнюю цепь они не отвечают.

В случае короткого конденсатора с бесстолкновительной плазмой без вакуумных зазоров формула для импеданса следует из выражения (5.9) и имеет

вид

$$Z_p(\omega) = i \frac{1}{\omega C_0} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{L_e}^2}. \quad (5.36)$$

Формула (5.56) совпадает с (5.35), если под ω_0 понимать ω_{L_e} , а C заменить на C_0 . Следовательно, при любой частоте ω короткий плазменный конденсатор без зазоров эквивалентен параллельному соединению емкости $C = C_0$ и индуктивности $L = (\omega_{L_e}^2 C_0)^{-1}$. При $\omega > \omega_{L_e}$ плазменный конденсатор обладает емкостными свойствами, а при $\omega < \omega_{L_e}$ преобладающими являются свойства индуктивности. Заметим, что индуктивность плазмы ничего общего с электромагнитной индукцией не имеет, а обусловлена конечностью массы носителей заряда.

Если последовательно с емкостью C и индуктивностью L подключено активное сопротивление R , то вместо (5.34) имеем

$$Z_{\Sigma} = R + Z_C + Z_L = R - i\omega L \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}. \quad (5.37)$$

Если же в параллельном соединении емкости C и индуктивности L активное сопротивление R включено последовательно с индуктивностью, то комплексный импеданс рассчитывается по следующей формуле:

$$Z_{\parallel} = \frac{Z_C(Z_L + R)}{Z_C + Z_L + R} = \frac{i}{\omega C} \frac{\omega(\omega + iR/L)}{\omega(\omega + iR/L) - \omega_0^2}. \quad (5.38)$$

Сопоставляя формулу (5.38) с первым выражением (5.9), видим их полную тождественность, если положить

$$\left. \begin{array}{l} C = C_0 \\ \omega_0 = \omega_{L_e} \\ R/L = \nu_e \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = C_0 \\ L = (\omega_{L_e}^2 C_0)^{-1} \\ R = \nu_e (\omega_{L_e}^2 C_0)^{-1} \end{array} \right. \quad (5.39)$$

Таким образом, эквивалентной схемой короткого плазменного конденсатора без вакуумных зазоров является схема в пунктирной рамке, представленная на Рис. 5.9а. Параметры эквивалентной схемы однозначно определяются формулами (5.39). Распределение потенциала по длине короткого плазменного конденсатора без зазоров может быть только таким, как показано прямой линией на Рис. 5.4. При $\omega = \omega_{L_e}$ в плазменном конденсаторе имеет место резонанс токов.

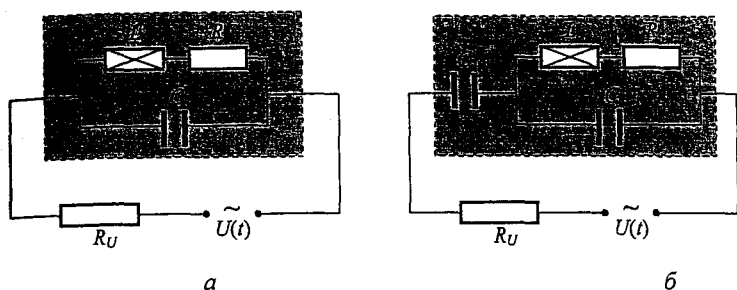


Рис. 5.9

Эквивалентная электротехническая схема короткого плазменного конденсатора: а – без вакуумных зазоров; б – с вакуумными зазорами

В случае короткого плазменного конденсатора с зазорами ситуация несколько усложняется. Рассмотрим схему, изображенную на Рис. 5.9б. Импеданс комбинированного соединения в пунктирной рамке определяется формулой

$$Z_{\text{шл}} = \frac{i}{\omega C_1} + Z_{\text{ш}} = \frac{i}{\omega C_2} \frac{\omega(\omega + iR/L) - \beta\omega_0^2}{\omega(\omega + iR/L) - \omega_0^2}, \quad (5.40)$$

где $C_2 = C_1 C / (C_1 + C)$, $\beta = C / (C_1 + C)$. Сопоставляя формулу (5.40) с выражением (5.12), видим их полную тождественность, если положить

$$\left. \begin{array}{l} C_2 = C_0 \\ \omega_0 = \omega_{\text{л}} \\ R/L = v_e \\ \beta\omega_0^2 = \omega_{\text{св}}^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C = C_0 d_c / (d_c - 2\Delta) \\ C_1 = C_0 d_c / 2\Delta \\ L = (\omega_{\text{л}}^2 C_0)^{-1} (d_c - 2\Delta) / d_c \\ R = v_e (\omega_{\text{л}}^2 C_0)^{-1} (d_c - 2\Delta) / d_c \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Таким образом, эквивалентной схемой короткого плазменного конденсатора с вакуумными зазорами является комбинированная схема, представленная на Рис. 5.9б в пунктирной рамке. Параметры эквивалентной схемы однозначно определяются формулами (5.41). При $\omega = \omega_{\text{л}}$ в плазменном конденсаторе с зазорами имеет место резонанс токов. При этом распределение потенциала по длине конденсатора оказывается таким, как показано на Рис. 5.3а. Если $\omega = \omega_{\text{св}}$, то в плазменном конденсаторе с зазорами реализуется резонанс напряжений (падения напряжения на слое плазмы и на зазорах равны и противоположны). При этом распределение потенциала по длине конденсатора оказывается таким, как

показано на Рис. 5.36.

Обратим внимание на важную особенность излагаемого здесь подхода: если с точки зрения электротехнической цепи плазменный конденсатор является сосредоточенным элементом, на котором можно лишь определить падение напряжения, то в результате нашего рассмотрения описывается детальная структура поля внутри плазменного образования. Причем степень детализации согласуется с неравенством (4.3).

Перейдем теперь к резонансным свойствам импеданса (5.28) анизотропного плазменного конденсатора большой длины. При этом используем формулы (5.31), справедливые вблизи резонансных частот $\omega^{(0)}$ и $\omega^{(\infty)}$. Заметим, что к формулам такого же вида сводятся при $\omega \approx \omega_0$ простейшие импедансы (5.37) и (5.38), а именно:

$$\begin{aligned} Z_{\parallel} &= \frac{i}{2C} \frac{1}{\omega - \omega_0 + iR/2L}, \\ Z_{\perp} &\approx R - i2L(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Приближенный вариант формулы (5.42) для Z_{\parallel} предполагает, что $R/L \ll \omega_0$.

Из сравнения первой формулы (5.31) и первой формулы (5.42) следует, что при $\omega = \omega_n^{(\infty)}$ в анизотропном плазменном конденсаторе большой длины имеет место резонанс токов. При этом распределение потенциала оказывается таким, как показано на Рис. 5.7а, а эквивалентной схемой анизотропного конденсатора является схема, изображенная на Рис. 5.9а – параллельное соединение. Для определения параметров этой эквивалентной схемы сопоставим первую формулу (5.31) с первой формулой (5.42), что дает соотношения $A_{\infty} = 1/2C$, $\alpha_{\infty} = R/2L$, $\omega_n^{(\infty)} = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. С другой стороны, из первой формулы (5.31) имеем выражения $A_{\infty} = (Z'_p)^2 (dZ'_p/d\omega)^{-1}$, $\alpha_{\infty} = Z'_p (dZ'_p/d\omega)^{-1}$. Тогда, для параметров эквивалентной схемы получаем следующие формулы:

$$C = \frac{1}{2} (Z'_p)^{-2} \frac{dZ'_p}{d\omega}, \quad L = \frac{2}{(\omega_n^{(\infty)})^2} (Z'_p)^2 \left(\frac{dZ'_p}{d\omega} \right)^{-1}, \quad R = \frac{4}{(\omega_n^{(\infty)})^2} (Z'_p)^3 \left(\frac{dZ'_p}{d\omega} \right)^{-2}. \quad (5.43)$$

В формулы (5.43) следует подставить выражение (5.28), а затем положить

$\omega = \omega_n^{(\infty)}$. Аналитический результат из-за его громоздкости мы здесь естественно не приводим.

Далее, из сравнения второй формулы (5.31) и второй формулы (5.42) следует, что при $\omega = \omega_n^{(0)}$ в анизотропном плазменном конденсаторе большой длины имеет место резонанс напряжений. При этом распределение потенциала оказывается таким, как показано на Рис. 5.76, а эквивалентной схемой анизотропного конденсатора является самый обыкновенный последовательный C, L, R контур. Параметры этой эквивалентной схемы вычисляются аналогично (5.43) и определяются следующими формулами:

$$C = -\frac{1}{(\omega_n^{(0)})^2} \left(\frac{1}{Z'_p} \frac{dZ'_p}{d\omega} \right)^{-1}, \quad L = -\frac{1}{Z'_p} \frac{dZ'_p}{d\omega}, \quad R = Z'_p. \quad (5.44)$$

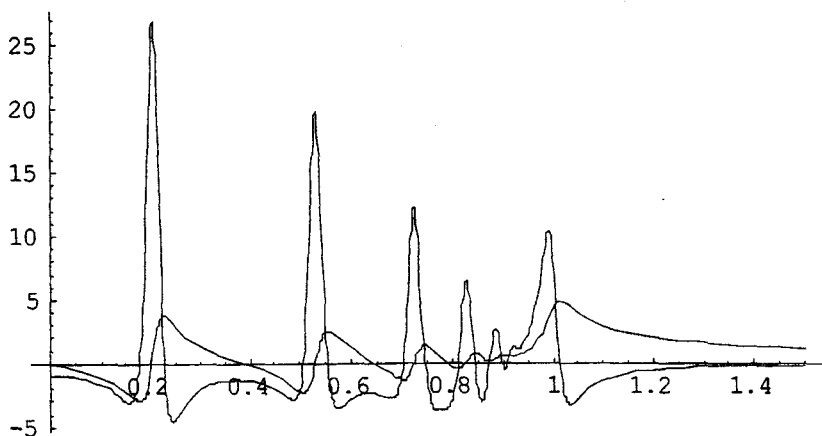


Рис. 5.10
Производная $dZ'_p/d\omega$ при $k_1 d_C = 15$ и $v/\omega_L = 0.05$

Формулы (5.43) и (5.44) весьма удобны для численного определения параметров эквивалентных схем плазменных конденсаторов (т.е. разрядов емкостного типа). Величины $Z'_p(\omega_n^{(\infty)})$ определяются по Рис. 5.6. Производные $dZ'_p(\omega_n^{(\infty)})/d\omega$ можно определить при помощи Рис. 5.10, на котором, помимо

производной $dZ_p^*/d\omega$, для удобства показана линия $const Z_p^*$. Резонансные точки совпадают с нулями функции $Z_p^*(\omega)$ (см. (5.31)): в точках $\omega = \omega_n^{(e)}$ производная $dZ_p^*/d\omega$ положительна, а при $\omega = \omega_n^{(o)}$ будет $dZ_p^*/d\omega < 0$. Сами резонансные частоты $\omega_n^{(e)}$ и $\omega_n^{(o)}$ определяются либо экспериментально, либо по формулам, приведенным в разд. 3. Заметим, что вдали от резонансных частот представлять анизотропный плазменный конденсатор большой длины эквивалентной схемой нецелесообразно, поскольку в разных частотных диапазонах будут совершенно разные схемы, параметры которых подобрать сложно из-за сложной частотной зависимости точного импеданса (5.28).

Для приложений важно знать среднюю по периоду мощность внешнего источника, выделяемую на элементах цепи. Для цепи, изображенной на Рис. 4.1, полная мощность определяется формулой

$$P = \frac{1}{2} |U|^2 \left[\frac{Z_{\text{ц}}'}{(Z_{\text{ц}}' + Z_p')^2 + (Z_{\text{ц}}'' + Z_p'')^2} + \frac{Z_p'}{(Z_{\text{ц}}' + Z_p')^2 + (Z_{\text{ц}}'' + Z_p'')^2} \right]. \quad (5.45)$$

Второе слагаемое в (5.45) определяет мощность P_p , выделяемую в плазме. Именно эта мощность является одной из важных характеристик технологических плазменных установок. Если эффективность цепи определять по мощности выделяемой в плазме, то нужно использовать следующее выражение:

$$К.П.Д. = \frac{P_p}{P} = \frac{Z_p'}{Z_{\text{ц}}' + Z_p'}. \quad (5.46)$$

В случае большого активного сопротивления цепи, $Z_{\text{ц}}' = R_{\text{ц}} \gg |Z_p|_{\text{max}}$, мощность выделяемая в плазме и эффективность даются формулами

$$P_p = \frac{|U|^2}{2R_{\text{ц}}^2} Z_p'(\omega), \quad К.П.Д. = \frac{Z_p'}{R_{\text{ц}}} \ll 1. \quad (5.47)$$

Величины (5.47) максимальны в максимумах действительной части импеданса, т.е. в его полюсах $\omega = \omega_n^{(e)}$. Напомним, что при $\omega = \omega_n^{(e)}$ в цепи имеет место резонанс токов: падение напряжения на конденсаторе максимально, ток в цепи минимален, а токи, текущие по плазме, велики.

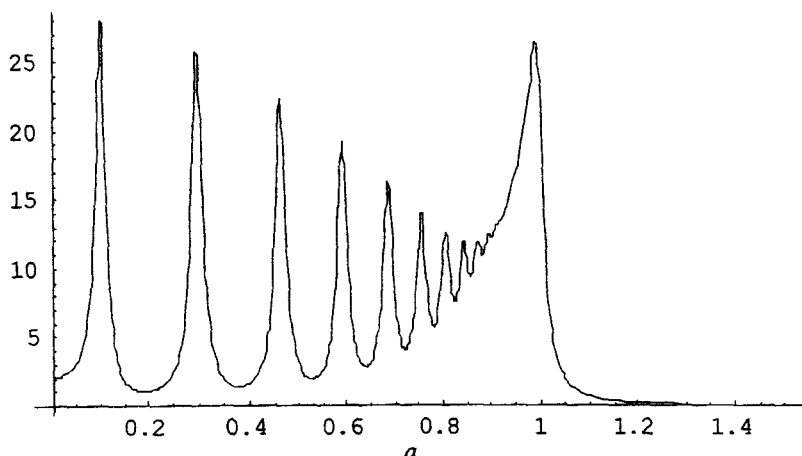
При $|Z_{\text{ц}}| \ll |Z_p|_{\text{min}}$ формулы для мощности в плазме и эффективности

имеют вид

$$P_p = \frac{1}{2} |U|^2 \frac{Z'_p}{(Z'_p)^2 + (Z''_p)^2}, \quad \text{К.П.Д.} \approx 1. \quad (5.48)$$

Мощность (5.48) максимальна в нулях мнимой части импеданса, причем в тех нулях, где действительная часть импеданса достигает минимума (см. Рис. 5.6). Это имеет место при $\omega = \omega_n^{(0)}$, когда в цепи наблюдается резонанс напряжений, и ток в цепи максимален.

На Рис. 5.11 в относительных единицах в зависимости от безразмерной частоты ω/ω_{Lc} показаны мощности, выделяемые в плазменном конденсаторе большой длины ($k_{\perp} d_c = 30$) в случае малой частоты столкновений $\nu/\omega_{Lc} = 0.025$ при очень большом сопротивлении цепи $R_{\perp} \gg |Z_p|_{\text{max}}$ (Рис. 5.11а) и при очень малом сопротивлении цепи $|Z_{\perp}| \ll |Z_p|_{\text{max}}$ (Рис. 5.11б). Наблюдается большое число резонансов, причем резонансы в случае большого сопротивления цепи (резонансы тока $\omega = \omega_n^{(0)}$) сдвинуты относительно резонансов при малом сопротивлении цепи (резонансы напряжения $\omega = \omega_n^{(0)}$).



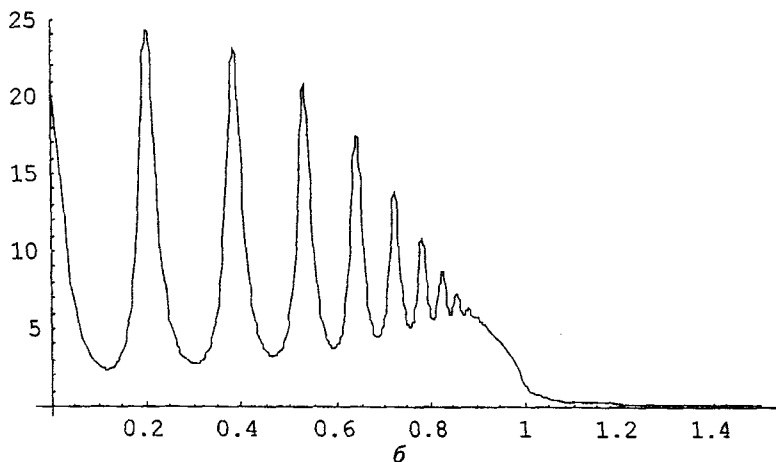
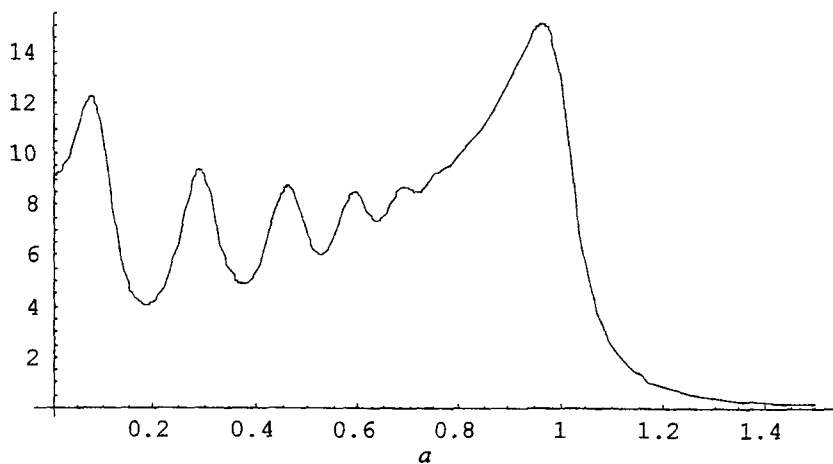


Рис. 5.11

Мощность, выделяемая в плазме при большом (а) и малом (б) сопротивлении цепи. Случай малого затухания $\nu/\omega_{Le} = 0.025$

На следующем Рис. 5.12 те же мощности представлены для случая сильно столкновительной плазмы $\nu/\omega_{Le} = 0.1$. Число видимых резонансов уменьшилось, а их ширина увеличилась.



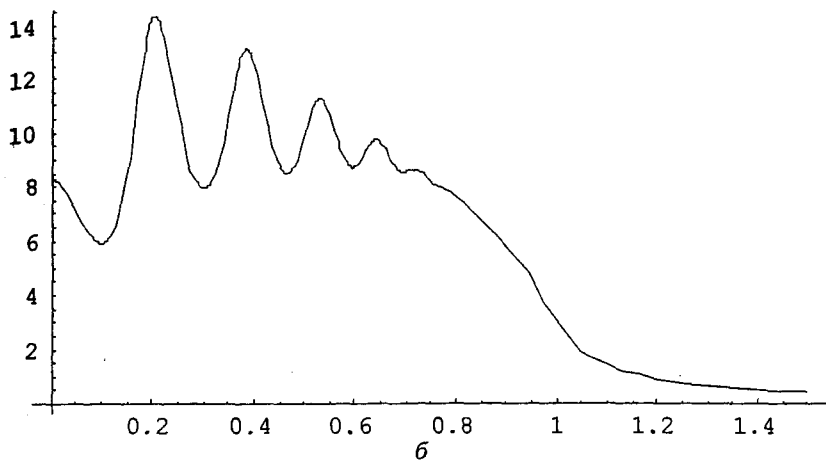


Рис. 5.12

Мощность, выделяемая в плазме при большом (а) и малом (б) сопротивлении цепи. Случай большого затухания $\nu/\omega_{\text{ЛЭ}} = 0.1$

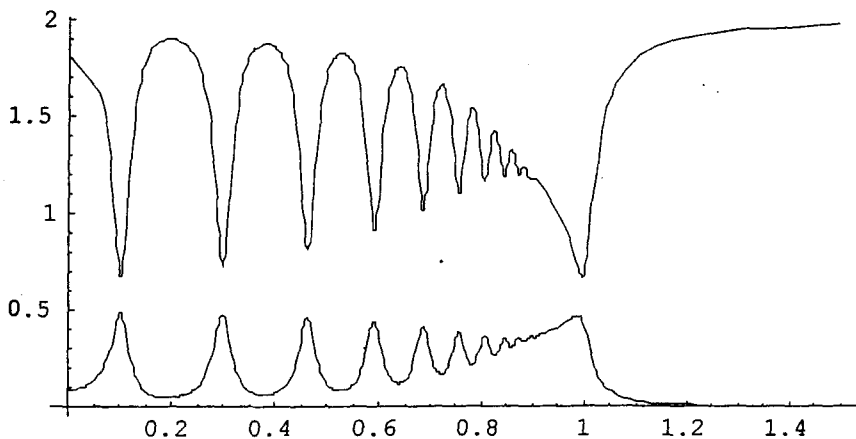


Рис. 5.13

Мощность, выделяемая в цепи с плазменным конденсатором при $R_{\text{У}} \sim |Z_{\text{P}}|$. Случай малого затухания $\nu/\omega_{\text{ЛЭ}} = 0.025$

И наконец, на Рис. 5.13 иллюстрирует промежуточный случай $R_{ц} \sim |Z_p|$ при достаточно малом затухании $\nu/\omega_{pe} = 0.025$ и $Z_{ц}^* = 0$. Показаны потери источника как в плазме – нижняя кривая, так и в остальной части цепи – верхняя кривая. Резонансы наблюдаются на частотах $\omega = \omega_n^{(*)}$. Чтобы проявились резонансы $\omega = \omega_n^{(0)}$ нужны существенно меньшие сопротивления цепи $R_{ц}$.

5.5. Поверхностные волны в плазменных системах емкостного типа

При постановке краевой задачи (5.22) мы полагали, что плазма полностью и однородно заполняет область локализации электрического поля в конденсаторе (емкостном разряде), т.е. функции ε_{rr} и ε_{zz} не зависят от координаты r при $r < R_c$. Тем самым мы исключили из рассмотрения особенности, которые обусловлены возможным наличием у плазмы свободной границы. В подразд. 3.4. показано, что в плазменном столбе со свободной границей имеются поверхностные волны (3.62) – (3.64). С возбуждением поверхностных волн связаны дополнительные резонансы, которые будут рассмотрены в настоящем подразделе. Исходим из следующего обобщения краевой задачи (5.22):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \varepsilon_{rr}(\omega, r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \varepsilon_{zz}(\omega, r) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0, \\ \Phi(r, z) \Big|_{r=R_c} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, r) \Big|_{z=0+0} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z, r) \Big|_{z=d_c-0} = -4\pi \frac{1}{\varepsilon_{zz}(\omega, r)} \sigma(r). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Уравнение для Φ в (5.49) получается из первого уравнения системы (5.3). Ленгмюровскую частоту электронов плазмы, входящую в формулы для $\varepsilon_{rr}(\omega, r)$ и $\varepsilon_{zz}(\omega, r)$ зададим в виде (3.54). В общем случае краевая задача (5.49) не решается.

Используем то достаточное очевидное с физической точки зрения предположение, что при резонансе в системе устанавливается вполне определенное пространственное распределение поля – некая собственная волна. Примером могут служить распределения, представленные на Рис. 5.7. Если в плазменном столбе установилась структура поверхностной волны, то потенциал электриче-

ского поля можно представить в виде

$$\Phi(r, z) = \Phi(r) \{ A \exp[ik_z(\omega)z] + B \exp[-ik_z(\omega)z] \}, \quad (5.50)$$

где $k_z(\omega)$ выражается из уравнения (3.58), а $\Phi(r)$ может быть вычислена при помощи формулы (3.56) (при $R = R_c$). Функция (5.50) удовлетворяет уравнению (5.49) и граничному условию при $r = R_c$, а постоянные A и B должны определяться из граничных условий при $z = 0, d_c$. Если число длин волн, укладываемых по длине плазменного столба не велико, то $k_z(\omega) \sim d_c^{-1}$. Поэтому в случае длинного конденсатора ($r_p \sim r_c < R_c \ll d_c$) выполнено неравенство

$$k_z(\omega)R_c \ll 1, \quad (5.51)$$

что позволяет при вычислении $k_z(\omega)$ использовать формулу (3.63) или (3.64), а функцию $\Phi(r)$ в (5.50) определить по формуле (3.65).

