И. И. АЛЕКСАНДРОВ
А. И. АЛЕКСАНДРОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

УЧПЕДГИЗ · 1953

И. АЛЕКСАНДРОВ и А. И. АЛЕКСАНДРОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

под редакцией
проф. И. К. АНДРОНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА—1953

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Труд Ивана Ивановича Александрова „Методы решений арифметических задач“ вышел в 1887 г. в г. Тамбове. Ещё ранее (в 1883 г.) там же вышел его более известный труд „Методы решений геометрических задач на построение“. Эти замечательные работы явились в числе первых основоположений русской методики математики средней школы.

При жизни автора „Методы решений арифметических задач“ имели 7 изданий, а второй труд — 14 изданий. Каждое новое издание автор улучшал и совершенствовал. После смерти И. И. Александрова осталась рукопись „Методы решений арифметических задач“, подготовленная к 8-му изданию, в которой автором были внесены существенные изменения.

Книги И. И. Александрова представляют и до сих пор не только историческую ценность, но остаются полезными руководствами для преподавателей математики средней школы и в особенности преподавателей методики математики в педагогических учебных заведениях.

К наследию И. И. Александрова можно подойти двояко:

1) на основе современных требований методики математики и того развития, которое получила задачная проблема в методике арифметики, внести значительные изменения в его труд;

2) изменить самое необходимое, без чего невозможно выпустить в свет труд, например: выпустить все задачи, не соответствующие по своему содержанию современным общественным отношениям; вставить новые вместо выпущенных; уточнить терминологию и пр.

Редактор остановился на последнем подходе к труду И. И. Александрова, чтобы сохранить соответствие его взглядам и убеждениям покойного мыслителя и творца в методике арифметики.

Сын И. И. Александрова, Андрей Иванович Александров, согласился на этих основаниях переработать труд своего отца, и поэтому работа выходит под двумя фамилиями — отца и сына.

И. Андронов.

Москва, 24 июля 1952 г.

КРАТКАЯ БИОГРАФИЯ И. И. АЛЕКСАНДРОВА

Иван Иванович Александров родился 25 (12) декабря 1856 г. в г. Владимире, в небогатой семье уездного врача. Матери лишился рано и не помнил её. В 1861 г. его отец Иван Павлович переехал с тремя детьми в Тулу, куда был переведён по службе городским врачом.

Иван Иванович окончил Тульскую гимназию и поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет. В университете он слушал лекции П. Л. Чебышева, А. Н. Коркина, Д. И. Менделеева и других. Не ограничиваясь лекциями по своей специальности, Иван Иванович посещал лекции на других факультетах, благодаря чему и получил многостороннее образование. Но Александров никогда не замыкался в рамках одной математики, он интересовался живописью, театром, музыкой и шахматами (впоследствии было напечатано много его шахматных задач). По окончании университета в 1878 г. Иван Иванович был назначен учителем математики в Тамбовскую гимназию, где и проработал до осени 1906 г.

В Тамбове он прочитал много публичных лекций не только на математические, но и на общеобразовательные темы. Многие лекции были повторены им в г. Козлове (ныне Мичуринске). В тамбовских газетах он выступал со своими рецензиями как музыкальный критик. Летом 1884 г. Иван Иванович женился на Елизавете Ниловне Андреевой (дочери учителя Тамбовской гимназии).

С осени 1906 г. Иван Иванович переехал с семьёй в Москву, где преподавал математику в частных гимназиях и читал лекции в Народном университете имени Шанявского и на вечерних курсах при Межевом институте.

Административных должностей Иван Иванович на себя не брал, а ещё вероятнее, отстранялся от них прежним правительством. Отзывы учащихся об Иване Ивановиче были всегда восторженные и как об учителе математики, и как о человеке.

В течение своей продолжительной педагогической деятельности Иван Иванович напечатал много трудов, из которых „Методы решений геометрических задач на построение“ доставили автору не только всероссийскую, но и европейскую известность.

К своей научной и педагогической работе он относился очень строго. „Учитель должен не только в совершенстве знать свой предмет и ясно излагать его ученикам,— без духовного воздействия на учеников он или чиновник или ремесленник плохого разряда“ [1]. И он действительно не только преподавал математику, но и воспитывал учеников. Никогда он не старался идти проторёнными путями, а всегда искал новое и оригинальное.

Иван Иванович был активным участником многих съездов преподавателей математики в России, постоянно выступал на них с докладами. Был на съезде математиков в Париже.

Математические труды Ивана Ивановича начинают печататься в Тамбове с 1880 г. В математических журналах [2] постоянно печатались его статьи, рецензии, некрологи.

Главный труд Ивана Ивановича Александрова „Методы решений геометрических задач на построение“ — труд, не имевший предшественников в русской литературе. До издания этой книги, в сущности, в России никакой определённой методики в решении геометрических задач на построение не существовало. „Геометрические задачи раньше решались без общих методов — каждая в отдельности. Несколько десятилетий назад Ю. Петерсен за границей и Иван Иванович Александров у нас в России разработали общие методы решений; с тех пор это дело было поставлено на твёрдый фундамент и сделалось полезной частью учебного материала“ [3]. „По способу автора можно исследовать всю неисчерпаемую область задач на построение; при этом

---

[1] Из писем Ивана Ивановича ко мне (1916 г.).

[2] „Математическое образование“, „Вестник опытной физики“, „Педагогический вестник“.

[3] „Вестник опытной физики“, № 567, 1912, стр. 84.

некоторые геометрические идеи оказываются рычагами решения целого класса задач"[1].

Иван Иванович систематизировал геометрические задачи на построение не по каким-либо случайным признакам, не по степеням трудности, а по методам решений.

Книга обратила на себя внимание за границей, была переведена на французский, немецкий и другие языки.

В Советском Союзе книга была издана четыре раза (1925, 1934, 1936 и 1950 гг.).

Руководящие идеи методов геометрических построений Иван Иванович перенёс в методику решения арифметических задач. В результате этого появилась его работа „Методы решений арифметических задач", оказавшая большое влияние на методику преподавания арифметики. В 1908 г. Иван Иванович выпускает новую книгу „Основания арифметики". (В последующие годы эта книга имела ещё 2 издания.) Все свои работы, от издания к изданию, автор совершенствовал и вносил в них новое.

Осенью 1918 г. с Иваном Ивановичем произошёл несчастный случай (он попал под трамвай); ему пришлось ампутировать ногу и долгие месяцы пролежать в больнице. В больнице он подготовил к новому изданию свои главные труды: „Методы решений геометрических задач" и „Методы решений арифметических задач". В 1919 г. Иван Иванович возвратился в свою семью, но к педагогической работе вернуться ему уже не пришлось — 20 декабря 1919 г. (в Москве) Иван Иванович Александров скончался.

Предлагаемый труд моего отца Ивана Ивановича Александрова (посмертная рукопись 1919 г., подготовленная им для 8-го издания) значительно мною изменён и дополнен на основе изучения прежних изданий той же книги и следующих работ Ивана Ивановича Александрова:

„Классификация арифметических задач" (1914 г.).

„Классификация арифметических задач в современных задачниках" (1915 г.).

„Современные требования от арифметических задачников" (1915 г.).

---

[1] Из немецкой рецензии „Zeitsch. f. lat. höh. Schule" XI, Heft 11—12.

Значительная переработка произведена в связи с заменой старых русских мер метрическими, заменой тематики некоторых задач, не соответствующих современности, и дополнением новыми задачами с тем, чтобы иллюстрация соответствующих методов решения арифметических задач имела свою конкретность и наглядность.

Основные труды И. И. Александрова

1. „О причинах развития математики“ (Тамбов, 1880 г.).

2. „Памяти великого русского математика Лобачевского“ (Тамбов, 1881 г.).

3. „Методы решений геометрических задач на построение и сборник геометрических теорем и задач на построение“ (изд. 1, Тамбов, 1883 г., всего 18 изданий).

4. „Методы решений арифметических задач“ (Тамбов, 1887 г., всего 7 изданий).

5. „Приложение геометрических построений к тригонометрии“.

6. „Геометрические методы разыскания максимума и. минимума“ (Москва, 1892 г.).

7. „Первые XIX предложений Эвклида“ (Тамбов).

8. „О составлении и решении задач на вращение“ (1895 и 1905 гг.).

9. „Наглядное преподавание геометрии“ (Москва, 1907 г.).

10. „Основания арифметики“ (Москва, 1908 г., всего 3 издания).

11. „Задача Паппа чистым построением“ („Вестник опытной физики“, № 508, 1910 г.).

12. „О построении параллелограмов“ („Математическое образование“, № 2, 1912 г.).

13. „Конструктивные задачи с неприступными точками“ („Математическое образование“, № 6, 1913 г.).

14. „Значение геометрических методов в изложении геометрии“ („Математическое образование“, № 3—4, 1917 г.).

А. Александров.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Обращаю внимание читателей на следующие идеи, проведённые в настоящей книге.

1) Никоим образом не следует классифицировать задачи в зависимости от тех предметов и действий, о которых говорит задача.

2) Задачи следует разделить на два вида (см. стр. 14). Второй вид имеет преобладающее значение.

3) Метод исключения неизвестных приёмом уравнивания данных ($III_б$, стр. 33) должен быть разделён на два рода, так же как и метод подобия (стр. 38) и метод нахождения частей (стр. 42).

4) Решение уравнений первой степени не представляет специфического метода алгебры и всегда может быть переведено на чисто арифметические соображения и арифметический язык.

Вообще же обособление методов алгебры от методов геометрии и арифметики, а также нарочитое предпочтение одного метода другим является крупной ошибкой. Все три метода как развившиеся, несомненно, из одного источника должны помогать развитию предмета, а не задерживать его.

5) Поэтому некоторые арифметические вопросы можно и должно рассматривать с точки зрения алгебры. Благодаря этому явилась возможность определить число методов и приёмов[1], необходимых и достаточных для

[1] Есть существенная разница между методом решения и приёмом. Объясним это следующим примером. Известно, что заразные болезни вызываются размножением микробов. Из этого положения вытекает общий метод лечения заразных болезней — уничтожение микробов. Но это последнее может быть достигнуто совершенно различными приёмами, например: 1) введение в организм элементов, непосредственно убивающих тот или другой микроб; 2) разведение в организме безвредных микробов — врагов микроба, дающего болезненное состояние; 3) разведение в организме начала, порождающего новых микробов, и друзей, и врагов данного микроба, причём враги разводятся в большем количестве и т. д. Ниже я для краткости иногда соединяю термины „метод“ и „приём“ под названием способа.

решения всякой арифметической задачи, приводящей к уравнению первой степени, а также указать, с какого рода задач должны вступать в свои права уравнения.

6) В ряду соображений, подкрепляющих пункты 4 и 5, немалую роль играют примеры:

а) Арифметических задач, недоступных уравнениям (№ 8—13, 162).

б) Задач с квадратными уравнениями, доступных арифметике (задачи № 84—90), и задач, которые легче решаются арифметическими рассуждениями (№ 55, 55*, 144, 145, 154).

в) Задач, показывающих, что самое простое решение задач уравнениями не может быть достигнуто без знания арифметических методов и приёмов.

г) Задач на простой счёт или два арифметических основных действия, которые стоят несколько отдельно от обычных задач на вычисление (№ 3—43). Предварительное решение этих, вообще маленьких упражнений, несомненно, очень полезно.

Все эти идеи выполнены в предлагаемом издании книги с посильной добросовестностью. Из книги исключены периодические и непрерывные дроби, потому что этим вопросом, по глубокому убеждению автора, в средней школе нет места. При решении задачи различными методами и приёмами предпочтительнее выбирать тот, который распространяется на более широкий круг задач.

К сказанному можно прибавить следующее из предисловий к прежним изданиям этой книги. Арифметические решения задач дороги тем, что они одинаково доступны всем — ребёнку и юноше, малообразованному человеку и глубокому учёному; для тех и других мысль в этом случае идёт по одному пути. Умение всмотреться в условия задачи, острота умственного зрения, способность комбинирования — вот что нужно для быстрого и ясного решения арифметических задач. Все эти причины всегда заставляли отводить арифметическим задачам видное место в живой педагогике.

Решение геометрических задач на построение имеет очень много общего с решением арифметических задач. Аналогия между этими двумя отделами задач чрезвычайно велика. Идеи, лежащие в основе решения, для обоих отделов одинаковы.

В девяностых годах прошлого столетия мною высказана в моих трудах весьма простая и очевидная мысль: чтобы свободно решать геометрические задачи на построение, нужно ознакомиться со способами решений и с идеями, управляющими решениями.[1] Отсюда уже возникла классификация задач по методам их решений. Только в 1911 г. эта мысль получила в России полную оценку научного общественного мнения (Первый Всероссийский съезд преподавателей математики).

Тридцать лет назад[2] я высказал ту же мысль относительно арифметических задач. В течение 30 лет я указывал, что нелепо делить арифметические задачи по рубрикам предметов и прочим формальным признакам, что в основание классификации задач надо положить не предметы, о которых говорит задача (существует множество задач, решаемых совершенно одинаково, хотя указанные в условиях предметы совершенно различны), а те идеи, которые направляют решение, что тип задачи зависит лишь от той математической зависимости данных и искомых, которая определяет тот или другой способ решения.

Если учащийся не знает главных способов решения (ниже мы увидим, что их вовсе немного), то он, естественно, часто бывает бессилен в решении задач. При знании всех методов решений можно последовательно применить к решению все методы, и тогда решение обнаружится.

Проделав и составив множество арифметических задач самого разнообразного содержания, я убедился, что арифметические методы делаются до некоторой степени бессильными, именно там, где это и следовало ожидать, т. е. в задачах второй степени, также в задачах первой степени[3], которые представляют собой частный случай задач второй степени. Необходимо, однако, заметить, что встречаются задачи второй степени, вполне доступные арифметике (см. стр. 45—48).

Идею классификации арифметических задач по методам их решения я взял из геометрии из своей же книги „Методы решений геометрических задач на построение“[4].

---

1 Почти одновременно со мной в Дании Ю. Петерсеном были высказаны аналогичные идеи.

2 Писано в 1914 г. *(А. А.)*.

3 См. сноску на стр. 45 *(А. А.)*.

4 18-е издание, Учпедгиз, Москва, 1950 г. *(А. А.)*.

Несколько позднее я нашёл ту же идею в „Методах решений арифметических задач“ Киричинского. У меня сохранилось впечатление, что автор недостаточно развил свои мысли. Отдельные заметки Киричинского на ту же тему, оказывается, были помещены в журнале „Гимназия“ (Рига, 1880-е годы). Краткие указания на распределение задач по методам решения были также в арифметическом задачнике Стеблова. Группировка арифметических задач по типу уравнений, к которым приводит задача (Д. Волковский, Руководство к детскому миру в числах, Москва, 1911), не может быть признана удачной: при крайнем разнообразии арифметических задач ею нельзя исчерпать все типы (в особенности задачи со многими неизвестными). С другой стороны, ставить арифметические приёмы решений в полную зависимость от алгебры невозможно, потому что (как и в геометрии) существуют задачи, которые легко решаются арифметикой, но с трудом поддаются или совсем не поддаются алгебре.

Решение многих задач с помощью составления и решения уравнений не может быть свободно и изящно выполнено без знания главнейших арифметических методов потому, что основу, фундамент для составления уравнений создают, кроме четырёх основных действий математики, арифметические методы. Рассмотрим, например, следующую задачу.

„Один человек может вскопать огород в 10 час., другой в 20 час. Часть работы выполнил первый, остальное — второй, причём в совокупности они работали 15 час. Сколько часов работал первый и сколько второй?“

Так как ответ не зависит от размера огорода, то дадим огороду произвольные размеры, например 400 *кв. м*. Тогда первый вскопает в час 40 *кв. м*., второй 20 *кв. м*.

Алгебра даёт уравнения $x+y=15$; $40x+20y=400$, простота которых вызвана чисто арифметическими соображениями. Обычное решение приводит к уравнениям $x+y=15$ и $\frac{x}{10}+\frac{y}{20}=1$. Но каким образом получилось второе уравнение? Оно получилось потому, что мы догадываемся рассматривать части огорода, вскапываемые каждым человеком в час, т. е. оно получилось по методу нахождения частей, которым решается весьма многочисленный класс задач.

В преподавании арифметики не надо забывать о наглядности. Много лет назад я устроил для учащихся высших классов сосуд Мариотта с двумя кранами, объясняющий наглядно задачи о бассейнах. Позже я встречал своих учеников через много лет, и они помнили эту задачу.

В заключение скажем, что предлагаемая работа, подвигая вопрос, может быть, значительно вперёд, не исчерпывает всей его сущности до конца, но что выбранный путь разрешения проблемы правилен, в этом едва ли может быть сомнение.

Наконец, может быть затронут вопрос о том, в каком объёме могут быть пройдены предлагаемые методы в наших школах. Разумная сдержанность и такт преподавателя определяют это гораздо лучше, чем всякие теоретические рассуждения.

И. Александров.

Москва, 1917, III.

В дальнейшем для краткости пояснения употребляются обозначения:

1) Римские цифры (в скобках и без скобок) указывают номера методов решений.

2) Арабские цифры, помещённые внизу справа от римских, указывают номер приёма данного метода (например: III_2 — метод третий, приём второй).

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Арифметической задачей называется вопрос, взятый из какой угодно области и разрешимый счётом и четырьмя арифметическими действиями. Мы будем говорить главным образом о задачах на все 4 действия с целыми и дробными числами, независимо от количества действий и от величин чисел. При этом предполагается, что решение задач с целыми и дробными числами на каждое из четырёх действий, а также нахождение частей целого и обратно (нахождение целого по части), уже известны читателям.

Все арифметические задачи можно разделить на три больших класса, из которых каждый делится на два вида.

Первый вид

В этих задачах прямо указано, какие действия надо сделать с данными числами; порядок действий тоже указан непосредственно. Например:

1. К половине суммы чисел 177 и 349 прибавить две трети разности чисел 972 и 171 и результат разделить на 7.