Предположим для простоты, что радиус электродов конденсатора r_c совпадает с радиусом плазменного столба r_p . Тогда, с учетом формулы (3.65), можно считать, что плотность заряда $\sigma(r)$ есть постоянная. Подставляя (5.50) в граничные условия и используя формулу (4.12а), находим следующее выражение для потенциала на оси плазменного столба:

$$\Phi(0, z) = i \frac{I}{\omega C_0 \epsilon_{\Sigma}(\omega)} \frac{\cos[k_z(\omega)z] - \cos[k_z(\omega)(d_c - z)]}{k_z(\omega)d_c \sin[k_z(\omega)d_c]}. \quad (5.51)$$

Наконец, подставляя (5.51) в общее соотношение (5.2), находим искомое уравнение цепи

$$U = I Z_{\Sigma} + I \frac{i}{\omega C_0 \epsilon_{\Sigma}(\omega)} \frac{1}{2} \frac{1 - \cos[k_z(\omega)d_c]}{k_z(\omega)d_c \sin[k_z(\omega)d_c]} \rightarrow U = I Z_{\Sigma} + I Z_p(\omega), \quad (5.52)$$

где

$$Z_p(\omega) = \frac{i}{\omega C_0 \epsilon_{\Sigma}(\omega)} \frac{1}{2} \frac{1 - \cos[k_z(\omega)d_c]}{k_z(\omega)d_c \sin[k_z(\omega)d_c]} \quad (5.53)$$

- импеданс плазменного столба (разряда) со свободной поверхностью.

Структура импеданса (5.53) такая же, как и импеданса (5.28), но содержание их существенно различное. Импеданс (5.28) не учитывает возбуждения поверхностной волны, поскольку в случае, для которого он был получен, поверх-

ностной волны просто нет. Наоборот, импеданс (5.53) учитывает именно поверхностную волну. В частности, при $\Omega_e = 0$ формула (5.28) переходит в выражение (5.29), которое никаких резонансных особенностей не содержит (кроме точки $\omega = \omega_{Lz}$, см. Рис. 5.4). Импеданс (5.53) в низкочастотной области $\omega \ll \omega_{Lz}$, с учетом уравнения (3.63) и при наличии столкновений, записывается в виде

$$Z_p(\omega) = -\frac{i}{\omega C_0} \omega(\omega + i\nu_e)\omega_{Lz}^{-2} \frac{\tan[\zeta \sqrt{\omega(\omega + i\nu_e)\omega_{Lz}^{-2}}]}{\zeta \sqrt{\omega(\omega + i\nu_e)\omega_{Lz}^{-2}}}, \quad \zeta = \frac{d_c}{r_p \sqrt{2 \ln(R_c/r_p)}}. \quad (5.54)$$

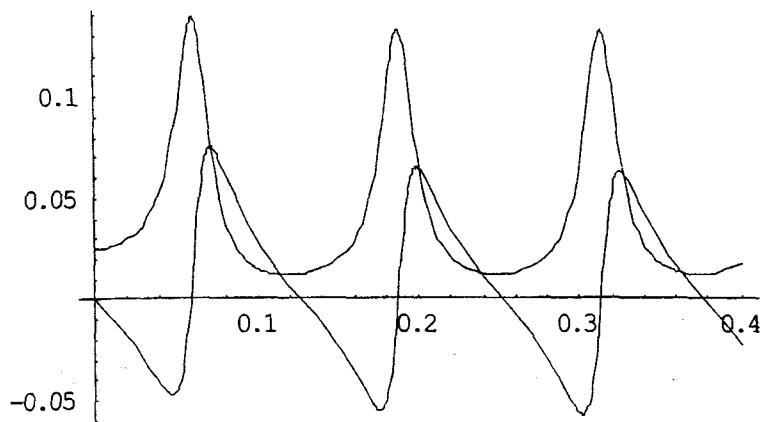


Рис. 5.14

Действительная и мнимая части импеданса длинного емкостного разряда на поверхностной волне при $\nu_e/\omega_{Lz} = 0.025$ и $\zeta = 50$

График импеданса (5.54) представлен на Рис. 5.14 при $\nu_e/\omega_{Lz} = 0.025$ и $\zeta = 50$. По горизонтальной оси отложена безразмерная частота ω/ω_{Lz} , по вертикальной – комплексный импеданс, умноженный на $\omega_{Lz} C_0$. Видны полюса и нули импеданса, обусловленные резонансами токов и напряжений при возбуждении в плазменном столбе поверхностной волны.

Иногда в условиях эксперимента частота источника ω является фиксированной. В этом случае меняются какие-то другие параметры разряда, например,

его длина (или радиус). На Рис. 5.15 представлен комплексный импеданс (5.54) в зависимости от параметра ζ при $v_s/\omega_{Lz} = 0.025$ и $\omega/\omega_{Lz} = 0.25$. Видно, что при двух значениях длины реализуются резонансы токов, а при одной длине – резонанс напряжений.

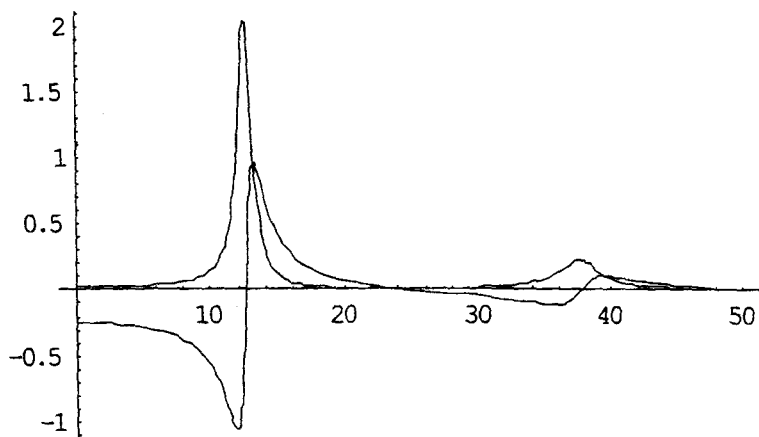


Рис. 5.15

Действительная и мнимая части импеданса длинного емкостного разряда на поверхностной волне в зависимости от длины при $v_s/\omega_{Lz} = 0.025$ и $\omega/\omega_{Lz} = 0.25$

6. Плазменные системы индуктивного типа

6.1. Электротехнические уравнения индуктивного разряда

Перейдем теперь к обсуждению разрядов индуктивного типа. Для этого рассмотрим цепь, в которую включен соленоид с однородным плазменным заполнением (Рис. 4.1б). Соленоид (катушка индуктивности) представляет собой участок цилиндра с радиусом r_L (радиус плазмы $r_p = r_L$), длиной d_L и с тонкой проволочной обмоткой, содержащей N_L витков. Из электродинамики известно, что в цилиндрических системах (в системах с продольной осью z) имеются электромагнитные поля (волны) двух типов: поля E -типа и поля B -типа. В азимутально симметричном случае в полях E -типа отличны от нуля составляющие электрического поля E_z и E_r , а у полей B -типа ненулевой оказывается только составляющая E_φ . Емкостной и индуктивный разряды различаются именно по типам, возбуждаемых в них электромагнитных полей. Рассматривая в предыдущем разделе емкостные плазменные системы, мы ушли только поля E -типа, ограничившись при этом потенциальным приближением. При рассмотрении индуктивных плазменных систем необходим учет полей B -типа, причем потенциальное приближение для этого принципиально не применимо. Поэтому запишем первые три уравнения системы (4.15), а последнее уравнение системы (4.15) (оно является следствием первых трех уравнений) в данном разделе не понадобится,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{rr} E_r + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r\varphi} E_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_\varphi \right) + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi\varphi} E_\varphi + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi r} E_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} E_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Граничные условия для уравнений (6.1) возьмем в форме (4.13) и, с учетом соотношения (4.9), запишем их в виде

$$\left\{ \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right\}_r = -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} J(z), \quad I = \frac{1}{N_L} \int_0^{d_L} J(z) dz, \quad (6.2)$$

где I - сила тока в цепи.

Для получения уравнения внешней цепи учтем, что в цепи с соленоидом действует э.д.с. индукции \mathcal{E}_L , «подключенная» в цепь последовательно с внешним источником. Поэтому уравнение цепи для комплексных амплитуд имеет вид $U + \mathcal{E}_L = IZ_{\text{ц}}$. Сама же э.д.с. индукции равна интегралу вдоль обмотки соленоида от компоненты электрического поля $E_{\varphi}(z, r)$. Учитывая, что длина обмотки соленоида равна $2\pi r_L N_L$ и вводя среднее по длине соленоида значение азимутальной составляющей напряженности электрического поля

$$\langle E_{\varphi}(z, r_L) \rangle = \frac{1}{d_L} \int_0^{d_L} E_{\varphi}(z, r_L) dz, \quad (6.3)$$

представим э.д.с. индукции в виде $\mathcal{E}_L = 2\pi r_L N_L \langle E_{\varphi}(z, r_L) \rangle$ и запишем следующее уравнение внешней цепи:

$$U = IZ_{\text{ц}} - 2\pi r_L N_L \langle E_{\varphi}(z, r_L) \rangle. \quad (6.4)$$

Для решения уравнений (6.1) могут потребоваться и другие граничные условия (например, непрерывность тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на границах плазмы), которые мы сформулируем позже. Краевая задача (6.1), (6.2) и уравнение (6.4) лежат в основе излагаемой ниже теории плазменного соленоида. Метод решения следующий: с помощью условий (6.2) электромагнитное поле, определяемое из уравнений (6.1), связывается с током I , после чего поле, выраженное через ток, подставляется в уравнение (6.4). В результате получается электротехническое уравнение цепи (4.16).

6.2. Индуктивность открытого плазменного соленоида

Рассмотрим соленоид, продольные границы которого $z = 0$ и $z = d_L$ открыты, т.е. являются свободными границами плазмы, однородно заполняющей область $0 < z < d_L$ и $r < r_L$. Предположим, что в соленоиде такой конструкции электромагнитное поле однородно вдоль оси z . Для такого поля в уравнениях (6.1) следует положить $\partial/\partial z = 0$. Позднее в подразд. 6.3 и 6.4 мы дадим строгое обоснование этого предположения. В рамках предположения о постоянстве поля по

длине соленоида уравнение цепи (6.4) записывается в виде

$$U = IZ_{\text{ц}} - 2\pi r_L N_L E_{\phi}(r_L). \quad (6.5)$$

Кроме того, третье уравнение системы (6.1) становится независимым от первых двух уравнений. При этом компонента поля E_z , не входящая также в граничное условие (6.2), оказывается независимой от компонент E_r и E_{ϕ} , а поэтому можно положить $E_z = 0$. Тогда из первых двух уравнений системы (6.1) после исключения E_r получается следующее уравнение:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_{\phi} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 E_{\phi} = 0, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{вн}} - \frac{\varepsilon_{\text{вн}} \varepsilon_{r\phi}}{\varepsilon_{rr}}, \quad (6.6)$$

которое справедливо как внутри соленоида ($r < r_L$), так и вне его ($r > r_L$, вне соленоида $\varepsilon_1 = 1$). Граничные условия для уравнения (6.6) с учетом (6.2) имеют вид

$$\{E_{\phi}\}_{r_L} = 0, \quad \left\{ \frac{dE_{\phi}}{dr} \right\}_{r_L} = -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi N_L}{c} I. \quad (6.7)$$

В (6.7) добавлено условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля E_{ϕ} на границе $r = r_L$, которое выполняется всегда. Кроме того, функция $E_{\phi}(r)$ должна быть ограничена в нуле и на бесконечности. Заметим, что при получении уравнения (6.6) мы не использовали обычного для электротехники условия квазистационарности, поскольку это слишком сузило бы область допустимых к рассмотрению значений частот $\omega_{\text{вн}}$ и $\Omega_{\text{вн}}$. Такую же точность в принципе следует сохранить в уравнении (6.6) и в области $r > r_L$, где $\varepsilon_1 = 1$. Если же при $r > r_L$ использовать квазистационарное приближение (4.2), понимая под r радиус соленоида r_L , то в левой части уравнения (6.6) следует пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым.

При $r < r_L$ ограниченное решение уравнения (6.6) имеет вид $E_{\phi}(r) = A_1 J_1[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r]$, где $J_1(x)$ - функция Бесселя 1-го порядка. В области $r > r_L$ решение нужно взять следующее: $E_{\phi}(r) = A_2 H_1^{(1)}[(\omega/c)r]$ ($H_1^{(1)}(x)$ - функция Ганкеля 1-го рода, порядка 1). Записывая решение через функцию Ганкеля 1-го рода,

мы использовали принцип причинности, согласно которому при $\omega = \omega + i\delta$ ($\delta \rightarrow +0$), поле должно экспоненциально затухать при $r \rightarrow \infty$ ($-\exp(-\delta r/c)$ - условие излучения). Подставляя найденные решения в граничные условия (6.7) и определяя постоянные $A_{1,2}$, находим электрическое поле в объеме соленоида ($r \leq r_L$)

$$E_p(r) = i \frac{4\pi N_L}{c d_L} I \frac{J_1[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r] H_1^{(0)}[(\omega/c)r_L]}{\sqrt{\epsilon_1} J_0[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r_L] H_1^{(0)}[(\omega/c)r_L] - J_1[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r_L] H_0^{(0)}[(\omega/c)r_L]} \quad (6.8)$$

Подставляя далее $E_p(r_L)$ в уравнение (6.5), получим следующее электротехническое уравнение цепи с плазменным соленоидом:

$$U_0 = IZ_{\text{ц}} + IZ_p(\omega), \quad (6.9)$$

в котором

$$Z_p(\omega) = Z_p'(\omega) + iZ_p''(\omega) = -i\omega L_0 \frac{2[(\omega/c)r_L]^{-1} J_1[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r] H_1^{(0)}[(\omega/c)r_L]}{\sqrt{\epsilon_1} J_0[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r_L] H_1^{(0)}[(\omega/c)r_L] - J_1[(\omega/c)\sqrt{\epsilon_1} r_L] H_0^{(0)}[(\omega/c)r_L]} \quad (6.10)$$

есть комплексный импеданс открытого плазменного соленоида, а L_0 - индуктивность вакуумного соленоида (т.е. такого же соленоида, но без плазмы). Индуктивность плазменного соленоида можно определить соотношением $L_p(\omega) = -Z_p''(\omega)/\omega$, а его активное сопротивление дается формулой $R_p(\omega) = Z_p'(\omega)$.

В связи с формулой (6.10) дадим важное пояснение. В настоящем курсе используется Гауссова система единиц, в которой электродвижущая сила самоиндукции определяется формулой $\mathcal{E}_L = -(1/c^2)L dI/dt = i(1/c^2)\omega LI$. Поэтому, чтобы сохранить для импеданса индуктивности Z_L принятое в электротехнике выражение (5.33), мы переопределили индуктивность по правилу $L/c^2 \rightarrow L$, не вводя при этом нового обозначения. Фактически такое переопределение свелось к замене известного выражения для индуктивность вакуумного соленоида (т.е. цилиндрической катушки) $L_0 = 4\pi^2 r_L^2 N_L^2 d_L^{-1}$ на выражение $L_0 = 4\pi^2 r_L^2 N_L^2 d_L^{-1} c^{-2}$.

Если вместо точного уравнения (6.6) в области $r > r_L$ использовать это уравнение в квазистационарном приближении (т.е. без члена $(\omega^2/c^2)E_p$), то вме-

сто формулы (6.10) получится следующая более простая формула:

$$Z_p(\omega) = Z_p'(\omega) + iZ_p''(\omega) = -i\omega L_0 \frac{2J_1[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r_L]}{(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r_L J_0[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r_L]} \quad (6.11)$$

Это же выражение получается при $(\omega/c)r_L \ll 1$ и из выражения (6.10), если воспользоваться представлениями для функций Ганкеля $H_0^{(1)}(x)$ при малом значении аргумента x . Между формулами (6.10) и (6.11) имеется существенное различие. Формула (6.10) даже в отсутствии плазмы, т.е. при $\varepsilon_1 = 1$, содержит отличную от нуля действительную часть, пропорциональную $J_1^2[(\omega/c)r_L]$. Действительная часть импеданса отвечает, как известно, за некое поглощение энергии внешнего источника. Для выяснения природы этого поглощения учтем, что функция Ганкеля 1-го рода описывает цилиндрическую электромагнитную волну, уходящую на бесконечность, а значит излучаемую из соленоида через его боковую поверхность. На это излучение и расходуется энергия источника. Формула (6.11) излучения из соленоида не учитывает. В условиях эксперимента плазменный соленоид обычно окружен некоторыми поверхностями, отражающими излучение. Поэтому более адекватной экспериментам мы считаем формулу (6.11), которой и будем пользоваться вплоть до частоты $\omega \sim c/r_L$. В более высокочастотной области правильнее использовать формулу (6.10). Получим еще одну формулу для индуктивности соленоида, применимую в области высоких частот.

Чтобы не ограничиваться только квазистационарным приближением, но не учитывать при этом излучение через боковую поверхность соленоида, можно предположить, что соленоид заключен в проводящий цилиндрический кожух радиуса $r = R_L > r_L$. Тогда, дополняя краевую задачу (6.6), (6.7) условием $E_p(R_L) = 0$ и находя ее решение, не сложно получить для импеданса соленоида выражение, отличающееся от (6.10) только заменой функций Ганкеля $H_l^{(1)}[(\omega/c)r_L]$ на функции $X_l[(\omega/c)r_L] = J_l[(\omega/c)r_L] N_l[(\omega/c)R_L] - N_l[(\omega/c)r_L] J_l[(\omega/c)R_L]$:

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \frac{2[(\omega/c)r_L]^{-1} J_1[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r] X_1[(\omega/c)r_L]}{\sqrt{\varepsilon_1} J_0[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r_L] X_1[(\omega/c)r_L] - J_1[(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1} r_L] X_0[(\omega/c)r_L]} \quad (6.12)$$

Позднее мы сопоставим результаты, даваемые формулами (6.10), (6.11) и (6.12).

Проанализируем выражение (6.11) для плазмы с диэлектрической проницаемостью (4.4а). Если столкновения отсутствуют, то активное сопротивление плазменного соленоида $R_p = 0$, а выражение для его индуктивности оказывается следующим:

$$L_p(\omega) = L_0 \frac{2J_1(a)}{aJ_0(a)}, \quad a^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_{Lz}^2)^2 - \omega^2 \Omega_z^2 r_L^2}{\omega^2 - \Omega_z^2} \frac{r_L^2}{c^2}, \quad (6.13)$$

где $\Omega_z = \sqrt{\omega_{Lz}^2 + \Omega_z^2}$ - верхняя гибридная частота. Рассмотрим предельные случаи. В отсутствие плазмы, т.е. при $\omega_{Lz} = 0$, для индуктивности (6.13) имеем выражение

$$L_p(\omega) \Big|_{\omega_{Lz}=0} = L_0(\omega) = L_0 \frac{2J_1(\omega r_L/c)}{(\omega r_L/c) J_0(\omega r_L/c)}. \quad (6.14)$$

При $(\omega/c)r_L \ll 1$ из (6.14) получаем, как это и должно быть, $L_0(\omega) = L_0$. В отсутствие внешнего магнитного поля ($\Omega_z = 0$) формула (6.13) преобразуется к виду

$$L_p(\omega) = L_0 \frac{2J_1(\sqrt{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} r_L/c)}{(\sqrt{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} r_L/c) J_0(\sqrt{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} r_L/c)}. \quad (6.15)$$

Индуктивность (6.15) обладает резонансными свойствами, но только в области очень высоких частот при $\omega = \sqrt{\omega_{Lz}^2 + \mu_z^2 c^2 / r_L^2}$, где μ_z - нули функций Бесселя (см далее формулу (6.17)). В случае $\omega < \omega_{Lz}$ формулу (6.15) удобно записать следующим образом:

$$L_p(\omega) = L_0 \frac{2I_1(\sqrt{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} r_L/c)}{(\sqrt{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} r_L/c) I_0(\sqrt{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} r_L/c)}. \quad (6.16)$$

Индуктивность (6.16) меньше, чем L_0 , что связано с экранированием низкочастотного поперечного поля в плазме (см. подразд. 3.1, уравнение (3.14)). При $\omega_{Lz} r_L/c \gg 1$ и $\omega \ll \omega_{Lz}$ (случай плотной плазмы) из (6.16) имеем $L_p(\omega) = 2cL_0 / (\omega_{Lz} r_L) \ll L_0$. При $\omega \rightarrow \omega_{Lz}$ индуктивности (6.15) и (6.16) обращаются в L_0 . И наконец, в пределе сильного внешнего магнитного поля ($\Omega_z \rightarrow \infty$) из (6.13) следует выражение, совпадающее с (6.14). Но это и понятно: в сильном магнит-

ном поле поперечные движения электронов запрещены, что для азимутального электрического поля эквивалентно отсутствию плазмы. Таким образом, в предельных случаях нулевого и очень сильного внешнего магнитного поля в квазистационарной области частот $\omega < c/r_L$ индуктивность открытого плазменного соленоида каких-либо резонансных особенностей не имеет.

При промежуточных значениях циклотронной частоты Ω_s , нули и полюса индуктивности (6.13) и импеданса (6.11) могут попадать в низкочастотную (квазистационарную) область. Из формулы (6.11) видно, что при отсутствии столкновений нули и полюса импеданса плазменного соленоида совпадают с корнями уравнения

$$\frac{(\omega^2 - \omega_{Ls}^2)^2 - \omega^2 \Omega_s^2}{\omega^2 - \Omega_s^2} = \mu_s^2 \frac{c^2}{r_L^2}, \quad \mu_s = \begin{cases} \mu_s, \\ \mu_{0s}, \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots \quad (6.17)$$

При $\mu_s = \mu_s$ из (6.17) определяются нули $\omega = \omega_{s0}^{(0)}$, а при $\mu_s = \mu_{0s}$ уравнение (6.17) дает полюса $\omega = \omega_{s0}^{(\infty)}$ импеданса (6.11). Здесь μ_s - корни уравнения $J_1(x) = 0$. Решая уравнение (6.17), ограничимся только практически важной низкочастотной (квазистационарной) областью $\omega r_L / c < 1$.

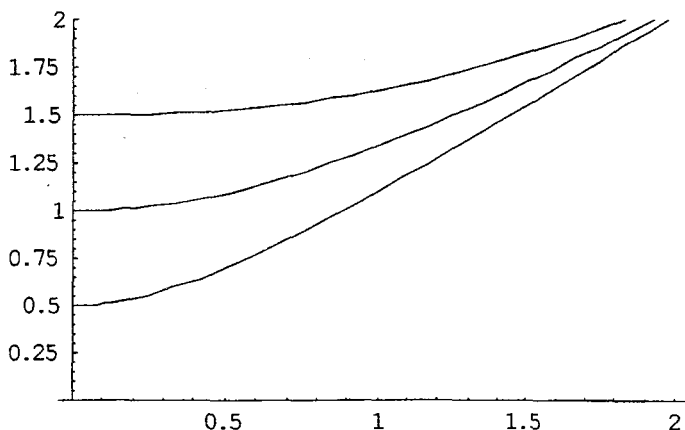


Рис. 6.1

Низкочастотные корни уравнения (6.17): $\Omega_s r_L / c = 0.5$ - нижняя кривая; $\Omega_s r_L / c = 1$ - средняя кривая; $\Omega_s r_L / c = 1.5$ - верхняя кривая

Выясним, исходя из этого ограничения, какие области значений ω_{μ} и Ω_{μ} представляются интересными. На Рис. 6.1 в зависимости от ленгмюровской частоты изображены решения уравнения (6.17), полученные при $\mu_z = \mu_{01} \approx 2.4$ для трех значений безразмерной электронной циклотронной частоты: $\Omega_{\mu r_L}/c = 0.5; 1; 1.5$ (по горизонтальной оси отложена безразмерная ленгмюровская частота $\omega_{\mu} r_L/c$, а по вертикальной оси – безразмерная частота $\omega r_L/c$). Видим, что в интересующую нас низкочастотную область корни уравнения (6.17) попадают только при $\Omega_{\mu r_L}/c < 1$ и $\omega_{\mu} r_L/c < 1$. В противном случае резонансных точек у импеданса (6.11) в низкочастотной области нет.

Легко показать, что в интересующей нас области частот и параметров плазмы корни уравнения (6.17) определяются следующей приближенной формулой:

$$\omega_{z0}^{(0,\omega)} \approx \Omega_{\mu} \sqrt{\left(1 + \frac{\Omega_{\mu}^2 \Omega_{\mu}^2 r_L^2}{\Omega_{\mu}^2 c^2 \mu_z^2}\right) / \left(1 + \frac{\Omega_{\mu}^2 r_L^2}{c^2 \mu_z^2}\right)} \leq \Omega_{\mu}, \quad (6.18)$$

При получении (6.18) использован тот факт, что μ_z^2 являются достаточно большими величинами (не менее $\mu_{01}^2 \approx 5.8$). Заметим, что у уравнения (6.17) имеется еще одна группа больших корней, превосходящих по величине $\sqrt{\omega_{\mu}^2 + \mu_z^2 c^2 / r_L^2}$, но эти корни мы не рассматриваем (они даже не показаны на Рис. 6.1). При $\Omega_{\mu} \rightarrow 0$ все корни (6.18) становятся равными ω_{μ} .

Точки, определяемые формулами (6.18), расположены достаточно близко друг к другу. Поэтому даже при небольшой диссипации соседние нули $\omega_{z0}^{(0)}$ и полюса $\omega_{z0}^{(\infty)}$ “сливаются”, и резонансные свойства, описываемые формулами (5.32), у импеданса (6.11) проявляются не совсем так, как, например, у импеданса (5.28). В частности, мнимая часть импеданса (6.11) не обращается в ноль (кроме случаев очень малой диссипации, см. далее Рис. 6.4). Резонансное поглощение энергии внешнего источника в плазме все же имеется (несмотря на слияние резонансов), причем на частоте ω , близкой к верхней гибридной частоте Ω_{μ} . То, что резонансное поглощение должно происходить именно вблизи

Ω_z видно уже из формулы (6.18), поскольку для всех больших s имеем $\omega_{z0}^{(0,\infty)} \approx \Omega_z$.

На Рис. 6.2 показаны действительная (кривая 1) и мнимая (кривая 2) части импеданса плазменного соленоида в зависимости от частоты внешнего источника при $\omega_{Lz} r_L / c = 0.6$, $\Omega_z r_L / c = 0.4$ и $\nu_z = 0.025 \omega_{Lz}$. По горизонтальной оси отложена безразмерная частота $\omega r_L / c$, по вертикальной – комплексный импеданс (6.11), умноженный на $r_L / c L_0$.

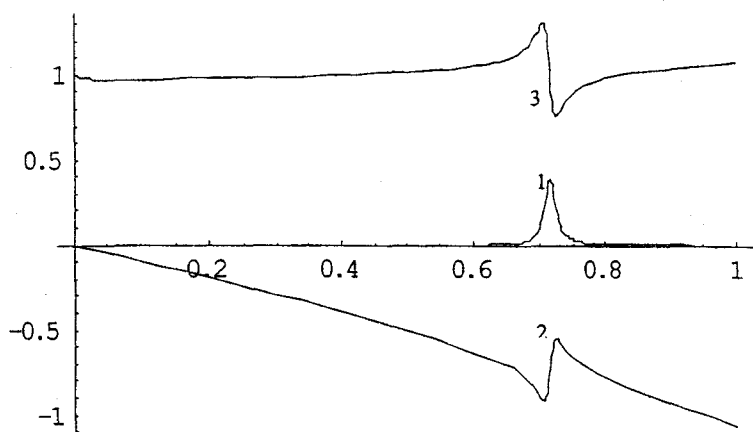


Рис. 6.2

Комплексный импеданс открытого плазменного соленоида:
1 – действительная часть, 2 – мнимая часть, 3 – индуктивность

Значительное поглощение и возмущение мнимой части импеданса наблюдаются вблизи частот (6.18), т.е. около Ω_z , что связано с резонансным возбуждением в плазме электромагнитных колебаний B -типа. В точке максимального поглощения мнимая часть импеданса не обращается в ноль и даже превосходит по модулю действительную часть. На Рис. 6.2 в единицах L_0 представлена также величина $-Z_p^*(\omega)/\omega$ (кривая 3), т.е. собственно индуктивность плазменного соленоида: за исключением узкой области, вблизи частот (6.18), индуктивность

соленоида близка к вакуумному значению L_0 .

На Рис. 6.3 в зависимости от безразмерной циклотронной частоты $\Omega_e r_L / c$ (отложена по горизонтальной оси) представлены действительные части импеданса (6.11), рассчитанные при различных плазменных частотах $\omega_{Le} r_L / c = 0.1; 0.2; 0.25; 0.285; 0.3$, постоянной частоте источника $\omega r_L / c = 0.3$ и $\nu_e = 0.025\omega_{Le}$.

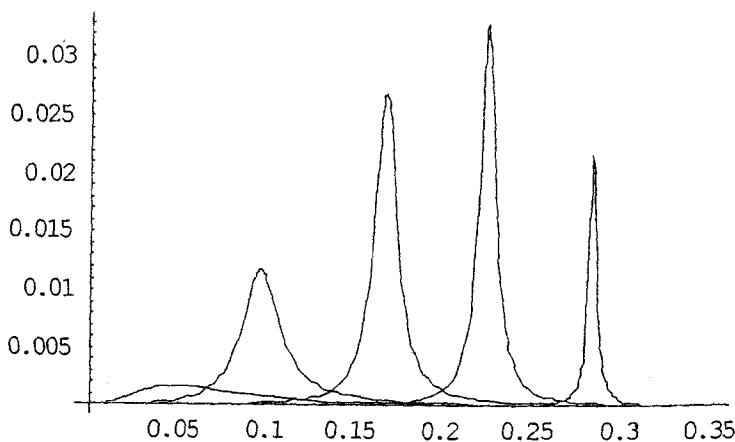


Рис. 6.3

Действительная часть импеданса открытого плазменного соленоида:
 $\omega_{Le} r_L / c = 0.1; 0.2; 0.25; 0.285; 0.3$ - кривые справа налево

Резонансные циклотронные частоты определяются из уравнений $\omega = \omega_{\alpha}^{(n)}$, решая которые с хорошей точностью имеем $\Omega_e \approx \sqrt{\omega^2 - \omega_{Le}^2}$, что полностью согласуется с Рис. 6.3. При увеличении ω_{Le} резонансы смещаются в область меньших циклотронных частот, а при $\omega_{Le} > \omega$ вообще пропадают. В соответствии с первой формулой (5.47) кривые, представленные на Рис. 6.3, определяют в относительных единицах мощности источника, выделяемые в плазменном соленоиде, когда активное сопротивление цепи велико. В случаях, когда мнимая часть импеданса (6.11) превосходит его действительную часть (как, например, в случае

Рис. 6.2), согласно формуле (5.48), такой же вид имеют мощности, выделяемые в плазме, и при любом другом сопротивлении цепи.

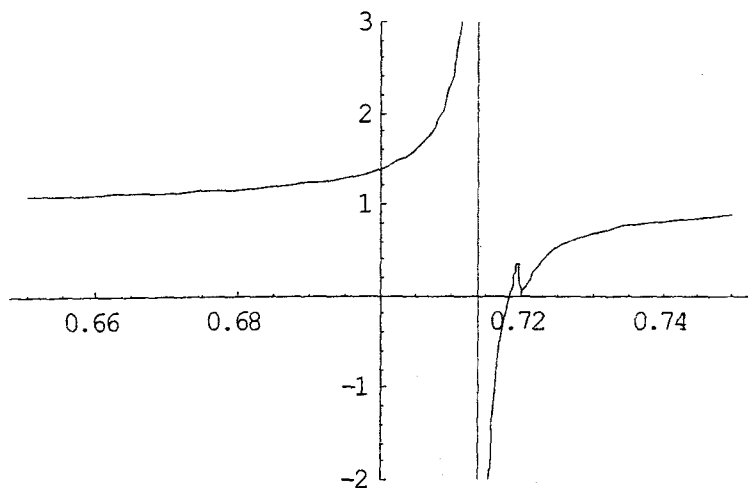


Рис. 6.4

Индуктивность $-Z_p^*(\omega)L_0^{-1}/\omega$ открытого плазменного соленоида при малом поглощении

Укажем еще на одно свойство индуктивности $L_p(\omega) = -Z_p^*(\omega)/\omega$ открытого плазменного соленоида. Как видно из Рис. 6.2 (кривая 3) эта индуктивность всегда положительна и близка к L_0 всюду, за исключением окрестностей резонансной точки. Смену знака у индуктивности можно трактовать, как наличие у системы емкостных свойств и их преобладание над индуктивными свойствами. Следовательно, у открытого плазменного соленоида емкостные свойства отсутствуют, что связано с отсутствием в открытом соленоиде продольного электрического поля E_z . На самом деле при малой частоте столкновений ν_e , когда резонансные свойства импеданса (6.11) выражены очень резко, индуктивность может стать и отрицательной. На Рис. 6.4 представлена частотная зависимость индуктивности открытого плазменного соленоида при $\omega_e r_L/c = 0.6$, $\Omega_e r_L/c = 0.4$ и $\nu_e = 0.001\omega_{Le}$ ($\Omega_e r_L/c \approx 0.72$). Видно, что в очень узкой области частот индуктив-

ность отрицательная. Но именно в этой области частот велико поглощение в плазме, поэтому понятия индуктивности и емкости применительно к плазменной системе не вполне корректны. Заметим, что поскольку при малом поглощении соседние резонансы $\omega = \omega_{0s}^{(e)}$ не перекрываются, на Рис. 6.2 проявились два соседних резонанса $s=1$ и $s=2$.

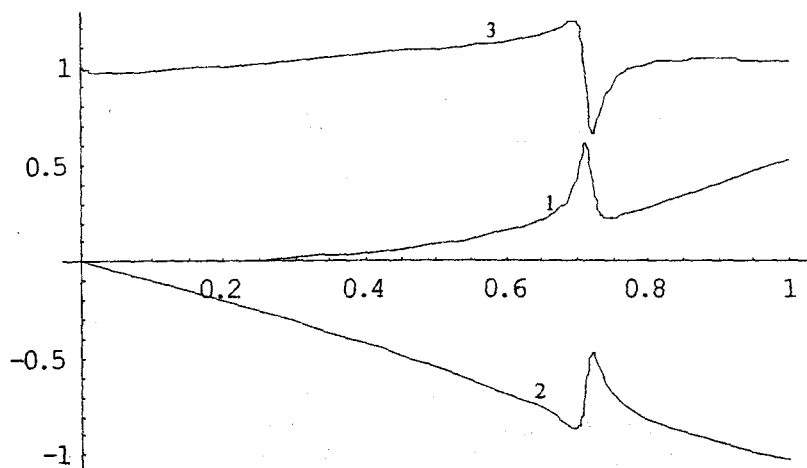


Рис. 6.5

Комплексный импеданс открытого плазменного соленоида с учетом потерь на излучение: 1 – действительная часть, 2 – мнимая часть, 3 – индуктивность

Завершая рассмотрение импеданса открытого плазменного соленоида, сравним результаты расчета импедансов по формулам (6.10), (6.11) и (6.12). На Рис. 6.5 представлены комплексный импеданс (6.10) и индуктивность плазменного соленоида, имеющего те же параметры, что и соленоид, импеданс которого показан на Рис. 6.2 (в случае Рис. 6.2 импеданс рассчитывался по формуле (6.11)). Видно, что единственное существенное отличие при вычислении импеданса по формуле (6.10) состоит в увеличении действительной части импеданса: уже знакомый нам по Рис. 6.2 резонансный всплеск поглощения в плазме накладывается на возрастающий с частотой фон потерь, обусловленных излучением из соленоида.

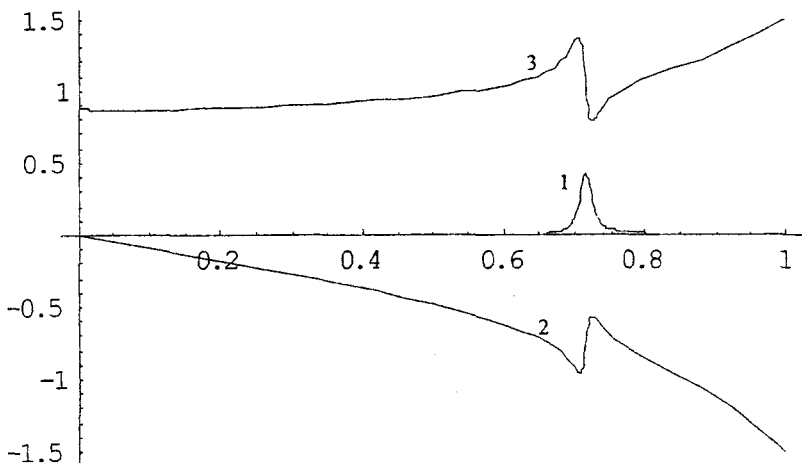


Рис. 6.6

Комплексный импеданс открытого плазменного соленоида с проводящим кожухом, случай $R_L/r_L = 3$: 1 – действительная часть, 2 – мнимая часть, 3 – индуктивность

Результат расчета импеданса по формуле (6.12) существенно зависит от расстояния R_L от оси соленоида до внешнего проводящего кожуха. Дело в том, что нули знаменателя в выражении (6.12) определяют частоты электромагнитных волн B -типа плазменного волновода с радиусом R_L . Эти волны добавляются к волнам с частотами (6.18), что приводит к появлению новых резонансных точек $\omega_{j0}^{(\infty)}$. При $R_L/r_L < \mu_{11} \approx 3.8$ новые резонансные точки расположены в области частот $\omega > c/r_L$, при этом в частотной области $\omega < c/r_L$ формулы (6.11) и (6.12) дают близкие результаты ((Рис. 6.6) имеет незначительные количественные отличия от Рис. 6.2). Если же $R_L/r_L > 3.8$, то новые резонансы попадают в область частот $\omega < c/r_L$, и зависимость комплексного импеданса от частоты усложняется. В принципе это может соответствовать реальной экспериментальной ситуации. То есть вопрос о том какой из трех приведенных формул (6.10), (6.11) и (6.12) предпочтительнее пользоваться следует решать с учетом конструктивных особенностей конкретного плазменного соленоида.

6.3. Индуктивность закрытого плазменного соленоида

Теория плазменного соленоида существенно усложняется в случае, когда электромагнитное поле в соленоиде зависит от продольной координаты z . Такая зависимость естественным образом возникает в закрытом соленоиде, у которого на границах $z=0$ и $z=d_L$ расположены проводящие плоскости. Плоскости не обязательно заземлены, или соединены цепью, они могут находиться под разными потенциалами. Важно, что на проводящих плоскостях равны нулю тангенциальные составляющие напряженности электрического поля. Поэтому имеют место следующие граничные условия:

$$E_r|_{z=0} = E_r|_{z=d_L} = 0, \quad E_\varphi|_{z=0} = E_\varphi|_{z=d_L} = 0. \quad (6.19)$$

Уравнения (6.1), краевые условия (6.2), уравнение цепи (6.4) и граничные условия (6.19) лежат в основе теории закрытого плазменного соленоида, к рассмотрению которого мы переходим.

Учитывая граничные условия (6.19), будем искать решение уравнений

(6.1) в виде

$$\begin{aligned} E_r(z, r) &= \sum_{n=1} E_{rn}(r) \sin(k_n z), \\ E_\varphi(z, r) &= \sum_{n=1} E_{\varphi n}(r) \sin(k_n z), \\ E_z(z, r) &= \sum_{n=1} E_{zn}(r) \cos(k_n z), \end{aligned} \quad (6.20)$$

где $k_n = \pi n/d_L$ - продольные волновые числа, возбуждаемых в соленоиде электромагнитных колебаний. Подстановка разложений (6.20) в уравнения (6.1) приводит к следующим уравнениям для функций $E_{rn}(r)$, $E_{\varphi n}(r)$ и $E_{zn}(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_{rn} \right) - k_n^2 E_{rn} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi\varphi} E_{rn} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\varphi r} E_{rn} &= 0, \\ k_n \left(k_n E_{rn} - \frac{dE_{rn}}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{rn} E_{rn} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{r\varphi} E_{rn} &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(\frac{dE_{zn}}{dr} - k_n E_{zn} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{zz} E_{zn} &= 0. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь компоненты тензора диэлектрической проницаемости являются функциями координаты r , поэтому уравнения (6.21) справедливы как в плазме, так

и вне её. Подставляя второе выражение (6.20) в (6.4) и учитывая (6.3), преобразуем уравнение внешней цепи к виду

$$U = IZ_{\perp} - \pi r_L N_L \sum_{n=1}^{\infty} P_n E_{\varphi n}(r_L), \quad (6.22)$$

где

$$P_n = \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \bigg/ \int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = 2 \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n}. \quad (6.23)$$

Наконец, подставляя второе выражение (6.20) в граничные условия (6.2), получаем

$$\left\{ \frac{dE_{\varphi n}}{dr} \right\}_{r_L} = -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} \frac{2}{d_L} \int_0^{d_L} J(z) \sin(k_n z) dz. \quad (6.24)$$

Если плотность обмотки соленоида постоянна по длине (см. формулу (4.9а)), то граничное условие (6.24) упрощается. Тогда, с учетом непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля, имеем следующие граничные условия для уравнений (6.21):

$$\{E_{\varphi n}\}_{r_L} = 0, \quad \{E_{zn}\}_{r_L} = 0, \quad \left\{ \frac{dE_{\varphi n}}{dr} \right\}_{r_L} = -i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} \frac{N_L}{d_L} I P_n. \quad (6.25)$$

Заметим, что коэффициенты P_n зависят от конструкции катушки, охватывающей плазму, и от условий на продольных границах плазмы, т.е. в принципе P_n могут определяться какими-то другими формулами (см. далее подразд. 6.4).

Используя для компонент тензора диэлектрической проницаемости выражения (4.4а) и исключая функции E_m , уравнения поля (6.21) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_{\varphi n}) - \left(\chi_n^2 - \frac{\omega^4}{c^4 \chi_n^2} g^2 \right) E_{\varphi n} &= i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{k_n}{\chi_n^2} g \frac{dE_{zn}}{dr}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{\varepsilon_{\perp}}{\chi_n^2} \frac{dE_{zn}}{dr} \right) - \varepsilon_{\parallel} E_{zn} &= -i k_n \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{g}{\chi_n^2} E_{\varphi n} \right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

где

$$\chi_n^2 = k_n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp}. \quad (6.27)$$

Уравнениями (6.26) справедливы в объеме плазмы (при $r < r_L$), во внешнем пространстве (при $r > r_L$), а также на границе плазмы (при $r = r_L$).

Анализ системы (6.26) начнем со случая отсутствия внешнего магнитного поля, когда $g = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$. В этом случае второе уравнение системы (6.26) выпадает, а первое уравнение упрощается

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_{\varphi} - \chi_n^2 E_{\varphi} = 0. \quad (6.28)$$

Если предположить, что выполнено неравенство

$$\omega < \pi c / d_L, \quad (6.29)$$

которое согласуется с общим условием квазистационарности (4.2), то ограниченное в нуле и на бесконечности решение уравнения (6.28) имеет вид

$$E_{\varphi}(r) = \begin{cases} A_n I_1(\chi_n r), & r < r_L \\ B_n K_1(\chi_{0n} r), & r > r_L \end{cases} \quad (6.30)$$

где A_n и B_n - постоянные, а χ_{0n}^2 - величины (6.27), взятые при $\varepsilon_1 = 1$.

При большой длине соленоида неравенство (6.29) является слишком жестким. Если не использовать неравенство (6.29), то возникает трудность при нахождении ограниченного на бесконечности решения уравнения (6.28). В этом случае решение можно выразить через функцию Ганкеля $H_1^{(1)}(\sqrt{\omega^2/c^2 - k_m^2} r)$ (см вывод формул (6.8) и (6.10)), а можно предположить, что соленоид заключен в проводящий цилиндрический кожух радиуса $r = R_L > r_L$ (см. вывод формулы (6.12)).

При наличии кожуха вместо (6.30) имеем следующее решение:

$$E_{\varphi}(r) = \begin{cases} A_n I_1(\chi_n r), & r < r_L \\ B_n [K_1(\chi_{0n} r) I_1(\chi_{0n} R_L) - I_1(\chi_{0n} r) K_1(\chi_{0n} R_L)] = B_n X_1(\chi_{0n} r), & R_L > r > r_L \end{cases} \quad (6.31)$$

Для определения постоянных A_n и B_n решение (6.30) при $r < r_L$ и $r > r_L$ сшивается в точке $r = r_L$ при помощи первого и третьего условий (6.25). В результате для азимутальной составляющей напряженности электрического поля на обмотке соленоида без проводящего кожуха получаем следующее выражение:

$$E_{\varphi}(r_L) = i \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} \frac{N_L}{d_L} P_n \frac{I_1(\chi_n r_L) K_1(\chi_{0n} r_L)}{\chi_n I_0(\chi_n r_L) K_1(\chi_{0n} r_L) + \chi_{0n} I_1(\chi_n r_L) K_0(\chi_{0n} r_L)} J. \quad (6.32)$$

Подставляя (6.32) в уравнение цепи (6.22), получим окончательно электротехническое уравнение внешней цепи с закрытым плазменным соленоидом в от-

существование внешнего магнитного поля

$$U = IZ_{\text{ц}} + IZ_p(\omega), \quad (6.33)$$

где импеданс плазменного соленоида определяется следующей формулой:

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 \frac{I_1(\chi_n r_L) K_1(\chi_{0n} r_L)}{\chi_n r_0 I_0(\chi_n r_L) K_1(\chi_{0n} r_L) + \chi_{0n} r_0 I_1(\chi_n r_L) K_0(\chi_{0n} r_L)}. \quad (6.34)$$

В случае плазменного соленоида с проводящим кожухом (в этом случае вместо (6.30) берется решение (6.31)) комплексный импеданс имеет вид

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 \frac{I_1(\chi_n r_L) X_1(\chi_{0n} r_L)}{\chi_n r_0 I_0(\chi_n r_L) X_1(\chi_{0n} r_L) + \chi_{0n} r_0 I_1(\chi_n r_L) X_0(\chi_{0n} r_L)}, \quad (6.35)$$

где $X_0(\chi_{0n} r) = K_0(\chi_{0n} r) I_1(\chi_{0n} R_L) + I_0(\chi_{0n} r) K_1(\chi_{0n} R_L)$. Формулой (6.34) можно пользоваться только в частотном диапазоне (6.29). В случае формулы (6.35) подобное ограничение отсутствует.

Знаменатели в выражении (6.34)

$$D_{Bn}(\chi_n r_L) \equiv \chi_n I_0(\chi_n r_L) K_1(\chi_{0n} r_L) + \chi_{0n} I_1(\chi_n r_L) K_0(\chi_{0n} r_L) \quad (6.36)$$

являются дисперсионными функциями для волн B -типа плазменного цилиндра со свободной поверхностью. Таких волн в плазменном цилиндре без внешнего магнитного поля нет, поскольку дисперсионные уравнения $D_{Bn} = 0$ решений не имеют. Таким образом, у импеданса (6.34) резонансные особенности – нули и полюса – отсутствуют. Следовательно, отсутствует и резонансное поглощение мощности внешнего источника в закрытом плазменном соленоиде без кожуха и внешнего магнитного поля. Ранее тот же результат был получен для открытого соленоида, при расчете которого полагалось $\partial/\partial z = 0$ (см. формулы (6.15) и (6.16)). У импеданса, определяемого формулой (6.35), резонансные особенности имеются, но только в высокочастотной области, при $\omega > 3.8 r_L / R_L$ (см. обсуждение формулы (6.12) и Рис. 6.6).

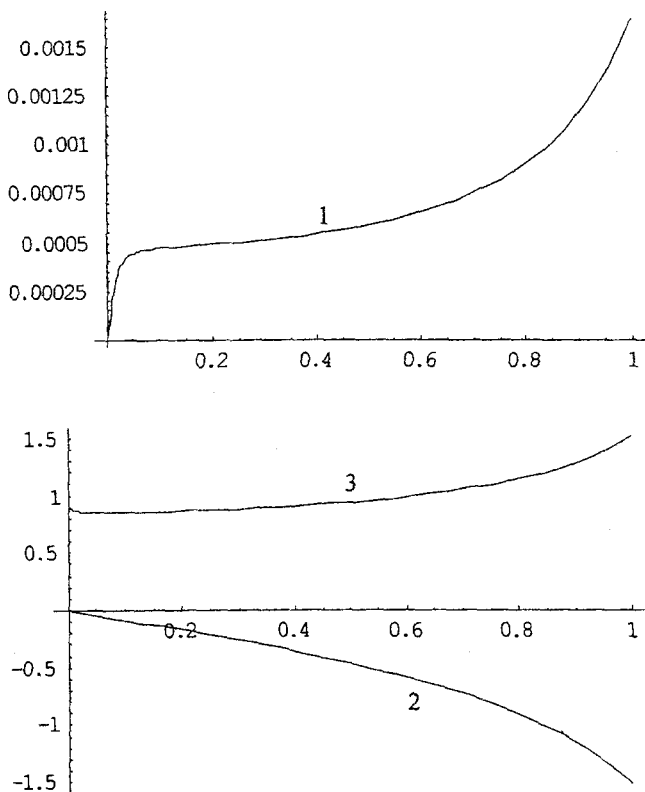


Рис. 6.7

Комплексный импеданс закрытого длинного плазменного соленоида с проводящим кожухом в отсутствии внешнего магнитного поля: 1 – действительная часть, 2 – мнимая часть, 3 – индуктивность

На Рис. 6.7 представлены комплексный импеданс и индуктивность длинного ($d_L \approx 30r_L$) закрытого плазменного соленоида с проводящим кожухом ($R_L = 3r_L$) в отсутствии внешнего магнитного поля при $\omega_{Lr}r_L/c = 0.6$ и $\nu_e = 0.025\omega_{Lr}$. Поглощение в плазме энергии источника (оно определяется действительной частью импеданса) при $\Omega_e = 0$ обусловлено естественной столкновительной диссипацией азимутального тока в плазме.