Второй вид

В задачах этого вида действия с данными числами указаны косвенно; эти действия более или менее заметны по смыслу условий задачи. Кто проделал достаточное количество условных задач на каждое отдельное действие, тому нетрудно заметить каждый шаг решения задачи. Пример:

2. Я получил тысячу рублей. $\frac{1}{5}$ этих денег внёс в сберкассу. Сколько было у меня денег в сберкассе через год, если сберкасса выплачивала 3% годовых?

Ясно, что задачи второго вида гораздо многочисленнее и имеют доминирующее значение. Кроме деления задач на три класса (каждый с двумя видами), мы классифицируем все арифметические задачи по методам их решений.

§ 2. ПЕРВЫЙ КЛАСС АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В этот класс входят: простейшие задачи, где не требуется особых методов их решения; задачи на простое вычисление, не требующие применения каких-либо особых методов; задачи, сравнительно легко решаемые простым счетом и четырьмя арифметическими действиями. Действия, необходимые для решения, и их порядок указаны либо прямо (первый вид, задача 1), либо выясняются из условий задачи (второй вид, задача 2).

Алгебраическая формула задач этого класса:

$$x=f(a, b, c, \ldots, k), \text{ где } a, b, c, \ldots, k$$

суть данные числа и f — какая-нибудь рациональная алгебраическая функция.

Не надо думать, что задачи на одно или два действия и даже на простой счёт всегда даются легко. Среди этих задач попадаются трудные лишь для объяснения решения, но встречаются и такие, которые могут затруднить решающего зависимостью данных и искомых, общая картина которой устанавливается не сразу. Решение этих задач, несомненно, очень полезно как элементарная арифметическая подготовка.

3. Прибыло сто лодок, в каждой по 100 арбузов.

Сколько тысяч арбузов привезено?

Эту задачу целесообразно решить устно. Рассуждения ведутся так: выделим первый десяток лодок, он даст 10 сотен, или первую тысячу арбузов; выделим второй десяток лодок и т. д.

4. Сколько тысяч составляет 300 сотен? Сколько тысяч составляет 100 десятков тысяч, 300 десятков тысяч?

5. Сколько тысяч в тысяче десятков? Сколько тысяч в тысяче сотен? Сколько миллионов в миллионе десятков, в миллионе сотен? Сколько тысяч в 10 000 сотен, в 10 000 десятков?

Подобного рода вопросы решаются на основании истины: „семь пятков составляют пять семёрок", „десять дюжин составляют двенадцать десятков" и т. д. (т. е. от изменения порядка сомножителей произведение не изменяется).

6. Сколько тысяч в 7 тысячах десятков? Сколько тысяч в 25 тысячах сотен? Сколько миллионов в 35 миллионах десятков, в 8 миллионах сотен?

Сколько тысяч в 30 000 сотен, в 250 000 десятков? (см. № 5).

7. Сколько дней составят 17 часов, повторенные 24 раза?

Сколько часов составят 240 минут, взятые 60 раз? (каждый час, повторенный 24 раза, составит один день; минута, взятая 60 раз, составит один час).

8. В аллее 40 деревьев. 17-е дерево от конца аллеи каким будет по счёту от начала аллеи? 19-е дерево от начала каким придётся от конца? Сколько промежутков между каждыми двумя соседними деревьями образует вся аллея?

9. Облигации в одной пачке сверху вниз обозначены подряд номерами: 157 239, 157 238, 157 237 и т. д. Который номер надо снять последним, чтобы взять из пачки 37 облигаций? Переменится ли сущность решения, если номера облигаций идут в возрастающем порядке?

10. Со дня поступления работницы на работу прошёл 21 день, выходной день у неё был по воскресеньям. Сколько за 21 день у работницы было выходных дней?

10*. Работница проработала фактически 21 рабочий день; выходной день у неё был по воскресеньям. Сколько было у работницы всего выходных дней?

Как изменится ответ, если число 21 заменить числами: 19; 25; 31; 37 и т. д.?

11. Сколькими способами можно посадить трёх учеников на одну лавку?

Сколько четырёхзначных чисел можно написать из цифр 2; 5; 7 и 8? из цифр 2; 4; 0; 3? из цифр 2; 5; 7 и 2?

12. Сколькими способами можно впустить пять пассажиров в две каюты, из которых одна имеет 2 места, а другая 3 места?

13. Мальчик выложил в круг 30 шариков, 15 чёрных и 15 красных, и, считая по кругу в одном направлении, стал снимать каждый десятый шарик; он снял все чёрные шарики, а все красные остались. В каком порядке были выложены красные и чёрные шарики?

Задача легко решается прямым счётом, начиная с первого момента, и обратным счётом, начиная с конца.

14. Мастер вчера перевыполнил план на 2%, а сегодня перевыполнил план на 4%. На сколько процентов выполнен мастером план за 2 дня?

14*. Полярный исследователь прошёл по льдам на север 15 *км*; за это время течением и ветром льды отнесло на юг на 15 *км*. На сколько километров исследователь продвинулся на север?

15. Вчера было 3° холода, а сегодня 7° тепла.

На сколько градусов сегодня теплее, чем вчера?

15*. Рекордсмен вчера на пробег дистанции затратил времени на 2 секунды больше своего рекорда, а сегодня побил свой рекорд на 3 секунды. На сколько секунд меньше сегодня он затратил времени на пробег сравнительно со вчерашним днём?

16. Полярный путешественник прошёл по льдам на юг 12 *км*. За это время ветром льды отнесло на юг на 6 *км*, но течением их относило на север. В результате путешественник оказался на 5 *км* севернее точки отправления. На сколько километров отнесло льды течением на север?

17. В одной семье сестра имеет двумя братьями больше, чем сестёр. На сколько братьев больше, чем сестёр? [1]

18. Скорость течения реки 4 *км* в час. На сколько километров пароход идёт быстрее по течению реки, чем против течения? (При прочих равных условиях.)

18*. В двух кошельках имеется денег поровну. Если из первого переложить во второй 17 коп., то на сколько во втором будет больше?

19. Пароход идёт вниз по реке со скоростью 24 *км* в час, а вверх — со скоростью 12 *км* в час. Какова скорость течения?

20. Сколько надо уплатить за апрель рабочему при расчёте, если бы он получал в месяц 800 руб. и проработал до четверга 19 апреля?

---

[1] Задачи 17, 18, 18*, 19, 21 допускают много различных более или менее ярких объяснений. Но едва ли не самое убедительное объяснение основано на идее VII_3 (стр. 44).

(Выходной день по воскресеньям, расчёт за 25 рабочих дней в месяц.)

21. В одном стаде на 50 голов больше, чем в другом. На сколько голов в первом стаде будет больше, если из второго стада перевести в первое 23 головы или если к первому прибавить 13 голов, а из второго увести 10 голов?

22. Два пешехода одновременно вышли из своих деревень в деревню *C*; первому предстояло пройти на 50 *км* более. Когда второй был в *C*, первому осталось до *C* 10 *км*. Который пешеход прошёл больше и на сколько?

23. Из Москвы отправлялся поезд, встречающий в 2 часа в Рязани саратовский поезд, идущий с той же скоростью. Когда московский поезд стал выходить на час позже, то встречал саратовский поезд в 24 *км* от Рязани. Где был московский поезд в 2 часа?

24. Сколько сотен рублей положено рабочим в сберегательную кассу, выплачивающую 3% годовых, если через год в сберкассе на счету рабочего стало 1133 руб.?

24*. Из килограмма сырого кофе получается 820 *г* жареного. Сколько надо сырого кофе, чтобы получить 410 *г* жареного кофе?

25. Каждое яблоко подешевело на 85 коп. Хозяйка сэкономила при покупке яблок 107 руб. 95 коп. Сколько она купила яблок?

25*. Пароход уменьшил свою часовую скорость на 9 *км* и потому оказался в 108 *км* от своей цели. Сколько часов он двигался с уменьшенной скоростью?

26. Кроликов было на 7 больше, чем фазанов, а ног все кролики имели на 48 более, чем все фазаны. Сколько было кроликов и фазанов?

27. Пароход по течению, но против ветра, скорость которого 2 *км* в час, проходит на 10 *км* в час более, чем в обратном направлении. Какова часовая скорость течения?

28. Двигаясь с постоянной скоростью, самолёт при встречном ветре пролетал 200 *км* в час. Затем встречный ветер увеличился на 5 *км* в час, и самолёт прилетел к намеченной цели на $\frac{1}{3}$ часа позже. Сколько времени он летел при усилившемся встречном ветре?

29. Вчера я купил книг на 50% больше и по цене на 50% выше, чем сегодня. Во сколько раз вчерашняя покупка дороже сегодняшней?

30. Путешественник увеличил свою часовую скорость в 1,25 раза, но число часов ежедневного пути уменьшил в 1,5 раза.

Как изменится его однодневный путь?

31. В двух стадах голов поровну. Из второго стада перевели в первое $\frac{1}{5}$ числа голов второго.

Каково стало отношение числа голов в них?

31*. В первом кошельке в 3 раза больше денег, чем во втором. Если из первого переложить $\frac{1}{5}$ денег во второй (или обратно), то во сколько раз в первом кошельке будет больше денег, чем во втором?

32. Если от каждого из четырёх слагаемых взять по 900 единиц, то сумма станет равной каждому из первоначальных слагаемых.

Во сколько раз оставшаяся сумма меньше взятых 3600 единиц?

33. Из разных пунктов два парохода одновременно двинулись вниз по реке, причём движение было равномерное и без остановок. Через неделю первый пароход догнал второй. Если скорость течения увеличится на 1 *км* в час при неизменных остальных условиях, определить: 1) через сколько времени первый пароход догонит второй? 2) изменится ли точка, в которой первый пароход догоняет второй?

34. Два самолёта, двигаясь с постоянными скоростями навстречу друг другу, один по ветру, другой против ветра, встречаются через 5 час. Если скорость ветра увеличилась бы на 7 *км* в час, то через сколько часов произошла бы их встреча?

Как передвинется точка их встречи? Изменится ли её положение при полном безветрии?

35. Бассейн наполняется за 10 час. при одновременном действии двух труб, из которых одна выливает воду из бассейна, другая вливает.

За сколько времени будет наполняться бассейн, если: 1) каждая труба будет давать пятью вёдрами в час меньше, чем прежде? 2) если каждая труба начнёт действовать в два раза слабее?

36. Колхозник продал половину своих мешков с картофелем и ещё два мешка. После этого у него картофеля не осталось.

Сколько у колхозника было мешков с картофелем?

36*. Я прошёл $\frac{5}{6}$ своего пути, мне осталось пройти 2 *км*.

Какова длина всего моего пути?

37. Деньги A утроили, а деньги B удвоили; после этого у них стало денег поровну.

Во сколько раз у B было денег более, чем у A вначале?

38. Я взял в долг столько орехов, сколько имел сам, да мне подарили 20 орехов. Половина всех орехов испортилась, а затем я отдал свой долг.

Сколько орехов у меня осталось?

38*. Удвоенная тройка равна неизвестному без тройки.

Найти неизвестное.

39. Как можно от куска материи в $\frac{2}{3}$ *м* отрезать $\frac{1}{2}$ *м*, не имея под руками метра?

40. A имел 80 руб., у B после расхода 64 рублей осталось $\frac{1}{5}$ его денег.

Кто в этот момент имел больше денег и на сколько?

41. Точки A, B, C и D последовательно лежат на одной прямой так, что C посередине между A и D, B ближе к A, чем к D, на 28 *см*.

Сколько сантиметров от B до C?

41*. На карте масштаба $\frac{1}{3\,500\,000}$ от A до B 3 *см*.

Каково это расстояние в действительности?

От Новороссийска до Батуми 461 *км*. Каково это расстояние на карте данного масштаба?

42. Два путешественника выезжают из одного места в одинаковом направлении. Второй выезжает на 5 час. позже первого и догоняет его через столько часов, сколько первый проезжает километров в час (оба движутся равномерно).

На сколько километров второй проезжает в час больше, чем первый? (VII_8).

Решение. Пусть первый проезжает в час 7 *км* (7 произвольное число). Тогда первый уедет за 5 час. на 35 *км* и второй должен его догнать через 7 час.; значит, в 1 час второй должен проезжать на $35:7=5$ *км* более первого.

43. Булка и леденец стоят 90 коп.; если купить три таких же булки и два леденца, то придётся заплатить 2 руб. 60 коп.

Сколько стоит булка?

44. Первый мальчик сказал второму: „Если ты дашь мне половину твоих денег, я смогу купить 1 *кг* конфет". Второй ответил: „Если ты мне дашь половину твоих денег, то я смогу купить 2 *кг* таких же конфет". Сколько было денег у первого мальчика?

§ 3. МЕТОДЫ: I_1) ПРИВЕДЕНИЯ К ЕДИНИЦЕ. I_2) ПРИВЕДЕНИЯ К ОБЩЕЙ МЕРЕ. I_3) ОБРАТНОГО ПРИВЕДЕНИЯ К ЕДИНИЦЕ. I_4) ОТНОШЕНИЙ

Несомненно, учащиеся должны различать указанные методы и хорошо владеть ими. Задачи на так называемое простое тройное правило являются задачами первого класса второго вида; их можно решать любым из четырёх вышеуказанных методов, причём надо дать учащимся свободу выбора одного из указанных методов.

Термин „сложное тройное правило" следовало бы упразднить. Мне не приходилось встречать задач на это правило, которых нельзя было бы предварительным преобразованием данных свести на простое тройное правило. И, если это верно, то и термин „простое тройное правило", как и всякое подобное „правило", следует уничтожить. В сущности эти задачи представляют частный случай задач, содержащих в себе только пропорциональные величины.

I_1 — метод приведения к единице и I_2 — метод приведения к общей мере

Если нужно узнать что-нибудь относительно нескольких предметов, то надо узнать требуемое относительно одного предмета, а потом с полученным результатом сделать соответственные изменения (умножение или деление).

45. 12 *кг* мяса стоят 96 руб.; сколько можно купить мяса на 64 руб.?

На 1 рубль можно купить $\frac{12}{96}$ *кг* мяса, а на 64 руб. $\frac{12}{96}\cdot 64 = 8$ *кг* мяса.

Эту задачу можно решить несколько иначе, заметив, что общая мера 96 и 64 равна 32. На 32 руб. можно купить 12 $кг : \frac{96}{32} = 12$ $кг : 3 = 4$ *кг* мяса, а на 64 руб. можно купить не 4 *кг*, а во столько раз больше, во сколько 64 больше 32, т. е. $4 \times 2 = 8$ *кг* мяса. В этом решении приведение делается не к единице (I_1), а к общей мере (I_2). Приведение к общей мере очень полезно, потому что заставляет вглядываться в свойства чисел, но применимо не всегда, так как чаще общей мерой будет единица.

46. Автомобиль при скорости 36 *км* в час проезжает свой путь в 4 часа (без остановок).

При какой скорости он проедет тот же путь (без остановок) в 6 час?

Тот же путь без остановок автомобиль проедет в 1 час при скорости 36 $км \times 4$; а в 6 час. при скорости $\frac{36\cdot 4}{6} = 24$ *км*.

Эту задачу можно решить приведением к общей мере, которая равна двум (часам).

Иногда приведение к общей мере (или единице) употребляется не один, а несколько раз.

Например:

47. За провоз 39 *кг* товара на расстояние 74 *км* уплачено 12 руб.

Сколько надо заплатить за провоз 26 *кг* товара на расстояние 185 *км*? (Цена пропорциональна весу и расстоянию.)

Надо узнать, сколько стоит провоз 13 *кг* на расстояние 37 *км*.

Описанный способ годится для задач, условия которых содержат две пропорциональные величины, из которых каждая имеет по два соответственных значения; одно из этих значений неизвестно. Если в условия входят не две, а несколько пропорциональных величин, из которых каждая имеет по два соответственных значения, причём одно из них неизвестно, то задачу можно упростить предварительным преобразованием и свести её к задаче с двумя пропорциональными величинами. Такое преобразование делается в различных случаях различными способами. Иногда можно с выгодой изменить вопрос (№ 49). Если даны не самые количества, а только отношения между количествами, то надо эти количества назначить произвольно, сохранив между ними отношения (№ 50*). Всего чаще можно употреблять следующий приём: все данные, кроме трёх, надо привести к единице, прежде чем решать задачу. С помощью этого приёма задача:

48. Пять одинаковых самолётов, летая ежедневно по 4 часа (равномерно и с одинаковыми скоростями), за 5 дней налетали 20000 *км*.

Во сколько дней 2 таких же самолёта (при тех же условиях) пролетят 3600 *км*, летая по 3 часа в день?

принимает такую форму:

48*. Самолёт, двигаясь равномерно, за 5 дней пролетел 1000 *км*. Во сколько дней он пролетит 600 *км*, двигаясь равномерно и с той же скоростью?

В некоторых задачах данные можно соединить умножением или делением (№ 48 и 52).

49. Две равносильные бригады каменщиков, работая ежедневно по 8 час., выложили в 3 дня стену в 160 *м* длиной, 1,2 *м* шириной и 4 *м* высотой. Какой длины стену выложит одна бригада в 5 дней, работая в день по 7 час., если ширина стены 1,4 *м*, а высота 4 *м*?

Объём первой стены равен $(160 \cdot 1{,}2 \cdot 4)$ *куб. м*. Одна бригада проработает над первой стеной $(2 \cdot 8 \cdot 3)$ час., а над второй $(5 \cdot 7)$ час.

Теперь задача сведена к следующей:

49*. За $(2 \cdot 8 \cdot 3)$ час. бригада может выложить стену в $(160 \cdot 1{,}2 \cdot 4)$ *куб. м*.

Какого объёма стену выложит та же бригада в $(5 \cdot 7)$ час.?

В час бригада выложит $(160 \cdot 1{,}2 \cdot 4):(2 \cdot 8 \cdot 3) = 16$ *куб. м*, а в требуемое число часов $16 \cdot (5 \cdot 7) = 560$ *куб. м*.

Возвращаясь к задаче № 49, видим, что два измерения второй стены 1,4 и 4; поэтому длина второй стены $560:(1{,}4 \cdot 4) = 100$ *м*.