Перейдем теперь к общему случаю магнитоактивной плазмы. В области

$r < r_L$ решение уравнений (6.26) ищем в виде

$$\begin{aligned} E_{\varphi n} &= A_n J_1(\kappa_n r), \\ E_{zn} &= B_n J_0(\kappa_n r), \end{aligned} \quad (6.37)$$

где A_n, B_n - постоянные, а κ_n - неизвестные величины. Подстановка (6.37) в уравнения (6.26) приводит к однородной системе двух уравнений для постоянных A_n, B_n

$$\begin{aligned} \left[\kappa_n^2 + \left(\chi_n^2 - \frac{\omega^4}{c^4 \chi_n^2} g^2 \right) \right] A_n &= i \frac{\omega^2}{c^2} \frac{k_{zn} \kappa_n}{\chi_n^2} g B_n, \\ \left(\kappa_n^2 + \frac{\varepsilon_{||}}{\varepsilon_{\perp}} \chi_n^2 \right) B_n &= i k_{zn} \kappa_n \frac{g}{\varepsilon_{\perp}} A_n. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Откуда получается уравнение для определения величин κ_n

$$\varepsilon_{\perp} \kappa_n^4 + \left[\chi_n^2 (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{||}) + \frac{\omega^2}{c^2} g^2 \right] \kappa_n^2 + \left(\chi_n^4 - \frac{\omega^4}{c^4} g^2 \right) \varepsilon_{||} = 0 \quad (6.39)$$

и соотношение между постоянными в решении (6.37)

$$B_n = i \frac{k_{zn} \kappa_n g}{\varepsilon_{||} \chi_n^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa_n^2} A_n \equiv i \beta(\kappa_n) A_n. \quad (6.40)$$

Корни биквадратного уравнения (6.39) запишем в виде $\kappa_{n1}, -\kappa_{n1}, \kappa_{n2}, -\kappa_{n2}$, где

$$\kappa_{n1,2}^2 = \frac{1}{2\varepsilon_{\perp}} \left\{ -(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{||}) \chi_n^2 - g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \pm \sqrt{\left[(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_{||}) \chi_n^2 + g^2 \frac{\omega^2}{c^2} \right]^2 + 4\varepsilon_{||} g k_{zn}^2 \frac{\omega^2}{c^2}} \right\}. \quad (6.41)$$

Поскольку $J_1(-z) = -J_1(z)$, $J_0(-z) = J_0(z)$, $\beta(-z) = -\beta(z)$, то с учетом (6.37) общее решение первых двух уравнений системы (6.26) оказывается следующим:

$$\begin{aligned} E_{\varphi n} &= A_{n1} J_1(\kappa_{n1} r) + A_{n2} J_1(\kappa_{n2} r), \\ E_{zn} &= i \beta(\kappa_{n1}) A_{n1} J_0(\kappa_{n1} r) + i \beta(\kappa_{n2}) A_{n2} J_0(\kappa_{n2} r), \end{aligned} \quad (6.42)$$

где $A_{n1,2}$ - постоянные.

В вакуумной области $r > r_L$ ограниченные решения первых двух уравнений (6.26) имеют вид (сравни с (6.30))

$$\begin{aligned} E_{\varphi n} &= B_n K_1(\chi_{0n} r), \\ E_{zn} &= C_n K_0(\chi_{0n} r), \end{aligned} \quad (6.43)$$

где B_n и C_n - постоянные. Если плазменный соленоид имеет проводящий цилиндрический кожух, то при $R_L > r > r_L$ записывается следующее решение (срав-

ни с (6.31)):

$$\begin{aligned} E_{\text{вн}} &= B_n X_1(\chi_{0n} r), \\ E_{\text{зн}} &= C_n [K_0(\chi_{0n} r) I_0(\chi_{0n} R_L) - I_0(\chi_{0n} r) K_0(\chi_{0n} R_L)] \equiv C_n Z_0(\chi_{0n} r), \end{aligned} \quad (6.44)$$

где функция $X_1(\chi_{0n} r)$ приведена в (6.31).

Для определения постоянных $A_{n1,2}$, B_n и C_n решения (6.42) и (6.43) следует сплечь в точке $r = r_L$. Однако, трех условий сшивки – граничных условий (6.25) – недостаточно для определения четырех постоянных в решениях (6.42) и (6.43). Недостающее, четвертое условие получается интегрированием второго уравнения системы (6.21) в окрестности точки $r = r_L$, что дает

$$\left\{ \frac{\varepsilon_L}{\chi_n^2} \frac{dE_{\text{зн}}}{dr} + ik_{\text{зн}} \frac{g}{\chi_n^2} E_{\text{вн}} \right\}_{r_L} = 0. \quad (6.45)$$

Можно показать, что (6.45) эквивалентно условию непрерывности на границе плазмы тангенциальной составляющей индукции магнитного поля B_{φ} . Сшивая при помощи полученных условий решения (6.42) и (6.43), выразим постоянные $A_{n1,2}$, B_n , C_n и найдем следующее выражение:

$$E_{\text{зн}}(r_L) = iI \frac{\omega}{c} \frac{4\pi}{c} \frac{N_L}{d_L} P_n \left(\frac{D_{En}(\kappa_{n2} r_L)}{D_n} J_1(\kappa_{n1} r_L) - \frac{D_{En}(\kappa_{n1} r_L)}{D_n} J_1(\kappa_{n2} r_L) \right) K_1(\chi_{0n} r_L), \quad (6.46)$$

где

$$D_n = D_{En}(\kappa_{n2} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n2} r_L), \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} D_{Bn}(\kappa_{n1,2} r_L) &= \chi_{0n} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) K_0(\chi_{0n} r_L) + \kappa_{n1,2} J_0(\kappa_{n1,2} r_L) K_1(\chi_{0n} r_L), \\ D_{En}(\kappa_{n1,2} r_L) &= \beta(\kappa_{n1,2}) \left(J_0(\kappa_{n1,2} r_L) K_1(\chi_{0n} r_L) \chi_{0n}^{-1} - \varepsilon_{\perp} \kappa_{n1,2} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) K_0(\chi_{0n} r_L) \chi_n^{-2} \right) + \\ &+ k_{\text{зн}} g \chi_n^{-2} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) K_0(\chi_{0n} r_L). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Выражения D_n являются дисперсионными функциями смешанных, т.е. B и E -типов, электромагнитных волн магнитоактивного плазменного цилиндра со свободной поверхностью. Имея в виду предельный переход к нулевому внешнему магнитному полю, можно условно назвать функции $D_{Bn}(\kappa_{n1,2} r_0)$ дисперсионными функциями волн B -типа, а $D_{En}(\kappa_{n1,2} r_L)$ - дисперсионными функциями волн E -типа (см. формулу (6.36)).

Подставляя (6.46) в третье уравнение системы (6.26), приведем его к

стандартному виду

$$U = I R_{\nu} + I Z_p(\omega),$$

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 \frac{(D_{En}(\kappa_{n2} r_L) J_1(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) J_1(\kappa_{n2} r_L)) K_1(\chi_{0n} r_L)}{r_L (D_{En}(\kappa_{n2} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n2} r_L))}, \quad (6.49)$$

где $Z_p(\omega)$ - комплексный импеданс соленоида, заполненного однородной магнитоактивной плазмой. Если внешнее магнитное поле равно нулю, то уравнение (6.39) принимает вид $\kappa_n^2 + \chi_n^2 = 0$. Тогда, учитывая соотношения $D_{Bn}(-\kappa_n r_L) = -D_{Bn}(\kappa_n r_L)$, видим, что в нулевом магнитном поле формула (6.49) переходит, как и должно быть, в формулу (6.34).

При получении формулы (6.49) мы полагали, что проводящий кожух у соленоида отсутствует. Если проводящий кожух имеется, то следует использовать решение (6.44). Тогда, почти полностью повторяя вывод формулы (6.49), получим следующее выражение для импеданса закрытого плазменного соленоида с проводящим кожухом во внешнем магнитном поле:

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 \frac{(D_{En}(\kappa_{n2} r_L) J_1(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) J_1(\kappa_{n2} r_L)) X_1(\chi_{0n} r_L)}{r_L (D_{En}(\kappa_{n2} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n2} r_L))}, \quad (6.50)$$

а дисперсионные функции определяются формулами

$$D_{Bn}(\kappa_{n1,2} r_L) = \chi_{0n} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) X_0(\chi_{0n} r_L) + \kappa_{n1,2} J_0(\kappa_{n1,2} r_L) X_1(\chi_{0n} r_L),$$

$$D_{En}(\kappa_{n1,2} r_L) = \beta(\kappa_{n1,2}) (J_0(\kappa_{n1,2} r_L) Z_1(\chi_{0n} r_L) \chi_{0n}^{-1} - \varepsilon_{\perp} \kappa_{n1,2} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) Z_0(\chi_{0n} r_L) \chi_n^{-2}) + k_{zn} g \chi_n^{-2} J_1(\kappa_{n1,2} r_L) Z_0(\chi_{0n} r_L), \quad (6.51)$$

где $Z_1(\chi_{0n} r) = K_1(\chi_{0n} r) I_0(\chi_{0n} R_L) + I_1(\chi_{0n} r) K_0(\chi_{0n} R_L)$.

Решение (6.44) имеет смысл при любом знаке величин χ_{0n}^2 (в отличие от решения (6.43), полученного при $\chi_{0n}^2 > 0$), поэтому применимость формулы (6.50) не ограничивается условием квазистационарности (6.29). Рассмотрим в (6.50) предельный переход к соленоиду бесконечной длины $d_L \rightarrow \infty$, или $k_m \rightarrow 0$. В этом пределе из формул (6.41) и (6.40) имеем $\kappa_{n1}^2 \rightarrow (\omega^2/c^2) \varepsilon_{\parallel}$, $\kappa_{n2}^2 \rightarrow (\omega^2/c^2) \varepsilon_{\perp} \equiv \kappa_2^2$ (ε_{\perp} см. в (6.6)), $\beta(\kappa_{n1}) \rightarrow const \neq 0$, $\beta(\kappa_{n2}) \rightarrow 0$. Тогда, с учетом (6.51), формула (6.50) преобразуется к виду

$$Z_p(\omega) = -i\omega L_0 \frac{J_1(\kappa_2 r_L) X_1(i\omega r_L/c)}{r_L (\chi_{0n} J_1(\kappa_2 r_L) X_0(i\omega r_L/c) + \kappa_2 J_0(\kappa_2 r_L) X_1(i\omega r_L/c))} \sum_{n=1}^{\infty} P_n^2. \quad (6.52)$$

Принимая во внимание соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n^2 = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = 2, \quad (6.53)$$

видим, что формула (6.52) в точности переходит в формулу (6.12) индуктивно-открытого соленоида. Таким образом, открытым может считаться соленоид большой длины. Но это и понятно, поскольку при большой длине соленоида условия на его торцах существенной роли не играют.

Уравнение

$$D_n = D(\omega, k_m) = D_{En}(\kappa_{n2} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n1} r_L) - D_{En}(\kappa_{n1} r_L) D_{Bn}(\kappa_{n2} r_L) = 0 \quad (6.54)$$

определяет частоты $\omega_s(k_m)$ собственных волн плазменного цилиндра (со свободной поверхностью, или в волноводе радиуса R_L) во внешнем магнитном поле. При этом индекс s обозначает номер ветви плазменных волн, а n совпадает с индексом суммирования в (6.49) и (6.50). Эти же частоты определяют полюса $\omega_m^{(s)} = \omega_s(k_m)$ импедансов (6.49) и (6.50). Достаточно сложное уравнение (6.54) в различных предельных случаях исследовалось в теории плазменных волноводов (см. подразд. 3.4). Точное уравнение для нулей импеданса, из-за наличия в (6.49) и (6.50) бесконечной суммы, вообще нельзя записать в явном виде. Но поскольку коэффициенты P_n^2 быстро убывают с ростом номера n (для четных n все $P_n = 0$, а для нечетных $P_n^2 = P_1^2/n^2$, см. (6.23)), в суммах в (6.49) и (6.50) достаточно оставить только первое слагаемое с $n=1$. При этом уравнение, определяющее нули импеданса $\omega_m^{(0)}$, оказывается следующим:

$$\tilde{D}_1 = D_{E1}(\kappa_{12} r_L) J_1(\kappa_{11} r_L) - D_{E1}(\kappa_{11} r_L) J_1(\kappa_{12} r_L) = 0. \quad (6.55)$$

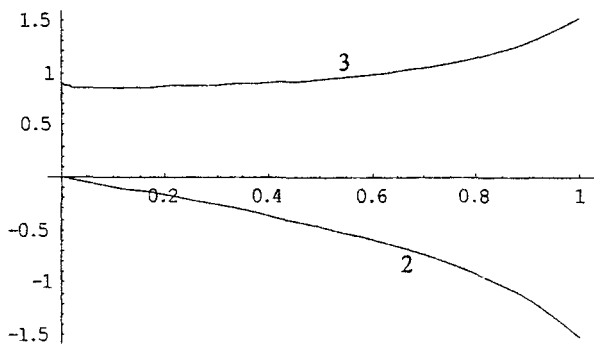
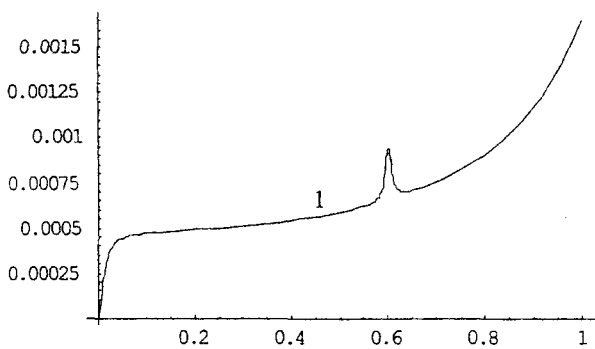
С той же точностью и в уравнении (6.54) следует положить $n=1$.

Рассмотрим механизмы передачи энергии внешнего источника магнитоактивной плазме, находящейся в соленоиде. Все эти механизмы учтены в формулах (6.49) и (6.50). Высокочастотное электромагнитное поле соленоида имеет структуру B -типа. Вынужденные колебания этого типа и будут возбуждаться в плазме. Но при наличии внешнего магнитного поля колебания B -типа и E -типа оказываются зацепленными между собой. Таким образом, в соленоиде

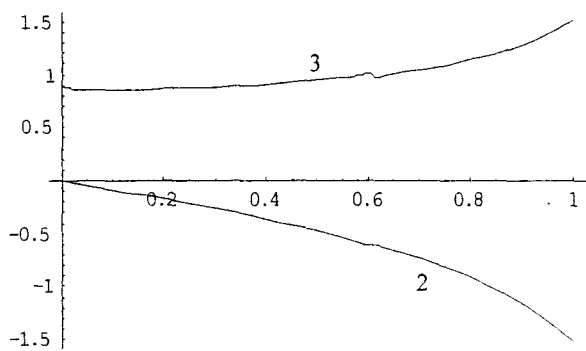
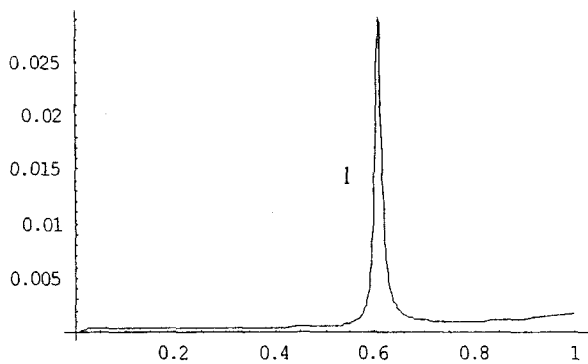
с магнитоактивной плазмой на частоте внешнего источника ω возбуждаются вынужденные смешанные электромагнитные колебания обоих типов. Наиболее интенсивное возбуждение колебаний в плазме происходит при совпадении частоты источника с частотами собственных волн плазменной системы, т.е. при $\omega \approx \omega_m^{(e)}$, или $\omega \approx \omega_m^{(o)}$, где $\omega_m^{(e)}$ и $\omega_m^{(o)}$ определяются из уравнений (6.54) и (6.55) соответственно. Естественно, что наиболее сильное поглощение энергии внешнего источника в плазме происходит на тех же частотах. Именно зацеплением электромагнитных волн B и E -типов случай магнитоактивной плазмы в соленоиде отличается от случая плазменного соленоида без магнитного поля (возбуждаются только колебания B -типа) и от случая плазмы в конденсаторе (возбуждаются только колебания E -типа). Следовательно применение магнитоактивной плазмы позволяет задействовать плазменные волны всех типов в качестве индукционных каналов резонансной перекачки энергии источника в плазму. Особый интерес представляют волны E -типа из-за их низкочастотности и сильного поглощения (в том числе и бесстолкновительного). Более того, в плазменном цилиндре собственных электромагнитных волн B -типа в низкочастотной области вообще нет (кроме волн (6.18) с частотами, близкими к верхней гибридной частоте): имеются только волны E -типа с "примесью" B -полей. В связи с этим волны E -типа в волноводе с магнитоактивной плазмой представляют большой интерес для плазменной электротехники.

Напомним (см. подразд. 3.4), что в случае слабого внешнего магнитного поля, $\Omega_e < \omega_{L_e}$, имеются три группы волн E -типа (Рис. 3.6б). В низкочастотной области $\omega < \Omega_e$ располагаются частоты объемных косых ленгмюровских волн. В промежуточной области частот $\Omega_e < \omega < \omega_{L_e}$ лежит частота поверхностной ленгмюровской волны. В высокочастотной области $\omega_{L_e} < \omega < \Omega_e$ расположены частоты косых циклотронных волн. В случае сильного внешнего магнитного поля, $\Omega_e > \omega_{L_e}$, поверхностной волны нет, частоты косых ленгмюровских волн расположены в области $\omega < \omega_{L_e}$, а частоты косых циклотронных волн принадлежат диапазону $\Omega_e < \omega < \Omega_e$.

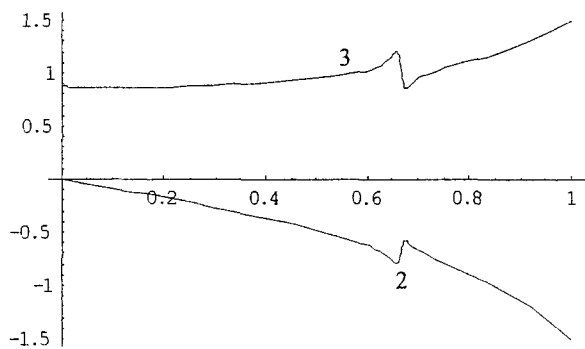
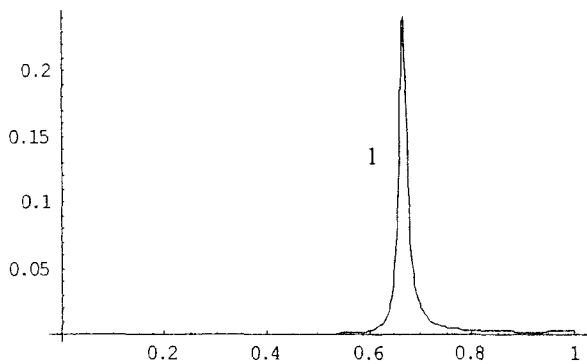
Рассмотрим результаты расчета комплексного импеданса плазменного соленоида по формуле (6.50) ($R_L = 3r_L$). Начнем со случая длинного соленоида ($k_{\perp}r_L = 0.1$, или $d_L \approx 30r_L$) при $\omega_{L}r_L/c = 0.6$ и $\nu_e = 0.025\omega_{L}$. Рис. 6.8 является продолжением Рис. 6.7 в сторону больших значений внешнего магнитного поля. Видно, что в районе верхней гибридной частоты Ω_g наблюдается резонансный максимум — он смещается вправо с ростом Ω_e . Причем выражен максимум тем сильнее, чем больше Ω_e . Это — тот же резонанс, что имелся и в открытом плазменном соленоиде (см. Рис. 6.2). Он обусловлен резонансным возбуждением волн В-типа на частотах, близких к (6.18).



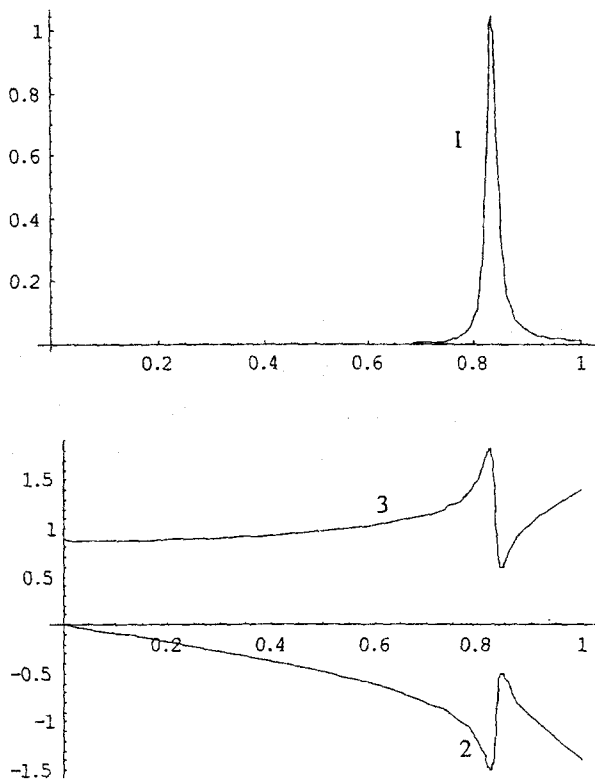
$\Omega_e r_L / c = 0.01$ (Puc. 6.8 - 1)



$\Omega_e r_L / c = 0.1$ (Puc. 6.8 - 2)



$\Omega_e r_L / c = 0.3$ (Puc. 6.8-3)

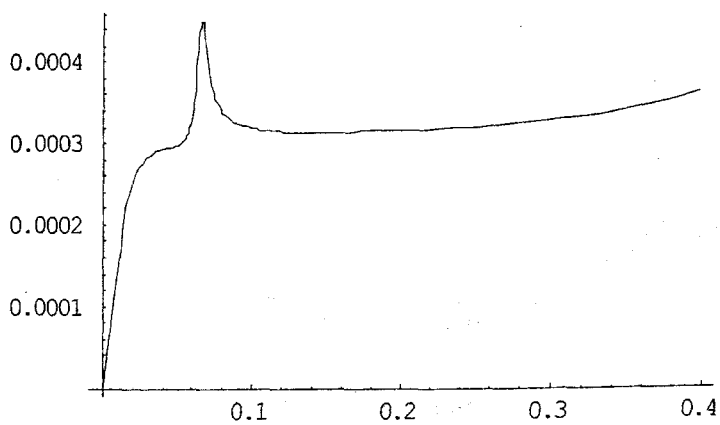


$\Omega_e r_L / c = 0.6$ (Рис. 6.8 - 4)

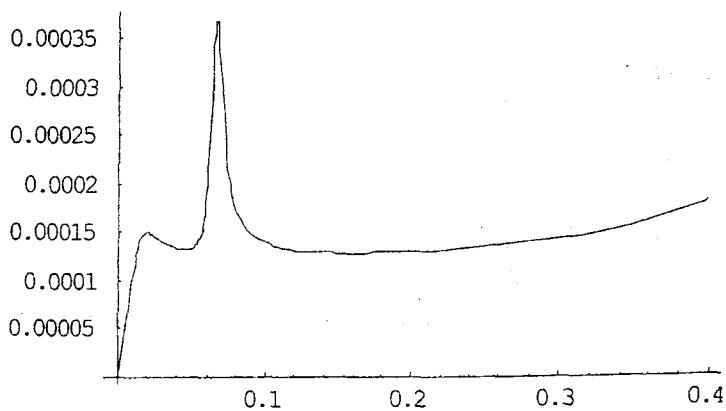
Рис. 6.8

Комплексные импедансы закрытого длинного плазменного соленоида с проводящим кожухом при различных значениях внешнего магнитного поля:
 1 - действительная часть, 2 - мнимая часть, 3 - индуктивность

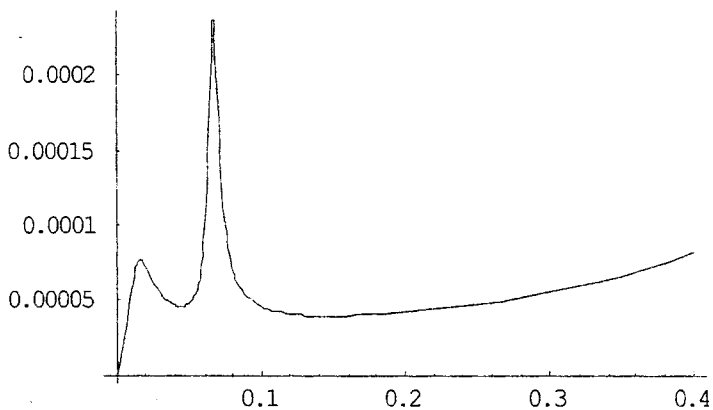
Если сравнить Рис. 6.8 (особенно случаи $\Omega_e r_L/c = 0.3$ и $\Omega_e r_L/c = 0.6$) с Рис. 6.2, то обнаружится большое сходство. Это не удивительно, поскольку, как было показано выше, случаи закрытого длинного соленоида и открытого соленоида близки друг к другу. Однако, имеется важное отличие: помимо резонанса около верхней гибридной частоты, обусловленного возбуждением волн B -типа, в длинном соленоиде наблюдаются еще резонансы и в области низких частот (в открытом соленоиде их вообще нет). На Рис. 6.8 низкочастотные резонансы не видны на фоне более мощных резонансов на частотах близких к Ω_e . На Рис. 6.9 при различных значениях Ω_e отдельно изображены действительные части импедансов (6.50) в низкочастотной области (параметры соленоида те же, что и в случае Рис. 6.8). Все имеющиеся на Рис. 6.9 резонансы обусловлены возбуждением в области частот $\omega < \min(\Omega_e, \omega_{Lc})$ косых ленгмюровских волн E -типа.



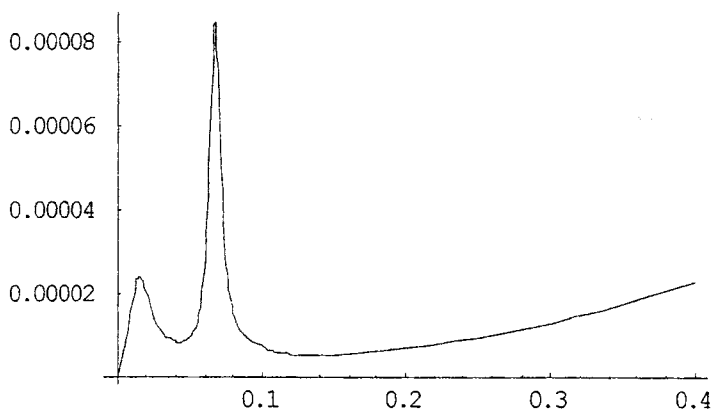
$\Omega_r r_1/c = 0.3$ (Puc. 6.9 - 1)



$\Omega_r r_1/c = 0.6$ (Puc. 6.9 - 2)



$\Omega_e r_L / c = 1$ (Рис. 6.9 - 3)

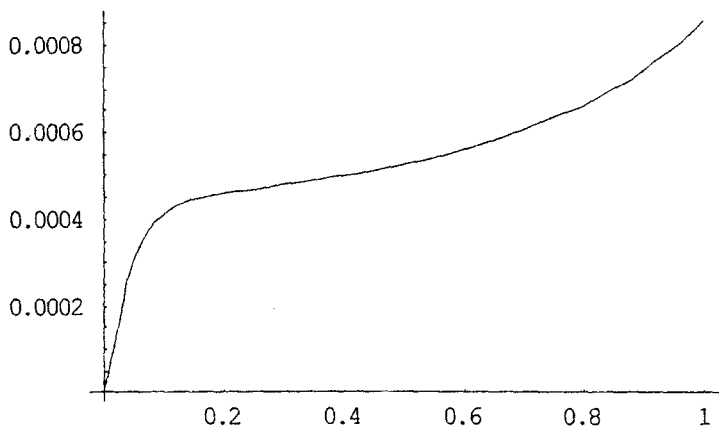


$\Omega_e r_L / c = 2$ (Рис. 6.9 - 4)

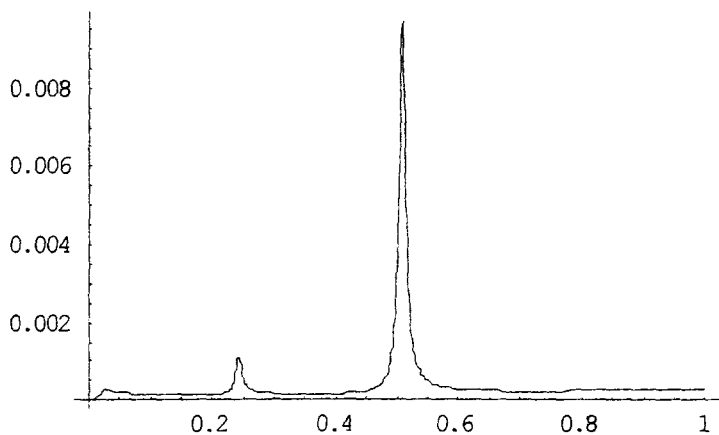
Рис. 6.9

Действительные части импедансов закрытого длинного плазменного соленоида при различных значениях внешнего магнитного поля

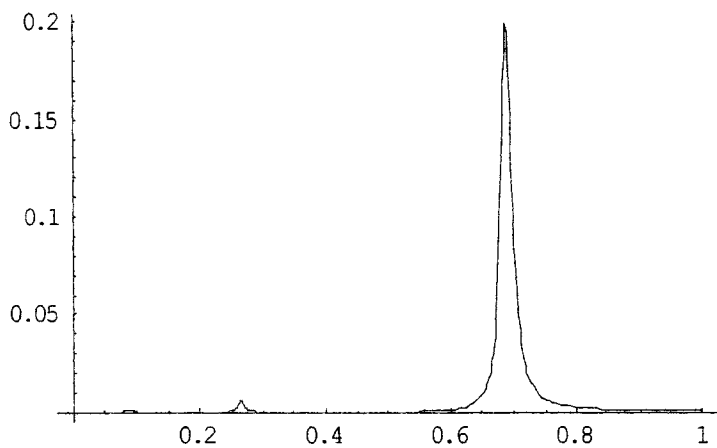
Перейдем к рассмотрению импедансов плазменных соленоидов меньшей длины. Положим $k_{\perp} r_L = 1$, при этом будет $d_L \approx 3r_L$. На Рис. 6.10 представлены действительные части импеданса (6.50) рассчитанные при $\omega_{L} r_L / c = 0.5$ и $\nu_e = 0.025 \omega_{L}$ для различных значений электронной циклотронной частоты Ω_e .



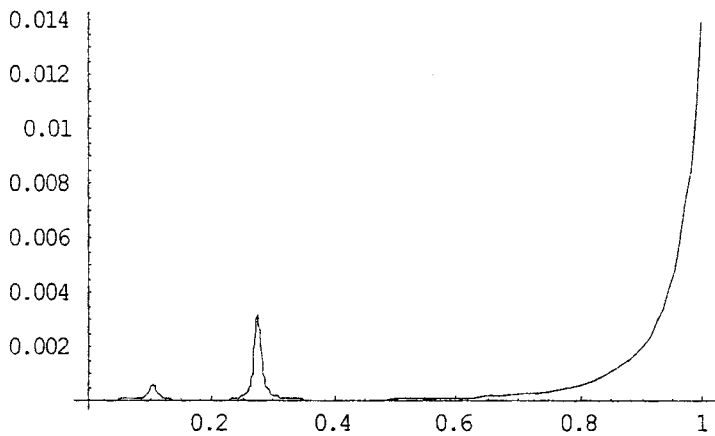
$\Omega_e r_L / c = 0$ (Рис. 6.10-1)



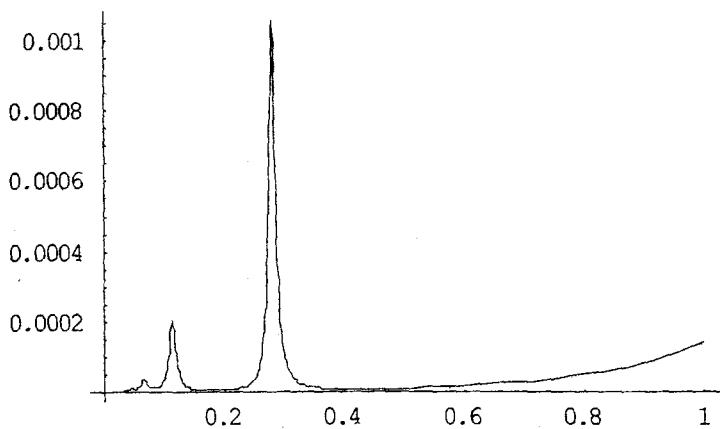
$\Omega_e r_L / c = 0.1$ (Рис. 6.10-2)



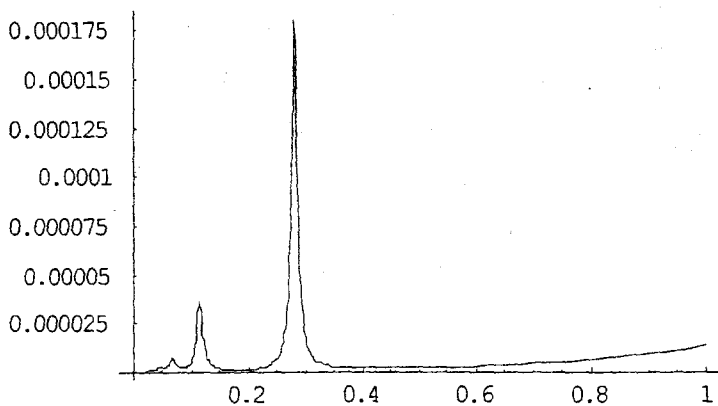
$\Omega r_L/c = 0.5$ (Puc. 6.10-3)



$\Omega r_L/c = 1$ (Puc. 6.10-4)



$\Omega_e r_L / c = 2$ (Рис. 6.10 - 5)



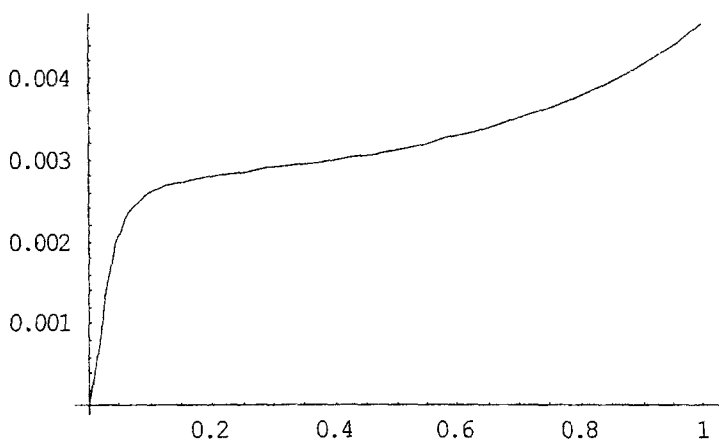
$\Omega_e r_L / c = 5$ (Рис. 6.10 - 6)

Рис. 6.10

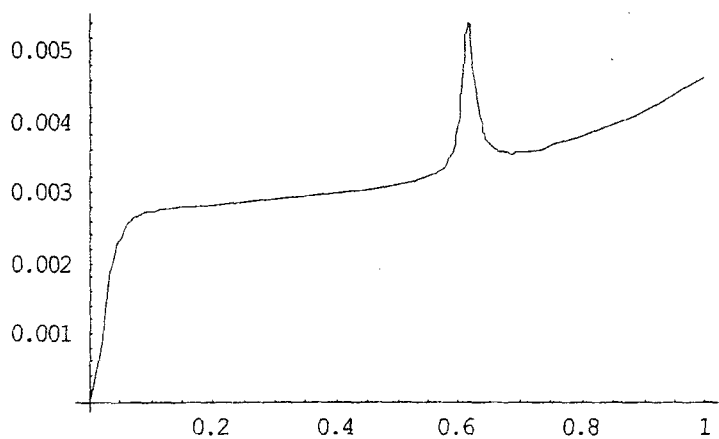
Действительные части импедансов закрытого короткого плазменного соленоида при различных значениях внешнего магнитного поля

В отсутствие внешнего магнитного поля ($\Omega_e r_L/c = 0$) возбуждение каких-либо волн в рассматриваемой частотной области невозможно, поэтому резонансы не наблюдаются, и зависимость действительной части импеданса от частоты является монотонной. Однако, уже при $\Omega_e r_L/c = 0.1$ появляются три резонансных максимума. Правый максимум – самый интенсивный – обусловлен возбуждением волн B -типа в узком частотном диапазоне от ω_{Lz} до Ω_e . Средний максимум связан с возбуждением поверхностной плазменной волны на частоте немного меньшей $\omega_{Lz}/\sqrt{2}$. Левый максимум – достаточно слабо выраженный – обусловлен возбуждением косых ленгмюровских волн с частотами, меньшими Ω_e . В случае $\Omega_e r_L/c = 0.5$ имеем ту же картину, но с той лишь разницей, что средний максимум действительной части импеданса ассоциируется с объемной волной (при $\Omega_e \geq \omega_{Lz}$ поверхностной волны нет). При $\Omega_e r_L/c = 1$ максимум, обусловленный возбуждением волны B -типа выходит за пределы исследуемой области частот. Оставшиеся максимумы действительной части импеданса связаны с возбуждением косых объемных ленгмюровских волн на частотах меньших ω_{Lz} . Те же максимумы наблюдаются и на рисунках построенных для случаев $\Omega_e r_L/c = 2$ и $\Omega_e r_L/c = 5$, из которых также видно, что с ростом Ω_e действительная часть импеданса уменьшается, что свидетельствует об уменьшении эффективности поглощения энергии в плазме. Это обусловлено тем, что при $\Omega_e > \omega_{Lz}$ с увеличением внешнего магнитного поля зацепка полей E и B -типов в плазме становится слабее.

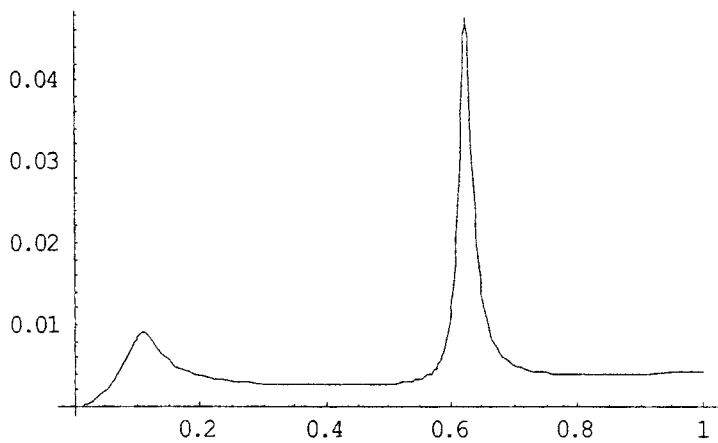
Рис. 6.11 повторяет предыдущий Рис. 6.10, но для случая в три раза более плотной плазмы $\omega_{Lz} r_L/c = 1.5$. Наблюдаемые максимумы действительной части импеданса связаны с возбуждением в плазме поверхностной и объемных косых ленгмюровских волн. Максимум, обусловленный возбуждением волны B -типа находится за пределами рассматриваемой области частот.



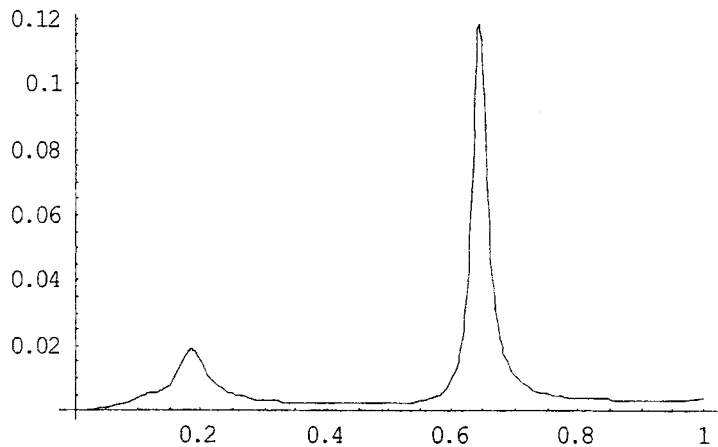
$\Omega_e r_L / c = 0$ (Puc. 6.11 - 1)



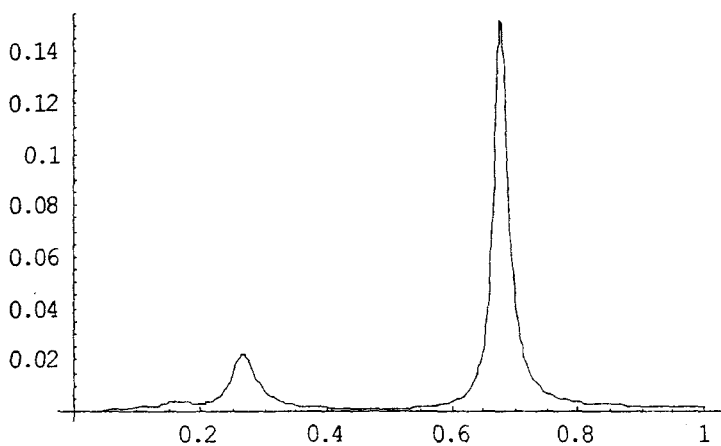
$\Omega_e r_L / c = 0.1$ (Puc. 6.11 - 2)



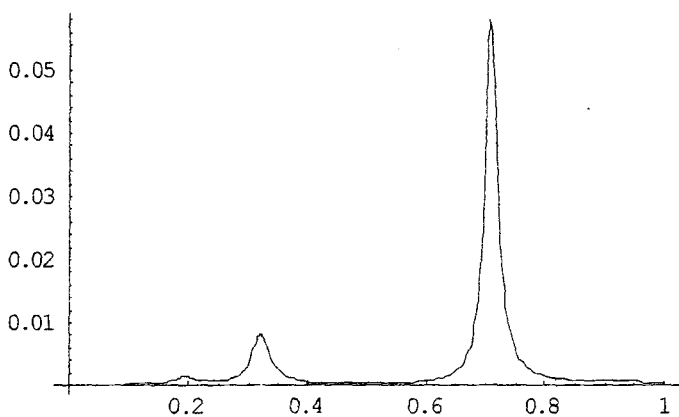
$\Omega_e r_L / c = 0.5$ (Puc. 6.11 - 3)



$\Omega_e r_L / c = 1$ (Puc. 6.11 - 4)



$\Omega_e r_L / c = 2$ (Рис. 6.11 - 5)

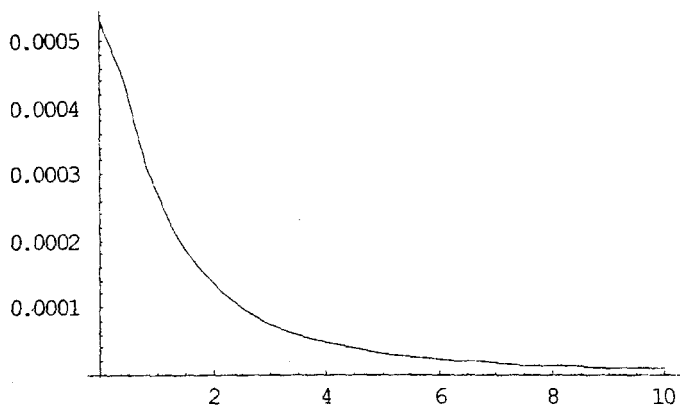


$\Omega_e r_L / c = 5$ (Рис. 6.11 - 61)

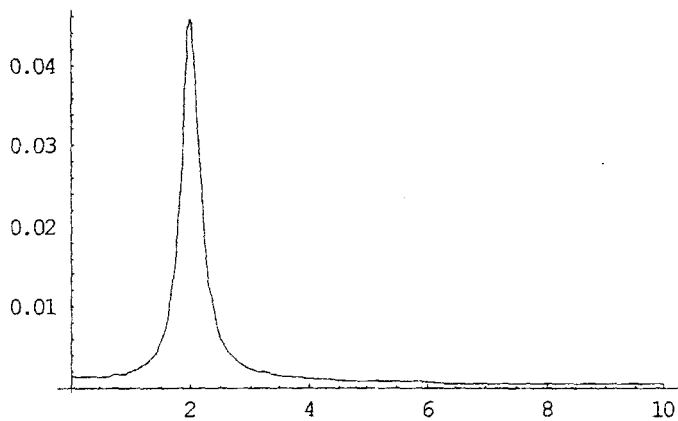
Рис. 6.11

*Действительные части импедансов закрытого короткого плазменного соленоида при различных значениях внешнего магнитного поля.
Случай плотной плазмы*

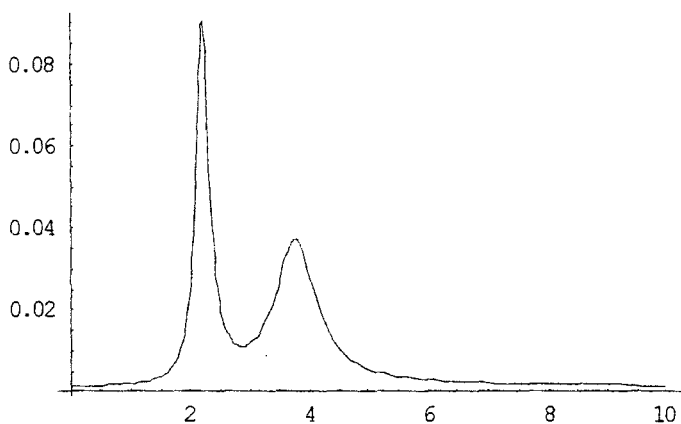
На Рис. 6.12 в зависимости от безразмерной электронной циклотронной частоты $\Omega_e r_L / c$ построены действительные части импеданса (6.50), вычисленные при фиксированной частоте $\omega r_L / c = 0.3$, $k_{\perp} r_L = 1$ и $v_e r_L / c = 0.025$ для различных безразмерных ленгмюровских частот $\omega_{Le} r_L / c$ (указаны на рисунке). Частота поверхностной волны в низкочастотной области практически не зависит от циклотронной частоты. Поэтому изменением внешнего магнитного поля при фиксированной рабочей частоте источника настроиться на резонанс с поверхностной волной не удастся. В результате на кривых, представленных на Рис. 6.12, отсутствуют соответствующие максимумы. Зато имеются максимумы, обусловленные резонансами с низкочастотными косыми ленгмюровскими волнами, ведь частота этих волн, пока $\Omega_e < \omega_{Le}$, пропорциональна Ω_e . Однако, при $\omega_{Le} r_L / c = 1$ резонанс приходится на очень коротковолновую область, и мы его не наблюдаем. При $\omega_{Le} r_L / c = 2$ наблюдается резонанс с первой поперечной модой косых ленгмюровских волн. При дальнейшем увеличении ленгмюровской частоты число резонансных мод последовательно возрастает.



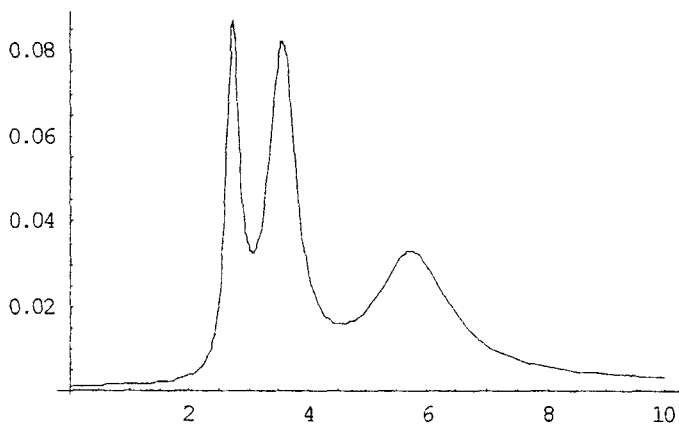
$\omega_L r_L / c = 1$ (Puc. 6.12 - 1)



$\omega_L r_L / c = 2$ (Puc. 6.12 - 2)



$\omega_{L}r_L/c = 3$ (Рис. 6.12 - 3)



$\omega_{L}r_L/c = 4$ (Рис. 6.12 - 4)

Рис. 6.12

Зависимость действительной части импеданса закрытого плазменного соленоида от циклотронной частоты при $\omega r_L/c = 0.3$

6.4. Индуктивные плазменные системы общего вида

Формулы (6.49) и (6.50) получены для случая соленоида с вполне определенной конструкцией, а именно: продольные (торцевые) границы соленоида пунктирные линии на Рис. 4.1б) являются идеально проводящими плоскостями. Поэтому на границах $z=0$ и $z=d_L$ были поставлены граничные условия (6.19) и использованы разложения (6.20). Возможна и иная структура продольных границ, например, открытые границы. Этот случай мы рассмотрели в подразд. 6.3, предположив, что поле можно считать постоянным по длине соленоида. Дадим этому строгое обоснование. Предположим, что на открытых (свободных) границах плазмы имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} E_r' \Big|_{z=0} &= E_r' \Big|_{z=d_L} = 0, \\ E_\varphi' \Big|_{z=0} &= E_\varphi' \Big|_{z=d_L} = 0, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по z . Учитывая граничные условия (6.56), будем искать решение уравнений (6.1) в виде

$$\begin{aligned} E_r(z, r) &= \sum_{n=0} E_{rn}(r) \cos(k_n z), \\ E_\varphi(z, r) &= \sum_{n=0} E_{\varphi n}(r) \cos(k_n z), \\ E_z(z, r) &= \sum_{n=0} E_{zn}(r) \sin(k_n z), \end{aligned} \quad (6.57)$$

где $k_n = \pi n / d_L$. Обратим внимание, что суммирование в (6.57) начинается с $n=0$. Поскольку интеграл от 0 до d_L от функции $\cos(k_n z)$ равен нулю для всех $n \geq 1$, то из уравнений (6.1) имеем, что открытый плазменный соленоид возбуждается только на нулевой пространственной гармонике. При этом продольная составляющая напряженности электрического поля E_z оказывается тождественно равной нулю, а поэтому равна нулю поверхностная плотность заряда при $z=0, d_L$. В этом и состоит физический смысл граничных условий (6.56). А подстановка разложений (6.57) в уравнения (6.1) приводит к уравнению (6.6) для $E_\varphi = E_{\varphi 0}$, исследованному в подразд. 6.3. Таким образом, формулы (6.10), (6.11) и (6.12) определяют комплексный импеданс открытого плазменного соленоида без относительно к какому-либо соотношению между размерами d_L и r_L .