I_3 — метод обратного приведения к единице

В предыдущих примерах были даны 3 числа; из них одно однородно и соответственно неизвестному, а другие однородны и соответственны друг другу. До сих пор мы приводили к единице одно из данных, не соответствующих неизвестному; возможно и обратное: привести к единице данное, соответствующее и однородное неизвестному. Тогда остаётся сравнить полученное число с требуемым данным — результат сравнения укажет неизвестное.

50. 144 равноценные брошюры стоят 48 руб.

Сколько стоят 39 таких же брошюр?

На 1 рубль можно купить $144:48=3$ брошюры. 39 брошюр будут стоить столько рублей, сколько 3 содержится в 39, т. е. 13 руб.

Решаем этим способом задачу № 45.

Килограмм мяса стоит $\frac{96}{12}$ руб.; а на 64 руб. можно купить столько килограммов мяса, сколько $\frac{96}{12}$ содержится в 64, т. е. $64:\frac{96}{12}=8$.

50*. На постройку стены употреблено кирпича на 630 руб.

Сколько стоит кирпич для другой стены, если отношения измерений первой и второй стены 30:5, 6:70 и 7:9?

Берём измерения первой стены произвольно: 30, 6 и 7 (каких-либо) единиц. Тогда объём первой стены равен 1260 куб. единиц, а второй стены 3150 куб. единиц. На рубль дадут (1260 куб. ед.:630) = 2 куб. единицы кирпича, следовательно, 3150 куб. единиц кирпича будут стоить столько рублей, сколько 2 содержится в 3150, т. е. 1575 руб.

I_4 — метод отношений

Задачи, подобные № 45—50, можно решать, руководствуясь следующими соображениями: попытаемся узнать, во сколько раз неизвестное число больше или меньше одного из данных; если это возможно, то остаётся выполнить деление или умножение. Заметим, что при определении, во сколько раз одно число меньше другого, обязательно делить большее число на меньшее.

51. Для оклейки комнаты нужно 48 *м* обоев шириной в 0,5 *м*.

Сколько надо для такой же цели обоев шириной в 0,4 *м*?

Вторые обои у́же в $\frac{4}{5}$ раза, следовательно, их потребуется в $\frac{5}{4}$ более, т. е. $48\ \textit{м} \times \frac{5}{4} = 60\ \textit{м}$.

52. На 10 печей за 20 дней вышло 8 *куб. м* осиновых дров. Сколько надо берёзовых дров на 15 таких же печей на 24 дня, если каждое полено осиновых дров в $\frac{3}{2}$ раза длиннее берёзовых и если 2 *куб. м* берёзовых дров дают тепла столько же, сколько 3 *куб. м* одномерных осиновых дров?

Во втором условии печей больше в 1,5 раза, а дней больше в 1,2 раза. Следовательно, дров пойдёт в $1{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}8$ раза больше, т. е. $8 \cdot 1{,}8 = 14{,}4$ *куб. м*. В первом условии каждое полено дров длиннее в 1,5 раза, а во втором условии дрова дают тепла в 1,5 раза более. Эти условия покрывают друг друга.

§ 4. ВТОРОЙ КЛАСС АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

II — метод обратности[1]

В задачах этого рода с неизвестным числом сделано одно какое-нибудь вполне определённое действие. С результатом с помощью известных чисел (без участия неизвестного) произведён целый ряд новых действий, конечный результат которых дан. Таким образом, неизвестное число от нас скрыто целым рядом действий, причём во всех действиях, кроме первого, участвуют только данные числа. Очевидно, чтобы определить неизвестное, нужно с конечным результатом сделать обратные действия и в обратном порядке. Тогда неизвест-

---

[1] Неплохо также название „Задачи, решаемые с конца".

ное будет освобождено от действий, его скрывших, и сделается известным[1].

Задачи второго класса делятся на два вида.

Первый вид

53. Я задумал число. Если его умножить на 5, к результату прибавить 125 и всё, что получится, разделить на 6, то выйдет 115. Какое число я задумал?

Если бы деления на 6 не было, получилось бы не 115, а $115 \cdot 6 = 690$. Если бы не прибавляли 125, то вышло бы $690 - 125 = 565$. Значит, до умножения на 5 было $565 : 5 = 113$. Искомое число 113.

Второй вид

Задачи этого вида отличаются от предыдущего только тем, что ряд действий, скрывающих искомое, не указан так прямо и ясно, как, например, в задаче № 53; однако этот ряд действий легко открыть, вглядываясь в фактический смысл данных чисел. Словом, разница видов в задачах второго класса такая же, как в задачах первого класса.

54. Рабочий получил зарплату; уплатил 50 руб. за квартиру, 30 руб. за коммунальные услуги; купил билеты в театр за 20 руб.; получил выигрыш по облигации, равный $\frac{1}{3}$ той суммы, которая у него осталась. Когда рабочий истратил ещё 200 руб., у него осталось 800 руб. Определить зарплату.

Эту задачу можно выразить так: от неизвестного числа отнять 50; из полученного отнять 30, потом отнять ещё 20; результат умножить на $\frac{4}{3}$, вычесть 200, и получим 800. Определить неизвестное. (Получилась задача первого вида.)

Решать, как задачу № 53. Но, вообще, выражать так

---

[1] Для разъяснения этого дела я придумал пример, который мои ученики находили хорошим. Пусть хирургу нужно посмотреть, в каком положении у больного рана, которая уже забинтована. Тогда хирург должен сделать ряд действий, обратных тем действиям, которые скрыли рану, кончая сдуванием иодоформа, насыпанного на рану перед её бинтованием.

задачи совершенно бесполезно. Гораздо проще прямо разматывать с конца клубок действий, скрывающих неизвестное число. Перед последней тратой у рабочего было 800 руб. + 200 руб. = 1000 руб. Значит, до получения выигрыша у него было 1000 руб.$:\frac{4}{3}=$750 руб. Перед покупкой билетов у него было 750 руб. + + 20 руб. = 770 руб.; перед уплатой коммунальных услуг 770 руб. + 30 руб. = 800 руб., а получил рабочий 800 руб. + 50 руб. = 850 руб.

54*. Полярники подготовляли ледяное поле для посадки самолёта, расчищая каждый раз по 360 *куб. м* снега. После первой и второй расчистки во время отдыха полярников пурга вновь нанесла столько снега, сколько его оставалось на ледяном поле. После третьей расчистки вся работа была выполнена. Сколько кубических метров снега было расчищено?

Пример подобных задач с двумя неизвестными.

55. С текущего счёта *A* перевели на текущий счёт *B* 40 руб.; затем со счёта *B* перевели на счёт *A* втрое больше, чем оставалось на счету *A*. Когда были проделаны ещё два раза те же двойные операции, на счету *A* оказалось 480 руб., на счету *B* 20 руб.

Сколько было денег на каждом счету сначала?

Изменение состояния счетов наглядно показывает таблица.

	A	*B*
Конец	480	20
	120	380
	160	340
	40	460
	80	420
	20	480
Начало	60	440

Составление уравнений для действий (в прямом и обратном порядке) будет гораздо сложнее составления подобной таблицы, причём с увеличением числа неизвестных трудность будет возрастать.

Для поверки таблицы надо помнить, что всегда сумма денег на обоих счетах должна быть равна 480 + 20 = 500.

Алгебраическая форма задач на метод обратности

$$\{[(x+a)+b]+c\}+\ldots+d=e,$$

где: a, b, c, ..., e — данные числа, x — неизвестное.

Знак $+$ (в зависимости от условий задачи) может быть заменён знаком вычитания, умножения или деления. Вот пример задач со многими неизвестными:

55*. Четыре мальчика A, B, C и D играют между собой на том условии, что проигравший игру даёт каждому из остальных столько камешков, сколько тот имеет. Первую проиграл A, вторую — B, третью — C и четвёртую — D. После этого каждый из них имел по 48 камешков.

Сколько камешков имел каждый первоначально?

(Решение таких задач с помощью уравнений, без всякого сомнения, гораздо труднее.)

	A	B	C	D
Конец	48	48	48	48
	24	24	24	120
	12	12	108	60
	6	102	54	30
Начало	99	51	27	15

После четвёртой игры число камешков A, B и C удвоилось; поэтому до четвёртой игры они имели по 24 камешка, а D имел $(24\cdot3)+48=120$ камешков.

После третьей игры число камешков A, B и D удвоилось; значит, до третьей игры A и B имели по 12 камешков, D имел 60, а C имел $24+(12\cdot2)+60=108$ камешков. До второй игры имели:

A — $\left(\frac{12}{2}\right)=$ 6 камешков;

C — $\left(\frac{108}{2}\right)=54$ камешка;

D — $\left(\frac{60}{2}\right)=30$ камешков;

B — $(12+6+54+30)=102$ камешка.

До первой игры: B имел $\frac{102}{2}=51$ камешек, C имел $\frac{54}{2}=27$ камешков, D имел $\frac{30}{2}=15$ камешков, A имел $6+51+27+15=99$ камешков.

§ 5. ТРЕТИЙ КЛАСС ЗАДАЧ. МЕТОДЫ: ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДЕЛЕНИЯ, ПОДОБИЯ, НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТЕЙ

В задачах второго класса неизвестное число было от нас скрыто рядом действий; в отдельных результатах этих действий неизвестное играло роль лишь постольку, поскольку оно участвовало в первом действии. Но может случиться, что неизвестное вновь участвует во всяком последующем действии (или в каком-нибудь из них), а также в окончательном результате.

Тогда мы не можем идти вышеуказанными путями. И действительно, почти все задачи такого рода не решаются ни прямым счётом, ни методом приведения к единице (или к общей мере), ни методом отношений, ни методом обратности, а требуют для разрешения новых методов, которые указываются ниже.

В третий класс мы объединяем задачи на все прочие методы и приёмы решений; может быть, было бы полезно разбить этот класс в свою очередь на ряд подразделений (как показано ниже), причём необходимо принять во внимание, что многие задачи могут быть решены не только одним, а несколькими методами, иногда с равной, иногда с различной трудностью.

Алгебраическая формула задач третьего класса после упрощения будет:

$$f(x,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k)=m,$$

где f — целая рациональная функция x; степень этой функции есть единица, и только в редких случаях может равняться двум. Если же неизвестных два, то алгебраические формулы таких задач будут:

$$f(x,\ y,\ a,\ b,\ c,\ \ldots,\ k)=m,$$
$$F(x,\ y,\ A,\ B,\ \ldots,\ K)=M,$$

где x и y — неизвестные, $a, b, c, \ldots, k, m, A, B, \ldots$ $\ldots, K, M$ — данные числа.

Легко видеть, что задачи третьего класса, глядя по силе замаскированности действий, делятся также на два вида, как и задачи первых двух классов.

§ 6. МЕТОД ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ (III)[1]

Этот метод проявляется в пяти приёмах.

III_1 — соединение нескольких условий в одно

56. Путешественник, выйдя из города, шёл пешком 6 час. и ехал на лошадях 5 час.; всего он удалился от города на 80 *км*. В другой раз он, выехав из города (с теми же скоростями), проехал на лошадях 11 час., затем шёл в обратную сторону 6 час. и очутился в 64 *км* от города. Определить часовую скорость лошадей.

Здесь два неизвестных — скорость лошадей и скорость пешехода. Одно надо исключить. Соединим оба пути вместе. Тогда 6 час. пути пешком вперёд покроют 6 час. пути пешком назад, и в 16 час. путешественник проезжает на лошадях 80 *км* + 64 *км* = 144 *км*. Часовая скорость лошадей 144 *км* : 16 = 9 *км*.

III_2 — сравнение двух условий вычитанием

57. За 7 апельсинов и 9 лимонов заплачено 23 руб., а за 5 апельсинов и 9 лимонов (по тем же ценам) заплачено 19 руб.

Сколько стоит один лимон и один апельсин?

Сравнивая обе покупки, видим, что два апельсина стоят 4 руб. Один апельсин стоит 4 руб. : 2 = 2 руб. Один лимон стоит $(19 - 10) : 9 = 1$ руб.

Приёмы III_1 и III_2 иногда употребляются вместе.

---

[1] Полагают, что этот метод представляет замаскированное решение уравнений. Против этого можно привести три довода:

а) Метод употребляется во всех частях математики и потому не является специальным методом алгебры.

б) Этот метод практиковался лицами, вовсе не знающими алгебры, так что вышеуказанное мнение основано на отсутствии навыка употреблять метод исключения неизвестных в арифметике.

в) Если бы даже этот метод был чисто алгебраическим, то, как уже сказано в предисловии, почему же этот метод не должен помогать арифметике, а непременно должен обособляться от других частей математики?

58. A и B имели 200 руб., B и C имели 150 руб., A и C 220 руб. Сколько денег было у каждого?

Сумма $200 + 150 + 220 = 570$ (руб.) представляет двойную общую сумму всех трёх лиц. Следовательно, все трое имели 570 руб.:2 = 285 руб. Отнимая от последней суммы 220 руб., находим, что у B было 65 руб., A имел 200 руб. — 65 руб. = 135 руб., C имел 150 руб. — — 65 руб. = 85 руб.

III$_8$—замена одного неизвестного другим

59. Смесь орехов из 9 *кг* первого сорта, 11 *кг* второго и 7 *кг* третьего сорта стоит 346 руб. Сколько стоил килограмм каждого сорта, если 1 *кг* первого сорта дороже на 4 руб. килограмма второго сорта и на 6 руб. килограмма третьего сорта?

Заменим орехи первого и второго сортов орехами третьего сорта: тогда цена всей покупки понизится на $(6\cdot9)$ руб. + $(2\cdot11)$ руб. = 76 руб. и будет равна 346 руб. — 76 руб. = 270 руб.; 27 *кг* $(9 + 11 + 7)$ орехов третьего сорта стоят 270 руб.; 1 *кг* орехов третьего сорта стоит 270 руб.:27 = 10 руб.; первого сорта $(10 + 6) = 16$ руб.; второго сорта $(16 - 4) = 12$ руб.

Можно было также заменить все орехи орехами первого сорта (тогда покупка будет дороже данной).

59*. 3 *м* синей материи и 2 *м* чёрной стоят 144 руб.

Сколько стоит метр каждой материи, если синяя вдвое дороже чёрной?

Вместо 3 *м* синей материи можно взять 6 *м* чёрной. Тогда 8 *м* чёрной материи стоят 144 руб., а 1 *м* стоит $144:8 = 18$ (руб.); 1 *м* синей стоит вдвое дороже, т. е. $18 \times 2 = 36$ (руб.).

Иногда количества, содержащие в себе одно или несколько неизвестных, можно заменить числом, которое или дано, или легко определить, при этом все неизвестные могут исключиться, кроме одного.

60. 11 апельсинов и 9 лимонов стоят 35,5 руб. Апельсин и лимон вместе стоят 3,5 руб.

Сколько стоит один апельсин и сколько стоит один лимон?

9 апельсинов и 9 лимонов стоят $3{,}5\cdot9 = 31{,}5$ (руб.).

Поэтому 2 апельсина стоят $35,5 - 31,5 = 4$ (руб.).

Один апельсин стоит 4 руб.$:2 = 2$ руб.

Один лимон стоит 3,5 руб. — 2 руб. = 1,5 руб.

III_4 — уравнивание неизвестных

61. На трёх полках 548 книг; на верхней на 19 книг меньше, чем на средней, а на средней на 129 книг меньше, чем на нижней.

Сколько книг на каждой полке?

Здесь три неизвестных, сделаем их равными. Для этого с нижней полки снимем 129 книг и из этих книг положим на верхнюю полку 19 книг. Тогда на трёх полках останется $(548 - 129 + 19) = 438$ книг, на всех поровну; следовательно, на каждой осталось $438:3 = 146$ (книг). На верхнюю мы положили 19 книг; значит, на верхней полке было $146 - 19 = 127$ (книг), на нижней $146 + 129 = 275$ (книг); на средней полке было 146 книг.

62. Рабочий проработал 4 дня и выработал на 14 деталей больше нормы. В другой раз он проработал 11 дней и выработал на 4 детали больше нормы.

Сколько деталей рабочий должен вырабатывать в день по норме, если второй раз он выработал вдвое больше деталей, чем в первый раз?

Уравняем обе неизвестные выработки; для этого удвоим первую. Тогда, в первый раз рабочий проработал 8 дней и выработал на 28 деталей больше нормы. Значит, по норме он должен был выработать в 3 дня, $(11 - 8)$, 24 детали, $(28 - 4)$, а в один день $24:3 = 8$ деталей.

63. В одном закроме 208 *кг* ржи, в другом 10 *кг*.

Сколько раз надо всыпать в каждый закром по 7 *кг*, чтобы в первом стало в 4 раза больше, чем во втором?

Каждый закром будет состоять из двух частей: первый из 208 *кг* и 7 *кг*, насыпанных несколько раз; второй из 10 *кг* и 7 *кг*, насыпанных столько же раз. Уравняем оба закрома. Тогда во втором закроме 10 *кг* превратятся в 40 *кг*, а 7 *кг*, насыпанных несколько раз, превратятся в 28 *кг*, насыпанных столько же раз. Следовательно, чтобы сделать закромы равными, надо всыпать во второй закром 30 *кг*, потом всыпать каждый раз в первый закром по 7 *кг*, в то время как во второй закром надо всыпа́ть по 28 *кг*. Иначе, всыпав 30 *кг* во второй закром, можно первый закром оставить в покое, а во второй всыпа́ть каждый раз по 21 *кг*. Таким образом, всыпая каждый раз по 21 *кг*, мы насыпем в него $208-40=168$ (*кг*). Очевидно, искомое равно $168:21=8$ раз.

Задачу можно решить несколько легче, если заметить, что $208-40=168$ (*кг*) по смыслу вопроса должны составлять $\frac{3}{5}$ всей ржи, которая (сверх 30 *кг*) будет насыпана в оба закрома для того, чтобы сделать их равными.

Если сделаем метатезис[1] неизвестного с 7, получится более лёгкая задача, сходная с предыдущей.

63*. Отцу 30 лет, сыну 2 года. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?