Открытый и закрытый плазменные соленоиды по существу являются совершенно разными электродинамическими системами. Электромагнитное поле в открытом соленоиде описывается нулевыми ($n=0$) слагаемыми в разложениях (6.57), т.е. $k_z = k_{z0} = 0$. Поэтому в открытом соленоиде азимутальный ток внешнего источника возбуждает только электромагнитное поле B -типа без примеси E -полей. Следовательно резонанс внешнего источника с плазмой в открытом соленоиде есть резонанс на волнах B -типа. Из-за высокой частоты волн B -типа такой резонанс является высокочастотным. Иная ситуация имеет место в закрытом соленоиде. Как видно из (6.20), в закрытом соленоиде $k_z \geq k_{z1} = \pi/d_L$. Тогда, при наличии внешнего магнитного поля внешний источник создает поле B -типа, но с примесью E -полей, что делает возможным резонансное возбуждение волн E -типа. Собственные частоты плазменных волн E -типа лежат в той частотной области, где более высокочастотных волн B -типа нет. Следовательно низкочастотный резонанс внешнего источника с плазмой в закрытом соленоиде есть резонанс на волнах E -типа.

Рассмотрим еще полуоткрытый плазменный соленоид. Пусть на границе $z=0$ выполнены условия (6.19), а при $z=d_L$ имеют место условия (6.56). Тогда разложение полей имеет вид (6.20), но $k_{zn} = \pi(n+1/2)/d_L$, где $n=0,1,\dots$. Легко показать, что для комплексного импеданса такого соленоида имеют место формулы (6.49) и (6.50), в которых

$$P_n = \frac{4}{\pi(2n+1)}. \quad (6.58)$$

Надо полагать, что формулы типа (6.49) при соответствующем определении коэффициентов P_n определяют комплексные импедансы и других цилиндрических плазменных образований с индуктивной системой возбуждения. Заметим, что поскольку

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2} = \pi^2/8, \quad (6.59)$$

предельный переход $d_L \rightarrow \infty$ в формуле для импеданса полуоткрытого плазменного соленоида с проводящим кожухом приводит к формуле (6.12) для импе-

са открытого соленоида. Таким образом в случае соленоида большой длины условия на его торцах роли не играют. Правда относится это только к высокочастотной области.

7. Теория плазменного конденсатора с учетом пространственной дисперсии

7.1. Проникновение продольного поля в плазму

До сих пор при электротехническом описании плазменных элементов электрической цепи мы не учитывали эффект пространственной дисперсии. Влияние пространственной дисперсии на динамику высокочастотных поперечных (вихревых) электромагнитных полей в пространственно ограниченной плазме в целом не велико. Поэтому пренебрежение пространственной дисперсией при рассмотрении индуктивных плазменных элементов цепи (плазменных соленоидов) вполне оправдано. Что касается продольных (потенциальных) полей, то пространственная дисперсия в плазме может оказывать на них существенное влияние. Достаточно вспомнить дебаевское экранирование поля заряда в плазме, обусловленное именно эффектом пространственной дисперсии (см. подразд. 3.1, уравнение (3.12)). В связи с этим учет эффекта пространственной дисперсии в теории емкостных плазменных элементов электрической цепи (плазменных конденсаторов) является важным.

Задача о вычислении комплексного импеданса плазменного конденсатора с учетом пространственной дисперсии тесно связана с фундаментальной проблемой проникновения продольного поля в плазму. Математически эффект пространственной дисперсии описывается зависимостью диэлектрической проницаемости от волнового вектора \mathbf{k} . Чтобы описать проникновение продольного поля в изотропную плазму, или любую другую изотропную среду, требуется знать ее продольную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})$. Мы в данном разделе для диэлектрической проницаемости плазмы будем использовать выражение (2.26). Кроме того, будем рассматривать только такие случаи, когда поле в плазме зависит от одной пространственной координаты, т.е. случаи, исследовавшиеся в подразд. 5.3 и 5.5, мы в данном разделе курса затрагивать не будем.

Если среда однородна и не обладает пространственной дисперсией, то электрическое поле в среде определяется формулой $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) / \varepsilon'(\omega)$, где $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ -

внешнее поле (поле, которое было бы в точке r если бы среда отсутствовала). Как следствие при отсутствии пространственной дисперсии для емкости конденсатора с диэлектрическим заполнением имеет место известная из курса общей физики формула $C = \varepsilon'(\omega)C_0$, где C_0 - емкость вакуумного конденсатора той же геометрии (считается, что однородная среда полностью заполняет пространство между обкладками конденсатора и краевые эффекты отсутствуют). При наличии пространственной дисперсии диэлектрическая проницаемость среды зависит от пространственного распределения поля (т.е. от волнового вектора k), поэтому проблема проникновения электрического поля в среду и задача вычисления емкости конденсатора существенно усложняются. Перейдем к рассмотрению этой проблемы.

Ограничиваясь при описании продольного поля потенциальным приближением (см. подразд. 2.3), исходим из следующих общих соотношений:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_0, \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) = \varepsilon'(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}(t, \mathbf{r}). \quad (7.1)$$

Здесь \mathbf{D} и \mathbf{E} - индукция и напряженность электрического поля соответственно, ρ_0 - объемная плотность внешних зарядов, $\varepsilon'(\omega, \mathbf{k})$ - продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, а ω и \mathbf{k} - операторы частоты и волнового вектора соответственно. Для монохроматических возмущений вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$ будет $\omega = \omega$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}$. Начнем с простейшего случая бесстолкновительной электронной плазмы. При этом из формулы (2.26) для продольной диэлектрической проницаемости плазмы имеем

$$\varepsilon'(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 V_{Te}^2}. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) применима, если частота ω существенно превышает ионную ленгмюровскую частоту ω_L . Случай частот сравнимых и меньших ω_L будет рассмотрен в подразд. 7.5.

Применим уравнения (7.1) и формулу (7.2) к описанию одномерного плоского случая. Пусть в области $z > 0$ находится однородная плазма с резкой границей $z = 0$, а левее границы плазмы внешними зарядами создано электриче-

ское поле $E_z = E_0 \exp(-i\omega t)$. Источником такого поля может быть переменный поверхностный электрический заряд с плотностью $\rho_0 = \sigma_0 \exp(-i\omega t)\delta(z + z_0)$, где $z_0 > 0$ - некоторая постоянная, а $\sigma_0 = (2\pi)^{-1} E_0$ - поверхностная плотность заряда. Полагая

$$\hat{\omega} = i \frac{\partial}{\partial t} = \omega, \quad \hat{\mathbf{k}} = \{0, 0, -i \frac{d}{dz}\}, \quad \hat{\mathbf{k}}^2 = -\frac{d^2}{dz^2}, \quad (7.3)$$

для поля вида $E_z(z) \exp(-i\omega t)$ из (7.1) и (7.2) имеем следующую цепочку соотношений:

$$\frac{d}{dz} (\hat{\epsilon} E_z) = 0 \rightarrow \hat{\epsilon} E_z = E_0 \rightarrow E_z - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 + V_{Te}^2 d^2/dz^2} E_z = E_0, \quad (7.4)$$

в которых последнее является псевдодифференциальным уравнением. Откуда получаем дифференциальное уравнение для продольного поля в плазме

$$\frac{d^2 E_z}{dz^2} - \frac{\omega_{Le}^2 - \omega^2}{V_{Te}^2} E_z = \frac{\omega^2}{V_{Te}^2} E_0. \quad (7.5)$$

Вводя обозначения и безразмерные переменные

$$r_{De} = V_{Te} / \omega_{Le}, \quad \Omega = \omega / \omega_{Le}, \quad (7.6)$$

$$\xi = z / r_{De}, \quad E = E_z / E_0,$$

запишем уравнение (7.5) в форме, содержащей единственный параметр - безразмерную частоту Ω

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} - (1 - \Omega^2) E = \Omega^2. \quad (7.7)$$

Если под скоростью V_{Te} понимать тепловую скорость электронов плазмы V_{Te} , то величина $r_{De} = V_{Te} / \omega_{Le}$ в (7.6) совпадает с электронным дебаевским радиусом, введенным в (1.4). Эта величина определяет глубину проникновения статического электрического поля в плазму. Заметим, что под статическим полем здесь понимается переменное поле, частота которого удовлетворяет неравенствам

$$\omega_{Le}^2 \ll \omega^2 \ll \omega_{Lc}^2. \quad (7.8)$$

Неравенство $\omega^2 \gg \omega_{Lc}^2$, как условие применимости основной формулы (7.2), следует иметь в виду даже в тех случаях, когда будет формально полагаться $\omega = 0$. Сейчас будет показано, что пространственным масштабом продольного поля

тоги ω в плазме является величина

$$r_{D\omega} = V_{Te} / \sqrt{\omega_{Le}^2 - \omega^2} = r_{De} (1 - \Omega^2)^{-1/2}, \quad (7.9)$$

чем полное экранирование поля имеет место только при $\omega^2 / \omega_{Le}^2 \rightarrow 0$.

Общее решение уравнения (7.5) имеет вид

$$E_z = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Le}^2} E_0 + C_1 \exp(-z/r_{D\omega}) + C_2 \exp(z/r_{D\omega}). \quad (7.10)$$

Для определения постоянных $C_{1,2}$ используем граничные условия. Пусть правая граница плазмы находится на бесконечности. Тогда граничные условия оказываются следующими:

$$E_z(0) = E_0 \quad (E(0) = 1), \quad |E_z(\infty)| < const < \infty. \quad (7.11)$$

Последнее условие в (7.11) означает естественное требование ограниченности напряженности электрического поля в равновесной системе. При $\omega^2 < \omega_{Le}^2$ величина (7.9) является вещественной. Следовательно, чтобы удовлетворить последнему граничному условию в (7.11), в решении (7.10) необходимо положить $C_2 = 0$. При этом из (7.10) находим выражение для продольного поля в плазме

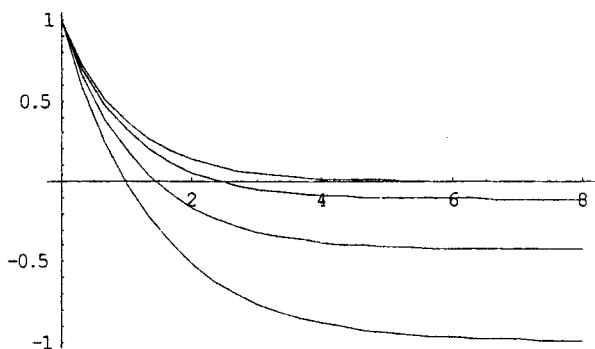
$$E_z = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Le}^2} E_0 + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 - \omega^2} E_0 \exp\left(-\sqrt{\omega_{Le}^2 - \omega^2} \frac{z}{V_{Te}}\right). \quad (7.12)$$

На расстоянии $z_0 = 2r_{D\omega} \ln(\omega_{Le}/\omega)$ поле в плазме из-за дебаевской экранировки и динамической поляризации плазмы уменьшается до нуля, а затем меняет знак. На бесконечности поле стремится к постоянному значению E_0/ϵ_p , где $\epsilon_p = 1 - \omega_{Le}^2/\omega^2$ - продольная диэлектрическая проницаемость плазмы без учета пространственной дисперсии. Только при $\omega = 0$ поле (7.12) обращается на бесконечности в ноль, что означает полное экранирование поля заряда плазмой; при $\omega \neq 0$ полного экранирования нет, что связано с динамическим характером поляризации плазмы и инерционностью электронов.

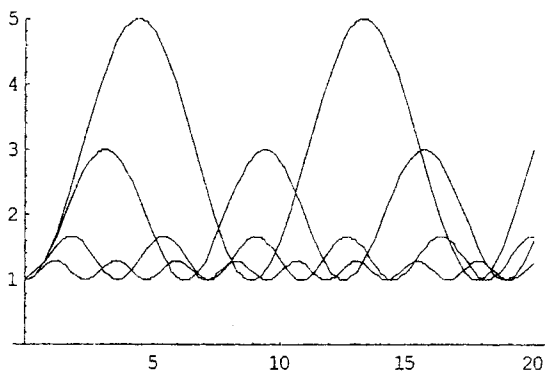
Чтобы записать решение (7.10), удовлетворяющее граничным условиям (7.11), в случае $\omega^2 > \omega_{Le}^2$ требуются дополнительные соображения. Действительно, при $\omega^2 > \omega_{Le}^2$ величина (7.9) мнимая, и обе экспоненты в (7.10) ограничены на

бесконечности. Для выбора нужной экспоненты используем, как обычно, предположение о включении поля в бесконечном прошлом – принцип причинности. Положим $\omega = \omega + i\delta$, где $\delta \rightarrow +0$. При этом физический смысл будет иметь только та экспонента, которая стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Отсюда, с учетом соотношения $\sqrt{-1 \pm i0} = \pm i$, имеем $C_2 = 0$, а для продольного поля находим следующее выражение:

$$E_z = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Le}^2} E_0 + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 - \omega^2} E_0 \exp\left(i \sqrt{\omega^2 - \omega_{Le}^2} \frac{z}{V_{Te}}\right). \quad (7.13)$$



a



б

Рис. 7.1

Пространственное распределение продольного поля в плазменном полупространстве: *a* - $\omega^2 < \omega_{Le}^2$; *б* - $\omega^2 > \omega_{Le}^2$

Пространственные распределения $E(\xi)$ поля (7.12) в безразмерных переменных (7.6) для случаев $\Omega^2 = 0; 0.1; 0.3; 0.5$ показаны на Рис. 7.1а (чем больше Ω , тем ниже расположена соответствующая кривая). На Рис. 7.1б изображены пространственные распределения поля (7.13) для случаев $\Omega^2 = 1.5; 2; 4; 8$ (чем больше Ω , тем выше расположена соответствующая кривая).

Получим теперь для плоского случая важный результат общего характера, независящий от конкретного вида диэлектрической проницаемости. Если в (7.1) с δ -образным ρ_0 и при $z_0 = 0$ осуществить преобразование Фурье, а затем выполнить обратное преобразование, то для напряженности электрического поля получится

$$E_z(z) = -i 2\sigma_0 \int_0^{\infty} \frac{\exp(ikz)}{k\varepsilon'(\omega, k)} dk. \quad (7.14)$$

Для вычисления входящего в (7.14) интеграла \mathfrak{I} рассмотрим вспомогательный интеграл \mathfrak{I}_C по замкнутому контуру $C = C_{(-R, -\rho)} + C_\rho + C_{(\rho, R)} + C_R$, где C_R - полуокружность бесконечно большого радиуса R в верхней полуплоскости комплексной плоскости k , C_ρ - полуокружность бесконечно малого радиуса ρ в верхней полуплоскости комплексной плоскости k (при $z < 0$ полуокружности расположены в нижней полуплоскости), $C_{(\rho, R)}$ и $C_{(-R, -\rho)}$ - отрезки действительной оси k $[\rho, R]$ и $[-R, -\rho]$. Интеграл \mathfrak{I}_C равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов подынтегральной функции в особых точках верхней полуплоскости, интеграл \mathfrak{I}_{C_R} по лемме Жордана равен нулю, сумма интегралов $\mathfrak{I}_{C_{(-R, -\rho)}}$ и $\mathfrak{I}_{C_{(\rho, R)}}$ равна интегралу \mathfrak{I} , наконец, элементарно вычисляемый интеграл \mathfrak{I}_{C_ρ} равен $-i\pi/\varepsilon(\omega, 0)$. В результате формула (7.14) преобразуется к виду

$$E_z(z) = \frac{2\pi\sigma_0}{\varepsilon'(\omega, 0)} + 4\pi\sigma_0 \sum_n \text{Выч} \left[\frac{\exp(ikz)}{k\varepsilon'(\omega, k)}, k_n \right], \quad (7.15)$$

где k_n - нули диэлектрической проницаемости плазмы, расположенные выше действительной оси k .

Формулу (7.15) можно рассматривать как общую теорему, справедливую

для любой среды, поскольку при ее получении никаких предположений о характере функции $\varepsilon'(\omega, k)$ не делалось. В случае плазмы независимо от плазменной модели $\varepsilon'(\omega, 0) = \varepsilon_p$. Поскольку $2\pi\sigma_0 = E_0$, первое слагаемое в (7.15) совпадает с первым слагаемым в формуле (7.12). Второе слагаемое в (7.15) описывает эффект дебаевской экранировки и существенно зависит от вида функции $\varepsilon'(\omega, k)$. В частности, для проницаемости (7.2) получается второе слагаемое формулы (7.12).

7.2. Плоский плазменный конденсатор

Перейдем теперь к рассмотрению плоского плазменного конденсатора с учетом эффекта пространственной дисперсии. Пусть у плазмы помимо левой границы $z=0$ имеется еще и правая граница $z=d_c$, причем обе границы являются резкими. Правее границы $z=d_c$ пусть расположен поверхностный заряд $\rho_0 = -\sigma_0 \exp(-i\omega t)\delta(z-d_c-z_0)$, а поверхностный заряд левее границы $z=0$ остается прежним. Именно такие поверхностные заряды создаются на обкладках плоского конденсатора (см. формулу (4.10)). Поле вблизи обкладок конденсатора (в вакуумных зазорах $0 > z > -z_0$ и $d_c < z < d_c + z_0$) есть $E_0 = 4\pi\sigma_0 = 4\pi Q/S$, где Q - заряд левой обкладки, а S - ее площадь. Поэтому граничные условия для поля в плазме следует взять в виде

$$E_z(0) = E_z(d) = E_0 \quad (E(0) = E(\xi_d) = 1, \quad \xi_d = d_c/r_{De}). \quad (7.16)$$

При этом из общего решения (7.10) для поля в плазме имеем

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon_p} E_0 + \frac{\varepsilon_p - 1}{\varepsilon_p} E_0 \frac{\text{sh}[(d_c - z)/r_{De}] + \text{sh}(z/r_{De})}{\text{sh}(d_c/r_{De})}, \quad 0 \leq z \leq d_c. \quad (7.17)$$

Распределения безразмерного поля E в плоском плазменном конденсаторе при $\Omega = 0.5$ для случаев $\xi_d = 1; 3; 6; 15$ показаны на Рис. 7.2, по горизонтали отложена приведенная координата z/d_c (чем больше ξ_d , тем ниже проходит кривая на Рис. 7.2).

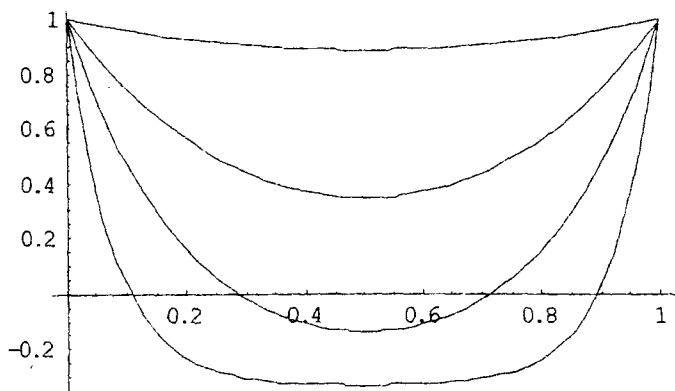


Рис. 7.2

Распределение поля в плоском конденсаторе при различных значениях параметра $\xi_d = d_c / r_{De}$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора при $z_0 \rightarrow 0$ определяется формулой

$$U = \int_0^{d_c} E_z dz = d_c \frac{1}{\epsilon_p} E_0 + 2r_{D\omega} \frac{\epsilon_p - 1}{\epsilon_p} \frac{[\text{ch}(d_c / r_{D\omega}) - 1]}{\text{sh}(d_c / r_{D\omega})} E_0 = \frac{1}{C_p} Q. \quad (7.18)$$

Здесь мы учли связь между зарядом и потенциалом через емкость C_p . Тогда из (7.18) для емкости плоского плазменного конденсатора с пространственной дисперсией получаем следующее выражение:

$$C_p(\omega) = C_0 \frac{\epsilon_p}{1 + (\epsilon_p - 1) \frac{2r_{D\omega} [\text{ch}(d_c / r_{D\omega}) - 1]}{d_c \text{sh}(d_c / r_{D\omega})}}, \quad (7.19)$$

где $C_0 = S / (4\pi d_c)$ - емкость плоского конденсатора без плазмы.

Если ввести обозначение

$$\omega_{Ge}^2(\omega) = \omega_{Le}^2 \frac{2r_{D\omega} [\text{ch}(d_c / r_{D\omega}) - 1]}{d_c \text{sh}(d_c / r_{D\omega})}, \quad (7.20)$$

то формулу (7.19) можно записать в виде

$$C_p(\omega) = C_0 \frac{\omega^2 - \omega_{Le}^2}{\omega^2 - \omega_{Ge}^2(\omega^2)}, \quad (7.21)$$

в котором она напоминает выражение (5.14) для емкости плазменного конденсатора с вакуумными зазорами при отсутствии пространственной дисперсии. Сходство будет еще большим, если выражение (7.20) записать для случая $d_C \gg r_{De}$ и $\omega^2 \ll \omega_{Le}^2$

$$\omega_{Ge}^2 = \omega_{Le}^2 \frac{2 r_{De}}{d_C}. \quad (7.22)$$

Величина (7.22) есть геометрическая плазменная частота в конденсаторе, роль вакуумных зазоров в котором играют приэлектродные слои с дебаевским экранированием электрического поля.

Таким образом, корень уравнения

$$\omega^2 - \omega_{Ge}^2(\omega^2) = 0 \quad (7.23)$$

определяет частоту геометрического плазменного резонанса в плоском плазменном конденсаторе с пространственной дисперсией. Оказывается, что уравнение (7.23) в области частот от нуля до ω_{Le} имеет решение только если величина $\xi_d = d_C/r_{De}$ превосходит постоянную порядка $\xi_* = 3.464$. Следовательно в конденсаторе, у которого размер $d_C < \xi_* r_{De}$, геометрический плазменный резонанс невозможен. В области низких частот для корня уравнения (7.23) имеет место приближенная формула

$$\omega = \omega_{Le} \sqrt{2r_{De}/d_C}, \quad (7.24)$$

справедливая только при $d_C \gg r_{De}$. На частотах больших частоты геометрического резонанса и меньших ω_{Le} конденсатор обладает индуктивными свойствами (поскольку $C_p(\omega) < 0$), а на частотах меньших частоты геометрического резонанса свойства конденсатора оказываются емкостными. Безразмерный корень уравнения (7.23) $\Omega(\xi_d)$ в зависимости от безразмерной длины конденсатора приведен на Рис. 7.3. Выше и правее кривой на рисунке (область L) свойства плазменного конденсатора оказываются в большей степени индуктивными, ниже и левее кривой (область C) преобладают емкостные свойства. Помимо нуля, определяющего частоту геометрического резонанса, левая часть уравнения (7.23) имеет бесчисленное множество других нулей и полюсов (полюса опреде-

от нуля емкости (7.21)). Все эти нули и полюса связаны с резонансным возбуждением в конденсаторе объемных ленгмюровских волн со спектром (3.9), где k кратно величине π/d_c .

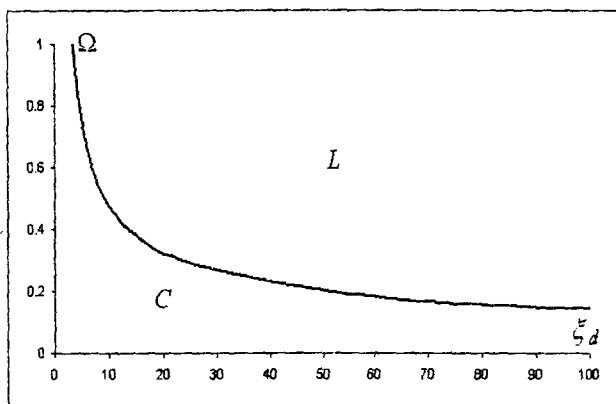


Рис. 7.3

Частота геометрического резонанса в плазменном конденсаторе при наличии пространственной дисперсии

Вдали от нулей и полюсов в случаях большой и малой длин плазменного конденсатора формула (7.19) существенно упрощается

$$C_p(\omega) = C_0 \begin{cases} \varepsilon_p, & \xi_d \gg 1 \\ 1, & \xi_d < 1 \end{cases} \quad (7.25)$$

Емкость конденсатора, распределение поля в котором изображается нижней кривой на Рис. 7.2, приближенно может быть рассчитана по первой формуле (7.25). Если распределение поля описывается верхней кривой, то применима вторая формула (7.25).

Формулы (7.19)–(7.21) применимы и при наличии диссипативных эффектов, только в них следует заменить ω^2 на $\omega(\omega + i\nu_e)$. В частности для величин ε_p и $r_{D\omega}$ должны быть использованы следующие определения:

$$\varepsilon_p = 1 - \omega_{pe}^2 / [\omega(\omega + i\nu_e)], \quad r_{D\omega} = r_{De} [1 - \omega(\omega + i\nu_e) / \omega_{pe}^2]^{-1/2}. \quad (7.26)$$

На Рис. 7.4 приведен результат расчета импеданса $Z_p(\omega) = i[\omega C_p(\omega)]^{-1}$ плазменного конденсатора с пространственной дисперсией при учете столкновений при

$\xi_d = 10$ и $v_e/\omega_{Lz} = 0.05$. По горизонтальной оси отложена безразмерная частота $\Omega = \omega/\omega_{Lz}$, а по вертикали – безразмерная величина $\omega_{Lz} C_0 Z_p(\omega)$.