III_5—уравнивание данных

В этой разновидности метода различаем два случая, смотря по тому, являются ли неизвестные множимыми или множителями.

В первом случае уравнивают повторяемое неизвестное с целью применить методы III_1 и III_2, например:

64. 9 груш и 2 яблока стоят 10 руб. 50 коп., а 8 груш дороже 5 яблок на 4 руб. 25 коп.

Сколько стоит одна груша и сколько одно яблоко?

Неизвестная цена яблока повторяется в первом условии 2 раза, во втором 5 раз. Надо уравнять число яблок. Увеличим первое данное в 5 раз, второе в 2 раза (наименьшее кратное 2 и 5—десять). Тогда стоимость 10 яблок (в первом случае прибавляемая к стоимости груш, во втором вычитаемая из неё) при соединении обоих условий исключится. Выйдет, что 61 груша стоит 61 рубль, одна груша стоит 1 рубль. Два яблока стоят 10 руб. 50 коп.—(1 руб.·9) $=1$ руб. 50 коп., одно яблоко стоит 1 руб. 50 коп.$:2=75$ коп.

65. Куплено на равные суммы индеек по 50 руб. штука и гусей по 40 руб.; вторых было на 10 больше. Сколько тех и других?

Если купить ещё 10 индеек, то все индейки будут дороже гусей на 500 руб.; каждая индейка дороже

[1] См. стр. 58.

гуся на (50—40) = 10 руб. Следовательно, всех индеек было 500:10 = 50, а первоначально 50—10 = 40 индеек; гусей было 40 + 10 = 50.

Можно решить иначе, если заметить, что обратное отношение числа индеек и числа гусей равно 50:40 (см. № 69). Это весьма полезное замечание находит себе применение во многих задачах (№ 69, 70*). Вместо равенства цен можно дать отношение цен.

65*. Пусть в задаче 65 вместо равенства цен всех индеек и всех гусей дано их отношение 5:12. Так как отношение цен индейки и гуся равно 5:4, то, если бы количества индеек и гусей относились, как 4:5, цены были бы равны; чтобы цены пришли в требуемое отношение, надо взять индеек в 5 раз больше, а гусей в 12 раз больше, поэтому искомые находятся в отношении $(4\cdot5):(5\cdot12) = 1:3$. Теперь задача приведена к № 65.

Другой способ: чтобы уравнять цены всех индеек и всех гусей, надо считать каждого гуся не по 40 руб., а по $40:\frac{12}{5} = 16\frac{2}{3}$ руб. Тогда получится задача, схожая с задачей № 65.

Во втором случае уравнивают два данных с таким расчётом, чтобы были видны последствия этого уравнивания. Первым примером может служить задача № 65, если её решать так:

Пусть каждый гусь стоит 50 руб. Тогда цена всех гусей против цены всех индеек увеличится на 500 руб., цена же каждого гуся увеличена на 10 руб.; значит, гусей было 500:10 = 50, или иначе: цена каждого гуся увеличится на $\frac{1}{4}$ прежней цены; значит, $\frac{1}{4}$ прежней цены всех гусей равна 500 руб., вся цена 2000 руб. Гусей было 2000:40 = 50.

Вот второй, очень характерный, пример:

66. Продано несколько метров синей материи по 21 руб. метр и несколько метров чёрной материи по 9 руб. метр, всего на сумму 525 руб.

В другой раз продано столько же синей материи по 15 руб. метр и столько же (сколько в первый раз) чёрной материи по 18 руб. метр, всего на сумму 780 руб. Сколько продавалось чёрной материи каждый раз?

Пусть в оба раза синяя материя стоила, например, по рублю метр; тогда изменяем соответственно цену на чёрную материю (первый раз в 21 раз дешевле, второй — в 15 раз). Соответственные выручки будут 25 руб. и 52 руб. Разница $(52-25)=27$ руб. зависит от того, что во второй раз на метр чёрной материи набавили $\frac{18}{15}-\frac{9}{21}=\frac{27}{35}$ (руб.). Значит, чёрной материи было $27:\frac{27}{35}=35$ (*м*).

66*. Первый колхозник вскопал в первый день участок земли длиной 80 *м*, во второй день он вскопал участок длиной 64 *м*. Второй колхозник вскопал в первый день участок длиной 40 *м*, во второй день 30 *м*. В первый день оба вскопали 720 *кв. м*, во второй 560 *кв. м*. Определить ширину каждого огорода.

67. Имеем сплав серебра и меди, в котором меди на 52 *куб. см* более, чем серебра; заменив в этом сплаве медь равным объёмом золота, получим сплав $85\frac{5}{7}\%$, который тяжелее первого на 13,2 *кг*. Определить объёмы серебра и меди в первом сплаве. (Плотности серебра и меди 10 и 9, вес 1 *куб. см* воды 1 *г*.)

Во втором сплаве золото весит более серебра в $85\frac{5}{7}:\left(100-85\frac{5}{7}\right)=6$ (раз). Поэтому всё золото во втором сплаве можно заменить ушестерённым весом серебра первого сплава (количество серебра в первом и во втором сплаве одно и то же).

Если объём меди уменьшить на 52 *куб. см* (тогда он будет равен искомому объёму серебра), то первый сплав будет весить на 13,2 *кг* $+ (52\times 9)$ *г* $=13{,}668$ *кг* меньше второго сплава. Так как разница в весе сплавов зависит только от разницы в весах золота и меди, то, заменив, как выше сказано, золото серебром, вопрос приведём к следующей задаче:

67*. Некоторый объём серебра, будучи больше некоторого объёма меди в 6 раз, весит больше на 13,668 *кг*.

Найти объём серебра и объём меди, полагая плотность серебра 10, а плотность меди 9.

Эту задачу нетрудно решить методом остатков, уравнивая неизвестные объёмы. Разница в весе 1 *куб. см* серебра и 1 *куб. см* меди равна $(10\cdot 6)-9=51$ (*г*), значит, серебра было 13,668 *кг*:51 *г* $=268$ (*куб. см*), а меди $268+52=320$ (*куб. см*).

§ 7. МЕТОД ПРОПОРЦИОНАЛЬНОГО ДЕЛЕНИЯ (IV)

Метод пропорционального деления употребляется в тех случаях, когда даны отношения неизвестных и их сумма (или разность).

Этот метод основан на особой точке зрения, с которой можно смотреть на прямые и обратные отношения двух или нескольких чисел. Именно, если говорится: „два числа прямо пропорциональны 7 и 10“ или: „отношение двух чисел равно 0,7“, то это можно понять так: в первом числе 7 каких-либо частей, во втором 10 таких же частей, так как от деления 7 частей на 10 таких же частей получается 0,7. Если же говорится: „два числа обратно пропорциональны 2 и 3“, то это значит, что отношение этих чисел равно обратному отношению 2 и 3, т. е. в первом числе 3 какие-нибудь доли, а во втором 2 такие же доли.

После этого нетрудно решать следующие задачи:

68. Разделить 480 на части, пропорциональные 2, 3 и 5.

В первой части 2 неизвестные доли, во второй 3 такие же доли, в третьей 5 таких же долей; всех долей 10. Все 10 долей составляют 480; одна доля равна 48. Значит, в первой части $48 \times 2 = 96$, во второй $48 \times 3 = 144$, в третьей $48 \times 5 = 240$.

69. Найти два числа, обратно пропорциональные 8 и 3, так, чтобы разность этих чисел была равна 100.

Во втором числе 8 неизвестных долей, в первом 3 такие же доли; следовательно, 5 таких долей равны 100, одна доля равна 20. Первое искомое число $20 \times 3 = 60$; второе $20 \times 8 = 160$.

70. Разделить 375 на три части так, чтобы отношение первой и второй части было равно 5:6, а отношение второй и третьей части 7:8.

Надо выразить все части в одной и той же мере. В первой части 5 долей, во второй 6 таких же долей; во второй части 7 иных долей и в третьей 8 таких же долей. Уменьшим первые доли в 7 раз; а вторые в 6 раз; тогда в первой части будет 35 долей, во второй 42 доли и в третьей 48 таких же долей; теперь все части выражены в одинаковой мере, и задача стала подобна задаче № 68.

Заметим, что для приведения всех частей к одной и той же мере мы должны были найти наименьшее кратное чисел, выражающих доли части, участвующей в обоих отношениях. Такой приём, будучи выгоден для трёх частей, становится труден для большего числа частей; в последнем случае предпочтительнее методы V и VI, указанные ниже.

70*. Разделить 620 руб. между тремя братьями обратно пропорционально их летам, если первому было 20, второму 18 и третьему 15 лет.

Искомые части относятся, как 18 к 15 и 20 к 18. Поступая так же, как в предыдущем примере, найдём, что искомые части пропорциональны числам 9, 10 и 12; следовательно, задача приведена к задаче № 68.

На основании сказанного нетрудно решить обратный вопрос.

71. Пусть отношения неизвестных чисел равны отношениям 12:10:9; требуется найти новый ряд чисел, которым неизвестные числа обратно пропорциональны.

Обратное отношение первых двух чисел равно 5:6; обратное отношение второго и третьего чисел равно 9:10. Надо выразить второе число в одинаковых долях; для этого находим наименьшее кратное 6 и 9 (18), оба члена первого отношения умножим на 3, а второго — на 2; получим искомый ряд чисел: 15, 18 и 20.

Иногда употребляют выражение „разделить число на части, пропорциональные двум или нескольким рядам чисел". Пусть, например, требуется 110 разделить на части, пропорциональные рядам чисел 5, 6, 7 и 3, 2, 4. Такой вопрос не имеет смысла и невозможен, потому что части, имеющие определённое отношение, не могут иметь никакого другого отношения. Данную задачу следует выразить так:

71*. Разделить 110 на три части в отношении 5:6:7 так, чтобы единицы, которыми будут выражены искомые части, были не равны и находились в отношении 3:2:4.

Эту задачу нетрудно решить пропорциональным делением, но несравненно удобнее применить к ней метод подобия.

Если говорится: „отношение двух чисел равно двум третям", то это можно понять ещё иначе; именно, это значит, что первое число составляет две трети второго числа. Этот взгляд на отношение двух чисел приводит решение всех задач на пропорциональное деление к следующим двум методам (V и VI).

§ 8. МЕТОД ПОДОБИЯ (V)[1]

Задачи, решаемые методом подобия, делятся на два рода.

К **первому** роду задач, решаемых методом подобия, относятся те задачи, к которым можно применить метод подобия сейчас же, т. е. без всяких предварительных преобразований. Общий вид этих задач следующий: „Даны отношения искомых; другое данное, будучи выражено через одно неизвестное, меняется пропорционально этому неизвестному. Определить неизвестные".

Если, сохраняя отношение неизвестных, дать одному из них произвольное значение, то действия, необходимые для проверки задачи, дадут, вообще, результат, не равный требуемому;[2] после этого надо найти отношение между требуемым и полученным результатом; тогда останется помножить значение, произвольно данное неизвестному, на полученное отношение.

Читатель легко заметит превосходство метода подобия при решении многих задач. Метод подобия — могущественный метод, он охватывает широкий круг задач. Что касается того, что при решении часто получаются дробные числа, то и тут метод подобия имеет преимущество: неизвестные выбираются произвольно, и надо их выбирать так, чтобы, по возможности, избегать дробей.[3]

72. Три брата получили 144 руб.; первый получил втрое меньше второго, а третий — вдвое больше, чем первый и второй вместе.

Сколько получил каждый брат?

Меньшую долю назначим произвольно,— положим, что первый брат получил 1 рубль, тогда второй получил 3 руб., а третий 8 руб. Все вместе получат 12 руб.

---

[1] Методом подобия практически часто пользуются люди, незнакомые с теорией арифметики, называя этот метод „примерным расчётом".

[2] Поверка решения может быть сделана в различных направлениях; в данном случае при поверке должно сделать неизвестным то данное, которое, будучи выражено через искомые и остальные данные, меняется пропорционально искомому.

[3] Согласимся, что тип задач, решаемых методом подобия, выражен ясно и точно. Тем не менее для учащихся часто трудно определить, решается ли задача этим методом (см. № 136). Главным средством в этом случае является поверка (осторожно выполненная).

Так как на самом деле они получили 144 руб., т. е. в $144:12=12$ раз больше, то первый брат получил в действительности 1 руб.$\cdot 12=12$ руб., второй получил 12 руб.$\times 3=36$ руб., третий 8 руб.$\cdot 12=96$ руб.

Этим методом легко решаются все задачи на пропорциональное деление[1]; при этом объяснения решений выигрывают в ясности и краткости.

73. A положил в сберегательную кассу 500 руб.; через год B внёс в ту же сберегательную кассу 800 руб. Когда деньги B пролежали в сберегательной кассе 5 лет, оказалось, что A получил процентных начислений (считая простые проценты) на 30 руб. меньше B.

Во что обратился взнос A?

Предположим, что A получил начислений 120 руб., тогда годовые начисления с каждой сотни рублей составят $\frac{120}{5\cdot 6}=4$ руб. B должен получить начислений $4\cdot 8\cdot 5=160$ руб. Разница $160-120=40$ (руб.), а должна быть 30 руб. Значит, начисления A не 120 руб., а $120\times\frac{30}{40}=90$ (руб.) и весь взнос A обратился в 500 руб. $+$ 90 руб. $=$ 590 руб. Можно назначить произвольный процент начислений, а потом этот процент изменить соответственно полученному результату.

73*. Числа жителей трёх сёл при их основании находились в отношении $10:11:15$. Через 6, 12 и 11 лет (соответственно) во всех трёх сёлах было 7380 жителей. Сколько было жителей в каждом селе при основании, если годовой прирост (считая простые проценты) равен соответственно $5,5\%$, 5% и 2%?

Пусть в первом селе при его основании было 100 жителей; тогда во втором было 110, в третьем 150 жителей. Через 6 лет в первом селе стало $100+(5,5\times 6)=133$ жителя; через 12 лет во втором селе было $110+(5,5\times 12)=176$ жителей; через 11 лет в третьем селе было $150+(3\times 11)=183$ жителя; во всех трёх сёлах стало $133+176+183=492$ жителя, т. е. в $(7380:492=)$ 15 раз меньше, чем в действительности; значит, при основании в первом селе было жителей $100\times 15=1500$, во втором $110\times 15=1650$, в третьем $150\times 15=2250$ жителей.

---

[1] См. стр. 49 и 50.

74. Два паровоза прошли 3240 *км*. Первый шёл 3 дня по 20 час., второй 2 дня по 18 час. Отношение средних скоростей 3:4 Определить средние часовые скорости паровозов.

Пусть скорость первого 15 *км* в час. Тогда за всё время он пройдёт $15 \times 3 \times 20 = 900$ *км*; скорость второго 20 *км* в час, и его путь $20 \times 2 \times 18 = 720$ *км*. Вместе они пройдут 1620 *км*. Значит, действительная скорость первого паровоза $15 \times \frac{3240}{1620} = 30$ *км*; действительная скорость второго паровоза $30 \times \frac{4}{3} = 40$ *км*.

74*. За муку трёх сортов заплачено 306 руб.

Сколько заплачено за муку каждого сорта, если веса сортов пропорциональны числам 35, $43\frac{1}{3}$ и 50, а цены пропорциональны числам 14, 9 и 13?

Пусть первого сорта было 35 *кг* и каждый килограмм стоил 14 руб., тогда веса и цены (килограмма) других сортов будут $\frac{130}{3}$ *кг* и 50 *кг*, 9 руб. и 13 руб. Общая стоимость муки будет: $(14 \times 35) + \left(9 \times \frac{130}{3}\right) + (13 \times 50) = 1530$ (руб.), т. е. в $1530:306 = 5$ раз больше требуемой. Следовательно, мука первого сорта стоила не (14×35) руб., а в 5 раз меньше $(14 \times 35):5 = 98$ руб.; мука второго сорта стоила $\left(9 \times \frac{130}{3}\right):5 = 78$ руб., мука третьего сорта стоила $306 - (98 + 78) = 130$ руб.

75. Мастер сплавил кусок золота 50% с куском золота 75% и получил 27 *г* сплава. Определить объёмы обоих кусков, если отношение неизвестных объёмов равно 1:7, плотность золота 20, плотность лигатуры 12, вес 1 *куб. см* воды 1 *г*.

Пусть объём первого куска будет 1 *куб. см*, тогда объём второго куска 7 *куб. см*. Найдём в этом предположении вес сплава, и, если не получится 27 *г*, то увеличим или уменьшим соответственно взятые объёмы кусков.

1 *куб. см* чистого золота весит 20 *г*, следовательно, 1 *г* чистого золота занимает $\frac{1}{20}$ *куб. см*;

1 *куб. см* лигатуры весит 12 *г*, 1 *г* лигатуры занимает $\frac{1}{12}$ *куб. см.*

Первый кусок 50-процентный, $\frac{1}{2}$ *г* чистого золота занимает $\left(\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}\right)$ *куб. см*; $\frac{1}{2}$ *г* лигатуры занимает $\left(\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}\right)$ *куб. см*; 1 *г* золота 50% занимает $\left(\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}\right)+$ $+\left(\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{15}$ *куб. см*, а 1 *куб. см* золота 50% весит 15 *г*.

Точно так же найдём, что 7 *куб. см* золота 75% будут весить 120 *г*, так как 1 *г* этого золота занимает $\frac{7}{120}$ *куб. см.*

Вес всего сплава будет $120+15=135$ *г*, т. е. в $(135:27=)$ 5 раз больше, чем следует. Значит, объём первого куска золота равен $\frac{1}{5}$ *куб. см.* Объём второго куска равен $\frac{7}{5}$ *куб. см.*

Ко **второму** роду задач, решаемых методом подобия, принадлежат задачи, требующие известной отделки, известных преобразований, после которых задача приводится к типу задач первого рода. Такие преобразования делаются главным образом приёмами VII_1, VII_2, VII_3 (см. стр. 43 и 44).

76. Путник прошёл 0,375 своего пути и ещё 65 *км*. После этого ему осталось пройти 0,75 всего пути без 85 *км*.

Как велик путь?

Положим, что путник прошёл только 0,375 пути; тогда ему остаётся 0,75 всего пути без 20 *км*[1]. Теперь число 20 меняется пропорционально неизвестному, и задачу можно решить методом подобия. Пусть весь путь равен 240 *км*; 0,375 пути составляет 90 *км* и остаётся 150 *км*; 0,75 составляет 180 *км*, разность 180—150 в 1,5 раза более 20; следовательно, искомый путь равен $240:1{,}5=160$ *км*.

[1] Далее намеренно выбран не самый короткий путь решения. Короче: $0{,}75+0{,}375=1{,}125$; значит 0,125 всего пути составят 20 *км*.

§ 9. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТЕЙ (VI)

Задачи на этот метод делятся на два рода. В задачах первого рода разыскивают различные части неизвестного числа, пока не найдут такую часть, которая выражена данным числом. Тогда остаётся нахождение целого по данной части (№ 77, 77*, 78).

Второй род этих задач состоит из вопросов, ответ на которые не зависит от размера той или другой величины, которая находится в условии задачи. Тогда разыскивают различные части только что упомянутой величины до тех пор, пока не получатся такие дроби этой величины, которые укажут на решение задачи (№ 79). Подобного рода задачи решаются легче с помощью приёма VII_3.

77. Семья получила деньги по выигрышной облигации. Один брат получил 0,4 всей суммы, сестра 0,6 остатка, второй брат — остальные 2400 руб.

Каков был весь выигрыш?

77*. Первый колхозник обработал 0,2 участка, второй $\frac{3}{8}$ остатка, а третий остальные 500 *кв. м.*

Определить величину всего участка.

78. Два брата вместе получили 3500 руб.; первый истратил в первый год 5% своих денег, а в следующий год 10% своего остатка; второй же в это время ежегодно увеличивал сумму своих денег на 7% (считая простые проценты). По истечении двух лет деньги братьев сравнялись. Сколько получил каждый брат?

Первый брат в первый год со ста рублей терял 5 руб., а с одного рубля 0,05 руб., следовательно, он потерял в первый год 0,05 своих денег и у него осталось 0,95; во второй год он истратил 0,1 от остатка и у него осталось $0{,}95 \times 0{,}9 = 0{,}855$ его первоначальных денег. Второй брат ежегодно увеличивал свои деньги на 0,07. Через два года у него стало 1,14 его денег. Следовательно, 0,855 денег первого равны 1,14 деньгам второго, а отношение денег первого и второго равно $1{,}14 : 0{,}855 = 4 : 3$, и, значит, первый брат получил 2000 руб., второй 1500 руб.

Вместо равенства окончательных денег может быть дано их отношение; вместо суммы первоначальных денег можно дать их отношение, тогда надо дать разность или сумму окончательных денег. К этой задаче (как и ко всем задачам на метод VI) можно применить метод подобия, взяв две равные произвольные суммы (деньги после операций) и перейти от них к первоначальным деньгам; сумму последних надо сравнивать с 3500.

79. Пароход проходит некоторое расстояние по течению в 10 час., а против течения — в 20 час. Во сколько времени проплывёт это расстояние щепка, брошенная в воду той же скорости?

По течению пароход проходит в час 0,1 всего расстояния, против течения 0,05 того же расстояния.

Часовая скорость течения равна $(0{,}1-0{,}05):2=0{,}025$ всего пути, а искомое время равно $1:0{,}025=40$ час.

§ 10. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ В ДРУГУЮ (VII)

Метод преобразования одной задачи в другую проявляется в трёх приёмах, которые имеют вообще большое педагогическое значение и подчас решающую силу.

VII_1. Приём разложения трудной задачи на ряд подготовительных задач, которые должны быть решены предварительно.

80. Летело два стада гусей. Если из первого стада перелетит во второе 16 гусей, то в них будет поровну. Если же из второго перелетит в первое 4 гуся, то в первом будет в 5 раз более. Сколько гусей в каждом стаде?

Эта довольно трудная задача сделается совсем лёгкой, если овладеть следующими задачами:

1) Если из одного кармана переложить в другой 16 коп., то в них будет поровну. На сколько в одном более, чем в другом?

2) Одно число больше другого на 32. Какова будет разность этих чисел, если от меньшего отнять 4, а к большему прибавить 4?

3) Одно число больше другого в 5 раз; разность этих чисел равна 40. Найти эти числа (IV).

VII_2. Приведение неизвестных к таким значениям, при которых становится известным их отношение; после этого задача обыкновенно решается методом подобия.

81. Три брата получили 995 руб. Старший получил втрое больше младшего и ещё 85 руб., а средний в 4 раза более младшего без 50 руб. Сколько получил каждый?

Сделаем так, чтобы старший получил ровно в 3 раза более младшего, а средний ровно в 4 раза более младшего. Для этого у старшего возьмём 85 руб. и из этих денег дадим среднему 50 руб. Тогда общая сумма станет 960 руб. и задача легко решается методом подобия.

В самом деле, пусть младший получит 10 руб., тогда другие получат 30 руб. и 40 руб., а все вместе 80 руб., т. е. в 12 раз меньше, чем следует. Значит, младший брат получил 10 руб. $\times$ 12 = 120 руб., средний (120 руб. $\times$ 4) — 50 руб. = 430 руб., старший (120 руб. $\times$ 3) + 85 руб. = 445 руб.

VII_8. Приём назначения произвольного числа для одной из неизвестных величин.

Есть задачи, в которых ответ не зависит от размера той или другой величины, участвующей в задаче. В таком случае выгодно дать этой величине произвольное численное значение. Примером может служить задача № 79, если её решить следующим образом: довольно ясно, что ответ не зависит от величины расстояния, потому что увеличение расстояния не изменит времени, если во столько же раз увеличить скорости вверх и вниз.

Пусть расстояние равно 40 *км* (произвольное число, которое надо выбирать так, чтобы дальнейшие численные операции были, по возможности, кратки). Тогда часовая скорость парохода вниз равна 4 *км*, а вверх 2 *км*. Часовая скорость течения равна $(4-2):2=1$ *км*, и искомое время равно $40:1=40$ (час.).

Вот второй характерный пример:

82. Пустой бассейн наполняется одной трубой в 10 час., а другой в 20 час. Сначала действовала одна первая труба, потом одна вторая, и бассейн наполнился в 17 час. Сколько часов действовала каждая труба?

Довольно ясно, что ответ не зависит от размера бассейна. Поэтому даём бассейну произвольный объём, например, 60 *гл*. Тогда первая труба в течение часа вливала в бассейн 6 *гл*, а вторая 3 *гл*, и получается задача, аналогичная задаче № 83.

Если бы все 17 час. действовала одна первая труба, она влила бы в бассейн 6 *гл* $\times$ 17 = 102 *гл*, т. е. на (102 — 60 =)42 *гл* больше, чем было влито в действительности. Это получилось потому, что на какое-то число часов мы заменили вторую трубу первой, которая вливала в час на (6 — 3 =) 3 *гл* больше. Значит, вторая труба должна была действовать (42:3 =) 14 час., а первая (17 — 14 =) 3 часа.

83. В саду были фазаны и кролики; все они имели 128 ног и 37 голов. Сколько было фазанов и кроликов?

Заменим всех фазанов таким же числом кроликов. Тогда общее число ног станет 148, т. е. увеличится на 20. От каждой замены фазана кроликом общее число ног увеличивается на две; следовательно, замен было столько, сколько 2 повторяется в 20, т. е. 10. Десять раз фазанов заменяли кроликами, значит всех фазанов было 10.

§ 11. ГРАНИЦА МЕЖДУ АРИФМЕТИЧЕСКИМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЗАДАЧАМИ

Не существует задач первой степени [1], взятых из какой угодно области, которые бы не разрешались разобранными здесь способами. По крайней мере автор при всём своём старании не мог отыскать таких задач. Но нельзя того же утверждать относительно тех задач второй степени, которые в частных случаях приводят к уравнению первой степени; такого рода задачи решаются иногда с очень большими затруднениями и, весьма вероятно, некоторые из них недоступны арифметике. С другой стороны, хотя очень редко, но встречаются задачи и второй степени, которые могут быть разрешены чисто арифметическими [2] соображениями.

---

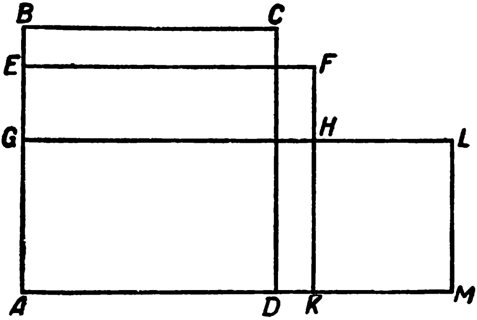
[1] Т. е. задач, которые приводят к уравнению первой степени. Для того чтобы узнать, можно ли решить задачу арифметическими приёмами, должны составить уравнение; если оно будет первой степени, то можно; если уравнение будет второй степени и выше, то нельзя (за очень редкими исключениями).

[2] Арифметичность решения определяется, по моему мнению, следующими признаками: 1) невозможностью вычесть из меньшего большее; 2) необходимостью строго считаться с порядком умножения в том случае, когда множимое именованное; этим обусловливается, например, существенная разница в решении задач № 64, 66 и им подобных; 3) сохранением разницы между делением на равные части и делением в смысле содержания; 4) увеличением и уменьшением только в целое число раз или в целое с дробью.

Вот примеры того и другого рода.

84. Слесарь, имея квадратный лист железа, заметил, что если длину листа увеличить на 1 *см*, а ширину уменьшить на 1 *см*, то получится такая же площадь, какая получится из того же листа при увеличении его длины на 5 *см* и уменьшении ширины на 3 *см*.

Какова была длина листа?



Пусть *ABCD* — данный квадратный лист.

В первом случае получим площадь листа *AEFK*, во втором *AGLM*. По условию *AEFK* = *AGLM*; они имеют общую площадь *AGHK*, значит, *EGHF* = *KHLM*.

В *KHLM* одно измерение, *KM* (длина), равно 4 *см* (увеличение длины на 5 без единицы). В *EGHF* одно измерение, *FH* (ширина), равно 2 *см* (уменьшение ширины на 3 без единицы). Отношение $\frac{KM}{FH}$ равно двум.

Площади *EGHF* и *KHLM* равны произведениям своих двух измерений (ширины и длины). Одно измерение *KHLM* (*KM*) вдвое больше одного измерения *EGHF* (*FH*); значит, второе измерение (*KH*) должно быть вдвое меньше второго измерения *EGHF* (*GH*); *KH* равно стороне квадрата без трёх, *GH* равно стороне квадрата плюс единица. Данная задача приведена к следующей:

84*. Если к задуманному числу прибавим единицу, то получим вдвое больше, чем задуманное число, уменьшенное на три.

Какое число мы задумали?

Четыре $(3+1)$ составят половину суммы искомого числа и единицы. Вся сумма $4 \times 2 = 8$, а искомое число $8 - 1 = 7$.

Итак, сторона данного квадрата (она же искомая длина) равна 7 *см*.

При алгебраическом решении получается квадратное уравнение, но при приведении члены с неизвестным во второй степени взаимно уничтожаются, и остаётся уравнение первой степени.

85. Несколько рабочих выполнили работу. Если бы их было на 2 больше, они кончили бы работу на 2 дня скорее; если же их было бы на 6 больше, то они кончили бы работу на 4 дня скорее. Сколько было рабочих?

Задачу можно решать так же, как предыдущую; разница в том, что в геометрическом построении будет прямоугольник, а не квадрат.

Другое решение: число дней было на 2 больше числа рабочих (см. № 111). Произведённая работа соответствует известному числу человеко-дней и измеряется произведением числа рабочих (множимое) на число рабочих дней (множитель). Во втором условии мы увеличиваем множимое на 6 — произведение увеличивается на 6 множителей; если же мы при этом уменьшим множитель на 4, произведение уменьшится на 4 множимых плюс $6 \times 4 = 24$. Так как произведение (работа) не изменилось, получаем, что 6 множителей равны четырём множимым плюс 24.

Задача приведена к следующей:

85*. Второе число больше первого на 2. Если мы второе умножим на 6, получим столько же, сколько будет, если мы умножим первое число на 4 и прибавим 24. Найти первое число. Используя первое условие (вместо умножения второго числа на 6, можно умножить на 6 первое число и прибавить $2 \times 6 = 12$), получим:

Если данное число умножить на 6 и прибавить 12, получим сумму, равную четырём данным числам плюс 24. Значит, удвоенное данное число равно 12.

86. Два колхозника вскапывали огород. Разделив его на два равных участка, они к 15 час. вскопали 0,75 всего огорода, причём первый начал работу на 1,5 часа позже второго. После часового отдыха колхозники окончили работу: первый — к 19 час., второй — к 19,5 час. В котором часу каждый начал работу?

Пусть x — число часов, в которые первый мог бы вскопать весь огород, а y — число часов, которые отработаны первым до 15 час.

$$y+3=0{,}5x;\ \frac{0{,}75-\frac{x}{y}}{y+1{,}5}\cdot(y+1{,}5+3{,}5)=0{,}5.$$

Эти уравнения дают $y^2-5y-36=0$.

Между тем нетрудно заметить следующее: второй до 15 час. работал дольше первого на 1,5 часа, а после отдыха — на 0,5 часа. Пусть первый работал до 15 час. в 3 раза дольше, чем после отдыха. Тогда так как 1,5 тоже в 3 раза больше 0,5, то и второй проработает до 15 час. в 3 раза дольше, чем после отдыха. Оба же вместе до 15 час. сделают как раз 0,75 всей работы, чего и требует задача. Следовательно, возможно, что до 15 час. каждый работал в 3 раза более, чем после отдыха. Поэтому до 15 час. первый работал 9 час. Если изменить числа 1,5 и 0,5 так, что их отношение не будет равно трём (т. е. отношению 0,75:0,25), решение потеряет силу.

87. Члены общества обменялись рукопожатиями, и всего вышло 210 рукопожатий. Сколько человек было в этом обществе?

88. В каком выпуклом многоугольнике 35 диагоналей?

89. Два путешественника выезжают из города с различной, но постоянной скоростью, второй — через 3 часа после первого. Второй догоняет первого через столько часов после своего выезда, сколько километров в час делает первый. Если бы первый проезжал в час на 0,6 *км* более, то второй догнал бы его через столько часов после своего выезда, сколько километров он сам проезжает в час. Найти скорости путешественников.

В уравнении члены второй степени взаимно уничтожаются, и потому задача решается арифметически (№ 42, $\text{VII}_\text{в}$).

Иногда наш вопрос находится в зависимости от того, какого рода задачи мы относим к области арифметики. Так задача:

90. „Найти число, которое во столько раз больше четырёх, во сколько оно меньше 25“ (см. № 157) — легко разрешается путём пробы, и потому при данном подборе чисел задача относится к арифметике. В самом деле, деление многозначных чисел не может быть выполнено без некоторых проб или испытаний, однако это действие чисто арифметическое. При произвольных данных числах задача, конечно, относится к алгебре.

§ 12. ЧИСЛО МЕТОДОВ И ПРИЁМОВ, НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ ДЛЯ РАЗРЕШЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Если читатель попробует решать задачи № 68—79 методами IV, V, VI, то он быстро убедится, что все эти задачи без труда решаются всеми тремя методами, иногда одним методом легче, чем другими, иногда труднее. С другой стороны, я многократно пытался составить задачу на метод подобия, но так, чтобы она не решалась методами IV и VI; эти попытки не имели успеха. В чём тут дело? Отчего это так происходит? Не оттого ли, что методы IV, V и VI, будучи арифметически различны, в сущности тождественны, что их математическая логика одинакова, тогда как методы II, III, VII_1, VII_2 представляют нечто совсем другое. Оказывается, так оно и есть.

Для ясности решим методом IV задачу:

91. „Разделить 1000 на части, пропорциональные двум и трём", а затем решить её методом подобия следующим образом:

Пусть первая часть равна 100; тогда каждая доля этой части равна 50, число же всех долей равно $1000:50=20$. На самом деле их 5 (в четыре раза меньше). Значит, первая часть в четыре раза больше ста [1].

Таким образом, сущность метода IV, говоря вообще, состоит в том, что мы определяем размер каждой доли неизвестного числа, зная количество долей. Сущность метода подобия состоит в том, что произвольное значение одного неизвестного даёт размер каждой его доли; зная же этот размер, мы определяем число долей и смотрим, выходит ли это число надлежащим по размеру. Совершенно очевидно, что решение первого

---

[1] Такое изменение порядка действий допустимо во всякой задаче на метод подобия.

вопроса даёт возможность решить и второй вопрос, и обратно[1].

Между IV и V методами такая же разница, как между делением на равные части и делением по содержанию. Но эта разница с более широкой точки зрения уничтожается. Вот почему задачи, решение которых поддаётся одному из методов IV и V, могут быть разрешены и другим методом.

В методе VI мы определяем части неизвестного (или целого, от величины которого ответ не зависит) до тех пор, пока не получим дробей, дающих возможность решить задачу. Совершенно очевидно, что если мы дадим неизвестному (или вышеупомянутому целому) произвольное значение и будем находить части этого значения в том же порядке, то мы получим одно или несколько чисел, указывающих на решение. Следовательно, методом VI решаются задачи, которые можно решать методом V, и наоборот.

Методы IV и VI не могут разниться по существу и по своей силе, потому что они вытекают из одного корня. Если два числа пропорциональны двум и трём, то первое число составляет $\frac{2}{3}$ второго. Следовательно, всякому действию в методе IV соответствует определённое действие в методе VI[2].

Из всего этого мы заключаем, что методы IV, V и VI по своей математической сущности равносильны. Отсюда, однако, не следует, что какой-либо из этих методов надо игнорировать, во-первых, потому что ни-

---

[1] Для двух неизвестных общий вид задач на метод подобия, как бы ни были они сложны, выразится уравнениями: $ax \pm by = c$, $x : y = m : n$. Арифметическое решение этих уравнений по методу IV даёт $x = \frac{mc}{am \pm bn}$ (в числе x будет m долей, в числе y будет n долей; ax содержит am долей, by содержит bn долей, всего долей $am \pm bn$, величина каждой доли $\frac{c}{am \pm bn}$; x содержит m таких долей. По методу V

$$x = d \cdot \frac{c}{ad \pm (bnd : m)};$$

пусть $x = d$, тогда $y = nd : m$, $ax \pm by = ad \pm b\,(nd : m)$, и т. д.

Оба эти выражения тождественны.

[2] Для ясности можно проследить справедливость этой мысли, рассматривая шаг за шагом каждое действие при решении какой-нибудь задачи методами IV и VI.

коим образом не следует стеснять ход мысли и научной фантазии учащихся, а во-вторых, потому, что каждый соответственный метод в данной задаче иногда ведёт к цели скорее и проще другого.

Теперь мы докажем, что приёмы III_1, III_2, III_3 и III_4 способны заменять друг друга. Рассмотрим этот вопрос сначала с точки зрения алгебры.

Всякое преобразование уравнения первой степени, вытекающего из арифметической задачи, может быть выражено арифметическим языком и переведено на чисто арифметические соображения. Причина этого та, что в уравнениях первой степени, если только они не представляют частный случай квадратного уравнения (а тогда задача может совсем не разрешиться арифметически), неизвестное всегда остаётся в первой степени, и в преобразованиях встречаются только 4 основные арифметические действия. Так в задаче:

92. Если машинистка будет переписывать по 6 страниц в час, она перепишет в данный срок на 15 страниц больше, чем в рукописи; если же она будет переписывать по 4 страницы в час, то в тот же срок она не допишет 17 страниц. Сколько страниц в рукописи?

перенесение членов уравнения и их приведение переводится на чисто арифметические соображения следующим образом: если бы в первом случае машинистка переписала на 15 страниц меньше, она переписала бы на 17 страниц больше, чем во втором случае; но так как она переписала на 15 страниц больше, то, значит, в первом случае она переписала бы на $(17+15)$ страниц больше, чем во втором случае. Это произошло потому, что она переписывала на $(6-4)$ страницы в час больше; значит, она писала $32:2=16$ час., и т. д. В задаче:

93. Если бы учителю дали ещё столько учеников, сколько у него есть, да ещё полстолько, да четверть столько, да ещё ученика, то у него стало бы 100 учеников. Сколько было учеников у учителя?

освобождение уравнения от дробей отвечает различным арифметическим соображениям. Можно, например, рассуждать так: пусть искомое состоит из 4 долей; тогда 11 таких долей равны 99 и т. д. или: увеличим искомое в 4 раза; тогда вместо 1 ученика надо взять 4, а вместо ста 400 учеников и т. д. Умножение всех членов уравнения на (—1) легко передать языком арифметики так: $(100-x)$ обозначает приход, следовательно, $(x-100)$ будет обозначать расход.

Даже в такой искусственной задаче:

94. Найти две дроби, числители которых равны единице, а знаменатель второй вдвое больше знаменателя первой, так, чтобы сумма этих дробей составила дробь, числитель которой равен 9, а знаменатель больше первого знаменателя на 10.

каждый шаг упрощения уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{9}{x+10}$ может быть переведён на чисто арифметические соображения. В самом деле: две дроби, числители которых равны единице, а отношение их знаменателей равно двум, после сложения дадут в числителе тройку. Но 9 в 3 раза более трёх, следовательно, знаменатель результата должен быть в 3 раза более знаменателя второй дроби и в 6 раз более знаменателя первой дроби. Затем надо найти число, которое увеличивается в 6 раз после прибавления к нему десяти, и т. д.

Заметив этот довольно любопытный факт, а также имея в виду, что корни уравнения не зависят от способа решения уравнения (т. е. способов сложения, вычитания, уравнивания и подстановки), мы приходим к убеждению, что способы III_1, III_2, III_3, III_4, хотя и могут дать различные редакции решения, однако должны привести к одному результату. Отсюда следует, что способы III_1, III_2, III_3 и III_4 способны заменять друг друга[1].

---

[1] Пусть задача приводится к уравнениям $ax+by=c$ и $a_1x+by=c_1$. Решение приёмом III_1 очевидно. Если изменить редакцию задачи, то получим уравнения $ax+by=c$ и $by=a_1x-c_1$, которые, очевидно, решаются приёмом III_2. Из этого вытекает, что приём III_2 способен заменить приём III_1. Потребуются только некоторые добавочные арифметические соображения или, наоборот, часть этих соображений отпадёт.

Заменяя в первом уравнении неизвестное by его значением, получим после преобразований такое же уравнение, как и в первом случае. А так как каждому из этих преобразований найдутся соответствующие арифметические соображения, то всякая задача, решаемая приёмами III_1 и III_2, решается и приёмом III_3, и обратно. Для того чтобы уравнять неизвестные by и a_1x, надо к by прибавить c_1; тогда вторая часть уравнения также должна увеличиться на c_1. Остальное то же, что и в предыдущих случаях. Сказанное легко распространить на задачи со многими неизвестными.

Для примера решим задачу № 56 всеми четырьмя способами. Способ III_1 уже описан.

III_2) Сохранив первое условие, формулируем второе так: „В другой раз путешественник шёл пешком 6 час., пройдя при этом на 64 *км* менее, чем он мог проехать на лошадях за 11 час.“

Сравниваем оба условия. В первый раз путешественник проехал на 5 некоторых линейных единиц больше, чем во второй раз. С другой стороны, в первый раз путешественник прошёл на 144 *км* более без 11 таких же единиц. Отсюда видно, что 16 таких линейных единиц равны 144 *км*.

III_3) 6 час. пешего пути вперёд можно заменить 11 часами езды на лошадях; только тогда путешественник отъедет от города не на 80 *км*, а на $(80 + 64 =)$ 144 *км* (за 16 час. езды на лошадях), и т. д.

III_4) Чтобы уравнять 6-часовой путь пешком с расстоянием, которое проезжает путник верхом за 11 час., надо к первому расстоянию прибавить 64 *км*. Тогда в 16 час. путник проезжает 144 *км*, и т. д.

Можно показать, что приём III_5 может быть сведён к приёмам III_3 и III_4, но так как при этом не возникает должной простоты, то лучше считать приём III_5 самостоятельным, тем более, что во многих вопросах (см. № 65, 66) он не только значительно упрощает решение, но и даёт особую специфическую ясность его.

Из всего сказанного вытекает, что для решения всякой арифметической задачи первой степени достаточно и необходимо знать 5 методов:

1) Метод приведения к единице (или один из его разновидностей: I_2, I_3, I_4).

2) Метод обратности (II).

3) Метод исключения неизвестных (необходимо знать хотя бы один из его пяти приёмов).

4) Один из методов: IV, V, VI.

5) Метод VII (с его тремя приёмами).

Едва ли возможно решить теоретически, который из методов и приёмов является наиболее продуктивным; равным образом невозможно предвидеть, какой метод и приём даст наиболее простое и ясное решение. Насколько указывает моя практика, я бы рекомендовал читателю иметь понятие о всех указанных методах и приёмах — каждый из них, применённый кстати, в каждом частном случае может иметь свою специфическую силу.

На основании этого исследования можно разделить все арифметические задачи по методам их решений.

1) Простейшие задачи — задачи, которые не требуют применения каких-либо особых методов и приёмов, где условия задачи ясно показывают, какие вычисления надо сделать для решения.

2) Задачи на приведение к единице (или общей мере, обратное приведение к единице, или способ отношений).

3) Задачи на метод обратности.

4) Задачи на метод исключения неизвестных (с применением пяти приёмов).

5) Задачи на методы подобия, пропорционального деления или нахождения частей.

6) Задачи на метод преобразования задач (с применением трёх приёмов).

§ 13. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЁМЫ РЕШЕНИЙ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Кроме рассмотренных выше необходимых методов и приёмов решений арифметических задач, существуют и другие, но они не являются в такой степени необходимыми, как выше рассмотренные.

VIII. Метод средних арифметических

Метод средних арифметических основан на решении следующего вопроса:

95. Пусть число 3 повторяется слагаемым несколько раз и к полученной сумме прикладывается число 9, повторенное иное число раз. Взяв среднее арифметическое всех троек и девяток, получаем 7. Сколько раз мы брали слагаемым 3 и сколько раз 9?

Если мы будем брать одни тройки, то среднее арифметическое будет 3, четырёх единиц нехватит; если мы будем брать одни девятки, среднее арифметическое даст две единицы лишних. Из этого следует, что на каждые две тройки надо брать четыре девятки, потому что тогда недостаток 4×2 будет равен излишку 2×4. Следовательно, отношение искомых чисел равно $2:4$ (обратно отношению величин недостатка и излишка). В данном виде задача неопределённа — можно выявить только отношение искомых чисел. Если, кроме того, известно число, меняющееся пропорционально одному из чисел, задача определённа и надо применять методы IV, V, VI.

96. 120 *кг* товара двух сортов стоят 960 руб. Килограмм первого сорта стоит 9 руб., а килограмм второго 7 руб. 40 коп. Сколько было товара каждого сорта?

Средняя цена килограмма товара 960 руб.$:120=$ $=8$ руб. 1 *кг* первого сорта даёт 1 руб. излишка против средней цены, а на килограмм второго сорта нехватает 60 коп. до средней цены. Чтобы уравнять излишек и недостаток, надо на 3 *кг* первого сорта брать 5 *кг* второго (100 коп. $\times 3=60$ коп. $\times 5$); поэтому надо 120 разделить на 2 части, пропорциональные трём и пяти.

Общий способ уравнивать недостаток и излишек состоит в следующем: возьмём в нашем примере количество первого сорта произвольно, например 7 *кг*. Тогда излишек на 7 *кг* будет 1 руб. $\times 7=7$ руб., поэтому второго сорта надо взять столько килограммов, сколько 60 коп. содержится в 7 руб., т. е. $\frac{70}{6}$ *кг*. Общий вес товара будет 7 *кг* $+\frac{70}{6}$ *кг* (вместо данных 120 *кг*).

Задача решается очень удобно методом III_3.

97. В двух стадах 500 коров. Число коров в первом стаде увеличилось на 25%, а во втором — на 12,5%.

Сколько коров в каждом стаде, если общее количество коров увеличилось на 20%?

В первом стаде излишек коров в процентах составляет $25\% - 20\% = 5\%$; во втором стаде недостаток в процентах составляет $20\% - 12{,}5\% = 7{,}5\%$.

Отношение чисел коров в первом и втором стадах обратно пропорционально излишку и недостатку, выраженных в процентах, т. е. 7,5:5 или 3:2.

Приведение задачи к её частному случаю состоит в том, что сводят задачу к её частному случаю; с этой целью заменяют отношение равенством, разность — нулём и т. д. Затем решают задачу, приведённую к частному случаю, и потом переходят к решению задачи в общем виде.

98. Я истратил 40 руб., после этого удвоил остаток своих денег; затем истратил ещё 40 руб. и удвоил получившийся остаток. Когда я ещё раз истратил 40 руб.

и удвоил остаток, у меня стало 2,4 моих первоначальных денег. Сколько у меня было денег вначале?

Эту задачу можно свести к более простой задаче, являющейся частным случаем данной, а именно:

98*. Я истратил 40 руб., после этого удвоил остаток; истратил ещё 40 руб. и снова удвоил остаток. Когда я ещё раз истратил 40 руб. и удвоил остаток, у меня не осталось ничего.

Сколько у меня было денег вначале? (Остаток в задаче № 98—2,4 первоначальных денег заменён нулём.)

Эта задача решается методом обратности, а именно: в результате удваивания последнего остатка получился 0; значит последний остаток 0. Когда я истратил в последний раз 40 руб., у меня не осталось ничего, значит до этого у меня было 40 руб. Эта сумма получилась от удваивания предпоследнего остатка; значит до удваивания у меня было 20 руб. Перед этим я истратил 40 руб., значит у меня было 60 руб., которые также получились от удваивания первого остатка. Следовательно, первый остаток был 30 руб., а мои первоначальные деньги 70 руб. $(30 + 40)$.

После этого перейдём к решению задачи № 98 (к общему виду). Разобьём мои первоначальные деньги на две части. Пусть первая часть будет равна 70 руб.; из неё мы будем вычитать каждый раз по 40 руб. и удваивать остаток. В результате первая часть обратится в 0. На вторую часть расход в 40 руб. не будет влиять, и она каждый раз будет увеличиваться вдвое. В конце концов она увеличится в $1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ раз. Значит, вначале вторая часть равнялась $2{,}4 : 8 = 0{,}3$ моих денег, а первая часть $1 - 0{,}3 = 0{,}7$ моих первоначальных денег. Но первая часть равнялась 70 руб.; 0,7 моих денег равны 70 руб., а все мои первоначальные деньги 70 руб.$:0{,}7 = 100$ руб.

Приведение данных в порядок, яснее обнаруживающий неизвестное

99. Три апельсина дешевле четырёх лимонов на 1 руб., лимон дороже мандарина на 75 коп., а мандарин вдвое дешевле апельсина.

Сколько стоят в отдельности мандарин, лимон и апельсин?

Применяем способ III_8. Заменим в первом условии лимоны мандаринами, тогда получим: три апельсина дороже четырёх мандаринов на 2 руб. $[(0,75 \times 4) - 1]$. Дальше по способу III_5 [1] (из третьего условия) получим: четыре мандарина стоят столько же, сколько два апельсина. Сравнивая эти два условия вычитанием (III_2), получим: один апельсин стоит 2 руб. Значит мандарин стоит $2:2 = 1$ руб., а лимон $1 + 0,75 = 1,75$ (руб.).

IX. Метод остатков [2]

Если даны два произведения неизвестного множимого на два различные множителя, то, чтобы найти множимое, нет надобности знать каждое произведение и каждый множитель; достаточно знать разность произведений и разность множителей. Тогда неизвестное множимое содержится в разности произведений столько раз, сколько единиц в разности множителей, и потому легко находится с помощью деления. Точно так же, если известна разность произведений и разность множимых при одинаковом неизвестном множителе, то множитель будет указывать, сколько раз разность множимых содержится в разности произведений.

100. Для продажи товар расфасован в пачки по 17 *кг* и 38 *кг*. Вторая пачка стоит на 27 руб. 30 коп. дороже.

Сколько стоит каждая пачка?

$38 - 17 = 21$ (*кг*) стоит 27 руб. 30 коп.; значит, 1 *кг* стоит $27,3:21 = 1,3$ (руб.). Первая пачка стоит 1,3 руб.$\times 17 = 22,1$ руб., вторая пачка стоит 1,3 руб.$\times 38 = 49,4$ руб.

101. Если я буду тратить по 40 руб. в день, то на нужный срок мне нехватит 400 руб., если же я буду тратить по 10 руб. в день (в течение того же срока), у меня останется 200 руб.

По скольку рублей в день я могу тратить, чтобы мне хватило денег точно на данный срок?

Первый расход на $400 + 200 = 600$ (руб.) более вто-

---

[1] Или опять применяя III_3, заменив четыре яблока двумя апельсинами в полученном первом условии имеем: три апельсина дороже двух на 2 руб. Значит, один апельсин стоит 2 руб.

[2] Автор придаёт этому методу небольшое значение, так же как и способу метатезиса. Их при желании можно пропустить.

рого; а в день тратилось на $40-10=30$ (руб.) более. Значит, расход рассчитан на $600:30=20$ дней. Всего я имел $(40 \times 20)-400=400$ (руб.), а в день могу тратить $400:20=20$ (руб.).

Способ перестановки известного и неизвестного (метатезис)

102. Продано несколько метров синей материи по 18 руб. за метр и несколько метров чёрной материи по 12 руб., всего на сумму 126 руб. В другой раз продано столько же, сколько в первый раз, метров синей материи по 15 руб. метр и то же количество, что и в первый раз, метров чёрной материи по 9 руб., на общую сумму 102 руб. Сколько продано всего метров материи за оба раза?

Выручка не переменится, если мы будем считать 18 и 15 за количество метров синей материи, а неизвестное её количество — за неизвестную цену метра. Сделав ту же перестановку (метатезис) относительно чёрной материи, мы получим задачу, совершенно схожую с задачей № 64. Решаем её методом III_5.

103. Продано 18 *м* синей ленты и 12 *м* чёрной, всего на 126 руб. В другой раз по тем же ценам продано 15 *м* синей и 9 *м* чёрной на общую сумму 102 руб.

Сколько стоил метр каждой ленты?

Увеличим одну продажу в 3 раза (36:12), другую в 4 раза (36:9), чтобы уравнять в обоих случаях число метров чёрной ленты (наименьшее кратное 12 и 9 равно 36). Сравнивая два полученных условия вычитанием, видим, что 6 *м* синей ленты стоят 30 руб., значит 1 *м* стоит 5 руб. Далее, вставляя в любое из условий цифру стоимости синей ленты, найдём, что 1 *м* чёрной ленты стоит 3 руб.

Возвращаясь к задаче № 102, заключаем, что каждый раз продавалось синей материи по 5 *м*, а чёрной по 3 *м*. За оба раза было продано материи $(5+3)\cdot 2=$ $=16$ (*м*). Задачу № 101 можно решить методом III_4, сделав метатезис, т. е. приняв 40 и 10 за число дней, а неизвестное количество дней за сумму каждодневного расхода. Задача примет вид:

104. Если бы я тратил в течение 40 дней ежедневно некоторую сумму, мне нехватило бы 400 руб., если я буду в течение 10 дней тратить ежедневно ту же сумму, у меня останется 200 руб.

Сколько дней я могу прожить на свои деньги, расходуя ежедневно ту же сумму?

Решение задач с помощью пропорций осуществляется методом отношений (I_4).

Способ „фальшивых" правил

В заключение покажем способ, имеющий только исторический интерес. Л. Ф. Магницкий называл его способом фальшивых или гадательных правил. Замечательно, что Л. Ф. Магницкий ничего не объясняет, а прямо показывает механическое применение этого способа к задачам. Способ фальшивых правил основан на решении задачи:

Имеем неизвестную сумму (или разность) произведения двух неизвестных чисел и другого данного числа (это последнее может быть и нулём). Эта сумма увеличивается на d, если первому неизвестному дать значение, равное c; если же первому неизвестному дать значение, равное c_1, то сумма увеличивается на d_1. Найти первое неизвестное число.

Второе слагаемое не играет никакой роли в изменении рассматриваемой суммы; поэтому когда неизвестное множимое увеличим на $c - c_1$, произведение увеличится на $d - d_1$; если же множимое увеличим на 1, то неизвестное произведение увеличится на $\frac{d-d_1}{c-c_1}$. Но если мы множимое увеличиваем на 1, то произведение увеличивается на число, равное множителю; поэтому неизвестный множитель равен $\frac{d-d_1}{c-c_1}$, а неизвестное множимое равно

$$\left[\left(\frac{d-d_1}{c-c_1}\cdot c\right)-d\right]:\frac{d-d_1}{c-c_1}=\frac{dc_1-d_1c}{d-d_1}. \qquad (1)$$

Легко заметить механическое правило, по которому написано это выражение. Надо написать $c - d$, под этой разностью написать $c_1 - d_1$, перемножить крест на крест („и творяще на крест",— говорил Магницкий), вычесть полученные произведения и разделить на разность избытков d и d_1. Может случиться, что при тех же условиях, давая множимому значение c_1, мы уменьшали неизвестное произведение; тогда искомое множимое будет равно

$$\frac{dc_1 + d_1c}{d + d_1}. \tag{2}$$

Если же оба значения множимого, c и c_1, уменьшают неизвестное произведение, то искомое множимое выразится опять дробью (1).

Если в предложенной задаче множитель, второе слагаемое и вся сумма известны, то тем не менее изложенный способ нахождения неизвестного множимого будет годен, так как ничто не мешает произвольно выбирать значение неизвестного и найти избытки d и d_1. Если мы, кроме того, заметим, что всякая арифметическая задача с одним неизвестным легко приводится к следующей общей форме: „произведение данного числа на неизвестное плюс (или минус) другое данное число даёт третье данное число; найти неизвестное“, то будет легко понять метод фальшивых правил.

В самом деле, дадим неизвестному произвольное значение c; тогда наша сумма станет равной не третьему, а какому-нибудь новому числу, и можно будет найти разность (d) между этим новым и третьим данным числом; дадим неизвестному новое произвольное значение c_1; тогда можно будет найти соответствующий избыток d_1, а потом останется выполнить механически действия, указанные формулой (1) или (2). Если задача имеет несколько неизвестных, то надо исключить (м.III) все неизвестные, кроме одного, затем привести задачу к вышепоказанному общему типу и поступать без всяких рассуждений так, как сказано.

105. Рабочий выполнил апрельский план на 117%. В мае он дал продукции в $\frac{10}{9}$ раза более (при том же месячном плане). На сколько процентов рабочий перевыполнил майский план?

Положим, майский план был перевыполнен на 100%. Тогда вместо 17% (перевыполнение плана за апрель) будет 80% (63% лишних). Пусть майский план перевыполнен на 50%; в этом случае апрельский план перевыполнен на 35% (18% лишних). Искомое число процентов по формуле (1) равно: $\frac{63\cdot 50 - 18\cdot 100}{63 - 18} = 30\%$.

Обыкновенными приёмами задача решается так:

Апрельский план был выполнен на 117%, а майский на $117 \times \frac{10}{9} = 130\%$. Значит, перевыполнение плана в мае $130\% - 100\% = 30\%$.

106. В четырёх ящиках лежит чай; если из каждого вынуть по 9 *кг*, то во всех ящиках останется столько, сколько было в каждом. Сколько чая было в каждом ящике?

Количество чая во всех ящиках одинаково.

Пусть в каждом ящике было 10 *кг*, тогда во всех останется 4 *кг*, вместо 10 (6 *кг* нехватает).

Пусть в каждом ящике было 20 *кг*, тогда во всех останется 44 *кг*, вместо 20 (24 *кг* лишних). Искомое по формуле (2) будет:

$$\frac{20 \cdot 6 + 10 \cdot 24}{6 + 24} = 12 \text{ (}\textit{кг}\text{)}.$$

Обычное решение: заметим, что $9 \textit{ кг} \cdot 4 = 36 \textit{ кг}$ составляют $\frac{3}{4}$ чая, лежавшего во всех ящиках (№ 32); значит, во всех ящиках было чая $36 \textit{ кг} \cdot \frac{4}{3} = 48 \textit{ кг}$, а в каждом ящике $48 \textit{ кг} : 4 = 12 \textit{ кг}$.

107. Два тела, удельный вес которых 11 и 8, весят в воздухе вместе 157 *кг*; будучи погружены в воду, они весят одинаково.

Сколько весит каждое тело в воздухе? (IV или V).

Пусть вес первого тела в воздухе 99 *кг*; тогда вес второго тела в воздухе $157 \textit{ кг} - 99 \textit{ кг} = 58 \textit{ кг}$. В воде первое тело весит $99 \times \frac{10}{11} = 90 \textit{ кг}$, второе тело весит в воде $58 \times \frac{7}{8} = 50\frac{3}{4} \textit{ кг}$, т. е. первое оказывается тяжелее второго на $39\frac{1}{4} \textit{ кг}$. Пусть первое тело весит 110 *кг*, тогда второе весит 47 *кг*. В воде первое тело будет тяжелее второго на $58\frac{7}{8} \textit{ кг}$. Искомый вес первого тела по формуле (1) равен

$$\frac{\left(58\frac{7}{8} \times 99\right) - \left(39\frac{1}{4} \times 110\right)}{58\frac{7}{8} - 39\frac{1}{4}} = 77 \text{ (}\textit{кг}\text{)},$$

а вес второго тела равен $157 - 77 = 80$ (*кг*).

§ 14. ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ НА НАХОЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЙ

108. Из города в деревню я ехал на лошадях 6 час., обратно шёл пешком 10 час. (не считая остановок, движение равномерно). Определить отношение скоростей движения.

109. Если к данному числу прибавить единицу, получится удвоенное число без 6. Найти данное число.

109*. Если из данного числа вычесть 5, получится утроенное число без 25. Найти данное число.

110. Отцу 46 лет, сыну 24 года. Сколько лет назад отец был втрое старше сына?

110*. Отец в 7 раз старше сына, а через 10 лет он будет втрое старше сына. Сколько лет тому и другому?

111. Несколько рабочих при одинаковой производительности труда в определённое число дней выполнили работу. Если бы рабочих было на 2 больше, они выполнили бы работу на 2 дня скорее. Какова разница между числом дней и числом рабочих?

112. На 0,3 моих денег я купил 15 ящиков. Чтобы купить картофеля для наполнения этих ящиков, у меня нехватило 50 руб.

Сколько у меня было денег, если каждый ящик на 10 руб. дешевле входящего в него картофеля?

113. Куплено 5 чехлов и 3 скатерти за 160 руб. Если бы чехлы стоили дешевле на 10%, а скатерти дороже на 15%, то за ту же покупку пришлось бы заплатить 159 руб. За сколько купили каждый чехол?

114. Катер отправился из A вниз по реке и плыл с одинаковой скоростью 10 час. без остановок; затем он двинулся вверх по реке и через 7 час. был в 198 *км* от A.

Найти скорость катера, если скорость течения равна 9 *км* в час.

115. Я ехал из города в деревню со скоростью 11 *км* в час, а обратно — со скоростью 9 *км*.

Сколько километров от города до деревни, если в оба конца я употребил на езду 20 час., не считая остановок?

116. Пароход, равномерно двигаясь, проходит некоторое расстояние по течению в 6 час., а против течения в 10 час.

Найти это расстояние, если скорость течения 6 *км* в час.

116*. Самолёт летел по ветру, скорость которого была 10 *км* в час, и пролетел от A до B в 7 час. Обратно при том же ветре он летел 7 час. 42 мин. Найти расстояние от A до B.

117. Решить задачу № 73*, если вместо суммы 7380 дана разность прироста населения второго и первого села, равная 495.

118. Два бассейна вмещают 660 вёдер воды. Первый бассейн наполняется трубой в 10 час., второй наполняется другой трубой в 12 час., при этом за 7 час. вливается в первый бассейн 0,6 того количества воды, которое вливается во второй бассейн за 8 час.

Сколько вёдер воды вмещает каждый бассейн?

119. Мальчик на вопрос, сколько ему лет, отвечал, что через 13 лет ему будет в 4 раза больше, чем ему было 2 года назад.

Сколько лет мальчику?

120. Мастер сплавил два куска золота, один 500-й пробы, другой 750-й пробы, и получил $32\frac{1}{7}$ *г* сплава объёмом в 2 *куб. см.*

Найти объём каждого куска.

(Плотности: золота 20, лигатуры 12.)

121. Мастер сплавил 3 *куб. см* золота 500-й пробы с 2 *куб. см* золота другой пробы и получил $79\frac{2}{7}$ *г* сплава.

Какой пробы был второй кусок? (Плотности: золота 20, лигатуры 12.)

122. Московский товарный поезд отходит от Москвы в 8 час. и в 12 час. встречает в Калинине ленинградский поезд, прибывающий в Москву в 14 час. 40 мин. Если бы московский поезд отходил на $\frac{3}{4}$ часа позже, то он встречал бы ленинградский поезд в 18 *км* от Калинина. Сколько километров от Москвы до Калинина?

123. Рязанский поезд опоздал и встретил московский поезд на 0,75 часа позже обыкновенного и на 22,5 *км* ближе к Рязани. Скорость поездов одинакова. Найти эту скорость.

124. Из Москвы отправлены в Горький два поезда, в 7 час. и в 9 час.; второй приходит в Горький часом позже.

Сколько километров от Москвы до Горького, если скорости поездов 38 и 41,8 *км* в час?

125. Первый насос выкачивает резервуар вдвое скорее второго насоса. Третий насос выкачивает резервуар в 0,6 того времени, в которое кончают эту работу первый и второй, работая одновременно. Все три насоса вместе выкачивают резервуар в 5 час.

Во сколько времени каждый насос может выкачать резервуар?

126. Два парохода одновременно отправляются из A и B в C (C находится между A и B) и идут без остановок со скоростями 39 *км* и 21 *км* в час. Первый прибывает в C на 29 час. раньше второго.

Сколько километров от A до B, если от B до C на 429 *км* больше, чем от A до C?

127. Я истратил из своих денег 40 руб., после чего удвоил оставшиеся деньги. Когда я ещё истратил 60 руб., денег больше не осталось. Сколько денег у меня было вначале?

128. Станок-автомат в 20 раз производительнее простого станка, но начал работать на 6 часов позже.

Через сколько часов работы станка-автомата его продукция будет в 8 раз больше продукции простого станка?

129. Два самолёта вылетают навстречу друг другу. Первый летит в 1,5 раза скорее, но вылетает на 14 час. позже. При встрече самолётов оказалось, что второй пролетел расстояние в 1,6 раза больше, чем пролетел первый. Сколько часов пролетел каждый самолёт до встречи?

Решение. Дадим первому самолёту ещё 14 час. полёта; тогда пути, пройденные самолётами, будут в отношении $3:2$ или $12:8$, тогда как отношение действительных путей $5:8$. Очевидно, первый 7 частей своего пути $(12-5)$ пролетел в 14 час., а свой действительный путь, состоящий из 5 частей, пролетит в $(14:7)\times5=10$ (час.). Второй самолёт летел $10+$ $+14=24$ (часа). Для ясности можно скорость одного самолёта выбрать произвольно (VII_8).

130. В бассейн проведены 2 крана, из которых первый вливает в час на 9 вёдер меньше второго. Второй кран действовал в 2,5 раза времени меньше первого, но влил в это время воды в 1,3 раза больше первого. Сколько вёдер воды вливает каждый кран в час?

131. Килограмм сушёных яблок первого сорта на 2 руб. дороже килограмма сушёных яблок второго сорта; будучи смешаны в весовом отношении 1 : 3, эти сорта дали смесь ценою в 13 руб. 50 коп. за 1 *кг*. Сколько стоит килограмм яблок каждого сорта?

Решение. Пусть первого сорта был 1 *кг*, тогда второго сорта будет 3 *кг*; 4 *кг* смеси стоят 13,5 руб. $\times$ 4 = = 54 руб. Если бы все яблоки были только второго сорта, то смесь стоила бы 54 руб. — 2 руб. = 52 руб. Значит, 1 *кг* второго сорта стоит 52 руб. : 4 = 13 руб.

132. Трём рабочим заплачено за работу 4625 руб.

Сколько надо получить каждому, если числа дней, проработанных ими, пропорциональны числам 7, 9 и 10, а числа ежедневных часов работы пропорциональны числам 6, 7 и 8?

133. Первый паровоз прошёл на 3600 *км* менее второго. Отношение их скоростей равно 1:2, отношение дней пути 3:2; отношение часов ежедневного движения 5:6. Определить путь, пройденный каждым паровозом. Можно ли определить их скорости?

134. Три колхозника обработали огород площадью 78,48 *а*. Количества рабочих дней этих колхозников пропорциональны 10:11:15; числа ежедневных рабочих часов пропорциональны 6:7:8, производительность труда обратно пропорциональна ряду чисел 3, 5 и 4.

Какую площадь огорода обработал каждый колхозник? (Сначала надо привести в прямую пропорциональность цифры, выражающие производительность труда.)

135. Три брата получили 12 000 руб. Доля первого на 1000 руб. меньше утроенной доли второго, а доля второго на 2000 руб. меньше упятерённой доли третьего. Сколько получил каждый?

136. У меня были деньги трёхрублёвыми государственными казначейскими билетами; 0,375 всех денег я истратил, остальные сдал в сберкассу и через год взял их с начислением 3%. Когда я истратил 30 руб., у меня оказалось денег на 115,5 руб. меньше, чем было вначале. Сколько трёхрублёвых билетов у меня было вначале?

Решение. Заметим, что отношение единицы к 0,375 равно 8:3. Значит, вместо каждых имевшихся 8 трёхрублёвых билетов я сдал в сберкассу 5, и через год получил из сберкассы за каждые 5 сданных билетов 15 руб. 45 коп., т. е. на 8 руб. 55 коп. меньше с каждых имевшихся вначале 8 билетов ($3 \times 8 - 15{,}45$); вначале трёхрублёвых билетов было во столько раз больше 8, во сколько 85,5 (т. е. 115,5—30) более 8,55.

К задаче можно применить метод подобия, но очень осторожно, и в этом отношении задача служит хорошим примером. Было бы ошибочно решать её следующим образом: предположим, что было 200 билетов, тогда всех денег было 600 руб., сдано в сберкассу

$600 \times \frac{5}{8} = 375$ руб., получено из сберкассы $1{,}03 \times 375 =$

$= 386{,}25$ руб., истрачено 30 руб., выходит недостача 243,75 руб., вместо 115,5 руб.; следовательно, билетов было не 200, а менее во столько раз, во сколько 115,5 менее 243,75. Ошибка происходит оттого, что 243,75 и 115,5 не меняются пропорционально числу билетов; числа, меняющиеся пропорционально неизвестному: ($243{,}75 - 30$) и ($115{,}5 - 30$). Поэтому, если решать эту задачу методом подобия, то надо сначала преобразовать её так, чтобы была исключена трата 30 руб. Разница денег будет ($115{,}5 - 30$) руб.

137. Рабочий выполнил план в первый месяц на 110%, во второй на 140%, в третий на 230%. Каков процент выполнения плана за квартал?

137*. Рабочий в первый месяц перевыполнил план на 2%, во второй месяц перевыполнил план на 32%.

На сколько процентов рабочий должен выполнить план в третий месяц, чтобы дать за квартал 140% выполнения?

138. Две машинистки кончили одновременно переписку рукописи, первая писала в день 9 листов, вторая 11 листов. Первая начала на 24 дня раньше и переписала втрое больше второй.

Сколько листов в рукописи?

Решение. Предположим, что первая машинистка писала в день втрое меньше, т. е. 3 листа. Тогда в результате обе они перепишут поровну. Вторая начала переписку на 24 дня позже, а в день переписывала на $11 - 3 = 8$ листов больше.

139. Первый рабочий зарабатывал в день 25 руб., второй 40 руб. и третий 22,5 руб. Первый работал на 3 дня больше каждого из остальных. Сколько они заработали все вместе, если отношение сумм, заработанных первым и вторым, равно 5:6?

140. Отношение двух данных чисел равно 2:3. Если к одному из них прибавить 7, то отношение чисел будет 5:11. Найти данные числа.

141. Несколько человек пришли на бульвар и стали садиться по 5 человек на скамейку; тогда одному человеку нехватило места. Когда же стали садиться на скамейку по 6 человек, то одно место на скамейке и ещё одна скамейка остались пустыми.

Сколько было скамеек и сколько пришло человек?

141*. Стая галок расселась на деревья, по 35 на каждое, и 4 галки остались без места; когда же сели по 38 галок на каждое дерево, осталось 32 свободных места.

Сколько было галок и сколько деревьев?

142. Между двумя пешеходами, движущимися равномерно в одном направлении, 2,5 *км* расстояния. Передний пешеход проходит в 2 часа 8 *км*, второй проходит 1 *км* в 12 мин.

Через сколько часов второй пешеход нагонит первого?

143. Велосипедист проехал в час 15 *км*. Далее он в 48 мин. проехал 14 *км*. Как изменилась его часовая скорость?

144. Если к числу прибавить 20, утроить результат, вычесть 160, остаток разделить на 2, получим первоначальное число. Определить его.

145. Колхозники до полудня обработали часть поля; половина их после полудня окончила обработку его, а другая половина обработала второе поле, вдвое меньшее первого, так что от второго поля осталось работы одному человеку на один день. До полудня работали столько же часов, сколько после полудня, и все работали одинаково. Сколько было колхозников?

146. Задача Эйлера[1]. Отец разделил между детьми свои деньги следующим образом: первому досталось 1000 руб. и 0,1 часть оставшихся денег, второму 2000 руб. и 0,1 нового остатка, третьему 3000 руб. и 0,1 нового остатка, и т. д.

---

[1] Задача дана с небольшими изменениями.

Сколько получил каждый, если первый и второй получили поровну?

Решение. Пусть все деньги разделены на 100 частей. Первый получил десять частей и ещё 900 руб. Когда второму дали 2000 руб., то от всех денег осталось 90 частей без 2900 руб., значит, второй получил 9 частей да ещё 1710 руб. Второй получил одной частью меньше, зато на 810 руб. более. Следовательно, одна часть равна 810 руб. Первый получил $(810 \times 10) + 900 = 9000$ (руб.). Легко убедиться, что все остальные дети получили тоже по 9000 руб.

147. Два насоса вместе выкачивают воду из резервуара, вмещающего 400 вёдер, в 5 раз скорее, чем один первый насос; второй насос выкачивает воду из резервуара на 30 мин. скорее первого. Сколько вёдер выкачивает каждый насос в минуту?

148. Рабочий получил зарплату, истратил 100 руб., потом получил выигрыш по облигации, равный $\frac{1}{2}$ оставшихся у него денег; когда он истратил ещё 100 руб., у него осталась сумма, равная зарплате. Определить её.

149. Имеем спирт 60°, 50° и 40° — всего 260 *л*. Смешав весь первый сорт с 0,25 второго сорта, получаем спирт 54°; смешав остаток второго сорта с третьим, получаем спирт 48°.

Сколько было литров спирта каждого сорта?

150. Если к множимому прибавить 6, а от множителя отнять 4, произведение не изменится. Отношение множимого к множителю 3:4. Найти произведение.

151. С текущего счёта *A* перевели на текущий счёт *B* 40 руб., после чего на текущем счету *B* стало столько, сколько было на текущем счету *A*. Затем с текущего счёта *B* перевели на текущий счёт *A* столько, сколько там осталось, и тогда на обоих счетах стало поровну. Сколько было вначале на каждом текущем счету?

152. В две равные бочки налито одинаковое вино. Из первой продано на 180 руб., а из второй на 400 руб. После этого в первой бочке осталось вина втрое больше, чем во второй. Определить цену всего вина.

152*. Со станции *A* и *B* отправляются по поезду на станцию *C*, которая от *B* втрое дальше, чем от *A*. Когда первый поезд прошёл 60 *км*, а второй 240 *км*, то первому поезду осталось до C вдвое меньше пути, чем второму.

Найти расстояние от A до C.

153. На текущих счетах A и B лежало 640 руб. С текущего счёта A перевели на счёт B 40 руб., затем когда со счёта B перевели на счёт A сумму, втрое большую, чем оставалось на счету A, на счету B стало столько, сколько было вначале на счету A.

Определить начальные суммы счетов.

154. Два пешехода выходят одновременно из деревень A и B, двигаясь равномерно; они встречаются через 10 час. Первый попадает в B через 5 час. после встречи.

Во сколько часов второй может пройти расстояние AB?

155. В двух сёлах население увеличилось: в первом на 28%, во втором стало 1800 человек вместо 1500. В среднем население увеличилось на 25%.

Сколько жителей было в первом селе до увеличения населения?

156. В трёх сёлах 9400 жителей: их плотности населения относятся, как 5:6:8, а их территории, как 10:7:12.

Сколько будет жителей во всех трёх сёлах через год, если проценты годового прироста населения 5%, 4% и 6%?

157. Два путника вышли одновременно из A и B. Когда они встретились в C, первому осталось до B 4 часа пути, а второму до A 9 час. Сколько километров проходил каждый в час, если расстояние AB равно 45 *км*?

158. Во втором международном шахматном турнире в Москве играло 20 шахматистов (по одной партии друг с другом).

Сколько партий было сыграно в турнире?

159. За синюю и чёрную материю заплачено 84 руб.

Сколько заплачено за каждую материю, если первая вдвое дороже второй и её было в $\frac{2}{3}$ раза больше?

160. В одном стаде голов в три раза больше, чем в другом. Какую часть второго стада надо перевести в первое, чтобы во втором было в 7 раз меньше, чем в первом?

161. A играл в шахматы; за каждую выигранную партию ему засчитывалось 20 очков, за каждую проигранную партию с него снималось 30 очков. Когда A выиграл на 4 партии больше, чем проиграл, он набрал 10 очков. Сколько партий было сыграно?

162. Два поезда длиной в 200 *м* и 100 *м* двигаются по параллельным путям равномерно со скоростью 30 *км* и 60 *км* в час.

Сколько времени один поезд идёт мимо другого? (или рядом с другим — 2 случая).

163. Два поезда двигаются навстречу друг другу, одновременно выходя со станций A и B по параллельным путям. Длина первого поезда 100 *м*, второго 125 *м*, расстояние AB равно 270 *км*.

Через сколько часов они встретятся, если при встрече один поезд идёт мимо другого 15 сек.?

163*. Два поезда, выходя одновременно со станций A и B, двигаются в одном направлении по параллельным путям. Длина первого поезда 80 *м*, второго 70 *м*, расстояние AB равно 36 *км*.

Через сколько времени паровоз первого поезда нагонит паровоз второго, если, обгоняя, первый поезд идёт мимо второго 30 сек.?

164. Из A в B 3 минуты телефонного разговора стоят 3 руб. 90 коп.; за каждую последующую минуту приплачивается $\frac{1}{3}$ этой суммы; срочный разговор в 3 раза дороже, сверхсрочный — в 9 раз. Первый раз я говорил сверхсрочно 5 мин., второй раз срочно, и из моих 90 руб. у меня осталось на два простых разговора по 5 мин. и ещё 6 руб. 80 коп. Сколько минут я говорил второй раз?

165. Два путешественника выезжают из A и B навстречу друг другу. Отношение числа дней пути каждого до их встречи $3:2$. Всё расстояние AB первый путешественник проезжает в 12 дней, второй — в 24 дня.

Сколько дней после встречи второй путешественник проедет до A?

166. Два путешественника выезжают из A и B навстречу друг другу и встречаются через 4 дня после выезда второго. Первый может проехать AB в 15 дней, а второй в 12 дней.

На сколько дней первый выезжает раньше второго?

167. Одна труба наполняет бассейн за 20 час., другая опорожняет его за 30 час. Когда обе трубы были попеременно открыты, первая 12 час., а вторая 8 час., в бассейне оказалось 750 гектолитров воды. Какова вместимость бассейна?

167*. Одна труба наполняет бассейн за 20 час., другая опорожняет его за 20 час. Когда первая труба была открыта 12 час., а вторая 8 час., в бассейне оказалось 750 гектолитров воды.

Какова вместимость бассейна?

168. Сколько надо приплавить серебра 700-й пробы к 10 сантиграммам серебра 840-й пробы, чтобы сплав вышел 750-й пробы?

169. *A* купил 3 стакана ягод; *B* купил 2 стакана тех же ягод. К ним присоединился *C*, и втроем они разделили все ягоды поровну. За свою долю *C* внёс 5 руб.

Как разделить эти деньги между *A* и *B*?

170. Двое имели 8 руб. 20 коп. Первый истратил сумму, равную $\frac{3}{4}$ денег второго, а второй истратил сумму, равную $\frac{2}{3}$ денег первого; после этого у них осталось поровну.

Сколько денег было у каждого?

(Вместо равенства остатков можно дать их сумму, разность или отношение.)

171. Две равносильные моторные лодки выходят одновременно навстречу друг другу; первая, идя по течению, движется вдвое скорее. Через 3 часа движения первая оказалась от середины пути на 36 *км* ближе второй. Определить скорость течения.

172. Паровоз проходит некоторое расстояние за 3 дня, двигаясь по 20 час. в день; если бы он проходил в 1 час на 6 *км* больше, то то же расстояние он мог бы пройти за 4 дня, двигаясь ежедневно по 12,5 часа. Определить это расстояние.

173. Разделить 290 на пять частей так, чтобы последовательные отношения этих частей были: 9:10, 2:3, 3:2 и 5:7.

174. Пароход проходит некоторое расстояние по течению за 10 час.; щепка проплывает то же расстояние по течению за 60 час.

Во сколько часов тот же пароход пройдёт это расстояние против течения?

175. Если самолёт будет лететь со скоростью 200 *км* в час, он прилетит на $\frac{1}{2}$ часа скорее, чем нужно; если он будет лететь со скоростью 150 *км* в час, он опоздает на час. Какова длина пути?

176. Рабочий увеличил свою производительность на 50%.

Сколько процентов месячного плана он выработал за $\frac{3}{4}$ месяца?

177. На текущие счета A и B внесены суммы, находящиеся в отношении 2 : 3. В первый год с текущего счёта A взято 10%, во второй год 20% остатка. С текущего счёта B в первый год взято 30%, во второй внесено 70 руб. После двух лет на счету B оказалось на 400 руб. больше, чем на счету A.

Сколько внесено на каждый текущий счёт вначале? (Процентные начисления не учитываются.)

178. Мастер сплавил кусок золота 500-й пробы с куском золота 750-й пробы. Первый кусок был на 1 *куб. см* больше; каждый же кубический сантиметр сплава весил 16 *г*. Найти объём каждого куска. (Плотности: золота 20, лигатуры 12.)

179. Чистое золото, будучи сплавлено с лигатурой в объёмном отношении 21 : 5, даёт золото 875-й пробы.

Какой пробы будет сплав, если взять чистое золото и ту же лигатуру в объёмном отношении 9 : 10?

180. Мастер имел кусок серебра 800-й пробы и сделал из него кусок серебра 560-й пробы; оставшееся серебро оказалось 840-й пробы.

Найти весовое отношение полученных кусков серебра 560-й и 840-й пробы.

ОТВЕТЫ

1. $113\frac{6}{7}$.
2. 206 руб.
3. 10.
4. 30; 1000; 3000.
5. 10; 100; 10; 100; 1000; 100.
6. 70; 2500; 350; 800; 3000; 2500.
7. 17 дней; 240 час.
8. 24; 22; 39.
9. 157 203; нет.
10. 3.
10*. 3 в других случаях 4. Если переменить 21 на 19, — всегда 3; на 25,— всегда 4; и далее с увеличением цифры рабочих дней на 6, ответ увеличивается на 1.
11. 6-ю; 24; 18; 12.
12. 10-ю.
14. На 103%.
14*. 0.
15. На 10°.
15*. 5 сек.
16. 23 *км.*
17. На одного.
18. На 8 *км.*
18*. На 34 коп.
19. 6 *км.*
20. 480 руб.
21. На 96 голов (на 73).
22. Первый на 40 *км.*
23. В 48 *км* от Рязани.
24. 11 сотен.
24*. $\frac{1}{2}$ *кг.*
25. 127.
25*. 12 час.
26. 17 кроликов, 10 фазанов.
27. 7 *км.*
28. 13 час. 20 мин.
29. В 2,25 раза.
30. Уменьшится на $\frac{1}{6}$.
31. 3:2.
31*. В $\frac{3}{2}$ раза (в 4 раза).
32. В 3 раза.
33. 1) То же через неделю.
2) На 168 *км* ниже (по течению реки).
34. То же через 5 час.; на 35 *км* по ветру; встреча через 5 час., первый аэроплан пролетит на (5×скорость ветра) *км* менее, второй на столько же больше.
35. 10 час; 20 час.
36. 4 мешка.
36*. 12 *км.*
37. В $\frac{3}{2}$ раза.
38. 10 орехов.
38*. 9.
39. Свернуть материю пополам и от одной части отрезать её половину.
40. *А* на 64 руб.
41. 14 *см.*
41*. 105 *км*; $1\dot{3}\frac{6}{35}$ *см.*
42. На 5 *км.*
43. 80 коп.
44. 0.
45. 8 *кг.*
46. 24 *км.*
47. 20 руб.
48 и **48*.** 3 дня.
49. 100 *м.*
49*. 560 *куб. м.*
50. 13 руб.
50*. 1575 руб.
51. 60 *м.*
52. 14,4 *куб. м.*
53. 113.
54. 850 руб.
54*. 630.
55. 60 руб. и 440 руб.
55*. 99; 51; 27; 15.
56. 9 *км* в час.
57. 1 руб. и 2 руб.
58. *А*—135 руб., *В*—65 руб., *С*—85 руб.

59. 16 руб., 12 руб., 10 руб.
59*. 36 руб. и 18 руб.
60. 2 руб. и 1,5 руб.
61. 127, 146, 275.
62. 8 деталей.
63. 8 раз.
63*. Через 12 лет.
64. 1 руб. 75 коп.
65. Индеек 40, гусей 50.
65*. Индеек 5, гусей 15.
66. 35 *м*.
66*. 5 *м* и 8 *м*.
67 и **67*.** 268 *куб. см* и 320 *куб. см*.
68. 96, 144, 240.
69. 60 и 160.
70. 105, 126, 144.
70*. 180 руб., 200 руб., 240 руб.
71. 15 : 18 : 20.
71*. 30, 24, 56.
72. 12 руб., 36 руб., 96 руб.
73. 590 руб.
73*. 1500, 1650, 2250.
74. 30 *км* и 40 *км*.
74*. 98 руб., 78 руб. и 130 руб.
75. $\frac{1}{5}$ *куб. см.* и $\frac{7}{5}$ *куб. см.*
76. 160 *км*.
77. 10 000 руб.
77*. 10*a*.
78. 2000 руб. и 1500 руб.
79. 40 час.
80. 46 и 14.
1) на 32 коп.
2) 40.
3) 50 и 10.
81. 445 руб., 430 руб. и 120 руб.
82. 3 часа и 14 час.
83. 10 и 27.
84. 7 *см*.
84*. 7.
85. 6 рабочих.
85*. 6.
86. В 6 час. и 4,5 часа.
87. 21.
88. В десятиугольнике.
89. 9 *км* и 12 *км*.
90. 10.
91. 400 и 600.
92. 81.
93. 36.
94. $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.
95. Задача неопределённа, можно выявить лишь отношение искомых чисел: 2 : 4.
96. 45 *кг* и 75 *кг*.
97. 300 и 200.
98. 100 руб.
98*. 70 руб.
99. 1 руб., 1 руб. 75 коп. и 2 руб.
100. 22,1 руб. и 49,4 руб.
101. 20 руб.
102. 16 *м*.
103. 5 руб. и 3 руб.
104. 20 дней.
105. 30%.
106. 12 *кг*.
107. 77 *кг*, 80 *кг*.
108. 10 : 6.
109. 7.
109*. 10.
110. 13 лет (см. задачу 63).
110*. 35 и 5 лет (III_4).
111. 2.
112. 250 руб. (см. задачу 76).
113. 20 руб. (III_5, метатезис).
114. 15 *км* в час (III_1).
115. 99 *км* (IV).
116. 180 *км*.
116*. 1540 *км*.
117. 1500, 1650, 2250.
118. 240 и 420.
119. 7 лет.
120. По 1 *куб. см* (№ 75).
121. 750-й (№ 75).
122. 160 *км* (в 12 час. московский поезд был в 30 *км* от Калинина, № 23).
123. 30 *км* в час.
124. 418 *км* (III и IV).
125. 20, 40 и 8 час. (V и VI).
126. 1209 *км*. Решение. 1-й пароход проходит на $(21 \times 29) - 429 = 180$ (*км*) более 2-го, проходя в час на 18 *км* больше (№ 22, IX).
127. 70 руб. (II).
128. Через 4 часа.
129. 10 и 24 (VII_8).
130. 4 и 13 (см. № 129).
131. 15 руб. и 13 руб.
132. 1050 руб.; 1575 руб. и 2000 руб.
133. 6000 *км* и 9600 *км*. Определить скорость нельзя.
134. 24*a*, 18,48*a* и 36*a*.
135. 8, 3 и 1 тыс. руб.

136. 80.
137. 160%.
137*. 186%.
138. 396 листов.
139. 862 руб. 50 коп.
140. 10 и 15.
141. 8 скамеек, 41 человек.
141*. 424 галки, 12 деревьев.
142. Через 2,5 часа.
143. Увеличилась на 2,5 *км*.
144. 100 (II).
145. 8 (VI).
146. 9000 руб.
147. 10 и 40 вёдер (V и VI).
148. 500 руб.
149. 32 *л*, 192 *л* и 36 *л*.
150. 48.
151. 60 руб. и 20 руб.
152. 1020 руб. (см. № 63, 69, III_4).
152*. 120 *км* (см. № 152).
153. 160 руб. и 480 руб.
154. 30 час.
155. 2500 и 1500.
156. 9897.
157. 4 *км*, 5 *км* и 3 *км* (см. № 90).
158. 190.
159. 48 руб. и 36 руб.
160. $\frac{1}{2}$.
161. 18.
162. 12 сек. и 36 сек.
163. Через 5 час.
163*. Через 2 часа.
164. 3 мин.
165. 18 дней.
166. На 6 дней.
167. 2250 *гкл.*
167*. 3750 *гкл.*
168. 18 *сантигр.*
169. 4 руб. и 1 руб.
170. 4 руб. 20 коп. и 4 руб.
171. 6 *км* в час.
172. 1800 *км*.
173. 45, 50, 75, 50 и 70.
174. 15 час.
175. 900 *км*.
176. 112,5%.
177. 1000 руб. и 1500 руб.
178. 8 *куб. см* и 7 *куб. см*.
179. 600-й.
180. Лучше дать этой задаче такую форму: „В каком весовом отношении надо сплавлять серебро 560-й и 840-й пробы, чтобы получить серебро 800-й пробы?"
Ответ. 1:6 (VIII).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор *В. С. Капустина.* Техн. редактор *М. И. Миронцева.*

Подписано к печати 29/IX 1953 г. А 04400. Тираж 50 тыс. экз. Бумага 84 $\times$ 108$^1/_{32}$. Бумажных листов 1,19. Печатных листов 3,9. Уч.-изд. листов 3,9. Заказ № 760. Цена 1 р. 05 к.

Отпечатано с матриц типографии № 3 Ленгорполиграфиздата
в типографии № 2 Ленгорполиграфиздата.
Ленинград, Социалистическая, 14. Заказ № 2424