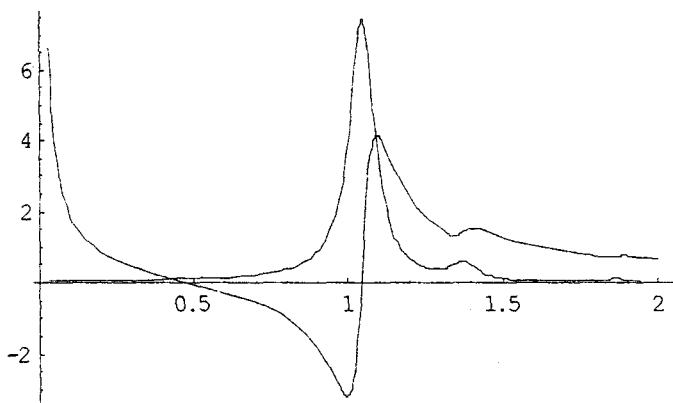


Рис. 7.4

Комплексный импеданс плазменного конденсатора с учетом пространственной дисперсии при $v_e/\omega_{Lz} = 0.05$ и $\xi_d = 10$

Имеет смысл сравнить Рис. 7.4 с Рис. 5.2, на котором изображен комплексный импеданс конденсатора без пространственной дисперсии, но с вакуумными зазорами. Ноль мнимой части импеданса при $\Omega \approx 0.45$ совпадает с точкой геометрического плазменного резонанса. Ноль мнимой части (и максимум действительной части) при $\Omega \approx 1.05$ обусловлен резонансным возбуждением объемной ленгмюровской волны. Качественным отличием Рис. 7.4 от Рис. 5.2 являются дополнительные экстремумы импеданса на более высоких частотах – они обусловлены резонансами с объемными ленгмюровскими волнами (3.9) при $k \neq 0$.

В соответствии с формулой (5.47) действительная часть импеданса пропорциональна мощности источника, выделяемой в плазме, когда активное сопротивление цепи $R_{\text{ц}}$ велико. Как видно из Рис. 7.4, эта мощность велика в точке плазменного резонанса, а в точке геометрического плазменного резонанса

наоборот мала. Если модуль импеданса цепи без плазменного конденсатора мал, то мощность источника выделяемая в плазме дается формулой (5.48). Из рис. 7.5 видно, что она велика именно в точке геометрического резонанса.

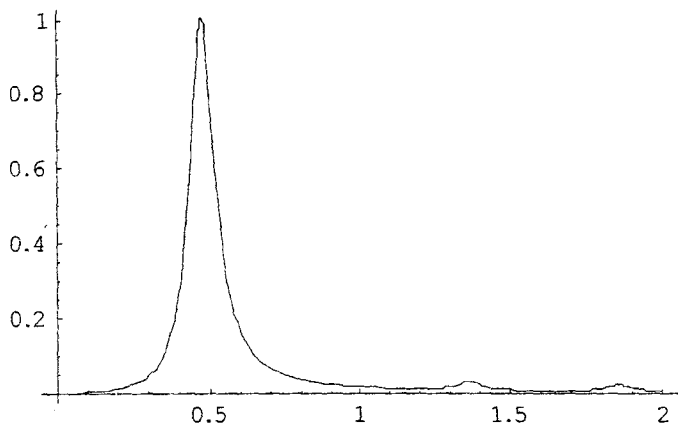


Рис. 7.5

Мощность, выделяемая в плазме конденсатора, при малом сопротивлении внешней цепи

7.3. Сферический плазменный конденсатор

Перейдем теперь к рассмотрению сферического плазменного конденсатора с учетом эффекта пространственной дисперсии. Предположим, что в однородной плазме есть сферическая вакуумная полость $r \leq r_0$, в которой имеется радиальное электрическое поле $E_r = (q/r^2) \exp(-i\omega t)$. Такое поле может быть создано осциллирующим зарядом q симметрично распределенным в области $r \leq r_0$. При наличии сферической симметрии в сферической системе координат оператор волнового вектора $\hat{k} = \{k, 0, 0\}$ определяется одним из следующих соотношений:

$$k = k_1 = -i \frac{d}{dr}, \quad k = k_2 = -i \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2, \quad (7.27)$$

причем операторы k_1 и k_2 не коммутируют. Дополнительный анализ, основанный на уравнениях динамики плазмы, показывает, что в $\varepsilon(\omega, \hat{k})$ следует поло-

жить

$$k^2 = k_1 k_2 = -\frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2. \quad (7.28)$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (7.28) нужно уравнения многожидкостной гидродинамики плазмы (1.21) записать в сферических координатах, а потом, обычным образом, выразить из них плотность тока в плазме. Получая из (7.1) и (7.2) цепочку соотношений

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 (\varepsilon E_r) = 0 \rightarrow r^2 \varepsilon E_r = q \rightarrow E_r - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - V_{Te}^2 k^2} E_r = \frac{q}{r^2} \quad (7.29)$$

и используя (7.28), находим следующее уравнение для радиального поля в плазме:

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 E_r - \frac{\omega_{Le}^2 - \omega^2}{V_{Te}^2} E_r = \frac{\omega^2}{V_{Te}^2} \frac{q}{r^2}, \quad r > r_0. \quad (7.30)$$

Вводя безразмерные переменные

$$\xi = \frac{r}{r_{De}}, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{r_{De}}, \quad E = E_r \left(\frac{q \omega_{Le}^2}{V_{Te}^2} \right)^{-1}, \quad (7.31)$$

преобразуем уравнение (7.30) к виду

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 E - (1 - \Omega^2) E = \frac{\Omega^2}{\xi^2}, \quad \xi > \xi_0. \quad (7.32)$$

Общее решение уравнения (7.32) запишем следующим образом:

$$E(\xi) = -\frac{\Omega^2}{1 - \Omega^2} \frac{1}{\xi^2} + C_1 \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \right) \exp(-\xi\alpha) + C_2 \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \right) \exp(\xi\alpha), \quad (7.33)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - \Omega^2}$. Независящая от произвольных постоянных $C_{1,2}$ часть решения (7.33), является частным решением неоднородного уравнения (7.32). В плоском случае её аналогом является первое слагаемое в правой части формулы (7.10).

Определим постоянные $C_{1,2}$ в решении (7.33). Если плазма с полостью неограниченна, то используем следующие граничные условия:

$$E(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2}, \quad E(\infty) = 0. \quad (7.34)$$

Первая формула в (7.34) определяет кулоновское поле сферически симметрич-

ого заряда q , находящего в полости с радиусом r_0 . Подставляя (7.33) в (7.34), находим

$$E(\xi) = -\frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{1-\Omega^2} \frac{1}{\xi^2} \frac{1+\alpha\xi}{1+\alpha\xi_0} \exp[\alpha(\xi_0 - \xi)]. \quad (7.35)$$

График функции (7.35) для $\Omega = 0.5$ и $\xi_0 = 10$ изображен на Рис. 7.6. Качественно такой же вид поле (7.35) имеет и при других значениях параметров Ω и ξ_0 .

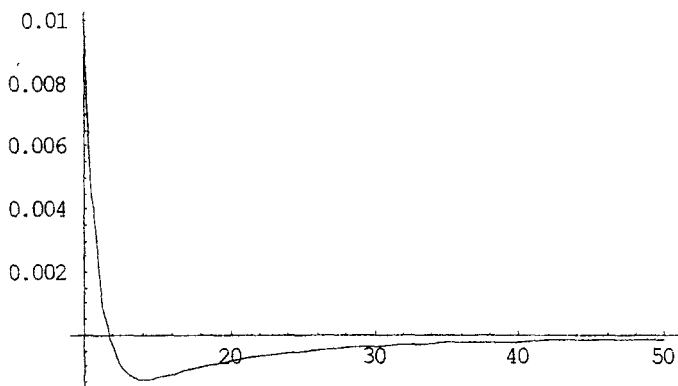


Рис. 7.6

Распределение поля сферического заряда в плазме при учете пространственной дисперсии

В размерном виде из выражения (7.35) находим следующую формулу

$$E_r = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} \frac{q}{r^2} + \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} \frac{q}{r^2} \frac{1+r/r_{Dw}}{1+r_0/r_{Dw}} \exp\left(-\sqrt{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} \frac{(r-r_0)}{V_{Te}}\right), \quad (7.36)$$

которую целесообразно сравнить с соответствующей формулой плоского случая (7.12). Из (7.36) следует, что на большом расстоянии от полости в плазме напряженность поля стремится к функции

$$E_r = \frac{q}{\epsilon_p r^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} \frac{q}{r^2}, \quad (7.37)$$

что и должно быть для поля заряда q в среде с диэлектрической проницаемо-

стью ε_p . В плоском случае аналогом (7.37) является первое слагаемое в правой части формулы (7.12). Формула (7.37) описывает правую, восходящую, ветвь функции, изображенной на Рис. 7.6. Левая, спадающая, ветвь этой функции обусловлена эффектом дебаевского экранирования. Эффект экранирования описывается вторым слагаемым в (7.36) и существенен только на достаточно малых расстояниях. Только при $\omega = 0$, когда поле (7.37) равно нулю, дебаевское экранирование является основным на любых расстояниях.

Не составляет труда получить аналог общего результата (7.15) для сферического случая. Пусть в однородной плазме в начале координат находится точечный заряд q . Вводя скалярный потенциал и используя преобразование Фурье, из уравнения Пуассона можно получить для потенциала следующее выражение:

$$\Phi(r) = \frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{\exp(i\vec{k}\vec{r})}{k^2 \varepsilon^l(\omega, k)}, \quad (7.38)$$

где учтено, что в силу изотропии плазмы диэлектрическая проницаемость является скаляром и зависит от модуля волнового вектора (см. (7.2)). Для вычисления интеграла введем сферическую систему k, θ, φ в \mathbf{k} -пространстве: $d\mathbf{k} = k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi$, $\mathbf{k}\mathbf{r} = kr \cos\theta$. Выполняя интегрирование по φ и θ , сведем (7.38) к виду

$$\Phi(r) = \frac{2q}{\pi r} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(kr)}{k \varepsilon^l(\omega, k)} dk = \frac{q}{\pi r} \operatorname{Re} \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ikr)}{k \varepsilon^l(\omega, k)} dk \right). \quad (7.39)$$

В (7.39) учтено, что $\varepsilon^l(\omega, k)$ является четной функцией k . Последний интеграл в (7.39) совпадает с интегралом в выражении (7.15). Поэтому по аналогии имеем

$$\Phi(r) = \frac{q}{r \varepsilon^l(\omega, 0)} + \frac{2q}{r} \sum_n \operatorname{Вьщ} \left[\frac{\exp(ikr)}{k \varepsilon(\omega, k)}, k_n \right]. \quad (7.40)$$

Для диэлектрической проницаемости (7.2) формула (7.40) дает

$$\Phi(r) = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{\text{Le}}^2} \frac{q}{r} + \frac{\omega_{\text{Le}}^2}{\omega_{\text{Le}}^2 - \omega^2} \frac{q}{r} \exp\left(-\sqrt{\omega_{\text{Le}}^2 - \omega^2} \frac{r}{V_{\text{Te}}}\right). \quad (7.41)$$

Из (7.41) с учетом соотношения $E_r = -d\Phi/dr$ следует формула (7.36), в которой должно быть положено $r_0 = 0$. Формула (7.40) является сферическим аналогом

шей теоремы (7.15), доказанной ранее для плоского случая.

Перейдем теперь к рассмотрению сферического плазменного конденсатора. Пусть у плазмы при $r = r_0 + d_c$ имеется вторая резкая граница, а при $r > r_0 + d_c$ расположена проводящая сфера, заряд которой противоположен заряду сферы, входящей при $r < r_0$. Эти две заряженные сферы являются обкладками сферического конденсатора с плазменным заполнением. При этом граничные условия для уравнения (7.30) следует взять в виде

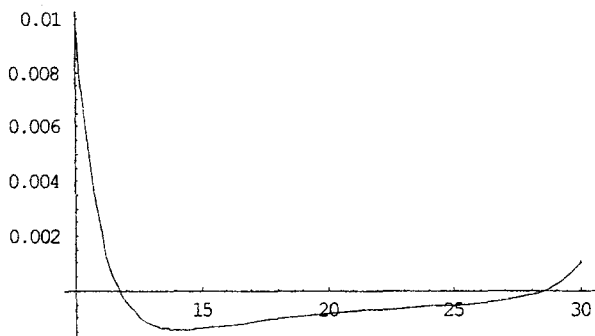
$$E(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0^2}, \quad E(\xi_0 + \xi_d) = \frac{1}{(\xi_0 + \xi_d)^2}, \quad (7.42)$$

где параметр ξ_d определен в (7.16). Вычисляя с помощью граничных условий (7.42) постоянные $C_{1,2}$ в решении (7.33), найдем для них следующие выражения:

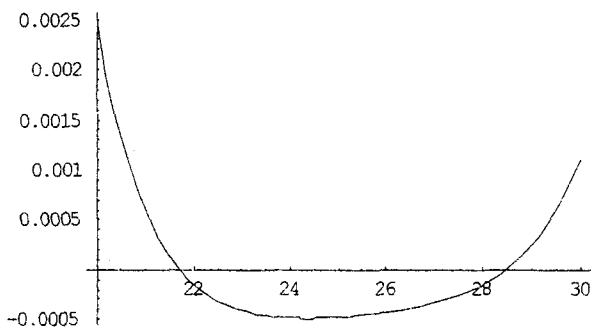
$$C_1 = \frac{e^{\alpha \xi_0}}{1 - \Omega^2} \frac{[1 - \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{\alpha \xi_d} - (1 - \alpha \xi_0)}{(1 + \alpha \xi_0)[1 - \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{\alpha \xi_d} - (1 - \alpha \xi_0)[1 + \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{-\alpha \xi_d}},$$

$$C_2 = \frac{e^{-\alpha \xi_0}}{1 - \Omega^2} \frac{(1 + \alpha \xi_0) - [1 + \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{-\alpha \xi_d}}{(1 + \alpha \xi_0)[1 - \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{\alpha \xi_d} - (1 - \alpha \xi_0)[1 + \alpha(\xi_0 + \xi_d)]e^{-\alpha \xi_d}}. \quad (7.43)$$

Типичное распределение поля в сферическом конденсаторе при $\Omega = 0.5$ показано на Рис. 7.7. Видно, что вблизи от электродов имеются слои, где эффект дебаевской экранировки является сильным. Верхний рисунок построен для случая $\xi_0 = 10, \xi_d = 40$, правый — для случая $\xi_0 = 40, \xi_d = 10$. В целом наблюдается качественное сходство с плоским случаем. Причем в случае правого рисунка это сходство больше, что и должно быть при $\xi_0 > \xi_d$, или $r_0 > d_c$ (переход от сферического случая к плоскому осуществляется в пределе $d_c/r_0 \rightarrow 0$).



a



б

Рис. 7.7

*Распределение поля в сферическом плазменном конденсаторе:
 а - $\xi_0 = 10$, $\xi_d = 40$; б - $\xi_0 = 40$, $\xi_d = 10$.*

Качественно иное распределение поля имеет место в случае, когда радиус r_0 меньше дебаевского радиуса, а расстояние между обкладками конденсатора не превосходит величину порядка $3.6 r_{De}$. На Рис. 7.8а представлено распределение поля в сферическом конденсаторе при $\Omega = 0.9$, $\xi_0 = 0.1$, $\xi_d = 3$. Основной особенностью данного случая является то, что поле нигде не меняет знак, причем это имеет место во всем диапазоне частот от нуля до ω_{le} . При $\xi_d > 3.6 r_{De}$ данное свойство сферического плазменного конденсатора пропадает, что видно из Рис. 7.8б.

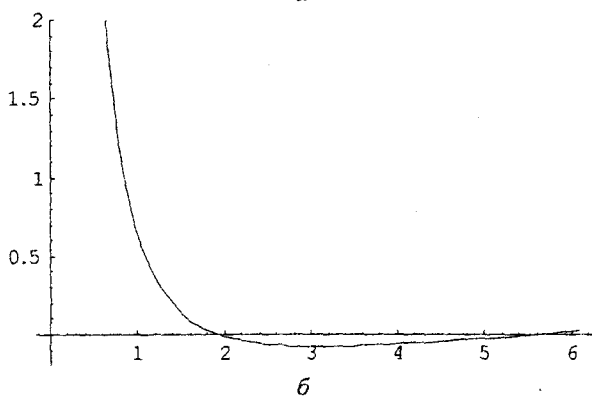
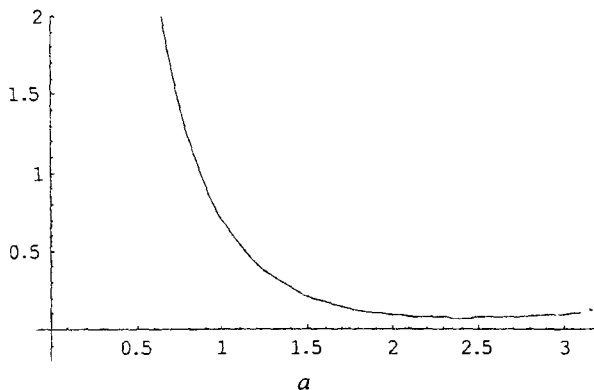


Рис. 7.8

Распределение поля в сферическом плазменном конденсаторе с внутренним электродом малого радиуса при $\Omega = 0.9$:

$a - \xi_0 = 0.1, \xi_d = 3$; $б - \xi_0 = 0.1, \xi_d = 6$

По определению емкость сферического плазменного конденсатора опре-

деляется из соотношения

$$q = C_p \int_{r_0}^{r_0+d} E_r(r) dr, \quad (7.44)$$

подставляя в которое выражения (7.33) и (7.43), находим для емкости сферического плазменного конденсатора следующую формулу:

$$C_p = C_0 \frac{\varepsilon_p}{1 + (\varepsilon_p - 1) \frac{2\alpha\xi_0(\xi_0 + \xi_d) - \alpha[2\xi_0^2(\xi_0 + \xi_d) + \xi_d^2] \operatorname{ch}(\alpha\xi_d) + \xi_d \operatorname{sh}(\alpha\xi_d)}{\xi_d \{ [1 - \alpha^2\xi_0(\xi_0 + \xi_d)] \operatorname{sh}(\alpha\xi_d) - \alpha\xi_d \operatorname{ch}(\alpha\xi_d) \}}. \quad (7.45)$$

где $C_0 = r_0(r_0 + d_c)/d_c$ - емкость сферического конденсатора без плазмы. Для лучшего понимания структуры формулы (7.45) следует учесть, что $\alpha\xi_0 = r_0/r_{D\omega}$ и $\alpha\xi_d = d_c/r_{D\omega}$. В частном случае $\xi_0 \gg \xi_d$ формула (7.45) упрощается

$$C_p = C_0 \frac{\varepsilon_p}{1 + (\varepsilon_p - 1) 2 \frac{1}{\alpha\xi_d} \frac{[\operatorname{ch}(\alpha\xi_d) - 1]}{\operatorname{sh}(\alpha\xi_d)} \frac{\alpha^2 \xi_0^2}{(\alpha^2 \xi_0^2 - 1)}}. \quad (7.46)$$

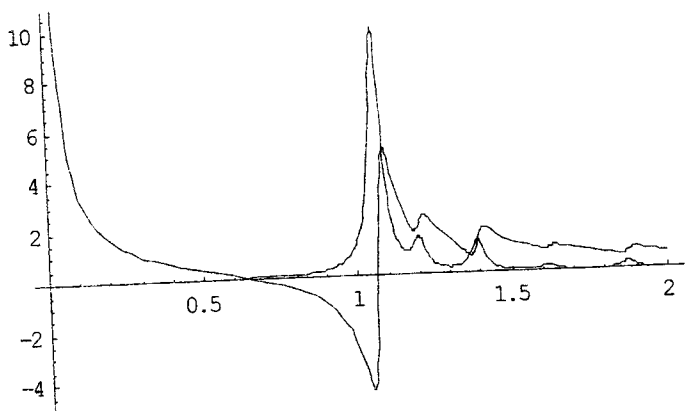
При выполнении неравенства $\alpha^2 \xi_0^2 \gg 1$ последняя формула переходит в формулу для емкости плоского конденсатора (7.19). Еще в одном частном случае $\xi_0 \ll 1$ общая формула (7.45) дает $C_p = C_0$.

Самостоятельный интерес представляет случай уединенного шара (сферического зонда) в плазме с пространственной дисперсией. Емкость такого шара получается из выражения (7.45) при $\xi_d \rightarrow \infty$, а именно:

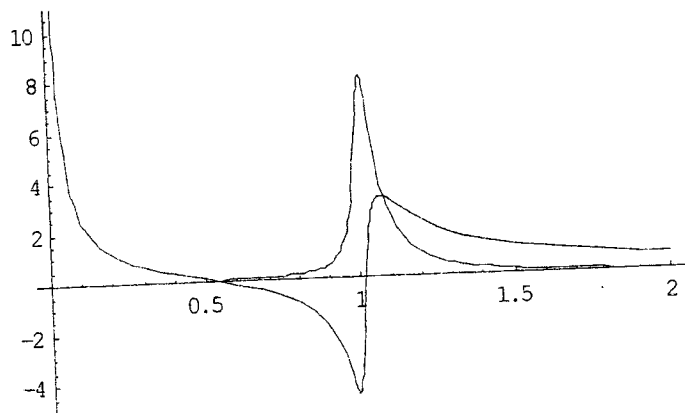
$$C_p(\omega) = r_0 \frac{\varepsilon_p}{1 + (\varepsilon_p - 1) \frac{1}{1 + r_0/r_{D\omega}}} = r_0 \frac{\omega^2 - \omega_{ie}^2}{\omega^2 - \omega_{ie}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \omega^2/\omega_{ie}^2} \frac{r_0}{r_{De}} \right)^{-1}}. \quad (7.47)$$

Формулу (7.47) можно получить также подставив в соотношение (7.44) при $d_c \rightarrow \infty$ выражение (7.36). Формулы (7.45) - (7.47) легко обобщаются на случай столкновительной плазмы, для чего следует произвести замену $\omega^2 \rightarrow \omega(\omega + i\nu_e)$.

На Рис. 7.9 в зависимости от безразмерной частоты приведены комплексные импедансы $Z_p(\omega) = i[\omega C_p(\omega)]^{-1}$ сферического плазменного конденсатора с пространственной дисперсией при наличии столкновений ($\nu_e/\omega_{ie} = 0.05$). По горизонтальной оси отложена безразмерная частота $\Omega = \omega/\omega_{ie}$, а по вертикали - безразмерная величина $\omega_{ie} C_0 Z_p(\omega)$.



a



b

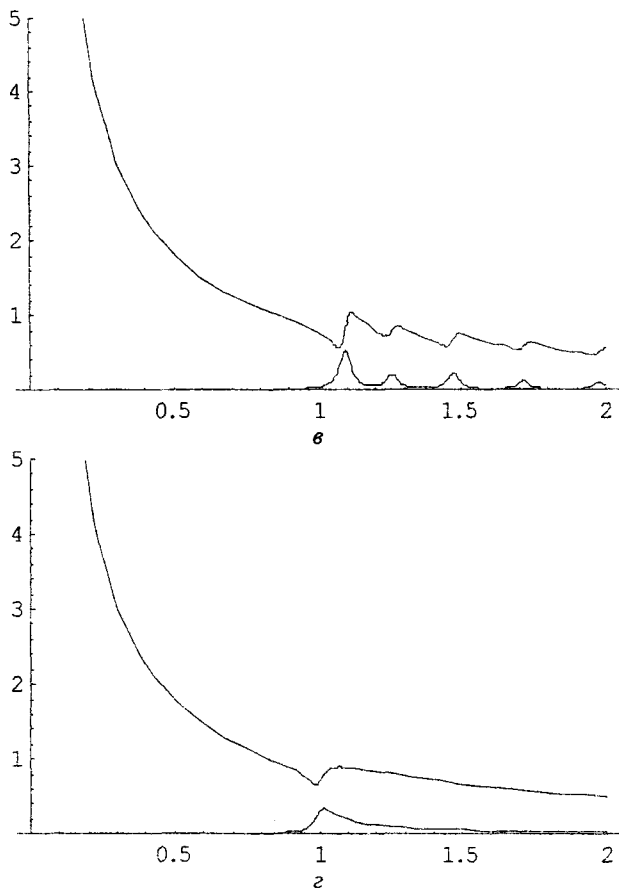


Рис. 7.9

Импеданс сферического плазменного конденсатора с пространственной дисперсией: а - $\xi_0 = 3, \xi_d = 10$; б - $\xi_0 = 3, \xi_d = 100$; в - $\xi_0 = 0.1, \xi_d = 10$; г - $\xi_0 = 0.1, \xi_d = 100$

На Рис. 7.9а представлен импеданс «стандартного» сферического конденсатора ($\xi_0 = 3, \xi_d = 10$): как видим существенных отличий от плоского случая (Рис. 7.4) не наблюдается. На Рис. 7.9б изображен импеданс практически уединенного шара ($\xi_0 = 3, \xi_d = 100 \gg 1$): наблюдается отсутствие резонансов в высокочастотной области. Следующие Рис. 7.9в и 7.9г относятся к случаям конденсатора с

малым радиусом внутреннего электрода ($\xi_0 = 0.1 \ll 1$). Основными особенностями таких конденсаторов являются отсутствие геометрического резонанса и отсутствие у конденсатора индуктивных свойств. Последнее характерно только для сферической геометрии.

7.4. Цилиндрический плазменный конденсатор

В заключение рассмотрим цилиндрический случай. Предположим, что в однородной плазме имеется вакуумная цилиндрическая полость $r \leq r_0$, $z \in (-a, a)$, $a \gg r_0$, в которой внешним источником создано радиальное электрическое поле $E_r = (2\tau/r)\exp(-i\omega t)$. Внешним источником может быть протяженный осциллирующий электрический заряд симметрично распределенный в полости с погонной плотностью τ . В цилиндрической системе координат операторы волнового числа определяются соотношениями

$$k = k_1 = -i \frac{d}{dr}, \quad k = k_2 = -i \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r, \quad k^2 = k_1 k_2 = -\frac{d}{dr} \frac{1}{dr} r. \quad (7.48)$$

Получая из (7.1) и (7.2) цепочку соотношений

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r (\varepsilon E_r) = 0 \rightarrow r \varepsilon E_r = 2\tau \rightarrow E_r - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - V_{re}^2 k^2} E_r = \frac{2\tau}{r} \quad (7.49)$$

и используя (7.48), находим следующее уравнение для радиального поля в плазме:

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_r - \frac{\omega_{pe}^2 - \omega^2}{V_{re}^2} E_r = \frac{\omega^2}{V_{re}^2} \frac{2\tau}{r}, \quad r > r_0. \quad (7.50)$$

В безразмерных переменных (7.31) ($E = E_r (2\tau\omega_{pe}/V_{re})^{-1}$) уравнение (7.50) преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi^n} \frac{d}{d\xi} \xi^n E - (1 - \Omega^2) E = \frac{\Omega^2}{\xi^n}, \quad \xi > \xi_0, \quad (7.51)$$

где $n=1$. Обратим внимание, что к уравнению вида (7.51) принадлежит уравнение плоского случая (7.7) ($n=0$) и уравнение сферического случая (7.32) ($n=2$)

Для случая $n=1$ общее решение уравнения (7.51) имеет вид

$$E(\xi) = -\frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \frac{1}{\xi} + C_1 K_1(\xi\alpha) + C_2 I_1(\xi\alpha), \quad (7.52)$$

где $K_1(x)$ и $I_1(x)$ - функции Макдональда и Инфельда первого порядка. Если плазма с цилиндрической полостью неограниченна, то уравнение (7.51) дополняется следующими граничными условиями:

$$E(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0}, \quad E(\infty) = 0. \quad (7.53)$$

Подставляя решение (7.52) в (7.53) и определяя постоянные $C_{1,2}$ (при этом $C_2 = 0$), получаем следующую формулу для распределения поля (см. (7.35)) цилиндрически симметричного заряда в плазме:

$$E(\xi) = -\frac{\Omega^2}{1-\Omega^2} \frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\Omega^2} \frac{1}{\xi_0} \frac{K_1(\alpha\xi)}{K_1(\alpha\xi_0)}, \quad (7.54)$$

или в размерном виде (см. (7.12) и (7.36))

$$E_r = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Le}^2} \frac{2\tau}{r} + \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Le}^2 - \omega^2} \frac{2\tau}{r_0} \frac{K_1(r/r_{D\omega})}{K_1(r_0/r_{D\omega})}. \quad (7.55)$$

График функции (7.54) (Рис. 7.10, $\xi_0 = 2, \Omega = 0.5$) является промежуточным между графиками поля в плоском (Рис. 7.1) и сферическом (Рис. 7.6) случаях.

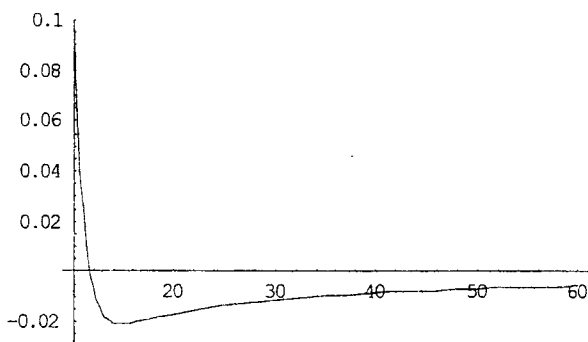


Рис. 7.10

Поле заряженного цилиндра в плазме с пространственной дисперсией

При $r_0 \rightarrow 0$ формула (7.55) описывает поле заряженной нити в плазме

$$E_r = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} \frac{2\tau}{r} + \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} \frac{2\tau}{r_{Dw}} K_1(r/r_{Dw}), \quad (7.56)$$

при $r_0/r_{Dw} \gg 1$ из (7.55) имеем следующее выражение (сравни с (7.12) и (7.36)):

$$E_r = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Lz}^2} \frac{2\tau}{r} + \frac{\omega_{Lz}^2}{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} \frac{2\tau}{\sqrt{r_0 r}} \exp\left(-\sqrt{\omega_{Lz}^2 - \omega^2} \frac{(r - r_0)}{V_{Te}}\right). \quad (7.57)$$

Общие выражения типа (7.40) и (7.15) в цилиндрическом случае записать не удастся. Дело в том, что потенциал линейно распределенного электрического заряда логарифмически расходится на бесконечности, а выражение для поля содержит члены не сводимые к интегралам, берущимся при помощи вычетов.

Для определения емкости цилиндрического плазменного конденсатора используем следующие граничные условия:

$$E(\xi_0) = \frac{1}{\xi_0}, \quad E(\xi_0 + \xi_d) = \frac{1}{\xi_0 + \xi_d}, \quad (7.58)$$

где ξ_d - безразмерное расстояние между цилиндрическими обкладками. Подставляя решение (7.52) в (7.58), находим постоянные $C_{1,2}$

$$C_1 = \frac{1}{1 - \Omega^2} \frac{\xi_{0d} I_1(\alpha \xi_{0d}) - \xi_0 I_1(\alpha \xi_0)}{\xi_0 \xi_{0d} [K_1(\alpha \xi_0) I_1(\alpha \xi_{0d}) - I_1(\alpha \xi_0) K_1(\alpha \xi_{0d})]}, \quad (7.59)$$

$$C_2 = \frac{1}{1 - \Omega^2} \frac{\xi_0 K_1(\alpha \xi_0) - \xi_{0d} K_1(\alpha \xi_{0d})}{\xi_0 \xi_{0d} [K_1(\alpha \xi_0) I_1(\alpha \xi_{0d}) - I_1(\alpha \xi_0) K_1(\alpha \xi_{0d})]}.$$

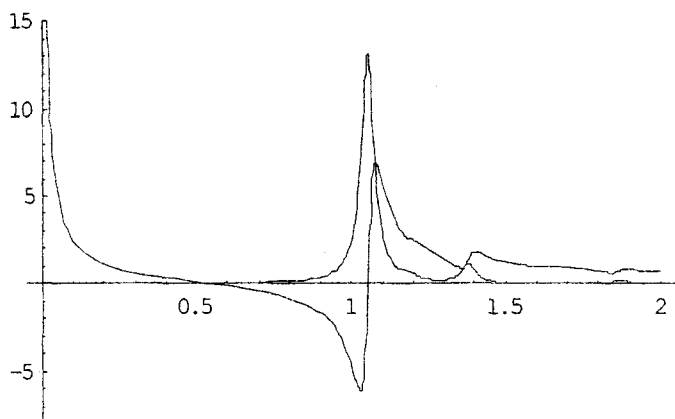
Используя далее формулу (7.44), в результате простых вычислений, получаем следующее выражение для погонной емкости цилиндрического плазменного конденсатора с учетом пространственной дисперсии:

$$C_p = C_0 \frac{\varepsilon_p}{1 + \frac{(\varepsilon_p - 1) K [I_0(\alpha \xi_{0d}) - I_0(\alpha \xi_0)] + I [K_0(\alpha \xi_{0d}) - K_0(\alpha \xi_0)]}{\alpha \xi_0 \xi_{0d} \ln(\xi_{0d}/\xi_0) [K_1(\alpha \xi_0) I_1(\alpha \xi_{0d}) - I_1(\alpha \xi_0) K_1(\alpha \xi_{0d})]}}}, \quad (7.60)$$

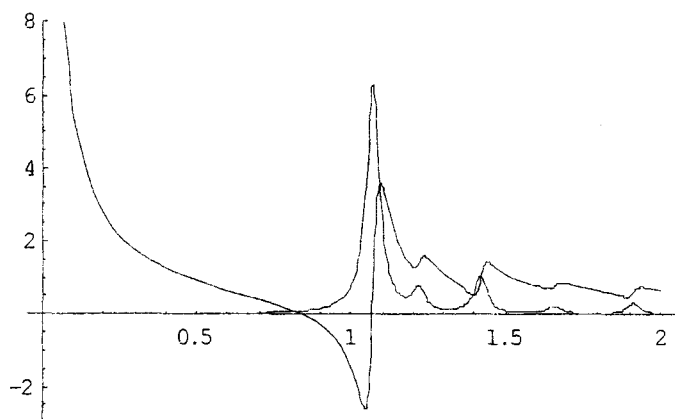
$$K = \xi_0 K_1(\alpha \xi_0) - \xi_{0d} K_1(\alpha \xi_{0d}), \quad I = \xi_0 I_1(\alpha \xi_0) - \xi_{0d} I_1(\alpha \xi_{0d}),$$

где $C_0 = (2 \ln[(r_0 + d)/r_0])^{-1}$ - погонная емкость цилиндрического вакуумного конденсатора, а $\xi_{0d} = \xi_0 + \xi_d$. Мы не будем здесь анализировать довольно сложную формулу (7.60), поскольку качественно новых результатов этот анализ не дает. Приведем только для иллюстрации результаты расчета импеданса цилиндрического конденсатора для двух случаев большого ($r_0 > r_{De}$) и малого ($r_0 < r_{De}$) ра-

диусов внутренней цилиндрической обкладки. Как видим зависимости являются достаточно типичными. Причем те особенности, которые имеются при малом r_0 в сферическом конденсаторе, в цилиндрическом случае не наблюдаются (по крайней мере при $\xi_0 = 0.1$)



a



б

Рис. 7.11

Импеданс цилиндрического конденсатора при $\xi_d = 10$ и $v_e/\omega_{Lr} = 0.05$:

a - $\xi_0 = 3$; б - $\xi_0 = 0.1$

Таким образом теория плазменного конденсатора, учитывающая пространственную дисперсию, приводит к следующим результатам. На границах плазмы имеются слои, в которых нарушена квазинейтральность плазмы, а поэтому происходит сильное изменение напряженности электрического поля. Полная емкость плазменного конденсатора формируется из емкостей слоев и емкости основного объема плазмы, где поле такое как если бы пространственной дисперсии не было. В зависимости от соотношения между размером плазмы и размерами граничных слоев преобладают либо емкостные, либо индуктивные свойства плазмы в конденсаторе. Строгий учет пространственной дисперсии позволяет связать приграничные слои с областями дебаевского экранирования поля и в рамках гидродинамической модели получить точные формулы для емкостей плоского, сферического и цилиндрического плазменных конденсаторов.

7.5. Неизотермический плазменный конденсатор

Учет движения ионов в теории плазменного конденсатора существенен только в случае неизотермической плазмы. Рассмотрим плоский конденсатор, заполненный столкновительной электрон-ионной плазмой, причем ионы считаем холодными. Запишем в одномерном случае уравнения многожидкостной гидродинамики (1.44) для электронной и ионной компонент плазмы, полагая тепловую скорость ионов равной нулю, и уравнение Пуассона

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\partial(N_e V_e)}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial V_e}{\partial t} + V_e \frac{\partial V_e}{\partial z} &= -V_e^2 \frac{1}{N_e} \frac{\partial N_e}{\partial z} + \frac{e}{m} E_z - \nu_e V_e, \\
 \frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial(N_i V_i)}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial z} &= -\frac{e}{M} E_z - \nu_i V_i, \\
 \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi e(N_e - N_i).
 \end{aligned}
 \tag{7.61}$$

При записи уравнений (7.61) ионы плазмы считались однозарядными. Обозна-

чим невозмущенные плотности электронов и ионов через $n_0(z)$. В случае плазмы с резкими границами функция $n_0(z)$ имеет разрывы. В линейном приближении из уравнений (7.61) после исключения гидродинамических скоростей V_e и V_i получается следующая система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial t^2} - V_{Te}^2 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial z^2} + v_e \frac{\partial \rho_e}{\partial t} &= -\frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial z} [n_0(z) E_z], \\ \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial t^2} + v_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t} &= \frac{e^2}{M} \frac{\partial}{\partial z} [n_0(z) E_z], \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi(\rho_e - \rho_i), \end{aligned} \quad (7.62)$$

где ρ_e и ρ_i - возмущения плотностей заряда электронов и ионов соответственно.

Для возмущений $\sim \exp(-i\omega t)$ система (7.62) легко сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\varepsilon_i(z) E_z] &= 4\pi \rho_e, \\ V_{Te}^2 \frac{d^2 \rho_e}{dz^2} + \omega(\omega + i\nu_e) \rho_e &= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dz} [\omega_{Le}^2(z) E_z], \\ \frac{dE_z}{dz} &= 4\pi(\rho_e - \rho_i). \end{aligned} \quad (7.63)$$

Здесь

$$\varepsilon_i(z) = 1 - \frac{\omega_{Li}^2(z)}{\omega(\omega + i\nu_i)} \quad (7.64)$$

- вклад ионов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы. Уравнения (7.63) решаются в области плазмы $0 < z < d_c$, а проводящие обкладки конденсатора расположены при $z = -0$ и $z = d_c + 0$. На границах плазмы $z = 0, d_c$ ленгмюровские частоты $\omega_{Le}(z)$ и $\omega_{Li}(z)$ терпят разрыв.

Из второго уравнения системы (7.63) видно, что при $V_{Te} \neq 0$ плотность $\rho_e(z)$ конечна всюду, в том числе и на границах плазмы. Поэтому на границах плазмы $z = 0, d_c$ имеют место следующие условия непрерывности:

$$\{\varepsilon_i(z) E_z(z)\}_{z=0, d_c} = 0 \rightarrow E_z(0) = E_z(d_c) = \frac{E_0}{\varepsilon_i}, \quad (7.65)$$

где E_0 - напряженность поля на обкладках конденсатора (между обкладками конденсатора и границами плазмы имеются вакуумные зазоры, размером кото-

рых мы сейчас пренебрегаем, E_0 есть напряженность поля именно в этих зазорах), а ε_i - проницаемость (7.64) в конденсаторе, где $\omega_U(z) = const$. Согласно (7.65) поверхностные заряды на границах плазмы обусловлены только ионной компонентой, а поверхностные заряды электронной компоненты размыты благодаря тепловому движению электронов. Физический смысл условий (7.65) в том, что в области частот $\omega \ll \omega_U$, когда существенен ионный вклад, дебаевское экранирование происходит на расстоянии $r_{Dn} r_{Dl} / (r_{Dn} + r_{Dl})$ (см. (1.5)), где $r_{Dl} = V_{Te} / \omega_U$ - ионный дебаевский радиус. В неизотермической плазме $r_{Dn} \gg r_{Dl}$, и поле экранируется на ионном дебаевском радиусе, а при $r_{Dn} \rightarrow 0$ экранировка дает скачок нормальной составляющей напряженности электрического поля.

Исключая $\rho_i(z)$, получаем из системы (7.63) уравнение для поля $E_i(z)$

$$\frac{d}{dz} \left[\left[V_{Te}^2 \frac{d^2}{dz^2} + \omega(\omega + i\nu_e) \right] \varepsilon_i(z) E_i(z) \right] = \frac{d}{dz} [\omega_U^2(z) E_i(z)], \quad (7.66)$$

откуда после однократного интегрирования имеем

$$\left(V_{Te}^2 \frac{d^2}{dz^2} + \omega(\omega + i\nu_e) \right) \varepsilon_i(z) E_i(z) - \omega_U^2(z) E_i(z) = \omega(\omega + i\nu_e) E_0. \quad (7.67)$$

При получении (7.67) учтено, что вне плазмы $\varepsilon_i = 1$, $\omega_U = 0$, $E_i(z) = E_0$. Таким образом в плазме, где $\omega_U = const$ и $\varepsilon_i(z) = 1 - \omega_U^2 / [\omega(\omega + i\nu_e)] = const$, имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2 E_i}{dz^2} - \frac{\omega_U^2 - \omega(\omega + i\nu_e) \varepsilon_i}{V_{Te}^2 \varepsilon_i} E_i = \frac{\omega(\omega + i\nu_e)}{V_{Te}^2 \varepsilon_i} E_0, \quad (7.68)$$

решаемое в области $0 < z < d_c$ с граничными условиями (7.65).

Уравнение (7.68) можно получить и более формальным способом, переходя к операторам в продольной диэлектрической проницаемости плазмы. Используя для диэлектрической проницаемости выражение (2.26) при $V_{Te} = 0$ и вводя оператор $k^2 = -d^2/dz^2$, имеем из уравнений (7.1) следующую цепочку соотношений:

$$\frac{d}{dz} (\varepsilon E_i) = 0 \rightarrow \varepsilon E_i = E_0 \rightarrow \varepsilon_i E_i - \frac{\omega_U^2}{\omega(\omega + i\nu_e) + V_{Te}^2 d^2/dz^2} E_i = E_0. \quad (7.69)$$

Из последнего соотношения, после обращения псевдодифференциального оператора, сразу следует уравнение (7.68).

Общее решение уравнения (7.68) имеет вид

$$E_z = \frac{E_0}{\varepsilon_p} + C_1 \exp(-z/r_{D\omega}) + C_2 \exp(z/r_{D\omega}), \quad (7.70)$$

где $\varepsilon_p = \varepsilon_i - \omega_{Lz}^2/\omega(\omega + i\nu_e)$ - диэлектрическая электронно-ионной плазмы без учета пространственной дисперсии, а

$$r_{D\omega} = \sqrt{\frac{V_{Te}^2 \varepsilon_i}{\omega_{Lz}^2 - \omega(\omega + i\nu_e)} \varepsilon_i} = r_{D\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i \omega(\omega + i\nu_e)/\omega_{Lz}^2}}. \quad (7.71)$$

С учетом граничных условий (7.65) из решения (7.70) получаем следующее выражение для электрического поля в плазменном конденсаторе:

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon_p} E_0 + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_i}{\varepsilon_p \varepsilon_i} E_0 \frac{\text{sh}[(d_c - z)/r_{D\omega}] + \text{sh}(z/r_{D\omega})}{\text{sh}(d_c/r_{D\omega})}. \quad (7.72)$$

Разность потенциалов между обкладками есть

$$U = \int_0^{d_c} E_z dz = E_0 \frac{d_c}{\varepsilon_p} \left[1 + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} 2 \frac{\text{ch}(d_c/r_{D\omega}) - 1}{(d_c/r_{D\omega}) \text{sh}(d_c/r_{D\omega})} \right]. \quad (7.73)$$

Учитывая далее соотношения

$$Q = C_p U, \quad Q = \sigma S, \quad E_0 = 4\pi \sigma, \quad (7.74)$$

где Q - полный заряд обкладки, σ - поверхностная плотность заряда на обкладке, а S - площадь обкладки, находим выражение для емкости конденсатора с неизотермическим плазменным заполнением

$$C_p = C_0 \frac{\varepsilon_p}{1 + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} 2 \frac{r_{D\omega} [\text{ch}(d_c/r_{D\omega}) - 1]}{d_c \text{sh}(d_c/r_{D\omega})}}. \quad (7.75)$$

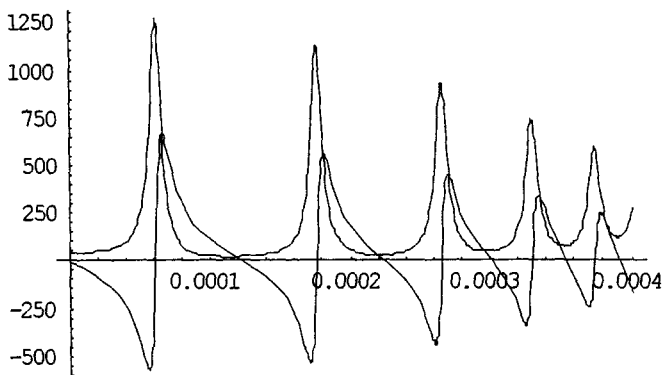
где $C_0 = S/4\pi d_c$ - емкость конденсатора без плазмы. Импеданс конденсатора определяется формулой

$$Z_p(\omega) = \frac{i}{\omega C_p} = \frac{i}{\omega_{Lz} C_0} Z, \quad Z = \frac{\omega_{Lz}}{\omega \varepsilon_p} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} 2 \frac{r_{D\omega} [\text{ch}(d_c/r_{D\omega}) - 1]}{d_c \text{sh}(d_c/r_{D\omega})} \right\}. \quad (7.76)$$

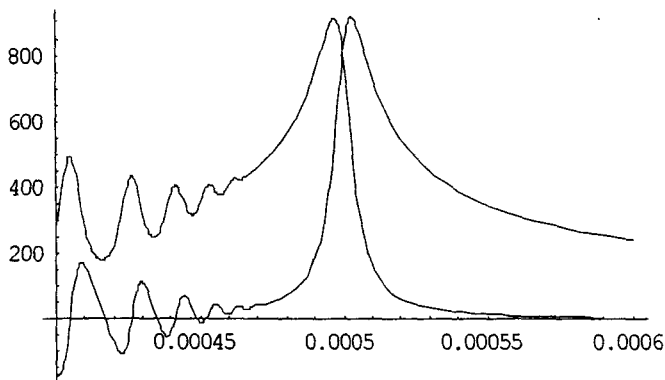
При $\varepsilon_i = 1$ выражение (7.75) переходит в (7.19). Поэтому в области частот, превосходящих ионную ленгмюровскую частоту, импеданс такой же, как и без

учета движения ионов (см. Рис. 7.4). Новых результатов можно ожидать только в низкочастотной области, рассмотрением которой мы и ограничимся.

На Рис. 7.12 приведен комплексный безразмерный импеданс $Z(\Omega)$ в зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega/\omega_{Lz}$ при $\omega_{L1}/\omega_{Lz} = 0.0005$, $\nu_1/\omega_{Lz} = 0.00001$ и $\nu_e/\omega_{Lz} = 0.01$.



a



б

Рис. 7.12

Комплексный импеданс неизотермического плазменного конденсатора в низкочастотной области: а - $\omega < \omega_{L1}$; б - $\omega \sim \omega_{L1}$

Из приведенных рисунков виден резонансный характер комплексного импеданса в низкочастотной области. Резонансы на Рис. 7.12а связаны с возбуждением в плазме ионнозвуковых волн (3.11), определяемых дисперсионным уравнением $d_c/r_{De} = i2\pi n$, или

$$\omega(\omega + i\nu_m) = k_m^2 r_{De}^2 / (1 + k_m^2 r_{De}^2), \quad k_m = 2\pi n / d_c. \quad (7.77)$$

Большой резонансный максимум на Рис. 7.12б обусловлен возбуждением ионной ленгмюровской волны $\omega \approx \omega_L$ (в рассматриваемом случае $\Omega \approx 0.0005$). Из (7.76) и (7.71) видно, что при $\omega \approx \omega_L$ импеданс пропорционален $\epsilon_1^{-\nu/2}$, т.е. имеет корневую особенность.

На Рис. 7.13 представлен комплексный импеданс неизотермического конденсатора для случая большой ионной частоты столкновений $\nu_i/\omega_{Le} = 0.00005$.

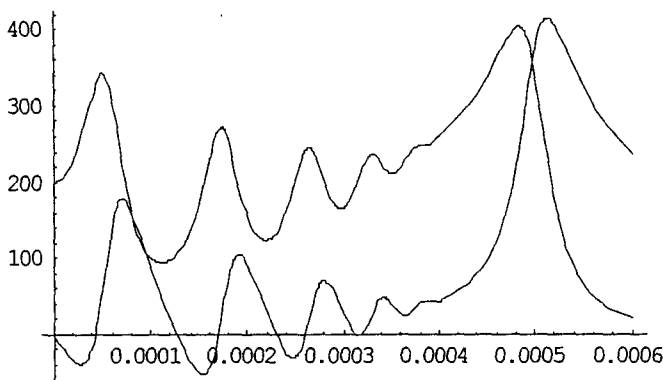


Рис. 7.13

Комплексный импеданс неизотермического плазменного конденсатора в низкочастотной области при большой частоте столкновений

Аналогично проделанному выше можно построить теорию сферического и цилиндрического конденсаторов с неизотермическим плазменным заполнением. Мы здесь на ней не останавливаемся, поскольку качественно новые, по сравнению с плоским случаем, результаты отсутствуют.

Учебное издание

АЛЕКСАНДРОВ Андрей Федорович

КУЗЕЛЛЕВ Михаил Викторович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПЛАЗМЕННАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Подписано в печать 10.10.2011 г.

Формат А5. Объем 10,5 п.л. Тираж 200 экз.

Заказ № 173.

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1. Ленинские горы, д.1, стр. 2

Отпечатано в Отделе оперативной печати
Физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова