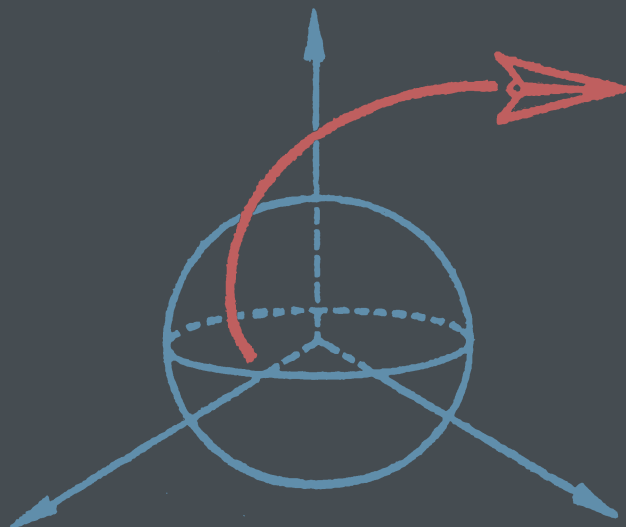


**Т**еория инерциальной навигации

**К**орректируемые системы

В.Д.АНДРЕЕВ

# **Т**еория инерциальной навигации



**К**орректируемые  
системы

В. Д. АНДРЕЕВ

# Теория инерциальной навигации

Корректируемые  
системы



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1967

6 Т5.2

А 65

УДК 629.13.014.69-506.4

**Теория инерциальной навигации (корректируемые системы).** Андреев В. Д. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1967, 648 стр.

Книга посвящена систематическому рассмотрению основных задач теории инерциальных навигационных систем, корректируемых от дополнительных источников информации (от высотомера, доплеровского измерителя скорости, лага и т. д.). Главное внимание уделяется исследованию уравнений ошибок инерциальных систем при различных способах коррекции. Основная цель этого исследования — анализ устойчивости и изучение зависимости ошибок определения инерциальной системой навигационных параметров (координат, скорости, ориентации) от инструментальных погрешностей как элементов инерциальной системы, так и источников дополнительной информации, используемой для коррекции.

Глава 1 содержит изложение основных результатов теории автономных инерциальных систем.

Глава 2 посвящена теории инерциальных систем, в которых используется информация от высотомера о расстоянии до поверхности Земли. Рассматриваются как инерциальные системы с тремя произвольно ориентированными ньютонометрами (акселерометрами), так и системы с двумя ньютонометрами, расположенными горизонтально.

В главе 3 дается теория гиromаятниковых систем М. Шулера. Доказывается их полная динамическая аналогия с инерциальными системами, содержащими два горизонтально расположенных ньютонометра.

В главе 4 рассматриваются упрощения уравнений инерциальных систем, обусловленные малостью сжатия Земли и близостью ее поля тяготения к сферическому, а также упрощения, связанные с априорной информацией о характере движения объекта (близость траектории к поверхности Земли, к некоторой ортодромии на ее поверхности, приблизительное знание скорости движения и т. д.).

Глава 5 книги посвящена теории инерциальных систем, в которых наряду с коррекцией от высотомера применяется коррекция от доплеровского измерителя скорости или от лага.

В главе 6 рассматривается астрономическая коррекция (астроинерциальные системы) и совместная астро-доплеровская коррекция.

Глава 7 содержит исследование динамики автономных и корректируемых инерциальных систем при случайном характере инструментальных погрешностей элементов инерциальных систем и устройств коррекции.

Книга непосредственно примыкает к изданной в 1966 г. издательством «Наука» книге В. Д. Андреева «Теория инерциальной навигации (автономные системы)». Она основана на работах автора выполненных в последние годы.

Табл. 3. Илл. 38. Библ. 114 назв.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	9
Глава 1	
Необходимые сведения из теории автономных систем инерциальной навигации . . . . .	15
§ 1.1. Уравнения идеальной работы систем инерциальной навигации . . . . .	15
1.1.1. Основное уравнение инерциальной навигации и интегрирование его в неизменно ориентированных осях (15).	
1.1.2. Основные системы координат, связанные с Землей (19).	
1.1.3. Гравитационное поле Земли (24).	
1.1.4. Уравнения идеальной работы инерциальных систем, определяющих декартовы координаты объекта (28).	
1.1.5. Определение криволинейных координат (32).	
1.1.6. Уравнения идеальной работы в ортодромических, геоцентрических и географических координатах (38).	
§ 1.2. Уравнения ошибок систем инерциальной навигации . . .	46
1.2.1. Возмущенный режим работы инерциальной системы. Основные инструментальные погрешности (46).	
1.2.2. Уравнения ошибок определения координат (47).	
1.2.3. Различные представления уравнений ошибок определения координат (52).	
1.2.4. Уравнения ошибок ориентации осей чувствительных элементов и определения заданных направлений в пространстве (55).	
§ 1.3. Некоторые результаты анализа уравнений ошибок автономных инерциальных систем . . . . .	58
1.3.1. Вторая группа уравнений ошибок (58).	
1.3.2. Исследование устойчивости уравнений первой группы в случае движения объекта по параллели (61).	
1.3.3. Решение первой группы уравнений ошибок для случаев неподвижного объекта и движения объекта по дуге неизменно ориентированного большого круга (64).	
1.3.4. Интегрирование уравнений первой группы для кеплерова движения объекта (72).	
1.3.5. Зависимость ошибок определения координат и ориентации объекта от основных инструментальных погрешностей и погрешностей начальных условий (79).	

## Глава 2

<b>Инерциальные системы, в которых используется дополнительная информация о расстоянии до поверхности Земли (коррекция от высотомера) . . . . .</b>	<b>88</b>
§ 2.1. Общие соображения об использовании дополнительной информации в инерциальных системах . . . . .	88
§ 2.2. Уравнения идеальной работы и уравнения ошибок инерциальных систем, корректируемых от высотомера . . . .	95
2.2.1. Схемы с тремя ньютонометрами (акселерометрами) (95). 2.2.2. Схемы с двумя ньютонометрами (99).	
§ 2.3. Исследование устойчивости и интегрирование первой группы уравнений ошибок схем с двумя ньютонометрами	108
2.3.1. Анализ устойчивости в случаях, приводящих к уравнениям с постоянными коэффициентами (108). 2.3.2. Решение первой группы уравнений ошибок в случаях, приводящих к уравнениям с постоянными коэффициентами (116). 2.3.3. Интегрирование первой группы уравнений ошибок для случая кеплерова движения объекта (124). 2.3.4. Исследование уравнений первой группы при произвольном движении объекта вблизи земной поверхности (130).	
§ 2.4. Исследование устойчивости и интегрирование первой группы уравнений ошибок для корректируемой от высотомера схемы с тремя ньютонометрами . . . . .	141
2.4.1. Анализ устойчивости (141). 2.4.2. Об учете сил полной внутренней диссипации (144). 2.4.3. Об устойчивости уравнений первой группы при произвольном движении объекта вблизи земной поверхности (147). 2.4.4. Решение уравнений первой группы для случая произвольного движения объекта на постоянном удалении от центра Земли (148). 2.4.5. Интегрирование первой группы уравнений ошибок для кеплерова движения объекта (152).	
§ 2.5. Зависимость ошибок от инструментальных погрешностей и погрешностей начальных условий. Сравнение с автономными инерциальными системами . . . . .	160
2.5.1. Зависимость ошибок определения координат и ориентации от погрешностей начальных условий (160). 2.5.2. Ошибки от инструментальных погрешностей ньютонометров и гироскопов (166). 2.5.3. Ошибки от погрешностей информации о расстоянии до поверхности Земли (171).	

## Глава 3

**Маятниково-гироскопические системы Шулера. Аналогия с инерциальными системами с двумя ньютонометрами . . 175****§ 3.1. Физический маятник Шулера . . . . . 175**

3.1.1. Условия существования положения относительного равновесия, в котором ось маятника совпадает с геоцентрической вертикалью (175). 3.1.2. Уравнения малых колебаний маятника Шулера около положения относительного равновесия (185). 3.1.3. Уравнения свободных колебаний маятника Шулера около положения относительного равновесия при конечных величинах отклонений (193).

**§ 3.2. Двухгироскопическая вертикаль и гиригоризонткомпас Геккелера — Аншютца . . . . . 196**

3.2.1. Двухгироскопическая вертикаль (196). 3.2.2. Гиригоризонткомпас Геккелера — Аншютца (204).

**§ 3.3. Произвольная маятниково-гироскопическая система Шулера . . . . . 210**

3.3.1. Условия существования положения относительного равновесия (210). 3.3.2. Возмущенное движение вблизи положения относительного равновесия (213).

**§ 3.4. Аналогия маятниково-гироскопических систем Шулера с инерциальными системами с двумя ньютонометрами . 218**

3.4.1. Сопоставление первой группы уравнений ошибок с уравнениями колебаний маятниковой системы около положения относительного равновесия (218). 3.4.2. Достаточные условия устойчивости инерциальной системы с двумя ньютонометрами (224). 3.4.3. О демпфировании колебаний маятниково-гироскопической системы Шулера (227).

## Глава 4

**Об упрощениях уравнений идеальной и возмущенной работы инерциальной системы с двумя ньютонометрами . . 231****§ 4.1. Общие соображения . . . . . 231****§ 4.2. Упрощения в инерциальной системе, определяющей ортодромические координаты объекта . . . . . 233**

4.2.1. Точные уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок (233). 4.2.2. Некоторые частные случаи азимутальной ориентации ньютонометров (248). 4.2.3. Упрощения, вытекающие из близости формы Земли к сфере (251). 4.2.4. Упрощения, связанные с близостью траектории движения объекта к поверхности Земли и

к плоскости ортодромии (259). 4.2.5. О различных способах учета горизонтальной составляющей поля тяготения Земли (270). 4.2.6. Другие упрощения (280).	
§ 4.3. Упрощения в инерциальной системе, определяющей географические координаты объекта . . . . .	284
4.3.1. Точные уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок (284). 4.3.2. Возможные упрощения уравнений определения географических координат (291).	
§ 4.4. Определение ортодромических координат при ориентации ньютонометров в плоскости географического горизонта . . . . .	293
<b>Глава 5</b>	
<b>Коррекция инерциальных систем от доплеровского измерителя скорости (или от лага) . . . . .</b>	<b>305</b>
§ 5.1. Проблема асимптотической устойчивости инерциальной системы. Скоростные девиации . . . . .	305
§ 5.2. Необходимые сведения о доплеровском измерителе скорости . . . . .	313
§ 5.3. Демпфирование инерциальной системы с использованием информации о скорости от доплеровского измерителя . . . . .	317
5.3.1. Уравнения невозмущенной (идеальной) работы. Уравнения ошибок (317). 5.3.2. Уравнения идеальной работы и уравнения ошибок схемы, определяющей ортодромические координаты (323). 5.3.3. Исследование устойчивости (329). 5.3.4. Решение уравнений ошибок. Зависимость ошибок инерциальной системы от инструментальных погрешностей (344).	
§ 5.4. Изменение собственных частот инерциальной системы, корректируемой от доплеровского измерителя . . . . .	353
5.4.1. Уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок (353). 5.4.2. Анализ уравнений ошибок (357).	
§ 5.5. Демпфирование инерциальной системы с одновременным изменением собственных частот . . . . .	362
5.5.1. Уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок (362). 5.5.2. Случай ортодромических координат (371). 5.5.3. Исследование устойчивости (379). 5.5.4. Решение уравнений ошибок. Зависимость ошибок от инструментальных погрешностей. Выбор величин коэффициентов коррекции (393).	
§ 5.6. Дополнительные замечания о доплеровской коррекции инерциальных систем . . . . .	404
5.6.1. Некоторые варианты коррекции инерциальной системы, построенной на основе управляемой гироскопа	

формы (404). 5.6.2. Допплеровская коррекция с повышением порядка уравнений ошибок. Линейная коррекция с переменными коэффициентами. Нелинейная коррекция (415).

## Глава 6

**Астрономическая коррекция систем инерциальной навигации. Совместная астро-доплеровская коррекция . . . . . 422**

§ 6.1. Вводные соображения . . . . . 422

§ 6.2. Движение Земли. Определение направлений на небесные тела в связанных с нею системах координат . . . . . 424

6.2.1. Упрощенное описание движения Земли (424).

6.2.2. Определение направлений на небесные тела (426).

6.2.3. Движение Земли и измерение времени (434).

6.2.4. Определение местоположения на Земле посредством астрономических наблюдений (438).

§ 6.3. Коррекция инерциальной системы по двум звездам . . . 439

6.3.1. Информация, получаемая при наблюдении звезд посредством телескопов. Возможные способы астрокоррекции (439). 6.3.2. Линейная одновременная коррекция по двум звездам (446). 6.3.3. Релейная одновременная коррекция по двум звездам (455). 6.3.4. Поочередная коррекция по двум звездам (458). 6.3.5. О формировании корректирующих моментов. (461).

§ 6.4. Схемы астрокоррекции с фазовой индикацией звезд . . 463

6.4.1. Принцип действия фазовой схемы индикации (463).

6.4.2. Динамика замкнутой фазовой схемы астрокоррекции вблизи положения равновесия. Исследование устойчивости (468).

§ 6.5. Совместная астро-доплеровская коррекция . . . . . 476

6.5.1. Схема с одновременной подачей сигналов доплеровской и астрокоррекции на моментные датчики гироскопов (476). 6.5.2. О возможности астрономической коррекции по одной звезде (487).

## Глава 7

**Динамика инерциальных систем с учетом случайного характера инструментальных погрешностей . . . . . 490**

§ 7.1. Основные соотношения корреляционной теории случайных процессов . . . . . 490

§ 7.2. Влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки автономных инерциальных систем . . . . . 501

7.2.1. Случай неподвижного объекта (501). 7.2.2. Движение спутника по круговой орбите (514).



§ 7.3. Влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки корректируемых инерциальных систем . . . . .	530
7.3.1. Коррекция от высотомера (530). 7.3.2. Совместная коррекция от высотомера и доплеровского измерителя скорости (546). 7.3.3. Одновременная коррекция от высотомера и астро-доплеровская коррекция (560).	
§ 7.4. Динамика фазовой схемы астрокоррекции при воздействии случайных помех . . . . .	573
Приложение I	
Рассеянная атмосферой солнечная радиация как пример детерминированных помех в фазовой схеме астрокоррекции . . . . .	580
Приложение II	
Об одном способе навигации с помощью гиropolукомаса и доплеровского измерителя скорости . . . . .	612
Приложение III	
Об управлении движением объекта по показаниям ньютонометров . . . . .	628
Литература . . . . .	642

## Предисловие

Развитие авиации, ракетной техники и морского флота поставило новые требования перед средствами навигации и управления, такие, как высокая точность, автономность, универсальность, малое время подготовки, помехозащищенность, а иногда и скрытность работы.

Последние годы характерны значительным продвижением в области создания средств навигации и управления движущимися объектами. Наряду с разработкой других принципов особое внимание уделяется при этом инерциальным системам навигации, в которых текущее местоположение объекта определяется интегрированием измеряемых на его борту ускорений.

Инерциальные системы являются сейчас наиболее перспективным и универсальным средством автономной навигации. Однако динамические свойства полностью автономных инерциальных систем таковы, что погрешности их элементов приводят к нарастающим со временем ошибкам определения координат.

При длительном времени непрерывной работы навигационной системы ошибки определения навигационных параметров автономной инерциальной системой могут выйти за рамки требуемой точности. Поэтому предусматривается, как правило, коррекция инерциальной системы от дополнительных источников информации: астрокоррекция, коррекция от высотомера и доплеровского измерителя скорости, от радионавигационных средств.

Введение в инерциальную систему сторонней корректирующей информации изменяет уравнения невозмущенной работы (алгоритм) навигационной системы. Меняется также

динамика ее возмущенной работы, т. е. изменяются ее уравнения ошибок. При этом различные способы ввода информации могут приводить к различным изменениям уравнений ошибок, т. е. в конечном счете к различным формам зависимости ошибок системы от ее инструментальных погрешностей и погрешностей вводимой информации, причем число различных вариантов достаточно велико.

Ряд частных задач, относящихся к теории корректируемых инерциальных систем, рассмотрен в опубликованных работах \*). Однако, как правило, это разрозненные задачи, а исследование их проведено при далеко идущих упрощающих предположениях и без должной строгости. Предлагаемая книга ставит своей целью систематическое и строгое рассмотрение основных задач теории корректируемых инерциальных систем с единой точки зрения. Главное внимание уделяется при этом анализу различных способов введения корректирующих сигналов и изучению соответствующих уравнений ошибок. Конечной целью этого изучения является сравнительный анализ характера связи ошибок системы с инструментальными погрешностями в зависимости от выбора способа коррекции.

Книга в большей своей части основана на работах автора, выполненных и частично опубликованных в последние годы. Она непосредственно примыкает к выпущенной издательством «Наука» в 1966 г. книге автора «Теория инерциальной навигации (автономные системы)» и во многом основывается на результатах, полученных в указанной книге.

Книга состоит из семи глав. Кроме того, она содержит Приложения, в которых освещается ряд вопросов, стоящих несколько в стороне от основной композиционной канвы книги.

---

\*) См., например, Мак-Клур К. Л., Теория инерциальной навигации, изд-во «Наука», 1964; «Инерциальные системы управления». Сб. под ред. Д. Питтмана, Воениздат, 1964.

Первая глава является вводной и содержит изложение основных результатов теории автономных инерциальных систем.

Вторая глава посвящена обсуждению общих вопросов использования дополнительной информации и теории инерциальных систем, в которых используется дополнительная информация от высотомера о расстоянии до поверхности Земли. Рассматриваются как инерциальные системы с тремя произвольно ориентированными ньютонометрами, так и системы с двумя горизонтально расположенными ньютонометрами. Выводятся уравнения идеальной (невозмущенной) работы и уравнения ошибок этих систем. Исследуется устойчивость и строится решение уравнений ошибок.

В третьей главе рассматриваются гиросаятниковые системы Шулера, частными случаями которых являются физический маятник Шулера и такие классические гироскопические приборы, как двухгироскопическая гировертикаль и пространственный гиросгоризонткомпас Геккелера — Аншютца. Особое внимание уделяется здесь вопросу о динамической аналогии между гиросаятниковыми системами Шулера и схемами инерциальных навигационных систем с двумя ньютонометрами. Грубая аналогия здесь прослеживалась и раньше. На возможность точной аналогии было указано впервые А. Ю. Ишлинским \*). В настоящей книге доказана полная динамическая аналогия между гиросаятниковыми системами Шулера и инерциальными системами с двумя ньютонометрами. Это позволило перенести на последние ряд важных результатов, известных из теории гиросаятниковых систем Шулера.

В четвертой главе рассматриваются возможные упрощения уравнений невозмущенной работы инерциальных систем,

---

\*) Ишлинский А. Ю., Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. Прикладная математика и механика, т. XXI, вып. 6, 1957.

в том числе обусловленные близостью формы поверхности Земли к сфере, а ее поля тяготения — к сферическому. Здесь рассматриваются также упрощения, связанные с априорной информацией о характерных особенностях траектории движения того класса объектов, для которых предназначается инерциальная навигационная система. Такими особенностями являются, например, близость траекторий к поверхности Земли, близость их к некоторой ортодромии на ее поверхности, ограниченность скорости движения. Изучение указанных упрощений уравнений невозмущенной работы инерциальной системы, т. е. ее алгоритма, позволяет выявить возможности упрощения в том или ином случае структуры инерциальной системы, возможности упрощения (или даже изъятия из схемы) тех или иных ее устройств.

Пятая глава книги посвящена теории инерциальных систем, в которых наряду с коррекцией от высотомера используется коррекция от доплеровского измерителя скорости или лага. Известно, что введение демпфирования в уравнения возмущенной работы инерциальных систем приводит к скоростным девиациям. Коррекция от доплеровского измерителя скорости или лага позволяет устранить эти девиации. Остаточные ошибки будут зависеть здесь лишь от инструментальных погрешностей элементов инерциальной системы и погрешности информации о скорости от доплеровского измерителя. Зависимость определяется соответствующими уравнениями ошибок. Вывод и изучение этих уравнений для различных способов доплеровской коррекции и составляет основное содержание пятой главы.

В шестой главе рассмотрена астрономическая коррекция инерциальных систем (путем определения с помощью телескопов направлений на звезды) и совместная астро-доплеровская коррекция. Показано, что, в отличие от доплеровской коррекции и коррекции от высотомера, астрокоррекция меняет лишь вторую группу уравнений ошибок. Изучен

характер этих изменений при линейной и релейной коррекциях. Особо рассмотрена работа фазовой схемы астрокоррекции вблизи ее нулевого положения с учетом основных особенностей схемы слежения за направлением на звезду.

Последняя, седьмая глава книги содержит исследование динамики автономных и корректируемых инерциальных систем при случайном характере инструментальных погрешностей элементов инерциальных систем и устройств коррекции. Это исследование проведено в рамках корреляционной теории случайных процессов. Основной целью его является изучение зависимости дисперсий ошибок определения навигационных параметров от статистических характеристик инструментальных погрешностей для различных способов коррекции.

В конце книги даны три Приложения. В первом из них рассмотрено влияние на работу фазовой схемы астрокоррекции помех от рассеянной атмосферой солнечной радиации при работе схемы в нижних слоях атмосферы. Второе посвящено рассмотрению схемы ближней навигации с помощью гиropolукомпаса и доплеровского измерителя скорости. Содержание третьего Приложения составляет задача об управлении движением объекта непосредственно по сигналам ньютонометров (акселерометров) с привлечением или без привлечения дополнительной информации. Содержание этих Приложений было опубликовано ранее в виде статей (последнего — в соавторстве с И. В. Новожиловым).

Автор считает необходимым отметить еще следующее. Настоящая книга примыкает к его книге «Теория инерциальной навигации (автономные системы)» и в значительной мере основана на результатах, полученных в указанной книге. Однако ввиду того, что в главе 1 предлагаемой книги приведены основные результаты теории автономных инерциальных систем, она может читаться и отдельно.

Настоящая книга является, по-видимому, первой попыткой систематического изложения теории корректируемых инер-

циальных систем. Она, естественно, не свободна от недостатков. Все замечания и предложения, касающиеся улучшения книги, будут приняты автором с благодарностью.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность А. Ю. Ишлинскому, в общении с которым прояснились постановки ряда задач, рассмотренных в настоящей книге. Автор благодарен также Н. П. Буканову, Г. И. Васильеву-Люлину, Е. А. Девянину, А. П. Демьяновскому, И. М. Лисовичу, И. В. Новожилову, Н. А. Парусникову, П. В. Тарасову, В. В. Шедько за участие в обсуждении отдельных разделов книги.

*В. Андреев*

## **Необходимые сведения из теории автономных систем инерциальной навигации**

### **§ 1.1. Уравнения идеальной работы систем инерциальной навигации**

**1.1.1. Основное уравнение инерциальной навигации и интегрирование его в неизменно ориентированных осях.** Главной задачей любого способа навигации является определение местоположения объекта, т. е. координат некоторой его точки, например центра масс, в заданной системе отсчета. В задачу навигационной системы может входить также определение скоростей изменения этих координат, а также определение параметров, характеризующих ориентацию движущегося объекта в заданной системе отсчета, и скоростей изменения параметров ориентации.

Отличительная особенность инерциального способа навигации состоит в том, что координаты объекта получаются по существу интегрированием уравнений Ньютона движения центра масс объекта. Необходимые для интегрирования этих уравнений составляющие вектора результирующей силы, приложенной к объекту, находятся по показаниям специальных приборов — ньютонометров (акселерометров, датчиков удельной силы) в виде проекций на направления их осей чувствительности, ориентация которых может быть задана с помощью гироскопов или определена по показаниям самих ньютонометров.

Инерциальная (галилеева) система координат, в которой, по определению, справедливы законы Ньютона, является основной системой отсчета в инерциальной навигации.

Идеализированную схему пространственного ньютонометра можно представить себе (рис. 1.1) в виде материальной точки массой  $m$ , установленной в корпусе прибора в трехстепенном невесомом упругом подвесе. Уравнение движения чувствительной массы ньютонометра в некоторой инерциальной



системе отсчета имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{f}. \quad (1.1)$$

В этом уравнении  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $O$  местоположения чувствительной массы ньютонометра в инерциальной системе отсчета;  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  — геометрическая сумма ньютонова

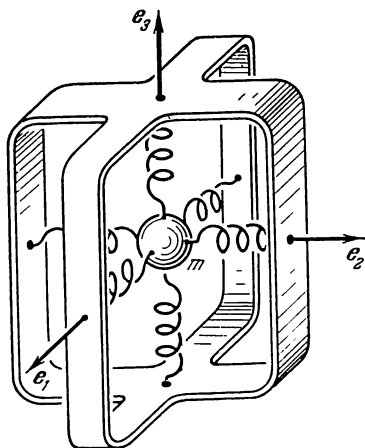


Рис. 1.1.

притяжения единицы чувствительной массы всей совокупностью небесных тел, включая, вообще говоря, и притяжение массами объекта, на котором установлен ньютонометр; через  $\mathbf{f}$  обозначена сила, действующая со стороны подвеса вследствие его упругой деформации.

Для наблюдателя, связанного с корпусом ньютонометра, единственным воздействием на чувствительную массу ньютонометра представляется воздействие упругих сил подвеса, а параметрами, характеризующими это воздействие, — величины деформаций подвеса.

Величины упругих деформаций подвеса и являются показаниями ньютонометра. Полагая силу  $\mathbf{f}$  пропорциональной вектору  $\mathbf{n}$  деформации подвеса ( $\mathbf{f} = k\mathbf{n}$ ) и считая для простоты отношение  $m/k$  равным единице, получаем из (1.1) следующее выражение для  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Можно показать \*), что при движении объекта вблизи Земли соотношение (1.2) с достаточной для целей навигации точностью представимо в таком виде:

$$\mathbf{n} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

\*) Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.

Здесь теперь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $O$  местоположения чувствительной массы ньютонометра в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , начало которой совмещено с центром Земли, а ориентация осей неизменна по отношению к направлениям из центра Земли на удаленные (неподвижные) звезды. Через  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  обозначен в (1.3) вектор напряженности поля тяготения Земли. Дифференцирование в равенстве (1.3) проведено в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Основная погрешность, к которой приводит замена уравнения (1.2) уравнением (1.3), обусловлена разностью сил притяжения Солнца и Луны в точке  $O_1$  (центр Земли) и точке  $O$  (местоположение объекта). Эта погрешность равносильна вблизи поверхности Земли инструментальной погрешности ньютонометра, не превышающей величины  $10^{-4}$  см/сек<sup>2</sup>.

Реальные конструкции ньютонометров, как правило, однокомпонентные. Чувствительная масса однокомпонентного (линейного) ньютонометра имеет относительно корпуса лишь одну степень свободы (рис. 1.2). Она может перемещаться лишь вдоль прямой, называемой *осью чувствительности*.

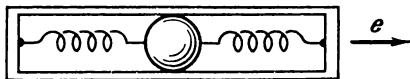


Рис. 1.2.

Вдоль этой прямой прикладывается сила реакции пружины подвеса, деформация которой измеряется. Показанием однокомпонентного ньютонометра является величина

$$n_e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор оси чувствительности.

Три однокомпонентных ньютонометра с некомпланарными осями чувствительности равносильны, очевидно, одному пространственному ньютонометру.

В рассмотренных схемах ньютонометров упругий подвес обеспечивается механическими пружинами. В реальных конструкциях ньютонометров используются упругие силы и другой природы, чаще всего электромагнитные. Для вывода уравнений (1.3), (1.4) это обстоятельство несущественно.

Уравнение (1.3) является основным уравнением инерциальной навигации. Интегрирование этого уравнения составляет главную задачу автономной системы инерциальной навигации.

Наиболее естественным, во всяком случае с формальной точки зрения, способом интегрирования уравнения (1.3) оказывается интегрирование его в неизменно ориентированных осях. Пусть три линейных ньютометра установлены по осям гиростабилизированной платформы, которые параллельны осям  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  и одинаково с ними направлены. Тогда показаниями ньютометров будут проекции вектора  $\mathbf{n}$  на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ :

$$\left. \begin{aligned} n_{\xi_*} &= \ddot{\xi}_* - g_{\xi_*}, \quad n_{\eta_*} = \ddot{\eta}_* - g_{\eta_*}, \\ n_{\zeta_*} &= \ddot{\zeta}_* - g_{\zeta_*}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

где точками обозначено дифференцирование по времени. Из этих соотношений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \xi_* &= \int_0^t \int_0^t (n_{\xi_*} + g_{\xi_*}) dt dt + \dot{\xi}_*^0 t + \xi_*^0, \\ \eta_* &= \int_0^t \int_0^t (n_{\eta_*} + g_{\eta_*}) dt dt + \dot{\eta}_*^0 t + \eta_*^0, \\ \zeta_* &= \int_0^t \int_0^t (n_{\zeta_*} + g_{\zeta_*}) dt dt + \dot{\zeta}_*^0 t + \zeta_*^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

где  $\xi_*^0$ ,  $\eta_*^0$ ,  $\zeta_*^0$ ,  $\dot{\xi}_*^0$ ,  $\dot{\eta}_*^0$ ,  $\dot{\zeta}_*^0$  — соответствующие начальные значения.

Если считать проекции  $g_{\xi_*}$ ,  $g_{\eta_*}$ ,  $g_{\zeta_*}$  известными функциями координат  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ , что будет, например, иметь место, если считать поле тяготения Земли сферическим, то уравнения (1.6) позволяют по показаниям трех ньютометров и соответствующим начальным условиям определить координаты  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  текущего местоположения объекта.

В принципе уравнениями (1.6) задача инерциальной навигации решена. В самом деле, так как движение Земли в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  известно, то от декартовых координат  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  соответствующим пересчетом можно перейти к любым связанным с Землей координатам. Находятся также и скорости изменения любых координат. Так как ориентация объекта в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  определена его положением по отношению к гиростабилизированной платформе

(например, углами поворота колец карданова подвеса стабилизированной платформы), то могут быть найдены параметры, характеризующие ориентацию движущегося объекта по отношению к любой связанной с Землей системе координат.

Заметим, что уравнения (1.6) определяют координаты точки  $O$ , в которой расположены чувствительные массы ньютометров. В дальнейшем под координатами объекта всегда будут пониматься именно координаты этой точки.

**1.1.2. Основные системы координат, связанные с Землей.** Свяжем с Землей правый ортогональный трехгранник  $O_1\xi\eta\zeta$ . Начало его совместим с центром Земли. Ось  $O_1\xi$  направим вдоль вектора  $\mathbf{u}$  абсолютной угловой скорости вращения Земли. С достаточной для целей навигации точностью \*) можно считать вектор  $\mathbf{u}$  ориентированным неизменно по отношению к направлениям на удаленные звезды и совпадающим с осью фигуры Земли, а величину  $u$  можно считать постоянной. Ось  $O_1\xi$  системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$  расположим на линии пересечения плоскости экватора и плоскости гринвичского меридиана. Не уменьшая общности, можно считать, очевидно, что в момент начала работы инерциальной системы трехгранник  $O_1\xi\eta\zeta$  совпадает с трехгранником  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Тогда для произвольного момента времени взаимное расположение этих трехгранников определится следующей таблицей направляющих косинусов:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	
$\xi_*$	$\cos ut$	$-\sin ut$	0	
$\eta_*$	$\sin ut$	$\cos ut$	0	(1.7)
$\zeta_*$	0	0	1.	

Уровенная поверхность Земли (геоид) с большой точностью может быть аппроксимирована эллипсоидом вращения Клеро, уравнение которого имеет вид:

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1, \quad (1.8)$$

---

\*) См. сноску на стр. 16.

где  $a$  и  $b$  — большая и малая полуоси Земли. Для принятого в СССР эллипсоида Красовского численные значения полуосей

таковы:  $a = 6\,378\,245$  м,  
 $b = 6\,356\,863$  м\*).

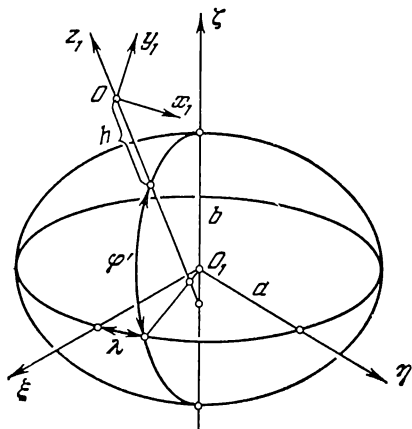


Рис. 1.3.

Положение произвольной точки  $O$  в системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$  можно определить (рис. 1.3) географическими координатами  $h, \varphi', \lambda$ , где  $h$  — длина нормали, опущенной из точки  $O$  на эллипсоид Клеро (высота над уровнем океана),  $\varphi'$  — географическая широта (угол между нормалью к эллипсоиду и плоскостью экватора),  $\lambda$  — долгота (угол между плоскостями гринвичского меридиана и меридиана точки  $O$ ).

Координаты  $\xi, \eta, \zeta$  связаны с координатами  $h, \varphi', \lambda$  формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \left[ \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \cos \varphi' \cos \lambda, \\ \eta &= \left[ \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \cos \varphi' \sin \lambda, \\ \zeta &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \sin \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (1.8a)$$

в которых через  $e^2$  обозначен квадрат первого эксцентриситета эллипсоида Клеро

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}. \quad (1.9)$$

Свяжем с точкой  $O$  правый ортогональный трехгранник  $Ox_1y_1z_1$  — сопровождающий трехгранник географической

\*) Параметры эллипсоидов, принятых в других странах, можно найти, например, в книге: Г р а у р А. В., Математическая картография, изд. ЛГУ им. Жданова, Ленинград, 1956.

координатной сетки (см. рис. 1.3). Ось  $z_1$  этого трехгранника направим вдоль положительной нормали к эллипсоиду Клеро, ось  $y_1$  расположим в плоскости меридиана точки  $O$  и направим к северу. Взаимное расположение трехгранников  $\xi\eta\zeta$  и  $x_1y_1z_1$  характеризуется, очевидно, следующей таблицей направляющих косинусов:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$\xi$	$-\sin \lambda$	$-\sin \varphi' \cos \lambda$	$\cos \varphi' \cos \lambda$	
$\eta$	$\cos \lambda$	$-\sin \varphi' \sin \lambda$	$\cos \varphi' \sin \lambda$	(1.10)
$\zeta$	0	$\cos \varphi'$	$\sin \varphi'$	

Плоскости  $x_1z_1$  и  $y_1z_1$  будут плоскостями главных нормальных сечений поверхности  $h = \text{const.}$  Соответствующие радиусы кривизны определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h, \\ r_3 &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Наряду с географическими координатами для определения положения точки  $O$  можно воспользоваться геоцентрическими координатами: расстоянием  $r$  от точки  $O$  до центра Земли  $O_1$ , геоцентрическими широтой  $\varphi$  и долготой  $\lambda$ . В этом случае (рис. 1.4)

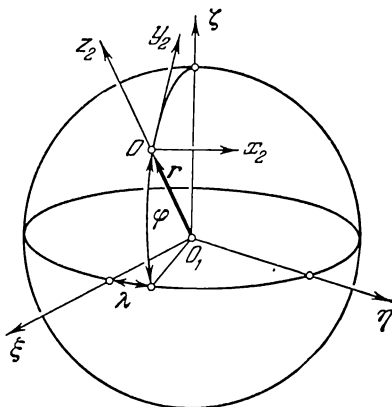


Рис. 1.4.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi \cos \lambda, & \eta &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ \zeta &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Геоцентрическая долгота совпадает с географической. Связь географических координат  $h, \varphi'$  с геоцентрическими  $r$  и  $\varphi$

вытекает из сравнения соотношений (1.8а) с соотношениями (1.12) и задается равенствами \*)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \left[ 1 - \frac{ae^2}{a + h(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] \operatorname{tg} \varphi', \\ r &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Введем сопровождающий трехгранник  $Ox_2y_2z_2$  геоцентрической координатной сетки (рис. 1.4), совместив его ось  $z_2$  с направлением радиуса-вектора  $r$  точки  $O$ , а ось  $y_2$  расположив в плоскости меридиана этой точки и направив ее на север. Таблица направляющих косинусов, характеризующих ориентацию трехгранника  $x_2y_2z_2$  по отношению к трехграннику  $\xi\eta\zeta$ , получается, очевидно, из таблицы (1.10), если в последней заменить  $\varphi'$  на  $\varphi$ . Взаимное расположение географического и геоцентрического сопровождающих трехгранников определяется следующими направляющими косинусами:

	$x_2$	$y_2$	$z_2$	
$x_1$	1	0	0	
$y_1$	0	$\cos(\varphi' - \varphi)$	$-\sin(\varphi' - \varphi)$	(1.14)
$z_1$	0	$\sin(\varphi' - \varphi)$	$\cos(\varphi' - \varphi)$	

причем, согласно первому равенству (1.13),

$$\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2} [a(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2} + h]}. \quad (1.15)$$

Кроме геоцентрических координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , употребительны еще так называемые *ортодромические координаты* (тоже сферические). Их можно определить следующим образом. Пусть имеется некоторый трехгранник  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ , жестко связанный с Землей и, следовательно, неизменно ориентированный относительно трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$ , и пусть взаимная ориентация этих трехгранников задана таблицей

---

\*) См. сноску на стр. 16.

направляющих косинусов

$$\begin{array}{cccc}
 & \xi' & \eta' & \zeta' \\
 \xi & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\
 \eta & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\
 \zeta & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33}
 \end{array} \quad (1.16)$$

элементы которой постоянны.

По отношению к трехграннику  $O_1\xi'\eta'\zeta'$  положение точки  $O$  можно определить координатами  $r$ ,  $z$ ,  $S$ , аналогичными

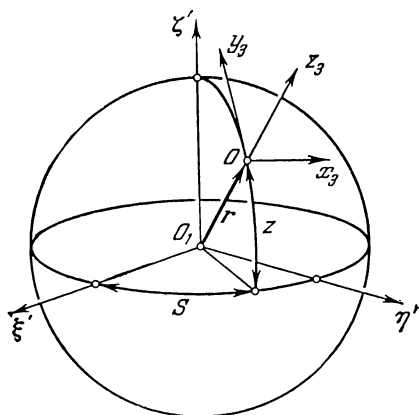


Рис. 1.5.

геоцентрическим координатам  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , так что (рис. 1.5)

$$\left. \begin{array}{l} \xi' = r \cos z \cos S, \quad \eta' = r \cos z \sin S, \\ \zeta' = r \sin z. \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Связь координат } \varphi, \lambda \text{ и } S, z \text{ вытекает из равенств} \\ \cos \varphi \cos \lambda = \beta_{11} \cos z \cos S + \beta_{12} \cos z \sin S + \beta_{13} \sin z, \\ \cos \varphi \sin \lambda = \beta_{21} \cos z \cos S + \beta_{22} \cos z \sin S + \beta_{23} \sin z, \\ \sin \varphi = \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z. \end{array} \right\} \quad (1.18)$$

В ортодромических координатах роль плоскости экватора играет плоскость  $O_1\xi'\eta'$  (плоскость главной ортодромии). При совпадении трехгранников  $\xi'\eta'\zeta'$  и  $\xi\eta\zeta$  ортодромические координаты переходят в геоцентрические.



Введем сопровождающий трехгранник  $Ox_3y_3z_3$  геоцентрической координатной сетки. Его ось  $z_3$  совместим с  $r$ , а ось  $y_3$  расположим в плоскости, содержащей  $r$  и ось  $\zeta'$ , и направим в сторону оси  $\zeta'$ . Тогда расположение трехгранников  $x_2y_2z_2$  и  $x_3y_3z_3$  относительно друг друга можно задать таблицей направляющих косинусов

$$\begin{array}{cccc} & x_3 & y_3 & z_3 \\ x_2 & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ y_2 & -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ z_2 & 0 & 0 & 1, \end{array} \quad (1.19)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi &= \frac{1}{\cos \varphi} (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S), \\ \cos \psi &= \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

**1.1.3. Гравитационное поле Земли.** Проекции на оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  вектора  $g(r)$  напряженности регуляризованного поля тяготения Земли получают из решения проблемы Стокса для уровневой поверхности, заданной в форме сфероида, и имеют вид \*):

$$\left. \begin{aligned} g_\xi &= -P_\xi + C \frac{\partial K}{\partial \xi}, \quad g_\eta = -P_\eta + C \frac{\partial K}{\partial \eta}, \\ g_\zeta &= -Q_\zeta + C \frac{\partial K}{\partial \zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} P &= 2\pi D\mu \frac{a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left( \operatorname{arctg} l' - \frac{l'}{1 - l'^2} \right), \\ Q &= 4\pi D\mu \frac{a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} (l' - \operatorname{arctg} l'), \\ K &= 2\pi D\mu \frac{a^2 b}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \operatorname{arctg} l', \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

где  $l'$  — второй эксцентриситет проходящего через точку  $O$  эллипсоида, софокусного с эллипсоидом Клеро и определяемого

\*) Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.

уравнением

$$\frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2 + v} + \frac{\zeta^2}{b^2 + v} = 1. \quad (1.23)$$

Таким образом,

$$l' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + v}}. \quad (1.24)$$

Постоянные  $D\mu$  и  $C$ , входящие в формулы (1.21), (1.22), находятся из условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2}{2\pi D\mu} &= \frac{3 + l^2}{l^2} \operatorname{arctg} l - \frac{3}{l^2}, \\ g_e &= 2C\pi D\mu a + P_0 a - u^2 a, \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

где  $l^2 = (a^2 - b^2)/b^2$  — второй эксцентриситет эллипсоида Клеро,  $g_e$  — величина силы тяжести на экваторе,  $P_0$  — значение  $P$  на поверхности эллипсоида Клеро.

Из соотношений (1.21), (1.22), (1.12) и таблицы (1.10) находятся следующие формулы для проекций вектора напряженности поля тяготения на оси геоцентрического сопровождающего трехгранника:

$$\left. \begin{aligned} g_{x_2} &= 0, \\ g_{y_2} &= 2\pi D\mu \sin \varphi \cos \varphi \left[ \frac{a^2 b r}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left( 3 \operatorname{arctg} l' - \frac{l'}{1 + l'^2} - 2l' \right) - \right. \\ &\quad \left. - C a^3 b e^2 \frac{a}{r} \frac{(b^2 + v)^{1/2}}{(b^2 + v)^2 \cos^2 \varphi + (a^2 + v)^2 \sin^2 \varphi} \right], \\ g_{z_2} &= -2\pi D\mu \left\{ \frac{a^2 b r}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \left[ 2(l' - \operatorname{arctg} l') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos^2 \varphi \left( 3 \operatorname{arctg} l' - \frac{l'}{1 + l'^2} - 2l' \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + C a b \frac{a}{r} \frac{[(b^2 + v) \cos^2 \varphi + (a^2 + v) \sin^2 \varphi] (b^2 + v)^{1/2}}{(b^2 + v)^2 \cos^2 \varphi + (a^2 + v)^2 \sin^2 \varphi} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Правые части формул (1.26) с учетом равенств (1.23) — (1.25) могут быть разложены в быстро сходящиеся ряды \*)

\*) Андреев В. Д., К решению проблемы Стокса для урванной поверхности, заданной в форме сфероида. Прикладная математика и механика, т. XXX, вып. 2, 1966.

по степеням первого эксцентриситета  $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$  эллипсоида Клеро:

$$\left. \begin{aligned} g_{y_2} &= \frac{g_e}{2} (q - e^2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 2\varphi \left[ 1 + \right. \\ &\quad \left. + e^2 \frac{7e^2 - 30q}{14(q - e^2)} \right] \left\{ 1 + \left[ \frac{30q - 21e^2}{14(q - e^2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \varphi \frac{7e^2 - 10q}{2(q - e^2)} \right] e^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots \right\}, \\ g_{z_2} &= -g_e \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 + q \left( \frac{3}{2} - \frac{15}{28} e^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^4 + q \left( -\frac{1}{2} + \frac{15}{14} e^2 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin^2 \varphi \left( \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{4} e^4 + q \left( -\frac{3}{2} + \frac{45}{14} e^2 \right) \right) \right] \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{3}{8} e^2 - \frac{15}{28} q + \sin^2 \varphi \left( \frac{5}{8} e^2 - \frac{25}{28} q \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin^2 2\varphi \left( \frac{35}{32} e^2 - \frac{25}{16} q \right) \right] e^2 \left(\frac{a}{r}\right)^4 + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

где через  $q$  обозначено отношение центробежного ускорения к ускорению силы тяжести на экваторе:  $q = u^2 a / g_e$ .

Численные значения коэффициентов выражений (1.27) показывают, что с точностью порядка  $0,02 \text{ см/сек}^2$  эти выражения могут быть заменены более простыми:

$$\left. \begin{aligned} g_{y_2} &= \frac{g_e}{2} (q - e^2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 2\varphi, \\ g_{z_2} &= -g_e \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2} q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{q - e^2}{2} (-1 + 3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Взяв  $g_e = 978,049 \text{ см/сек}^2$ ,  $u = 7,2921161/\text{сек}$ , для параметров эллипсоида Красовского ( $e^2 = 0,0066934$ ), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_e}{2} (q - e^2) &= -1,58, & \frac{q - e^2}{2} &= 0,0016, \\ 1 - \frac{e^2}{2} + \frac{3q}{2} &= 0,0018. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Формулы (1.27), (1.28) дают зависимость проекций вектора напряженности регуляризованного поля тяготения на оси геоцентрического сопровождающего трехгранника от геоцентри-

ческой широты  $\varphi$  и расстояния  $r$  до центра Земли. Из этих формул можно получить проекции  $g_{y_1}$ ,  $g_{z_1}$  на оси географического трехгранника в зависимости от географической широты  $\varphi'$  и расстояния  $h$  до поверхности эллипсоида Клеро (высоты над уровнем океана).

Перейдем в формулах (1.27) от  $r$  и  $\varphi$  к  $h$  и  $\varphi'$ . Ограничимся здесь случаем малых  $h$ , когда отношение  $h/a$  имеет порядок  $e^2$ , т. е. когда  $h \approx 100$  км. Используя соотношения (1.13), получаем:

$$\left. \begin{aligned} g_{y_2} &= \frac{g_e(q-e^2)}{2} \sin 2\varphi' \left( 1 - \frac{4h}{a} - \frac{qe^2}{q-e^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{2} \frac{e^2+2q}{q-e^2} \sin^2 \varphi' \right), \\ g_{z_2} &= -g_e \left[ 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' + q \left( 1 + \frac{1}{3} \sin^2 \varphi' \right) + \right. \\ &\quad + e^4 \left( -\frac{1}{8} \sin^2 \varphi' - \frac{3}{32} \sin^2 2\varphi' \right) + \\ &\quad + e^2 q \left( -\frac{17}{28} \sin^2 \varphi' + \frac{1}{16} \sin^2 2\varphi' \right) + \\ &\quad + \frac{h}{a} e^2 (3 \sin^2 \varphi' - 1) - \\ &\quad \left. - \frac{hq}{a} (1 + 6 \sin^2 \varphi') - \frac{2h}{a} + \frac{3h^2}{a^2} \right]. \end{aligned} \right\} (1.30)$$

Теперь, воспользовавшись равенством (1.15) и таблицей направляющих косинусов (1.14), находим:

$$\left. \begin{aligned} g_{y_1} &= g_e \sin 2\varphi' \left[ \frac{q}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi' \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{a} \left( \frac{1}{2} e^2 - 2q \right) \right], \\ g_{z_1} &= -g_e \left[ 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi' + q \left( 1 + \frac{3}{2} \sin^2 \varphi' \right) + \right. \\ &\quad + e^4 \left( -\frac{1}{8} \sin^2 \varphi' + \frac{1}{32} \sin^2 2\varphi' \right) + \\ &\quad + e^2 q \left( -\frac{17}{28} \sin^2 \varphi' - \frac{3}{16} \sin^2 2\varphi' \right) + \\ &\quad + \frac{h}{a} e^2 (3 \sin^2 \varphi' - 1) - \frac{hq}{a} (1 + 6 \sin^2 \varphi') - \\ &\quad \left. - \frac{2h}{a} + \frac{3h^2}{a^2} \right]. \end{aligned} \right\} (1.31)$$

При  $h=0$  из формул (1.31) получаются проекции  $g_{y_1}$ ,  $g_{z_1}$  вектора напряженности регуляризированного поля тяготения Земли на ее поверхности (на поверхности уровенного эллипсоида). Если прибавить к ним проекции на оси  $y_1$ ,  $z_1$  центробежного ускорения от вращения Земли, то первая сумма обращается в нуль, а вторая приводит к формуле нормальной силы тяжести в форме Гельмерта—Кассиниса \*)

$$g = g_e (1 + \beta \sin^2 \varphi' + \beta_1 \sin^2 2\varphi'), \quad (1.32)$$

где коэффициенты  $\beta$  и  $\beta_1$  определяются известными формулами Клеро с членами второго порядка:

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha - \frac{17}{14} q\alpha,$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha^2}{8} - \frac{5}{8} q\alpha, \quad \alpha = \frac{a-b}{a}.$$

#### 1.1.4. Уравнения идеальной работы инерциальных систем, определяющих декартовы координаты объекта.

Рассмотрим систему инерциальной навигации, построенную

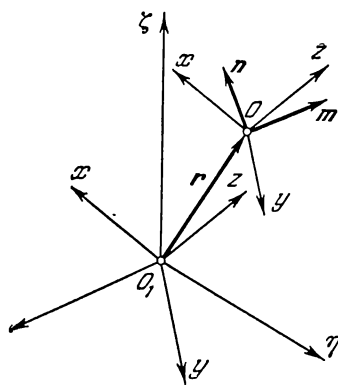


Рис. 1.6.

следующим образом. На платформе трехстепенного измерителя абсолютной угловой скорости \*\*) установлены три ньютонометра. Направления их осей чувствительности совпадают с направлениями осей правой ортогональной системы координат  $Oxyz$ , связанной с платформой (рис. 1.6).

Пусть задачей инерциальной системы является определение декартовых координат  $\xi, \eta, \zeta$  в связанной с Землей системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$ , скоростей  $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$  изменения этих координат

и параметров, характеризующих ориентацию объекта по отношению к осям  $\xi, \eta, \zeta$ . Обозначим показания ньютоно-

\*) См. сноску на стр. 24.

\*\*) Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.

метров через  $n_x, n_y, n_z$ , показания измерителей проекций абсолютной угловой скорости платформы через  $m_x, m_y, m_z$  и введем векторы

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} &= n_x \mathbf{x} + n_y \mathbf{y} + n_z \mathbf{z}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m} = m_x \mathbf{x} + m_y \mathbf{y} + m_z \mathbf{z}, \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

где  $\mathbf{\omega}$  — абсолютная угловая скорость вращения платформы, т. е. трехгранника  $Oxyz$ , а  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  — орты осей этого трехгранника.

Введем систему координат  $O_1xyz$ , начало которой помещено в центр Земли  $O_1$ , а оси параллельны соответствующим осям системы координат  $Oxyz$ . Очевидно,

$$\mathbf{r} = \xi \mathbf{x} + \eta \mathbf{y} + \zeta \mathbf{z} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z}. \quad (1.34)$$

Вводя обозначение  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{r}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

где точкой обозначено дифференцирование в системе координат  $O_1xyz$ .

Теперь из равенств (1.3), (1.33), (1.35), интегрируя в системе координат  $O_1xyz$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}) dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t (\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r}) dt + \mathbf{r}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Соотношения (1.36) позволяют определить координаты объекта в системе координат  $O_1xyz$ , если известны проекции  $g_x, g_y, g_z$ , что будет иметь место, если, например, считать поле тяготения Земли сферическим.

Чтобы найти координаты  $\xi, \eta, \zeta$  объекта, заметим, что трехгранник  $O_1xyz$  вращается относительно трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  с угловой скоростью

$$\mathbf{\omega} - \mathbf{u} = \mathbf{m} - \mathbf{u}, \quad (1.37)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор абсолютной угловой скорости вращения Земли.

Если считать, что в начальный момент времени взаимное расположение трехгранников  $O_1xyz$  и  $O_1\xi\eta\zeta$  известно, то задача определения их взаимного расположения в любой момент времени по известному вектору (1.37) угловой скорости вращения сводится к решению известных уравнений Пуассона:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \int_0^t \xi \times (m - u) dt + \xi^0, \\ \eta &= \int_0^t \eta \times (m - u) dt + \eta^0, \\ \zeta &= \int_0^t \zeta \times (m - u) dt + \zeta^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Теперь

$$\xi = \xi \cdot r, \quad \eta = \eta \cdot r, \quad \zeta = \zeta \cdot r, \quad (1.39)$$

и задача определения координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  решена. Определение скоростей  $\dot{\xi}$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\dot{\zeta}$  очевидно.

Ориентация объекта в пространстве задается его положением относительно трехгранника  $Oxyz$ , что требует дополнительного определения либо самого положения трехгранника  $Oxyz$  относительно объекта, либо измерения угловой скорости вращения трехгранника  $Oxyz$  относительно объекта и решения уравнений, аналогичных уравнениям (1.38). Если платформа измерителя угловой скорости связана жестко с объектом, то его ориентация находится непосредственно по уравнениям (1.38). В дальнейшем будем считать, что ориентация объекта определена, коль скоро определена ориентация в пространстве чувствительных элементов инерциальной навигационной системы.

Если бы поле тяготения Земли было сферическим, т. е.

$$g(r) = -\frac{r}{r^3} g(r),$$

то уравнения (1.36), (1.38) решались бы независимо. В действительности

$$g = \text{grad } V, \quad V = \frac{\mu}{r} + \varepsilon(\xi, \eta, \zeta), \quad (1.40)$$

где  $\varepsilon(\xi, \eta, \zeta)$  — силовая функция малой несферической составляющей поля тяготения. Поэтому для определения  $g_x, g_y, g_z$  необходимо предварительное разрешение уравнений (1.38), затем совместное решение уравнений (1.36), (1.39), (1.40).

Отметим следующее. При выводе уравнений (1.36), (1.38) — (1.40) предполагалось, что платформа гироскопического измерителя угловой скорости (система координат  $Oxyz$ ) ориентирована произвольно как по отношению к Земле, так и по отношению к объекту. Здесь возможны различные частные случаи.

Система координат  $Oxyz$  может быть ориентирована неизменно в инерциальном пространстве (например, совмещена с системой координат  $O\xi_s\eta_s\zeta_s$ ), что можно осуществить при помощи гиростабилизированной платформы или связав ньютонометры со свободными гироскопами. Тогда уравнения (1.36) перейдут в полученные ранее уравнения (1.6), а уравнения (1.38) выпадут.

Платформу измерителя угловой скорости можно связать жестко с объектом. Так как ориентация объекта в общем случае произвольна, то здесь уравнения (1.36), (1.38) — (1.40) сохраняют свой вид.

Возможен промежуточный между двумя предыдущими случай, когда ориентация трехгранника  $Oxyz$ , по осям которого установлены ньютонометры, будет заданной функцией времени и определяемых системой координат. Такая ориентация может быть обеспечена\*) либо при помощи управляемой гирорамы (или управляемой гиростабилизированной платформы), либо при помощи специальной кинематической схемы, установленной на стабилизированной платформе или связанной со свободными гироскопами.

Примером, когда ориентация трехгранника  $Oxyz$  оказывается заданной функцией времени, будет его неизменная ориентация по отношению к Земле (например, совмещение осей  $x, y, z$  и  $\xi, \eta, \zeta$ ). Если за основу схемы взята гиростабилизированная платформа, то связанный с ньютонометрами трехгранник должен поворачиваться относительно нее в соответствии с таблицей направляющих косинусов (1.7). Если же за основу кинематической схемы системы взята управляемая гирорама\*),

---

\*) См. вторую сноску на стр. 28.



то управляющие моменты  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  должны быть сформированы согласно равенствам

$$M_y^2 = 0, \quad M_x^1 = 0, \quad M_x^3 = -H_3 u, \quad (1.41)$$

что следует из прецессионных уравнений движения управляемой гироскопы

$$M_y^2 = -H_2 \omega_x, \quad M_x^1 = H_1 \omega_y, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_z. \quad (1.42)$$

Уравнения (1.38), (1.39) выпадают, так как из соотношений (1.36) сразу получаются в рассматриваемом случае координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ .

В качестве примера, в котором ориентация трехгранника  $Oxyz$  ставится в зависимость от определяемых инерциальной системой координат, рассмотрим случай, когда ось  $z$  направлена все время вдоль радиуса-вектора  $r$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \quad y = 0, \quad z = r, \\ v &= \dot{r}z + (\omega_y x - \omega_x y) \times r \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

и, следовательно,

$$v_x = r\omega_y, \quad v_y = -r\omega_x, \quad v_z = \dot{r}. \quad (1.44)$$

Поэтому управляющие моменты равны:

$$M_y^2 = H_2 \frac{v_y}{r}, \quad M_x^1 = H_1 \frac{v_x}{r}, \quad M_x^3 = -H_3 m_z. \quad (1.45)$$

В уравнениях (1.36), (1.38) надо положить  $x = y = 0$ ,  $z = r$ ,  $m_x = -v_y/r$ ,  $m_y = v_x/r$ . Величина  $m_z$  вместе с  $M_x^3$  остается произвольной. Величиной этого момента можно, следовательно, распорядиться так, чтобы упростить уравнения. Так, можно взять

$$M_x^3 = 0, \quad m_z = \omega_z = 0. \quad (1.46)$$

**1.1.5. Определение криволинейных координат.** В дальнейшем удобно заменить обозначения систем координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  и  $O_1\xi\eta\zeta$  на однородные  $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$  и  $O_1\eta^1\eta^2\eta^3$ . Пусть положение точки  $O$  объекта в системе координат  $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$  определяется некоторыми криволинейными, в общем случае

неортогональными и нестационарными координатами  $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ , так что

$$\xi^s = \xi^s(\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, t), \quad r = \xi^s \xi_s, \quad (1.47)$$

где  $\xi_s$  — орты осей  $\xi^s$ . Здесь и далее по индексу, повторенному дважды (вверху и внизу), предполагается суммирование от 1 до 3. Неповторяющиеся индексы пробегают значения 1, 2, 3.

Пусть определитель Якоби

$$J = \frac{D(\xi^1, \xi^2, \xi^3)}{D(\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3)} \neq 0. \quad (1.48)$$

Задачей инерциальной системы пусть будет определение координат  $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ . Схему инерциальной системы представим себе следующим образом. В качестве ее основы используется гиросtabilизированная платформа, оси которой совпадают — это не уменьшает общности — с направлениями осей  $\xi^s$  системы координат  $O_1 \xi^1 \xi^2 \xi^3$  ( $O_1 \xi_s \eta_s \zeta_s$ ). На гиросtabilизированной платформе при помощи специальной кинематической схемы установлены три ньютонометра, единичные векторы осей чувствительности которых обозначим через  $e_s$ , а показания — через  $n_{e_s}$ . Кинематическую схему будем предполагать такой, что она может обеспечить заданную зависимость ориентации направлений  $e_s$  от определенных инерциальной системой координат  $\kappa^s$  и времени  $t$ :

$$e_s = e_s(\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, t). \quad (1.49)$$

Направления  $e_s$  некопланарны.

Найдем выражения  $n_{e_s}$  через координаты  $\kappa^k$ . Введем основной координатный базис  $*$ ), образованный векторами

$$r_s = \frac{\partial r}{\partial \kappa^s}, \quad r = \xi^k \xi_k. \quad (1.50)$$

В силу условия (1.48) векторы  $r_s$  некопланарны. Введем также взаимный базис, образованный векторами  $r^s$ , взаимными с векторами  $r_s$ . Наконец, введем метрический тензор  $A$  пространства, определяемого криволинейными координатами  $\kappa^s$ .

---

\*) См., например, Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

Ковариантные, контравариантные и смешанные составляющие этого тензора обозначим соответственно через  $a_{sk}$ ,  $a^{sk}$ ,  $a_s^k$ .

Из соотношений (1.3), (1.4), (1.40) теперь получаем:

$$n_{e_s} = (\ddot{\kappa}^k + \Gamma_{mn}^k \dot{\kappa}^m \dot{\kappa}^n + 2\Gamma_{0n}^k \dot{\kappa}^n + \Gamma_{00}^k - \text{grad}^l V \eta_l^k) e_{sk}. \quad (1.51)$$

Здесь  $\Gamma_{mn}^k$  — символы Кристоффеля второго рода, выражающиеся через компоненты метрического тензора  $\mathbf{A}$ ;  $\Gamma_{0n}^k$  и  $\Gamma_{00}^k$  — трехиндексные символы, определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00}^s &= a^{sn} \Gamma_{00, n}, & \Gamma_{00, n} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{r}_n, \\ \Gamma_{0k}^s &= a^{sn} \Gamma_{0k, n}, & \Gamma_{0k, n} &= \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t \partial \kappa^k} \cdot \mathbf{r}_n; \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

$\text{grad}^l V$  и  $\eta_l^k$  — контравариантные составляющие векторов  $\mathbf{g} = \text{grad} V$  и  $\boldsymbol{\eta}_l$  в основном базисе, а  $e_{sk}$  — ковариантные составляющие векторов  $\mathbf{e}_s$ .

Ограничимся в дальнейшем практически важным случаем, когда направления  $\mathbf{e}_s$  совпадают с векторами  $\mathbf{r}^s$  взаимного базиса \*). Тогда

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{r}^s}{\sqrt{a^{ss}}}; \quad e_{sk} = 0 \text{ при } s \neq k; \quad e_{ss} = \frac{1}{\sqrt{a^{ss}}}. \quad (1.53)$$

Из соотношений (1.51), (1.53) первая группа уравнений идеальной работы инерциальной системы получается в таком виде \*) (не суммировать по  $s$ !):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\kappa}^s}{\sqrt{a^{ss}}} &= \int_0^t \left\{ n_{e_s} - \frac{1}{\sqrt{a^{ss}}} \left[ \dot{\kappa}^s \frac{d}{dt} \ln \sqrt{a^{ss}} + \Gamma_{mn}^s \dot{\kappa}^m \dot{\kappa}^n + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\Gamma_{0n}^s \dot{\kappa}^n + \Gamma_{00}^s - \text{grad}^l V \eta_l^s \right] \right\} dt + \frac{\dot{\kappa}^s(0)}{\sqrt{a^{ss}(0)}}, \\ \kappa^s &= \int_0^t \left( \frac{\dot{\kappa}^s}{\sqrt{a^{ss}}} \right) \sqrt{a^{ss}} dt + \kappa^s(0). \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

---

\*) Общий случай рассмотрен в нашей книге «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.

К уравнениям (1.54), (1.53) надо присоединить уравнения для  $\eta_l^k$  и связь  $\eta^l$  с  $\kappa^s$  и временем.

Имеем:

$$\eta^k = \alpha_s^k \xi^s, \quad \eta_l = \alpha_l^s \xi_s, \quad (1.55)$$

где  $\alpha_s^k$  — направляющие косинусы между осями  $\xi^k$  и  $\eta^s$ , образующие таблицу (1.7). Из второго равенства (1.55)

$$\eta_l^k = \alpha_{ls} a^{km} \frac{\partial \xi^s}{\partial \kappa^m}, \quad \alpha_{ls} = \alpha_s^l. \quad (1.56)$$

Из определения  $\eta_l^k$  и очевидного равенства  $r = \eta^k \eta_k$  можно получить также такую формулу для  $\eta^k$ :

$$\eta^k = \frac{1}{2} \eta_k^s \frac{\partial r^2}{\partial \kappa^s}, \quad r^2 = r \cdot r. \quad (1.57)$$

Направляющие косинусы векторов  $e_s$  по отношению к осям стабилизированной платформы равны:

$$e_s \cdot \xi_k = \frac{r^s \cdot \xi_k}{\sqrt{a^{ss}}}. \quad (1.58)$$

Рассмотрим частный случай уравнений (1.54) — (1.58), когда координаты  $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$  ортогональны. В этом случае векторы основного базиса перпендикулярны друг другу. Векторы взаимного базиса совпадают по направлению с векторами основного. Отличны от нуля лишь диагональные составляющие метрического тензора, которые выражаются через коэффициенты Ляме  $h_s$ :

$$a_{ss} = \frac{1}{a^{ss}} = h_s^2. \quad (1.59)$$

Для ортогональных координат отличны от нуля лишь символы Кристоффеля  $\Gamma_{nm}$ , в которых либо  $k = m$ , либо  $n = m$ . Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln \sqrt{a^{ss}} &= -\Gamma_{sk}^s \dot{\kappa}^k - \Gamma_{0s}^s, \\ \Gamma_{0k, s} &= -\Gamma_{0s, k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

С учетом указанных обстоятельств уравнения (1.54) переходят в следующие (не суммировать по  $s$ !):

$$\left. \begin{aligned} h_s \dot{\kappa}^s &= \int_0^t \left\{ n_{e_s} - h_s [\Gamma_{0s}^s \dot{\kappa}^s + \Gamma_{ks}^s \dot{\kappa}^k \dot{\kappa}^s + \Gamma_{kk}^s (\dot{\kappa}^k)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\Gamma_{0k}^s \dot{\kappa}^k + \Gamma_{00}^s - \text{grad}^L V \eta_l^s] \right\} dt + h_s(0) \dot{\kappa}^s(0), \\ \kappa^s &= \int_0^t (h_s \dot{\kappa}^s) \frac{1}{h_s} dt + \kappa^s(0), \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

где суммирование ведется по  $k$ , отличным от  $s$ .

Формулами (1.61) заменяются в случае ортогональных координат формулы (1.54). Соотношения (1.55), (1.57) сохраняют силу, соотношения (1.58), (1.56) заменяются такими:

$$e_s \cdot \xi_k = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \xi_k}{\partial \kappa^s}, \quad \eta_l^k = \alpha_{ls} \frac{\partial \xi^s}{\partial \kappa^k} \frac{1}{h_k^2}. \quad (1.62)$$

В случае ортогональных криволинейных координат  $\kappa^s$  кинематическую схему инерциальной системы можно, очевидно, построить и на основе управляемой гирорамы, так как направления  $r^s$  (или, что все равно,  $r_s$ ) образуют в этом случае жесткий трехгранник, которым может быть, в частности, трехгранник платформы управляемой гирорамы.

Для формирования управляющих моментов (1.42) необходимы выражения для проекций  $\omega_{(s)}$  вектора  $\omega$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $r_1 r_2 r_3$  на направления образующих его векторов. Эти выражения имеют вид \*):

$$\omega_{(s)} = \sqrt{a^{ss}} \epsilon^{snk} (\Gamma_{nm, k} \dot{\kappa}^m + \Gamma_{0n, k}), \quad (1.63)$$

где  $\Gamma_{nm, k}$  — символы Кристоффеля первого рода.

Индексы  $s$  и  $k$  в формуле (1.63) различны. Суммирование ведется лишь по  $n$ . Как уже было отмечено, для ортогональных координат отличны от нуля лишь символы Кристоффеля, в которых либо  $k = m$ , либо  $n = m$ . Символы Леви-Чивита  $\epsilon^{snk} = \pm 1/h_s h_n h_k$ , где знак определяется порядком следования индексов  $s, n, k$ . Принимая во внимание

---

\*) Андреев В. Д., Об уравнениях невозмущенной работы инерциальной системы, определяющей криволинейные координаты. Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 5, 1965.

равенства (1.59), из формул (1.63) получаем теперь (взяв расстановку индексов  $snk = 123, 231, 312$ ):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{(1)} &= \frac{1}{h_2 h_3} (\Gamma_{2m, 3} \dot{\kappa}^m + \Gamma_{02, 3}), \\ \omega_{(2)} &= \frac{1}{h_1 h_3} (\Gamma_{3m, 1} \dot{\kappa}^m + \Gamma_{03, 1}), \\ \omega_{(3)} &= \frac{1}{h_1 h_2} (\Gamma_{1m, 2} \dot{\kappa}^m + \Gamma_{01, 2}). \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Если координаты  $\kappa^s$  определяют положение объекта в связанной с Землей системе координат  $O_1 \eta^1 \eta^2 \eta^3$ , будучи стационарными относительно Земли, то

$$\eta^s = \eta^s(\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3) \quad (1.65)$$

и, в соответствии с таблицей (1.7),

$$\left. \begin{aligned} \xi^1 &= \eta^1 \cos ut - \eta^2 \sin ut, \\ \xi^2 &= \eta^1 \sin ut + \eta^2 \cos ut, \\ \xi^3 &= \eta^3. \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

В этом случае при вычислении элементов метрического тензора, коэффициентов Ляме и символов Кристоффеля можно считать  $t=0$ , так как координатная сетка  $\kappa^1 \kappa^2 \kappa^3$  движется (вращается с угловой скоростью  $\omega$ ) как единое целое и свойства пространства, определяемого криволинейными координатами  $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ , не зависят явно от времени. Для символов  $\Gamma_{0k, s}$  и  $\Gamma_{00, s}$  в этом случае, используя соотношения (1.52), (1.65), (1.66), приходим к выражениям, также не зависящим от времени:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{0k, s} &= u \left( \frac{\partial \eta^1}{\partial \kappa^k} \frac{\partial \eta^2}{\partial \kappa^s} - \frac{\partial \eta^2}{\partial \kappa^k} \frac{\partial \eta^1}{\partial \kappa^s} \right), \\ \Gamma_{00, s} &= -\frac{u^2}{2} \frac{\partial}{\partial \kappa^s} [(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2]. \end{aligned} \right\} \quad (1.67)$$

Укажем еще следующее. В случае криволинейных ортогональных координат вместо первых трех уравнений (1.61) можно, очевидно, воспользоваться первым векторным уравнением (1.36). Спроектировав это уравнение на

направления  $r_2, r_3, r_1$ , получим:

$$v_{(s)} = \int_0^t \left[ n_{(s)} - \omega_{(l)} v_{(k)} \epsilon_{lks} \frac{1}{h_l h_k h_s} + g_{(s)} \right] dt + v_{(s)}(0). \quad (1.67a)$$

Но (не суммировать по  $s$ !)

$$v_{(s)} = h_s \left( \dot{\kappa}^s + \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^s \right), \quad (1.68)$$

откуда

$$\kappa^s = \int_0^t \left[ \frac{v_{(s)}}{h_s} - \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^s \right] dt + \kappa^s(0). \quad (1.69)$$

Эти уравнения могут быть использованы вместо последних трех уравнений (1.61).

Из определения взаимных векторов и из равенств (1.65), (1.66) имеем:

$$\frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^s = \frac{u}{h_s^2} \left( \eta^1 \frac{\partial \eta^2}{\partial \kappa^s} - \eta^2 \frac{\partial \eta^1}{\partial \kappa^s} \right). \quad (1.70)$$

Заметим, что если в формулы (1.67a) вместо  $\omega_{(l)}, v_{(k)}$  подставить выражения (1.63), (1.68), то после простых преобразований придем к первым трем формулам (1.69).

**1.1.6. Уравнения идеальной работы в ортодромических, геоцентрических и географических координатах.** Ортодромические координаты  $r, S, z$  определены равенствами (1.17) и таблицей направляющих косинусов (1.16). Если принять здесь  $\kappa^1 = r, \kappa^2 = S, \kappa^3 = z$ , то получаются следующие значения коэффициентов Ляме:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r \cos z, \quad h_3 = r. \quad (1.71)$$

Из соотношений (1.70), (1.17) и таблицы (1.16) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^1 &= 0, \\ \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^2 &= \frac{u}{\cos z} (\beta_{33} \cos z - \beta_{32} \sin z \sin S - \beta_{31} \sin z \cos S), \\ \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^3 &= u (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S). \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Воспользовавшись известными выражениями \*) отличных

---

\*) См., например, Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

от нуля символов Кристоффеля через коэффициенты Ляме, находим:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{21,2} &= \Gamma_{12,2} = -\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{22}^1 = r \cos^2 z, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{31}^3 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ -\Gamma_{23,2} &= -\Gamma_{32,2} = \Gamma_{22,3} = r^2 \sin z \cos z, \\ \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = -\operatorname{tg} z, \\ \Gamma_{22}^3 &= \sin z \cos z, \\ \Gamma_{31,3} &= \Gamma_{13,3} = -\Gamma_{33,1} = -\Gamma_{33}^1 = r. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

В соответствии с равенствами (1.17), (1.67) и таблицей (1.16) отличны от нуля также символы:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00,1} &= -ru^2 [1 - (\beta_{31} \cos z \cos S + \\ &\quad + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z)^2], \\ \Gamma_{00,2} &= r^2 u^2 \cos z (\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \\ &\quad + \beta_{33} \sin z) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Gamma_{00,3} &= r^2 u^2 (\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z) \times \\ &\quad \times (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ \Gamma_{01,2} &= -\Gamma_{02,1} = \\ &= ru \cos z (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ \Gamma_{01,3} &= -\Gamma_{03,1} = ru (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S), \\ \Gamma_{02,3} &= -\Gamma_{03,2} = \\ &= r^2 u \cos z (\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z). \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

Далее, принимая во внимание равенства (1.52), (1.71), (1.59), находим:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \Gamma_{00,1}, \quad \Gamma_{00}^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 z} \Gamma_{00,2}, \quad \Gamma_{00}^3 = \frac{1}{r^2} \Gamma_{00,3}, \\ \Gamma_{01}^2 &= \frac{1}{r^2 \cos^2 z} \Gamma_{01,2}, \quad \Gamma_{01}^3 = \frac{1}{r^2} \Gamma_{01,3}, \\ \Gamma_{02}^1 &= -\Gamma_{01,2}, \quad \Gamma_{03}^1 = -\Gamma_{01}^3, \\ \Gamma_{02}^3 &= \frac{1}{r^2} \Gamma_{02,3}, \quad \Gamma_{03}^2 = -\frac{1}{r^2 \cos^2 z} \Gamma_{02,3}. \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$



Для проекций  $\omega_{(s)}$  из соотношений (1.64), (1.71), (1.73), (1.74) получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{(1)} &= \dot{S} \sin z + \\ &\quad + u (\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z), \\ \omega_{(2)} &= -\dot{z} - u (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S), \\ \omega_{(3)} &= \dot{S} \cos z + \\ &\quad + u (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (1.76)$$

Проекции  $v_{(s)}$  в соответствии с формулами (1.68), (1.71), (1.72), (1.76) находятся в таком виде:

$$v_{(1)} = \dot{r}, \quad v_{(2)} = r\omega_{(3)}, \quad v_{(3)} = -r\omega_{(2)}. \quad (1.77)$$

Сравнение первой и третьей формул (1.76) дает, кроме того, равенство

$$\omega_{(1)} = \omega_{(3)} \operatorname{tg} z + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S). \quad (1.78)$$

Найдем проекции  $g_{(s)}$ . Направления векторов  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $r_1$  совпадают в рассматриваемом случае с направлениями осей сопровождающего трехгранника  $Ox_3y_3z_3$  ортодромической координатной сетки, введенного в п. 1.1.2. Поэтому

$$g_{(1)} = g_{z_3}, \quad g_{(2)} = g_{x_3}, \quad g_{(3)} = g_{y_3}, \quad (1.79)$$

или, приняв во внимание равенства (1.19), (1.20),

$$\left. \begin{aligned} g_{(1)} &= g_{z_2}(r, \varphi), \\ g_{(2)} &= g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ g_{(3)} &= g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

где  $g_{y_2}(r, \varphi)$ ,  $g_{z_2}(r, \varphi)$  заданы формулами (1.26) или (1.27). Входящая в эти формулы геоцентрическая широта  $\varphi$  выражается через  $z$  и  $S$  третьим равенством (1.18).

Обратившись к соотношениям (1.67), (1.69) и приняв во внимание полученные выше промежуточные формулы, находим следующие уравнения идеальной работы инерциальной системы, определяющей ортодромические координаты,

в том случае, когда за основу системы взята управляемая гирорама:

$$\left. \begin{aligned}
 v_{x_3} &= \int_0^t \left[ n_{x_3} + v_{y_3} \omega_{z_3} - \dot{r} \omega_{y_3} + \right. \\
 &\quad \left. + g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \right] dt + v_{x_3}(0), \\
 v_{y_3} &= \int_0^t \left[ n_{y_3} - v_{x_3} \omega_{z_3} + \dot{r} \omega_{x_3} + \right. \\
 &\quad \left. + g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \right. \\
 &\quad \left. - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \right] dt + v_{y_3}(0), \\
 \dot{r} &= \int_0^t [n_{z_3} + v_{x_3} \omega_{y_3} - v_{y_3} \omega_{x_3} + g_{z_2}(r, \varphi)] dt + \dot{r}(0), \\
 r &= \int_0^t \dot{r} dt + r(0), \\
 \omega_{x_3} &= -\frac{v_{y_3}}{r}, \quad \omega_{y_3} = \frac{v_{x_3}}{r}, \\
 \omega_{z_3} &= \omega_{y_3} \operatorname{tg} z + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \\
 S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} [\omega_{y_3} + u (\beta_{31} \sin z \cos S + \\
 &\quad + \beta_{32} \sin z \sin S - \beta_{33} \cos z)] dt + S(0), \\
 z &= - \int_0^t [\omega_{x_3} + u (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S)] dt + z(0), \\
 \sin \varphi &= \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z, \\
 M_{y_3}^2 &= H_2 \omega_{x_3}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_3}, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_{z_3}.
 \end{aligned} \right\} (1.81)$$

При переходе к уравнениям (1.81) всюду индексы «2», «3», «1» заменены на индексы « $x_3$ », « $y_3$ », « $z_3$ », т. е. на

обозначения осей геоцентрического сопровождающего трехгранника. Блок-схема инерциальной системы, соответствующая уравнениям идеальной работы (1.81), представлена на рис. 1.7.

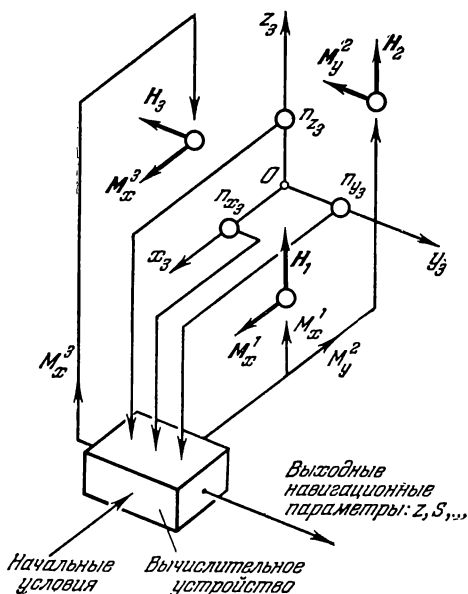


Рис. 1.7.

В случае, если за основу инерциальной системы взята гиросtabilизированная платформа, из уравнений (1.81) изымаются выражения для управляющих моментов  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  и добавляется таблица направляющих косинусов между осями  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$  и осями  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$  стабилизированной платформы. Эти направляющие косинусы получаются либо из первой группы соотношений (1.62), либо непосредственно из определения трехгранника  $Ox_3y_3z_3$ .

Уравнения (1.81) получены на основании уравнений (1.67), (1.69). Вместо них можно воспользоваться также уравнениями (1.61), приняв во внимание соотношения

$$h_s \operatorname{grad}' V \eta_l^s = g_{(s)}. \quad (1.82)$$

Из уравнений (1.81) для ортодромических координат вытекают как частный случай уравнения идеальной работы для геоцентрических координат. Чтобы их получить, надо заменить  $z$  и  $S$  на  $\varphi$  и  $\lambda$ , положить  $\beta_{ii} = 1$ ,  $\beta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и заменить индексы « $x_3$ », « $y_3$ », « $z_3$ » на индексы « $x_2$ », « $y_2$ », « $z_2$ », соответствующие введенным в п. 1.1.2 обозначениям осей геоцентрического сопровождающего трехгранника.

Получим уравнения идеальной работы для географических координат. Географические координаты определены соотношениями (1.8a). Приняв  $\kappa^1 = h$ ,  $\kappa^2 = \lambda$ ,  $\kappa^3 = \varphi'$ , находим для них коэффициенты Ляме:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= 1, \\ h_2 &= \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right) \cos \varphi', \\ h_3 &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h. \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

Далее из равенств (1.8a), (1.70) имеем:

$$\frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^1 = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^2 = u, \quad \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^3 = 0. \quad (1.84)$$

Для отличных от нуля символов Кристоффеля получаем такие значения:

$$\left. \begin{aligned} -\Gamma_{22,1} &= -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = h_2 \cos \varphi', \\ -\Gamma_{33,1} &= -\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{31,3} = \Gamma_{13,3} = h_3, \\ \Gamma_{22}^3 &= -\Gamma_{23,2} = -\Gamma_{32,2} = h_2 h_3 \sin \varphi', \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{h_2} \cos \varphi', \quad \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = -\frac{h_3}{h_2} \sin \varphi', \\ \Gamma_{31}^3 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{h_3}, \quad \Gamma_{22}^3 = \frac{h_2}{h_3} \sin \varphi', \\ \Gamma_{33,3} &= \frac{3ae^2(1 - e^2) h_3 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{5/2}}, \\ \Gamma_{33}^3 &= \frac{3ae^2(1 - e^2) \sin \varphi' \cos \varphi'}{h_3(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{5/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

Согласно равенствам (1.52), (1.59), (1.83), (1.67), отличны от нуля также символы:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{00,1} &= \Gamma_{00}^1 = -u^2 h_2 \cos \varphi', & \Gamma_{00,3} &= u^2 h_2 h_3 \sin \varphi', \\ \Gamma_{00}^3 &= u^2 \frac{h_2}{h_3} \sin \varphi', \\ \Gamma_{01,2} &= -\Gamma_{02,1} = -\Gamma_{02}^1 = u h_2 \cos \varphi', \\ \Gamma_{02,3} &= -\Gamma_{03,2} = u h_2 h_3 \sin \varphi', \\ \Gamma_{01}^2 &= \frac{1}{h_2} u \cos \varphi', \\ \Gamma_{02,3} &= u \frac{h_2}{h_3} \sin \varphi', & \Gamma_{03,2} &= -u \frac{h_3}{h_2} \sin \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

Проекции  $\omega_{(s)}$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $r_1 r_2 r_3$  на образующие его векторы получаются из равенств (1.64), (1.83), (1.85), (1.86) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{(1)} &= (\dot{\lambda} + u) \sin \varphi', & \omega_{(2)} &= -\dot{\varphi}', \\ \omega_{(3)} &= (\dot{\lambda} + u) \cos \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

Из соотношений (1.68), (1.84), (1.87) имеем далее:

$$\left. \begin{aligned} v_{(1)} &= \dot{h}, & v_{(2)} &= \left( \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right) \omega_{(3)} = r_2 \omega_{(3)}, \\ v_{(3)} &= - \left[ \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h \right] \omega_{(2)} = -r_3 \omega_{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

где  $r_2$ ,  $r_3$  — полученные ранее радиусы кривизны (1.11) главных нормальных сечений поверхности  $h = \text{const}$ .

Из сравнения первой и третьей формул (1.87) находим:

$$\omega_{(1)} = \omega_{(3)} \operatorname{tg} \varphi'. \quad (1.89)$$

Осталось определить входящие в подынтегральные выражения (1.67а) проекции  $g_{(1)}$ ,  $g_{(2)}$ ,  $g_{(3)}$  напряженности поля тяготения Земли. Если полагать поле тяготения заданным разложением (1.27), то в соответствии с таблицей направляющих косинусов (1.14) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} g_{(1)} &= g_{z_1} = g_{z_2} \cos(\varphi' - \varphi) - g_{y_2} \sin(\varphi' - \varphi), \\ g_{(2)} &= g_{y_1} = g_{z_2} \sin(\varphi' - \varphi) + g_{y_2} \cos(\varphi' - \varphi), \\ g_{(3)} &= g_{x_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Теперь, исходя из уравнений (1.67а), (1.69), получаем следующие аналогичные (1.81) уравнения идеальной работы инерциальной навигационной системы, определяющей географические координаты:

$$\left. \begin{aligned}
 v_{x_1} &= \int_0^t (n_{x_1} + v_{y_1} \omega_{z_1} - \dot{h} \omega_{y_1}) dt + v_{x_1}(0), \\
 v_{y_1} &= \int_0^t (n_{y_1} + \dot{h} \omega_{x_1} - v_{x_1} \omega_{z_1} + g_{y_1}) dt + v_{y_1}(0), \\
 \dot{h} &= \int_0^t (n_{z_1} + v_{x_1} \omega_{y_1} - v_{y_1} \omega_{x_1} + g_{z_1}) dt + \dot{h}(0), \\
 h &= \int_0^t \dot{h} dt + h(0), \\
 \varphi' &= - \int_0^t \omega_{x_1} dt + \varphi(0), \quad \lambda = \int_0^t \left( \frac{\omega_{y_1}}{\cos \varphi'} - u \right) dt + \lambda(0), \\
 \omega_{y_1} &= \frac{v_{x_1}}{r_2}, \quad \omega_{x_1} = - \frac{v_{y_1}}{r_3}, \quad \omega_{z_1} = \omega_{y_1} \operatorname{tg} \varphi', \\
 r_2 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h, \\
 r_3 &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h, \\
 M_y^2 &= H_2 \omega_{x_1}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_1}, \quad M_x^3 = - H_3 \omega_{z_1}, \\
 g_{y_1} &= g_{z_2} \sin(\varphi' - \varphi) + g_{y_2} \cos(\varphi' - \varphi), \\
 g_{z_1} &= g_{z_2} \cos(\varphi' - \varphi) - g_{y_2} \sin(\varphi' - \varphi).
 \end{aligned} \right\} (1.91)$$

В уравнениях (1.91) индексы « $x_1$ », « $y_1$ », « $z_1$ » соответствуют введенным в п. 1.1.2 обозначениям осей географического сопровождающего трехгранника. В последние две формулы (1.91) входят  $\varphi$  и  $r$ . Они находятся из соотношений (1.13), (1.15).

## § 1.2. Уравнения ошибок систем инерциальной навигации

**1.2.1. Возмущенный режим работы инерциальной системы. Основные инструментальные погрешности.** Уравнения идеальной работы, приведенные в предыдущем параграфе, описывают функционирование системы инерциальной навигации лишь в том случае, когда ее элементы и устройства идеальны (не имеют инструментальных погрешностей) и когда начальные условия работы системы точно соответствуют начальным обстоятельствам движения объекта.

В действительных конструкциях перечисленные условия выполняются лишь с некоторой степенью приближения. Поэтому режим работы инерциальной системы отличается от описываемого уравнениями идеальной работы, а навигационные параметры определяются системой с ошибками. Этот режим работы можно назвать *возмущенным*.

Уравнения для отклонений переменных, описывающих состояние инерциальной системы, от их значений, определяемых уравнениями идеальной работы, естественно назвать *уравнениями ошибок*. Эти уравнения определяют устойчивость работы системы в целом. Они дают также связь между погрешностями элементов схемы и неточностями задания начальных условий, с одной стороны, и ошибками определения навигационных параметров, с другой. Таким образом, свойства уравнений ошибок определяют в конечном счете точность работы инерциальной системы.

Решение уравнений ошибок позволяет предъявить требования к характеристикам элементов системы, если она должна обеспечить заданную точность, или рассчитать точность определения навигационных параметров, если характеристики элементов заданы. Изучение уравнений ошибок позволяет, далее, обоснованно провести выбор алгоритма работы инерциальной системы. Без анализа этих уравнений невозможно строгое обоснование допустимости тех или иных упрощений уравнений идеальной работы. Наконец, лишь на основании изучения свойств уравнений ошибок можно судить о необходимости коррекции работы инерциальной системы, а также об эффективности того или иного способа коррекции.

В систему инерциальной навигации входит, как правило, достаточно большое количество элементов и устройств. Все

они приносят свои погрешности в работу системы. Однако было бы неправильным пытаться отразить в уравнениях ошибок погрешности возможно большего числа элементов. Наоборот, следует по возможности свести погрешности всех элементов к нескольким характерным.

В качестве таких характерных, основных инструментальных погрешностей в инерциальных системах навигации можно принять инструментальные погрешности ее чувствительных элементов: ньютонометров и гироскопов. Если структура схемы неизменна, то погрешности любых других ее элементов и устройств всегда могут быть, очевидно, сведены к некоторым эквивалентным погрешностям первичной информации, т. е. к погрешностям чувствительных элементов системы.

**1.2.2. Уравнения ошибок определения координат.** Уравнения ошибок инерциальной системы, определяющей декартовы координаты объекта (соответствующая схема рассмотрена в п. 1.1.4), получаются варьированием уравнений идеальной работы (1.36), (1.38) — (1.40). Они приводятся к следующей системе векторных уравнений \*):

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \delta \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \frac{3 \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}}{r^2} = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}), \quad (1.92)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta \mathbf{m}, \quad (1.93)$$

$$\delta \mathbf{r}_1 = \theta \times \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{r}_2 = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}_1, \quad (1.94)$$

где  $\Delta \mathbf{n}$  и  $\Delta \mathbf{m}$  — векторы инструментальных погрешностей ньютонометров и гироскопов системы,  $\delta \mathbf{r}_2$  — вектор полной ошибки определения местоположения объекта в системе координат  $O_1 \xi \eta \zeta$ . Дифференцирование в уравнениях (1.92), (1.93) проведено в основной декартовой системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$ .

В проекциях на оси вращающегося с угловой скоростью  $\omega$  трехгранника  $x y z$  (этот трехгранник может быть, например,

---

\*) Андреев В. Д., Об общих уравнениях инерциальной навигации. Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 2, 1964. Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.



связан с платформой инерциальной системы) уравнения (1.92) — (1.94) дают:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta\ddot{x} + \left[ \frac{\mu}{r^5} (y^2 + z^2 - 2x^2) - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right] \delta x + \\
 + \left( \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - \frac{3\mu xy}{r^5} \right) \delta y - 2\omega_z \delta\dot{y} + \\
 + \left( \omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y - \frac{3\mu xz}{r^5} \right) \delta z + 2\omega_y \delta\dot{z} = \\
 = \Delta n_x - 2(\Delta m_y \dot{z} - \Delta m_z \dot{y}) - \Delta \dot{m}_y z + \Delta \dot{m}_z y - \\
 - \omega_x (\Delta m_y y + \Delta m_z z) - \Delta m_x (\omega_y y + \omega_z z) + \\
 + 2x (\omega_y \Delta m_y + \omega_z \Delta m_z), \\
 \delta\ddot{y} + \left[ \frac{\mu}{r^5} (z^2 + x^2 - 2y^2) - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right] \delta y + \\
 + \left( \omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x - \frac{3\mu yz}{r^5} \right) \delta z - 2\omega_x \delta\dot{z} + \\
 + \left( \omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z - \frac{3\mu yx}{r^5} \right) \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = \\
 = \Delta n_y - 2(\Delta m_z \dot{x} - \Delta m_x \dot{z}) - \Delta \dot{m}_z x + \Delta \dot{m}_x z - \\
 - \omega_y (\Delta m_z z + \Delta m_x x) - \Delta m_y (\omega_z z + \omega_x x) + \\
 + 2y (\omega_z \Delta m_z + \omega_x \Delta m_x), \\
 \delta\ddot{z} + \left[ \frac{\mu}{r^5} (x^2 + y^2 - 2z^2) - \omega_x^2 - \omega_y^2 \right] \delta z + \\
 + \left( \omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y - \frac{3\mu zx}{r^5} \right) \delta x - 2\omega_y \delta\dot{x} + \\
 + \left( \omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x - \frac{3\mu zy}{r^5} \right) \delta y + 2\omega_x \delta\dot{y} = \\
 = \Delta n_z - 2(\Delta m_x \dot{y} - \Delta m_y \dot{x}) - \Delta \dot{m}_x y + \Delta \dot{m}_y x - \\
 - \omega_z (\Delta m_x x + \Delta m_y y) - \Delta m_z (\omega_x x + \omega_y y) + \\
 + 2z (\omega_x \Delta m_x + \omega_y \Delta m_y);
 \end{aligned} \right\} (1.95)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\theta}_x + \omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y &= \Delta m_x, \\
 \dot{\theta}_y + \omega_z \theta_x - \omega_x \theta_z &= \Delta m_y, \\
 \dot{\theta}_z + \omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x &= \Delta m_z;
 \end{aligned} \right\} (1.96)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= \theta_y z - \theta_z y, \quad \delta y_1 = \theta_z x - \theta_x z, \\ \delta z_1 &= \theta_x y - \theta_y x, \\ \delta x_2 &= \delta x + \delta x_1, \quad \delta y_2 = \delta y + \delta y_1, \\ \delta z_2 &= \delta z + \delta z_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.97)$$

Уравнения ошибок инерциальных систем, определяющих произвольные криволинейные координаты, также получаются варьированием соответствующих уравнений идеальной работы. Для случая, когда ньютонометры  $n_s$  системы ориентированы по векторам  $r^s$  взаимного базиса, т. е. когда уравнениями идеальной работы служат соотношения (1.54) — (1.58), первая группа уравнений ошибок получается в таком виде \*):

$$\begin{aligned} & \delta \ddot{\kappa}^k + \frac{\mu}{r^3} \delta \kappa^k + 2(\Gamma_{m\sigma}^k \dot{\kappa}^m + \Gamma_{0\sigma}^k) \delta \dot{\kappa}^\sigma + \\ & + \left[ \dot{\kappa}^m \dot{\kappa}^n \left( \frac{\partial}{\partial \kappa^\sigma} \Gamma_{mn}^k + \Gamma_{mn}^s \Gamma_{s\sigma}^k \right) + 2\dot{\kappa}^n \left( \frac{\partial}{\partial \kappa^\sigma} \Gamma_{0n}^k + \Gamma_{0n}^s \Gamma_{s\sigma}^k \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\ddot{\kappa}^s + \Gamma_{00}^s) \Gamma_{s\sigma}^k + \frac{\partial}{\partial \kappa^\sigma} \Gamma_{00}^k - \right. \\ & \quad \left. - \frac{3\mu}{4r^5} a^{kn} \frac{\partial r^2}{\partial \kappa^n} \frac{\partial r^2}{\partial \kappa^\sigma} \right] \delta \kappa^\sigma = \\ & = \Delta n^k - \epsilon^{stk} \left\{ 2\Delta m^p a_{sp} a_{tl} \left( \dot{\kappa}^l + \frac{\partial r}{\partial t} \cdot r^l \right) + \right. \\ & \quad \left. + a_{ns} [\Delta \dot{m}^n + \Delta m^l (\Gamma_{lm}^n \dot{\kappa}^m + \Gamma_{0l}^n)] \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial \kappa^l} \right\}. \quad (1.98) \end{aligned}$$

Эти уравнения аналогичны по своему смыслу уравнениям (1.95). Здесь  $\Delta n^k$ ,  $\Delta m^n$  — контравариантные составляющие векторов  $\Delta n$ ,  $\Delta m$  инструментальных погрешностей в основном базисе.

Вторая группа дифференциальных уравнений ошибок сводится к системе

$$\dot{\theta}^k + \theta^l (\Gamma_{ls}^k \dot{\kappa}^s + \Gamma_{0l}^k) = \Delta m^k, \quad (1.99)$$

где  $\theta^k$  — контравариантные составляющие вектора  $\theta$  в основном базисе. Система (1.99) равносильна, очевидно, векторному

---

\*) Андреев В. Д., Об уравнениях ошибок инерциальной системы, определяющей произвольные криволинейные координаты движущегося объекта. Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.

уравнению (1.93) или соответствующим скалярным уравнениям (1.96).

Полные ошибки  $\delta x_2^s$  определения криволинейных координат  $x^s$  находятся теперь по формулам

$$\delta x_2^k = \delta x^k + \delta x_1^k, \quad \delta x_1^k = \epsilon^{stk} a_{ns} \theta^n \frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial x^t}, \quad (1.100)$$

аналогичным формулам (1.94), (1.97).

Уравнения (1.98) — (1.100) и вытекающие из них уравнения для конкретных координатных сеток громоздки и сложны. Они не обладают, как правило, достаточно четко выраженной симметрией, которая могла бы облегчить их анализ. Упрощение этих уравнений за счет пренебрежения частью входящих в них членов в общем случае невозможно, так как в зависимости от характера движения объекта решающее значение могут иметь различные члены этих уравнений. Уравнения (1.98) — (1.100) линейны, но коэффициенты их, определяемые траекторией движения объекта, являются сложными функциями времени.

Для различных координатных сеток уравнения (1.98) — (1.100) будут принимать различный вид. Это обстоятельство вместе с уже отмеченной зависимостью коэффициентов уравнений от характера траектории объекта делает число возникающих здесь вариантов практически необозримым.

Дело облегчается, однако, тем, что, как правило, нет надобности рассматривать уравнения ошибок непосредственно в форме вариаций тех же координат, что и определяемые инерциальной системой. Действительно, когда речь идет об анализе уравнений невозмущенного функционирования (идеальной работы) инерциальной системы, то одна из задач при этом — выбор координатной сетки. Здесь надо иметь возможность рассмотрения уравнений идеальной работы непосредственно в тех координатных сетках, из которых делается выбор. В задачу же анализа уравнений ошибок входит, прежде всего, исследование таких характеристик системы, как ее устойчивость и зависимость величин ошибок от инструментальных погрешностей элементов и неточностей задания начальных условий. Эти характеристики можно получить изучением уравнений ошибок не обязательно в тех координатах, в которых работает сама инерциальная система, а в любых других, удачный выбор которых может облегчить

анализ. Разумеется, при этом инструментальные погрешности элементов и ошибки начальных условий должны быть пересчитаны в координаты, выбранные для исследования уравнений ошибок.

Возможность перевода уравнений (1.98)—(1.100) из одних координат в другие прямо следует из того, что они являются уравнениями в вариациях основного уравнения инерциальной навигации (1.3), которое, очевидно, инвариантно по отношению к системе координат, выбранной для его решения. Да и сами уравнения (1.98)—(1.100) имеют тензорный характер и свойства их в силу этого не зависят от выбора системы координат.

Можно показать, в частности, что введением вектора ошибки

$$\delta \mathbf{r} = \delta \kappa^k \mathbf{r}_k \quad (1.101)$$

уравнения (1.98)—(1.100) переводятся в уравнения (1.92)—(1.94) или в соответствующие им уравнения (1.95)—(1.97). Связь ошибок  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  с ошибками  $\delta \kappa^s$  вытекает из определения (1.50) векторов  $\mathbf{r}_k$  и таблицы направляющих косинусов  $\alpha_{ij}$  между осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\xi^1$ ,  $\xi^2$ ,  $\xi^3$ . Эта связь задается соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial \xi^s}{\partial \kappa^k} \alpha_{s1} \delta \kappa^k, \\ \delta y &= \frac{\partial \xi^s}{\partial \kappa^k} \alpha_{s2} \delta \kappa^k, \\ \delta z &= \frac{\partial \xi^s}{\partial \kappa^k} \alpha_{s3} \delta \kappa^k. \end{aligned} \right\} \quad (1.102)$$

Для ортогональных криволинейных координат  $\kappa^s$  в качестве трехгранника  $xuz$  может быть взят трехгранник  $\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_1$ . Для ортодромических координат в этом случае из соотношений (1.102) получаются формулы:

$$\delta x = r \delta S \cos z, \quad \delta y = r \delta z, \quad \delta z = \delta r. \quad (1.103)$$

Аналогичные формулы имеют место для геоцентрических координат; они получаются из формул (1.103) заменой  $S$  и  $z$  на  $\lambda$  и  $\varphi$ .

Для географических координат имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta \lambda \cos \varphi' \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right), \\ \delta y &= \delta \varphi' \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h \right], \\ \delta z &= \delta h. \end{aligned} \right\} \quad (1.104)$$

**1.2.3. Различные представления уравнений ошибок определения координат.** В дальнейшем в качестве уравнений ошибок определения координат будут рассматриваться, как правило, уравнения (1.92)—(1.94) или соответствующие им скалярные уравнения (1.95)—(1.97).

Уравнения (1.95)—(1.97) получены проектированием векторных уравнений (1.92)—(1.94) на оси некоторого, вообще говоря, произвольного трехгранника  $xuz$ , вращающегося с абсолютной угловой скоростью  $\omega$ . При анализе уравнений ошибок (1.95)—(1.97) часто оказывается удобным выбрать специальную ориентацию трехгранника  $xuz$ .

Пусть трехгранник  $xuz$  будет ориентирован неизменно. Тогда в уравнениях (1.95)—(1.97) надо положить  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , в результате чего уравнения (1.95)—(1.96) принимают особенно простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \frac{\mu}{r^5} [(y^2 + z^2 - 2x^2) \delta x - 3xy \delta y - 3xz \delta z] &= \\ &= \Delta n_x - 2(\Delta m_y \dot{z} - \Delta m_z \dot{y}) - \Delta \dot{m}_y z + \Delta \dot{m}_z y, \\ \delta \ddot{y} + \frac{\mu}{r^5} [(z^2 + x^2 - 2y^2) \delta y - 3yz \delta z - 3yx \delta x] &= \\ &= \Delta n_y - 2(\Delta m_x \dot{z} - \Delta m_z \dot{x}) - \Delta \dot{m}_x z + \Delta \dot{m}_z x, \\ \delta \ddot{z} + \frac{\mu}{r^5} [(x^2 + y^2 - 2z^2) \delta z - 3zx \delta x - 3zy \delta y] &= \\ &= \Delta n_z - 2(\Delta m_x \dot{y} - \Delta m_y \dot{x}) - \Delta \dot{m}_x y + \Delta \dot{m}_y x; \end{aligned} \right\} \quad (1.105)$$

$$\dot{\theta}_x = \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z. \quad (1.106)$$

Уравнения (1.97) не меняются.

Если трехгранник  $xuz$  — сопровождающий на сфере, окружающей Землю, и ось  $z$  его направлена вдоль вектора  $\mathbf{r}$ , то в уравнениях (1.95), (1.97) надо положить  $x = y = 0$ ,  $z = r$ , после чего они примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \delta\dot{y} + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \delta\dot{z} = \\ = \Delta n_x - 2\Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r - \Delta m_z r \omega_x - \Delta m_x r \omega_z, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - \\ - 2\omega_x \delta\dot{z} + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = \\ = \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{r} + \Delta \dot{m}_x r - \Delta m_z r \omega_y - \Delta m_y r \omega_z, \\ \delta\ddot{z} - \left( 2\frac{\mu}{r^3} + \omega_x^2 + \omega_y^2 \right) \delta z + (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) \delta x - \\ - 2\omega_y \delta\dot{x} + (\omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x) \delta y + 2\omega_x \delta\dot{y} = \\ = \Delta n_z + 2r(\Delta m_x \omega_x + \Delta m_y \omega_y); \end{aligned} \right\} \quad (1.107)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= \theta_y r, & \delta y_1 &= -\theta_x r, & \delta z_1 &= 0, \\ \delta x_2 &= \delta x + \delta x_1, & \delta y_2 &= \delta y + \delta y_1, & \delta z_2 &= \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (1.108)$$

Уравнения (1.96) сохраняют свой вид.

Уравнения (1.107), (1.108), (1.96) представляют собой проекции уравнений (1.92)—(1.94) на оси сопровождающего трехгранника  $xuz$ . Ориентация осей  $x$  и  $y$  этого трехгранника в плоскости горизонта осталась произвольной. Здесь возможны различные частные случаи.

Возможно, например, совмещение трехгранника  $xuz$  с сопровождающим трехгранником ортодромической или геоцентрической координатной сетки. Можно выбрать ориентацию осей  $x$  и  $y$  такой, чтобы удовлетворялось условие  $\omega_z = 0$ . Тогда уравнения (1.95), (1.96) записываются следующим

образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \delta x + \omega_x \omega_y \delta y + \dot{\omega}_y \delta z + 2\omega_y \delta \dot{z} = \\ = \Delta n_x - 2\Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r - \Delta m_z r \omega_x, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 \right) \delta y - \dot{\omega}_x \delta z - 2\omega_x \delta \dot{z} + \omega_y \omega_x \delta x = \\ = \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{r} + \Delta \dot{m}_x r - \Delta m_z r \omega_y, \\ \delta\ddot{z} - \left( 2\frac{\mu}{r^3} + \omega_x^2 + \omega_y^2 \right) \delta z - \dot{\omega}_y \delta x - 2\omega_y \delta \dot{x} + \\ + \dot{\omega}_x \delta y + 2\omega_x \delta \dot{y} = \Delta n_z + 2r(\Delta m_x \omega_x + \Delta m_y \omega_y); \end{aligned} \right\} \quad (1.109)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_x + \omega_y \theta_z &= \Delta m_x, \\ \dot{\theta}_y - \omega_x \theta_z &= \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z + \omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x &= \Delta m_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

Уравнения (1.97) переходят в уравнения (1.108).

В коэффициенты уравнений (1.109), (1.110) входят лишь  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ . Они связаны с  $v_x$ ,  $v_y$  равенствами

$$\omega_x = -\frac{v_y}{r}, \quad \omega_y = \frac{v_x}{r}. \quad (1.111)$$

В силу ограниченности проекций  $v_x$ ,  $v_y$  (и  $\dot{v}_x$ ,  $\dot{v}_y$ ) абсолютной скорости (и ускорения) объекта, величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  (и их производные) всегда ограничены. Это позволяет применить к уравнениям (1.109), (1.110) различные приближенные методы исследования.

В заключение рассмотрения примеров ориентации трехгранника  $xuz$ , к которому отнесены уравнения (1.95)–(1.97), остановимся на следующем. Если совместить этот трехгранник с сопровождающим трехгранником географической координатной сетки (направив ось  $u$  на север), то в коэффициентах уравнений (1.95), (1.97), согласно равенствам (1.8а) и таблице (1.10), надо взять:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= -\frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}}, \\ z &= h + a(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.112)$$

Разложив выражения для  $y$  и  $z$  в ряды по степеням  $e$  и ограничившись членами с  $e^2$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} y &= -ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi', \\ z &= h + a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.113)$$

Но из равенств (1.13)

$$r = h + a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' \right). \quad (1.114)$$

Из соотношений (1.112)—(1.114) следует, что если пренебречь в уравнениях (1.95), (1.97) слагаемыми, содержащими произведения  $e^2$  на  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и инструментальные погрешности, то уравнения (1.95), (1.97) в проекциях на оси географического сопровождающего трехгранника примут тот же вид, что и уравнения (1.107), (1.198), а при  $\omega_z = 0$  уравнения (1.95)—(1.97) перейдут соответственно в уравнения (1.109), (1.110), (1.108). При этом точность получаемых уравнений сохраняется, так как уже при получении уравнений (1.95) были допущены аналогичные пренебрежения (была отброшена, например, вариация несферической составляющей поля тяготения Земли, которая содержит множителем  $e^2$ ).

**1.2.4. Уравнения ошибок ориентации осей чувствительных элементов и определения заданных направлений в пространстве.** Известно, что наряду с определением координат и скорости движущегося объекта в задачу инерциальной системы входит, как правило, определение ориентации объекта в пространстве. Легко усмотреть, что дело здесь в конечном счете сводится к определению ориентации чувствительных элементов инерциальных систем.

В возмущенном режиме работы ориентация осей чувствительности ньютометров и гироскопов отличается от их положений, соответствующих уравнениям идеальной работы. Это ведет к ошибкам ориентации объекта и к ошибкам определения заданных направлений в пространстве.

Если за основу кинематической схемы инерциальной системы взят пространственный измеритель абсолютной угловой скорости, по осям  $x, y, z$  платформы которого установлены ньютометры, то ошибки ориентации платформы характе-



ризируются вектором малого угла поворота  $\theta$ , удовлетворяющим уравнению (1.93). Этот же вектор характеризует ошибку ориентации чувствительных элементов, если за основу схемы будет взята свободная или управляемая гироскопия (или гиросtabilизированная платформа), а управляющие моменты будут функциями лишь времени.

Несколько сложнее обстоит дело, когда ориентация трехгранника  $xuz$ , вдоль осей которого установлены ньютонометры, будет функцией не только времени, но и определяемых инерциальной системой координат. Уравнений (1.93) становится в этом случае недостаточно для описания возмущенного положения трехгранника  $xuz$ . В самом деле,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  — лишь инструментальные погрешности. Дополнительное отклонение этого трехгранника, зависящее от ошибок, определяемых системой координат, не учтено уравнением (1.93), хотя, конечно, содержится неявно в уравнениях (1.92)—(1.94) в целом.

Если оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  заданы по отношению к осям  $\eta^1$ ,  $\eta^2$ ,  $\eta^3$  (или, что все равно, к осям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) направляющими косинусами  $\beta_{ij}$  ( $\eta^1$ ,  $\eta^2$ ,  $\eta^3$ ), то можно показать\*), что погрешности  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  ориентации ортов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  характеризуются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \left[ (\theta \times \eta_i) \cdot x + \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \eta^s} (\theta \times r + \delta r) \cdot \eta_s \right] \eta_i, \\ \delta y &= \left[ (\theta \times \eta_i) \cdot y + \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial \eta^s} (\theta \times r + \delta r) \cdot \eta_s \right] \eta_i, \\ \delta z &= \left[ (\theta \times \eta_i) \cdot z + \frac{\partial \beta_{i3}}{\partial \eta^s} (\theta \times r + \delta r) \cdot \eta_s \right] \eta_i. \end{aligned} \right\} \quad (1.115)$$

Здесь  $\eta_s$  — орты осей  $\eta^s$ , а векторы  $\delta r$  и  $\theta$  определены уравнениями (1.92), (1.93); по индексам  $s$  и  $i$  предполагается суммирование от 1 до 3.

Введением вектора угла малого поворота  $\theta_1$ , определяющего положение трехгранника  $x + \delta x$ ,  $y + \delta y$ ,  $z + \delta z$  по отношению к трехграннику  $xuz$ , соотношения (1.115)

---

\*) Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.

представляются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x} &= -\theta_x + \beta_{i3} \frac{\partial \beta_{i2}}{\partial \eta^s} [\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_s + (\theta_y z - \theta_z y) \beta_{s1} + \\ &\quad + (\theta_z x - \theta_x z) \beta_{s2} + (\theta_x y - \theta_y x) \beta_{s3}], \\ \theta_{1y} &= -\theta_y + \beta_{i1} \frac{\partial \beta_{i3}}{\partial \eta^s} [\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_s + (\theta_z x - \theta_x z) \beta_{s2} + \\ &\quad + (\theta_x y - \theta_y x) \beta_{s3} + (\theta_y z - \theta_z y) \beta_{s1}], \\ \theta_{1z} &= -\theta_z + \beta_{i2} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \eta^s} [\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_s + (\theta_x y - \theta_y x) \beta_{s3} + \\ &\quad + (\theta_y z - \theta_z y) \beta_{s1} + (\theta_z x - \theta_x z) \beta_{s2}]. \end{aligned} \right\} \quad (1.116)$$

Отметим несколько важных частных случаев формул (1.116).

Если направляющие косинусы  $\beta_{ij}$  не зависят явно от координат  $\eta^s$ , то  $\partial \beta_{ij} / \partial \eta^s \equiv 0$  и из (1.116) следует, что

$$\theta_{1x} = -\theta_x, \quad \theta_{1y} = -\theta_y, \quad \theta_{1z} = -\theta_z. \quad (1.117)$$

Если ось  $z$  трехгранника  $xuz$  совпадает в невозмущенном положении с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , то

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \\ \theta_{1z} &= -\theta_z + \beta_{i2} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \eta^s} [\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}_s + r (\theta_y \beta_{s1} - \theta_x \beta_{s2})], \end{aligned} \right\} \quad (1.118)$$

причем, если ориентация осей  $x$  и  $y$  в плоскости горизонта такова, что  $\omega_z = 0$ , то

$$\theta_{1z} = -\theta_z, \quad (1.119)$$

а при ориентации осей  $x$  и  $y$  по странам света (ось  $y$  направлена на север)

$$\theta_{1z} = -\theta_z + \left( -\frac{\delta x}{r} + \theta_y \right) \operatorname{tg} \varphi. \quad (1.120)$$

В случае ортодромического сопровождающего трехгранника в формуле (1.120) надо заменить  $\varphi$  на  $z$ .

Формулы (1.115) и вытекающие из них формулы справедливы для случая, когда оси чувствительности ньютонометров образуют ортогональный трехгранник, вне зависимости от того, декартовы или криволинейные координаты объекта определяются. В случае, когда направления  $\mathbf{e}_s$  осей

чувствительности ньютонометров не ортогональны друг другу, получаются выражения для  $\delta \mathbf{e}_s$ , аналогичные выражениям (1.115). Именно, тогда

$$\delta \mathbf{e}_s = \left( -\mathbf{e}_s \cdot \delta \boldsymbol{\xi}_k + \frac{\partial e_{sk}}{\partial \kappa^\sigma} \delta \kappa_1^\sigma \right) \boldsymbol{\xi}_k. \quad (1.121)$$

Обратим еще внимание на следующее обстоятельство. Формулы (1.115), (1.121) и вытекающие из них формулы сохраняют, очевидно, силу и для определения ошибок ориентации заданных направлений в пространстве, не связанных жестко с осями чувствительности ньютонометров. Этими направлениями могут быть направления, по которым ориентируется снаряд, стартующий с подвижного объекта, или направления на земные ориентиры и небесные тела, используемые для коррекции инерциальной системы. В частности, из формул (1.116) следует, что если на борту объекта строится по показаниям инерциальной системы (и в осях платформы) направление на удаленную звезду (т. е. неизменно ориентированное в системе координат  $O_1 \xi^1 \xi^2 \xi^3$  направление), характеризующееся единичным вектором  $\boldsymbol{\rho}$ , то ошибка  $\delta \boldsymbol{\rho}$  построения этого направления зависит лишь от инструментальных погрешностей гироскопов, т. к.

$$\delta \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\rho}. \quad (1.122)$$

### § 1.3. Некоторые результаты анализа уравнений ошибок автономных инерциальных систем

**1.3.1. Вторая группа уравнений ошибок.** Приведем основные результаты анализа уравнений \*) ошибок автономных инерциальных систем: уравнений ошибок координат (1.95)—(1.97) и уравнений ошибок ориентации (1.116).

Вторая группа (1.96) уравнений ошибок координат решается, по крайней мере в квадратурах, для произвольного движения объекта [произвольных  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$ ] и независимо от вида  $\Delta m_x(t)$ ,  $\Delta m_y(t)$ ,  $\Delta m_z(t)$ . В самом деле, система (1.96) равносильна векторному уравнению (1.93),

---

\*) Подробный анализ этих уравнений проведен в нашей книге «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.

которое в проекциях на неизменно ориентированные оси приводит к трем независимым уравнениям первого порядка (1.106), немедленно интегрируемым. Переходя к проекциям на оси подвижного (вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ ) трехгранника, получаем решение уравнений (1.96) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \sum_{i=1}^3 \alpha_{i1} \left[ \int_0^t (\Delta m_x \alpha_{i1} + \Delta m_y \alpha_{i2} + \Delta m_z \alpha_{i3}) dt + \right. \\ &\quad \left. + \theta_x^0 \alpha_{i1}^0 + \theta_y^0 \alpha_{i2}^0 + \theta_z^0 \alpha_{i3}^0 \right], \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^3 \alpha_{i2} \left[ \int_0^t (\Delta m_x \alpha_{i1} + \Delta m_y \alpha_{i2} + \Delta m_z \alpha_{i3}) dt + \right. \\ &\quad \left. + \theta_x^0 \alpha_{i1}^0 + \theta_y^0 \alpha_{i2}^0 + \theta_z^0 \alpha_{i3}^0 \right], \\ \theta_z &= \sum_{i=1}^3 \left[ \int_0^t (\Delta m_x \alpha_{i1} + \Delta m_y \alpha_{i2} + \Delta m_z \alpha_{i3}) dt + \right. \\ &\quad \left. + \theta_x^0 \alpha_{i1}^0 + \theta_y^0 \alpha_{i2}^0 + \theta_z^0 \alpha_{i3}^0 \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.123)$$

где  $\alpha_{ij}$  — направляющие косинусы между осями  $x, y, z$  и  $\xi_*, \eta_*, \zeta_*$ , а  $\alpha_{ij}^0$  — их начальные значения. При заданном законе движения объекта они будут известными функциями времени.

Решение (1.123) может быть получено и непосредственно из уравнений (1.96) без перехода к неизменно ориентированному трехграннику, если заметить, что общее решение однородных уравнений (1.96) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \sum_{i=1}^3 C_i \alpha_{i1}, & \theta_y &= \sum_{i=1}^3 C_i \alpha_{i2}, \\ \theta_z &= \sum_{i=1}^3 C_i \alpha_{i3}, \end{aligned} \right\} \quad (1.124)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные. В том, что выражения (1.124) являются общим решением однородных уравнений (1.96), можно убедиться непосредственной подстановкой.

Надо только учесть при этом, что

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i2} \alpha_{i3} = - \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i3} \alpha_{i2}, \\ \omega_y &= \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i3} \alpha_{i1} = - \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i1} \alpha_{i3}, \\ \omega_z &= \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i1} \alpha_{i3} = - \sum_{i=1}^3 \dot{\alpha}_{i3} \alpha_{i1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

Из решения (1.123) вытекает оценка:

$$\begin{aligned} \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2} &\leq \sqrt{\theta_x^{02} + \theta_y^{02} + \theta_z^{02}} + \\ &+ \int_0^t \sqrt{\Delta m_x^2 + \Delta m_y^2 + \Delta m_z^2} dt. \end{aligned} \quad (1.126)$$

При  $\Delta m_x = 0$ ,  $\Delta m_y = 0$ ,  $\Delta m_z = 0$  соотношение (1.126) превращается в равенство. Это соответствует тому, что однородные уравнения (1.96) имеют первый интеграл

$$\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 = \text{const}, \quad (1.127)$$

для получения которого надо умножить первое уравнение (1.96) на  $\theta_x$ , второе на  $\theta_y$ , третье на  $\theta_z$  и результаты сложить. Из (1.93) получается также при  $\Delta m = 0$ , что

$$\theta = \theta^0. \quad (1.128)$$

Это равенство включает в себя равенство (1.127).

Соотношения (1.127), (1.128) в случае гиросtabilизированной платформы имеют очевидный смысл: если инструментальные погрешности (свободные уходы) гироскопов отсутствуют, то платформа сохраняет свою начальную ориентацию. Аналогичный смысл имеет оценка (1.126) уходов платформы.

Необходимо отметить еще следующее. Из соотношений (1.127), (1.128) следует неасимптотическая устойчивость однородных уравнений второй группы (1.96). Однако эти уравнения суть уравнения первого приближения. Случай граничный — уравнения первого приближения имеют нулевые корни, поэтому по уравнениям первого приближения окончательного суждения об устойчивости сделать нельзя.

Точные уравнения для возмущений  $\delta\alpha_{ij}$  направляющих косинусов  $\alpha_{ij}$  между осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  получаются в таком виде \*):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\delta\alpha}_{i1} - \delta\alpha_{i2}\omega_z + \delta\alpha_{i3}\omega_y &= 0, \\ \dot{\delta\alpha}_{i2} - \delta\alpha_{i3}\omega_x + \delta\alpha_{i1}\omega_z &= 0, \\ \dot{\delta\alpha}_{i3} - \delta\alpha_{i1}\omega_y + \delta\alpha_{i2}\omega_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

$$(i = 1, 2, 3).$$

Они могут быть приведены к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\alpha_{11}^2 + \delta\alpha_{12}^2 + \delta\alpha_{13}^2) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\delta\alpha_{21}^2 + \delta\alpha_{22}^2 + \delta\alpha_{23}^2) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(\delta\alpha_{31}^2 + \delta\alpha_{32}^2 + \delta\alpha_{33}^2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.130)$$

откуда вытекает неасимптотическая устойчивость по отношению к возмущениям  $\delta\alpha_{ij}$ .

**1.3.2. Исследование устойчивости уравнений первой группы в случае движения объекта по параллели.** Обратимся к уравнениям (1.95) первой группы. Их исследование в общем случае наталкивается на непреодолимые трудности. До конца оказывается возможным исследовать их лишь при движении объекта с постоянной скоростью вдоль параллели, когда надлежащим выбором трехгранника  $xuz$  коэффициенты уравнений (1.95) могут быть сделаны постоянными, и при кеплеровом движении объекта.

В случае движения объекта на постоянном удалении  $r$  от центра Земли вдоль параллели с постоянной скоростью, взяв в качестве трехгранника  $xuz$  сопровождающий трехгранник геоцентрической координатной сетки, получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0, \quad \omega_y = u \cos \varphi + \frac{v}{r} = \text{const}, \\ \omega_z &= u \sin \varphi + \frac{v}{r} \operatorname{tg} \varphi = \text{const}, \\ \frac{\mu}{r^3} &= \omega_0^2 = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

---

\*) См. сноску на стр. 58.

где  $v$  — скорость движения, а  $\varphi$  — широта параллели. Тогда из (1.107) получаем первую группу уравнений ошибок в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x - 2\omega_z \delta \dot{y} + \\ + 2\omega_y \delta \dot{z} = \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - r\omega_z \Delta m_x, \\ \delta \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + \omega_y \omega_z \delta z + 2\omega_z \delta \dot{x} = \\ = \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - r\omega_y \Delta m_z - r\omega_z \Delta m_y, \\ \delta \ddot{z} - (2\omega_0^2 + \omega_y^2) \delta z - 2\omega_y \delta \dot{x} + \\ + \omega_z \omega_y \delta y = \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

Постоянные коэффициенты системы (1.132) определены равенствами (1.131). Характеристическое уравнение этой системы сводится к полному кубическому уравнению относительно квадрата неизвестной  $q = p^2$ . Это кубическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} q^3 + 2q^2(\omega_y^2 + \omega_z^2) + q[-3\omega_0^4 + 3\omega_0^2(\omega_y^2 - 2\omega_z^2) + \\ + (\omega_y^2 + \omega_z^2)^2] - \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(2\omega_0^2 + \omega_y^2 - 2\omega_z^2) = 0. \end{aligned} \quad (1.133)$$

Для устойчивости (неасимптотической, разумеется) уравнение (1.133) должно, как известно, иметь отрицательные или нулевые корни, причем кратным корням характеристического уравнения должны соответствовать линейные элементарные делители характеристической матрицы системы (1.132).

Для исследования устойчивости системы (1.132) в данном случае можно воспользоваться также тем обстоятельством, что однородную систему (1.132) можно трактовать как описывающую движение вблизи положения равновесия ( $\delta x = 0$ ,  $\delta y = 0$ ,  $\delta z = 0$ ) материальной точки под действием потенциальных сил с силовой функцией

$$\begin{aligned} U = -\frac{1}{2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(\delta x)^2 + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\delta y)^2 - \\ - (2\omega_0^2 + \omega_y^2)(\delta z)^2 + 2\omega_y \omega_z \delta y \delta z] \end{aligned} \quad (1.134)$$

и гироскопических сил

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_z \delta\dot{y} - 2\omega_y \delta\dot{z} - 2\omega_z \delta\dot{x}, \\ 2\omega_y \delta\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.135)$$

Однородная система (1.132) имеет интеграл энергии

$$(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2 - 2U = \text{const}, \quad (1.136)$$

который получается, если сложить и проинтегрировать уравнения (1.132), предварительно умноженные соответственно на  $\delta\dot{x}$ ,  $\delta\dot{y}$ ,  $\delta\dot{z}$ .

Если отбросить в однородных уравнениях (1.132) гироскопические силы (1.135), то останутся лишь потенциальные. Для устойчивости равновесия под действием потенциальных сил силовая функция должна иметь изолированный максимум в точке равновесия. Так как силовая функция (1.134) представляет собой квадратичную форму входящих в нее переменных, то условиями максимума будут условия Сильвестра положительной определенности квадратичной формы. В рассматриваемом случае они сводятся к неравенствам

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0, \quad 2\omega_0^2 - 2\omega_z^2 + \omega_y^2 < 0. \quad (1.137)$$

На рис. 1.8 прямые 1 и 2 соответствуют уравнениям

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 = 0 \quad \text{и} \quad 2\omega_0^2 - 2\omega_z^2 + \omega_y^2 = 0. \quad (1.138)$$

Из расположения этих прямых следует, что области, определяемые неравенствами (1.137), не пересекаются, поэтому силовая функция не имеет максимума. Так как силовая функция является однородной функцией второй степени, то по известной теореме Ляпунова из отсутствия максимума ее

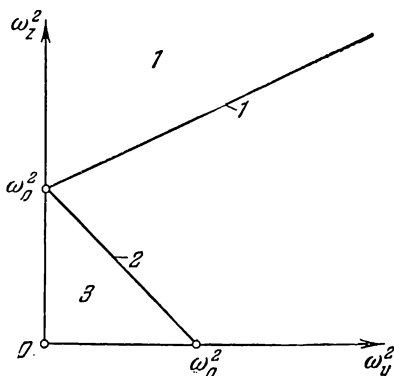


Рис. 1.8.



следует неустойчивость системы без необходимости рассматривать члены высших порядков.

Вернемся к гироскопическим силам (1.135). В областях 1 и 3 (см. рис. 1.8), где степень неустойчивости (число отрицательных коэффициентов устойчивости Пуанкаре) консервативной системы нечетна, гироскопические силы, согласно известной теореме Томсона и Тэта, не могут стабилизировать равновесие \*). В области 2, где степень неустойчивости четна, остается принципиальная возможность стабилизации гироскопическими силами. Эта стабилизация, как известно, имеет временный характер и разрушается силами полной внутренней диссипации.

**1.3.3. Решение первой группы уравнений ошибок для случаев неподвижного объекта и движения объекта по дуге неизменно ориентированного большого круга.** Построим решение первой группы уравнений ошибок (1.132), ограничившись случаем неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  объекта и случаем движения его с постоянной скоростью на постоянном удалении от центра Земли в плоскости, проходящей через центр Земли (движение по дуге большого круга на неподвижной сфере, окружающей Землю). Общий случай, т. е. случай движения по параллели, мы оставляем здесь в стороне, отсылая читателя к нашей книге \*\*), где этот случай подробно разобран. Для дальнейшего рассмотрения в настоящей книге нам будет достаточно двух указанных выше случаев.

Для неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  объекта, полагая трехгранник  $xuz$  ориентированным неизменно так, что его ось  $z$  совпадает с радиусом-вектором  $r$ , получаем уравнения ошибок в таком виде [надо положить в (1.132) проекции абсолютной угловой скорости  $\omega_x, \omega_y$  равными нулю]:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r, \\ \delta\ddot{z} - 2\omega_0^2 \delta z &= \Delta n_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.139)$$

---

\*) См. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.

\*\*) См. сноску на стр. 58.

Решение этих уравнений очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta z &= \delta z^0 \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2}} \int_0^t \Delta n_z \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.140)$$

При постоянных инструментальных погрешностях и нулевых начальных условиях имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z &= \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} (\operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t - 1). \end{aligned} \right\} \quad (1.141)$$

Заметим, что к уравнениям (1.139) сводится в первом приближении анализ уравнений ошибок инерциальной системы на активном участке полета баллистической ракеты.

В самом деле, если взять уравнения ошибок в форме (1.106), то, располагая ось  $y$  в плоскости траектории активного участка полета, будем иметь  $x = 0$ , и первые три

уравнения (1.106) переходят в такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \frac{\mu}{r^3} \delta x &= \Delta n_x - 2(\Delta m_y \dot{z} - \Delta m_z \dot{y}) - \\ &\quad - \Delta \dot{m}_y z + \Delta \dot{m}_z y, \\ \delta\ddot{y} + \frac{\mu}{r^5} [(z^2 - 2y^2) \delta y - 3yz \delta z] &= \\ &= \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{z} + \Delta \dot{m}_x z, \\ \delta\ddot{z} + \frac{\mu}{r^5} [(y^2 - 2z^2) \delta z - 3zy \delta y] &= \\ &= \Delta n_z - 2\Delta m_x \dot{y} - \Delta \dot{m}_x y. \end{aligned} \right\} \quad (1.142)$$

Ориентируя ось  $z$  вдоль направления  $r$  в точке старта и замечая, что отношение  $y/r$  — величина малая, из двух последних уравнений (1.142) получим с точностью до линейных относительно  $y/r$  членов:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} \delta y - 3 \frac{\mu}{r^3} \frac{y}{r} \delta z &= \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{z} + \Delta \dot{m}_x z, \\ \delta\ddot{z} - 2 \frac{\mu}{r^3} \delta z - 3 \frac{\mu}{r^3} \frac{y}{r} \delta y &= \Delta n_z - 2\Delta m_x \dot{y} - \Delta \dot{m}_x y. \end{aligned} \right\} \quad (1.143)$$

Если отбросить и слагаемые с множителем  $y/r$  ( $\leq 0,1$ ) и положить  $\mu/r^3 = \omega_0^2 = \text{const}$ , то из уравнений (1.142), (1.143) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - 2(\Delta m_y \dot{z} - \Delta m_z \dot{y}) - \Delta \dot{m}_y z, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{z} + \Delta \dot{m}_x z, \\ \delta\ddot{z} - 2\omega_0^2 \delta z &= \Delta n_z - 2\Delta m_x \dot{y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.144)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений (1.139) лишь правыми частями.

Рассмотрим случай движения с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга. Совместив ось  $z$  с радиусом-вектором  $r$  и расположив ось  $x$  в плоскости движения, будем иметь  $\omega_z = 0$ , и уравнения (1.132)

примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x + 2\omega_y \delta\dot{z} &= \Delta n_x - \Delta\dot{m}_y r, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + \Delta\dot{m}_x r - \omega_y r \Delta m_z, \\ \delta\ddot{z} - (2\omega_0^2 + \omega_y^2) \delta z - 2\omega_y \delta\dot{x} &= \\ &= \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (1.145)$$

Второе уравнение, дающее ошибку в плоскости, нормальной плоскости движения, отделилось. Его решение:

$$\begin{aligned} \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + \Delta\dot{m}_x r - \omega_y \Delta m_z r) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Оставшаяся система — первое и третье уравнения (1.145) — описывает ошибки в плоскости движения. Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$p^4 + p^2(-\omega_0^2 + 2\omega_y^2) - (\omega_0^2 - \omega_y^2)(2\omega_0^2 + \omega_y^2) = 0. \quad (1.147)$$

Если  $\omega_0^2 > \omega_y^2$ , т. е. скорость движения объекта меньше первой космической, то уравнение (1.147) имеет два вещественных и два комплексных сопряженных корня:

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= \pm \mu, \quad p_{3,4} = \pm j\nu, \\ \mu, \nu &= \sqrt{\frac{1}{2}(\pm \omega_0^2 \mp 2\omega_y^2 + \omega_0 \sqrt{9\omega_0^2 - 8\omega_y^2})}. \end{aligned} \right\} \quad (1.148)$$

При  $\omega_y = 0$  корень  $\pm \mu$  переходит в  $\pm \omega_0 \sqrt{2}$ , корень  $\pm j\nu$  — в  $\pm j\omega_0$ . При  $\omega_y = \omega_0$ , т. е. для движущегося по круговой орбите спутника,  $\mu = 0$ ,  $\nu = \omega_0$ . Зависимость величин  $\mu$  и  $\nu$  при непрерывном изменении  $\omega_y$  представлена на рис. 1.9. Величина  $\nu$  практически не меняется во всем диапазоне  $0 < \omega_y < \omega_0$ . Будучи равной  $\omega_0$  при  $\omega_y = 0$  и  $\omega_y = \omega_0$ , величина  $\nu$  достигает максимума при  $\omega_y = \omega_0 \sqrt{5/8}$ . Этот максимум равен  $\omega_0 \sqrt{9/8} \approx 1,06\omega_0$ . Величина  $\mu$  монотонно убывает от

$\mu = \omega_0 \sqrt{2}$  до 0. Она становится равной  $\nu$  в точке  $\omega_y = \omega_0 / \sqrt{2}$ . В этой точке  $\mu = \nu = \omega_0 \sqrt{5/2}$ . Следует отметить, что на участке  $0 < \omega_y < \omega_0/2$  значение  $\mu$  убывает едва на 0,15 своей

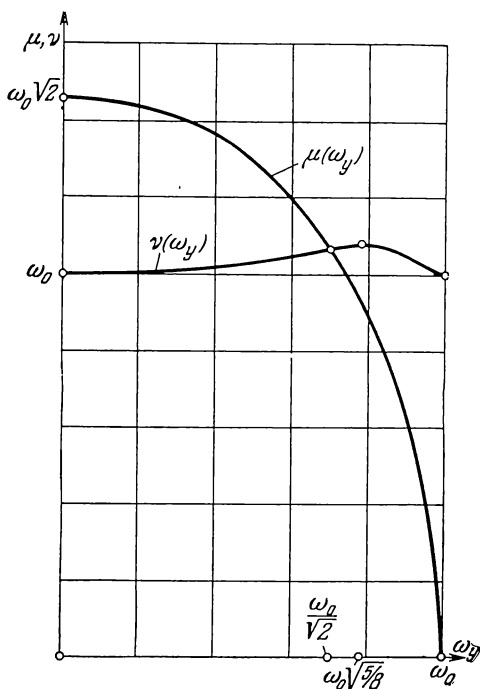


Рис. 1.9.

величины в точке  $\omega_y = 0$ . Все остальное изменение  $\mu$  происходит на участке  $\omega_0/2 < \omega_y < \omega_0$ , где  $\mu$  убывает очень быстро.

Общее решение первого и третьего уравнений (1.145) получается в виде:

$$\delta x = \frac{1}{(\mu^2 + \nu^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2)} \int_0^t \Delta n_x [\mu(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \nu^2) \times \left. \begin{aligned} &\times \operatorname{sh} \mu(t - \tau) + \nu(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \sin \nu(t - \tau) \end{aligned} \right] d\tau + \quad (1.149)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r}{\mu^2 + v^2} \int_0^t \Delta m_y [(\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \operatorname{ch} \mu(t - \tau) - \\
& - (\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \cos v(t - \tau)] d\tau - \\
& - \frac{2\omega_y}{\mu^2 + v^2} \int_0^t \Delta n_z [\operatorname{ch} \mu(t - \tau) - \cos v(t - \tau)] d\tau + \\
& + \frac{\delta x^0}{\mu^2 + v^2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \cos vt - \\
& - (\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \operatorname{ch} \mu t] + \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(\mu^2 + v^2)} \times \\
& \times [v(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \sin vt + \mu(\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \operatorname{sh} \mu t] + \\
& + \frac{\delta z^0 2\omega_y \mu v}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(\mu^2 + v^2)} (\mu \sin vt - v \operatorname{sh} \mu t) + \\
& + \frac{\delta \dot{z}^0 2\omega_y}{\mu^2 + v^2} (\cos vt - \operatorname{ch} \mu t), \quad (1.149) \\
\delta z = & \frac{2\omega_y}{\mu^2 + v^2} \int_0^t \Delta n_x [\operatorname{ch} \mu(t - \tau) - \cos v(t - \tau)] d\tau + \\
& + \frac{1}{\mu v (\mu^2 + v^2)} \int_0^t \Delta n_z [v(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \mu(t - \tau) - \\
& - \mu(\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \sin v(t - \tau)] d\tau - \\
& - \frac{2r\omega_y (\omega_0^2 - \omega_y^2)}{\mu v (\mu^2 + v^2)} \int_0^t \Delta m_y [\mu \sin v(t - \tau) - \\
& - v \operatorname{sh} \mu(t - \tau)] d\tau + \frac{\delta x^0 2\omega_y (\omega_0^2 - \omega_y^2)}{\mu v (\mu^2 + v^2)} \times \\
& \times (\mu \sin vt - v \operatorname{sh} \mu t) - \frac{(\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0) 2\omega_y}{\mu^2 + v^2} \times \\
& \times (\cos vt - \operatorname{ch} \mu t) + \frac{\delta z^0}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(\mu^2 + v^2)} \times
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times [\mu^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \cos vt + \\ & + v^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \operatorname{ch} \mu t] - \\ & - \frac{\delta \dot{z}^0}{(\mu^2 + v^2) \mu v} [\mu (\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \sin vt - \\ & - v (\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \operatorname{sh} \mu t]. \end{aligned} \right\} \quad (1.149)$$

При постоянных инструментальных погрешностях и нулевых начальных условиях из формул (1.146), (1.149) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu^2 + v^2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \cos vt + \right. \\ & \quad \left. + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \operatorname{ch} \mu t] \right\} + \\ & \quad + \frac{2\omega_y \mu v (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y)}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(2\omega_0^2 + \omega_y^2)(\mu^2 + v^2)} (\mu \sin vt - v \operatorname{sh} \mu t), \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y - r\omega_y \Delta m_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z &= \frac{\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y}{2\omega_0^2 + \omega_y^2} \left\{ -1 + \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(\mu^2 + v^2)} \times \right. \\ & \quad \times [\mu^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 - v^2) \cos vt + \\ & \quad \left. + v^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \operatorname{ch} \mu t] \right\} - \frac{2\omega_y \Delta n_x}{(\mu^2 + v^2) \mu v} \times \\ & \quad \times (\mu \sin vt - v \operatorname{sh} \mu t). \end{aligned} \right\} \quad (1.150)$$

Если  $\omega_y^2 \ll \omega_0^2$ , то решение уравнений (1.145) при постоянных инструментальных погрешностях может быть упрощено до такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \\ & - \frac{\omega_y \sqrt{2}}{\omega_0} \left[ \left( \frac{2}{3} \delta z^0 + \frac{\Delta n_z}{3\omega_0^2} \right) \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{3\omega_0} \delta \dot{z}^0 \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t \right], \end{aligned} \right\} \quad (1.151)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta y &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta y^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta z &= -\frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} + \left( \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} + \delta z^0 \right) \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{z}^0}{\sqrt{2} \omega_0} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (1.151)$$

Из формул (1.146), (1.149) можно получить выражения для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  в случае движения спутника по круговой орбите. Совершая предельный переход  $\omega_y \rightarrow \omega_0$ , приходим к таким формулам для этого случая:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_x [-3\omega_0(t-\tau) + 4 \sin \omega_0(t-\tau)] d\tau - \\ &\quad - r \int_0^t \Delta m_y d\tau - \frac{2}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_z [1 - \cos \omega_0(t-\tau)] d\tau + \\ &\quad + \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{\omega_0} (4 \sin \omega_0 t - 3\omega_0 t) + \\ &\quad + 6\delta z^0 (\sin \omega_0 t - \omega_0 t) + \frac{2\delta \dot{z}^0}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1), \\ \delta y &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y - \omega_0 r \Delta m_z) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + \\ &\quad + r \int_0^t \Delta m_x \cos \omega_0(t-\tau) d\tau + \delta y^0 \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{y}^0 - r \Delta m_x^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \end{aligned} \right\} \quad (1.152)$$



$$\left. \begin{aligned} \delta z = & \frac{2}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_x [1 - \cos \omega_0(t - \tau)] d\tau + \\ & + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_z \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{2(\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y)}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) + \\ & + \delta z^0 (4 - 3 \cos \omega_0 t) + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (1.152)$$

При постоянных инструментальных погрешностях и нулевых начальных условиях имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x = & \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \left[ -\frac{3}{2} \omega_0^2 t^2 + 4(1 - \cos \omega_0 t) \right] + \\ & + \left( \frac{4r \Delta m_y}{\omega_0} + \frac{2 \Delta n_z}{\omega_0^2} \right) (\sin \omega_0 t - \omega_0 t), \\ \delta y = & \frac{1}{\omega_0^2} (\Delta n_y - r \omega_0 \Delta m_z) (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z = & \frac{2 \Delta n_x}{\omega_0^2} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t) + \\ & + \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{2r \Delta m_y}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (1.153)$$

**1.3.4. Интегрирование уравнений первой группы для кеплерова движения объекта.** Перейдем к кеплерову движению объекта. Обратившись к векторному уравнению (1.92), можно заметить, что соответствующее ему однородное уравнение может быть представлено в виде

$$\delta \left( \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \right) = 0. \quad (1.154)$$

Таким образом, если считать точку  $O$ , в которой расположены чувствительные массы ньютонометров, совпадающей с центром масс объекта, то однородное уравнение (1.92)

будет уравнением в вариациях уравнения кеплерова движения объекта

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} = 0. \quad (1.155)$$

Общий интеграл уравнения (1.155), содержащий шесть произвольных постоянных, известен. На основании известной теоремы Пуанкаре частными решениями однородного уравнения (1.92) будут производные общего интеграла уравнения (1.155) по произвольным постоянным \*). Общее решение неоднородного уравнения может быть получено методом Лагранжа вариаций произвольных постоянных.

Свяжем с плоскостью орбиты объекта трехгранник  $O_1 \xi'_* \eta'_* \zeta'_*$ , совместив с ней плоскость  $O_1 \xi'_* \eta'_*$  этого трехгранника. Ось  $O_1 \xi'_*$  направим по нормали к плоскости орбиты так, чтобы движение объекта, если смотреть с конца этой оси, происходило против хода часовой стрелки. Кеплерово движение (эллиптическое) в плоскости орбиты определяется формулами \*\*):

$$\left. \begin{aligned} M &= v(t - t^0) + M^0, \quad v = \mu^{1/2} a^{-3/2}, \\ E - e \sin E &= M, \\ r &= a(1 - e \cos M), \quad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ \sigma &= v + \omega, \\ \sin E &= \frac{2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM, \end{aligned} \right\} \quad (1.156)$$

где  $a$  — большая полуось;  $e$  — эксцентриситет орбиты;  $M$ ,  $E$ ,  $v$  — средняя, эксцентрическая и истинная аномалии;  $v$  — средняя частота обращения по орбите;  $\sigma$  — угол между осью  $\xi'_*$  и радиусом-вектором  $\mathbf{r}$  текущего местоположения объекта;  $\omega$  — угол между осью  $\xi'_*$  и направлением на перигей;  $t^0$  — время прохождения через перигей;  $J_k$  — функции Бесселя.

\*) См., например, Г у р с а Э., Курс математического анализа, т. 2, Гостехиздат, 1933.

\*\*) См., например, Д у б о ш и н Г. Н., Небесная механика, Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.

Формулы (1.156) зависят от четырех произвольных постоянных:  $t^0$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $\omega$ . Две недостающие постоянные должны содержаться в определении плоскости орбиты по отношению

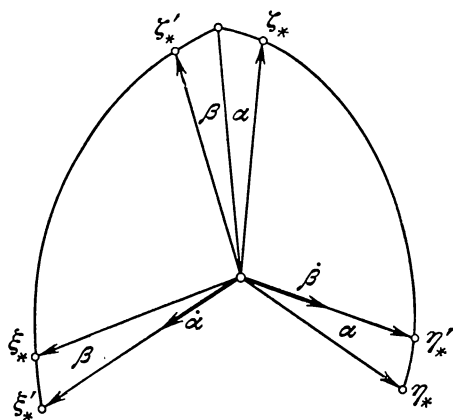


Рис. 1.10.

к системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Зададим расположение трехгранников  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  и  $O_1\xi'_*\eta'_*\zeta'_*$  (рис. 1.10) следующей таблицей направляющих косинусов:

	$\xi'_*$	$\eta'_*$	$\zeta'_*$	
$\xi_*$	$\cos \beta$	0	$\sin \beta$	(1.157)
$\eta_*$	$\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha \cos \beta$	
$\zeta_*$	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$	

Тогда

$$\left. \begin{aligned} r &= \xi_*\xi_* + \eta_*\eta_* + \zeta_*\zeta_*, \\ \xi_* &= r \cos \sigma \cos \beta, \quad \eta_* = r (\cos \sigma \sin \alpha \sin \beta + \sin \sigma \cos \alpha), \\ \zeta_* &= r (-\cos \sigma \cos \alpha \sin \beta + \sin \sigma \sin \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (1.158)$$

где  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  — орты соответствующих осей.

Формулы (1.156), (1.158) дают общий интеграл уравнения (1.155), зависящий от шести произвольных постоянных:  $t^0$ ,  $e$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Не уменьшая общности, можно принять

$$t^0 = 0, \quad \alpha = \beta = 0, \quad \omega = \sigma(0) = 0, \quad (1.159)$$

что упростит дальнейшие записи.

Образуем следующие линейные комбинации производных радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , определенного равенствами (1.156), (1.158), по произвольным постоянным:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}, \quad q_2 = \frac{1}{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial e}, \\ q_3 &= -\frac{1}{ae(1-e^2)} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{ae\nu} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t^0}, \\ q_4 &= \frac{1}{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \omega}, \quad q_5 = -\frac{1}{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta}, \quad q_6 = \frac{1}{a} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (1.160)$$

Обозначим через  $\mathbf{p}_i$  полные производные векторов  $\mathbf{q}_i$  по времени. Векторы  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  составляют, очевидно, систему частных решений уравнения (1.2).

Спроектировав векторы  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  орбитального трехгранника, ось  $z$  которого направлена вдоль вектора  $\mathbf{r}$ , а ось  $y$  совмещена с осью  $O_1\xi'_*$ , образуем из этих проекций матрицы  $A$  и  $B$ . Элементами матриц  $A$  и  $B$  будут:

$$\left. \begin{aligned} A_{1i} &= \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{x}, \quad A_{2i} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{z}, \quad A_{3i} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}, \quad A_{4i} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{z} \\ &\quad (i = 1, 2, 3, 4), \\ B_{1i} &= \mathbf{q}_{i+4} \cdot \mathbf{y}, \quad B_{2i} = \mathbf{p}_{i+4} \cdot \mathbf{y} \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \right\} \quad (1.161)$$

где  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  — орты осей орбитального трехгранника. При вычислении элементов матриц  $A$  и  $B$  должны быть приняты во внимание равенства:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \frac{d\mathbf{q}_i}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\omega_y \mathbf{z}, \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{z}}{dt} = \omega \mathbf{r}, \\ \omega_y &= \dot{v} = v \sqrt{1-e^2} \frac{a^2}{r^2}, \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \\ \dot{r} &= \frac{vea \sin v}{\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.162)$$

Проекция уравнения (1.92) на оси орбитального трехгранника  $x_{yz}$  получаются из уравнений (1.107), если в них положить  $\omega_x = 0$ . Они могут быть записаны в форме Коши в виде системы четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_y x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= \omega_y x_1 + x_4, \\ \dot{x}_3 &= -\omega_y x_4 - \frac{\mu x_1}{r^3} + \Delta n_x - 2\dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y, \\ \dot{x}_4 &= \omega_y x_3 + \frac{2\mu x_2}{r^3} + \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y, \end{aligned} \right\} \quad (1.163)$$

где  $x_1 = \delta x$ ,  $x_2 = \delta z$ , и системы второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_5 &= x_6, \\ \dot{x}_6 &= -\frac{\mu x_5}{r^3} + \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r\omega_y \Delta m_z, \end{aligned} \right\} \quad (1.164)$$

где  $x_5 = \delta y$ .

Величины  $x_1$ ,  $x_5$ ,  $x_2$  являются проекциями на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вектора  $\delta r$ , а  $x_3$ ,  $x_6$ ,  $x_4$  — проекциями вектора  $dr/dt$ . Элементы матриц  $A$  и  $B$  образуют системы линейно независимых решений однородных систем (1.163), (1.164), так как определители матриц  $A$  и  $B$  являются определителями Вронского этих решений и отличны от нуля:

$$|A| = -v^2/2, \quad |B| = v\sqrt{1-e^2}.$$

Общее решение однородных систем (1.163), (1.164) может быть представлено теперь в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} C_j \quad (i=1, 2, 3, 4), \quad x_i = \sum_{j=1}^2 B_{ij} C_{4+j} \quad (i=1, 2). \quad (1.165)$$

Решение неоднородных уравнений (1.163), (1.164) получается из формул (1.165) методом вариаций произвольных постоянных. Вводя матрицы  $D = A^{-1}$ ,  $G = B^{-1}$  и переходя от  $x_1$ ,  $x_5$ ,  $x_2$  снова к  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , получаем следующие вы-

ражения для проекций вектора  $\delta \mathbf{r}$  на оси орбитального триэдра \*):

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \sum_{i=1}^4 A_{1i} \left\{ \int_0^t [(\Delta n_x - 2\dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y) D_{i3} + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) D_{i4}] dt + \sum_{j=1}^4 D_{ij}^0 x_j^0 \right\}, \\ \delta z &= \sum_{i=1}^4 A_{2i} \left\{ \int_0^t [(\Delta n_x - 2\dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y) D_{i3} + \right. \\ &\quad \left. + (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) D_{i4}] dt + \sum_{j=1}^4 D_{ij}^0 x_j^0 \right\}, \\ \delta y &= \sum_{i=1}^2 B_{1i} \left[ \int_0^t (\Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - \right. \\ &\quad \left. - r\omega_y \Delta m_z) G_{i2} dt + \sum_{j=1}^2 G_{ij}^0 x_{j+4}^0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.166)$$

Входящие в выражения (1.166) элементы матриц  $A$ ,  $B$  и  $D$ ,  $G$  имеют вид \*\*):

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{-3vt(1+e \cos v)}{2\sqrt{1-e^2}}, \\ A_{12} &= \frac{2+e \cos v}{1+e \cos v} \sin v, \\ A_{13} &= \frac{2+e \cos v}{1+e \cos v} \cos v, & A_{14} &= \frac{r}{a}, \\ A_{21} &= \frac{r}{a} - \frac{3vte \sin v}{2\sqrt{1-e^2}}, & A_{22} &= -\cos v, \end{aligned} \right\} \quad (1.167)$$

\*) Андреев В. Д., Интегрирование уравнений ошибок системы инерциальной навигации для кеплеровых движений объекта. Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 2, 1965.

\*\*) Лурье А. И., Свободное падение материальной точки в кабине спутника. Прикладная математика и механика, т. XXVII, вып. 1, 1963.

$$\left. \begin{aligned}
 A_{23} &= \sin v, & A_{24} &= 0; \\
 B_{11} &= \frac{r}{a} \cos v, & B_{12} &= \frac{r}{a} \sin v; \\
 D_{13} &= \frac{2(1+e \cos v)}{v \sqrt{1-e^2}}, \\
 D_{23} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{v} \frac{e + 2 \cos v + e \cos^2 v}{1 + e \cos v}, \\
 D_{33} &= \frac{1}{v} \left[ -\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos v} (2 + e \cos v) \sin v + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3vt}{1-e^2} (1 + e \cos v) e \right], \\
 D_{43} &= \frac{1}{v} \left[ -e \sin v \frac{2 + e \cos v}{\sqrt{1-e^2} (1 + e \cos v)} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3vt}{(1-e^2)^2} (1 + e \cos v) \right], \\
 D_{14} &= \frac{2e \sin v}{v \sqrt{1-e^2}}, & D_{24} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{v} \sin v, \\
 D_{34} &= \frac{1}{v} \left[ \frac{3vt}{1-e^2} e^2 \sin v - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e \cos v} (2e - \cos v - e \cos v) \right], \\
 D_{44} &= \frac{1}{v} \left[ \frac{3vt}{(1-e^2)^2} e \sin v + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e \cos v + e^2 \cos^2 v - 2}{\sqrt{1-e^2} (1 + e \cos v)} \right]; \\
 G_{12} &= -\frac{\sqrt{1-e^2} \sin v}{v(1+e \cos v)}, \\
 G_{22} &= \frac{\sqrt{1-e^2} \cos v}{v(1+e \cos v)}.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.167)$$

Для величин  $C_i^0$ ,  $C_{i+4}^0$  получаются выражения:

$$C_i^0 = \sum_{j=1}^4 D_{ij}^0 x_j^0, \quad C_{i+4}^0 = \sum_{j=1}^2 G_{ij}^0 x_{i+4}^0. \quad (1.168)$$

Значения  $D_{13}^0$ ,  $D_{14}^0$ ,  $G_{12}^0$ ,  $G_{22}^0$  находятся из выражений (1.167), если в последних положить  $t=0$ ,  $v=0$ . Величины  $\dot{D}_{11}^0$ ,  $\dot{D}_{12}^0$ ,  $\dot{G}_{11}^0$  равны:

$$\left. \begin{aligned} D_{11}^0 = D_{21}^0 = 0, \quad D_{31}^0 = 1, \quad D_{41}^0 = -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \\ D_{12}^0 = \frac{2}{(1-e)^2}, \quad D_{22}^0 = \frac{1+e}{1-e}, \quad D_{32}^0 = D_{42}^0 = 0, \\ G_{11}^0 = \frac{1}{1-e}, \quad G_{21}^0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.169)$$

В формулах (1.168) в соответствии с равенствами (1.163), (1.164), (1.162)

$$\left. \begin{aligned} x_1^0 = \delta x^0, \quad x_2^0 = \delta z^0, \quad x_3^0 = \delta \dot{x}^0 + \frac{v}{\sqrt{1-e^2}} \delta z^0, \\ x_4^0 = \delta \dot{z}^0 - \frac{v}{\sqrt{1-e^2}} \delta x^0, \quad x_5^0 = \delta y^0, \quad x_6^0 = \delta \dot{y}^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.170)$$

При  $e=0$ , т. е. для круговой орбиты,

$$r=a, \quad \dot{r}=0, \quad v=\omega_y=\omega_0, \quad v=\omega_0 t, \quad \dot{\omega}_y=0, \quad (1.171)$$

и формулы (1.168) переходят в полученные ранее формулы (1.152).

**1.3.5. Зависимость ошибок определения координат и ориентации объекта от основных инструментальных погрешностей и погрешностей начальных условий.** В случае неподвижного в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  объекта при постоянных инструментальных погрешностях полные ошибки  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  определения координат выражаются через решения (1.140) уравнений первой группы и через решения

$$\theta_x = \int_0^t \Delta m_x dt + \theta_x^0, \quad \theta_y = \int_0^t \Delta m_y dt + \theta_y^0, \quad \theta_z = \int_0^t \Delta m_z dt + \theta_z^0. \quad (1.171a)$$



уравнений второй группы, вытекающие из соотношений (1.123), посредством формул (1.108). При постоянных инструментальных погрешностях из равенств (1.108), (1.171а), (1.140), (1.141) следуют выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} + r\theta_y^0 + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + r \Delta m_y t, \\ \delta y_2 &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} - r\theta_x^0 + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - r \Delta m_x t, \\ \delta z_2 &= -\frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} + \left( \delta z^0 + \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} \right) \text{ch } \omega_0 \sqrt{2} t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0 \sqrt{2}} \text{sh } \omega_0 \sqrt{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (1.172)$$

Ошибки  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$  складываются из постоянных составляющих, колеблющихся с частотой  $\omega_0$  Шулера (период  $\approx 84$  мин), и из составляющих, растущих пропорционально времени. Количественная сторона дела такова. Парциальные ошибки в 1 км вызываются: погрешностями ньютонометров  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y \approx 8 \cdot 10^{-4}$  м/сек<sup>2</sup> (т. е.  $\approx 8 \cdot 10^{-5}g$ ), погрешностями начальной ориентации  $\theta_x^0$ ,  $\theta_y^0 \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$  рад ( $\approx 0',55$ ), погрешностями начальных значений координат  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0 = 1$  км, погрешностями начальных значений скоростей  $\delta \dot{x}^0$ ,  $\delta \dot{y}^0 \approx \approx 1,25$  м/сек. Чтобы ошибка, вызываемая погрешностями  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$  (взяты с обратным знаком свободные уходы гироскопов), не превысила 1 км за 1 час работы системы, величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$  не должны превосходить  $4,4 \cdot 10^{-8}$  1/сек (т. е.  $0,009^\circ/\text{час}$ ).

Из третьей формулы (1.172) следует, что при длительной работе системы ошибка  $\delta z_2$  растет по экспоненциальному закону. Таким образом, время, в течение которого инерциальная система может с приемлемой точностью автономно

определять расстояние  $r$  до центра Земли, оказывается небольшим. Если, например, иметь в виду ошибку  $\delta z_2 = 1$  км, то при погрешностях ньютонометров и начальных условий, указанных выше при подсчете  $\delta x_2, \delta y_2$ , здесь можно говорить о времени порядка 10—15 мин. Следует отметить, что в рассматриваемом случае, когда объект неподвижен, возрастание ошибки  $\delta z_2$  не сказывается на величинах ошибок  $\delta x_2, \delta y_2$ .

Ошибки определения ориентации по отношению к неизменно ориентированным осям при постоянных инструментальных погрешностях гироскопов имеют, согласно равенствам (1.117), (1.171a), такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x} &= -\Delta m_x t - \theta_x^0, & \theta_{1y} &= -\Delta m_y t - \theta_y^0, \\ \theta_{1z} &= -\Delta m_z t - \theta_z^0, \end{aligned} \right\} \quad (1.173)$$

т. е. растут пропорционально времени.

Ошибки ориентации по отношению к азимутально свободному трехграннику определяются формулами (1.118), (1.119). При постоянных инструментальных погрешностях эти формулы дают:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x} &= -\frac{\Delta n_y}{r\omega_0^2} - \frac{1}{r} \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t - \\ &\quad - \frac{\delta \dot{y}^0}{r\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \theta_{1y} &= \frac{\Delta n_x}{r\omega_0^2} + \frac{1}{r} \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{x}^0}{r\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \theta_{1z} &= -\Delta m_z t - \theta_z^0. \end{aligned} \right\} \quad (1.174)$$

Из этих выражений следует, что углы  $\theta_{1x}, \theta_{1y}$ , характеризующие ошибки определения вертикали, содержат лишь постоянные и колеблющиеся с частотой  $\omega_0$  составляющие. Парциальные ошибки вертикали в  $1'$  получаются из-за:

погрешностей ньютонометров  $\Delta n_x, \Delta n_y \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$  м/сек<sup>2</sup>, погрешностей  $\delta x^0, \delta y^0 \approx 1,8$  км, погрешностей  $\delta \dot{x}^0, \delta \dot{y}^0 \approx \approx 2,3$  м/сек. Угол  $\theta_{1z}$ , характеризующий ошибку определения азимута, содержит растущую со временем составляющую. Это обстоятельство определяет жесткость требований к азимутальным гироскопам инерциальных систем (курсовых гироскопов, гироскопов направления).

Ошибки ориентации по отношению к геоцентрическому сопровождающему трехграннику отличаются от ошибок (1.174) лишь тем, что третья формула заменяется в соответствии с равенством (1.120), т. е. в этом случае

$$\theta_{1z} = -\Delta m_z t - \theta_z^0 + \frac{\delta x_2}{r} \operatorname{tg} \varphi, \quad (1.175)$$

где  $\delta x_2$  берется согласно первому соотношению (1.172). Смысл последнего слагаемого формулы (1.175) геометрически очевиден: в непосредственной близости к полюсу небольшие ошибки определения местоположения ведут к существенным ошибкам определения направления на север.

Перейдем к случаю движения объекта по дуге большого круга. В этом случае полные ошибки определения координат находятся из соотношений (1.108), в которые надо подставить  $\delta x, \delta y, \delta z$  и  $\theta_x, \theta_y$ . Значения  $\delta x, \delta y, \delta z$  определены равенствами (1.146), (1.149), а для ошибок  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  из формул (1.123) получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^0 \cos \omega_y t - \theta_z^0 \sin \omega_y t + \\ &+ \int_0^t [\Delta m_x \cos \omega_y (t - \tau) - \Delta m_z \sin \omega_y (t - \tau)] d\tau, \\ \theta_y &= \theta_y^0 + \int_0^t \Delta m_y d\tau, \\ \theta_z &= \theta_x^0 \sin \omega_y t + \theta_z^0 \cos \omega_y t + \\ &+ \int_0^t [\Delta m_x \sin \omega_y (t - \tau) + \Delta m_z \cos \omega_y (t - \tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.176)$$

При постоянных инструментальных погрешностях и постоянном значении  $\omega_y$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \left( \theta_x^0 + \frac{\Delta m_z}{\omega_y} \right) \cos \omega_y t + \left( -\theta_z^0 + \frac{\Delta m_x}{\omega_y} \right) \times \\ &\quad \times \sin \omega_y t - \frac{\Delta m_z}{\omega_y}, \\ \theta_y &= \theta_y^0 + \Delta m_y t, \\ \theta_z &= \left( \theta_x^0 + \frac{\Delta m_z}{\omega_y} \right) \sin \omega_y t - \left( -\theta_z^0 + \frac{\Delta m_x}{\omega_y} \right) \times \\ &\quad \times \cos \omega_y t + \frac{\Delta m_x}{\omega_y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.177)$$

Для скоростей, много меньших первой космической, из соотношений (1.108), (1.177), (1.151) получаем следующие приближенные выражения для  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \\ &\quad - \frac{\omega_y \sqrt{2}}{3\omega_0} \left[ \left( 2\delta z^0 + \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} \right) \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2} \delta \dot{z}^0}{\omega_0} \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t \right] + r \theta_y^0 + r \Delta m_y t, \\ \delta y_2 &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} + \frac{r \Delta m_z}{\omega_y} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - r \left( \theta_x^0 + \frac{\Delta m_z}{\omega_y} \right) \cos \omega_y t + \\ &\quad + r \left( \theta_z^0 - \frac{\Delta m_x}{\omega_y} \right) \sin \omega_y t, \\ \delta z_2 &= -\frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} + \left( \delta z^0 + \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} \right) \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t. \end{aligned} \right\} \quad (1.178)$$

Выражение для  $\delta z_2$  совпадает с третьим выражением (1.172). Выражение для  $\delta x_2$  отличается от соответствующего выражения (1.172) лишь четвертым слагаемым. Оно показы-

вает, что в рассматриваемом случае, в отличие от случая неподвижного основания, ошибка определения местоположения объекта в направлении движения содержит экспоненциально растущие составляющие. Они имеют множителем величину  $\omega_y/\omega_0$ . О количественном влиянии этих составляющих на величину  $\delta x_2$  хорошее представление дает такой пример.

Пусть величины  $\left(\delta z^0 + \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2}\right)$ ,  $\frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0}$  имеют тот же порядок,

что и  $\left(\delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2}\right)$ ,  $\frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0}$ . При этом условии, очевидно,

погрешности  $(\delta z^0 + \Delta n_z/2\omega_0^2)$ ,  $\delta \dot{z}^0/\omega_0$  начнут существенно сказываться на величине  $\delta x_2$  лишь тогда, когда по мере роста функций  $\text{sh } \omega_0 \sqrt{2} t$ ,  $\text{ch } \omega_0 \sqrt{2} t$  величины  $(2 \sqrt{2} \omega_y \text{sh } \omega_0 \sqrt{2} t)/3\omega_0$ ,  $(2\omega_y \text{ch } \omega_0 \sqrt{2} t)/3\omega_0$  примут значения, близкие к единице. Необходимое для этого время  $t_1$  легко оценить. Если значение  $\omega_y$  того же порядка, что и угловая скорость вращения Земли ( $\omega_0/\omega_y = \omega_0/u \approx 18$ ), то  $t_1 \approx 35$  мин, для  $\omega_0/\omega_y \approx 6$  (линейная скорость  $\approx 1000$  м/сек) указанное время уменьшается до  $t_1 \approx 25$  мин, при  $\omega_0/\omega_y \approx 3$  (скорость  $\approx 2000$  м/сек) величина  $t_1 \approx 20$  мин. Легко видеть, что использование приближенной формулы (1.178) для  $\delta x_2$  при  $\omega_y/\omega_0 = 1/3$  правомочно. Если принять во внимание характер изменения корней  $\mu$  и  $\nu$  характеристического уравнения (1.147) в зависимости от  $\omega_y$  (рис. 1.9), то можно легко показать, что приближенная формула (1.178) для  $\delta x_2$  дает удовлетворительную точность вплоть до  $\omega_y/\omega_0 \approx 1/2$ .

Выражение (1.178) для  $\delta y_2$  отличается от соответствующего выражения для случая неподвижного основания тем, что в нем теперь отсутствуют составляющие, растущие пропорционально времени. Вместо них появляются (два последних слагаемых) составляющие, колеблющиеся с частотой  $\omega_y$ . Амплитуды этих колебаний определяются отношениями  $r \Delta m_x/\omega_y$ ,  $r \Delta m_z/\omega_y$ . Если потребовать, чтобы эти амплитуды не превосходили 1 км, то отношения  $\Delta m_x/\omega_y$ ,  $\Delta m_z/\omega_y$  не должны превосходить величины порядка  $3 \cdot 10^{-4}$ . При  $\omega_y = u$  тогда получим  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y \approx 0,005^\circ/\text{час}$ , при  $\omega_y = 6u$  (скорость  $\approx 2000$  м/сек)  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y \approx 0,025^\circ/\text{час}$ , а при  $\omega_y = \omega_0$  соответственно  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y \approx 0,075^\circ/\text{час}$ .

Ошибки ориентации определяются соотношениями (1.117)–(1.120), (1.151), (1.177), (1.178). Особенности зависимости этих ошибок от инструментальных погрешностей и погрешностей начальных условий те же, что и для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta x_2$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ .

Рассмотрим зависимость ошибок определения координат и ориентации объекта в случае, когда он движется по кеплеровой орбите.

Для кеплерова движения объекта из формул (1.123), (1.125), замечая, что  $\alpha_{11} = -\sin \sigma$ ,  $\alpha_{12} = 0$ ,  $\alpha_{13} = \cos \sigma$ ,  $\alpha_{21} = \cos \sigma$ ,  $\alpha_{22} = 0$ ,  $\alpha_{23} = \sin \sigma$ ,  $\alpha_{31} = 0$ ,  $\alpha_{32} = 1$ ,  $\alpha_{33} = 0$ ,  $\sigma = \omega_y$ , или непосредственно решая уравнения (1.96), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^0 \cos \int_0^t \omega_y d\tau - \theta_z^0 \sin \int_0^t \omega_y d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \left[ \Delta m_x(\tau) \cos \int_0^{t-\tau} \omega_y d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \Delta m_z(\tau) \sin \int_0^{t-\tau} \omega_y d\tau \right] d\tau, \\ \theta_y &= \int_0^t \Delta m_y dt + \theta_y^0, \\ \theta_z &= \theta_x^0 \sin \int_0^t \omega_y d\tau + \theta_z^0 \cos \int_0^t \omega_y d\tau + \\ &\quad + \int_0^t \left[ \Delta m_x(\tau) \sin \int_0^{t-\tau} \omega_y d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \Delta m_z(\tau) \cos \int_0^{t-\tau} \omega_y d\tau \right] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (1.179)$$

Для круговой орбиты \*) и постоянных инструментальных

\*) Для эллиптических орбит малого эксцентриситета решения приведены в книге, указанной в сноске на стр. 58.

погрешностей, приняв во внимание, что  $\omega_y = v = \text{const}$ , найдем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^0 \cos vt - \theta_z^0 \sin vt + \frac{\Delta m_x}{v} \sin vt - \\ &\quad - \frac{\Delta m_z}{v} (1 - \cos vt), \\ \theta_y &= \Delta m_y t + \theta_y^0, \\ \theta_z &= \theta_x^0 \sin vt + \theta_z^0 \cos vt + \\ &\quad + \frac{\Delta m_x}{v} (1 - \cos vt) + \frac{\Delta m_z}{v} \sin vt. \end{aligned} \right\} \quad (1.180)$$

Полные ошибки определения координат для случая движения объекта по эллиптической орбите получаются из формул (1.108), (1.166), (1.179). Для случая движения по круговой орбите при постоянных инструментальных погрешностях из формул (1.108), (1.180), (1.152) имеем ( $v = \omega_0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= r \theta_y^0 + \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0}{v} (4 \sin vt - 3vt) + \\ &\quad + 6 \delta z^0 (\sin vt - vt) + \frac{2 \delta \dot{z}^0}{v} (\cos vt - 1) + \\ &\quad + \frac{\Delta n_x}{v^2} \left[ 4 (1 - \cos vt) - \frac{3v^2 t^2}{2} \right] + \\ &\quad + \frac{r \Delta m_y}{v} (4 \sin vt - 3vt) + \frac{2 \Delta n_z}{v^2} (\sin vt - vt), \\ \delta y_2 &= \frac{\Delta n_y}{v^2} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{v^2} - r \theta_x^0 \right) \cos vt + \\ &\quad + \left( \frac{\delta \dot{y}^0}{v} + r \theta_z^0 \right) \sin vt, \\ \delta z_2 &= \frac{2 (\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y)}{v} (1 - \cos vt) + \\ &\quad + \delta z^0 (4 - 3 \cos vt) + \frac{\delta \dot{z}^0}{v} \sin vt + \\ &\quad + \frac{2 \Delta n_x}{v^2} (vt - \sin vt) + \frac{\Delta n_z}{v^2} (1 - \cos vt). \end{aligned} \right\} \quad (1.181)$$

В правых частях равенств (1.181) отсутствуют экспоненциально растущие слагаемые. В них есть лишь слагаемые, пропорциональные  $t$  и  $t^2$ , причем с множителем  $t^2$  входит лишь инструментальная погрешность  $\Delta n_x$  продольного ньютометра.

Из соотношений (1.181), (1.180), (1.152), (1.117)—(1.119) получаются ошибки ориентации по отношению к неизменно ориентированному и орбитальному трехгранникам. Характер ошибок здесь полностью определяется зависимостями (1.180), (1.152).



## Глава 2

# **Инерциальные системы, в которых используется дополнительная информация о расстоянии до поверхности Земли (коррекция от высотомера)**

### **§ 2.1. Общие соображения об использовании дополнительной информации в инерциальных системах**

В предшествующей главе изложены основные свойства автономных инерциальных систем. Эти системы определяют необходимые для навигации и управления параметры движения объекта по информации, содержащейся в показаниях лишь инерциальных чувствительных элементов: ньютонометров и гироскопов. Какая-либо дополнительная информация при этом не используется, если не говорить, конечно, о начальных условиях работы инерциальной системы, которые считаются известными.

Уравнения ошибок инерциальных систем, выписанные в предыдущей главе, определяют устойчивость работы автономных инерциальных навигационных систем. Их решения дают связь между ошибками определения навигационных параметров, с одной стороны, и инструментальными погрешностями элементов и погрешностями задания начальных условий, с другой.

Из решений уравнений ошибок вытекает, что длительная работа автономной инерциальной системы с сохранением точности определения ею навигационных параметров невозможна. Полные ошибки определения координат и ошибки ориентации со временем растут. При движении объекта с малыми скоростями ошибки определения координат растут по экспоненциальному закону, при кеплеровых движениях их рост характеризуется квадратичной функцией времени. Ошибки определения параметров ориентации также растут, в лучшем случае, как линейные функции времени.

Пусть к инерциальной системе предъявлены некоторые требования по точности определения координат в течение некоторого заданного времени ее непрерывной работы. Тогда, зная зависимость ее ошибок от инструментальных погреш-

ностей и погрешностей начальных условий, всегда можно предъявить такие требования к точности элементов системы и точности задания начальных условий, что они обеспечат заданную точность работы инерциальной системы и с учетом роста ошибок во времени. Однако требования к точности элементов и начальных условий могут оказаться при этом такими жесткими, что практически им нельзя будет удовлетворить.

Выход из указанного затруднения можно найти в использовании дополнительной информации, т. е. в коррекции инерциальных систем от сторонних источников информации. Такого рода источниками информации могут быть: высота объекта над поверхностью Земли, измеренная барометрическим или радиовысотомером; скорость объекта по отношению к поверхности Земли, полученная с помощью доплеровского измерителя скорости или лага; координаты объекта по отношению к Земле, определенные радионавигационной системой или посредством радиолокатора, и т. д. Для коррекции работы гироскопических устройств инерциальной системы может быть использована астрономическая коррекция, т. е., в конечном счете, сравнение ориентации гироскопов с направлениями на звезды и планеты, или коррекция, основанная на определении направлений на известные точки земной поверхности или движущиеся объекты (например, искусственные спутники Земли), движение которых по отношению к Земле известно с необходимой точностью.

Простейший способ использования дополнительной информации можно мыслить себе таким образом. Время от времени показания инерциальной системы сравниваются со значениями навигационных параметров, полученными из других источников информации, и корректируются по этим значениям. В этом случае не затрагиваются источники погрешностей и динамические процессы в инерциальной системе. Интервал между коррекциями определяется временем, в течение которого приращения ошибок инерциальной системы не выходят за рамки допустимых величин. Так как ошибки инерциальной системы растут со временем, по меньшей мере как квадратичные функции, то при одном и том же значении приращений ошибок интервалы между сеансами коррекции должны быстро убывать со временем. При таком решении задачи коррекции инерциальная система превращается по существу в устройство, которое в течение сравнительно

непродолжительного времени хранит точную информацию о навигационных параметрах, полученную из сторонних источников. Непрерывная же коррекция не имеет в этом случае смысла. Таким образом, простое исправление время от времени показаний инерциальной системы не ведет, естественно, к появлению каких-либо новых эффектов, которые не наблюдаются в автономных инерциальных системах.

Дальнейшее развитие принципа коррекции можно представлять себе следующим образом. Время от времени исправляются показания инерциальной системы. Одновременно с этим инерциальная система устанавливается в такое положение, как если бы момент коррекции был моментом начала ее работы. Ошибки, накопленные инерциальной системой, при таком способе коррекции уничтожаются. Интервалы между коррекциями могут быть равными друг другу. Процедура описанного способа коррекции ничем не отличается от начальной подготовки системы к работе, если иметь в виду подготовку на подвижном объекте. Как и в предшествующем случае, непрерывная коррекция теряет здесь смысл.

Второй способ коррекции, как и первый, не затрагивает структуры инерциальной системы, алгоритма ее работы, уравнений ошибок (кроме их начальных условий), источников ошибок и динамики образования ошибок. Оба эти способа не приводят к появлению каких-либо новых качеств инерциальной системы. Методы анализа работы системы при этих способах коррекции ничем не отличаются от методов исследования инерциальных систем без коррекции.

Гораздо более интересными оказываются другие способы использования дополнительной информации, когда с ее помощью изменяется сам алгоритм работы инерциальной системы. Это ведет прежде всего к тому, что вместе с алгоритмом (уравнениями идеальной работы) меняется и структура уравнений ошибок, т. е. в конечном счете характер зависимости ошибок от погрешностей элементов и начальных условий. Такие способы коррекции предполагают, разумеется, использование сторонней информации в течение достаточно длительного времени или даже в течение всего времени работы инерциальной системы.

Пусть инерциальная система определяет некоторые координаты  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$  объекта. Пусть, далее, по информации от дополнительных источников мы можем непрерывно вычислять

одну из координат, например  $x^1$ , независимо от работы инерциальной системы. Тогда можно, очевидно, использовать вычисленное значение координаты  $x^1$  для формирования тех членов уравнений идеальной работы инерциальной системы, в которые эта координата входит. Продифференцировав  $x^1$ , можно формировать и члены, содержащие скорость  $\dot{x}^1$  изменения  $x^1$ . Наоборот, если известна из сторонних источников информация скорость изменения  $x^1$ , то, проинтегрировав ее, получим  $x^1$ .

Здесь возникают две возможности. Можно сформировать в уравнениях идеальной работы все члены, содержащие  $x^1$ ,  $\dot{x}^1$ . Тогда задача инерциальной системы становится двумерной. Становится ненужным ньютонометр, направление оси чувствительности которого совпадает с нормалью к координатной поверхности  $x^1 = \text{const}$ . Из уравнений ошибок инерциальной системы выпадает тогда уравнение, содержащее  $\delta \dot{x}^1$ . В двух остальных уравнениях члены, содержащие  $\delta x^1$ ,  $\delta \dot{x}^1$ , перейдут в правые части. Они будут теперь известными функциями времени, если, конечно, считать заданными во времени (детерминированными или случайными функциями времени) погрешности определения  $x^1$ ,  $\dot{x}^1$  из сторонней информации.

Можно, напротив, сформировать в уравнениях идеальной работы по дополнительной информации не все члены, содержащие  $x^1$ ,  $\dot{x}^1$ , а лишь некоторые из них. Именно те, которые обуславливают появление в уравнениях ошибок членов с  $\delta \dot{x}^1$ ,  $\delta \ddot{x}^1$ , придающих уравнениям ошибок свойства, от которых по тем или иным причинам полезно избавиться. Система остается в этом случае трехмерной, т. е. в ее составе остаются все три ньютонометра. Уравнения ошибок определения координат сохраняют свой порядок. Разница будет лишь в том, что теперь часть членов с  $\delta \dot{x}^1$ ,  $\delta \ddot{x}^1$  переносится вправо и перестает входить в однородные уравнения ошибок. Как мы увидим в дальнейшем, к интересным результатам могут привести оба из описанных способов непрерывного использования дополнительной информации о величинах  $x^1$ ,  $\dot{x}^1$ .

Если из дополнительных источников информации известна не одна координата, а две, например  $x^1$  и  $x^2$ , и их производные по времени, то описанную выше процедуру можно распространить на обе эти координаты. Формируя все члены

в уравнениях идеальной работы по данным источника дополнительной информации, можно прийти к одномерной задаче; оставляя некоторые из этих членов, — к двумерной или, наконец, сохранить инерциальную систему трехмерной.

В предшествующих рассуждениях мы предполагали известными координаты  $x^1, x^2$ . Дело несколько не меняется, если из сторонних источников известны не сами координаты  $x^1, x^2$ , а одна или две связи вида

$$F_j(x^1, x^2, x^3, t) = 0, \quad (2.1)$$

наложенные на все три координаты. Далее, мы говорили лишь о привлечении информации о координатах объекта и на этом основании пришли к выводу, что в системе могут остаться два или даже один ньютонометр. Аналогично можно использовать информацию об ориентации. Тогда можно говорить о сохранении в системе двух или лишь одного гироскопа. Впрочем, здесь надо помнить, что двух гироскопов достаточно для задания ориентации и без использования дополнительных сведений.

Основной особенностью описанного способа использования дополнительной информации в работе инерциальных систем является, как уже было отмечено, непрерывное участие этой информации в формировании уравнений идеальной работы инерциальных систем и зависимость структуры уравнений ошибок от способа использования информации. Речь идет, таким образом, не столько о коррекции работы инерциальных систем, сколько о работе некоторых комплексных систем, в которые входят и устройства, посредством которых получается «дополнительная» информация. В общем случае такая система теряет автономность, свойственную чисто инерциальной системе.

Здесь, однако, не надо забывать о следующем обстоятельстве. Выше, когда говорилось об информации о координатах  $x^1, x^2$ , неявно подразумевалось, что эта информация предполагает связь системы с внешним миром. Например, что она получается с помощью радиосредств. Но возможны другие варианты: возможно использование информации такого вида, который не требует связи с внешним миром. Тогда автономность системы не нарушается и система может даже остаться чисто инерциальной.

В качестве примера можно указать на движение корабля по поверхности океана. Для определения его положения в системе координат, связанной с Землей, а следовательно, и в системе координат  $O_1\xi^1\xi^2\xi^3$ , движение Земли по отношению к которой известно, достаточно задать две координаты местоположения корабля на поверхности Земли, которыми могут быть, например, географические широта и долгота. Третья координата — расстояние корабля от центра Земли — является функцией двух первых. Если бы определяемыми координатами были некоторые другие координаты  $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3$ , так что поверхность земного эллипсоида не совпадала бы ни с одной из координатных поверхностей

$$\kappa^1 = \text{const}, \quad \kappa^2 = \text{const}, \quad \kappa^3 = \text{const}, \quad (2.2)$$

то уравнение земного эллипсоида давало бы связь этих координат вида (2.1). Здесь в структуре инерциальной системы может быть использована информация о форме поверхности Земли, вблизи которой движется корабль. Из уравнений системы может быть исключена одна из переменных, и система может быть упрощена до двумерной. В то же время она остается автономной и чисто инерциальной.

Приведенный пример можно развить дальше. Пусть объект движется так, что его высота над поверхностью Земли является известной функцией времени. Тогда автономность инерциальной системы также сохраняется. Наконец, если изменение высоты в функции времени неизвестно заранее, но высота может быть измерена в процессе движения автономно (например, барометрическим высотомером), то совокупность «инерциальная система — высотомер» оказывается автономной системой.

В связи с последним примером можно высказать и более общие соображения. Пусть известна приближенная траектория движения объекта или поверхность, вблизи которой он движется. Это обстоятельство также может быть использовано как дополнительная информация. В самом деле, тогда может случиться, что отдельные члены уравнений идеальной работы инерциальной системы малы по сравнению с другими. Поэтому их можно либо отбросить вовсе, либо сформировать как функции времени по приближенным значениям параметров, определяющих движение объекта. Из однородных уравнений ошибок исчезнут тогда вариации соответствующих членов.

В правые же части войдут разности между их истинными и приближенными значениями. Эти разности можно считать известными функциями времени в том смысле, что можно их тем или иным образом задать при анализе уравнений ошибок.

При оценке того, какие слагаемые уравнений идеальной работы можно отбросить, недостаточно, конечно, малости их по сравнению с другими слагаемыми. Надо оценить и прямую ошибку, к которой ведет пренебрежение теми или иными слагаемыми. Если она существенно меньше, чем заданная точность системы, или, во всяком случае, существенно меньше ошибок, вызываемых инструментальными погрешностями, то тогда только соответствующее слагаемое уравнений идеальной работы можно не учитывать. Здесь следует остановиться еще на одном вопросе, который тесно связан с уже затронутыми. Может случиться, что среди слагаемых, входящих в уравнения определения координат или параметров ориентации, нет членов, пренебрежение которыми приводит к малой ошибке, но вариации некоторых членов существенно меньше, чем инструментальные погрешности. Тогда можно упростить уравнения ошибок, отбросив вариации этих членов.

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Из высказанных в настоящем параграфе соображений об использовании дополнительной информации вытекает, что во всех случаях изменение структуры уравнений ошибок имеет одно общее свойство, а именно: из однородных уравнений ошибок выпадают те или иные слагаемые. Новых же не прибавляется. В настоящей главе мы ограничимся именно этими случаями. Разумеется, уже сейчас можно предвидеть, что возможно и такое использование дополнительной информации, когда в уравнениях ошибок образуются новые члены, которых нет в уравнениях ошибок чисто инерциальной системы. К анализу такого рода возможностей мы обратимся в следующих главах.

Основной задачей, которая будет рассмотрена в последующих параграфах этой главы, является анализ возможностей и эффектов, возникающих при использовании в инерциальной системе информации типа связи (2.1), налагаемой на координаты объекта.

При этом мы ограничимся в основном случае, когда эта связь вытекает из дополнительной информации о расстоянии от объекта до поверхности Земли. В качестве наиболее про-

стого случая здесь можно говорить о задании как функции времени расстояния  $r$  от объекта до центра Земли.

Ограничение случаем информации о расстоянии от объекта до поверхности Земли не приводит к существенному уменьшению общности рассмотрения. В то же время этот случай позволяет установить ряд интересных в практическом отношении эффектов и особенностей, свойственных лишь ему.

Специфичность задания расстояния  $r$  от объекта до центра Земли состоит в том, что мы рассматриваем работу инерциальной системы в поле тяготения Земли. Оно близко к сферическому. Его свойства определяются в основном расстоянием рассматриваемой точки от центра Земли. При анализе уравнений ошибок было в то же время выяснено, что наибольшие неприятности, с точки зрения обеспечения устойчивости работы инерциальной системы, возникают именно из-за того, что в задачу системы входит определение  $r$ . Формирование в уравнениях идеальной работы напряженности поля тяготения с использованием величины  $r$ , найденной самой инерциальной системой, как раз и приводит к появлению в решениях уравнений ошибок быстро растущих экспоненциальных и степенных функций времени.

Использование информации о расстоянии до поверхности Земли позволяет в большой степени обойти указанные затруднения.

## § 2.2. Уравнения идеальной работы и уравнения ошибок инерциальных систем, корректируемых от высотомера

**2.2.1. Схемы с тремя ньютонометрами (акселерометрами).** Пусть известно расстояние между движущимся объектом и поверхностью уровня эллипсоида, т. е. высота  $h$  над уровнем океана. Из равенств (1.8а) тогда

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi'}} + h\right)^2 \cos^2 \varphi' + \left[\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi'}} + h\right]^2 \sin^2 \varphi'} \quad (2.3)$$

Значит, задание  $h$  означает задание расстояния  $r$  от объекта до центра Земли в функции географической широты  $\varphi'$ .



Рассмотрим схему системы инерциальной навигации, в которой сохранены все три ньютонометра, но входящая в уравнения идеальной работы напряженность сферической составляющей поля тяготения Земли формируется с использованием равенства (2.3).

Уравнения идеальной работы такой схемы сохраняют в основном тот же вид, что и уравнения идеальной работы автономных инерциальных систем, приведенные в § 1.1. К ним надо добавить лишь равенство (2.3) и выбранные надлежащим образом соотношения для выражения  $\varphi'$  через определяемые системой координаты. Так, к уравнениям (1.36), (1.38) — (1.40) кроме формулы (2.3) надо добавить третье равенство (1.8a)

$$\zeta = \left[ \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right] \sin \varphi'. \quad (2.4)$$

Аналогичные же изменения произойдут в уравнениях идеальной работы (1.54) — (1.58) инерциальных систем, определяющих криволинейные координаты. К ним добавится соотношение (2.4), где теперь

$$\zeta = \zeta(\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, t). \quad (2.5)$$

Проще всего обстоит дело, очевидно, в случае, когда определяемыми координатами будут географические. Так как  $h$  является одной из географических координат, то к уравнениям идеальной работы (1.91) автономной инерциальной системы, определяющей географические координаты, добавится лишь формула (2.3), да и то лишь в том случае, если проекции  $g_{y_1}$ ,  $g_{z_1}$ , входящие в уравнения (1.91), взяты как функции  $r$ , а не  $h$ .

Если инерциальная система определяет геоцентрические координаты, то для отыскания  $\varphi'$  служит первое равенство (1.13). Для ортодромических координат добавляется еще третья формула (1.18).

Если определяются сферические криволинейные координаты, а ньютонометры ориентированы по векторам взаимного базиса  $r^s$ , то, взяв

$$\kappa^1 = r, \quad (2.6)$$

будем иметь

$$\xi^s = r f^s(\kappa^2, \kappa^3, t), \quad (2.7)$$

где функции  $f^s$  суть направляющие косинусы радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  по отношению к осям  $\xi^s$ , а  $\kappa^2, \kappa^3$  — криволинейные координаты на сфере радиуса  $r$ . Из уравнений (1.54) получим тогда для  $s=1$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\kappa}^1 &= \int_0^t \left[ n_{e_1} - \left( \Gamma_{mn}^1 \dot{\kappa}^m \dot{\kappa}^n + 2\Gamma_{0n}^1 \dot{\kappa}^n + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Gamma_{00}^1 - \frac{\mu}{r^3} - \text{grad}^l \epsilon \eta_l^1 \right) \right] dt + \dot{\kappa}^1(0), \\ \kappa^1 &= \int_0^t \dot{\kappa}^1 dt + \kappa^1(0). \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Здесь функция  $\epsilon$  определена равенством

$$\mathbf{g} = \text{grad } V = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \text{grad } \epsilon, \quad (2.9)$$

т. е.  $\epsilon(\eta^1, \eta^2, \eta^3)$  — силовая функция несферической составляющей поля тяготения Земли.

Для  $s=2, 3$  в формулах (1.54) надо лишь заменить величины  $\text{grad}^l V \eta_l^s$  на  $\text{grad}^l \epsilon \eta_l^s$ .

Выясним теперь, как изменятся уравнения ошибок инерциальной системы при рассматриваемом способе использования внешней информации о величине  $h$ . Для этого вспомним, что первая группа (1.95) уравнений ошибок автономной инерциальной системы получена проектированием на оси подвижного трехгранника  $x\mu z$  векторного уравнения (1.92)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \delta \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \frac{3\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}}{r^2} = \\ = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Если значение  $r$ , полученное из соотношения (2.3), используется в уравнениях идеальной работы лишь для формирования отношения  $\mu/r^3$ , а именно об этом варианте идет

сейчас речь, то в уравнении (2.10) изменится лишь последнее слагаемое левой части, которое содержит множителем выражение

$$-\frac{3r \cdot \delta r}{r^5} = \delta \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{|r + \delta r|^3} - \frac{1}{r^3}. \quad (2.11)$$

Теперь это выражение примет вид

$$\delta \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{3 \Delta r}{r^4}, \quad (2.12)$$

причем

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial r}{\partial \varphi'} \delta \varphi', \quad (2.13)$$

где производные  $\frac{\partial r}{\partial h}$  и  $\frac{\partial r}{\partial \varphi'}$  вычислены в соответствии с равенством (2.3).

Ввиду малости  $e$  равенство (2.3) можно заменить приближенным

$$r = a + h - \frac{1}{2} a e^2 \sin^2 \varphi', \quad (2.14)$$

откуда

$$\Delta r = \Delta h - a e^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \delta \varphi'. \quad (2.15)$$

Величина  $a e^2 \delta \varphi'$  имеет тот же порядок малости, что и величины  $e^2 \delta x$ ,  $e^2 \delta y$ ,  $e^2 \delta z$ . В то же время при выводе уравнения (2.10), из которого мы сейчас исходим, была отброшена по малости вариация несферической составляющей поля тяготения. Эта вариация также сводится к величинам, пропорциональным  $e^2 \delta x$ ,  $e^2 \delta y$ ,  $e^2 \delta z$ . Поэтому в формуле (2.15) можно пренебречь вторым слагаемым.

С учетом сказанного вместо уравнения (2.10) получим следующее:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{\mu \delta r}{r^3} = \\ = \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r) + \frac{3\mu r \Delta r}{r^4} \\ (\Delta r = \Delta h), \end{aligned} \right\} \quad (2.15a)$$

где  $\Delta h$  — погрешность информации о расстоянии до поверхности Земли.

В проекциях на оси сопровождающего трехгранника  $xuz$ . ось  $z$  которого совпадает с  $r$ , уравнение (2.15а) дает:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \delta\dot{y} + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \delta\dot{z} = \\ = \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - 2\dot{r} \Delta m_y - r \omega_x \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_x, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - \\ - 2\omega_x \delta\dot{z} + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = \\ = \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_y, \\ \delta\ddot{z} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 - \omega_y^2 \right) \delta z + (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) \delta x - \\ - 2\omega_y \delta\dot{x} + (\omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x) \delta y + 2\omega_x \delta\dot{y} = \\ = \Delta n_z + 2r (\omega_x \Delta m_x + \omega_y \Delta m_y) + \frac{3\mu \Delta r}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$(\Delta r = \Delta h).$

Вторая группа уравнений ошибок (1.96), соотношения (1.97), (1.116) и вытекающие из них сохраняют в рассматриваемом случае тот же вид, что и для автономных инерциальных систем.

**2.2.2. Схемы с двумя ньютонометрами.** Если известно расстояние  $h$  до поверхности Земли, то, как уже говорилось выше, в схеме инерциальной навигации можно обойтись лишь двумя ньютонометрами. Действительно, знание  $h$  означает, что известна связь вида (2.1), благодаря которой можно выразить одну из трех координат, определяющих местоположение объекта, через две остальные. А для отыскания этих последних достаточно, очевидно, двух ньютонометров.

Наиболее естественными оказываются при этом схемы, в которых два ньютонометра расположены в плоскости, близкой к касательной плоскости к поверхности  $h = \text{const}$ .

Примерами такого рода схем будут схемы с двумя ньютонометрами, расположенными в плоскости геоцентрического горизонта.

Пусть определяются декартовы координаты  $\xi, \eta, \zeta$ . Пусть ось  $z$  платформы инерциальной системы в невозмущенном положении совпадает с направлением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ , а ньютонометры  $n_x, n_y$  расположены по осям  $x, y$  платформы. Уравнения идеальной работы схемы получаются тогда из уравнений автономной инерциальной системы (1.36), (1.38), (1.39) следующим образом. Отбрасываются проекции уравнений (1.36) на ось  $z$ . В проекциях на оси  $x$  и  $y$  полагается  $x = y = 0, z = r$ , в результате чего получается:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_0^t (n_x - m_y v_z + m_z v_y + g_x) dt + v_x^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_y - m_z v_x + m_x v_z + g_y) dt + v_y^0, \\ v_x &= m_y r, \quad v_y = -m_x r, \quad v_z = \dot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Векторные уравнения (1.38) проектируются на все три оси  $x, y$  и  $z$ . В результате получаются скалярные уравнения для определения направляющих косинусов  $\beta_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} \beta_{i1} &= \int_0^t [\beta_{i2}(m_z - u_z) - \beta_{i3}(m_y - u_y)] dt + \beta_{i1}^0, \\ \beta_{i2} &= \int_0^t [\beta_{i3}(m_x - u_x) - \beta_{i1}(m_z - u_z)] dt + \beta_{i2}^0, \\ \beta_{i3} &= \int_0^t [\beta_{i1}(m_y - u_y) - \beta_{i2}(m_x - u_x)] dt + \beta_{i3}^0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

( $i = 1, 2, 3$ ).

В этих уравнениях величины  $m_x, m_y$  вычисляются в соответствии с третьим и четвертым равенствами (2.17). Величина  $m_z$  произвольна и определяется выбором ориентации осей  $x, y$  в плоскости, нормальной к  $\mathbf{r}$ . Далее, в соотношениях (2.18)

$$u_x = u\beta_{31}, \quad u_y = u\beta_{32}, \quad u_z = u\beta_{33}. \quad (2.19)$$

Уравнения (1.39) сохраняют силу. С их помощью находятся координаты  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  согласно равенствам

$$\xi = \beta_{13}r, \quad \eta = \beta_{23}r, \quad \zeta = \beta_{33}r. \quad (2.20)$$

Проекции  $g_x$ ,  $g_y$ , входящие в подынтегральные выражения первых двух уравнений (2.17), находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \beta_{11} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \beta_{21} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \beta_{31}, \\ g_y &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \beta_{12} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \beta_{22} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \beta_{32}, \\ \varepsilon &= \varepsilon(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

К уравнениям (2.17) — (2.21) присоединяются соотношения (2.3), (2.4). Кроме того, если основной схемой является стабилизированная платформа, а трехгранник  $xuz$  ориентируется относительно нее, то вычисляются направляющие косинусы  $\alpha_{ij}$  между осями стабилизированной платформы и осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для этого используется таблица направляющих косинусов (1.7) между осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и осями  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ . Последние, в частности, могут совпадать с осями стабилизированной платформы. Если же основной кинематической схемой системы взята управляемая гироскопа, то управляющие моменты формируются в соответствии с уравнениями (1.42) в таком виде:

$$M_y^2 = -H_2 m_x, \quad M_x^1 = H_1 m_y, \quad M_z^3 = -H_3 m_z. \quad (2.22)$$

В случае сферических криволинейных координат для получения уравнений идеальной работы системы с двумя ньютонометрами можно также воспользоваться уравнениями (1.54) — (1.58) автономных систем. Для ортогональных сферических координат можно, очевидно, исходить также и из уравнений (1.61), (1.55), (1.57), (1.62) или (1.67), (1.69), (1.70), (1.64), (1.42). В указанных уравнениях надо лишь отбросить те соотношения, которые служат для определения  $x^1 = r$ , а в остальных величину  $x^1$  заменить на ее выражение, вытекающее из равенства (2.3). Кроме того, надо добавить соотношение, аналогичное (2.4), которое связывало бы криволинейные сферические координаты  $x^2$ ,  $x^3$  с географической широтой  $\varphi'$ , входящей в формулу (2.3).

Для ортодромических координат вместо уравнений (1.81) получим, например, такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned}
 v_x &= \int_0^t (n_x + v_y \omega_z - \dot{r} \omega_y + g_x) dt + v_x^0, \\
 v_y &= \int_0^t (n_y - v_x \omega_z + \dot{r} \omega_x + g_y) dt + v_y^0, \\
 \omega_x &= -\frac{v_y}{r}, \quad \omega_y = \frac{v_x}{r}, \\
 S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} [\omega_y + u (\beta_{31} \sin z \cos S + \\
 &\quad + \beta_{32} \sin z \sin S - \beta_{33} \cos z)] dt + S^0, \\
 z &= \int_0^t [-\omega_x + u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)] dt + z^0, \\
 \omega_z &= \omega_y \operatorname{tg} z + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \\
 g_x &= g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\
 g_y &= g_{y_2}(r, \varphi) \frac{1}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\
 &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\
 \sin \varphi &= \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z, \\
 M_y^2 &= -H_2 \omega_x, \quad M_x^1 = H_1 \omega_y, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_z, \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \left[ 1 - \frac{ae^2}{a + h(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] \operatorname{tg} \varphi', \\
 r &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}.
 \end{aligned} \right\} (2.23)$$

Для упрощения записи в уравнениях (2.23), в отличие от уравнений (1.81), оси сопровождающего трехгранника геоцентрической координатной сетки обозначены не через  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ , а через  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Последние два равенства (2.23)

равносильны равенствам (2.3) — (2.5). Функция  $g_{y_2}$  — проекция напряженности поля тяготения Земли на касательное к геоцентрическому меридиану направление. Эта функция задана первой формулой (1.27).

Уравнения идеальной работы в геоцентрических координатах получаются из уравнений (2.23), если в последних положить

$$\left. \begin{aligned} z = \varphi, \quad S = \lambda, \\ \beta_{31} = \beta_{32} = 0, \quad \beta_{33} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Тогда выпадают восьмое и десятое уравнения (2.23), а остальные принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_0^t (n_x + v_y \omega_z - \dot{r} \omega_y) dt + v_x^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_y - v_x \omega_z + \dot{r} \omega_x + g_y) dt + v_y^0, \\ \omega_x &= -\frac{v_y}{r}, \quad \omega_y = \frac{v_x}{r}, \\ \lambda &= \int_0^t \left( \frac{\omega_y}{\cos \varphi} - u \right) dt + \lambda^0, \\ \varphi &= - \int_0^t \omega_x dt + \varphi^0, \\ \omega_z &= \omega_y \operatorname{tg} \varphi, \quad g_y = g_{y_2}(r, \varphi), \\ M_y^2 &= -H_2 \omega_x, \quad M_x^1 = H_1 \omega_y, \\ M_x^3 &= -H_3 \omega_z, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \left[ 1 - \frac{ae^2}{a + h(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] \operatorname{tg} \varphi', \\ r &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Выше обсуждены уравнения идеальной работы схем с двумя ньютонометрами, расположенными в плоскости геоцентрического горизонта (нормальной к радиусу-вектору  $\mathbf{r}$ ). Можно, как уже отмечалось, расположить ньютонометры



в плоскости географического горизонта (касательной к поверхности  $h = \text{const}$ ). Простейшей схемой такого рода будет схема, определяющая географические координаты и построенная на основе управляемой гирорамы, оси  $x$  и  $y$  которой ориентированы по странам света. Так как поступающая от высотомера величина  $h$  является в этом случае одной из координат, то соответствующие уравнения идеальной работы получаются из соотношений (1.91), если в последних опустить третье и четвертое равенства, служащие для отыскания  $\dot{h}$  и  $h$ . Присоединяя равенства (1.13) и заменяя индексацию осей на « $x$ », « $y$ », « $z$ », приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_0^t (n_x + v_y \omega_z - \dot{h} \omega_y) dt + v_x^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_y + \dot{h} \omega_x - v_x \omega_z + g_y) dt + v_y^0, \\ \omega_x &= -\frac{v_y}{r_3}, \quad \omega_y = \frac{v_x}{r_2}, \quad \omega_z = \omega_y \operatorname{tg} \varphi', \\ \varphi' &= -\int_0^t \omega_x dt + \varphi'^0, \\ \lambda &= \int_0^t \left( \frac{\omega_y}{\cos \varphi'} - u \right) dt + \lambda^0, \\ r_2 &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h, \\ r_3 &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + h, \\ M_y^2 &= H_2 \omega_x, \quad M_x^1 = H_1 \omega_y, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_z, \\ g_y &= -g_{z_2}(r, \varphi) \sin(\varphi' - \varphi) + g_{y_2}(r, \varphi) \cos(\varphi' - \varphi), \\ \operatorname{tg} \varphi &= \left[ 1 - \frac{ae^2}{a + h(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] \operatorname{tg} \varphi', \\ r &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}. \end{aligned} \right\} (2.26)$$

Разумеется, для определения величины  $\varphi' - \varphi$ , входящей в выражение для  $g_y$ , можно воспользоваться равенством (1.15), являющимся следствием двух последних формул (2.26).

Получим уравнения ошибок схем с двумя ньютонометрами, в невозмущенном положении расположенными в плоскости геоцентрического горизонта.

Первую группу уравнений ошибок в проекциях на оси сопровождающего трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого направлена по геоцентрической вертикали (вдоль  $r$ ), можно, очевидно, сразу получить из системы (2.16). Для этого надо отбросить третье уравнение этой системы, а в первых двух положить

$$\delta z = \Delta r \quad (= \Delta h). \quad (2.27)$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - 2\omega_z \delta \dot{y} = \\ = -\Delta r (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) - 2\Delta \dot{r} \omega_y + \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - \\ - 2\dot{r} \Delta m_y - r \omega_x \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_x, \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \delta \dot{x} = \\ = \Delta r (\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z) + 2\Delta \dot{r} \omega_x + \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + \\ + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

По поводу этих уравнений следует сделать одно уточняющее замечание. Мы получили их, положив в первых двух уравнениях (2.16)

$$\delta z = \Delta r.$$

Это равенство справедливо для малых  $\delta x$ ,  $\delta y$ , когда их квадратами можно пренебречь (как и квадратами  $\delta z$  и  $\Delta r$ ). Действительно, из тождества

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (2.29)$$

вытекает (в невозмущенном положении  $x = y = 0$ ,  $z = r$ )

$$(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + 2r \delta z = 2r \Delta r + (\Delta r)^2, \quad (2.30)$$

откуда, если пренебречь квадратами, и вытекает равенство  $\delta z = \Delta r$ .

Если иметь в виду не только первое приближение, то вместо уравнений (2.28) следует взять нелинейную систему, образованную первыми двумя уравнениями (2.16) и соотношением (2.30):

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \dot{\delta y} + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \dot{\delta z} = \\ = \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - 2\dot{r} \Delta m_y - r \omega_x \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_x, \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - \\ - 2\omega_x \dot{\delta z} + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \dot{\delta x} = \\ = \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_y, \\ (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + 2r \delta z = 2r \Delta r + (\Delta r)^2. \end{aligned} \right\} (2.31)$$

Можно показать, что уравнения (2.28) являются первой группой уравнений ошибок и для схем с двумя ньютонометрами, расположенными в плоскости не геоцентрического, а географического горизонта. Это следует из того, что соответствующие уравнения идеальной работы различаются членами первого порядка малости (содержащими множителем  $e^2$ ). Поэтому уравнения ошибок (уравнения в вариациях) будут различаться членами второго порядка малости и, значит, в первом приближении сохраняют свой вид.

Уравнения (2.28) или уравнения (2.31) образуют первую группу уравнений ошибок схем с двумя ньютонометрами. Вторая группа уравнений ошибок (1.96), формулы (1.97), (1.116) для полных ошибок координат и ошибок ориентации (а также соотношения, вытекающие из этих формул) сохраняют тот же вид, что и для автономных инерциальных систем.

В заключение настоящего раздела отметим одно важное свойство уравнений (2.28) или (2.31). Эти уравнения сохраняют свой вид при повороте трехгранника  $xuz$  на произвольный угол  $\theta$  вокруг оси  $z$ , т. е. допускают группу вращений вокруг оси  $z$ . Указанное свойство уравнений (2.28) непосредственно вытекает из произвольности  $\omega_z = m_z$  в уравне-

ниях идеальной работы (2.17), (2.18), (2.22). Оно может быть установлено и прямым вычислением, для чего достаточно сделать в уравнениях (2.28), (2.31) замену переменных

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x' \cos \vartheta - \delta y' \sin \vartheta, \\ \delta y &= \delta x' \sin \vartheta + \delta y' \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Подставим, например, выражения (2.32) вариаций  $\delta x$ ,  $\delta y$  через  $\delta x'$ ,  $\delta y'$  в уравнения (2.28). Затем умножим первое из полученных уравнений на  $\cos \vartheta$ , второе на  $\sin \vartheta$  и сложим. В результате получим уравнение, отличающееся от первого уравнения (2.28) лишь тем, что теперь вместо  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ ,  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  в нем будут стоять  $\delta x'$ ,  $\delta y'$ ,  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$ ,  $\omega_{z'}$ ,  $\Delta n_{x'}$ ,  $\Delta n_{y'}$ ,  $\Delta m_{x'}$ ,  $\Delta m_{y'}$ ,  $\Delta m_{z'}$ .

Значения  $\omega_{x'}$ ,  $\omega_{y'}$  выражаются через  $\omega_x$  и  $\omega_y$  формулами

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= \omega_x \cos \vartheta + \omega_y \sin \vartheta, \\ \omega_{y'} &= -\omega_x \sin \vartheta + \omega_y \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Аналогично выражаются  $\Delta n_{x'}$ ,  $\Delta n_{y'}$  через  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ , а также  $\Delta m_{x'}$ ,  $\Delta m_{y'}$  через  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ . Наконец,

$$\omega_{z'} = \omega_z + \dot{\vartheta}, \quad \Delta m_{z'} = \Delta m_z. \quad (2.33a)$$

Далее, умножив после подстановки (2.32) первое уравнение (2.28) на  $-\sin \vartheta$ , второе на  $\cos \vartheta$  и сложив, придем к уравнению, получающемуся из второго уравнения (2.28) заменой индексов « $x$ », « $y$ », « $z$ » на « $x'$ », « $y'$ », « $z'$ ». Таким же образом доказывается справедливость высказанного утверждения и в отношении уравнений (2.31), так как в этом случае, очевидно,

$$\delta z' = \delta z. \quad (2.34)$$

Инвариантность уравнений (2.28), (2.31) относительно поворота трехгранника  $xuz$  вокруг направления геоцентрической вертикали (оси  $z$ ) позволяет при их анализе выбирать ориентацию осей  $x$ ,  $y$  относительно стран света так, чтобы облегчить исследование. Среди многочисленных возможных выборов ориентации трехгранника  $xuz$  особо следует отметить два случая: 1) расположение одной из горизонтальных осей, например оси  $x$ , в плоскости, содержащей вектор  $d\mathbf{r}/dt$

абсолютной скорости объекта; 2) такую ориентацию осей  $x$ ,  $y$  в плоскости горизонта, что всегда  $\omega_z = 0$ .

В первом случае в уравнениях (2.28), (2.31) следует положить  $\omega_x = 0$ . Уравнения (2.28) превращаются тогда в такие:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x - \dot{\omega}_z \delta y - 2\omega_z \delta\dot{y} = \\ = -\Delta r \dot{\omega}_y - 2\Delta \dot{r} \omega_y + \Delta n_x - \\ - r \Delta \dot{m}_y - 2\dot{r} \Delta m_y - r \omega_z \Delta m_x, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \delta y + \dot{\omega}_z \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = \\ = -\Delta r \omega_y \omega_z + 2\Delta \dot{r} \omega_x + \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + \\ + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Во втором случае, когда  $\omega_z = 0$ , уравнения (2.28) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \delta x + \omega_x \omega_y \delta y = \\ = -\Delta r \dot{\omega}_y - 2\Delta \dot{r} \omega_y + \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - 2\dot{r} \Delta m_y - r \omega_x \Delta m_y, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 \right) \delta y + \omega_x \omega_y \delta x = \\ = \Delta r \dot{\omega}_x + 2\Delta \dot{r} \omega_x + \Delta n_y + 2\Delta \dot{m}_x + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , входящие в эти уравнения, связаны с горизонтальными составляющими  $v_x$ ,  $v_y$  абсолютной скорости объекта равенствами  $v_x = r\omega_y$ ,  $v_y = -r\omega_x$  и вследствие этого всегда ограничены, что делает эффективным, как мы увидим в дальнейшем, применение к уравнениям (2.36) приближенных методов исследования.

## § 2.3. Исследование устойчивости и интегрирование первой группы уравнений ошибок схем с двумя ньютонометрами

**2.3.1. Анализ устойчивости в случаях, приводящих к уравнениям с постоянными коэффициентами.** Как уже отмечалось, вторая группа уравнений ошибок схем с двумя ньютонометрами не меняется по сравнению с автономной

инерциальной системой, поэтому здесь остаются в силе результаты, изложенные в п. 1.3.1. Основное различие автономных инерциальных систем и рассматриваемых систем с двумя ньютонометрами связано с первой группой уравнений ошибок, анализ которых будет нашей ближайшей задачей.

В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением уравнений первого приближения — уравнений в вариациях (2.28). К нелинейным уравнениям (2.31) мы вернемся в следующей главе после исследования аналогии между схемами инерциальных систем с двумя ньютонометрами и маятниково-гироскопическими системами Шулера. Эта аналогия облегчит анализ нелинейных уравнений (2.31).

В общем случае при произвольном движении объекта уравнения (2.28) представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами, которые могут быть как детерминированными, так и случайными функциями времени. Исследование уравнений (2.28) в общем случае наталкивается на непреодолимые математические трудности. Так, уже движение по дуге неизменно ориентированного большого круга в частном случае закона изменения скорости объекта приводит здесь к уравнению Матье — Хилла.

До конца удастся исследовать уравнения (2.28) лишь в тех случаях, когда они приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами, и для кеплерова движения объекта. Уравнения (2.28) приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами по крайней мере в трех случаях. Первый случай — случай неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  объекта. Этот случай реализуется, если, например, объект движется по параллели навстречу вращению Земли со скоростью, равной окружной скорости точек земной поверхности. В этом случае в уравнениях (2.28) надо положить  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ ,  $\omega_z = 0$ , и они принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - r\Delta\dot{m}_y, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r\Delta\dot{m}_x, \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} = \text{const.} \quad (2.38)$$

Второй случай — это случай движения с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга. Уравнения ошибок получаются для этого случая из уравнений (2.35), если положить в них  $\omega_z = 0$ , или из уравнений (2.36) при  $\omega_x = 0$ . Они таковы:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x &= -2\Delta\dot{r}\omega_y + \Delta n_x - r\Delta\dot{m}_y, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r\Delta\dot{m}_x - r\omega_y \Delta m_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

где

$$\omega_y = \frac{v_x}{r} = \text{const.} \quad (2.40)$$

Наконец, коэффициенты уравнений (2.28) становятся постоянными, если объект, двигаясь с постоянной скоростью на постоянном удалении от центра Земли, совершает одно-временно непрерывный поворот (циркуляцию). Уравнения для этого случая получаются из уравнений (2.35), если в них считать  $\omega_z = \text{const}$ ,  $\mu/r^3 = \omega_0^2 = \text{const}$ ,  $\omega_y = v/r = \text{const}$ , что дает систему:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x - 2\omega_z \delta\dot{y} &= \\ &= \Delta n_x - r\Delta\dot{m}_y - r\omega_z \Delta m_x, \\ \delta\ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + 2\omega_z \delta\dot{x} &= -\Delta r\omega_y \omega_z + \\ &+ \Delta n_y + r\Delta\dot{m}_x - r\omega_y \Delta m_z - r\omega_z \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Частным случаем этих уравнений оказываются уравнения, соответствующие движению объекта с постоянной скоростью вдоль земной параллели. Уравнения (2.41) являются наиболее общими. Уравнения (2.39), (2.37) являются частными случаями уравнений (2.41).

Однородные уравнения (2.37) представляют собой уравнения гармонических колебаний с частотой Шулера, т. е. движение здесь неасимптотически устойчиво. Аналогично однородные уравнения (2.39) — также уравнения гармонических колебаний. Однако частоты колебаний в плоскости движения объекта и в нормальной к ней плоскости, содержащей  $r$ , различны. В первой плоскости — это частота  $\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}$ , во

второй плоскости — частота Шулера  $\omega_0$ . Уравнения (2.39) свидетельствуют о неасимптотической устойчивости при

$$\omega_y^2 < \omega_0^2, \quad (2.42)$$

т. е. для скоростей объекта, меньших первой космической скорости.

Рассмотрим однородную систему (2.41). Здесь уравнения не разделяются. Характеристическим уравнением системы оказывается биквадратное уравнение

$$p^4 + p^2(2\omega_0^2 - \omega_y^2 + 2\omega_z^2) + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) = 0. \quad (2.43)$$

Для устойчивости (неасимптотической, разумеется) необходимо, чтобы корни характеристического уравнения (2.43) были нулевыми либо чисто мнимыми, причем кратным корням характеристического уравнения должны соответствовать линейные элементарные делители характеристической матрицы системы (2.41). Для того чтобы корни уравнения (2.43) были нулевыми или чисто мнимыми, необходимо, в свою очередь, чтобы квадратное уравнение

$$q^2 + q(2\omega_0^2 - \omega_y^2 + 2\omega_z^2) + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) = 0 \quad (2.44)$$

имело вещественные и не положительные корни. Это будет, очевидно, в том случае, если коэффициенты уравнения (2.44) будут не отрицательны, а его дискриминант  $\Delta$  не положителен, что приводит к трем условиям:

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_0^2 - \omega_y^2 + 2\omega_z^2 &\geq 0, \\ (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) &\geq 0, \\ 2\omega_z^2\omega_y^2 - \frac{\omega_y^4}{4} - 4\omega_0^2\omega_z^2 &\leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Последнее условие (2.45) дает в плоскости параметров  $\omega_y^2$ ,  $\omega_z^2$  гиперболу (рис. 2.1)

$$\omega_z^2 = \frac{\omega_y^4}{8(\omega_y^2 - 2\omega_0^2)} \quad (2.46)$$

с асимптотами

$$\omega_y^2 = 2\omega_0^2, \quad \omega_z^2 = \frac{\omega_0^2}{4} + \frac{\omega_y^2}{8}. \quad (2.47)$$



Устойчивость имеет место в двух областях (на рис. 2.1 эти области заштрихованы). Первая ограничена прямыми

$$\omega_y^2 = 0, \quad \omega_z^2 = 0, \quad \omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 = 0 \quad (2.48)$$

и определяется одним неравенством

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0. \quad (2.49)$$

Вторая область ограничена прямыми

$$\omega_y^2 = 0, \quad \omega_z^2 = \omega_0^2 \quad (2.50)$$

и частью верхней ветви гиперболы между точками  $(2\omega_0^2, \infty)$  и  $(4\omega_0^2, \omega_0^2)$ . Внутри указанных областей корни характеристического уравнения (2.43) простые и чисто мнимые.

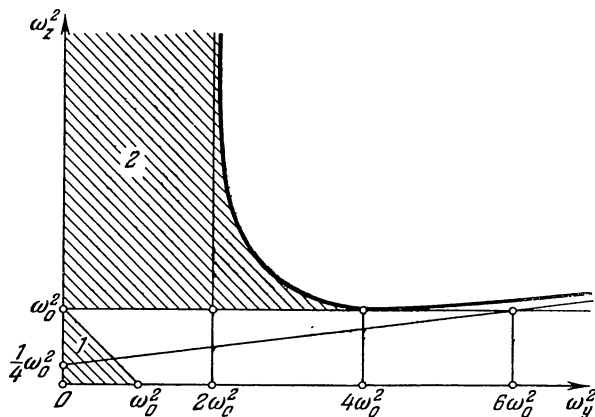


Рис. 2.1.

На границах областей устойчивости имеет место следующее. В точке  $(\omega_y^2 = 0, \omega_z^2 = 0)$  появляются два двукратных мнимых корня

$$p_{1,2} = p_{3,4} = \pm j\omega_0; \quad (2.51)$$

соответствующие им элементарные делители характеристической матрицы системы (2.41) линейны.

На отрезке прямой  $\omega_z^2 = 0, \omega_y^2 < \omega_0^2$  корни мнимые различные:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_0, \quad p_{3,4} = \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}. \quad (2.52)$$

В точке ( $\omega_z^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 = \omega_0^2$ ) получаем:

$$p_{1,2} = \pm j\omega_0, \quad p_{3,4} = 0, \quad (2.53)$$

причем элементарный делитель, соответствующий кратному нулевому корню, — делитель второй степени.

На отрезке прямой  $\omega_y^2 = 0$ ,  $0 < \omega_z^2 < \omega_0^2$  корни мнимые различные:

$$p_{1,2,3,4} = \pm j(\omega_0 \pm \omega_z). \quad (2.54)$$

В точке ( $\omega_y^2 = 0$ ,  $\omega_z^2 = \omega_0^2$ ) корни равны:

$$p_{1,2} = 0, \quad p_{3,4} = \pm 2j\omega_0, \quad (2.55)$$

при этом кратному нулевому корню соответствует линейный элементарный делитель.

На прямой  $\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 = 0$  между точками  $(0, \omega_0^2)$  и  $(\omega_0^2, 0)$  получаем:

$$p_{1,2} = 0, \quad p_{3,4} = \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - 3\omega_y^2}; \quad (2.56)$$

здесь нулевой корень имеет элементарный делитель второй степени.

На полупрямой  $\omega_z^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 > \omega_0^2$  корни различные:

$$p_{1,2,3,4} = \pm j(\omega_0 \mp \omega_y). \quad (2.57)$$

На отрезке  $\omega_z^2 = \omega_0^2$ ,  $0 < \omega_y^2 < 4\omega_0^2$  наряду с мнимыми корнями

$$p_{1,2} = \pm j\sqrt{4\omega_0^2 - \omega_y^2} \quad (2.58)$$

появляется кратный нулевой корень

$$p_{3,4} = 0 \quad (2.59)$$

с элементарным делителем второй степени.

В точке ( $\omega_z^2 = \omega_0^2$ ,  $\omega_y^2 = 4\omega_0^2$ ) появляется четырехкратный нулевой корень

$$p_{1,2,3,4} = 0, \quad (2.60)$$

которому соответствует элементарный делитель второй степени.

Наконец, на участке гиперболы (2.46), там, где  $2\omega_0^2 < \omega_y^2 < 4\omega_0^2$ , будут кратные мнимые корни

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= j \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2 - \omega_y^2/2} \\ p_{3,4} &= -j \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2 - \omega_y^2/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

с элементарными делителями второй степени.

Для исследования устойчивости однородных уравнений (2.41) можно также воспользоваться тем обстоятельством, что эти уравнения можно трактовать как описывающие движение вблизи положения равновесия

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0 \quad (2.62)$$

материальной точки с единичной массой под действием потенциальных и гироскопических сил, совершенно аналогично тому, как было сделано в главе 1 при анализе уравнений (1.132).

В рассматриваемом случае силовая функция потенциальных сил будет иметь вид

$$U = -\frac{1}{2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(\delta x)^2 + (\omega_0^2 - \omega_y^2)(\delta y)^2], \quad (2.63)$$

а гироскопические силы — это

$$-2\omega_z \delta \dot{y}, \quad 2\omega_z \delta \dot{x}. \quad (2.64)$$

Для устойчивости положения равновесия (2.62) под действием лишь потенциальных сил силовая функция (2.63) должна иметь изолированный максимум в точке равновесия, что будет, очевидно, иметь место при выполнении неравенства (2.49). По известной теореме Кельвина тогда система будет устойчива в области (2.49) и с добавлением гироскопических сил \*).

Условие (2.49) дает лишь одну из двух областей устойчивости, полученных выше при анализе характеристического уравнения (2.43). Вторая область обязана своим появлением гироскопическим силам (2.64), ибо она соответствует области,

---

\*). См. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.

где вследствие второго неравенства (2.45) степень неустойчивости под действием лишь потенциальных сил четна.

Известно, что если система под действием потенциальных сил неустойчива, а стабилизация ее (при четной степени неустойчивости) обеспечивается гироскопическими силами, то получаемая при этом устойчивость разрушается, если в системе есть силы полной внутренней диссипации, т. е. такая устойчивость имеет временный характер, в отличие от стабилизации потенциальными силами, которая имеет вековой характер и упрочняется силами полной внутренней диссипации.

Вводя в однородные уравнения (2.41) полную внутреннюю диссипацию с функцией рассеяния Релея

$$R = \frac{\varepsilon}{2} [(\dot{\delta x})^2 + (\dot{\delta y})^2], \quad (2.65)$$

где  $\varepsilon$  — некоторая положительная постоянная, получаем однородные уравнения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \varepsilon \delta \dot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x - 2\omega_z \delta \dot{y} &= 0, \\ \delta \ddot{y} + \varepsilon \delta \dot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + 2\omega_z \delta \dot{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Если считать диссипацию малой и сохранить в характеристическом уравнении системы (2.66) лишь члены с первой степенью  $\varepsilon$ , то оно запишется так:

$$p^4 + 2\varepsilon p^3 + p^2(2\omega_0^2 - \omega_y^2 + 2\omega_z^2) + p\varepsilon(2\omega_0^2 - \omega_y^2 - 2\omega_z^2) + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) = 0. \quad (2.67)$$

Из вида коэффициентов уравнения (2.67) вытекает, что вне области

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0 \quad (2.68)$$

хотя бы один из них становится отрицательным.

Необходимые условия Гурвица при этом нарушаются, корни уравнения (2.67) имеют положительные вещественные части, что и говорит о разрушении устойчивости вне области (2.68) силами полной внутренней диссипации. Неравенства

Гурвица в рассматриваемом случае имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon > 0, \quad 2\omega_0^2 - \omega_y^2 + 6\omega_z^2 > 0, \\ 16\omega_z^2(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) + \omega_y^2(\omega_y^2 + 8\omega_z^2) > 0, \\ (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) > 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.68a)$$

Из них следует, что в области (2.68) силы полной внутренней диссипации делают систему асимптотически устойчивой.

Полезно обратить внимание на следующее. Иногда на том основании, что на любом действительном перемещении на материальную систему действуют силы, рассеивающие энергию, области устойчивости, где стабилизация обеспечивается гироскопическими силами, исключаются из рассмотрения. Здесь, однако, надо иметь в виду, что при малой величине диссипативных сил и ограниченном времени работы системы процесс разрушения гироскопической устойчивости может не успеть развиваться. Кроме того, следует иметь в виду, что произвольное введение диссипативных сил в систему при исследовании ее устойчивости может повлечь за собой серьезные ошибки. Ниже, в § 2.4, будет дан пример такой ситуации.

Выше проведено исследование устойчивости по уравнениям (2.28). Но это уравнения первого приближения. Характеристическое уравнение системы (2.28) имеет в полученных областях устойчивости нулевые и чисто мнимые корни. Случай критический, и поэтому, согласно известным теоремам Ляпунова, по уравнениям первого приближения окончательного суждения об устойчивости сделать нельзя. Полученные условия являются лишь необходимыми. Чтобы получить достаточные условия, следует рассмотреть нелинейные уравнения (2.31). Это рассмотрение будет проведено в следующей главе при изучении аналогии между схемами инерциальных систем с двумя ньютонометрами и маятниково-гироскопическими системами Шулера.

**2.3.2. Решение первой группы уравнений ошибок в случаях, приводящих к уравнениям с постоянными коэффициентами.** Получим решения первой группы уравнений ошибок инерциальной системы с двумя ньютонометрами для указанных выше случаев движения объекта, когда коэффициенты уравнений ошибок становятся постоянными.

Для неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  объекта первая группа (2.28) уравнений ошибок переходит в уравнения (2.37). Их решение очевидно и дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_x \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau - r \int_0^t \Delta m_y \cos \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0 - r \Delta m_x^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_y \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau + r \int_0^t \Delta m_x \cos \omega_0 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} (2.69)$$

При постоянных инструментальных погрешностях эти формулы принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} (2.70)$$

Сравнение формул (2.69), (2.70) с первыми двумя формулами (1.140), (1.141) показывает, что выражения (2.69), (2.70) для  $\delta x$ ,  $\delta y$  совпадают с аналогичными выражениями для автономной инерциальной системы.

Рассмотрим теперь случай, когда объект движется с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга на сфере постоянного радиуса, окружающей Землю. Тогда уравнения (2.28) заменяются уравнениями (2.39). Перепишем их:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x &= \Delta n_x - \dot{\Delta m}_y r - 2\Delta \dot{r} \omega_y, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + \dot{\Delta m}_x r - \Delta m_z r \omega_y. \end{aligned} \right\} (2.71)$$

Система (2.28) распалась на два уравнения второго порядка. Их решение таково:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 \cos vt + \frac{\delta \dot{x}^0}{v} \sin vt + \\ &+ \frac{1}{v} \int_0^t (\Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r - 2 \Delta \dot{r} \omega_y) \sin v(t - \tau) d\tau \\ &(\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}), \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r - \Delta m_z r \omega_y) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

При постоянных инструментальных погрешностях  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  и постоянной погрешности  $\Delta r$  информации о расстоянии до центра Земли выражения для  $\delta x$ ,  $\delta y$  принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{v^2} + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{v^2} \right) \cos vt + \frac{\delta \dot{x}^0}{v} \sin vt, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y - \Delta m_z r \omega_y}{\omega_0^2} + \\ &+ \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y - \Delta m_z r \omega_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

При малых  $\omega_y$  выражения (2.72), (2.73) мало отличаются от выражений (2.69), (2.70). Если  $\omega_y = 0$ , то формулы (2.72), (2.73) переходят в формулы (2.69), (2.70).

Другим интересным предельным случаем решений (2.72), (2.73) будет движение спутника по круговой орбите, когда

$$\omega_y = \omega_0. \quad (2.74)$$

Решение для этого случая может быть получено из соотношений (2.72), (2.73) предельным переходом  $\omega_y \rightarrow \omega_0$  ана-

логично тому, как из решения (1.149) были получены формулы (1.152). Совершив этот предельный переход, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t + \\ &+ \int_0^t (\Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - 2\omega_0 \Delta r) (t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - \Delta m_z r \omega_0) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

При постоянных  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ ,  $\Delta r$  получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t + \Delta n_x \frac{t^2}{2}, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0^2} (\Delta n_y - \Delta m_z r \omega_0) (1 - \cos \omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Обратимся теперь к последнему из указанных выше случаев, когда уравнения (2.28) имеют постоянные коэффициенты, — к случаю уравнений (2.41):

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x - 2\omega_z \delta \dot{y} &= \\ &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - r \omega_z \Delta m_x, \\ \delta \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + 2\omega_z \delta \dot{x} &= \\ &= -\Delta r \omega_y \omega_z + \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - r \omega_z \Delta m_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

Этот случай, как уже было отмечено в предшествующем разделе настоящего параграфа, соответствует равномерной циркуляции объекта на поверхности неизменно ориентированной концентрической с Землей сферы постоянного радиуса, т. е. соответствует движению объекта с постоянной скоростью



по дуге малого круга этой сферы. Частным случаем такого движения будет движение с постоянной скоростью вдоль параллели. Тогда трехгранник  $xuz$ , в проекциях на оси которого написаны уравнения (2.77), можно считать ориентированным по странам света (ось  $u$  направлена на север), а входящие в это уравнение величины  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  будут равны:

$$\omega_y = \omega \cos \varphi, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi, \quad (2.78)$$

где

$$\omega = u + \frac{V}{r \cos \varphi}. \quad (2.79)$$

Здесь  $V$  — скорость движения объекта относительно Земли, а  $\varphi$  — широта параллели, по которой движется объект. Дальнейшее рассмотрение этого случая будет вестись применительно к движению по параллели, что, очевидно, не уменьшает общности.

Характеристическое уравнение системы (2.77) получается биквадратным. Оно имеет вид:

$$p^4 + (2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2) p^2 + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega^2) = 0. \quad (2.80)$$

При выполнении условия (2.49), т. е. когда

$$\omega_0^2 - \omega^2 > 0, \quad (2.81)$$

уравнения (2.77), как было показано в предыдущем разделе, характеризуют неасимптотически устойчивое движение. При выполнении указанного условия характеристическое уравнение (2.80) имеет две пары чисто мнимых сопряженных корней:

$$p_{1,2} = \pm j\mu, \quad p_{3,4} = \pm j\nu, \quad (2.82)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sqrt{-\frac{\omega_y^2}{2} + \omega_z^2 + \omega_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_y^2}{2} - \omega_z^2 - \omega_0^2\right)^2 - (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega^2)}, \\ \nu &= \sqrt{-\frac{\omega_y^2}{2} + \omega_z^2 + \omega_0^2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_y^2}{2} - \omega_z^2 - \omega_0^2\right)^2 - (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

В соответствии с этим общее решение однородной системы (2.77) представляется функциями

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{C_1}{b\mu - av} (b\mu \cos vt - av \cos \mu t) + \\ &\quad + \frac{abC_2}{bv - a\mu} (\mu \sin vt - v \sin \mu t) + \\ &\quad + \frac{C_3}{bv - a\mu} (b \sin vt - a \sin \mu t) + \\ &\quad + \frac{abC_4}{b\mu - av} (\cos \mu t - \cos vt), \\ \delta y &= \frac{C_1}{b\mu - av} (\mu \sin vt - v \sin \mu t) + \\ &\quad + \frac{C_2}{bv - a\mu} (bv \cos \mu t - a\mu \cos vt) + \\ &\quad + \frac{C_3}{bv - a\mu} (\cos \mu t - \cos vt) + \\ &\quad + \frac{C_4}{b\mu - av} (b \sin \mu t - a \sin vt). \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

В равенствах (2.84)  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные, имеющие соответственно смысл начальных значений  $\delta x^0, \delta y^0, \dot{\delta x}^0, \dot{\delta y}^0$ . Величины  $a$  и  $b$  выражаются через модули (2.83) корней характеристического уравнения (2.80) и коэффициенты исходной системы следующим образом:

$$a = \frac{\omega_0^2 - \omega_z^2 - \mu^2}{2\mu\omega_z}, \quad b = \frac{\omega_0^2 - \omega_z^2 - v^2}{2v\omega_z}. \quad (2.85)$$

Решение неоднородной системы (2.77) может быть получено из (2.84) методом вариаций произвольных постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Оно получается в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \int_0^t \left\{ \frac{f_1}{bv - a\mu} [-a \sin \mu(t - \tau) + b \sin v(t - \tau)] + \right. \\ &\quad + \frac{abf_2}{b\mu - av} [\cos \mu(t - \tau) - \cos v(t - \tau)] \Big\} d\tau + \\ &\quad + \frac{\delta x^0}{b\mu - av} (b\mu \cos vt - av \cos \mu t) + \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta \dot{x}^0}{bv - a\mu} (b \sin vt - a \sin \mu t) + \\
& + \frac{ab \delta y^0}{bv - a\mu} (\mu \sin vt - v \sin \mu t) + \\
& + \frac{ab \delta \dot{y}^0}{b\mu - av} (\cos \mu t - \cos vt), \\
\delta y = & \int_0^t \left\{ \frac{f_1}{bv - a\mu} [\cos \mu(t - \tau) - \cos v(t - \tau)] + \right. \\
& + \frac{f_2}{b\mu - av} [b \sin \mu(t - \tau) - a \sin v(t - \tau)] \Big\} d\tau + \\
& + \frac{\delta y^0}{bv - a\mu} (bv \cos \mu t - a\mu \cos vt) + \\
& + \frac{\delta \dot{y}^0}{b\mu - av} (b \sin \mu t - a \sin vt) + \\
& + \frac{\delta x^0}{b\mu - av} (\mu \sin vt - v \sin \mu t) + \\
& + \frac{\delta \dot{x}^0}{bv - a\mu} (\cos \mu t - \cos vt). \quad \left. \right\} \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Здесь через  $f_1(\tau)$ ,  $f_2(\tau)$  обозначены правые части уравнений (2.77), так что

$$\begin{aligned}
f_1(\tau) &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y - r \omega_z \Delta m_x - 2 \Delta \dot{r} \omega_y, \\
f_2(\tau) &= \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z - \\
& - r \omega_z \Delta m_y - \Delta r \omega_y \omega_z.
\end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2.87)$$

Можно убедиться в том, что при  $\omega_z = 0$  формулы (2.86) переходят в формулы (2.72). Для этого достаточно заметить, что при  $\omega_z = 0$  из выражений (2.83) следует, что

$$\mu = \omega_0, \quad v = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}, \quad (2.88)$$

а из выражений (2.85), (2.83) получается, что

$$\lim_{\omega_z \rightarrow 0} a = 0, \quad \lim_{\omega_z \rightarrow 0} b = \infty. \quad (2.89)$$

При  $\omega_y = 0$  уравнения (2.77) заменой переменных (2.32) приводятся к уравнениям (2.37). Обратная замена переменных позволяет получить при  $\omega_y = 0$  решение (2.86) из формул (2.69).

Точное решение (2.86) уравнений ошибок первой группы при движении объекта по параллели хотя и обозримо, но весьма громоздко. Если принять, что

$$\omega_0^2 \gg \omega^2, \quad (2.90)$$

то решение (2.86) может быть значительно упрощено.

Из (2.83) найдем в этом случае такие приближенные значения  $\mu$  и  $\nu$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \omega_0 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \sqrt{\omega^2 \cos^2 \varphi - 9\omega^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 16\omega_0^2 \sin^2 \varphi} \right), \\ \nu &= \omega_0 \left( 1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} \cos^2 \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{4\omega_0^2} \sqrt{\omega^2 \cos^2 \varphi - 9\omega^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + 16\omega_0^2 \sin^2 \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Отсюда в первом приближении

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \omega_0 + \omega \sin \varphi = \omega_0 + \omega_z, \\ \nu &= \omega_0 - \omega \sin \varphi = \omega_0 - \omega_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

С учетом соотношений (2.90) — (2.92) решение (2.86) может быть упрощено до вида

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [f_1 \cos \omega_z(t - \tau) + \\ &\quad + f_2 \sin \omega_z(t - \tau)] \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \\ &\quad + (\delta x^0 \cos \omega_z t + \delta y^0 \sin \omega_z t) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} (\delta \dot{x}^0 \cos \omega_z t + \delta \dot{y}^0 \sin \omega_z t) \sin \omega_0 t, \\ \delta y &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [-f_1 \sin \omega_z(t - \tau) + \\ &\quad + f_2 \cos \omega_z(t - \tau)] \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \\ &\quad + (-\delta x^0 \sin \omega_z t + \delta y^0 \cos \omega_z t) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} (-\delta \dot{x}^0 \sin \omega_z t + \delta \dot{y}^0 \cos \omega_z t) \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

При постоянных инструментальных погрешностях из (2.93), (2.87) получаются такие приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_z t) - \\ &- \frac{\Delta n_y - \Delta r \omega_y \omega_z}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t \sin \omega_z t + \delta x^0 \cos \omega_0 t \cos \omega_z t + \\ &+ \delta y^0 \cos \omega_0 t \sin \omega_z t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_z t + \\ &+ \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_z t, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t \sin \omega_z t + \\ &+ \frac{\Delta n_y - \Delta r \omega_y \omega_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_z t) + \\ &+ \delta y^0 \cos \omega_0 t \cos \omega_z t - \delta x^0 \cos \omega_0 t \sin \omega_z t + \\ &+ \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_z t - \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_z t. \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

**2.3.3. Интегрирование первой группы уравнений ошибок для случая кеплерова движения объекта.** Перейдем к построению решения уравнений (2.28) для случая кеплерова движения объекта. В проекциях на оси орбитального трехгранника  $xuz$  (ось  $z$  направлена вдоль  $r$ , ось  $y$  нормальна плоскости орбиты и движение объекта, если смотреть с конца этой оси, происходит против хода часовой стрелки) система (2.28) превращается в уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \delta x &= \Delta n_x - \\ &- 2\dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y - \Delta r \dot{\omega}_y - 2\dot{r} \dot{\omega}_y, \\ \delta \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} \delta y &= \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

где  $r$  и  $\omega_y$  определены формулами (1.162), получающимися в свою очередь из формул (1.156).

Коэффициенты уравнений (2.95) переменны. В то же время уравнения (2.95) не будут, как это было с уравнением (1.92),

уравнениями в вариациях кеплерова движения (1.155). Для отыскания решения уравнений (2.95) нельзя поэтому воспользоваться теоремой Пуанкаре, как это было сделано для отыскания решения уравнения (1.92) — векторного уравнения ошибок автономной инерциальной системы. Однако сопоставление уравнений (1.92) и (2.95) позволяет все-таки найти путь интегрирования последних \*).

Векторное уравнение (1.92) в проекциях на оси орбитального трехгранника приводит к системе скалярных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \delta x + \dot{\omega}_y \delta z + 2\omega_y \delta \dot{z} = \\ = \Delta n_x - 2\dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y, \\ \delta \ddot{z} - \left( \frac{2\mu}{r^3} + \omega_y^2 \right) \delta z - \dot{\omega}_y \delta x - \\ - 2\omega_y \delta \dot{x} = \Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

и к скалярному уравнению

$$\delta \ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} \delta y = \Delta n_y + 2\dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r\omega_y \Delta m_z. \quad (2.97)$$

Уравнения (2.96), (2.97) суть первая группа уравнений ошибок автономной инерциальной системы для кеплерова движения объекта. Система уравнений (2.96) дает ошибки в плоскости орбиты, уравнение (2.97) — в плоскости, содержащей ось  $y$  и нормальной плоскости орбиты. Решение уравнений (2.96), (2.97) приведено в п. 1.3.4. Это формулы (1.166).

Сравнив уравнение (2.97) со вторым уравнением (2.95), замечаем, что они полностью совпадают. Поэтому решением второго уравнения (2.95) будет третья формула (1.166), которую мы здесь и перепишем:

$$\delta y = \sum_{i=1}^2 B_{1i} \left[ \int_0^t (\Delta n_y + 2 \Delta m_x \dot{r} + \Delta \dot{m}_x r - \right. \\ \left. - r\omega_y \Delta m_z) G_{i2} dt + \sum_{j=1}^2 G_{ij}^0 x_{j+4}^0 \right]. \quad (2.98)$$

---

\*) Андреев В. Д., Интегрирование уравнений ошибок системы инерциальной навигации для кеплеровых движений объекта. Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 2, 1965.

Здесь величины  $B_{1i}$ ,  $G_{i2}$ ,  $G_{ij}^0$  заданы равенствами (1.167), (1.169), а  $x_5^0$ ,  $x_6^0$  связаны с  $\delta y^0$  и  $\delta \dot{y}^0$  соотношениями (1.170). Приняв во внимание эти значения  $B_{1i}$ ,  $G_{i2}$ ,  $G_{ij}^0$ ,  $x_5^0$ ,  $x_6^0$ , можно легко убедиться, что для круговой орбиты, когда  $e = 0$ ,  $v = \omega_0$ , формула (2.98) переходит в полученную ранее вторую формулу (2.75).

Получим из (2.98) приближенную формулу для случая орбиты малого эксцентриситета и постоянных инструментальных погрешностей.

Если эксцентриситет  $e$  орбиты (эллиптической) мал, то из первых трех равенств (1.156) с учетом (1.159), раскладывая соответствующие выражения в ряды по степеням  $e$  и сохраняя лишь линейные слагаемые, находим:

$$\left. \begin{aligned} \sin E &= \sin vt (1 + e \cos vt), \\ \cos E &= \cos vt - e \sin^2 vt. \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

Теперь из четвертого равенства (1.156)

$$r = a(1 - e \cos vt), \quad (2.100)$$

а отсюда и из пятого равенства (1.162)

$$\omega_y = v = v(1 + 2e \cos vt). \quad (2.101)$$

Поэтому

$$v = vt + 2e \sin vt. \quad (2.102)$$

В формулы (1.167) для  $B_{1i}$ ,  $G_{i2}$  входят функции  $\sin v$  и  $\cos v$ . Согласно (2.102),

$$\left. \begin{aligned} \sin v &= \sin vt + e \sin 2vt, \\ \cos v &= \cos vt - 2e \sin^2 vt. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Теперь получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \cos vt - e(1 + \sin^2 vt), \\ B_{12} &= \sin vt + \frac{e \sin 2vt}{2}, \\ G_{12} &= -\frac{1}{v} \left( \sin vt + \frac{e}{2} \sin 2vt \right), \\ G_{22} &= \frac{1}{v} [\cos vt - e(1 + \sin^2 vt)], \\ G_{11}^0 &= 1 - e, \quad G_{12}^0 = 0, \quad G_{21}^0 = 0, \quad G_{22}^0 = \frac{1 - e}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.104)$$

Подставив соотношения (2.104), (2.100), (2.101) в формулу (2.98) и приняв во внимание постоянство инструментальных погрешностей, после интегрирования и очевидных группировок приходим к такому выражению для  $\delta y$ :

$$\begin{aligned} \delta y = & \frac{\Delta n_y - av \Delta m_z}{v^2} (1 - \cos vt) + \delta y^0 \cos vt + \\ & + \frac{\delta \dot{y}^0}{v} \sin vt + e \left[ \frac{\Delta n_y}{v^2} (1 - \cos vt + \sin^2 vt - \right. \\ & - \frac{3}{2} vt \sin vt) + \frac{a \Delta m_z}{v} (\cos vt - 1 - \sin^2 vt + \\ & + vt \sin vt) + \frac{a \Delta m_x}{v} (vt \cos vt - \sin vt) + \\ & \left. + \delta y^0 (\cos vt - 1 - \sin^2 vt) + \frac{\delta \dot{y}^0}{v} (-\sin vt + \sin vt \cos vt) \right]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

При  $e=0$  это равенство переходит ( $v=\omega_0$ ,  $a=r$ ) в равенство (2.76).

Чтобы построить решение первого уравнения (2.95), заметим, что среди частных решений однородной системы (2.96), найденных в п. 1.3.4, есть решение

$$\delta x = \frac{r}{a}, \quad \delta z = 0. \quad (2.106)$$

Это легко установить, раскрыв выражение (1.160) для  $q_4$ . Сравнив первое уравнение (2.96) с первым уравнением (2.95), приходим к выводу, что выражение

$$\delta x = \frac{r}{a} \quad (2.107)$$

будет частным решением однородного уравнения, соответствующего первому уравнению (2.95), в чем можно убедиться и прямой подстановкой. Обозначим частное решение (2.107) через  $\delta x_{(1)}$ .

Для отыскания второго частного решения воспользуемся формулой Остроградского ... Лиувилля

$$W(t) = W(0) e^{-\int_0^t p_1(t) dt}, \quad (2.108)$$



которая (с точностью до постоянного множителя) дает выражение определителя Вронского для уравнения

$$\ddot{y} + p_1 \dot{y} + p_2 y = 0. \quad (2.109)$$

В нашем случае  $p_1 = 0$  и определитель Вронского постоянен. Приняв для определенности его значение равным единице, получаем:

$$\delta x_{(1)} \delta \dot{x}_{(2)} - \delta \dot{x}_{(1)} \delta x_{(2)} = 1, \quad (2.110)$$

где через  $\delta x_{(1)}$  обозначено известное, а через  $\delta x_{(2)}$  — искомое второе частное решение.

Из равенства (2.110) находим:

$$\delta x_{(2)} = \delta x_{(1)} \left( \int \frac{dt}{\delta x_{(1)}^2} + C \right). \quad (2.111)$$

Положим  $C = 0$  и подставим в (2.111) вместо  $\delta x_{(1)}$  его значение (2.107). Тогда получим:

$$\delta x_{(2)} = \frac{r}{a} \int \frac{a^2}{r^2} dt. \quad (2.112)$$

Воспользовавшись теперь пятым равенством (1.162), согласно которому

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{\dot{v}}{v \sqrt{1 - e^2}}, \quad (2.113)$$

находим:

$$\delta x_{(2)} = \frac{rv}{av \sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.114)$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения, соответствующего первому уравнению (2.95), имеет вид:

$$\delta x = C_1 \frac{r}{a} + C_2 \frac{rv}{av \sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.115)$$

Общее решение неоднородного уравнения найдем методом вариаций произвольных постоянных. Полагая  $C_1$  и  $C_2$

в формуле (2.115) функциями времени, получаем для их определения такую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_1 \frac{r}{a} + \dot{C}_2 \frac{rv}{av\sqrt{1-e^2}} &= 0, \\ \dot{C}_1 \frac{ve \sin v}{\sqrt{1-e^2}} + \dot{C}_2 \left( \frac{ev \sin v}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) &= \\ &= \Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.116)$$

Определитель этой системы есть определитель Вронского (2.110) и равен единице. Из системы уравнений (2.116) получаем:

$$\left. \begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{av\sqrt{1-e^2}} \int_0^t rv (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \\ &\quad - \Delta \dot{m}_y r - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y) dt + C_1^0, \\ C_2(t) &= \frac{1}{a} \int_0^t r (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \\ &\quad - \Delta \dot{m}_y r - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y) dt + C_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

Здесь  $C_1^0$ ,  $C_2^0$  определены начальными условиями  $\delta x^0$ ,  $\delta \dot{x}^0$  и равны:

$$\left. \begin{aligned} C_1^0 &= \delta x^0 \left( \frac{ev^0 \sin v^0}{1-e^2} + \frac{a}{r^0} \right) - \frac{\delta \dot{x}^0 r^0 v^0}{av\sqrt{1-e^2}}, \\ C_2^0 &= -\frac{\delta x^0 ve \sin v^0}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{\delta \dot{x}^0 r^0}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

Подставив значения (2.118) в формулы (2.117) и далее в формулу (2.115), находим  $\delta x$  в виде

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{r}{a} \left[ -\frac{1}{av\sqrt{1-e^2}} \int_0^t rv (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta \dot{m}_y r - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y) dt + \right. \\ &\quad \left. + \delta x^0 \left( \frac{ev^0 \sin v^0}{1-e^2} + \frac{a}{r^0} \right) - \frac{\delta \dot{x}^0 r^0 v^0}{av\sqrt{1-e^2}} \right] + \end{aligned}$$

$$+ \frac{rv}{av\sqrt{1-e^2}} \left[ \frac{1}{a} \int_0^t r (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y) dt - \frac{\delta x^0 v e \sin v^0}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{\delta \dot{x}^0 r^0}{a} \right]. \quad (2.119)$$

Легко убедиться в том, что для круговой орбиты, когда  $e=0$ , формула (2.119) превращается в полученную ранее первую формулу (2.75).

Получим из формулы (2.119) выражение  $\delta x$  для случая орбиты с малым эксцентриситетом и при постоянных  $\Delta n_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta r$ . Будем считать для упрощения, что в начальный момент времени объект находится в перигее своей орбиты, что не уменьшает общности, и воспользуемся представлениями (2.100), (2.102) для  $r$  и  $v$ . Прделав необходимые преобразования подынтегральных выражений в (2.119) и выполнив интегрирование, найдем:

$$\begin{aligned} \delta x = & \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t + \Delta n_x \frac{t^2}{2} + e \left[ \Delta n_x \left( -\frac{t^2}{2} \cos vt + \frac{2t}{v} \sin vt + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{v^2} \cos vt - \frac{3}{v^2} \right) + 2(a \Delta m_y - v \Delta r) \left( \frac{\sin vt}{v} - t \right) + \right. \\ & \left. + \delta x^0 (1 - \cos vt) + \delta \dot{x}^0 \left( \frac{2}{v} \sin vt - t - t \cos vt \right) \right]. \quad (2.120) \end{aligned}$$

Первые три слагаемых правой части равенства (2.120) соответствуют значению  $\delta x$  на круговой орбите и совпадают с полученной ранее первой формулой (2.76).

**2.3.4. Исследование уравнений первой группы при произвольном движении объекта вблизи земной поверхности.** В п. 2.3.1 было проведено исследование устойчивости уравнений первой группы (2.28) в случае равномерной циркуляции объекта по поверхности неизменно ориентированной сферы, концентрической с Землей, когда коэффициенты уравнений ошибок становятся постоянными. Были найдены условия устойчивости первой группы уравнений ошибок в этом случае.

В общем случае движения объекта коэффициенты уравнений (2.28) переменны и определяемое этими уравнениями движение может оказаться неустойчивым. В самом деле, рас-

смотрим, например, однородные уравнения ошибок (2.39), соответствующие движению объекта с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга. Однородное уравнение для ошибки в направлении движения имеет при этом вид:

$$\delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2)\delta x = 0. \quad (2.121)$$

Соответствующим подбором закона изменения  $\omega_y$  по времени можно сделать это уравнение неустойчивым. Не говоря уже об очевидном случае неустойчивости при  $\omega_y^2 = \omega_0^2$  (случай движения спутника по круговой орбите, рассмотренный выше), частным случаем уравнения (2.121) будет известное уравнение Матье — Хилла, допускающее расходящиеся решения. При этом расходящиеся со временем решения уравнения (2.121) могут иметь, очевидно, место вне зависимости от соотношения величин  $\omega_y^2$  и  $\omega_0^2$ .

Наиболее простым случаем здесь будет случай параметрического резонанса, который можно построить следующим образом. Пусть  $\delta x^0$  — начальное значение  $\delta x$ , пусть также  $\delta \dot{x}^0 = 0$ . Пусть  $\omega_y = 0$  на отрезке времени  $(0, t_1 = \pi/2\omega_0)$ . Тогда  $\delta x(t_1) = 0$ ,  $\delta \dot{x}(t_1) = -\omega_0 \delta x^0$ . На отрезке времени  $\left(t_1, t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}}\right)$  пусть  $\omega_y = \text{const}$ . В момент  $t_2$  получим, очевидно,  $\delta \dot{x}(t_2) = 0$ ,  $\delta x(t_2) = -\frac{\omega_0 \delta x^0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}}$ . Продолжая этот процесс дальше, по прохождении  $k$  циклов получим:

$$|\delta x(t_{2k})| = \delta x^0 \left( \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}} \right)^k. \quad (2.122)$$

Соотношение (2.122) показывает, как увеличивается амплитуда ошибки  $\delta x$  со временем. Если  $\omega_y^2 \ll \omega_0^2$ , то, очевидно,

$$|\delta x(t_{2k})| \approx \delta x^0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_y^2}{\pi \omega_0} t_{2k} \right). \quad (2.123)$$

Обратимся теперь к общему случаю медленного движения объекта на постоянном удалении от центра Земли. Возьмем

однородные уравнения ошибок первой группы в форме (2.36):

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2)\delta x + \omega_x\omega_y\delta y &= 0, \\ \delta\ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_x^2)\delta y + \omega_x\omega_y\delta x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.124)$$

Величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  связаны с горизонтальными проекциями  $v_x$ ,  $v_y$  абсолютной скорости объекта равенствами  $\omega_x = -v_y/r$ ,  $\omega_y = v_x/r$ . Очевидно,

$$\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} \leq \frac{V}{r} + u = \omega, \quad (2.125)$$

где  $V$  — максимальное значение горизонтальной скорости объекта относительно Земли, а  $u$  — угловая скорость вращения Земли. При скоростях объекта, малых по сравнению с первой космической, когда

$$|\omega_x| \leq \omega_0, \quad |\omega_y| \leq \omega_0, \quad (2.126)$$

оказывается возможным \*) построить эффективные оценки расходимости решений уравнений (2.124) по сравнению с решениями уравнений

$$\delta\ddot{x} + \omega_0^2\delta x = 0, \quad \delta\ddot{y} + \omega_0^2\delta y = 0. \quad (2.127)$$

Заменим время  $t$  безразмерной независимой переменной

$$\tau = \omega_0 t \quad (2.128)$$

и введем малый параметр  $\mu$  согласно соотношениям

$$\mu = \max \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}{\omega_0}, \quad \frac{\omega_x}{\omega_0} = \mu C_x, \quad \frac{\omega_y}{\omega_0} = \mu C_y. \quad (2.129)$$

Очевидно,

$$\mu \ll 1, \quad C_x^2 + C_y^2 \leq 1. \quad (2.130)$$

---

\*) Андреев В. Д., Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры. Прикладная математика и механика, т. XXII, вып. 6, 1958. Парусников Н. А., К лигер Л. И., Об уравнениях малых колебаний шулеровской вертикали, Инженерный журнал, Механика твердого тела, № 5, 1966.

С учетом равенств (2.128), (2.129) уравнения (2.124) можно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta x'' + \delta x &= \mu^2 C_y (C_y \delta x - C_x \delta y), \\ \delta y'' + \delta y &= \mu^2 C_x (C_x \delta y - C_y \delta x), \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по  $\tau$ .

Один из возможных дальнейших путей заключается в следующем. Запишем уравнения (2.131) в несколько иной форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta x'' + \delta x &= \mu^2 F_x(\delta x, \delta y), \quad \delta y'' + \delta y = \mu^2 F_y(\delta x, \delta y), \\ F_x &= C_y (C_y \delta x - C_x \delta y), \\ F_y &= C_x (C_x \delta y - C_y \delta x) \end{aligned} \right\} \quad (2.132)$$

и построим их решение методом последовательных приближений. Связь  $n$ -го и  $(n-1)$ -го приближений определим равенствами

$$\left. \begin{aligned} \delta x_n'' + \delta x_n &= F_{x, n-1}, \\ \delta y_n'' + \delta y_n &= F_{y, n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (2.133)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{x, n-1} &= F_x(\delta x_{n-1}, \delta y_{n-1}), \\ F_{y, n-1} &= F_y(\delta x_{n-1}, \delta y_{n-1}), \end{aligned} \right\} \quad (2.134)$$

а в качестве нулевого приближения  $\delta x_0, \delta y_0$  возьмем решения укороченных уравнений (2.127).

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta x_n &= \mu^2 \int_0^\tau F_{x, n-1}(u) \sin(\tau - u) du + \delta x_0, \\ \delta y_n &= \mu^2 \int_0^\tau F_{y, n-1}(u) \sin(\tau - u) du + \delta y_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

Приближения (2.135) суть модификация последовательных приближений Пикара. При наложении надлежащих (обычно на практике выполняющихся) ограничений на вид функций  $F_x, F_y$  эти приближения сходятся.

Не уменьшая общности, можно принять

$$\delta x_0 = \delta y_0 = a \cos \omega_0 t. \quad (2.136)$$

Из соотношений (2.135), (2.134), (2.132), воспользовавшись теоремой о среднем и тем, что  $C_x^2 + C_y^2 \leq 1$ , получаем следующие мажорантные оценки величин  $\delta x_n$ ,  $\delta y_n$ :

$$\left| \frac{\delta x_n}{a} \right|, \left| \frac{\delta y_n}{a} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(\mu^2 \tau)^k}{k!}. \quad (2.137)$$

Перейдя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , найдем:

$$\left| \frac{\delta x_n}{a} \right|, \left| \frac{\delta y_n}{a} \right| \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} e^{\mu^2 \tau}. \quad (2.138)$$

При  $\mu \ll 1$  с большой точностью

$$\left| \frac{\delta x}{a} \right|, \left| \frac{\delta y}{a} \right| \leq 1 + \mu^2 \tau \frac{1 + \sqrt{2}}{2}. \quad (2.139)$$

Возможен несколько иной способ получения оценок типа (2.138). Возвратимся к уравнениям (2.131). Рассмотрим функцию

$$U = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta x')^2 + (\delta y')^2. \quad (2.140)$$

В силу уравнений (2.131) имеем:

$$U' = 2\mu^2 (C_x \delta y - C_y \delta x) (C_x \delta y' - C_y \delta x'). \quad (2.141)$$

Введем новые переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  согласно равенствам:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \delta x \cos \psi + \delta y \sin \psi, \\ x_2 &= -\delta x \sin \psi + \delta y \cos \psi, \\ x_3 &= \delta x' \cos \psi + \delta y' \sin \psi, \\ x_4 &= -\delta x' \sin \psi + \delta y' \cos \psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.142)$$

где

$$\cos \psi = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}, \quad \sin \psi = \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}. \quad (2.143)$$

В фазовом пространстве  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$  соотношения (2.140), (2.141) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} U &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ U' &= 2\mu^2 (C_x^2 + C_y^2) x_2 x_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.144)$$

Теперь получаем:

$$|U'| \leq 2\mu^2 x_2 x_4 \leq \mu^2 U. \quad (2.145)$$

Если  $U^0$  — значение  $U$  при  $\tau = 0$ , то из неравенства (2.145)

$$U \leq U^0 e^{\mu^2 \tau}. \quad (2.146)$$

При  $\mu^2 \tau \ll 1$

$$U \leq U^0 (1 + \mu^2 \tau). \quad (2.147)$$

Неравенства (2.146), (2.147) дают оценки верхней границы области, в которой находятся ошибки  $\delta x$ ,  $\delta y$ , независимо от закона изменения  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ .

Оценки (2.146), (2.147) вполне аналогичны оценкам (2.138), (2.139). Однако путь, которым получены неравенства (2.146), (2.147), позволяет пойти дальше. Он позволяет построить более тонкие оценки, использующие скорость изменения по времени функций  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  или, что все равно, функций  $C_x$ ,  $C_y$ .

Заметим, что система уравнений (2.131) допускает запись в канонической (гамильтоновой) форме:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \delta x'}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \delta x}, & \frac{d \delta x}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \delta x'}, \\ \frac{d \delta y'}{d\tau} &= \frac{\partial H}{\partial \delta y}, & \frac{d \delta y}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \delta y'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.148)$$

Здесь функция Гамильтона  $H$  — квадратичная форма переменных  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta x'$ ,  $\delta y'$ , причем

$$\begin{aligned} -2H = W &= (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta x')^2 + \\ &+ (\delta y')^2 - \mu^2 (C_x \delta y - C_y \delta x)^2. \end{aligned} \quad (2.149)$$

В силу уравнений (2.131)

$$W' = -2\mu^2 (C_x \delta y - C_y \delta x) (C'_x \delta y - C'_y \delta x). \quad (2.150)$$

Произведем замену переменных (2.142), определив теперь угол  $\psi_1$  равенствами

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi_1 &= \frac{C_x C'_x + C_y C'_y}{\sqrt{(C_x^2 + C_y^2)(C'^2_x + C'^2_y)}}, \\ \sin \psi_1 &= \frac{C_x C'_y - C_y C'_x}{\sqrt{(C_x^2 + C_y^2)(C'^2_x + C'^2_y)}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$



После несложных преобразований вместо соотношений (2.149), (2.150) получим:

$$\left. \begin{aligned} W &= [1 - \mu^2(C_x^2 + C_y^2)] x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ W' &= -2\mu^2 \sqrt{(C_x^2 + C_y^2)(C_x'^2 + C_y'^2)} x_1(x_1 \cos \psi_2 + \\ &\quad + x_2 \sin \psi_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.152)$$

Пусть в некоторый момент времени

$$x_1 = \rho \cos \psi_2, \quad x_2 = \rho \sin \psi_2, \quad (2.153)$$

тогда, как легко усмотреть,

$$\rho^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{W}{1 - \mu^2}. \quad (2.154)$$

Из второго равенства (2.152) следует, что

$$W' = -2\mu^2 \sqrt{(C_x^2 + C_y^2)(C_x'^2 + C_y'^2)} \rho^2 \cos \psi_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \quad (2.155)$$

Отсюда, приняв во внимание неравенства (2.154), (2.130), приходим к оценке

$$|W'| \leq \frac{\mu^2 v}{1 - \mu^2} W, \quad (2.156)$$

где

$$v = 2 \max \sqrt{C_x'^2 + C_y'^2}. \quad (2.157)$$

Теперь, аналогично (2.146),

$$W \leq W^0 e^{\frac{\mu^2 v}{1 - \mu^2} \tau} \approx W^0 e^{\mu^2 v \tau}. \quad (2.158)$$

При  $\mu^2 v \tau \ll 1$  имеем:

$$W \leq W^0 (1 + \mu^2 v \tau). \quad (2.159)$$

Таким образом, получены оценки расходимости со временем амплитуд решений уравнений (2.28) по отношению к их начальным значениям, учитывающие скорость изменения  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ .

Обратимся к количественной стороне вопроса. Рассмотрим движение объекта с постоянной скоростью по дуге большого

круга земной поверхности, принимаемой за сферу. Тогда, как нетрудно убедиться,

$$v = 2 \max \sqrt{C_x'^2 + C_y'^2} \leq 4\mu \frac{u}{\omega} \frac{V}{r\omega}, \quad (2.160)$$

где  $V$  — скорость движения относительно Земли, а величина  $\omega$  определена равенством (2.125). Оценим величину возможного относительного увеличения ошибки  $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$  по отношению к ее начальному значению за время

$$\tau_* = \frac{\pi r}{V} \omega_0, \quad (2.161)$$

т. е. за время, необходимое объекту для совершения половины оборота вокруг Земли, для разных скоростей движения. Взяв  $V = 250$  м/сек, 500 м/сек, 1000 м/сек, 2000 м/сек, получим следующую таблицу:

$V, \text{ м/сек}$	$\mu$	$v$	$\frac{\mu^2 \tau_*}{e}$	$e^{\mu^2 v \tau_*}$
250	0,09	0,08	1,49	1,07
500	0,12	0,12	1,43	1,09
1000	0,18	0,16	1,49	1,14
2000	0,31	0,19	1,82	1,26

Из этой таблицы следует, что по крайней мере в случае, когда путевая скорость объекта относительно поверхности Земли постоянна, функция  $W$  практически не меняется за достаточно длительное время. Поэтому уравнения (2.124) могут быть упрощены в этом случае до вида (2.127), т. е. в этом случае можно считать, что система ведет себя по отношению к ошибкам  $\delta x$ ,  $\delta y$  как консервативная (не асимптотически устойчивая).

Остановимся на нескольких примерах, иллюстрирующих эффективность оценок (2.146), (2.158). Сравним оценки (2.122), (2.123), полученные для простейшего случая параметрического резонанса, рассмотренного в начале настоящего раздела, с оценками (2.146), (2.147).

Из оценки (2.123), если ввести  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\mu^2 = \omega^2 / \omega_0^2$ , получим

$$\left| \frac{\delta x}{\delta x^0} \right| \approx 1 + \frac{\mu^2 \tau}{2\pi}, \quad (2.162)$$

из оценки (2.147) получаем для этого случая

$$\left| \frac{\delta x}{\delta x^0} \right| \leq 1 + \frac{\mu^2 \tau}{2}. \quad (2.163)$$

Рассмотрим случай медленного движения объекта по параллели. Уравнения ошибок для этого случая — это уравнения (2.41). Корни характеристического уравнения (2.80) системы (2.41) выражаются через  $\omega_0$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  формулами (2.82), (2.83). При нарушении условия устойчивости (2.81) один из корней характеристического уравнения становится вещественным положительным. При малых  $\omega_y$ , когда устойчивость нарушается за счет увеличения  $\omega_z$  (случай движения с постоянной скоростью по параллели в высоких широтах), максимальное значение положительного вещественного корня  $\approx \frac{1}{4} \mu^2$ .

Эта величина может служить мерой неустойчивости системы. Из оценки (2.146) аналогичная мера неустойчивости определяется величиной  $\mu^2/2$ .

В качестве последнего примера рассмотрим следующий. Пусть объект движется с постоянной скоростью вдоль земного меридиана. Ориентировав трехгранник  $xuz$  по странам света, получим в этом случае:

$$\omega_x = -\dot{\varphi} = \text{const}, \quad \omega_y = u \cos \varphi, \quad \omega_z = u \sin \varphi. \quad (2.164)$$

Однородные уравнения ошибок с учетом равенств (2.164) получаются из уравнений (2.28) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= u^2 \delta x + 2u\dot{\varphi} \cos \varphi \delta y + 2u \sin \varphi \delta \dot{y}, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= -\left( \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} u^2 \cos 2\varphi \right) \delta y - \\ &\quad - 2u \sin \varphi \delta \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (2.165)$$

Анализ точных решений  $\delta x(t)$ ,  $\delta y(t)$  уравнений (2.165), полученных на цифровой вычислительной машине для скоростей  $V = \dot{\varphi} = 500$  м/сек, 1000 м/сек, 2000 м/сек, показал [в полном соответствии с оценкой (2.158)], что выражения для  $\delta x$ ,  $\delta y$  с высокой степенью точности можно представить

формулами:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= - \left( \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \sin \varepsilon + \\ &\quad + \left( \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \cos \varepsilon, \\ \delta y &= \left( \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \cos \varepsilon + \\ &\quad + \left( \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \sin \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (2.166)$$

где

$$\varepsilon = \int_0^t \omega_z dt = \frac{u}{\phi} (\cos \varphi - 1). \quad (2.167)$$

Отметим, что формулы (2.166) вполне аналогичны приближенным формулам (2.94), полученным для случая движения объекта с постоянной скоростью вдоль параллели.

Как правило, длительное движение объекта происходит обычно вблизи некоторой ортодромии на земной поверхности (речь идет о крейсирующих объектах со скоростями до 2000—3000 км/час, т. е. о морских судах, самолетах, крылатых ракетах) с практически постоянной скоростью.

Из приведенных выше оценок и примеров следует поэтому, что с высокой степенью точности, вполне удовлетворяющей целям анализа уравнений ошибок, можно уравнения (2.28) в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника, т. е. уравнения (2.36), заменить уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= - \Delta r \dot{\omega}_y - 2 \Delta \dot{r} \omega_y + \Delta n_x - \\ &\quad - r \Delta \dot{m}_y - r \omega_x \Delta m_z - 2 \dot{r} \Delta m_y, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta r \dot{\omega}_x + 2 \Delta \dot{r} \omega_x + \Delta n_y + \\ &\quad + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_y \Delta m_z + 2 \dot{r} \Delta m_x. \end{aligned} \right\} \quad (2.168)$$

Решение этих уравнений очевидно и полностью исчерпывает задачу. Переход к выражениям  $\delta x$ ,  $\delta y$  для произвольного сопровождающего трехгранника на окружающей Землю сфере, т. е. переход к решениям уравнений (2.28), совершается

после решения уравнений (2.168) посредством формул, обратных формулам (2.33), в которых надо взять

$$\vartheta = - \int_0^t \omega_z dt + \vartheta^0. \quad (2.169)$$

Именно таким путем написаны выражения (2.166) ошибок  $\delta x$ ,  $\delta y$  в проекциях на оси трехгранника, ориентированного по странам света.

Приведенные в настоящем разделе оценки показывают также, что уравнения (2.168) дают удовлетворительную точность и для случая равномерной циркуляции по земной поверхности, а также для произвольного кратковременного маневра объекта.

В заключение остановимся еще на следующем. Выше при анализе однородных уравнений (2.36), т. е. уравнений (2.124), рассмотрен случай произвольного движения объекта с малой (по сравнению с первой космической) скоростью на постоянном удалении от центра Земли, когда

$$r = \text{const}, \quad \omega_0 = \text{const}. \quad (2.170)$$

Легко усмотреть, что основные результаты этого исследования можно распространить и на случай движения объекта при переменном  $r$ . Так, если

$$r = r^0 + \rho(t), \quad \left| \frac{\rho}{r^0} \right| \ll 1, \quad (2.171)$$

то вместо оценок (2.138) получатся оценки:

$$\left| \frac{\delta x}{a} \right|, \quad \left| \frac{\delta y}{a} \right| < \frac{1 + \sqrt{2}}{2} e^{(\mu^2 + \sigma^2)\tau} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} e^{\sigma^2\tau}, \quad (2.172)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{3 \max |\rho|}{r^0}. \quad (2.173)$$

При малых значениях  $(\mu^2 + \sigma^2)\tau$  приходим к неравенствам:

$$\left| \frac{\delta x}{a} \right|, \quad \left| \frac{\delta y}{a} \right| < 1 + \left( \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \mu^2 + \sigma^2 \right) \tau. \quad (2.174)$$

Разумеется, здесь могут быть получены также оценки, аналогичные оценкам (2.146), (2.147), (2.158), (2.159). Мы не

будем здесь заниматься выводом этих оценок. При необходимости читатель сможет сделать это самостоятельно. К тому же в части, касающейся  $\rho(t)$ , практически всегда оказываются достаточными оценки (2.172), (2.174).

## § 2.4. Исследование устойчивости и интегрирование первой группы уравнений ошибок для корректируемой от высотомера схемы с тремя ньютонометрами

**2.4.1. Анализ устойчивости.** Рассмотрим уравнения ошибок схем с тремя ньютонометрами, в которых сферическая составляющая напряженности поля тяготения Земли, входящая в уравнения идеальной работы, формируется с использованием сторонней информации о расстоянии до поверхности Земли.

Вторая группа уравнений ошибок здесь та же, что и в случае автономной инерциальной системы, поэтому в отношении уравнений второй группы на корректируемую от высотомера схему с тремя ньютонометрами целиком переносятся результаты, изложенные в п. 1.3.1.

Первая же группа уравнений ошибок отличается от уравнений ошибок автономных инерциальных систем. Для рассматриваемых корректируемых систем, как было показано в п. 2.2.1, первая группа ошибок является решением векторного уравнения (2.15)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \frac{3\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (2.175)$$

( $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{h}$ ).

В проекциях на оси сопровождающего трехгранника  $xyz$ , ось  $z$  которого совмещена с  $\mathbf{r}$ , векторное уравнение (2.175) приводит к системе (2.16) скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка.

Анализ уравнения (2.175) удобнее всего провести в проекциях на оси неизменно ориентированного трехгранника, так как получающиеся при этом скалярные уравнения имеют особенно простой вид. Взяв для определенности в качестве неизменно

ориентированного трехгранника трехгранник  $\xi_* \eta_* \zeta_*$ , получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + \frac{\mu}{r^3} \delta \xi_* &= \Delta n_{\xi_*} - 2(\Delta m_{\eta_* \dot{\xi}_*} - \Delta m_{\xi_* \dot{\eta}_*}) + \\ &\quad + \eta_* \Delta \dot{m}_{\zeta_*} - \zeta_* \Delta \dot{m}_{\eta_*} + \frac{3\mu \xi_* \Delta r}{r^4}, \\ \delta \ddot{\eta}_* + \frac{\mu}{r^3} \delta \eta_* &= \Delta n_{\eta_*} - 2(\Delta m_{\xi_* \dot{\eta}_*} - \Delta m_{\eta_* \dot{\xi}_*}) + \\ &\quad + \zeta_* \Delta \dot{m}_{\xi_*} - \xi_* \Delta \dot{m}_{\zeta_*} + \frac{3\mu \eta_* \Delta r}{r^4}, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + \frac{\mu}{r^3} \delta \zeta_* &= \Delta n_{\zeta_*} - 2(\Delta m_{\xi_* \dot{\zeta}_*} - \Delta m_{\zeta_* \dot{\xi}_*}) + \\ &\quad + \xi_* \Delta \dot{m}_{\eta_*} - \eta_* \Delta \dot{m}_{\xi_*} + \frac{3\mu \zeta_* \Delta r}{r^4}. \end{aligned} \right\} \quad (2.176)$$

Однородные уравнения (2.176) представляют собой при  $r = \text{const}$  уравнения гармонических колебаний с частотой Шюлера  $\omega_0 = \sqrt{\mu/r^3}$ . Неасимптотическая устойчивость здесь, таким образом, очевидна. Отсюда следует и устойчивость уравнений (2.16) при произвольных  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$  и  $r = \text{const}$ , т. е. для произвольного движения объекта по сфере постоянного радиуса, концентрической с Землей.

Заметим, что если  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  в уравнениях (2.16) постоянны, что будет, например, при движении с постоянной скоростью вдоль параллели, то устойчивость обнаруживается и без обращения к уравнениям (2.176), непосредственно из рассмотрения системы (2.16). В самом деле, для движения по параллели, когда  $\omega_x = 0$ , а  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  определены равенствами (2.78), (2.79), однородные уравнения (2.16) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x - 2\omega_z \delta \dot{y} + 2\omega_y \delta \dot{z} &= 0, \\ \delta \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2) \delta y + \omega_y \omega_z \delta z + 2\omega_z \delta \dot{x} &= 0, \\ \delta \ddot{z} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta z + \omega_y \omega_z \delta y - 2\omega_y \delta \dot{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.177)$$

Эти уравнения, так же как выше это делалось по отношению к уравнениям (1.132), (2.41), можно трактовать как уравнения движения материальной точки единичной массы вблизи положения равновесия

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0 \quad (2.178)$$

под действием потенциальных сил с силовой функцией

$$U = -\frac{1}{2}[(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(\delta x)^2 + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\delta y)^2 + \\ + (\omega_0^2 - \omega_y^2)(\delta z)^2 + 2\omega_y\omega_z\delta y\delta z] \quad (2.179)$$

и гироскопических сил

$$-2\omega_z\delta\dot{y} + 2\omega_y\delta\dot{z}, \quad 2\omega_z\delta\dot{x}, \quad -2\omega_y\delta\dot{x}. \quad (2.180)$$

Чтобы положение равновесия (2.178) было устойчивым, силовая функция должна иметь изолированный максимум в точке равновесия. Применение к квадратичной форме, стоящей в правой части (2.179), критерия Сильвестра положительной определенности показывает, что условие максимума сводится к одному неравенству

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0, \quad (2.181)$$

совпадающему с условием (2.49) устойчивости инерциальной системы с двумя ньютонометрами.

Вне области (2.181) степень неустойчивости под действием потенциальных сил четна и равновесие стабилизируется гироскопическими силами. Это можно показать, рассмотрев характеристическое уравнение системы (2.177), которое, если записать его относительно квадрата неизвестной  $p^2 = q$ , имеет вид:

$$q^3 + (3\omega_0^2 + 2\omega^2)q^2 + (3\omega_0^4 + \omega^4)q + (\omega_0^2 - \omega^2)^2\omega_0^2 = 0, \quad (2.182)$$

где для краткости введено обозначение

$$\omega^2 = \omega_y^2 + \omega_z^2. \quad (2.183)$$

Полином (2.182) удовлетворяет условиям Гурвица, так как всегда

$$(3\omega_0^2 + 2\omega^2)(3\omega_0^4 + \omega^4) - \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 > 0. \quad (2.184)$$

Дискриминант  $\Delta$  кубического уравнения, получаемого из (2.182) заменой переменной

$$y = q + \frac{1}{3}(3\omega_0^2 + 2\omega^2), \quad (2.185)$$

не положителен:

$$\Delta = -\frac{4}{27}\omega_0^2\omega^6(4\omega_0^2 - \omega^2)^2 \leq 0. \quad (2.186)$$



Если  $\omega \neq 0$ ,  $4\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ ,  $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ , то уравнение (2.182) имеет три различных вещественных отрицательных корня, а характеристическое уравнение системы (2.177) соответственно имеет три пары различных чисто мнимых корней.

При  $\omega^2 = \omega_0^2$  характеристическое уравнение имеет кратный нулевой корень. Если  $\omega = 0$ , то характеристическое уравнение имеет пару трехкратных сопряженных мнимых корней:  $p_{1,2,3} = j\omega_0$ ,  $p_{4,5,6} = -j\omega_0$ . Наконец, при  $4\omega_0^2 - \omega^2 = 0$  появляются кратные корни:  $p_{1,2} = -j\omega_0$ ,  $p_{3,4} = j\omega_0$ .

Можно легко убедиться в том, что во всех случаях, когда корни характеристического уравнения системы (2.177) кратны, элементарные делители характеристической матрицы остаются линейными, что и заканчивает доказательство неасимптотической устойчивости уравнений (2.177).

**2.4.2. Об учете сил полной внутренней диссипации.** При анализе устойчивости систем (1.132), (2.41), (2.177) были получены области, где степень неустойчивости под действием лишь потенциальных сил четна и где устойчивость обеспечивается гироскопическими силами.

Известно, что эта устойчивость имеет временный характер и разрушается силами полной внутренней диссипации.

Здесь, однако, надо иметь в виду следующее. Хотя силы полной внутренней диссипации всегда существуют на действительных перемещениях механической системы, они могут быть настолько малыми, что процесс разрушения устойчивости может не успеть развиться при конечном времени работы системы. Кроме того, произвольное введение в систему сил полной внутренней диссипации (на том основании, что они всегда существуют) при исследовании устойчивости может привести к ошибочным заключениям. Чтобы показать это, рассмотрим в качестве примера однородные уравнения (2.176), (2.177).

Пусть для простоты объект движется по экватору. Тогда в уравнениях (2.177)  $\omega_z = 0$ , уравнение для  $\delta u$  отделяется, а два остальных образуют систему:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x + 2\omega_y \delta \dot{z} &= 0, \\ \delta \dot{z} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta z - 2\omega_y \delta \dot{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

Так как ось  $\zeta_*$  совпадает с осью вращения Земли, то, совместив в начальный момент оси  $x$ ,  $y$  с осями  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ , будем иметь ( $\omega_y = \text{const}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_* &= -\delta x \sin \omega_y t + \delta z \cos \omega_y t, \\ \delta \eta_* &= \delta x \cos \omega_y t + \delta z \sin \omega_y t. \end{aligned} \right\} \quad (2.188)$$

Если отбросить в системе (2.187) гироскопические силы

$$2\omega_y \delta \dot{z}, \quad -2\omega_y \delta \dot{x}, \quad (2.189)$$

то останутся лишь потенциальные с силовой функцией

$$U = -\frac{1}{2}(\omega_0^2 - \omega_y^2)[(\delta x)^2 + (\delta z)^2], \quad (2.190)$$

причем уравнения (2.187) окажутся уравнениями в нормальных координатах.

Условие максимума силовой функции при  $\delta x = \delta z = 0$ :

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 > 0. \quad (2.191)$$

В то же время характеристическое уравнение системы (2.187) имеет вид:

$$p^4 + 2(\omega_0^2 + \omega_y^2)p^2 + (\omega_0^2 - \omega_y^2)^2 = 0. \quad (2.192)$$

Его корни равны:

$$p_{1, 2, 3, 4} = \pm j(\omega_0 \pm \omega_y), \quad (2.193)$$

т. е. система (2.187) неасимптотически устойчива при любом  $\omega_y$ .

Устойчивость уравнений (2.187) в области значений  $\omega_y$ , не удовлетворяющих неравенству (2.191), обеспечивается, очевидно, гироскопическими силами (2.189), так как при  $\omega_0^2 - \omega_y^2 < 0$  степень неустойчивости с одними потенциальными силами четна.

Введем в уравнения (2.187) малые силы полной внутренней диссипации с функцией рассеяния Релея

$$f = \frac{1}{2}\varepsilon^2[(\delta \dot{x})^2 + (\delta \dot{y})^2 + (\delta \dot{z})^2]. \quad (2.194)$$

Тогда второе уравнение (2.177) становится асимптотически устойчивым ( $\omega_x = 0$ ,  $\omega_z = 0$ ), а уравнения (2.187) изменяются,

принимая такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \varepsilon^2 \delta\dot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x + 2\omega_y \delta\dot{z} &= 0, \\ \delta\ddot{z} + \varepsilon^2 \delta\dot{z} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta z - 2\omega_y \delta\dot{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.195)$$

При малом  $\varepsilon^2$  характеристическое уравнение системы (2.195) может быть записано следующим образом:

$$p^4 + 2\varepsilon^2 p^3 + 2p^2(\omega_0^2 + \omega_y^2) + 2\varepsilon^2 p(\omega_0^2 - \omega_y^2) + (\omega_0^2 - \omega_y^2)^2 = 0. \quad (2.196)$$

Если условие (2.191) не выполнено, коэффициент при  $p$  становится отрицательным; необходимые условия критерия Гурвица не выполняются, система неустойчива. Устойчивость, обусловленная вне области (2.191) гироскопическими силами (2.189), разрушена силами полной внутренней диссипации.

Теперь введем полную диссипацию в однородные уравнения (2.176). Первые два из этих уравнений примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{\xi}_* + \varepsilon^2 \delta\dot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta\xi_* &= 0, \\ \delta\ddot{\eta}_* + \varepsilon^2 \delta\dot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta\eta_* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.197)$$

Для  $\delta\xi_*$ ,  $\delta\eta_*$  получаем затухающие решения, а в силу (2.188) получаем затухающие решения и для  $\delta x$ ,  $\delta u$  вне зависимости от величины  $\omega_y$ .

Получили кажущееся противоречие. Оно объясняется тем, что диссипативные силы введены в разных координатах. В первом случае это координаты  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta z$ , во втором — координаты  $\delta\xi_*$ ,  $\delta\eta_*$ ,  $\delta\zeta_*$ . Указанное различие и приводит к разным результатам. Чтобы в этом убедиться, спроектируем уравнения (2.197) на оси  $x$ ,  $z$  в соответствии с равенствами (2.188). Получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta x + 2\omega_y \delta\dot{z} + \varepsilon^2 \delta\dot{x} + \varepsilon^2 \omega_y \delta z &= 0, \\ \delta\ddot{z} + (\omega_0^2 - \omega_y^2) \delta z - 2\omega_y \delta\dot{x} + \varepsilon^2 \delta\dot{z} - \varepsilon^2 \omega_y \delta x &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.198)$$

отличающиеся от уравнений (2.195) последними слагаемыми. Характеристическое уравнение системы (2.198)

$$p^4 + 2\varepsilon^2 p^3 + 2p^2(\omega_0^2 + \omega_y^2) + 2\varepsilon p(\omega_0^2 + \omega_y^2) + (\omega_0^2 - \omega_y^2)^2 = 0 \quad (2.199)$$

удовлетворяет условиям Гурвица вне зависимости от величины  $\omega_y$ .

Рассмотренный пример показывает, что произвольное введение диссипативных сил в уравнения в вариациях после их преобразования может повлечь за собой ошибочные заключения. Диссипативные силы, если они присутствуют в системе, надо учитывать непосредственно при выводе уравнений в вариациях, а при преобразованиях последних подвергать этим же преобразованиям диссипативные силы.

**2.4.3. Об устойчивости уравнений первой группы при произвольном движении объекта вблизи земной поверхности.** Обратимся снова к уравнениям (2.176). При  $r = \text{const}$  их решениями будут гармонические колебания, т. е. имеет место неасимптотическая устойчивость. Если инерциальная система установлена на объекте, который совершает произвольное движение вблизи поверхности Земли, то  $r$  в уравнениях (2.176) будет некоторой функцией времени. При надлежащем виде функции  $r(t)$  решение уравнений (2.176) может оказаться неустойчивым (расходящимся). Если предположить, что объект движется вблизи  $r = r^0 = \text{const}$ , так что

$$r = r^0 + \rho(t), \quad \frac{|\rho|}{r^0} \ll 1, \quad (2.200)$$

то для меры расхождения решений уравнений (2.176) можно легко построить мажорантные оценки, аналогичные оценкам (2.138), (2.172).

Из уравнений (2.176), учитывая соотношения (2.200), получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* &= -\frac{3\omega_0^2 \rho}{r^0} \delta \xi_*, \\ \delta \ddot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* &= -\frac{3\omega_0^2 \rho}{r^0} \delta \eta_*, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + \omega_0^2 \delta \zeta_* &= -\frac{3\omega_0^2 \rho}{r^0} \delta \zeta_*, \end{aligned} \right\} \quad (2.201)$$

где теперь

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^{03}}. \quad (2.202)$$

Построив решение уравнений (2.201) методом последовательных приближений аналогично тому, как были построены приближения (2.135) для уравнений (2.124), получим следующие оценки:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\delta \xi_*}{\delta \xi_*^0} \right|, \left| \frac{\delta \eta_*}{\delta \eta_*^0} \right|, \left| \frac{\delta \xi_*}{\delta \xi_*^0} \right| &\leq e^{3\sigma^2 \tau}, \\ \sigma^2 &= \max \frac{|\rho|}{r^0}, \quad \tau = \omega_0 t, \end{aligned} \right\} \quad (2.203)$$

а при

$$3\sigma^2 \tau \ll 1 \quad (2.204)$$

будем иметь:

$$\left| \frac{\delta \xi_*}{\delta \xi_*^0} \right|, \left| \frac{\delta \eta_*}{\delta \eta_*^0} \right|, \left| \frac{\delta \xi_*}{\delta \xi_*^0} \right| \leq 1 + 3\sigma^2 \tau. \quad (2.205)$$

Оценки (2.203), (2.205) аналогичны оценкам (2.172), (2.174). Последние, как легко усмотреть, переходят в оценки (2.203), (2.205) при  $\mu^2 = 0$ .

**2.4.4. Решение уравнений первой группы для случая произвольного движения объекта на постоянном удалении от центра Земли.** В этом случае в проекциях на неизменно ориентированные оси уравнениями ошибок первой группы будут уравнения (2.176). Их решение очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \delta \xi_* &= \delta \xi_*^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \xi_*^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \left[ \Delta n_{\xi_*} - 2(\Delta m_{\eta_*} \dot{\xi}_* - \Delta m_{\xi_*} \dot{\eta}_*) + \right. \\ &+ \eta_* \dot{\Delta m}_{\xi_*} - \xi_* \dot{\Delta m}_{\eta_*} + 3\omega_0^2 \frac{\xi_* \Delta r}{r} \left. \right] \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta \eta_* &= \delta \eta_*^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \eta_*^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \left[ \Delta n_{\eta_*} - 2(\Delta m_{\xi_*} \dot{\eta}_* - \Delta m_{\eta_*} \dot{\xi}_*) + \right. \\ &+ \xi_* \dot{\Delta m}_{\eta_*} - \eta_* \dot{\Delta m}_{\xi_*} + 3\omega_0^2 \frac{\eta_* \Delta r}{r} \left. \right] \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.206)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \zeta_* &= \delta \zeta_*^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{\zeta}_*^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \left[ \Delta n_{\zeta_*} - 2 (\Delta m_{\xi_*} \dot{\eta}_* - \Delta m_{\eta_*} \dot{\xi}_*) + \right. \\ &\left. + \xi_* \Delta \dot{m}_{\eta_*} - \eta_* \Delta \dot{m}_{\xi_*} + 3\omega_0^2 \frac{\xi_* \Delta r}{r} \right] \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.206)$$

Воспользовавшись известными значениями направляющих косинусов  $\alpha_{ij}$  между осями  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  и  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , можно получить теперь  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , причем в формулах для них величины  $\delta \xi_*^0$ ,  $\delta \eta_*^0$ ,  $\delta \zeta_*^0$ ,  $\delta \dot{\xi}_*^0$ ,  $\delta \dot{\eta}_*^0$ ,  $\delta \dot{\zeta}_*^0$  можно выразить через  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$ ,  $\delta z^0$ ,  $\delta \dot{x}^0$ ,  $\delta \dot{y}^0$ ,  $\delta \dot{z}^0$ , а функции  $\Delta n_{\xi_*}$ ,  $\Delta n_{\eta_*}$ ,  $\Delta n_{\zeta_*}$ ,  $\Delta m_{\xi_*}$ ,  $\Delta m_{\eta_*}$ ,  $\Delta m_{\zeta_*}$  — через  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta n_z$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . Для неподвижного в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  объекта, полагая оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  совмещенными с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и ось  $z$  направленной вдоль  $r$ , получаем, например, такие выражения для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta z &= \delta z^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 3\omega_0^2 \Delta r) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (2.207)$$

При постоянных инструментальных погрешностях имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} + \left( \delta x^0 - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta z &= \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} + 3 \Delta r + \\ &\quad + \left( \delta z^0 - \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} - 3 \Delta r \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.208)$$

В случае движения объекта с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга, совместив его плоскость с плоскостями  $\xi_* \eta_*$  и  $xu$  и воспользовавшись формулами перехода (2.188), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= (\delta x^0 \cos \omega_y t - \delta z^0 \sin \omega_y t) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} [(\delta \dot{x}^0 + \delta z^0 \omega_y) \cos \omega_y t - \\ &\quad - (\delta \dot{z}^0 - \delta x^0 \omega_y) \sin \omega_y t] \sin \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [(\Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y) \cos \omega_y (t - \tau) - \\ &\quad - (\Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \\ &\quad + 3 \omega_0^2 \Delta r) \sin \omega_y (t - \tau)] \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_y t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r - \Delta m_z r \omega_y) \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau, \\ \delta z &= (\delta x^0 \sin \omega_y t + \delta z^0 \cos \omega_y t) \cos \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} [(\delta \dot{z}^0 - \delta x^0 \omega_y) \cos \omega_y t + \end{aligned} \right\} \quad (2.209)$$

$$\left. \begin{aligned}
& + (\delta \dot{x}^0 + \delta z^0 \omega_y) \sin \omega_y t] \sin \omega_0 t + \\
& + \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [(\Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r) \sin \omega_y (t - \tau) + \\
& + (\Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \\
& + 3 \omega_0^2 \Delta r) \cos \omega_y (t - \tau)] \sin \omega_0 (t - \tau) d\tau.
\end{aligned} \right\} \quad (2.209)$$

При постоянных инструментальных погрешностях и при  $\omega_y^2 \ll \omega_0^2$  из формул (2.209) получаются, в частности, такие приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned}
\delta x &= (\delta x^0 \cos \omega_y t - \delta z^0 \sin \omega_y t) \cos \omega_0 t + \\
& + \frac{1}{\omega_0} (\delta \dot{x}^0 \cos \omega_y t - \delta \dot{z}^0 \sin \omega_y t) \sin \omega_0 t + \\
& + \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t) + \\
& \quad + \left( \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} + 3 \Delta r \right) \cos \omega_0 t \sin \omega_y t, \\
\delta y &= \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} + \left( \delta y^0 - \frac{\Delta n_y}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\delta y^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\
\delta z &= (\delta x^0 \sin \omega_y t + \delta z^0 \cos \omega_y t) \cos \omega_0 t + \\
& + \frac{1}{\omega_0} (\delta \dot{x}^0 \sin \omega_y t + \delta \dot{z}^0 \cos \omega_y t) \sin \omega_0 t - \\
& - \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \sin \omega_y t \cos \omega_0 t + \\
& \quad + \left( \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} + 3 \Delta r \right) (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t).
\end{aligned} \right\} \quad (2.210)$$

Если в формулах (2.209) положить  $\omega_y = \omega_0$ , то получатся ошибки  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  определения координат спутника на круговой орбите. При постоянных инструментальных



погрешностях соответствующие выражения приводятся к виду:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1) + \\ &\quad + \frac{\Delta n_x}{4\omega_0^2} (1 - \cos 2\omega_0 t) + \\ &\quad + \left( \frac{\Delta n_z}{4\omega_0^2} + \frac{\Delta m_y r}{2\omega_0} + \frac{3}{4} \Delta r \right) (\sin 2\omega_0 t - 2\omega_0 t), \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ &\quad + \frac{\Delta n_y - \Delta m_z r \omega_0}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z &= \delta z^0 + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} (1 - \cos 2\omega_0 t) + \\ &\quad + \frac{\Delta n_x}{4\omega_0^2} (2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t) + \\ &\quad + \left( \frac{\Delta n_z}{4\omega_0^2} + \frac{\Delta m_y r}{2\omega_0} + \frac{3}{4} \Delta r \right) (1 - \cos 2\omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (2.211)$$

Из уравнений (2.206), таблиц направляющих косинусов (1.10), (1.7) и очевидного равенства

$$\lambda = \left( u \cos \varphi + \frac{V}{r} \right) t \quad (2.212)$$

можно получить формулы для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  в случае движения объекта с постоянной скоростью  $V$  относительно Земли вдоль параллели. Мы не будем здесь выписывать соответствующих (достаточно громоздких) выражений. При необходимости читатель сможет сделать это сам.

**2.4.5. Интегрирование первой группы уравнений ошибок для кеплерова движения объекта.** Векторное уравнение (2.175) в случае кеплерова движения объекта в проекциях на оси орбитального трехгранника  $xuz$  приводит

к системе уравнений четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2\right)\delta x + \dot{\omega}_y \delta z + 2\omega_y \delta\dot{z} &= \\ &= \Delta n_x - 2\Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r, \\ \delta\ddot{z} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2\right)\delta z - \dot{\omega}_y \delta x - 2\omega_y \delta\dot{x} &= \\ &= \Delta n_z + 2\Delta m_y r \omega_y + \frac{3\mu \Delta r}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (2.213)$$

и к уравнению второго порядка

$$\delta\ddot{y} + \frac{\mu}{r^3} \delta y = \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{r} + \Delta \dot{m}_x r - \Delta m_z r \omega_y. \quad (2.214)$$

Уравнения (2.213), (2.214) не являются, как это было с уравнением (1.92), уравнениями в вариациях кеплерова движения; поэтому к решению уравнений (2.213), (2.214) нельзя применить теорему Пуанкаре, которой мы воспользовались при отыскании решений уравнения (1.92).

Однако сравнение уравнений (1.92) и (2.213), (2.214) дает путь к решению последних аналогично тому, как это дало нам раньше возможность решить уравнения (2.95).

Уравнение (2.214) совпадает со вторым уравнением (2.95). Решением же последнего является формула (2.98), а для орбит малого эксцентриситета и при постоянных величинах проекций векторов  $\Delta \mathbf{n}$  и  $\Delta \mathbf{m}$  на оси орбитального трехгранника — формула (2.105). Задача свелась, таким образом, к решению системы (2.213).

Сопоставив уравнения (2.213) с уравнениями (2.96) — проекциями векторного уравнения (1.92) на оси  $x$  и  $z$  орбитального трехгранника, можно обнаружить, что однородная система уравнений (2.213) допускает два частных решения:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{r}{a}, \quad \delta z = 0; \\ \delta x &= 0, \quad \delta z = \frac{r}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (2.215)$$

Это позволяет понизить ее порядок до второго путем замены переменных:

$$\delta x = \frac{r}{a} \int p \, dt, \quad \delta z = \frac{r}{a} \int q \, dt. \quad (2.216)$$

Уравнения для  $p$  и  $q$  получаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} + 2 \frac{\dot{r}}{r} p + 2\omega_y q &= 0, \\ \dot{q} + 2 \frac{\dot{r}}{r} q - 2\omega_y p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.217)$$

Умножив второе уравнение (2.217) на  $j = \sqrt{-1}$ , прибавив результат к первому уравнению и введя новую (комплексную) переменную

$$z = p + jq, \quad (2.218)$$

приходим к уравнению первого порядка относительно  $z$

$$\dot{z} + 2z \left( \frac{\dot{r}}{r} - j\omega_y \right) = 0, \quad (2.219)$$

которое немедленно интегрируется. Общим решением этого уравнения оказывается функция

$$z = \frac{C}{r^2} (\cos 2v + i \sin 2v), \quad (2.220)$$

где  $v$ , как и ранее, — истинная аномалия, а  $C$  — некоторая комплексная постоянная.

Переходя теперь снова к переменным  $\delta x$ ,  $\delta z$  и используя при этом соотношение (2.113), получаем два таких частных решения уравнений (2.213):

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{r}{a} \sin 2v, & \delta z &= \frac{r}{a} \cos 2v; \\ \delta x &= -\frac{r}{a} \cos 2v, & \delta z &= \frac{r}{a} \sin 2v. \end{aligned} \right\} \quad (2.221)$$

Выражения (2.221) вместе с выражениями (2.215) составляют систему четырех частных решений уравнений (2.213). Образум из этих частных решений и их производных, взятых с учетом равенств (1.162), матрицу  $\alpha$ . Ее элементами будут:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{r}{a}, & \alpha_{12} &= 0, & \alpha_{13} &= \frac{r}{a} \sin 2v, & \alpha_{14} &= \frac{r}{a} \cos 2v, \\ \alpha_{21} &= 0, & \alpha_{22} &= \frac{r}{a}, & \alpha_{23} &= -\frac{r}{a} \cos 2v, \end{aligned} \right\} \quad (2.222)$$

$$\left. \begin{aligned}
\alpha_{24} &= \frac{r}{a} \sin 2v, \\
\alpha_{31} &= \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v, \quad \alpha_{32} = 0, \\
\alpha_{33} &= \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \sin 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r} \cos 2v, \\
\alpha_{34} &= \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \cos 2v - \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r} \sin 2v, \\
\alpha_{41} &= 0, \quad \alpha_{42} = \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v, \\
\alpha_{43} &= -\frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \cos 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r} \sin 2v, \\
\alpha_{44} &= \frac{ve}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \sin 2v + \frac{2av\sqrt{1-e^2}}{r} \cos 2v.
\end{aligned} \right\} \quad (2.222)$$

Определитель матрицы  $\alpha$  есть определитель Вронского полученной системы частных решений. Если привести однородную систему (2.213) к форме Коши, т. е. представить ее в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, то матрица коэффициентов правых частей не будет содержать, как и в случае уравнений (1.163), диагональных элементов. Поэтому определитель Вронского постоянен. Его значение при  $t=0$  легко вычисляется. Заметив, что  $v(0)=0$ , сразу получаем из (2.222)

$$|\alpha| = 4v^2(1-e^2) \neq 0. \quad (2.223)$$

Таким образом, построенная система частных решений однородных уравнений (2.213) линейно независима. Общее решение однородной системы (2.213) имеет поэтому вид \*):

$$\delta x = \sum_{i=1}^4 C_i \alpha_{1i}, \quad \delta z = \sum_{i=1}^4 C_i \alpha_{2i}. \quad (2.224)$$

---

\*) Общее решение однородных уравнений (2.213) получено изложенным способом в нашей работе, указанной в сноске к стр. 125. А. И. Лурье при просмотре рукописи этой работы предложил изъяс-

Общее решение неоднородной системы найдем методом вариаций произвольных постоянных. Полагая  $C_l$  функциями времени, получим для их определения уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^4 \dot{C}_l a_{1l} &= 0, & \sum_{l=1}^4 \dot{C}_l a_{2l} &= 0, \\ \sum_{l=1}^4 \dot{C}_l a_{3l} &= \Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r, \\ \sum_{l=1}^4 \dot{C}_l a_{4l} &= \Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \frac{3\mu}{r^3} \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (2.225)$$

Прямой путь получения общего решения векторного однородного уравнения (2.175), который приводится ниже.

Из (1.155) и однородного уравнения (2.175) следует (здесь точками обозначены полные производные по времени):

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \delta \mathbf{r} + \delta \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \delta \mathbf{r} + \delta \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}) = 0,$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \delta \mathbf{r} + \delta \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} = \mathbf{a}, \text{ где } \mathbf{a} \text{ — постоянный вектор.}$$

Отсюда получается:

$$\delta \dot{\mathbf{r}} r^2 - \delta r \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} - \dot{\mathbf{r}} \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (*)$$

Далее, из (1.155), (2.175):

$$\mathbf{r} \cdot \delta \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = 0,$$

$$\mathbf{r} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} = c = \text{const.}$$

Подстановка в (\*) дает (заметим, что  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ ):

$$\delta \dot{\mathbf{r}} r^2 - \delta r r \dot{r} = \delta \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) + c \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}.$$

Но  $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = r^2 \dot{\mathbf{y}}$ . Поэтому приходим к уравнению

$$\delta \dot{\mathbf{r}} - \delta r \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \dot{\mathbf{y}} \times \delta \mathbf{r} = (c \mathbf{r} + \mathbf{r} \times \mathbf{a}) \frac{1}{r^2},$$

которое равносильно уравнениям

$$(\delta \dot{z} + j \delta \dot{x}) - \left( \frac{\dot{r}}{r} - 2j\dot{y} \right) (\delta z + j \delta x) = \frac{1}{r} (c - ja_y),$$

$$\delta \dot{y} - \delta y \frac{\dot{r}}{r} = \frac{a_x}{r}.$$

Построим матрицу  $\beta = \alpha^{-1}$ . Для ее элементов получаем значения:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{\alpha}{r}, & \beta_{12} &= \frac{e \sin v}{2(1-e^2)}, & \beta_{13} &= 0, \\ \beta_{14} &= -\frac{r}{a} \frac{1}{2v\sqrt{1-e^2}}, \\ \beta_{21} &= -\frac{e \sin v}{2(1-e^2)}, & \beta_{22} &= \frac{a}{r}, \\ \beta_{23} &= \frac{r}{a} \frac{1}{2v\sqrt{1-e^2}}, & \beta_{24} &= 0, \\ \beta_{31} &= -\frac{e \sin v \cos 2v}{2(1-e^2)}, & \beta_{32} &= -\frac{e \sin v \sin 2v}{2(1-e^2)}, \\ \beta_{33} &= \frac{r}{a} \frac{\cos 2v}{2v\sqrt{1-e^2}}, & \beta_{34} &= \frac{r}{a} \frac{\sin 2v}{2v\sqrt{1-e^2}}, \\ \beta_{41} &= \frac{e \sin v \sin 2v}{2(1-e^2)}, & \beta_{42} &= -\frac{e \sin v \cos 2v}{2(1-e^2)}, \\ \beta_{43} &= -\frac{r}{a} \frac{\sin 2v}{2v\sqrt{1-e^2}}, & \beta_{44} &= \frac{r}{a} \frac{\cos 2v}{2v\sqrt{1-e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.226)$$

При помощи матрицы  $\beta$ , обратной матрице  $\alpha$ , выражения для  $C_i(t)$  представляются формулами

$$\begin{aligned} C_i(t) = \int_0^t & \left[ \beta_{i3} (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r) + \right. \\ & \left. + \beta_{i4} \left( \Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \frac{3\mu \Delta r}{r^3} \right) \right] dt + C_i^0 \quad (2.227) \\ & (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Чтобы написать решение уравнений (2.213), осталось лишь подставить выражения (2.227) в формулы (2.224), определив предварительно  $C_i^0$  в соответствии с начальными условиями

Их интегрирование дает:

$$\delta z + j \delta x = (c_1 + j c_2) r e^{-2jv} + (c - j a_y) 2 j r^2 \dot{v}, \quad \delta y = c_3 r + a_x v / r \dot{v}.$$

Найденное решение содержит все шесть произвольных постоянных:

$$c, a_x, a_y, c_1, c_2, c_3.$$

уравнений (2.213). Выполнив указанные операции, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \sum_{i=1}^4 \alpha_{1i} \left\{ \int_0^t \left[ \beta_{i3} (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{i4} \left( \Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \frac{3\mu \Delta r}{r^3} \right) \right] dt + C_i^0 \right\}, \\ \delta z &= \sum_{i=1}^4 \alpha_{2i} \left\{ \int_0^t \left[ \beta_{i3} (\Delta n_x - 2 \Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{i4} \left( \Delta n_z + 2 \Delta m_y r \omega_y + \frac{3\mu \Delta r}{r^3} \right) \right] dt + C_i^0 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.228)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_1^0 &= \frac{\delta x^0}{1-e} - \frac{\delta \dot{x}^0 (1-e)}{2v \sqrt{1-e^2}}, \quad C_2^0 = \frac{\delta z^0}{1-e} + \frac{\delta \dot{z}^0 (1-e)}{2v \sqrt{1-e^2}}, \\ C_3^0 &= \frac{\delta \dot{x}^0 (1-e)}{2v \sqrt{1-e^2}}, \quad C_4^0 = \frac{\delta \dot{z}^0 (1-e)}{2v \sqrt{1-e^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.229)$$

Для орбит малого эксцентриситета, используя равенства (2.100), (2.102), получим с точностью до членов порядка  $e$  включительно:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 1 - e \cos vt, \quad \alpha_{12} = 0, \\ \alpha_{13} &= \sin 2vt + e \sin vt (3 \cos 2vt - 1), \\ \alpha_{14} &= \cos 2vt - e (3 \sin vt \sin 2vt + \cos vt), \\ \alpha_{21} &= 0, \quad \alpha_{22} = 1 - e \cos 2vt, \\ \alpha_{23} &= -\cos 2vt + e (3 \sin vt \sin 2vt + \cos vt), \\ \alpha_{24} &= \sin 2vt + e \sin vt (3 \cos 2vt - 1); \\ \beta_{13} &= 0, \quad \beta_{14} = -\frac{1}{2v} (1 - e \cos vt), \\ \beta_{23} &= \frac{1}{v} (1 - e \cos vt), \quad \beta_{24} = 0, \\ \beta_{33} &= \frac{1}{2v} [\cos 2vt - e (3 \sin vt \sin 2vt + \cos vt)], \\ \beta_{34} &= \frac{1}{2v} [\sin 2vt + e \sin vt (3 \cos 2vt - 1)], \end{aligned} \right\} \quad (2.230)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \beta_{43} &= -\frac{1}{2\nu} [\sin 2\nu t + e \sin \nu t (3 \cos 2\nu t - 1)], \\
 \beta_{44} &= \frac{1}{2\nu} [\cos 2\nu t - e (3 \sin \nu t \sin 2\nu t + \cos \nu t)]; \\
 C_1^0 &= \delta x^0 (1 + e) - \frac{\delta \dot{z}^0}{2\nu} (1 - e), \\
 C_2^0 &= \delta z^0 (1 + e) + \frac{\delta \dot{x}^0}{2\nu} (1 - e), \\
 C_3^0 &= \frac{\delta \dot{x}^0}{2\nu} (1 - e), \quad C_4^0 = \frac{\delta \dot{z}^0}{2\nu} (1 - e).
 \end{aligned} \right\} \quad (2.230)$$

Если принять инструментальные погрешности постоянными и подставить значения (2.230) величин  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  в решения (2.228), то после интегрирования и очевидных группировок и упрощений, вытекающих из малости  $e$ , можно прийти к таким выражениям для ошибок  $\delta x$ ,  $\delta z$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \delta x &= \frac{\Delta n_x}{4\nu^2} (1 - \cos 2\nu t) + \\
 &+ \left( \frac{\Delta n_z}{4\nu^2} + \frac{a \Delta m_y}{2\nu} + \frac{3 \Delta r}{4} \right) (\sin 2\nu t - 2\nu t) + \\
 &+ \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0}{2\nu} \sin 2\nu t + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\nu} (\cos 2\nu t - 1) + \\
 &+ e \left[ \frac{\Delta n_x}{2\nu^2} \left( -\frac{5}{4} \cos \nu t + 2 \cos 2\nu t - \frac{3}{4} \cos 3\nu t \right) + \right. \\
 &+ \frac{\Delta n_z}{2\nu^2} \left( \nu t \cos \nu t + \frac{3}{4} \sin \nu t - 2 \sin 2\nu t + \frac{3}{4} \sin 3\nu t \right) + \\
 &+ \frac{5a \Delta m_y}{3\nu} (-2 \sin \nu t + \sin 2\nu t) + \\
 &+ \Delta r \left( \frac{3}{2} \nu t \cos \nu t - \frac{39}{8} \sin \nu t + \frac{9}{8} \sin 3\nu t \right) + \\
 &+ \delta x^0 (1 - \cos \nu t) + \\
 &\quad \left. + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\nu} (1 - \cos 2\nu t - 3 \sin \nu t \sin 2\nu t) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta \dot{x}^0}{2\nu} (-\sin \nu t - \sin 2\nu t + 3 \sin \nu t \cos 2\nu t) \right], \quad (2.231)
 \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned}
\delta z = & \frac{\Delta n_x}{4v^2} (2vt - \sin 2vt) + \\
& + \left( \frac{\Delta n_z}{4v^2} + \frac{a \Delta m_y}{2v} + \frac{3 \Delta r}{4} \right) (1 - \cos 2vt) + \delta z^0 + \\
& + \frac{\delta \dot{x}^0}{2v} (1 - \cos 2vt) + \frac{\delta \dot{z}^0}{2v} \sin 2vt + \\
& + e \left[ \frac{\Delta n_x}{2v^2} \left( -vt \cos vt - \frac{3}{4} \sin vt + \right. \right. \\
& + 2 \sin 2vt - \frac{3}{4} \sin 3vt \Big) + \\
& + \frac{\Delta n_z}{2v^2} \left( -\frac{5}{4} \cos vt + 2 \cos 2vt - \frac{3}{4} \cos 3vt \right) + \\
& + \frac{\Delta m_y a}{v} \left( -1 + \frac{5}{3} \cos vt - \frac{5}{6} \cos 2vt + \frac{1}{6} \cos 3vt \right) + \\
& + \frac{9 \Delta r}{8} (\cos vt - \cos 3vt) + \delta z^0 (1 - \cos vt) + \\
& + \frac{\delta \dot{x}^0}{2v} (-1 + \cos 2vt + 3 \sin vt \sin 2vt) + \\
& \left. + \frac{\delta \dot{z}^0}{2v} (-\sin 2vt - \sin vt + 3 \sin vt \cos 2vt) \right].
\end{aligned} \tag{2.231}$$

При  $e = 0$ , т. е. для круговой орбиты, формулы (2.231) превращаются ( $v = \omega_0^2$ ,  $r = a$ ) в первую и третью формулы (2.211).

## § 2.5. Зависимость ошибок от инструментальных погрешностей и погрешностей начальных условий.

### Сравнение с автономными инерциальными системами

**2.5.1. Зависимость ошибок определения координат и ориентации от погрешностей начальных условий.** В § 2.2 при выводе уравнений ошибок инерциальных систем, использующих информацию о расстоянии до центра Земли (или до ее поверхности), было выяснено, что в этом случае по сравнению с автономной инерциальной системой меняется лишь первая группа дифференциальных уравнений ошибок, т. е. уравнения (1.92), (1.95), и вытекающие из них. Остальные уравнения не меняются. Следовательно, при рассмотрении зависимости полных ошибок определения координат и ориентации

объекта (или платформы инерциальной системы) от инструментальных погрешностей, погрешности  $\Delta r = \Delta h$  и ошибок начальных условий можно опираться на результаты п. 1.3.5, содержащего такого рода рассмотрение для автономной инерциальной системы.

Полные ошибки определения координат  $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$  выражаются, согласно равенствам (1.93), (1.94), такими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \delta r_2 &= \delta r + \delta r_1, & \delta r_1 &= \theta \times r, \\ \delta r_2 &= \delta x_2 x + \delta y_2 y + \delta z_2 z. \end{aligned} \right\} \quad (2.232)$$

В проекциях на оси сопровождающего трехгранника  $x_2 y_2 z_2$ , ось  $z_2$  которого совпадает с радиусом-вектором  $r$ , эти формулы, согласно соотношениям (1.108), дают:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \delta x + \delta x_1, & \delta y_2 &= \delta y + \delta y_1, & \delta z_2 &= \delta z, \\ \delta x_1 &= \theta_y r, & \delta y_1 &= -\theta_x r. \end{aligned} \right\} \quad (2.233)$$

Ошибки ориентации сопровождающего трехгранника определяются вектором  $\theta_1$  угла малого поворота, проекции которого, согласно равенствам (1.118), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, & \theta_{1y} &= \frac{\delta x}{r}, \\ \theta_{1z} &= -\theta_z + \beta_{12} \frac{\partial \beta_{i1}}{\partial \eta^s} [\delta r \cdot \eta_s + r (\theta_y \beta_{s1} - \theta_x \beta_{s2})], \end{aligned} \right\} \quad (2.234)$$

где

$$\delta r = \delta x x + \delta y y + \delta z z.$$

В соотношениях (2.233), (2.234) проекции  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  суть решения уравнений (1.93) или (1.96). Для автономных инерциальных систем величины  $\delta x, \delta y, \delta z$  суть решения уравнений (1.92) или (1.95). В рассматриваемом случае в формулы (2.233), (2.234) надо подставить в качестве  $\delta x, \delta y, \delta z$  решения уравнений (2.15а) или (2.16) — для схем с тремя ньютонометрами и решения уравнений (2.28) — для схем с двумя ньютонометрами.

Таким образом, чтобы выяснить различие возмущенного движения автономных систем и систем с использованием сторонней информации о расстоянии до поверхности Земли, достаточно сравнить свойства решений уравнений (1.95) со

свойствами решений уравнений (2.15а), (2.28). Частично такое сравнение уже содержится в ряде замечаний, сделанных при исследовании устойчивости и интегрировании уравнений (2.15а), (2.28). Но ввиду важности вопроса на нем следует остановиться специально.

Сравним сначала свойства решений однородных уравнений (1.95), (2.16), (2.28), т. е. характер возмущенного движения автономной инерциальной системы и системы с использованием сторонней информации о величине  $h$  в том случае, когда источниками возмущений оказываются лишь погрешности начальных условий.

Как было показано в п. 1.3.2, уже некоторые из случаев, когда уравнения (1.95) сводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами, свидетельствуют о неустойчивости автономной инерциальной системы. Во всяком случае, автономная инерциальная система неустойчива в практически важной области

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_x^2 - \omega_z^2 > 0. \quad (2.235)$$

Среди корней характеристического уравнения системы (1.95) в области (2.235) есть положительный, близкий при малых скоростях движения объекта к величине  $\omega_0 \sqrt{2}$ . Модули ошибок  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  растут поэтому по экспоненциальному закону, быстро удаляясь от начальных значений. Численные оценки, приведенные в п. 1.3.5, показывают, что автономная инерциальная система может сохранять точность, сравнимую с точностью задания начальных условий, лишь в течение 10—15 мин с момента начала работы.

В случае кеплерова движения объекта решения уравнений (1.95) также свидетельствуют о неустойчивости. В самом деле, из формул (1.166), если инструментальные погрешности равны нулю, получаем для  $\delta x$ ,  $\delta z$ ,  $\delta y$  выражения:

$$\delta x = \sum_{i=1}^4 C_i^0 A_{1i}, \quad \delta z = \sum_{i=1}^4 C_i^0 A_{2i}, \quad \delta y = \sum_{i=1}^2 C_{i+4}^0 B_{1i}, \quad (2.236)$$

где  $C_i^0$  — величины, определяемые погрешностями начальных условий, а  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$ ,  $B_{1i}$  — элементы матриц частных решений (1.167). Если элементы  $B_{1i}$  — периодические функции времени, то среди элементов  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$  есть растущие пропорционально времени ( $A_{11}$  и  $A_{21}$ ), откуда и следует неустойчивость.

Здесь полезно заметить, что в  $A_{21}$  время входит множителем во второе слагаемое с коэффициентом  $e$ . Для случая движения объекта по круговой орбите решения  $\delta x$ ,  $\delta z$  однородных уравнений (1.95), согласно формулам (1.152), имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0}{v} (4 \sin vt - 3vt) + \\ &\quad + 6 \delta z^0 (\sin vt - vt) + \frac{2 \delta \dot{z}^0}{v} (\cos vt - 1), \\ \delta z &= \frac{2 \delta \dot{x}^0}{v} (1 - \cos vt) + \delta z^0 (4 - 3 \cos vt) + \\ &\quad + \frac{\delta \dot{z}^0}{v} \sin vt. \end{aligned} \right\} \quad (2.237)$$

Из выражения для  $\delta x$  следует, что погрешности  $\delta x^0$ ,  $\delta z^0$  приводят к возрастанию ошибки пропорционально времени. Для орбиты малого эксцентриситета в выражении для  $\delta z$  также появляются (с множителем  $e$ ) линейно растущие со временем слагаемые \*).

В случае уравнений (2.15а), (2.28) с устойчивостью дело обстоит несравненно лучше. Для уравнений (2.28) в тех случаях, когда они приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами, условием устойчивости оказывается как раз неравенство (2.235). Для неподвижного в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  объекта решением однородных уравнений (2.28) будут, согласно формулам (2.69), гармонические колебания с частотой  $\omega_0$

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta y &= \delta y^0 \cos \omega_0 t + \frac{\delta \dot{y}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (2.238)$$

При движении объекта с постоянной скоростью по дуге большого круга сферы постоянного радиуса  $r$ , концентрической с Землей, выражение (2.238) для  $\delta y$  сохраняет свой вид,

---

\*) См. § 5.4 и 5.5 книги, указанной в сноске на стр. 58.

а выражение для ошибки  $\delta x$  в плоскости движения приобретает, согласно первой формуле (2.72), такой вид:

$$\delta x = \delta x^0 \sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2} t + \frac{\delta \dot{x}^0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2} t. \quad (2.239)$$

Здесь гармоническое колебание происходит с частотой  $\nu = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_y^2}$ .

Из формулы (2.239) получается, что для спутника на круговой орбите уравнения (2.28) приводят к неустойчивости, так как в этом случае

$$\delta x = \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t. \quad (2.240)$$

Неустойчивость имеет место и при движении спутника по произвольной эллиптической орбите. Действительно, в этом случае, согласно равенству (2.115),

$$\delta x = \frac{r}{a} C_1^0 + \frac{rv}{av \sqrt{1-e^2}} C_2^0; \quad (2.241)$$

в то же время истинная аномалия  $\nu$  является монотонно возрастающей функцией времени. Она растет в среднем пропорционально времени. Если эксцентриситет  $e$  орбиты мал, то из (2.120) получается, что

$$\delta x = \delta x^0 [1 + e(1 - \cos \nu t)] + \delta \dot{x}^0 \left[ t + e \left( \frac{2}{\nu} \sin \nu t - t - t \cos \nu t \right) \right]. \quad (2.242)$$

При исследовании устойчивости уравнений (2.28) было отмечено, что в случае произвольного движения объекта даже на постоянном удалении от центра Земли коэффициенты этих уравнений переменны, и их решения могут оказаться неустойчивыми. Однако при скоростях движения объекта, существенно меньших первой космической скорости, можно построить мажорантные оценки решений однородных уравнений (2.28) типа оценок (2.146), (2.158). Из этих оценок следует, что возмущенное движение инерциальной системы с двумя ньютонометрами остается близким к гармоническим колебаниям с частотой  $\omega_0$ .

Дальнейшее улучшение устойчивости инерциальной системы дают уравнения (2.15а), (2.16). Напомним, что они относятся к случаю, когда в инерциальной системе сохраняются все три ньютонометра; сторонняя информация о величине  $h$  исполь-

зуется лишь для формирования модуля напряженности поля тяготения Земли.

В этом случае при произвольном движении объекта на постоянном удалении от центра Земли инерциальная система устойчива. Это следует из представления (2.206) решения уравнения (2.15а).

При таком использовании информации о расстоянии  $h$  до поверхности Земли инерциальная система оказывается устойчивой и при кеплеровом движении объекта. Чтобы убедиться в последнем, обратимся к формулам (2.228), (2.98). Когда инструментальные погрешности равны нулю, то из указанных формул находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \sum_{i=1}^4 \alpha_{1i} C_i^0, & \delta z &= \sum_{i=1}^4 \alpha_{2i} C_i^0, \\ \delta y &= \sum_{i=1}^2 B_{1i} C_{i+4}^0. \end{aligned} \right\} \quad (2.243)$$

Но все элементы матриц частных решений  $\alpha_{ij}$  и  $B_{ij}$ , как это видно из выражений (2.226), (1.167), являются периодическими функциями времени.

В частности, для орбит малого эксцентриситета однородные уравнения (2.16) имеют своим решением [см. равенства (2.105), (2.231)] выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 [1 + e(1 - \cos vt)] + \frac{\delta \dot{x}^0}{2v} [\sin 2vt + \\ &+ e(-\sin vt - \sin 2vt + 3 \sin vt \cos 2vt)] + \\ &+ \frac{\delta \dot{z}^0}{2v} [\cos 2vt - 1 + e(1 - \cos 2vt - 3 \sin vt \sin 2vt)], \\ \delta y &= \delta y^0 [\cos vt + e(\cos vt - 1 - \sin^2 vt)] + \\ &+ \frac{\delta \dot{y}^0}{v} [\sin vt + e(-\sin vt + \sin vt \cos vt)], \\ \delta z &= \delta z^0 [1 + e(1 - \cos vt)] + \frac{\delta \dot{x}^0}{2v} [1 - \cos 2vt + \\ &+ e(-1 + \cos 2vt + 3 \sin vt \sin 2vt)] + \frac{\delta \dot{z}^0}{2v} [\sin 2vt + \\ &+ e(-\sin 2vt - \sin vt + 3 \sin vt \cos 2vt)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.244)$$

Для произвольного движения объекта, когда  $r(t)$  оказывается произвольной функцией времени, решения уравнений (2.16) могут оказаться и неустойчивыми, причем устойчивость или неустойчивость связана здесь исключительно лишь с видом функции  $r(t)$ .

Однородная система (2.16) равносильна векторному уравнению

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \delta r = 0. \quad (2.245)$$

Величина  $\mu/r^3$  всегда положительна. Следовательно, на любом конечном удалении от центра Земли решение уравнения (2.245) будет колебательным. Возрастание амплитуды этих колебаний возможно лишь за счет параметрического резонанса.

Если движение объекта происходит вблизи некоторого постоянного  $r = r^0$ , так что  $r = r^0 + \rho(t)$ , то для проекций вектора  $\delta r$  на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  справедливы оценки (2.203):

$$\left| \frac{\delta \xi_*}{\delta \xi_*^0} \right|, \quad \left| \frac{\delta \eta_*}{\delta \eta_*^0} \right|, \quad \left| \frac{\delta \zeta_*}{\delta \zeta_*^0} \right| < \exp \frac{3\omega_0 \max |\rho|}{r^0} t. \quad (2.246)$$

Мажорантные оценки (2.246) расходимости амплитуд решений уравнения (2.245) по отношению к их начальным значениям являются завышенными оценками по самому способу их получения. Тем не менее они достаточно эффективны. Так, если движение происходит по поверхности Земли, то  $\max |\rho| \approx 2 \cdot 10^4$  м,  $r^0 \approx 6,4 \cdot 10^6$  м,  $\omega_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$  1/сек. Для того чтобы амплитуда колебаний возросла в  $e \approx 2,78$  раза, необходимо время порядка  $25 \cdot 10^4$  сек, т. е. около 70 часов. При  $\max |\rho| \approx 10^5$  м это время уменьшается до величины порядка 15 часов. Если же время работы инерциальной системы составляет несколько часов, то правые части неравенств (2.246) при  $|\rho| < 10^5$  м практически не отличаются от единицы.

**2.5.2. Ошибки от инструментальных погрешностей ньютонометров и гироскопов.** Перейдем к вынужденным решениям, т. е. к зависимостям, связывающим инструмен-

тальные погрешности с ошибками  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . Ограничимся при этом случаем постоянных величин инструментальных погрешностей, для которого в предшествующих параграфах были получены явные выражения решений  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  первой группы уравнений ошибок. Рассмотрим сначала инструментальные погрешности чувствительных элементов инерциальной системы — ньютонометров и гироскопов, а уже потом погрешность  $\Delta r = \Delta h$  информации о расстоянии до поверхности Земли.

Сравним формулы (1.141), (2.70), (2.208), представляющие соответственно решения уравнений (1.96), (2.28), (2.16) для неподвижного объекта. Инструментальные погрешности  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ , определяющие ошибки  $\delta x$  и  $\delta y$ , входят в эти формулы одинаково. Различие заключено лишь в формулах для  $\delta z$ . Для автономной инерциальной системы, т. е. в формулах (1.141), ошибка в определении  $\delta z$ , вызванная погрешностью  $\Delta n_z$ , растет по экспоненциальному закону. В системе же с тремя ньютонометрами и коррекцией по  $h$ , как видно из третьей формулы (2.208), постоянная погрешность  $\Delta n_z$  ведет лишь к гармоническим колебаниям около смещенного положения равновесия. Погрешность  $\Delta n_z$  проявляет себя здесь таким же образом, как погрешности  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$  в формулах для  $\delta x$ ,  $\delta y$ , одинаковых для всех трех случаев. Погрешности  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  гироскопических элементов не входят в формулы (1.141), (2.70), (2.208). В выражения для полных ошибок  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  определения координат они войдут в соответствии с равенствами (2.233) через величины  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  одинаковым образом во всех трех рассматриваемых случаях.

Сравним далее формулы (1.150), (2.73) и (2.209), являющиеся решениями уравнений (1.96), (2.28), (2.16) в случае движения объекта с постоянной скоростью по дуге большого круга сферы постоянного радиуса, концентрической с Землей и не участвующей во вращении последней. Формулы для  $\delta y$  совпадают во всех трех случаях и отличаются от второго выражения (1.141) для случая неподвижного основания лишь тем, что в последнее не входит погрешность  $\Delta m_z$ . Остается сравнить формулы (1.150), (2.73), (2.209) для  $\delta x$  и  $\delta z$ . Сохранив в формулах для  $\delta x$  лишь члены, относящиеся к инструментальным погрешностям инерциальной системы,



из равенств (1.150), (2.73), (2.209) получим соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\mu^2 + \nu^2} [(\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \cos \nu t + \right. \\ &\quad \left. + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \nu^2) \operatorname{ch} \mu t] \right\} + \\ &\quad + \frac{2\omega_y \mu \nu (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y)}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(2\omega_0^2 + \omega_y^2)(\mu^2 + \nu^2)} (\mu \sin \nu t - \nu \operatorname{sh} \mu t), \\ \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2 - \omega_y^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta \dot{x} &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left[ \Delta n_x \left( 1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_y t \right) + \\ &\quad \left. + (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) \left( \cos \omega_0 t \sin \omega_y t - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_y t \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.247)$$

Аналогично из равенств (1.150), (2.209):

$$\left. \begin{aligned} \delta z &= \frac{\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y}{2\omega_0^2 + \omega_y^2} \left\{ -1 + \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_y^2)(\mu^2 + \nu^2)} \times \right. \\ &\quad \times [\mu^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \nu^2) \cos \nu t + \nu^2 (\omega_0^2 - \omega_y^2 + \mu^2) \operatorname{ch} \mu t] \left. \right\} - \\ &\quad - \frac{2\omega_y \Delta n_x}{\mu \nu (\mu^2 + \nu^2)} (\mu \sin \nu t - \nu \operatorname{sh} \mu t), \\ \delta z &= \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left[ (\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y) \times \right. \\ &\quad \times \left( 1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_y t \right) - \\ &\quad \left. - \Delta n_x \left( \cos \omega_0 t \sin \omega_y t - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_y t \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.248)$$

Из первых равенств (2.247), (2.248) следует — и это уже отмечалось ранее, — что в случае автономной инерциальной

системы ошибки  $\delta x$ ,  $\delta z$ , вызванные инструментальными погрешностями  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_z$ ,  $\Delta m_y$ , растут со временем по экспоненциальному закону. Наибольший интерес представляет сравнение второго и третьего равенств (2.247). Для схемы с двумя ньютонометрами, как это видно из второго равенства,  $\delta x$  зависит лишь от  $\Delta n_x$ , причем

$$|\delta x| < 2 |\Delta n_x| \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_y^2}. \quad (2.249)$$

Для схемы с тремя ньютонометрами, использующей информацию о величине  $h$ , ошибка  $\delta x$  зависит не только от погрешности  $\Delta n_x$ , но еще от погрешностей  $\Delta n_z$  и  $\Delta m_y$ , причем имеет место оценка:

$$|\delta x| < \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_y^2} (2 |\Delta n_x| + |\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y|). \quad (2.250)$$

Из оценок (2.249), (2.250) следует, что максимальная величина парциальной ошибки от погрешности  $\Delta n_x$  одинакова в обоих вариантах использования информации о величине  $h$ . Заметим, что из второй формулы (2.248) также получается оценка, аналогичная оценке (2.250):

$$|\delta z| < \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_y^2} (|\Delta n_x| + 2 |\Delta n_z + 2r\omega_y \Delta m_y|). \quad (2.251)$$

Для медленных движений объекта, т. е. для скоростей движения, значительно меньших первой космической скорости, из формул (2.247) вытекают следующие приближенные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{\omega_y \Delta n_z \sqrt{2}}{3\omega_0^3} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t, \\ \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta x &= \frac{1}{\omega_0^2} [\Delta n_x (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t) + \Delta n_z \cos \omega_0 t \sin \omega_y t]. \end{aligned} \right\} \quad (2.252)$$

Аналогично из формул (2.248):

$$\left. \begin{aligned} \delta z &= \frac{\Delta n_z}{2\omega_0^2} (\operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t - 1), \\ \delta z &= \frac{1}{\omega_0^2} [\Delta n_z (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t) - \Delta n_x \cos \omega_0 t \sin \omega_y t]. \end{aligned} \right\} \quad (2.253)$$

Из сравнения второй и третьей формул (2.252) следует, что при малых скоростях движения по дуге неизменно ориентированного большого круга схема с двумя ньютонометрами предпочтительнее корректируемой по  $h$  схемы с тремя ньютонометрами, так как при одних и тех же инструментальных погрешностях ньютонометров максимальные ошибки  $\delta x$  в первой схеме могут оказаться меньшими. К такому же выводу приводит сравнение ошибок при медленных движениях объекта вдоль параллели.

При скоростях движения, близких к первой космической скорости, и, в частности, для спутников дело обстоит несколько иначе. Чтобы убедиться в этом, сравним решения уравнений (1.96), (2.28), (2.16) для кеплерова движения объекта.

Рассмотрим для простоты случай движения объекта по круговой орбите. Для автономной инерциальной системы, согласно формулам (1.153), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{\omega_0^2} \left[ -\frac{3(\omega_0 t)^2}{2} + 4(1 - \cos \omega_0 t) \right] + \\ &\quad + \left( \frac{2\Delta n_z}{\omega_0^2} + \frac{4a\Delta m_y}{\omega_0} \right) (\sin \omega_0 t - \omega_0 t), \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y - a\omega_0 \Delta m_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z &= \frac{2\Delta n_x}{\omega_0^2} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t) + \frac{\Delta n_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (2.254)$$

Для схемы с двумя ньютонометрами из формул (2.76) или формул (2.105), (2.120) при нулевых начальных условиях находим:

$$\delta x = \frac{\Delta n_x t^2}{2}, \quad \delta y = \frac{\Delta n_y - a\omega_0 \Delta m_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (2.255)$$

Наконец, для схемы с тремя ньютонометрами, в которой используется информация о величине  $h$ , согласно равенствам (2.211) или (2.105), (2.231) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_x}{4\omega_0^2} (1 - \cos 2\omega_0 t) + \\ &\quad + \left( \frac{\Delta n_z}{4\omega_0^2} + \frac{a \Delta m_y}{2\omega_0} \right) (\sin 2\omega_0 t - 2\omega_0 t), \\ \delta y &= \frac{\Delta n_y - a\omega_0 \Delta m_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta z &= \frac{\Delta n_x}{4\omega_0^2} (2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t) + \\ &\quad + \left( \frac{\Delta n_z}{4\omega_0^2} + \frac{a \Delta m_y}{2\omega_0} \right) (1 - \cos 2\omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (2.256)$$

Сравнение соотношений (2.254), (2.255) и (2.256) показывает, что для спутника на круговой орбите меньшие ошибки дает последняя схема. В ней ошибки  $\delta x$  и  $\delta z$  содержат лишь линейно растущие со временем слагаемые, в то время как в двух остальных схемах выражение для  $\delta x$  содержит квадратичную функцию времени. Это обстоятельство сохраняется для эллиптических орбит, а также для движений объекта, близких к кеплеровым.

**2.5.3. Ошибки от погрешностей информации о расстоянии до поверхности Земли.** До сих пор шла речь о зависимости ошибок  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  от инструментальных погрешностей чувствительных элементов самой инерциальной системы, т. е. от  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta n_z$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . В то же время, если в инерциальной системе используется информация о расстоянии  $h$  до поверхности Земли, возникают ошибки из-за погрешности  $\Delta h (= \Delta r)$  этой информации. Сравним ошибки  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , к которым приводит  $\Delta r$ , в двух рассматриваемых вариантах использования информации о величине  $h$ . Без этого сравнения представление о свойствах указанных вариантов было бы существенно неполным.

Как и для инструментальных погрешностей, ограничимся здесь случаем, когда величина  $\Delta r$  постоянна. При необходимости можно, разумеется, легко рассмотреть и случай переменного  $\Delta r$ , если вид функции  $\Delta r(t)$  будет задан, так как соответствующие решения уравнений (1.96), (2.28), (2.16) с произвольным  $\Delta r$  были в предшествующих параграфах построены. Это замечание относится в равной мере и к инструментальным погрешностям чувствительных элементов инерциальной системы.

Постоянная погрешность  $\Delta r$  в схеме с двумя ньютонометрами не приводит к дополнительным ошибкам  $\delta x$ ,  $\delta y$  при неподвижном объекте. Это видно из формул (2.70). То же самое получается и в случае движения объекта с постоянной скоростью по дуге неизменно ориентированного большого круга, что следует из формул (2.73). Впрочем, чтобы заметить это, можно и не обращаться к решениям (2.70), (2.73). Достаточно убедиться, что при неподвижном объекте и объекте, движущемся по дуге большого круга, величина  $\Delta r$  выпадает из правых частей уравнений (2.28).

Случай движения по параллели в схеме с двумя ньютонометрами приводит, как это видно из равенств (2.94), к дополнительным ошибкам

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta r \omega_y \omega_z}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t \sin \omega_z t, \\ \delta y &= -\frac{\Delta r \omega_y \omega_z}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_z t). \end{aligned} \right\} \quad (2.257)$$

При движении спутника по круговой орбите в схеме с двумя ньютонометрами не возникает — это видно из равенств (2.75) — дополнительных ошибок. В случае эллиптической орбиты появляется ошибка  $\delta x$ . Так, для орбиты малого эксцентриситета из выражения (2.120) получаем:

$$\delta x = -2e \Delta r (\sin vt - vt). \quad (2.258)$$

В схеме с тремя ньютонометрами при неподвижном объекте имеет место ошибка

$$\delta z = 3 \Delta r (1 - \cos \omega_0 t). \quad (2.259)$$

Это следует из третьей формулы (2.208).

При движении по дуге большого круга из формул (2.209) получается, что

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{3 \Delta r \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left( \cos \omega_0 t \sin \omega_y t - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega_y t \right), \\ \delta y &= 0, \\ \delta z &= \frac{3 \Delta r \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_y^2} \left( 1 - \cos \omega_0 t \cos \omega_y t - \frac{\omega_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega_y t \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.260)$$

При движении по параллели

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= -\frac{3 \Delta r \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( -\cos \omega_0 t \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \cos \omega t \right), \\ \delta y &= -\frac{3 \Delta r \omega_0^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( 1 - \cos \omega_0 t \cos \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \right), \\ \delta z &= \frac{3 \Delta r \omega_0^2 \cos^2 \varphi}{\omega_0^2 - \omega^2} \left( 1 - \cos \omega_0 t \cos \omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \sin \omega t \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.261)$$

Наконец, для спутника на круговой орбите из выражений (2.211) находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{3 \Delta r}{4} (\sin 2\omega_0 t - 2\omega_0 t), \\ \delta y &= 0, \\ \delta z &= \frac{3 \Delta r}{4} (1 - \cos 2\omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (2.262)$$

По поводу ошибок  $\delta z$  в схеме с тремя ньютонометрами, т. е. по поводу равенства (2.259), второго равенства (2.260), третьего равенства (2.261) и второго равенства (2.262), необходимо сделать следующее замечание.

Величина  $h$  расстояния до поверхности Земли поступает в систему из стороннего источника информации. Зная  $h$  и

местоположение объекта относительно Земли, можно вычислить  $r$ . Погрешность этого вычисления равна  $\Delta r (= \Delta h)$ . Естественно, что ошибка  $\delta z$  определения  $r$  посредством ньютонометра  $n_z$ , имеющая тот же смысл, что и  $\Delta r$ , будет больше последней. Так, согласно равенству (2.259), она может достигать величины  $\delta z = 6 \Delta r$ . То же самое значение следует из последних формул (2.260), (2.261). Согласно второму равенству (2.262), максимальная величина  $\delta z$  достигает значения  $3 \Delta r/2$ . Поэтому для суждения о величине расстояния до центра Земли целесообразно пользоваться непосредственно величиной  $h$ , поступающей в инерциальную систему извне с погрешностью  $\Delta r$ , а не результатом интегрирования показаний ньютонометра  $n_z$ , что может дать погрешность, в шесть раз большую. Из сказанного вытекает, что из ошибок (2.260) — (2.262) существенны лишь ошибки  $\delta x$  и  $\delta y$ .

## **Маятниково-гироскопические системы Шулера. Аналогия с инерциальными системами с двумя ньютонометрами**

### **§ 3.1. Физический маятник Шулера**

**3.1.1. Условия существования положения относительного равновесия, в котором ось маятника совпадает с геоцентрической вертикалью.** Рассмотрим твердое тело, имеющее ось динамической симметрии. Пусть оно подвешено за одну из точек этой оси, не совпадающую с центром масс, также, очевидно, лежащим на оси динамической симметрии. Речь идет, таким образом, о симметричном физическом маятнике.

Пусть точка подвеса маятника произвольно движется в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Ось симметрии маятника будет в каждый момент времени занимать в указанной системе координат положение, определяемое его параметрами, начальными условиями его движения относительно точки подвеса, а также законом движения точки подвеса маятника и полем тяготения Земли.

Нас будет в дальнейшем интересовать задача о таком выборе параметров маятника, когда его ось независимо от закона движения точки подвеса будет все время совпадать с направлением к центру Земли, т. е. с направлением геоцентрической вертикали.

Эта задача была рассмотрена впервые Максом Шулером\*). Он рассмотрел случай движения маятника на постоянном удалении от центра Земли  $O_1$  в неизменно ориентированной плоскости, содержащей точку  $O_1$ , в предположении центральности поля тяготения Земли и установил, что ось динамической симметрии маятника при специальном выборе его параметров может совпадать с направлением к центру Земли во все время движения, если они только совпадали в

---

\*) Schuler M., Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges, Physikalische Zeitschrift, t. 24, № 16, Leipzig, 1923.



начальный момент. Обобщению этой теоремы теоретической механики был посвящен в дальнейшем ряд работ, в том числе работы Б. В. Булгакова и А. Ю. Ишлинского. А. Ю. Ишлинским было дано \*) строгое решение задачи об отыскании условий, которым должны удовлетворять параметры и начальные обстоятельства движения физического маятника, чтобы ось его динамической симметрии совпадала с направлением к центру Земли для произвольного движения точки подвеса на постоянном удалении от центра Земли.

Теорема Макса Шулера явилась истоком идей инерциальной навигации. Системы инерциальной навигации развивались вначале как некоторые механические устройства, моделирующие физический маятник Шулера. Классическими моделями такого рода являются гиригоризонткомпас Геккелера—Аншютца и двухгироскопическая гировертикаль.

Ясно, что механическое устройство, дающее направление к центру Земли, равносильно с точки зрения конечного результата рассмотренной в предшествующих параграфах инерциальной системе с двумя ньютонометрами. В самом деле, зная это направление и имея в своем распоряжении информацию о величине расстояния  $r$  до центра Земли, можно решить задачу навигации. Для этого надо лишь добавить в схему гироскопы, по отношению к осям которых можно было бы определять ориентацию направления к центру Земли в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , а при навигации в связанной с Землей системе координат добавить еще и задатчик времени, чтобы учитывать изменение со временем положения системы координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  по отношению к Земле.

Однако дело здесь не только во внешнем сходстве по конечному результату. Аналогия оказывается гораздо более глубокой. Как мы в дальнейшем увидим, уравнения колебаний физического маятника Шулера и его моделей около положения относительного равновесия в точности совпадают с первой группой дифференциальных уравнений ошибок систем инерциальной навигации с двумя ньютонометрами. Ввиду большой наглядности и легкости истолкования особенностей движения маятника Шулера указанная аналогия представляет большой интерес.

---

\*) Ишлинский А. Ю., Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. Прикладная математика и механика, т. XX, вып. 3, 1956.

Перейдем к физическому маятнику Шулера. Дело сводится здесь к решению двух вопросов: отысканию условий, при которых положение оси динамической симметрии маятника, совпадающее с направлением к центру Земли, оказывается положением относительного равновесия, и к выводу и анализу уравнений движения оси динамической симметрии маятника около положения относительного равновесия.

Рассмотрим первый из этих вопросов. Свяжем с телом маятника трехгранник  $Oxyz$  (рис. 3.1.), начало которого поместим в точку подвеса, а ось  $z$  направим вдоль оси динамической симметрии маятника в сторону от центра масс  $c$ , который будет, таким образом, иметь координаты

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = -a. \quad (3.1)$$

Оси системы координат  $Oxyz$  направлены по главным осям эллипсоида инерции маятника, являющегося эллипсоидом вращения, так как маятник имеет ось динамической симметрии. Поэтому моменты инерции маятника таковы:

$$J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0, \quad J_{xx} = J_{yy} = A, \quad J_{zz} = C. \quad (3.2)$$

Уравнения движения маятника удобнее всего составить относительно системы координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$ , начало которой совпадает с точкой  $O$ , а ориентация осей совпадает с ориентацией осей системы координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , т. е. неизменна по отношению к направлениям на удаленные звезды. Для составления уравнений движения воспользуемся теоремой о кинетическом моменте. Так как система координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$  движется по отношению к инерциальному пространству поступательно, то теорема о кинетическом моменте записывается в обычном виде:

$$\frac{dK}{dt} = M, \quad (3.3)$$

где  $K$  — кинетический момент маятника, а  $M$  — суммарный момент внешних сил.

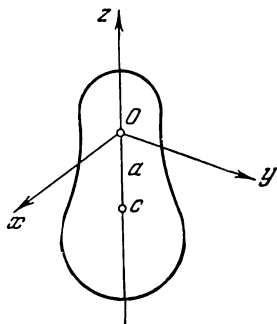


Рис. 3.1.

С учетом равенств (3.2) имеем:

$$K_x = A\omega_x, \quad K_y = A\omega_y, \quad K_z = C\omega_z, \quad (3.4)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $Oxyz$  на его оси.

Теперь уравнение (3.3) в проекциях на оси  $x, y, z$  сводится к известным уравнениям Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ A \frac{d\omega_y}{dt} - (C - A) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

В уравнениях (3.5)  $M_x, M_y, M_z$  — проекции на оси  $x, y, z$  суммарного момента вокруг точки  $O$  сил, приложенных к маятнику. Так как система координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$ , в которой записаны уравнения (3.3), (3.5), подвижна, то при подсчете моментов должны быть учтены, кроме сил тяготения и реакции опоры, также силы инерции переносного движения и кориолисовы силы. Момент силы реакции равен нулю, так как она проходит через точку  $O$  (трение в опоре будем считать отсутствующим). Кориолисовы силы также отсутствуют, так как система координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$  движется поступательно. По этой же причине силы инерции, действующие на элементарные массы маятника, параллельны и сводятся к одной силе  $Q$ , приложенной в центре масс  $c$ . Поле тяготения Земли в объеме маятника будем считать однородным. Если массу маятника обозначить через  $m$ , то результирующая сил тяготения сводится лишь к силе \*)

$$F = mg, \quad (3.6)$$

приложенной в центре масс маятника и направленной по направлению поля тяготения Земли в точке  $O$ . Величина  $|g|$  также должна быть взята в этом случае для точки  $O$ .

---

\*) Влияние результирующего момента сил тяготения будет обсуждено позднее.

Принимая во внимание сделанные выше замечания и учитывая равенства (3.1), находим следующие выражения для моментов:

$$M_x = a(F_y + Q_y), \quad M_y = -a(F_x + Q_x), \quad M_z = 0. \quad (3.7)$$

Пусть теперь ось динамической симметрии непрерывно совпадает с направлением к центру Земли, точка  $O$  движется произвольным образом на постоянном удалении  $r$  от центра Земли, а поле тяготения Земли сферическое. Тогда

$$F_x = F_y = 0. \quad (3.8)$$

Далее очевидно, что

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -m\omega_x, & Q_y &= -m\omega_y, \\ Q_z &= -m\omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — проекции абсолютного ускорения точки  $O$  равные:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y, \\ \omega_y &= \frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z, \\ \omega_z &= \frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Так как ось  $z$  совпадает с направлением к центру Земли, а  $r = \text{const}$ , то

$$v_x = r\omega_y, \quad v_y = -r\omega_x, \quad v_z = 0. \quad (3.11)$$

Подставив выражения (3.8) — (3.11) в формулы (3.7) и далее в уравнения (3.5), приходим к следующим уравнениям относительного равновесия физического маятника для рассматриваемого случая:

$$\left. \begin{aligned} (A - mar) \left( \frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y \omega_z \right) + C \omega_y \omega_z &= 0, \\ (A - mar) \left( \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z \right) - C \omega_x \omega_z &= 0, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Равенства (3.12) должны выполняться тождественно. При произвольных  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  это может иметь место, если одновременно выполняются условия

$$\frac{A}{ma} = r, \quad C = 0. \quad (3.13)$$

Первое условие (3.13) является известным условием Шулера: приведенная длина физического маятника должна быть равна радиусу Земли. Второе условие требует, чтобы все массы маятника располагались на оси  $z$ . Это условие может быть заменено другим. При  $C \neq 0$  из третьего равенства (3.12) следует, что

$$\omega_z = \omega_z^0 = \text{const}. \quad (3.14)$$

Если теперь взять  $\omega_z^0 = 0$ , то первые два соотношения (3.12) будут выполняться при соблюдении только первого условия (3.13) при произвольном  $C$ . В этом случае проекция абсолютной угловой скорости вращения маятника на ось динамической симметрии

$$\omega_z = \omega_z^0 = 0. \quad (3.15)$$

Условие (3.15) и второе условие (3.13) можно объединить в одно:

$$K_z = C\omega_z = 0. \quad (3.16)$$

Заметим, что условие (3.15) касается выбора начальных обстоятельств движения маятника. К нему, естественно, должны быть добавлены еще два аналогичных условия: в начальный момент времени ось динамической симметрии маятника должна совпадать с направлением к центру Земли и, кроме того, начальные значения  $\omega_x^0$ ,  $\omega_y^0$  проекций  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  абсолютной угловой скорости вращения маятника должны быть такими, чтобы в начальный момент времени скорость изменения ориентации оси  $z$  маятника в пространстве совпадала с начальной скоростью изменения ориентации радиус-вектора  $r$ , проведенного из центра Земли в точку подвеса маятника.

Условия (3.13), (3.16) и оговоренный выше выбор начальных условий и являются теми требованиями, которым должен удовлетворять физический маятник, чтобы ось его динами-

ческой симметрии все время совпадала с направлением к центру Земли при произвольном движении точки опоры маятника на постоянном удалении от центра Земли.

Как уже говорилось выше, условие (3.16) может быть удовлетворено либо если маятник представляет собой бесконечно тонкий стержень, либо когда  $\omega_z = 0$ . В первом случае маятник принципиально не может быть реализован физически. Однако и во втором случае практически реализовать маятник Шулера невозможно. В самом деле, если предположить, что маятник выполнен в виде кольца диаметром 0,5 м, точка подвеса которого отстоит на величину  $a$  от его центра масс, то легко подсчитать, что при выполнении первого условия (3.13) величина  $a$  будет иметь значение порядка 0,01 мк, что и показывает практическую невозможность реализации маятника.

Нас, однако, маятник Шулера интересует главным образом как модель некоторого класса систем инерциальной навигации. Поэтому мы в дальнейшем будем предполагать выполненными условия типа (3.13), (3.16), никак не связывая это с практической или даже (как в случае, когда  $C = 0$ ) принципиальной физической возможностью реализации маятника.

Предшествующее рассмотрение проведено в предположении сферичности поля тяготения Земли. Если снять это ограничение и ограничение, связанное с условием  $r = \text{const}$ , то на маятник будут действовать дополнительные к учтенным ранее моменты, которые должны быть тем или иным образом скомпенсированы. Пусть

$$r = r(t), \quad v_z = \frac{dr}{dt}, \quad F_x \neq 0, \quad F_y \neq 0. \quad (3.17)$$

Тогда вместо первых двух равенств (3.12), полагая условие (3.15) выполненным, приходим к равенствам

$$\left. \begin{aligned} (A - mar) \frac{d\omega_x}{dt} &= a \left( F_y + 2m\omega_x \frac{dr}{dt} \right) + M_x^1, \\ (A - mar) \frac{d\omega_y}{dt} &= a \left( -F_x + 2m\omega_y \frac{dr}{dt} \right) + M_y^1. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Равенства (3.18) должны выполняться тождественно независимо от значений  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ . Это было бы возможным, если удовлетворить условию

$$A - mar = 0, \quad (3.19)$$

а компенсирующие моменты  $M_x^1$ ,  $M_y^1$  сформировать таким образом, чтобы правые части равенств (3.18) обратились в нуль.

В соотношении (3.19) величина  $r$  переменна, в то время как условия (3.18) получены для постоянного  $r$ . Возникающие здесь затруднения можно обойти двумя путями. Первый заключается в том, чтобы выполнить условие (3.19) для некоторого  $r^0 = \text{const}$ , а к компенсирующим моментам добавить дополнительные моменты так, чтобы суммарные выражения для компенсирующих моментов приняли вид:

$$\left. \begin{aligned} M_x^1 &= -a \left( F_y + 2m\omega_x \frac{dr}{dt} \right) + ma(r - r^0) \frac{d\omega_x}{dt}, \\ M_y^1 &= a \left( -F_x + 2m\omega_y \frac{dr}{dt} \right) + ma(r - r^0) \frac{d\omega_y}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Вторым путем является замена маятника механической системой, в которой момент инерции  $A$  оставался бы постоянным, а координата  $z_c = -a$  центра масс  $c$  менялась бы по закону

$$a = \frac{A}{mr(t)}, \quad (3.21)$$

либо, наоборот, системой, в которой величина  $a$  оставалась бы постоянной, а момент инерции  $A$  менялся в соответствии с равенством (3.19):

$$A = mar(t). \quad (3.22)$$

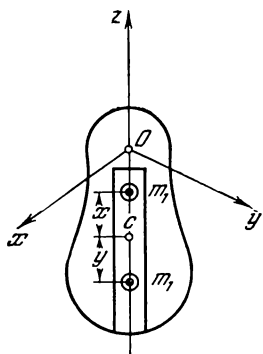


Рис. 3.2.

Такую механическую систему можно мыслить себе, например, как маятник с полостями, в которых в соответствии с условиями (3.21), (3.22) перемещаются некоторые массы\*) так, что система сохраняет все время ось  $z$  осью своей динамической симметрии.

Возможность выполнения при этом условия (3.21) следует из простого примера. Пусть в теле маятника вдоль оси  $z$  имеется цилиндрическая полость (рис. 3.2), в которой по разные стороны от центра масс  $c$  маятника могут перемещаться две равные массы  $m_1$ . Обозначив расстояние одной

\*) Ввиду малости относительных скоростей перемещения этих масс кориолисовыми силами, как обычно, можно пренебречь.

из них (например, находящейся между точкой опоры  $O$  и точкой  $c$ ) от центра масс через  $x$ , а другой через  $y$ , получим следующие выражения для суммарного момента инерции и координаты  $z_c$  центра масс:

$$\left. \begin{aligned} A &= A_0 + m_1[(a-x)^2 + (a+y)^2], \\ z_c &= \frac{a(m+2m_1) + m_1(y-x)}{2m_1+m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

Полагая теперь  $A = A_0 = \text{const}$ , получаем из первого соотношения (3.23) уравнение окружности, которая изображена на рис. 3.3. Радиус окружности равен  $a\sqrt{2}$ , центр ее расположен в точке с координатами  $x=a$ ,  $y=-a$ . Второе уравнение (3.23) является уравнением прямой

$$z_c - a = \frac{m_1}{2m_1 + m}(y - x). \quad (3.24)$$

На части окружности, расположенной в первом квадранте, величина  $z_c - a$  пробегает значения

$$0 \geq z_c - a \geq \frac{2am_1}{2m_1 + m}. \quad (3.25)$$

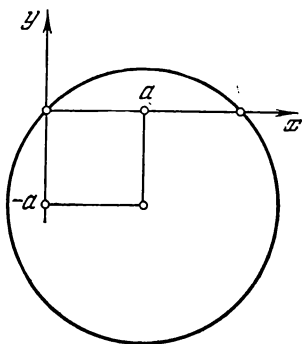


Рис. 3.3.

Это и дает возможность, оставя  $A$  постоянным, обеспечить выполнение равенства (3.21). При выполнении условия (3.21) компенсирующие моменты (3.20) упрощаются, принимая вид:

$$M_x^1 = -a \left( F_y + 2m\omega_x \frac{dr}{dt} \right), \quad M_y^1 = a \left( -F_x + 2m\omega_y \frac{dr}{dt} \right). \quad (3.26)$$

Принципиальная возможность выполнения условия (3.22) также очевидна. Для этого достаточно разместить четыре массы в плоскости, нормальной оси динамической симметрии, на двух взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся с осью динамической симметрии, на равных расстояниях от последней.



Тогда величина  $a$  будет постоянной, а экваториальный момент инерции  $A$  можно сделать переменным и обеспечить выполнение условия (3.22).

Для переменного  $A$  из векторного уравнения (3.3) получим вместо уравнений (3.5) следующие скалярные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_x \frac{dA}{dt} + (C - A)\omega_y\omega_z &= M_x, \\ A \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_y \frac{dA}{dt} - (C - A)\omega_x\omega_z &= M_y, \\ C \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

При выполнении условия (3.22)

$$\frac{dA}{dt} = ma \frac{dr}{dt}. \quad (3.28)$$

Поэтому, если условие (3.15) или (3.16) также выполнено, то компенсирующие моменты будут определяться равенствами:

$$M'_x = -a \left( F_y + m\omega_x \frac{dr}{dt} \right), \quad M'_y = a \left( -F_x + m\omega_y \frac{dr}{dt} \right). \quad (3.29)$$

В условиях (3.21), (3.22) полагалась переменной лишь одна из величин  $a$  или  $A$ . Если сделать их обе переменными, то компенсирующие моменты могут быть упрощены еще, а именно: можно избавиться от вторых слагаемых в скобках. В самом деле, пусть  $a$  пропорционально  $r$ . Тогда

$$A = mar, \quad a = kr. \quad (3.30)$$

Следовательно,

$$\frac{dA}{dt} = 2ma \frac{dr}{dt}. \quad (3.31)$$

Компенсирующие моменты становятся зависящими лишь от проекций  $F_x$ ,  $F_y$  силы тяготения:

$$M'_x = -aF_y, \quad M'_y = aF_x. \quad (3.32)$$

В отношении этих моментов необходимо сказать следующее. Задача их формирования равносильна задаче формирования несферической составляющей напряженности поля тяготения Земли в уравнениях инерциальной навигации. Силы  $F_x$ ,  $F_y$  являются функциями координат точки  $O$  относительно Земли

и ориентации трехгранника *хуз* по отношению к Земле. Сформировать эти моменты можно было бы лишь в том случае, если маятник образовывал бы совместно с гироскопическими устройствами навигационную систему, которая определяла бы указанные координаты и ориентацию.

Здесь возникает еще один вопрос. Нельзя ли параметры маятника [или некоторой механической системы типа трех рассмотренных выше, удовлетворяющих условиям (3.21), (3.22), (3.30)] подобрать такими, чтобы ось динамической симметрии системы совпадала при произвольном движении точки *O* не с направлением к центру Земли, а с направлением поля тяготения (или поля тяжести)? Тогда компенсирующие моменты (3.32) не пришлось бы вводить. Представляется очевидным, что лишь за счет изменения величин *A* и *a* указанной цели достичь точно нельзя, ибо мы уже наложили на эти величины два условия (3.30). Это, однако, не исключает в некоторых случаях возможности приближенного решения задачи. Речь идет здесь о возможностях избавиться от компенсирующих моментов. Если же, наоборот, разрешить формирование компенсирующих моментов как любых необходимых функций координат и времени, то, разумеется, положением относительного равновесия может быть сделано любое положение оси динамической симметрии маятника.

В заключение необходимо сделать следующее замечание. Для выполнения условий (3.19), (3.21), (3.22), (3.30) при переменном *r* мы должны иметь в своем распоряжении стороннюю информацию о величине *r*. Внутри самой маятниковой системы эта величина не может быть определена. Величина *r* может быть, очевидно, определена, если известна (по показаниям высотомера) высота *h* движения точки опоры маятника над поверхностью Земли. Так как направление вертикали также известно, то (в комплексе с гироскопами) с помощью маятника Шулера возможно определить координаты движущейся точки опоры относительно земной поверхности. Привлечение соотношения (2.3) дает возможность (*h* известно) найти *r*. Дело обстоит здесь таким же образом, как при коррекции инерциальной системы от высотомера.

**3.1.2. Уравнения малых колебаний маятника Шулера около положения относительного равновесия.** Перейдем к возмущенному движению маятника Шулера, т. е. к

колебаниям его около положения относительного равновесия. Рассмотрим при этом наиболее общий случай, когда имеет место выполнение условий (3.30).

Обозначим трехгранник  $xuz$ , связанный с маятником, в его невозмущенном положении через  $x_0y_0z_0$ . Возмущенное положение маятника — или, что все равно, связанного с ним трехгранника  $xuz$  — определим углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (рис. 3.4). Направляющие косинусы между осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  образуют при этом следующую таблицу:

	$x$	$y$	$z$
$x_0$	$\cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$-\cos \alpha \sin \gamma$	$\sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma$
$y_0$	$\cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma$	$\sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma$
$z_0$	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$

(3.33)

Рассмотрим сначала случай малых углов  $\alpha$  и  $\beta$ , когда таблица (3.33) упрощается и принимает вид:

	$x$	$y$	$z$
$x_0$	1	$-\gamma$	$\beta$
$y_0$	$\gamma$	1	$-\alpha$
$z_0$	$-\beta$	$\alpha$	1

(3.34)

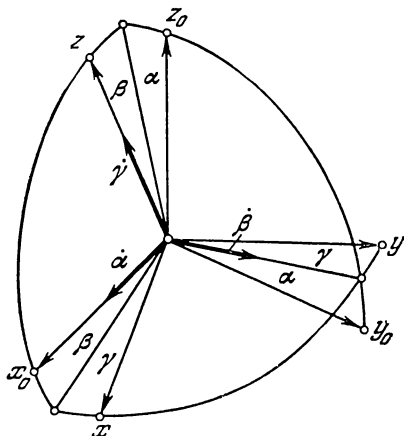


Рис. 3.4.

Для описания возмущенного движения маятника достаточно получить уравнения, которым удовлетворяют углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Воспользуемся для этого уравнениями (3.27).

Обозначим проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0y_0z_0$  на его оси через  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ . В левые части уравнений (3.27) входят проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  абсолютной угловой скорости маятника в его возмущенном движении на

оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . В соответствии с таблицей (3.34) они равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_0} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta + \dot{\alpha}, \\ \omega_y &= \omega_{y_0} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha + \dot{\beta}, \\ \omega_z &= \omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta + \dot{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Для подсчета моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , входящих в правые части уравнений (3.27), понадобятся проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  ускорения точки  $O$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Они равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_0} - \omega_{z_0}\beta + \omega_{y_0}\gamma, \\ \omega_y &= \omega_{y_0} + \omega_{z_0}\alpha - \omega_{x_0}\gamma, \\ \omega_z &= \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Здесь в соответствии с равенствами (3.10), (3.11) и вторым равенством (3.17)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= r(\dot{\omega}_y + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{y_0}\dot{r}, \\ \omega_{y_0} &= r(-\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - 2\omega_{x_0}\dot{r}, \\ \omega_{z_0} &= \ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  в возмущенном движении будут включать в себя моменты сил инерции переносного движения точки  $O$ , моменты сил тяготения, а также введенные дополнительно компенсирующие моменты. Поэтому, согласно равенствам (3.7), (3.32), получаем:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= a(F_y + Q_y) - aF_{y_0}, \\ M_y &= -a(F_x + Q_x) + aF_{x_0}, \\ M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Здесь силы инерции  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  определены формулами (3.9), в которые надо подставить  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  из соотношений (3.36).

Для проекций  $F_x$  и  $F_y$ , используя таблицу направляющих косинусов (3.34), получим выражения, аналогичные первым двум выражениям (3.36):

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{x_0} - F_{z_0}\beta + F_{y_0}\gamma, \\ F_y &= F_{y_0} + F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Объединяя соотношения (3.38) и (3.39), находим:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= a(F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma + Q_y), \\ M_y &= -a(-F_{z_0}\beta + F_{y_0}\gamma + Q_x). \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Подставим теперь в уравнения (3.27) выражения (3.35) угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  и значения моментов  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ , вытекающие из равенств (3.40), (3.9), (3.36), (3.37). После очевидных группировок придем, пренебрегая членами второго порядка малости по отношению к  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и их производным, к таким уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (A - mar)(\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) + C\omega_{y_0}\omega_{z_0} + \\ + A(\omega_{y_0}\dot{\gamma} + \dot{\omega}_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\dot{\beta} - \dot{\omega}_{z_0}\beta + \ddot{\alpha}) + \\ + \frac{dA}{dt}(\omega_{x_0} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta + \dot{\alpha}) + \\ + (C - A)(-\omega_{y_0}^2\alpha + \omega_{x_0}\omega_{y_0}\beta + \omega_{y_0}\dot{\gamma} - \\ - \omega_{x_0}\omega_{z_0}\gamma + \omega_{z_0}^2\alpha + \omega_{z_0}\dot{\beta}) = a(F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma) + \\ + 2am\omega_{x_0}\dot{r} - am[\ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2)]\alpha + \\ + am[r(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{y_0}\dot{r}]\gamma, \\ (A - mar)(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) - C\omega_{x_0}\omega_{z_0} + A(-\omega_{x_0}\dot{\gamma} - \dot{\omega}_{x_0}\gamma + \\ + \dot{\omega}_{z_0}\alpha + \omega_{z_0}\dot{\alpha} + \dot{\beta}) + \frac{dA}{dt}(\omega_{y_0} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha + \dot{\beta}) - \\ - (C - A)(-\omega_{x_0}\omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}^2\beta + \omega_{x_0}\dot{\gamma} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}\gamma - \\ - \omega_{z_0}^2\beta + \omega_{z_0}\dot{\alpha}) = a(F_{z_0}\beta - F_{y_0}\gamma) + 2am\omega_{y_0}\dot{r} - \\ - am[\ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2)]\beta + \\ + am[r(-\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - 2\omega_{x_0}\dot{r}]\gamma, \\ C\frac{d}{dt}(\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta + \dot{\gamma}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Из последнего уравнения, интегрируя его, находим:

$$\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta + \dot{\gamma} = \omega_{z_0}^0 - \omega_{y_0}^0\alpha^0 + \omega_{x_0}^0\beta^0 + \dot{\gamma}^0 = \text{const.} \quad (3.42)$$

Здесь верхними индексами «0» обозначены, как и ранее, начальные значения соответствующих переменных.

Пусть параметры маятника удовлетворяют условиям (3.15), (3.30). Пусть, однако, эти условия выполнены неточно, так что

$$\left. \begin{aligned} \omega_{z_0}^0 &= \Delta \omega_{z_0}^0, & A &= ma(r + \Delta r) + \Delta A, \\ a &= k(r + \Delta r) + \Delta a, \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

где  $\Delta r$  — погрешность задания расстояния  $r$  до центра Земли, т. е. погрешность того источника информации, из которого поступает  $r$  для формирования условий (3.30).

В равенствах (3.43) величины  $\Delta a$  и  $\Delta A$  — инструментальные погрешности выполнения условий (3.30). Из погрешностей, относящихся непосредственно к параметрам маятника, мы ограничимся лишь этими. Погрешности, связанные, например, с отличием от нуля центробежных моментов инерции и с нарушением динамической симметрии маятника, исследоваться не будут. Делается это потому, что движение маятника Шулера, как уже было отмечено, представляет интерес только из-за аналогии его движения работе рассмотренных ранее систем инерциальной навигации. Эффекты же, связанные с центробежными моментами инерции и динамической несимметрией, не имеют себе аналогичных в инерциальных системах. Здесь, впрочем, можно иметь в виду еще то, что любые другие погрешности параметров маятника могут быть всегда сведены к некоторым эквивалентным погрешностям  $\Delta a$  и  $\Delta A$ . Эти последние можно считать играющими ту же роль, что и основные инструментальные погрешности, которые были ранее введены при рассмотрении уравнений ошибок инерциальных систем.

Итак, пусть имеют место равенства (3.43). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2am\dot{r} + 2ma\dot{\Delta r} + 2mkr\dot{\Delta r} + m\dot{r}\Delta a + \\ &\quad + mr\dot{\Delta a} + \dot{\Delta A}, \\ A - amr &= am\Delta r + \Delta A. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Из интеграла (3.42) и первого равенства (3.43) имеем также:

$$\omega_{z_0} = \Delta \omega_{z_0}^0 - \omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \omega_{x_0}^0 \beta^0 + \dot{\gamma}^0 + \omega_{y_0} \alpha - \omega_{x_0} \beta - \dot{\gamma}. \quad (3.45)$$

Подставим соотношения (3.43), (3.44), (3.45) в первые два уравнения (3.41). Отбросим имеющие второй порядок малости произведения инструментальных погрешностей  $\Delta a$ ,  $\Delta A$  и их производных по времени на величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\ddot{\alpha}$ ,  $\ddot{\beta}$ . Приводя подобные члены и выполняя некоторые группировки, после деления на  $ma$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha} + \ddot{r}\alpha - \omega_{x_0}\omega_{y_0}r\beta - \omega_{x_0}^2r\alpha - \frac{1}{m}(F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma) = \\ = -\dot{\omega}_{x_0}\Delta r - 2\omega_{x_0}\Delta\dot{r} - C\omega_{y_0}^0(\Delta\omega_{z_0} - \omega_{y_0}^0\alpha^0 + \\ + \omega_{x_0}^0\beta^0 + \dot{\gamma}^0) - \frac{\Delta A}{am}\dot{\omega}_{x_0} - \\ - \omega_{x_0}\left(\frac{r\Delta\dot{a}}{a} + \frac{\Delta\dot{A}}{ma}\right) + \omega_{x_0}\dot{r}\frac{\Delta a}{a}, \\ r\ddot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta} + \ddot{r}\beta - \omega_{x_0}\omega_{y_0}r\alpha - \omega_{y_0}^2r\beta - \frac{1}{m}(F_{z_0}\beta - F_{y_0}\gamma) = \\ = -\dot{\omega}_{y_0}\Delta r - 2\omega_{y_0}\Delta\dot{r} + C\omega_{x_0}(\Delta\omega_{z_0} - \omega_{y_0}^0\alpha^0 + \\ + \omega_{x_0}^0\beta^0 + \dot{\gamma}^0) - \frac{\Delta A}{am}\dot{\omega}_{y_0} - \\ - \omega_{y_0}\left(\frac{r\Delta\dot{a}}{a} + \frac{\Delta\dot{A}}{ma}\right) + \omega_{y_0}\dot{r}\frac{\Delta a}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

Легко видеть, что если  $\Delta a = \Delta A = \Delta r = \Delta\omega_{z_0}^0 = 0$ , то система уравнений (3.46) допускает тривиальное решение  $\alpha = \beta \equiv 0$ , коль скоро  $\alpha^0 = \beta^0 = \gamma^0 = \dot{\alpha}^0 = \dot{\beta}^0 = \dot{\gamma}^0 = 0$ . Этим еще раз подтверждается, что при условиях (3.15), (3.30) ось динамической симметрии маятника совпадает с направлением к центру Земли при произвольном движении точки его опоры, если только в начальный момент ось маятника была направлена к центру Земли и имела надлежащую скорость изменения своей ориентации.

Раскроем в уравнениях (3.46) выражения  $F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma$  и  $F_{z_0}\beta - F_{y_0}\gamma$ . Для этого заметим, что, согласно равенству (1.40),

$$F = m \operatorname{grad} V = m \left( \frac{\mu r}{r^3} + \operatorname{grad} \varepsilon \right), \quad (3.47)$$

где  $\varepsilon$  — малая величина, характеризующая несферичность поля тяготения Земли. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} F_{x_0} &= m \operatorname{grad}_{x_0} \varepsilon, & F_{y_0} &= m \operatorname{grad}_{y_0} \varepsilon, \\ F_{z_0} &= m \left( -\frac{\mu}{r^2} + \operatorname{grad}_{z_0} \varepsilon \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.48)$$

Величины

$$\alpha \operatorname{grad}_{z_0} \varepsilon, \quad \beta \operatorname{grad}_{z_0} \varepsilon, \quad \gamma \operatorname{grad}_{x_0} \varepsilon, \quad \gamma \operatorname{grad}_{y_0} \varepsilon \quad (3.49)$$

имеют второй порядок малости, поэтому можно считать, что

$$\left. \begin{aligned} F_{z_0} \alpha - F_{x_0} \gamma &= -m \alpha \frac{\mu}{r^2}, \\ F_{z_0} \beta - F_{y_0} \gamma &= -m \beta \frac{\mu}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Заметим, что пренебрежение величинами (3.49) равносильно пренебрежению вариацией несферической составляющей поля тяготения Земли, которое было допущено при выводе первой группы дифференциальных уравнений ошибок систем инерциальной навигации.

С учетом соотношений (3.50) уравнения (3.46) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} \alpha + 2 \dot{r} \dot{\alpha} + \ddot{r} \alpha - \omega_{x_0} \omega_{y_0} r \beta - \omega_{x_0}^2 r \alpha + \frac{\mu}{r^2} \alpha &= \\ = -\dot{\omega}_{x_0} \Delta r - 2 \omega_{x_0} \Delta \dot{r} - C \omega_{y_0} (\Delta \omega_{z_0}^0 - \omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \\ + \omega_{x_0}^0 \beta^0 + \dot{\gamma}^0) - \frac{\Delta A}{am} \dot{\omega}_{x_0} - \\ - \omega_{x_0} \left( \frac{r \Delta \dot{a}}{a} + \frac{\Delta \dot{A}}{am} \right) + \omega_{x_0} \dot{r} \frac{\Delta a}{a}, \\ r \ddot{\beta} + 2 \dot{r} \dot{\beta} + \ddot{r} \beta - \omega_{x_0} \omega_{y_0} r \alpha - \omega_{y_0}^2 r \beta + \frac{\mu}{r^2} \beta &= \\ = -\dot{\omega}_{y_0} \Delta r - 2 \omega_{y_0} \Delta \dot{r} + C \omega_{x_0} (\Delta \omega_{z_0}^0 - \omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \\ + \omega_{x_0}^0 \beta^0 + \dot{\gamma}^0) - \frac{\Delta A}{am} \dot{\omega}_{y_0} - \\ - \omega_{y_0} \left( \frac{r \Delta \dot{a}}{a} + \frac{\Delta \dot{A}}{ma} \right) + \omega_{y_0} \dot{r} \frac{\Delta a}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$



Мы рассмотрели случай, когда выполняются условия (3.15), (3.30). Обратимся теперь к случаю, когда выполняются условие (3.30) и второе из условий (3.13), т. е. когда маятник представляет собой бесконечно тонкий стержень. Здесь, разумеется, условие (3.30) выполняется за счет некоторого перемещения масс вдоль оси  $z$ ; приведенные для предшествующего случая механизмы обеспечения условий (3.15) не имеют к этому случаю отношения.

Положим, что условие  $C=0$  выполнено с некоторой погрешностью, так что

$$C = \Delta C. \quad (3.52)$$

Из уравнений (3.41), равенства (3.42), второго и третьего равенств (3.43) и из соотношений (3.44), (3.50), (3.52), произведя выкладки, аналогичные выполненным при получении уравнений (3.51), и сохранив при этом лишь члены первого порядка малости по отношению к  $\alpha$  и  $\beta$ , придем к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} r\ddot{\alpha} + 2\dot{r}\dot{\alpha} + \left( \ddot{r} - r\omega_{x_0}^2 - r\omega_{z_0}^2 + \frac{\mu}{r^2} \right) \alpha - \\ - (\omega_{y_0}\omega_{x_0} + \dot{\omega}_{z_0}) r\beta - 2\omega_{z_0}(\dot{r}\beta + r\dot{\beta}) = \\ = (\omega_{y_0}\omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r - 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r} - \omega_{y_0}\omega_{z_0} \Delta C - \\ - \frac{\Delta A}{am} (\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - \omega_{x_0} \left( \frac{r\Delta \dot{a}}{a} + \frac{\Delta \dot{A}}{am} - \dot{r} \frac{\Delta a}{a} \right), \\ r\ddot{\beta} + 2\dot{r}\dot{\beta} + \left( \ddot{r} - r\omega_{y_0}^2 - r\omega_{z_0}^2 + \frac{\mu}{r^2} \right) \beta - \\ - (\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0}) r\alpha + 2\omega_{y_0}(\dot{r}\alpha + r\dot{\alpha}) = \\ = -(\omega_{x_0}\omega_{y_0} - \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \omega_{x_0}\omega_{z_0} \Delta C - \\ - \frac{\Delta A}{am} (\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) - \omega_{y_0} \left( \frac{r\Delta \dot{a}}{a} + \frac{\Delta \dot{A}}{am} - \dot{r} \frac{\Delta a}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Однородные уравнения (3.53), как и уравнения (3.51), допускают тривиальное решение  $\alpha = \beta \equiv 0$ . При  $\omega_{z_0} = 0$  однородные уравнения (3.53), как легко видеть, переходят в уравнения (3.51). Более того, если в правых частях уравнений (3.53) положить  $\omega_{z_0} = 0$ , то слагаемые правых частей,

содержащие  $\Delta r$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta A$  (инструментальные ошибки общего в обоих случаях происхождения), перейдут в соответствующие слагаемые правых частей уравнений (3.51).

**3.1.3. Уравнения свободных колебаний маятника Шулера около положения относительного равновесия при конечных величинах отклонений.** Уравнения (3.51), (3.53) выведены в предположении, что величины углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  малы, т. е. эти уравнения описывают лишь малые колебания физического маятника Шулера около положения относительного равновесия.

Рассмотрим теперь уравнения возмущенного движения маятника при конечных величинах углов отклонений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Ограничимся при этом лишь изучением однородных уравнений, т. е. уравнений свободных колебаний. Для установления интересующей нас аналогии между физическим маятником Шулера и инерциальной системой с двумя ньютонометрами этого, как мы убедимся, будет достаточно.

Положение трехгранника  $xuz$ , связанного с маятником в его возмущенном движении, определяется относительно трехгранника  $x_0y_0z_0$ , связанного с невозмущенным положением, таблицей направляющих косинусов (3.33). Нас интересуют главным образом колебания оси  $z$  маятника, поэтому угол  $\gamma$  можно с самого начала отнести к положению трехгранника  $x_0y_0z_0$ . [Заметим, кстати, что в однородные уравнения (3.51), (3.53) угол  $\gamma$  не вошел]. Тогда вместо таблицы (3.34) будем иметь следующую таблицу:

	$x$	$y$	$z$	
$x_0$	$\cos \beta$	0	$\sin \beta$	
$y_0$	$\sin \alpha \sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha \cos \beta$	(3.54)
$z_0$	$-\cos \alpha \sin \beta$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha \cos \beta$	

Пусть, как и ранее,  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0y_0z_0$  на его оси. Теперь трехгранник  $x_0y_0z_0$  не связан с маятником в его невозмущенном положении, так как угол  $\gamma$  отнесен к положению этого трехгранника. Поэтому теперь нельзя полагать  $\omega_{z_0} = 0$ , но это, как будет видно из дальнейшего, не составит помехи при выводе необходимых уравнений.

Уравнения движения маятника в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , жестко с ним связанные, можно в соответствии с равенствами (3.3), (3.7) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{K}_x + \omega_y K_z - \omega_z K_y &= a(F_y + Q_y), \\ \dot{K}_y + \omega_z K_x - \omega_x K_z &= -a(F_x + Q_x), \\ \dot{K}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \omega_{x_0} \cos \beta + \omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z_0} \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta, \\ \omega_y &= \omega_{y_0} \cos \alpha + \omega_{z_0} \sin \alpha + \dot{\beta}, \\ \omega_z &= \omega_{x_0} \sin \beta - \omega_{y_0} \sin \alpha \cos \beta + \omega_{z_0} \cos \alpha \cos \beta + \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} F_x + Q_x &= (F_{x_0} + Q_{x_0}) \cos \beta + (F_{y_0} + Q_{y_0}) \sin \alpha \sin \beta - \\ &\quad - (F_{z_0} + Q_{z_0}) \cos \alpha \sin \beta, \\ F_y + Q_y &= (F_{y_0} + Q_{y_0}) \cos \alpha + (F_{z_0} + Q_{z_0}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Положим

$$F_{x_0} = F_{y_0} = 0, \quad F_{z_0} = -\frac{m\mu}{r^2}, \quad (3.58)$$

что равносильно пренебрежению вариацией несферической составляющей поля тяготения Земли.

Будем считать выполненными условия

$$A = mar, \quad a = kr, \quad C = 0, \quad (3.59)$$

т. е. рассмотрим случай маятника в виде бесконечно тонкого стержня, которому соответствуют уравнения малых колебаний (3.53).

Учитывая соотношения (3.59), получаем для  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$  следующие выражения:

$$K_x = mar\omega_x, \quad K_y = mar\omega_y, \quad K_z = 0. \quad (3.60)$$

Из равенств (3.60), (3.56) находим:

$$\left. \begin{aligned} K_x &= mar(\omega_{x_0} \cos \beta + \omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta - \omega_{z_0} \cos \alpha \sin \beta + \\ &\quad + \dot{\alpha} \cos \beta), \\ K_y &= mar(\omega_{y_0} \cos \alpha + \omega_{z_0} \sin \alpha + \dot{\beta}), \\ K_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Аналогично из равенств (3.57), (3.58), (3.9), (3.37) и таблицы (3.54) получаем:

$$\left. \begin{aligned} F_x + Q_x &= -m \left\{ [r(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{y_0}\dot{r}] \cos \beta + \right. \\ &\quad + [r(-\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - 2\omega_{x_0}\dot{r}] \sin \alpha \sin \beta - \\ &\quad \left. - \left[ \frac{\mu}{r^2} + \ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \right] \cos \alpha \sin \beta \right\}, \\ F_y + Q_y &= -m \left\{ [r(-\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - 2\omega_{x_0}\dot{r}] \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\mu}{r^2} + \ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \right] \sin \alpha \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Теперь надо подставить выражения (3.61), (3.62) в уравнения (3.55). В результате очевидных группировок и упрощений, в которых используются соотношения (3.59), придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} r[\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + 2\dot{\alpha}(\omega_{x_0} \sin \beta \cos \beta - \\ - \omega_{y_0} \sin \alpha \cos^2 \beta + \omega_{z_0} \cos \alpha \cos^2 \beta) + \\ + \dot{\omega}_{y_0}(\cos \alpha - \cos \beta) + \dot{\omega}_{z_0} \sin \alpha + \dot{\omega}_{x_0} \sin \alpha \sin \beta + \\ + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta - \omega_{y_0}^2 \right) \sin \beta \cos \alpha + \\ + \omega_{x_0}^2(\cos \beta - \cos \alpha) \sin \beta - \omega_{y_0}^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ + \omega_{x_0}\omega_{y_0}(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) \sin \alpha + \\ + \omega_{x_0}\omega_{z_0}(\cos^2 \beta \cos \alpha - \cos \beta - \sin^2 \beta \cos \alpha) + \\ + \omega_{y_0}\omega_{z_0}(2 \cos \alpha \cos \beta - 1) \sin \alpha \sin \beta] + \\ + 2\dot{r}[\omega_{y_0}(\cos \alpha - \cos \beta) - 2\omega_{x_0} \sin \alpha \sin \beta + \\ + \omega_{z_0} \sin \alpha + \dot{\beta}] + \ddot{r} \cos \alpha \sin \beta = 0, \\ r\left\{ \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + 2\dot{\beta}(-\omega_{x_0} \sin \beta + \right. \\ + \omega_{y_0} \sin \alpha \cos \beta - \omega_{z_0} \cos \alpha \cos \beta) + \dot{\omega}_{x_0}(\cos \beta - \cos \alpha) + \\ + \omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta - \dot{\omega}_{z_0} \cos \alpha \sin \beta + \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \left[ \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - \right. \\
 & \quad \left. - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta \right] \sin \alpha - \\
 & - \omega_{x_0} \omega_{y_0} \cos \alpha \sin \beta - \omega_{x_0} \omega_{z_0} \sin \alpha \sin \beta + \\
 & + \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\sin^2 \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha) \} + \\
 & + 2\dot{r} [\omega_{x_0} (\cos \beta - \cos \alpha) + \omega_{y_0} \sin \alpha \sin \beta - \\
 & - \omega_{z_0} \cos \alpha \sin \beta + \dot{\alpha} \cos \beta] + \ddot{r} \sin \alpha = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Легко видеть, что уравнения (3.63) допускают тривиальное решение. Если считать углы  $\alpha$  и  $\beta$  малыми, разложить тригонометрические функции этих углов в ряды и сохранить в уравнениях (3.63) лишь первые степени  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , то, как нетрудно убедиться, эти уравнения перейдут в однородные уравнения (3.53).

Уравнения (3.63) это уравнения колебаний бесконечно тонкого маятника Шулера, для которого  $C=0$ . Если исходить не из условия  $C=0$ , а из условия  $\omega_{z_0} = \omega_{z_0}^0 = 0$ , то из уравнений (3.55) получаются уравнения, совпадающие с уравнениями (3.63), если в последних положить  $\omega_{z_0} = 0$ . Для малых значений  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  в первом приближении они совпадут тогда с уравнениями (3.51).

## § 3.2. Двухгироскопическая вертикаль и гироскопический компас Геккелера—Аншютца \*)

### 3.2.1. Двухгироскопическая вертикаль.

Двухгироскопическая вертикаль представляет собой гироскопическую раму, центр масс которой не совпадает с центром карданова подвеса платформы гироскопа на объекте. Если жестко связать с платформой гироскопа правый ортогональный трехгранник  $Oxyz$ , поместив начало его в центр подвеса, то расположение двух гироскопов, входящих в схему рассматри-

---

\*) Ишлинский А. Ю., К теории гироскопического компаса. Прикладная математика и механика, т. XX, вып. 4, 1956; Теория двухгироскопической вертикали, т. XXI, вып. 2, 1957.

ваемого прибора, будет таким, как показано на рис. 3.5. Оси кожухов гироскопов лежат в плоскости  $xz$  и параллельны оси  $x$ , а собственные кинетические моменты гироскопов расположены в плоскости  $yz$ . Центр масс  $c$  гирорамы лежит на оси  $z$  на расстоянии  $a$  от точки подвеса, так что имеют место равенства (3.1).

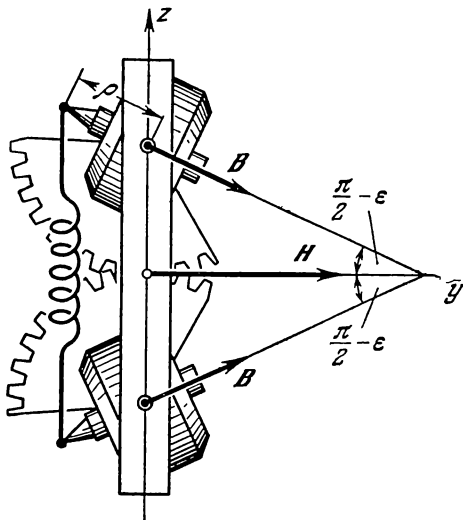


Рис. 3.5.

В своем движении вокруг осей кожухов гироскопы связаны геометрической связью (зубчатой передачей, как показано на рис. 3.5, или шарнирным механизмом). Поэтому углы отклонения их собственных кинетических моментов от оси  $y$  равны по величине и противоположны по направлению, так что суммарный их кинетический момент направлен по оси  $y$ .

Обозначив через  $B$  величину собственного кинетического момента каждого гироскопа, получим для суммарного кинетического момента обоих гироскопов выражение

$$H = 2B \sin \epsilon, \quad (3.64)$$

где  $\epsilon$  — угол между направлением вектора собственного кинетического момента и осью  $z$ .

К гироскопам вокруг осей их кожухов прикладываются равные по величине и противоположные по направлению моменты, являющиеся функцией угла  $\varepsilon$  и создаваемые специальным устройством. Величину этих моментов мы обозначим через  $N$ . В простейшем случае момент  $N$  может быть создан пружиной, соединяющей кожухи гироскопов так, как показано на рис. 3.5.

В соответствии с теоремой о моменте количества движения, уравнения прецессионного движения гирорамы, изучением которых мы ограничимся, имеют вид:

$$-H\omega_z = M_x, \quad \frac{dH}{dt} = M_y, \quad H\omega_x = M_z, \quad (3.65)$$

где  $\omega_x, \omega_z$  — проекции абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $xuz$  на его оси, а  $M_x, M_y, M_z$  — суммарные моменты, приложенные к платформе гирорамы вокруг соответствующих осей.

Рассматриваемая нами система имеет четыре степени свободы. Недостающее уравнение получается из рассмотрения движения гироскопов вокруг осей их кожухов. Оно имеет вид

$$-\omega_y 2B \cos \varepsilon = N, \quad (3.66)$$

где  $N$  — введенный ранее момент, являющийся функцией угла  $\varepsilon$  и создаваемый пружиной, соединяющей кожухи гироскопов.

Для того чтобы закончить вывод уравнений движения двухгироскопической вертикали, осталось лишь найти выражения для моментов  $M_x, M_y, M_z$ . Эти моменты, как и в случае физического маятника, рассмотренного в предыдущем параграфе, складываются из моментов сил тяготения и моментов сил инерции переносного движения гирорамы. Кроме того, могут быть приняты во внимание какие-либо дополнительные искусственно создаваемые моменты или возмущающие моменты, обусловленные неидеальностью элементов схемы. В соответствии с формулами (3.7), выражения для моментов  $M_x, M_y, M_z$  можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= a(F_y + Q_y) + M_x^*, & M_y &= -a(F_x + Q_x) + M_y^*, \\ M_z &= M_z^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

где через  $F$  и  $Q$  обозначены силы тяготения и инерции переносного движения, а через  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ ,  $M_z^*$  — все другие моменты, кроме создаваемых силами  $F$  и  $Q$ .

Подставив теперь выражения (3.64) и (3.67) в уравнения (3.65) и присоединив соотношение (3.66), получим уравнения движения чувствительного элемента двухгироскопической вертикали в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} -\omega_z 2B \sin \varepsilon &= a(F_y + Q_y) + M_x^*, \\ \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) &= -a(F_x + Q_x) + M_y^*, \\ \omega_x 2B \sin \varepsilon &= M_z^*, \quad -\omega_y 2B \cos \varepsilon = N. \end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

Покажем, что рассматриваемый прибор при определенном выборе его параметров и начальных обстоятельств его движения оказывается моделью физического маятника Шулера. Для этого найдем прежде всего условия, при которых ось  $z$  гирорама имеет своим положением относительного равновесия направление к центру Земли при произвольном движении объекта, на котором она установлена. Обозначим трехгранник  $xuz$  в положении, соответствующем относительному равновесию, через  $x_0 y_0 z_0$ . Тогда из уравнений (3.68) и формул (3.37), (3.9) получим:

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{z_0} 2B \sin \varepsilon &= \\ &= a[F_{y_0} + m(r\dot{\omega}_{x_0} - r\omega_{y_0}\omega_{z_0} + 2\omega_{x_0}\dot{r})] + M_x^*, \\ \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) &= \\ &= -a[F_{x_0} - m(r\dot{\omega}_{y_0} + r\omega_{x_0}\omega_{z_0} + 2r\dot{\omega}_{y_0})] + M_y^*, \\ \omega_{x_0} 2B \sin \varepsilon &= M_z^*, \quad -\omega_{y_0} 2B \cos \varepsilon = N. \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

Пусть

$$M_z^* = 0. \quad (3.70)$$

Тогда из третьего уравнения (3.69), оставляя в стороне исключительный случай, когда  $\varepsilon = 0$ , находим:

$$\omega_{x_0} = 0. \quad (3.71)$$



С учетом этого два первых уравнения (3.69) упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{z_0} 2B \sin \varepsilon &= a(F_{y_0} - mr\omega_{y_0}\omega_{z_0}) + M_x^*, \\ \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) &= -a[F_{x_0} - m(r\dot{\omega}_{y_0} + 2r\dot{\omega}_{y_0})] + M_y^*. \end{aligned} \right\} (3.72)$$

Пусть теперь моменты  $M_x^*$  и  $M_y^*$  сформированы согласно равенствам

$$M_x^* = -aF_{y_0}, \quad M_y^* = aF_{x_0}. \quad (3.73)$$

Из первого уравнения (3.72) следует тогда, что

$$2B \sin \varepsilon = amr\omega_{y_0}, \quad (3.74)$$

а из соотношения (3.74) и второго уравнения (3.72) —

$$\frac{d}{dt}(ar) = 2a\dot{r}. \quad (3.75)$$

Легко видеть, что условию (3.75) можно удовлетворить, положив

$$a = kr. \quad (3.76)$$

Для формирования этого условия должна, разумеется, использоваться дополнительная информация о величине  $r$  расстояния до центра Земли.

Обратившись к последнему равенству (3.68) и исключив из него  $\omega_{y_0}$  при помощи соотношения (3.74), найдем следующее выражение для момента  $N$ :

$$N = -\frac{4B^2}{mar} \sin \varepsilon \cos \varepsilon. \quad (3.77)$$

Таким образом, условия (3.70), (3.73), (3.74), (3.76) обеспечивают существование относительного равновесия, при котором ось  $z$  прибора остается направленной к центру Земли (т. е. по геоцентрической вертикали) при произвольном движении центра подвеса платформы. Именно поэтому рассматриваемый прибор и получил название двухгироскопической вертикали.

Если считать поле тяготения Земли сферическим, а движение центра подвеса происходящим на постоянном удалении от центра Земли, то  $F_{x_0}$ ,  $F_{y_0}$  будут равны нулю, надобность в моментах  $M_x^*$ ,  $M_y^*$  отпадает и условие (3.76) также будет лишним. Дело сведется тогда лишь к выполнению условий (3.70), (3.74), (3.77).

Заметим, что если  $r$ , а следовательно, и  $a$  постоянны, то момент  $N$  может быть создан простой пружиной. В самом деле, обратившись к рис. 3.5 и обозначив через  $\rho$  расстояние от точки закрепления пружины до оси кожуха гироскопа, а через  $k$  жесткость пружины, найдем, что

$$N = -2k\rho^2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \quad (3.78)$$

если, конечно, при  $\varepsilon = 0$  пружина не деформирована. Положив теперь

$$k\rho^2 = \frac{4B^2}{mar}, \quad (3.79)$$

приходим к требуемому.

Если же  $r$  переменна, то необходимо, очевидно, чтобы переменными были  $a$  и  $\rho$ .

Мы нашли выше требования, которым должны удовлетворять конструктивные параметры двухгироскопической вертикали. К ним, разумеется, надо добавить требования, касающиеся выбора начальных условий ее движения. Одно из них следует из равенства (3.71):

$$\omega_{x_0}^0 = 0. \quad (3.80)$$

Это означает, что ось  $x$  гирорама в начальный момент должна лежать в плоскости, содержащей вектор абсолютной скорости точки  $O$  (центра подвеса прибора) и центр Земли  $O_1$ .

Далее, из соотношений (3.74), (3.75) следует, что

$$\sin \varepsilon^0 = \frac{a^0 m r^0 \omega_{y_0}^0}{2B}, \quad a^0 = k r^0, \quad \dot{a}^0 = k \dot{r}^0. \quad (3.81)$$

Кроме того, ось  $z$  гирорама в начальный момент должна совпадать с направлением к центру Земли.

Перейдем к рассмотрению возмущенного движения двухгироскопической вертикали. Изучим малые колебания оси  $z$  гирорама около положения относительного равновесия, если требования (3.73), (3.74), (3.76) и начальные условия выполнены не совсем точно, и, кроме того, имеют место возмущающие моменты, обусловленные несовершенством подвеса платформы и ее дебалансом.

Будем считать, что возмущенное положение трехгранника  $xuz$ , относительно трехгранника  $x_0y_0z_0$  определяется малыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в соответствии с таблицей направляющих косинусов (3.34). Тогда для  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  имеют место

формулы (3.35), для  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  — формулы (3.9), (3.36), (3.37), для  $F_x$ ,  $F_y$  — формулы (3.39).

Подставив перечисленные формулы в уравнения движения гироскопа (3.68) и введя в правые части возмущающие моменты  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$ , придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} & -(\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \omega_{x_0}\beta + \dot{\gamma}) 2B \sin \varepsilon = \\ & = a(F_{z_0}\alpha - F_{x_0}\gamma + F_{y_0}) + am[r(\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{x_0}\dot{r}] - \\ & \quad - am[\ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2)]\alpha + \\ & \quad + am[r(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{y_0}\dot{r}]\gamma + M_x^* + \Delta M_x, \\ & \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) = \\ & = a(F_{z_0}\beta - F_{y_0}\gamma - F_{x_0}) + am[r(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{y_0}\dot{r}] - \\ & \quad - am[\ddot{r} - r(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2)]\beta + \\ & \quad + am[r(-\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0}\omega_{z_0}) - 2\omega_{x_0}\dot{r}]\gamma + M_y^* + \Delta M_y, \\ & (\omega_{x_0} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta + \dot{\alpha}) 2B \sin \varepsilon = \Delta M_z, \\ & -(\omega_{y_0} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha + \dot{\beta}) 2B \cos \varepsilon = N. \end{aligned} \right\} (3.82)$$

Из третьего уравнения (3.82) видно, что величина  $\omega_{x_0}$  имеет первый порядок малости. Поэтому в остальных уравнениях ею можно пренебречь везде, где она множится на малые величины. Далее, по определению (3.73) моментов  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ , в правых частях уравнений (3.82) пропадают суммы  $aF_{y_0} + M_x^*$  и  $-aF_{x_0} + M_y^*$ . Наконец, в правых частях можно пренебречь величинами  $-aF_{x_0}\gamma$ ,  $-aF_{y_0}\gamma$ , также имеющими второй порядок малости, а  $F_{z_0}$  с этой же точностью заменить на  $-\frac{\mu m}{r^2}$ . С учетом указанных упрощений уравнения (3.82) приобретут вид:

$$\left. \begin{aligned} & -(\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\alpha + \dot{\gamma}) 2B \sin \varepsilon = -am \frac{\mu}{r^2} \alpha + \\ & + am[r(\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0}\omega_{z_0}) + 2\omega_{x_0}\dot{r}] - \\ & - am(\ddot{r} - r\omega_{y_0}^2)\alpha + am(r\dot{\omega}_{y_0} + 2\omega_{y_0}\dot{r})\gamma + \Delta M_x, \\ & \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) = -am \frac{\mu}{r^2} \beta + am[r(\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0}\omega_{z_0}) + \end{aligned} \right\} (3.83)$$

$$\left. \begin{aligned} + 2\omega_{y_0}\dot{r}] - am(\ddot{r} - r\omega_{y_0}^2)\beta + am\omega_{y_0}\omega_{z_0}\gamma + \Delta M_y, \\ (\omega_{x_0} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta + \dot{\alpha})2B\sin\varepsilon = \Delta M_z, \\ - (\omega_{y_0} + \omega_{z_0}\alpha + \dot{\beta})2B\cos\varepsilon = N. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Обозначим значение  $\varepsilon$ , соответствующее положению относительного равновесия, через  $\varepsilon_0$ , а отклонение от этого значения в возмущенном движении через  $\delta\varepsilon$ . Пусть условия (3.74), (3.76), (3.77) выполнены неточно, так что

$$a = k(r + \Delta r) + \Delta a, \quad (3.84)$$

а следовательно,

$$\left. \begin{aligned} 2B\sin\varepsilon = -2B\cos\varepsilon_0\delta\varepsilon + \\ + (amr + mr\Delta a + 2am\Delta r)\omega_{y_0} \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

и

$$\frac{N}{2B\cos\varepsilon} = -\omega_{y_0} + \frac{2B\cos\varepsilon_0\delta\varepsilon}{mar} + \frac{\Delta N}{2B\cos\varepsilon_0}.$$

В равенствах (3.84), (3.85)  $\Delta r$  — погрешность внешней информации о величине  $r$ . Наличие возмущающего момента  $\Delta N$  может быть объяснено, например, начальной деформацией пружины, соединяющей кожухи гироскопов.

Подставив соотношения (3.84), (3.85) в уравнения (3.83) и сохранив, как и раньше, лишь члены первого порядка малости, придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} - r \frac{d}{dt}(\omega_{y_0}\gamma) + \frac{\omega_{z_0}2B\cos\varepsilon_0\delta\varepsilon}{ma} + \frac{\mu}{r^2}\alpha + \ddot{r}\alpha - \\ - 2\dot{r}\omega_{y_0}\gamma = r\dot{\omega}_{x_0} + 2\dot{r}\omega_{x_0} + \Delta r\omega_{y_0}\omega_{z_0} + \frac{\Delta M_x}{am}, \\ - \frac{d}{dt}(2B\cos\varepsilon_0\delta\varepsilon) + am\dot{\omega}_{y_0}\Delta r + \\ + \omega_{y_0}(mr\dot{\Delta a} + 2am\dot{\Delta r} - m\dot{r}\Delta a) = \\ = -am\frac{\mu}{r^2}\beta + amr\omega_{x_0}\omega_{z_0} - am(\ddot{r} - r\omega_{y_0}^2)\beta + \\ + amr\omega_{y_0}\omega_{z_0}\gamma + \Delta M_y, \\ r\omega_{x_0}\omega_{y_0} + r\omega_{y_0}(\omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta + \dot{\alpha}) = \frac{\Delta M_z}{am}, \\ - (\omega_{z_0}\alpha + \dot{\beta}) = \frac{2B\cos\varepsilon_0\delta\varepsilon}{mar} + \frac{\Delta N}{2B\cos\varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.86)$$

Уравнения (3.86) и являются уравнениями малых колебаний двухгироскопической вертикали около положения относительного равновесия. Эти уравнения учитывают основные инструментальные погрешности элементов прибора и погрешность  $\Delta r$  внешней информации о величине  $r$ .

При

$$\omega_{x_0} = 0, \quad r = \text{const}, \quad \Delta r = \Delta a = 0, \quad \Delta M_x = \Delta M_y = \Delta M_z = \Delta N = 0 \quad (3.87)$$

уравнения (3.86) превращаются в уравнения, полученные А. Ю. Ишлинским \*). Легко видеть, что при выполнении условий (3.87) уравнения (3.86) имеют тривиальное решение

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta \varepsilon \equiv 0, \quad (3.88)$$

соответствующее положению относительного равновесия.

### 3.2.2. Гирогоризонткомпас Геккелера — Аншютца.

Перейдем к другой классической схеме маятниково-гироскопического прибора, являющегося моделью маятника Шулера, — к гирогоризонткомпасу Геккелера — Аншютца.

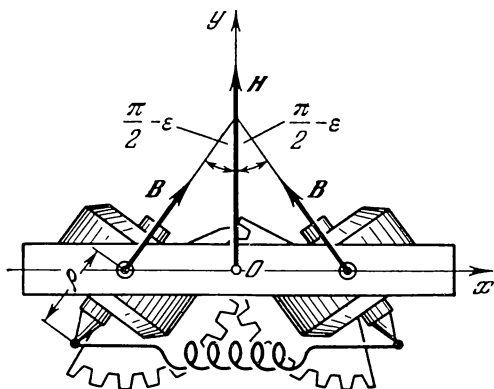


Рис. 3.6.

Чувствительный элемент гирогоризонткомпаса аналогичен чувствительному элементу рассмотренной выше двухгироскопической вертикали. Он представляет собой (рис. 3.6) со-

\*) См. сноску на стр. 196.

вокупность двух гироскопов, оси кожухов которых параллельны, а подшипники их цапф укреплены на одной и той же жесткой платформе. Платформа гироскопгоризонткомпаса может быть подвешена на объекте в трехступенном кардановом подвесе или окружена сферической оболочкой и погружена в жидкость, чем достигается большее совершенство подвеса. Возможны и другие способы ее подвеса. Характер подвеса для дальнейшего рассмотрения не имеет существенного значения, нужно лишь, чтобы он обеспечивал чувствительному элементу три степени свободы.

Свяжем с чувствительным элементом компаса правый ортогональный трехгранник *Oxyz*. Начало его совместим с центром подвеса платформы, ось *y* направим по нормали к платформе, ось *z* расположим в плоскости платформы и направим параллельно осям кожухов гироскопов. Тогда ось *x* будет пересекать оси кожухов и лежать в плоскости собственных кинетических моментов гироскопов.

Оси кожухов гироскопов связаны в рассматриваемом приборе зубчатой (рис. 3.6) или шарнирной передачей, так что повороты гироскопов вокруг осей кожухов совершаются в разные стороны на один и тот же по величине угол, который мы, как и в предыдущем случае, обозначим через  $\varepsilon$ . Если  $B$  — величина собственного кинетического момента каждого гироскопа, то их суммарный кинетический момент  $H$  равен по величине

$$H = 2B \sin \varepsilon \quad (3.89)$$

и направлен по оси *y*. Как и в случае двухгироскопической вертикали, кожухи гироскопов соединены пружиной. Центр масс чувствительного элемента расположен на отрицательной полуоси *z* на расстоянии  $a$  от центра подвеса.

Сравнение чувствительного элемента гироскопгоризонткомпаса с чувствительным элементом двухгироскопической вертикали (рис. 3.5) показывает, что они различаются тем, что в первом оси кожухов гироскопов лежат на оси *x* и параллельны оси *z*, а во втором они, наоборот, лежат на оси *z* и параллельны оси *x*. Кроме того, у двухгироскопической вертикали центр масс чувствительного элемента смещен в направлении, нормальном осям кожухов гироскопов, у гироскопгоризонткомпаса — вдоль осей кожухов.

В связи с отмеченным сходством чувствительных элементов движение гиригоризонткомпаса в рамках прецессионной теории совершенно аналогично движению двухгироскопической вертикали. В самом деле, в рамках прецессионной теории

$$K_x = 0, \quad K_y = H = 2B \sin \varepsilon, \quad K_z = 0. \quad (3.90)$$

Теорема о кинетическом моменте дает поэтому в проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  уравнения

$$\left. \begin{aligned} -\omega_z 2B \sin \varepsilon &= M_x, & \frac{d}{dt}(2B \sin \varepsilon) &= M_y, \\ \omega_x 2B \sin \varepsilon &= M_z, \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

к которым присоединяется уравнение

$$-\omega_y 2B \cos \varepsilon = N, \quad (3.92)$$

где  $N$  — момент, действующий вокруг осей кожухов.

Уравнения (3.91), (3.92) полностью идентичны уравнениям (3.65), (3.66), из которых мы исходили при анализе работы двухгироскопической вертикали. Дальнейшее рассмотрение уравнений (3.91), (3.92) приводит поэтому к соотношениям и формулам, уже полученным для двухгироскопической вертикали. Так, условиями относительного равновесия чувствительного элемента гиригоризонткомпаса будут соотношения (3.70), (3.73), (3.74), (3.76); уравнениями малых колебаний около положения относительного равновесия — уравнения (3.86).

Как уже сказано, условиями существования положения относительного равновесия гиригоризонткомпаса, в котором ось  $z$  его совпадает с направлением к центру Земли, будут условия (3.70), (3.73), (3.74), (3.76). В положении относительного равновесия ось  $y$  прибора нормальна, согласно соотношению (3.71), направлению абсолютной скорости движения объекта. Угол  $\gamma^*$ , который образует горизонтальная проекция абсолютной скорости объекта с направлением на восток (а следовательно, ось  $y$  с направлением на север), определяется формулой

$$\operatorname{tg} \gamma^* = \frac{V_N}{ru \cos \varphi + V_E}, \quad (3.93)$$

где  $\varphi$  — геоцентрическая широта объекта,  $V_E$  и  $V_N$  — восточная и северная составляющие его горизонтальной скорости

по отношению к Земле. Они выражаются через производные широты  $\varphi$  и долготы  $\lambda$  формулами

$$V_N = r\dot{\varphi}, \quad V_E = \frac{r\dot{\lambda}}{\cos \varphi}. \quad (3.94)$$

Отметим, что рассуждения ведутся здесь в геоцентрической системе координат, поэтому под плоскостью горизонта понимается плоскость, нормальная направлению к центру Земли.

Формула (3.93) совпадает с известной формулой так называемой *скоростной девиации гироскопического компаса* \*). Если известна горизонтальная составляющая скорости объекта относительно Земли

$$V = \sqrt{V_N^2 + V_E^2}, \quad (3.95)$$

то величину  $\gamma^*$  можно найти из равенства

$$\sin \gamma^* = \frac{V \cos \kappa}{ru \cos \varphi}, \quad (3.96)$$

где  $\kappa$  — так называемый *гироскопический курс*, т. е. угол между осью  $u$  и направлением вектора скорости. Величина  $V$  относительной скорости при движении морского судна может быть измерена, например, посредством лага; для летательных аппаратов, движущихся вблизи поверхности Земли, — посредством доплеровского измерителя относительной скорости.

Заметим, что при известной величине  $V$  при помощи гиригоризонткомпаса можно определить геоцентрические координаты  $\varphi$  и  $\lambda$ . В самом деле, из равенства (3.96) вытекает соотношение

$$4B^2 \sin^2 \epsilon = ma^2 r^2 [(u + \dot{\lambda})^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2], \quad (3.97)$$

которое вместе с равенством

$$V^2 = (\dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) r^2 \quad (3.98)$$

дает систему двух дифференциальных уравнений относительно  $\dot{\lambda}$  и  $\dot{\varphi}$ . Решение этой системы при заданных начальных условиях и позволяет найти  $\lambda$  и  $\varphi$ . Располагая вычислительными и интегрирующими устройствами, легко построить схему, которая моделировала бы уравнения (3.97), (3.98) и,

---

\*) Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, Гостехиздат, 1955.



таким образом, по известным  $\varepsilon$  и  $V$  непрерывно определяла бы  $\varphi$  и  $\lambda$ .

Если же величина  $V$  неизвестна, то определить координаты объекта только при помощи гиригоризонткомпаса нельзя. Это и понятно. Хотя трехгранник  $xuz$  в положении относительного равновесия является сопровождающим на сфере, окружающей Землю, известны лишь две проекции абсолютной угловой скорости этого трехгранника на его оси:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{2B \sin \varepsilon}{mar}. \quad (3.99)$$

Величина же  $\omega_z$  не определена условиями относительного равновесия. Последнее является следствием того, что в схемах гиригоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали гироскопы связаны геометрической связью (зубчатая передача, шарнирный механизм). Эта связь делает систему двух гироскопов равносильной одному гироскопу с переменным по величине кинетическим моментом, направленным по оси  $u$ . Для определения же направления к центру Земли в пространстве надо иметь, как было выяснено раньше, по меньшей мере два опорных направления, т. е. два геометрически не связанных (независимых) носителя кинетических моментов.

Задание скорости  $V$  равносильно по существу заданию  $\omega_z$ . Оно позволяет найти  $\gamma^*$  и, следовательно, доопределить положение трехгранника  $xuz$  по отношению к системе осей, жестко связанных с Землей. Движение (вращение) последней по отношению к неизменно ориентированным в пространстве осям  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  известно. Задание  $V$  доопределяет поэтому взаимное расположение трехгранников  $xuz$  и  $\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Отсюда и следует принципиальная равносильность задания  $V$  и  $\omega_z$ .

Разумеется, все сказанное выше по отношению к гиригоризонткомпасу в части определения курсовой поправки и уравнений (3.97), (3.98) целиком распространяется и на двухгироскопическую вертикаль, так как исходные уравнения их работы идентичны друг другу.

Здесь, однако, полезно отметить, что, несмотря на полную идентичность формы уравнений, описывающих работу обоих приборов, между ними есть существенное различие. Оно заключается в том, что одни и те же технологические погрешности изготовления чувствительного элемента могут привести в этих схемах к различным эффектам. Так, напри-

мер, дебаланс гироскопов вдоль осей кожухов приводит в схеме двухгироскопической вертикали к появлению в уравнениях колебаний около положения относительного равновесия (3.86) момента  $\Delta M_y$ , тогда как в схеме гиригоризонткомпаса этот же дебаланс ведет к моменту  $\Delta M_x$ . Указанное различие при практической реализации схем может привести к тому, что при одних и тех же технологических погрешностях изготовления чувствительного элемента двухгироскопическая вертикаль даст меньшую точность измерения курса, а гиригоризонткомпас — меньшую точность определения вертикали.

Сделаем еще несколько замечаний по поводу уравнений (3.86). Уравнения (3.86) определяют углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  отклонения трехгранника  $x_{0y}z$ , связанного с платформой чувствительного элемента гиригоризонткомпаса или двухгироскопической вертикали, от связанного с положением относительного равновесия трехгранника  $x_0y_0z_0$ . Из уравнений (3.86) находится также отклонение  $\delta\epsilon$  величины угла «разведения» гироскопов от ее значения  $\epsilon_0$ , соответствующего положению относительного равновесия.

Здесь полезно заметить, что если речь идет о такой точности курса, когда определяется курсовая поправка  $\gamma^*$ , то при определении ошибки курса надо к углу  $\gamma$  добавить ошибку вычисления курсовой поправки  $\gamma^*$ . Величина  $\gamma^*$  определяется по формулам (3.93), (3.96), (3.97). В этом случае используется дополнительная информация о величине  $V$  и в ходе вычисления  $\gamma^*$  находятся также географические координаты объекта. Для отыскания ошибки определения величины курсовой поправки  $\gamma^*$  надо, следовательно, проварьировать уравнения (3.93), (3.96), (3.97).

Отметим еще, что при технической реализации схемы гиригоризонткомпаса для морских судов удовлетворяют иногда не условию (3.76), а лишь условию (3.74), где  $r$  считают постоянной величиной, равной, например, среднему радиусу Земли. Не вводят также моменты  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ , компенсирующие действие на гиригоризонткомпас несферической составляющей поля тяготения Земли \*). Неточное выполнение условия (3.76)

---

\*) Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, Гостехиздат, 1955. Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, т. 2, ИЛ, 1952.

учтено уже в уравнениях (3.86) присутствием погрешностей  $\Delta r$  и  $\Delta \dot{r}$ . Ответ на вопрос, к чему приводит отсутствие моментов  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ , будет дан в следующей главе при рассмотрении возможных упрощений уравнений работы инерциальных систем и различных способов учета несферичности поля земного тяготения.

### § 3.3. Произвольная маятниково-гироскопическая система Шулера

**3.3.1. Условия существования положения относительно равновесия.** Рассмотрим некоторую произвольную механическую систему, установленную на движущемся объекте в некотором трехстепенном подвесе так, что центр масс  $c$  системы не совпадает с центром  $O$  подвеса. Расстояние между центром подвеса и центром масс системы обозначим через  $a$ . Система может включать в себя различные движущиеся по отношению друг к другу механические устройства, в том числе гироскопы. Поэтому такую систему можно назвать маятниково-гироскопической системой.

Свяжем с рассматриваемой системой трехгранник  $Oxuz$ , начало которого совместим с центром подвеса, а ось  $z$  направим вдоль линии, соединяющей центр масс с центром подвеса, в сторону от центра масс. Тогда координаты центра масс будут:

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = -a. \quad (3.100)$$

Найдем условия, при которых ось  $z$  системы в положении относительного равновесия будет совпадать с направлением к центру Земли.

Применив к системе в целом в ее движении около центра масс теорему о кинетическом моменте, будем иметь:

$$\frac{dK}{dt} = M, \quad (3.101)$$

где  $K$  — кинетический момент системы, а  $M$  — суммарный момент внешних сил.

Как и раньше, при подсчете суммарного момента будем считать действие сил тяготения сводящимся лишь к силе

$$F = m \operatorname{grad} V, \quad (3.102)$$

приложенной в центре масс и совпадающей по направлению с направлением вектора напряженности поля тяготения в точке  $O$ . Неоднородностью поля тяготения в объеме системы пренебрежем.

Добавив момент силы инерции переносного движения, а также некоторый искусственно сформированный момент  $M^*$ , получим из равенства (3.101)

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{a} \times \left( \mathbf{F} - m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) + M^*. \quad (3.103)$$

Здесь, как и раньше,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $O$  с началом в центре Земли  $O_1$ , а через  $\mathbf{a}$  обозначен радиус-вектор точки  $c$  с началом в точке  $O$ .

Обозначим трехгранник  $xuz$  в положении относительного равновесия через  $x_0 y_0 z_0$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F} &= F_{x_0} \mathbf{x}_0 + F_{y_0} \mathbf{y}_0 + F_{z_0} \mathbf{z}_0, \\ \mathbf{M}^* &= M_{x_0}^* \mathbf{x}_0 + M_{y_0}^* \mathbf{y}_0 + M_{z_0}^* \mathbf{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Так как в положении относительного равновесия вектор  $\mathbf{a}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{r}$ , то из соотношений (3.103), (3.104) находим:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} = & -\mathbf{a} \times m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + (M_{x_0}^* - a F_{y_0}) \mathbf{x}_0 + \\ & + (M_{y_0}^* + a F_{x_0}) \mathbf{y}_0 + M_{z_0}^* \mathbf{z}_0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Пусть

$$M_{y_0}^* = -a F_{x_0}, \quad M_{x_0}^* = a F_{y_0}, \quad M_{z_0}^* = 0. \quad (3.106)$$

С учетом равенств (3.106) равенство (3.105) принимает вид:

$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{a} \times m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (3.107)$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялось условие

$$\mathbf{a} = k \mathbf{r}, \quad (3.108)$$

т. е. чтобы расстояние от центра масс системы до центра подвеса менялось пропорционально изменению расстояния до центра Земли. Для этого, разумеется, в схему должна поступать информация о величине  $r$ .

Если условие (3.108) выполняется, то в положении относительного равновесия

$$\mathbf{a} = -k\mathbf{r}, \quad (3.109)$$

следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0, \quad (3.110)$$

и поэтому равенство (3.107) с учетом соотношения (3.109) может быть записано в таком виде:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = km \frac{d}{dt} \left( \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right). \quad (3.111)$$

Теперь его можно проинтегрировать, в результате чего получается:

$$\mathbf{K} - km\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{h}, \quad (3.112)$$

где  $\mathbf{h}$  — постоянный вектор.

Полагая теперь  $\mathbf{h} = 0$ , вводя обозначение  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  и проецируя равенство (3.112) на оси  $x_0, y_0, z_0$ , находим:

$$K_{x_0} + mav_{y_0} = 0, \quad K_{y_0} - mav_{x_0} = 0, \quad K_{z_0} = 0. \quad (3.113)$$

Условия (3.106), (3.108), (3.113) и являются необходимыми и достаточными условиями существования положения относительного равновесия произвольной маятниково-гироскопической системы, в котором ее ось совпадает с направлением к центру Земли \*).

К указанным условиям должны быть добавлены требования к начальным обстоятельствам движения маятниково-гироскопической системы. В начальный момент ось  $z$  должна совпадать с осью  $z_0$ . Скорость изменения ориентации оси  $z$  в начальный момент должна быть равна скорости изменения (из-за движения объекта) ориентации оси  $z_0$  сопровождающего трехгранника.

Условия (3.106), (3.108) совпадают с полученными ранее аналогичными условиями для маятника Шулера, двухгироскопической вертикали и гиригоризонткомпаса. Остальные усло-

---

\*) Условия (3.108), (3.113) несколько иным способом (применительно к гироскопу) получены Д. М. Климовым в работе «Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы» (см. Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 3, 1964).

вия для этих случаев легко получаются из равенств (3.113). Так, для физического маятника

$$K_{x_0} = A\omega_{x_0}, \quad K_{y_0} = A\omega_{y_0}, \quad K_{z_0} = C\omega_{z_0}.$$

Проекции абсолютной скорости центра подвеса связаны с проекциями абсолютной угловой скорости равенствами

$$v_{x_0} = r\omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -r\omega_{x_0}.$$

Теперь из равенств (3.113) получаем ранее найденные условия

$$A = mar, \quad C\omega_{z_0} = 0.$$

Для гирогоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали ось  $x$  направлена вдоль вектора скорости  $v$ , поэтому  $\omega_x = 0$ . Первое условие (3.113) удовлетворяется поэтому тождественно, если  $H_{x_0} = 0$ . Два остальных условия дают:

$$(mar - J_{y_0})\omega_{y_0} - H_{y_0} = 0, \quad J_{z_0}\omega_{z_0} + H_{z_0} = 0,$$

где  $J_{y_0}$  и  $J_{z_0}$  — моменты инерции платформы гиromаятниковой системы вокруг соответствующих осей.

Отсюда в рамках прецессионной теории, когда полагается  $J_{y_0} = J_{z_0} = 0$ , имеем:

$$H_{z_0} = 0, \quad H_{y_0} = mar\omega_{y_0},$$

что также совпадает с ранее полученными условиями.

**3.3.2. Возмущенное движение вблизи положения относительного равновесия.** Изучим движение оси  $z$  произвольной маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей условиям (3.106), (3.108), (3.113), около положения относительного равновесия в том случае, когда указанные условия выполнены неточно и неточно соблюдены начальные обстоятельства движения системы. Среди прочих погрешностей учтем специально погрешность  $\Delta r$  внешней информации о величине  $r$  расстояния до центра Земли, участвующей в формировании условия (3.108).

Рассмотрим сначала малые колебания оси  $z$  вблизи положения относительного равновесия.

Для вывода уравнений движения воспользуемся снова теоремой о кинетическом моменте. Варьируя уравнение (3.101)

в окрестности положения относительного равновесия, получаем:

$$\frac{d\delta K}{dt} = \delta M. \quad (3.114)$$

Найдем выражения вариаций  $\delta K$  и  $\delta M$ . Кинетический момент  $K$  должен быть сформирован согласно равенству (3.107). Поэтому

$$\delta K = km \delta r \times \frac{dr}{dt} + kmr \times \frac{d\delta r}{dt} + \Delta K, \quad (3.115)$$

где  $\Delta K$  — некоторая инструментальная погрешность,

$$r = rz_0, \quad \delta r = \delta x x_0 + \delta y y_0 + \Delta r z_0. \quad (3.116)$$

Чтобы получить  $\delta M$ , заметим, что вариация момента определяется вариацией  $\delta a$ , вариацией  $\delta M^*$  корректирующего момента и моментом  $\Delta M$  из-за инструментальных погрешностей. Поэтому, приняв во внимание выражение для  $M$ , стоящее в правой части уравнения (3.103), находим:

$$\delta M = \delta a \times \left( F - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) + \delta M^* + \Delta M. \quad (3.117)$$

В выражении (3.117) величина  $\delta a$  определена равенством

$$\delta a = -k \delta r - \Delta a z_0. \quad (3.118)$$

Первое слагаемое правой части вызвано погрешностью информации о величине  $r$  и отклонением оси  $z$  системы от направления к центру Земли, второе — инструментальной погрешностью  $\Delta a$  фиксирования величины расстояния  $a$  между центром подвеса и центром масс системы.

Дифференцируя соотношение (3.115) и замечая, что

$$km \frac{d\delta r}{dt} \times \frac{dr}{dt} + km \frac{dr}{dt} \times \frac{d\delta r}{dt} = 0, \quad (3.119)$$

находим:

$$\frac{d\delta K}{dt} = km \delta r \times \frac{d^2 r}{dt^2} + kmr \times \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{d\Delta K}{dt}. \quad (3.120)$$

Теперь надо подставить выражения (3.120) и (3.117) в уравнение (3.114). Однако прежде, чем это сделать, упростим несколько выражение (3.117) для вариации момента. Прежде всего пренебрежем по малости вариацией  $\delta M^*$  момента  $M^*$ , корректирующего действие горизонтальной соста-

вляющей поля тяготения. Далее, обратившись к первому равенству (3.104), получим:

$$\delta \mathbf{a} \times \mathbf{F} = \delta \mathbf{a} \times (F_{x_0} \mathbf{x}_0 + F_{y_0} \mathbf{y}_0 + F_{z_0} \mathbf{z}_0). \quad (3.121)$$

Пренебрегая в правой части произведением  $\delta \mathbf{a}$  на сумму первого и второго слагаемых в круглых скобках, которое имеет второй порядок малости, и замечая, что с этой же точностью можно положить

$$F_{z_0} = -\frac{\mu m}{r^2}, \quad (3.122)$$

получаем:

$$\delta \mathbf{M} = \delta \mathbf{a} \times \left( -\frac{\mu m}{r^2} \mathbf{z}_0 + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) + \Delta \mathbf{M}. \quad (3.123)$$

Вводя сюда выражение (3.118) для  $\delta \mathbf{a}$ , приходим к формуле

$$\delta \mathbf{M} = km \delta \mathbf{r} \times \left( \frac{\mu}{r^2} \mathbf{z}_0 + \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right) + m \Delta \mathbf{a} \mathbf{z}_0 \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \Delta \mathbf{M}. \quad (3.124)$$

Подставим теперь соотношения (3.124), (3.120) в уравнение (3.114). После приведения подобных членов и некоторых группировок, в которых используется первое равенство (3.116), получаем уравнение \*)

$$kmr \times \left( \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu \delta \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{d \Delta \mathbf{K}}{dt} + \Delta \mathbf{M} + m \Delta \mathbf{a} \mathbf{z}_0 \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}. \quad (3.125)$$

Это уравнение и является векторным уравнением малых колебаний около положения относительного равновесия произвольной маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей (с некоторыми инструментальными погрешностями) условиям (3.106), (3.108), (3.313).

Чтобы получить скалярные уравнения для  $\delta x$  и  $\delta y$ , надо подставить в уравнение (3.125) выражения  $\mathbf{r}$  и  $\delta \mathbf{r}$  из (3.116)

---

\*) Андреев В. Д., К теории маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей условиям Шулера. Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 6, 1965.



и спроектировать полученное соотношение на оси  $x_0$ ,  $y_0$ , приняв во внимание равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz_0}{dt} \cdot x_0 &= \omega_{y_0}, & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \cdot x_0 &= \dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0} \omega_{z_0}, \\ \frac{dz_0}{dt} \cdot y_0 &= -\omega_{x_0}, & \frac{d^2 z_0}{dt^2} \cdot y_0 &= -\dot{\omega}_{x_0} + \omega_{y_0} \omega_{z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (3.126)$$

где  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  на его оси.

Выполнив указанные подстановку и проектирование, после очевидных упрощений и группировок придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta x + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0}) \delta y - \\ - 2\omega_{z_0} \delta \dot{y} = -(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \\ + \frac{1}{ma} (-\Delta \dot{K}_{y_0} - \omega_{z_0} \Delta K_{x_0} + \omega_{x_0} \Delta K_{z_0}) + \frac{\Delta M_{y_0}}{ma} + \\ + \frac{\Delta a}{a} [r (\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0} \omega_{z_0}) + 2\dot{r} \omega_{y_0}], \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta y + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} + \dot{\omega}_{z_0}) \delta x + \\ + 2\omega_{z_0} \delta \dot{x} = -(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r + 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r} + \\ + \frac{1}{ma} (\Delta \dot{K}_{x_0} + \omega_{y_0} \Delta K_{z_0} - \omega_{z_0} \Delta K_{y_0}) - \frac{\Delta M_{x_0}}{ma} - \\ - \frac{\Delta a}{a} [r (\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0} \omega_{z_0}) + 2\dot{r} \omega_{x_0}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.127)$$

Эти уравнения описывают малые колебания маятниково-гироскопической системы Шулера около положения относительного равновесия.

Получим теперь уравнения возмущенного движения при конечных величинах отклонений оси  $z$  от положения относительного равновесия. Очевидно, здесь можно ограничиться получением этих уравнений при

$$\Delta a = 0, \quad \Delta K_{x_0} = \Delta K_{y_0} = \Delta K_{z_0} = 0, \quad \Delta M_{x_0} = \Delta M_{y_0} = 0, \quad (3.128)$$

так как правые части уравнений (3.127), соответствующие инструментальным погрешностям, перечисленным в (3.128), сохраняют свой вид и для конечных отклонений.

Проследив снова вывод уравнений (3.127), можно усмотреть, что однородное уравнение (3.125) является точным уравнением для возмущения  $\delta \mathbf{r}$ , если не говорить о пренебрежении вариацией несферической составляющей поля тяготения, которое было допущено при выводе указанного уравнения. Уравнения же (3.127)—уравнения первого приближения. Так получилось потому, что при проектировании векторного уравнения (3.125) на оси  $x_0, y_0$  в него в качестве вектора  $\delta \mathbf{r}$  был подставлен, согласно (3.116), вектор

$$\delta \mathbf{r} = \delta x x_0 + \delta y y_0 + \Delta r z_0. \quad (3.129)$$

Легко видеть, что равенство (3.129) справедливо лишь в первом приближении. Если говорить о точных уравнениях, то равенство (3.129) должно быть заменено на следующие:

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= \delta x x_0 + \delta y y_0 + \delta z z_0, \\ (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + 2r \delta z &= 2r \Delta r + (\Delta r)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.130)$$

При малых  $\delta x, \delta y, \delta z$ , когда их квадратами, как и квадратом  $\Delta r$ , можно пренебречь, из второго равенства (3.130) следует, что

$$\delta z = \Delta r, \quad (3.131)$$

и тогда первое равенство (3.130) переходит в равенство (3.129).

Проектируя векторное уравнение (3.125) на оси  $x_0, y_0$  с учетом равенств (3.126), (3.128) и определяя при этом  $\delta \mathbf{r}$  равенствами (3.130), приходим к следующей нелинейной системе скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta x + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0}) \delta y - \\ - 2\omega_{z_0} \delta \dot{y} + (\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \delta z + 2\omega_{y_0} \delta \dot{z} = 0, \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta y + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} + \dot{\omega}_{z_0}) \delta x + \\ + 2\omega_{z_0} \delta \dot{x} + (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \delta z - 2\omega_{x_0} \delta \dot{z} = 0, \\ (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + 2r \delta z = 2r \Delta r + (\Delta r)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.132)$$

При малых  $\delta x, \delta y, \delta z$ , когда можно считать справедливым равенство (3.131), нелинейные уравнения (3.132) переходят в линейные уравнения первого приближения (3.127).

### § 3.4. Аналогия маятниково-гироскопических систем Шулера с инерциальными системами с двумя ньютонометрами

**3.4.1. Сопоставление первой группы уравнений ошибок с уравнениями колебаний маятниковой системы около положения относительного равновесия.** Первая группа уравнений ошибок инерциальной системы с двумя ньютонометрами, ориентированными в плоскости горизонта, это уравнения (2.31), а в первом приближении — уравнения (2.28).

Сравним эти уравнения с уравнениями (3.132), (3.127) возмущенного движения произвольной маятниково-гироскопической системы Шулера около положения относительного равновесия, в котором ось  $z$  системы совпадает с направлением геоцентрической вертикали. Целью этого сравнения будет установление динамической аналогии между гиромаятниковыми системами Шулера и инерциальными системами с двумя ньютонометрами.

Начнем с уравнений первого приближения (2.28), (3.127). Левые части уравнений (2.28) и (3.127) полностью совпадают как по форме, так и по существу входящих сюда величин. В самом деле, как в уравнениях (2.28), так и в уравнениях (3.127)  $\delta x$ ,  $\delta y$  — проекции вектора  $\delta \mathbf{r}$  на оси  $x$ ,  $y$  ( $x_0$ ,  $y_0$ ) сопровождающего трехгранника  $x_0 y_0 z_0$ , ось  $z$  ( $z_0$ ) которого направлена вдоль  $\mathbf{r}$ . Величины  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  ( $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ ) — проекции абсолютной угловой скорости указанного трехгранника на его оси.

Таким образом, однородные уравнения ошибок первой группы инерциальной системы в первом приближении идентичны уравнениям свободных колебаний маятниково-гироскопической системы Шулера вблизи положения относительного равновесия. Можно сказать поэтому, что эти две механические системы динамически подобны при отсутствии инструментальных погрешностей.

Сравним теперь правые части уравнений (2.28) и (3.127). В правые части входят две группы слагаемых: первая содержит погрешность  $\Delta r (= \Delta h)$  внешней информации о величине расстояния до центра Земли (расстояния до ее поверхности), а вторая группа включает в себя инструментальные погрешности элементов схем. Слагаемые, содержащие  $\Delta r$  (и  $\Delta r$ ), в уравнениях (2.28) и (3.127) совпадают. Осталь-

ные члены различны. Этого следовало ожидать, так как члены, содержащие  $\Delta r$  и  $\Delta \dot{r}$ , имеют общее происхождение в обеих рассматриваемых системах уравнений. Происхождение остальных членов правых частей различно. Здесь полезно вспомнить, что форма правых частей как уравнений (2.28), так и уравнений (3.127) в значительной мере условна. Она зависит от того, какие конкретные инструментальные погрешности схемы учтены при выводе этих уравнений.

Выше проведено сравнение уравнений первого приближения. Обратившись к уравнениям (2.31), (2.132) для конечных отклонений, заключаем, что эти уравнения также совпадают. Поэтому инерциальные системы с двумя ньютонометрами и маятниково-гироскопические системы Шулера динамически подобны не только в малом, но и в большом.

Мы сравнили уравнения ошибок (2.28), (2.31) с уравнениями возмущенного движения произвольной маятниково-гироскопической системы Шулера. В § 3.1 были получены также уравнения (3.53), (3.63) возмущенного движения физического маятника Шулера и уравнения (3.86) возмущенного движения двухгироскопической вертикали и гиригоризонт-компас Геккелера — Аншютца. Так как эти устройства являются, очевидно, частными случаями произвольной маятниково-гироскопической системы, то уравнения (3.53), (3.63), (3.86) также должны сводиться к уравнениям (2.28), (3.127) или (2.31), (2.132). Убедимся в этом.

На первый взгляд левые части уравнений (3.53) не тождественны однородным уравнениям (2.28), (3.127). Однако если сделать в (3.53) замену переменных

$$\delta x = -r\beta, \quad \delta y = r\alpha, \quad (3.133)$$

то они примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta x + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0}) \delta y - \\ - 2\omega_{z_0} \delta \dot{y} = -(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \\ + \Delta C \omega_{x_0} \omega_{z_0} - \frac{\Delta A}{am} (\dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0} \omega_{z_0}) - \\ - \omega_{y_0} \left( \frac{r \Delta \dot{a}}{a} + \frac{\Delta \dot{A}}{ma} - \frac{\dot{r} \Delta a}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.134)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{z_0}^2 - \omega_{x_0}^2 \right) \delta y + (\omega_{y_0} \omega_{x_0} + \dot{\omega}_{z_0}) \delta x + \\ + 2\omega_{z_0} \delta\dot{x} = - (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r + 2\omega_{x_0} \Delta\dot{r} + \\ + \Delta C \omega_{y_0} \omega_{z_0} + \frac{\Delta A}{am} (\dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0} \omega_{z_0}) + \\ + \omega_{x_0} \left( \frac{r \Delta\dot{a}}{a} + \frac{\Delta\dot{A}}{am} - \frac{\dot{r} \Delta a}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.134)$$

Геометрический смысл замены переменных (3.133) очевиден. Левые части уравнений (3.134) полностью совпадают с левыми частями уравнений (2.28), (3.127). В правых частях всех трех систем уравнений совпадают слагаемые, содержащие  $\Delta r$  и  $\Delta\dot{r}$ . В правых частях уравнений (3.134) и (3.127) в точности совпадают также слагаемые, содержащие  $\Delta a$  и  $\Delta\dot{a}$ , в чем можно убедиться, воспользовавшись равенством  $A = mar$ . Легко сопоставляются также остальные слагаемые правых частей уравнений (3.134) и (3.127), если принять во внимание, что  $K_{x_0} = A\omega_{x_0}$ ,  $K_{y_0} = A\omega_{y_0}$ ,  $K_{z_0} = C\omega_{z_0}$ .

Рассмотрим уравнения (3.86) малых колебаний двухгироскопической вертикали (и гирогоризонткомпаса Геккелера — Аншютца). На первый взгляд, уравнения (3.86) и (3.127), (2.28) не имеют между собой ничего общего. Но более внимательный анализ показывает, что это не так.

Согласно двум последним уравнениям (3.86),

$$\left. \begin{aligned} \omega_{y_0} \gamma = \frac{\Delta M_z}{mar \omega_{y_0}} - \omega_{x_0} + \omega_{z_0} \beta - \dot{\alpha}, \\ 2B \cos \varepsilon_0 \dot{\varepsilon} = -mar (\omega_{z_0} \alpha + \dot{\beta}) - \frac{mar \Delta N}{2B \cos \varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.135)$$

Подставив выражения (3.135) в первые два уравнения (3.86), получим два связанных дифференциальных уравнения второго порядка относительно  $\alpha$  и  $\beta$ . Выполнив в этих уравнениях замену переменных (3.133), после некоторых преобразований приходим к системе

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta x - \dot{\omega}_{z_0} \delta y - 2\omega_{z_0} \delta\dot{y} = \\ = \frac{1}{ma} \frac{d}{dt} \left( \frac{mar \Delta N}{2B \cos \varepsilon_0} \right) - \dot{\omega}_{y_0} \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta\dot{r} + \\ + \omega_{y_0} \left( \frac{r \Delta\dot{a}}{a} - \frac{r \dot{\Delta a}}{a} \right) + \omega_{z_0} \frac{\Delta M_z}{am \omega_{y_0}} + \frac{\Delta M_y}{am}, \end{aligned} \right\} \quad (3.136)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{z_0}^2 \right) \delta y + \dot{\omega}_{z_0} \delta x + 2\omega_{z_0} \delta \dot{x} = \\ = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\Delta M_z}{ma \omega_{y_0}} \right) - \frac{\Delta N r \omega_{z_0}}{2B \cos \varepsilon_0} - \\ - \dot{r} \frac{\Delta M_z}{mar \omega_{y_0}} - \frac{\Delta M_x}{am} - \Delta r \omega_{y_0} \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.136)$$

Сравнивая однородные уравнения (3.136) и (3.127), (2.28), замечаем, что они совпадут, если в последних положить  $\omega_{x_0} = \omega_x = 0$ . Это равносильно записи их в проекциях на оси трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  ( $x y z$ ), ось  $x_0$  ( $x$ ) которого лежит в плоскости, содержащей вектор абсолютной скорости точки  $O$  и центр Земли  $O_1$ . Но таким же образом определен и трехгранник  $x_0 y_0 z_0$  в уравнениях (3.136). Поэтому однородная система (3.136) равносильна однородным уравнениям (3.127), (2.28). Легко сопоставляются также правые части указанных уравнений.

Уравнения (3.53), (3.86), (2.28), (3.127), которые сопоставлялись выше, это уравнения первого приближения. Для физического маятника Шулера были выведены также уравнения (3.63) свободного возмущенного движения для конечных отклонений. Установим равносильность этих уравнений с однородными уравнениями (2.31), (3.132), т. е. с уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \delta \dot{y} + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \delta \dot{z} = 0, \\ \delta\ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + \\ + 2\omega_z \delta \dot{x} + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - 2\omega_x \delta \dot{z} = 0, \\ (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 + 2r \delta z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

Для этого сделаем в однородных уравнениях (3.137) замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= -r \cos \alpha \sin \beta, \quad \delta y = r \sin \alpha, \\ \delta z &= r (\cos \alpha \cos \beta - 1). \end{aligned} \right\} \quad (3.138)$$

Геометрический смысл этой замены, как и замены (3.133), очевиден.

Подставляя (3.138) в третье уравнение (3.137), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно. Подстановка же выражений (3.138) в первые два уравнения (3.137) с одновременной подстановкой в них вместо  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  их значений (3.56) немедленно приводит к уравнениям (3.63).

Заметим, что можно установить также полную аналогию уравнений возмущенного движения двухгироскопической вертикали и гирогоризонткомаса Геккелера — Аншютца с уравнениями (3.137) не только для малых, но и для конечных отклонений. Чтобы получить уравнения движения гироскопической вертикали и гирокомаса при конечных отклонениях трехгранника  $x_{0y_0z_0}$  от трехгранника  $x_0y_0z_0$ , надо подставить в уравнения (3.68) не выражения (3.35), как это было при выводе уравнений (3.86) для малых отклонений, а выражения для  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , вытекающие из таблицы направляющих косинусов (3.33). После этого надо исключить  $\gamma$  и  $2B \sin \epsilon$ , причем последнее выражение не варьируется, как это было при переходе от уравнений (3.83) к уравнениям (3.86), а исключается целиком. Затем надо сделать замену переменных (3.138), после чего получатся уравнения (3.137).

Выше сопоставлялись между собой уравнения (2.31) и (3.63), (3.132). Эти уравнения являются точными уравнениями для возмущений  $\delta x$ ,  $\delta y$ , если полагать поле тяготения Земли сферическим. В процессе вывода уравнений ошибок (2.31) инерциальной системы с двумя ньютонометрами были отброшены по малости вариации несферической составляющей поля тяготения. При выводе уравнений (3.132) возмущенного движения маятниково-гироскопической системы Шулера были отброшены вариации моментов, компенсирующих действие несферической составляющей поля тяготения. Характер слагаемых, отброшенных при указанных упрощениях, одинаков как в случае уравнений (2.31), так и в случае уравнений (3.132). Можно убедиться, что сохранение вариации несферической составляющей поля тяготения приводит к появлению в этих уравнениях совершенно одинаковых дополнительных слагаемых. Так что аналогия между маятниковыми системами и инерциальными системами с двумя ньютонометрами по уравнениям ошибок сохраняется и в несферическом поле.

Несколько иначе обстоит дело с неоднородностью поля тяготения в объеме, занимаемом рассмотренными системами.

Так, при выводе уравнений относительного равновесия физического маятника Шулера и уравнений его колебаний около этого положения предполагалось, что действие на маятник притяжения Земли сводится лишь к результирующей силе, приложенной в центре масс маятника. Это предположение равносильно, очевидно, тому, что в объеме, занимаемом маятником, поле тяготения Земли считается однородным. В действительности действие сил притяжения приводится к силе и к результирующему моменту вокруг центра масс \*).

В сферическом поле результирующий момент появляется в том случае, если масса тела распределена несимметрично относительно направления, соединяющего центр масс с центром поля. Его величина зависит, кроме того, от геометрических размеров тела. Расчеты показывают \*\*), что если иметь в виду реализацию маятника Шулера как твердого тела, то моменты из-за неоднородности поля тяготения могут оказаться сравнимыми по величине с восстанавливающим моментом результирующей силы. Учет моментов от неоднородности поля тяготения в теории маятника Шулера приводит к аналогии с некоторыми из гравиметрических (не содержащих гироскопов) схем ориентации \*\*\*). Однако эта аналогия не имеет такого простого и цельного вида, как рассмотренная выше. Мы поэтому не будем ее здесь рассматривать подробно, ограничившись сделанными выше замечаниями.

Остановимся еще на следующем. Уравнения (2.28), (2.31) — лишь первая группа уравнений ошибок инерциальной системы. К ним добавляется вторая группа уравнений, характеризующая ошибки ориентации гироскопов системы.

В § 1 настоящей главы уже отмечалось, что одной маятниковой системы Шулера недостаточно для определения координат объекта. Эта система дает лишь направление

---

\*) Этот момент учитывается, например, при расчете либрационных движений Луны. Его приходится также учитывать при расчете движения искусственных спутников Земли вокруг их центров масс. См., например, Белецкий В. В., Движение искусственных спутников Земли относительно центра масс, Сб. «Искусственные спутники Земли», № 1, изд-во АН СССР, 1958.

\*\*) Hoch H., Das physikalische Pendel im radialsymmetrischen Erdgewichtskraftfeld, Zeitschrift für ang. Mathematik und Physik, Bd. 24, Heft 5/6, 1944.

\*\*\*). См. § 3.4 нашей книги «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.



геоцентрической вертикали. Для определения координат ее можно, например, дополнить гироскопами, реализующими неизменно ориентированный в пространстве трехгранник  $\xi_*\eta_*\zeta_*$ . Тогда углы, образованные осью  $z$  маятниковой системы с осями  $\xi_*\eta_*\zeta_*$  гироскопов, определяют (вместе с  $r$ ) координаты движущегося объекта. Следовательно, в полные ошибки определения координат объекта войдут тогда ошибки ориентации гироскопов, материализующих трехгранник  $\xi_*\eta_*\zeta_*$ , т. е. вторая группа уравнений ошибок инерциальной системы. Далее, маятниковая система без гироскопов (например, физический маятник Шулера) не позволяет задать опорное направление в плоскости горизонта. В маятниково-гироскопической системе это возможно (гирогоризонткомпас, например). В этом случае ошибка определения направления на север обуславливается ошибками гироскопов и вертикали, как и в инерциальной системе с двумя горизонтально расположенными ньютонометрами.

Из изложенного следует полная динамическая аналогия схемы навигации, основанной на маятниково-гироскопической системе Шулера, и схемы инерциальной навигации с двумя ньютонометрами. Принципиально это равносильные схемы. Хотя в маятниково-гироскопической системе отсутствуют ньютонометры как таковые, сам маятник, ось которого совпадает с направлением к центру Земли, представляет собой по существу двухкомпонентный ньютонометр, измеряющий горизонтальные ускорения. Интегрирование же ускорений осуществляется также самой маятниковой системой в результате ее движения.

**3.4.2. Достаточные условия устойчивости инерциальной системы с двумя ньютонометрами.** Установленная в п. 3.4.1 аналогия оказывается весьма важной для теории инерциальной навигации. Она связывает воедино два, казалось бы, существенно различных направления развития этой теории, благодаря чему становится возможным взаимное перенесение результатов, полученных в обоих направлениях.

На маятниково-гироскопические системы переносятся, в частности, все результаты, полученные в гл. 2 при исследовании устойчивости уравнений (2.28) и в ходе их решения. Становится более прозрачным и ряд известных из теории гироскопов и гироскопических систем результатов, полу-

ченных в работах Б. В. Булгакова, А. Ю. Ишлинского, Д. Р. Меркина, В. Н. Кошлякова \*). Так, например, А. Ю. Ишлинским \*\*) были проинтегрированы с помощью специальной комплекснозначной подстановки уравнения (3.86) в предположении, что  $\mu/r^3 \gg \omega_y^2, \omega_x^2$ ;  $r = \text{const}$ . Обратившись к уравнениям (2.28), замечаем сразу, что при  $r = \text{const}$ ,  $\omega_x = \omega_y = 0$  эти уравнения (однородные) заменой переменных (2.32) при

$$\vartheta = \int_0^t \omega_{z_0} dt \quad (3.139)$$

сводятся к немедленно интегрируемым уравнениям гармонических колебаний  $\delta \ddot{x}' + \omega_0^2 \delta x' = 0$ ,  $\delta \ddot{y}' + \omega_0^2 \delta y' = 0$ . Этот результат делает очевидным также вопрос о приводимости уравнений гиригоризонткомпаса и двухгироскопической вертикали \*\*\*) и вопрос о соотношении уравнений (3.86) и уравнений Геккелера в теории гироскопа \*\*\*\*).

С другой стороны, аналогия с гироскопическими системами позволяет решить важный вопрос о достаточных условиях устойчивости инерциальной системы с двумя горизонтально расположенными ньютонометрами при движении объекта по параллели.

Задача сводится здесь к исследованию нелинейных уравнений (2.31) или, так как правые части надо приравнять нулю, уравнений (3.137). При  $r = \text{const}$ ,  $\omega_{x_0} = 0$ ,  $\omega_{y_0} = \text{const}$ ,  $\omega_{z_0} = \text{const}$  (движение по параллели), переходя посредством замены (3.138) к уравнениям (3.63), получаем их в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + \\ + 2\dot{\alpha}(-\omega_{y_0}^2 \sin \alpha \cos^2 \beta + \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos^2 \beta) + \end{aligned} \right\} \quad (3.140)$$

\*) См. литературу в конце книги.

\*\*) См. сноску на стр. 196.

\*\*\*). Кошляков В. Н., О приводимости уравнений движения гиригоризонткомпаса. Прикладная математика и механика, т. XXV, вып. 5, 1961.

\*\*\*\*) Geckeler I. W., Kreiselmeechanik des Anschütz — Raumkompasses, Ingenieur Archiv, t. VI, Heft 4, Berlin, 1935.

$$\left. \begin{aligned}
 & + (\omega_0^2 - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta - \omega_{y_0}^2) \sin \alpha \cos \alpha - \\
 & - \omega_{y_0}^2 \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \\
 & + \omega_{y_0} \omega_{z_0} (2 \cos \alpha \cos \beta - 1) \sin \alpha \sin \beta = 0, \\
 \ddot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta + \\
 & + 2\dot{\beta} (\omega_{y_0} \sin \alpha \cos \beta - \omega_{z_0} \cos \alpha \cos \beta) + \\
 & + \left[ \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 (1 - \cos \alpha \cos \beta) - \omega_{z_0}^2 \cos \alpha \cos \beta \right] \sin \alpha + \\
 & + \omega_{y_0} \omega_{z_0} (\sin^2 \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \cos \beta + \cos \alpha) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.140)$$

Эти уравнения также нелинейны, но они имеют первый интеграл \*), облегчающий исследование. Для получения первого интеграла уравнений (3.140) достаточно умножить первое уравнение (3.140) на  $\dot{\beta}$ , второе на  $\dot{\alpha} \cos \beta$  и сложить. Интегрирование суммы дает:

$$\begin{aligned}
 V = & (\dot{\alpha} \cos \beta)^2 + \dot{\beta}^2 - 2\omega_0^2 \cos \alpha \cos \beta + \\
 & + \omega_{z_0}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \omega_{y_0}^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta) + \\
 & + 2\omega_{y_0} \omega_{z_0} (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta) = \text{const.} \quad (3.141)
 \end{aligned}$$

Обозначим через  $V^0$  значение функции  $V$  при  $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \alpha = \beta = 0$ . Очевидно,

$$V^0 = -2\omega_0^2 + 2\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2. \quad (3.142)$$

Построим функцию

$$\begin{aligned}
 W = V - V^0 = & (\dot{\alpha} \cos \beta)^2 + \dot{\beta}^2 - 2\omega_0^2 (\cos \alpha \cos \beta - 1) + \\
 & + \omega_{z_0}^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 1) + \omega_{y_0}^2 (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta - 2) + \\
 & + 2\omega_{y_0} \omega_{z_0} (\sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta). \quad (3.143)
 \end{aligned}$$

Полная производная функции  $W$  по времени в силу уравнений (3.140)

$$\frac{dW}{dt} = 0. \quad (3.144)$$

---

\*) Андреев В. Д., Об ошибках систем инерциальной навигации. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1964.

Поэтому достаточным условием устойчивости уравнений (3.140) по Ляпунову будет знакоопределенность функции  $W$ .

Разложим функцию  $W$  в ряд по степеням  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Это разложение начинается с квадратичных членов

$$W = \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \alpha^2(\omega_0^2 - \omega_{z_0}^2) + \beta^2(\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_{z_0}^2) + \dots \quad (3.145)$$

Применяя к квадратичной форме, стоящей в правой части равенства (3.145), критерий Сильвестра, находим, что условием ее положительной определенности будет неравенство

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_{z_0}^2 > 0. \quad (3.146)$$

Это условие является, таким образом, достаточным условием устойчивости положения относительного равновесия маятниково-гироскопической системы Шулера в рассматриваемом случае движения объекта и достаточным условием устойчивости инерциальной системы с двумя ньютонометрами. Оно совпадает с условием (2.49), полученным ранее при исследовании уравнений первого приближения \*).

**3.4.3. О демпфировании колебаний маятниково-гироскопической системы Шулера.** При выполнении условия (3.146) возмущенное движение маятниково-гироскопической системы Шулера устойчиво по Ляпунову. Но это условие не обеспечивает асимптотической устойчивости. Поэтому возникает вопрос, можно ли сделать положение относительного равновесия маятника Шулера асимптотически устойчивым.

Очевидно, что для этого надо было бы ввести, например, в уравнения (3.53) полную диссипацию, т. е. добавить в левые части этих уравнений слагаемые  $h\dot{\alpha}$ ,  $h\dot{\beta}$ . Однако сформировать эти слагаемые, не прибегая к внешней информации, мы не можем. Нам неизвестны  $\alpha$ ,  $\beta$  и скорости их изменения  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , поэтому нельзя сформировать и приложить к маятнику моменты, пропорциональные этим величинам. Вообще говоря, для демпфирования колебаний маятника даже не обязательно знать величины  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ . Достаточно было бы знать  $\text{sign } \dot{\alpha}$  и  $\text{sign } \dot{\beta}$ . Но и их также неоткуда извлечь. Если не

---

\*) В применении к гирокомпасу это условие было найдено Д. Р. Меркиным в работе «Об устойчивости движения гироскопов» (Прикладная математика и механика, т. XXV, вып. 6, 1961).

использовать внешнюю информацию, то можно лишь говорить о демпфирующих моментах, пропорциональных не относительным скоростям  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ , а абсолютным скоростям вращения маятника  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . Такого рода моменты появляются, если предположить, что, например, в опоре маятника существует вязкое трение.

Рассмотрим малые колебания маятника около положения относительного равновесия в этом случае, ограничившись движением точки опоры с постоянной скоростью по дуге большого круга неизменно ориентированной сферы, концентрической с Землей.

Для такого движения можно принять

$$\omega_{x_0} = \omega_{z_0} = 0, \quad r = \text{const.} \quad (3.147)$$

Из уравнений (3.41), полагая  $A = mar$  и добавляя в правые части моменты вязкого трения  $-k_x\omega_x$ ,  $-k_y\omega_y$ ,  $-k_z\omega_z$ , получаем (инструментальные погрешности отсутствуют):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{\mu}{r^3} \alpha + k_x \dot{\alpha} - k_x \omega_{y_0} \dot{\gamma} + \\ + \frac{C}{mar} (-\omega_{y_0}^2 \alpha + \omega_{y_0} \dot{\gamma}) = 0, \\ \ddot{\beta} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) \beta + k_y \dot{\beta} + k_y \omega_{y_0} = 0, \\ C \frac{d}{dt} (-\omega_{y_0} \alpha + \dot{\gamma}) + k_z (-\omega_{y_0} \alpha + \dot{\gamma}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

Если

$$C \neq 0, \quad (3.149)$$

то третье уравнение (3.148) интегрируется. Из него находим:

$$-\omega_{y_0} \alpha + \dot{\gamma} = (-\omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \dot{\gamma}^0) \exp\left(-\frac{k_z}{C} t\right), \quad (3.150)$$

после чего уравнения (3.148) превращаются в такие:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + k_x \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - k_x \omega_{y_0} \dot{\gamma} = \\ = -\frac{C \omega_{y_0}}{mar} (-\omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \dot{\gamma}^0) \exp\left(-\frac{k_z t}{C}\right), \\ \ddot{\beta} + k_y \dot{\beta} + (\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2) \beta = -k_y \omega_{y_0}, \\ \dot{\gamma} - \omega_{y_0} \alpha = (-\omega_{y_0}^0 \alpha^0 + \dot{\gamma}^0) \exp\left(-\frac{k_z}{C} t\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.151)$$

Здесь, как и раньше, через  $\omega_0^2$  обозначена величина  $\mu/r^3$ . Если, наоборот,

$$C = 0, \quad (3.152)$$

то из третьего уравнения (3.148) следует, что

$$\dot{\gamma} - \omega_{y_0} \alpha = 0. \quad (3.153)$$

Тогда уравнения системы (3.148) переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + k_x \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - k_x \omega_{y_0} \gamma &= 0, \\ \ddot{\beta} + k_y \dot{\beta} + (\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2) \beta &= -k_y \omega_{y_0} \gamma, \\ \dot{\gamma} - \omega_{y_0} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.154)$$

Второе уравнение (3.151) совпадает со вторым уравнением (3.154). И то и другое решается независимо от остальных уравнений. Уравнению

$$\ddot{\beta} + (\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2) \beta + k_y \dot{\beta} = -k_y \omega_{y_0} \quad (3.155)$$

удовлетворяет частное решение

$$\tilde{\beta} = -\frac{k_y \omega_{y_0}}{\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2}. \quad (3.156)$$

При  $\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2 > 0$  корни характеристического уравнения (3.155) имеют отрицательные вещественные части и по углу  $\beta$  имеет место, следовательно, асимптотическая устойчивость. С течением времени решение однородного уравнения затухает, остается лишь постоянное отклонение  $\tilde{\beta}$ .

Однородные системы первого и третьего уравнений (3.151), (3.154) совпадают и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + k_x \dot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha - k_x \omega_{y_0} \gamma &= 0, \\ \dot{\gamma} - \omega_{y_0} \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.157)$$

Характеристическое уравнение системы (3.157) таково

$$p^3 + k_x p^2 + \omega_0^2 p + k_x \omega_{y_0}^2 = 0. \quad (3.158)$$

Применив к нему критерий Гурвица, находим, что при выполнении условия  $\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2 > 0$  корни уравнения (3.158)

имеют отрицательные вещественные части, стало быть и здесь достигается асимптотическая устойчивость.

Первое и третье уравнения (3.154) однородные. Первое и третье уравнения (3.151) имеют правые части. Однако эти правые части со временем исчезают, поэтому с течением времени решения систем (3.154) и (3.151) приближаются друг к другу и при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к значениям

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0, \quad \beta = \tilde{\beta} = -\frac{k_y \omega_{y_0}}{\omega_0^2 - \omega_{y_0}^2}. \quad (3.159)$$

Таким образом, демпфирование колебаний маятника Шулера приводит к появлению скоростной девиации  $\tilde{\beta}$ . Устранение этой девиации возможно лишь при наличии дополнительной информации о скорости движения точки опоры маятника. В дальнейшем мы увидим, что точно таким же образом обстоит дело и при введении демпфирования в первую группу уравнений ошибок инерциальной системы.

## **Об упрощениях уравнений идеальной и возмущенной работы инерциальной системы с двумя ньютонометрами**

### **§ 4.1. Общие соображения**

Уравнения идеальной работы инерциальной системы с двумя ньютонометрами, выведенные в гл. 3, представляют собой прямое следствие основного уравнения инерциальной навигации (1.3). При выводе этих уравнений не использовались какие-либо упрощающие предположения, кроме уже использованных при выводе основного уравнения, причем упрощения, принятые при получении уравнения (1.3), лежат далеко за рамками тех точностей, которые могут быть предъявлены к инерциальным системам \*).

Вид уравнений идеальной работы определяется выбором координатной сетки, в которой осуществляется навигация движущегося объекта, и принятой ориентацией осей чувствительности гироскопов и ньютонометров. Правые части этих уравнений являются функциями показаний ньютонометров, гироскопических чувствительных элементов, координат объекта и скоростей их изменения.

В правые части входят также параметры, характеризующие форму Земли, ее движение и гравитационное поле.

Если иметь в виду некоторый достаточно определенный класс объектов, для которого предназначается инерциальная система, и заданные требования к ее точности, то может случиться, что те или иные члены правых частей уравнений идеальной работы окажутся малыми. Тогда их точное формирование может оказаться ненужным. Появляется возможность упрощения уравнений идеальной работы. Кроме того, если задан вид программных траекторий объекта, то надлежащим выбором координатной сетки и ориентации ньютонометров можно добиться, чтобы из уравнений идеальной работы выпали те или иные соотношения или их отдельные части.

---

\*) См. нашу книгу «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.



Упрощения уравнений идеальной работы могут заключаться не только в том, чтобы изъять из них или пренебречь в них отдельными слагаемыми и соотношениями. Важна также форма представления оставшихся соотношений и слагаемых. При удачном выборе этой формы приборная реализация схемы может быть в ряде случаев существенно облегчена.

Важность рассматриваемого вопроса очевидна. Его решение непосредственно связано с упрощением технической реализации схемы инерциальной навигации, уменьшением количества образующих ее элементов и устройств, упрощением ее эксплуатации и повышением надежности работы.

Следует заметить, что рассматриваемая задача тесно связана с проектированием инерциальной системы и, в частности, с тем выбором элементов и технических средств, которыми при этом располагают. Поэтому сколько-нибудь полного теоретического анализа возникающих здесь возможностей сделать, по-видимому, нельзя. Можно рассмотреть лишь основные, наиболее типичные из этих возможностей на примере широко используемых схем.

Во всяком случае, мы в дальнейшем ограничимся схемами, определяющими ортодромические или географические координаты объекта.

Инерциальную систему будем представлять себе в виде управляемой гирорамы, ось  $z$  которой в невозмущенном положении совпадает либо с направлением радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  из центра Земли в центр подвеса гирорамы (т. е. с геоцентрической вертикалью), либо с направлением нормали к уровенному эллипсоиду, проведенной через центр подвеса гирорамы (на поверхности Земли — это географическая вертикаль). Оси чувствительности ньютонометров  $n_x$ ,  $n_y$  будем считать совмещенными с осями  $x$  и  $y$  гирорамы. Ньютонометр вдоль оси  $z$  отсутствует, но в системе используется информация о величине  $r$  расстояния до центра Земли или, точнее, о величине  $h$  расстояния до ее поверхности. Величина  $h$  определяется с помощью высотомера.

В последующих параграфах настоящей главы будут рассмотрены прежде всего различные представления и упрощения уравнений идеальной работы, связанные с той или иной ориентацией осей  $x$ ,  $y$  (и ньютонометров  $n_x$ ,  $n_y$ ) в плоскости геоцентрического или географического горизонта. Далее будут

исследованы упрощения, вытекающие из малости эксцентриситета Земли, а также упрощения, обусловленные малостью отличия поля тяготения Земли от сферического. Наконец, будет дан анализ упрощений, возможных при задании тех или иных ограничительных предположений о характере допустимых траекторий движения объекта. Речь идет о таких характеристиках объекта, как скорость, дальность, время движения, высота траектории над поверхностью Земли, близость траектории к плоскости некоторой ортодромии.

Выше было уже отмечено, что возможность тех или иных упрощений тесно связана с заданными требованиями к точности работы инерциальной системы. Следовательно, при анализе последствий, к которым приводит то или иное упрощение уравнений идеальной работы, необходимо исследование уравнений ошибок. Тем более, что при изменении (упрощении) уравнений идеальной работы могут измениться и уравнения ошибок (и не всегда, кстати, в сторону их упрощения).

Здесь уместно заметить, что допустимы упрощения уравнений ошибок, не связанные с упрощением уравнений идеальной работы, а вытекающие из особенностей движения объекта. Некоторыми из таких упрощений мы уже пользовались (плоское движение, медленное движение объекта, кеплерово движение), ниже будут указаны и некоторые другие из имеющихся здесь возможностей.

## **§ 4.2. Упрощения в инерциальной системе, определяющей ортодромические координаты объекта**

**4.2.1. Точные уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок.** Если ньютонометры инерциальной системы расположены в плоскости геоцентрического горизонта и ориентированы по осям ортодромического сопровождающего трехгранника, то уравнениями идеальной работы будут уравнения (2.23), а уравнениями ошибок (в проекциях на оси ортодромического сопровождающего трехгранника) — уравнения (2.28), (1.96), (1.97), (1.118).

Уравнения (2.23), (2.28), (1.96), (1.97), (1.118) были получены как частный случай из общих уравнений инерциальной навигации в криволинейных координатах. Прежде чем переходить к упрощениям уравнений идеальной работы для рассматриваемого случая и соответствующим уравнениям ошибок.

целесообразно вывести точные уравнения идеальной работы, исходя непосредственно из рассматриваемой схемы. Это позволит лучше понять структуру указанных уравнений и истоки появления в них тех или иных членов, что может оказаться полезным при анализе возможных упрощений.

Чтобы рассмотреть вопрос по возможности полнее, получим уравнения идеальной работы для несколько более общего случая, чем уравнения (2.23), а именно для случая произвольной ориентации ньютонометров  $n_x$  и  $n_y$  в плоскости геоцентрического горизонта (при сохранении взаимной перпендикулярности осей чувствительности этих ньютонометров).

Выпишем основные соотношения, характеризующие кинематику сопровождающего трехгранника ортодромической координатной сетки и произвольно ориентированного в азимуте сопровождающего трехгранника на сфере, концентрической с Землей.

Пусть, как и ранее, основной системой отсчета будет трехгранник  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , начало которого совмещено с центром Земли, а ориентация осей неизменна. Связанный с Землей трехгранник обозначим, как всегда, через  $O_1\xi\eta\zeta$ . Его ось  $\zeta$  направим по оси вращения Земли (совпадающей с осью ее симметрии), а ось  $\xi$  расположим в плоскости гринвичского меридиана. Если принять, что трехгранники  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  и  $O_1\xi\eta\zeta$  совпадают в начальный момент (это не уменьшает общности), то их взаимное расположение в дальнейшем будет характеризоваться таблицей направляющих косинусов (1.7).

Ортодромический трехгранник  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ , занимающий некоторое произвольное, но неизменное положение по отношению к Земле, определен относительно трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  направляющими косинусами  $\beta_{ij}$  согласно таблице (1.16). Элементы этой таблицы постоянны и могут быть выражены\*), например, через геоцентрические (или географические) координаты двух заданных точек на земной поверхности, лежащих в плоскости  $O_1\xi'\eta'$  трехгранника  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ .

Положение произвольной точки  $O$  определим относительно ортодромического трехгранника  $O_1\xi'\eta'\zeta'$  ортодромическими координатами (см. рис. 1.5): расстоянием  $r$  от центра Земли  $O_1$ , углом  $z$  между направлением  $O_1O$  и плоскостью  $O_1\xi'\eta'$  и

---

\*) См. Приложение II.

углом  $S$  между осью  $\xi'$  и проекцией направления  $O_1O$  на плоскость  $O_1\xi'\eta'$ .

Введем сопровождающий трехгранник  $x_3y_3z_3$  ортодромической координатной сетки (см. рис. 1.5). Начало его поместим в точку  $O$ , ось  $z_3$  направим вдоль линии  $O_1O$ , ось  $y_3$  направим нормально оси  $z_3$  и расположим ее в плоскости, содержащей точку  $O$  и ось  $\xi'$ , а ось  $x_3$  пусть дополняет оси  $y_3$  и  $z_3$  до правой ортогональной тройки. Взаимное расположение трехгранников  $\xi'\eta'\zeta'$  и  $x_3y_3z_3$  задается следующей таблицей направляющих косинусов:

	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$\xi'$	$-\sin S$	$-\sin z \cos S$	$\cos z \cos S$
$\eta'$	$\cos S$	$-\sin z \sin S$	$\cos z \sin S$
$\zeta'$	$0$	$\cos z$	$\sin z$

(4.1)

Вместе с таблицами (1.16) и (1.7) эта таблица определяет ориентацию трехгранника  $x_3y_3z_3$  в системах отсчета  $O_1\xi\eta\zeta$  и  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ .

Положение точки  $O$  относительно связанного с Землей трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$  определим (см. рис. 1.4) геоцентрическими координатами  $r$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , задав их по отношению к трехграннику  $O_1\xi\eta\zeta$  таким же образом, как координаты  $r$ ,  $z$ ,  $S$  по отношению к трехграннику  $O_1\xi'\eta'\zeta'$ . Тогда, если обозначить через  $x_2y_2z_2$  сопровождающий трехгранник геоцентрической координатной сетки, направляющие косинусы его осей с осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  составят таблицу

	$x_2$	$y_2$	$z_2$
$\xi$	$-\sin \lambda$	$-\sin \varphi \cos \lambda$	$\cos \varphi \cos \lambda$
$\eta$	$\cos \lambda$	$-\sin \varphi \sin \lambda$	$\cos \varphi \sin \lambda$
$\zeta$	$0$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$

(4.2)

аналогичную таблице (4.1).

Так как оси  $z_3$  и  $z_2$  трехгранников  $x_3y_3z_3$  и  $x_2y_2z_2$  совпадают, из таблиц (4.1), (4.2), (1.16), получаются равенства:

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \cos \lambda &= \beta_{11} \cos z \cos S + \beta_{12} \cos z \sin S + \beta_{13} \sin z, \\ \cos \varphi \sin \lambda &= \beta_{21} \cos z \cos S + \beta_{22} \cos z \sin S + \beta_{23} \sin z, \\ \sin \varphi &= \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z, \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

связывающие геоцентрические и ортодромические координаты.

Взаимное расположение трехгранников  $x_2y_2z_2$  и  $x_3y_3z_3$  устанавливается таблицей (1.19), где угол  $\psi$  задан равенствами (1.20), которые можно получить из таблиц направляющих косинусов (4.1), (4.2), (1.16).

Если оси  $\xi', \eta', \zeta'$  и  $\xi, \eta, \zeta$  совпадают, то ортодромические координаты  $r, S, z$  превращаются в геоцентрические  $r, \lambda, \varphi$ . В самом деле, тогда в таблице (1.16)  $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = 1$ , а остальные ее элементы равны нулю. Из соотношений (4.3) в этом случае получаются равенства

$$\cos \varphi \cos \lambda = \cos z \cos S,$$

$$\cos \varphi \sin \lambda = \cos z \sin S,$$

$$\sin \varphi = \sin z.$$

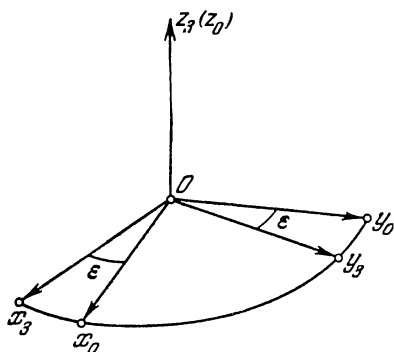


Рис. 4.1.

Кроме того, согласно равенствам (1.20), тогда  $\psi = 0$ , и трехгранники  $x_2y_2z_2$  и  $x_3y_3z_3$  также совпадают.

Наряду с сопровождающими трехгранниками  $x_2y_2z_2$  и  $x_3y_3z_3$  геоцентрической и ортодромической координатных сеток введем некоторый произвольный сопровождающий трехгранник  $Ox_0y_0z_0$  на сфере, концентрической с Землей, задав его положение (рис. 4.1) по отношению к трехграннику  $x_3y_3z_3$  следующей таблицей направляющих косинусов:

	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$x_0$	$\cos \epsilon$	$\sin \epsilon$	0
$y_0$	$-\sin \epsilon$	$\cos \epsilon$	0
$z_0$	0	0	1.

(4.4)

Инерциальная система с двумя ньютонометрами в рассматриваемом случае представляет собой (рис. 4.2) платформу (трехгранник  $Ox_0y_0z_0$ ), связанную с объектом трехстепенным кардановым подвесом (на рис. 4.2 не показан). На платформе установлены в двухстепенных подвесах три гироскопа  $G_1, G_2, G_3$  с кинетическими моментами  $H_1, H_2, H_3$ . По осям прецессий гироскопов установлены моментные датчики, при по-

мощи которых создаются моменты  $M_x^1$ ,  $M_y^2$ ,  $M_x^3$ . Платформа с гироскопами является, таким образом, управляемой пространственной гирорамой. Управляющие моменты  $M_x^1$ ,  $M_y^2$ ,  $M_x^3$  заставляют ее прецессировать с угловыми скоростями:

$$\omega_x = -\frac{M_y^2}{H_2}, \quad \omega_y = \frac{M_x^1}{H_1}, \quad \omega_z = \frac{M_x^3}{H_3}. \quad (4.5)$$

С платформой гирорамы жестко связаны два ньютонометра  $n_x$  и  $n_y$ , оси чувствительности которых направлены вдоль осей  $x$  и  $y$  платформы. Совместив трехгранники  $xuz$

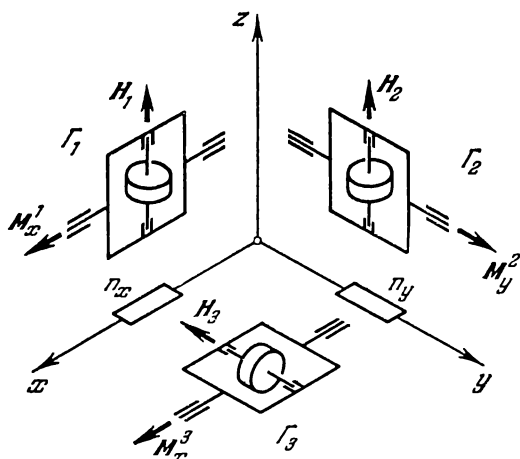


Рис. 4.2.

и  $x_0y_0z_0$  в начальный момент, можно по показаниям ньютонометров сформировать управляющие моменты  $M_x^1$ ,  $M_y^2$ ,  $M_x^3$  так, что при произвольном движении объекта всегда будут тождественно выполняться равенства

$$\omega_x \equiv \omega_{x_0}, \quad \omega_y \equiv \omega_{y_0}, \quad \omega_z \equiv \omega_{z_0}, \quad (4.6)$$

и трехгранники окажутся совмещенными во все время движения.

Найдем выражения  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  через показания ньютонометров. Согласно основному уравнению (1.3) инерциальной навигации, показания ньютонометров равны:

$$n_{x_0} = \omega_{x_0} - g_{x_0}, \quad n_{y_0} = \omega_{y_0} - g_{y_0}, \quad (4.7)$$

где  $w_{x_0}$ ,  $w_{y_0}$  — проекции абсолютного ускорения\*) точки  $O$ , в которой расположены чувствительные массы ньютонометров, на оси  $x_0$ ,  $y_0$ .

Дифференцирование вектора  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  в подвижной системе координат дает известные формулы Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} w_{x_0} &= \dot{v}_{x_0} + \omega_{y_0} v_{z_0} - \omega_{z_0} v_{y_0}, \\ w_{y_0} &= \dot{v}_{y_0} + \omega_{z_0} v_{x_0} - \omega_{x_0} v_{z_0}, \\ w_{z_0} &= \dot{v}_{z_0} + \omega_{x_0} v_{y_0} - \omega_{y_0} v_{x_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

где точкой, как всегда, обозначено дифференцирование по времени.

Рассмотрим теперь некоторую точку  $P$ , положение которой в трехграннике  $Ox_0y_0z_0$  характеризуется координатами  $x_0^P$ ,  $y_0^P$ ,  $z_0^P$ . В соответствии с векторным равенством

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

проекции  $v_{x_0}^P$ ,  $v_{y_0}^P$ ,  $v_{z_0}^P$  абсолютной скорости движения точки  $P$  выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0}^P &= \dot{x}_0^P + v_{x_0} + \omega_{y_0} z_0^P - \omega_{z_0} y_0^P, \\ v_{y_0}^P &= \dot{y}_0^P + v_{y_0} + \omega_{z_0} x_0^P - \omega_{x_0} z_0^P, \\ v_{z_0}^P &= \dot{z}_0^P + v_{z_0} + \omega_{x_0} y_0^P - \omega_{y_0} x_0^P. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Здесь  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $v_{z_0}$  — проекции абсолютной скорости начала трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  (точки  $O$ ), входящие в формулы (4.8).

Возьмем в качестве точки  $P$  центр Земли  $O_1$ . Тогда

$$x_0^P = 0, \quad y_0^P = 0, \quad z_0^P = -r. \quad (4.10)$$

Так как точка  $O_1$  неподвижна относительно трехгранника  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  (а скорости и ускорения берутся именно в этой системе отсчета), то для нее

$$v_{x_0}^P = v_{y_0}^P = v_{z_0}^P = 0. \quad (4.11)$$

---

\*) Точнее, ускорения в системе отсчета  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , в которой записано уравнение (1.3).

Подставляя равенства (4.10), (4.11) в формулы (4.9), находим:

$$v_{x_0} = r\omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -r\omega_{x_0}, \quad v_{z_0} = \dot{r}. \quad (4.12)$$

Из соотношений (4.7), (4.8), (4.12) получаем:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + \omega_{z_0} v_{y_0} - \dot{r}\omega_{y_0} + g_{x_0}) dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t (n_{y_0} + \dot{r}\omega_{x_0} - \omega_{z_0} v_{x_0} + g_{y_0}) dt + v_{y_0}^0, \\ \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{r}, \quad \omega_{y_0} = \frac{v_{x_0}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Продолжая составление уравнений идеальной работы, выразим проекции  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0y_0z_0$  на его оси через ортодромические координаты  $z$ ,  $S$  и их производные  $\dot{z}$ ,  $\dot{S}$ . По определению трехгранников  $x_0y_0z_0$ ,  $x_3y_3z_3$  и в соответствии с таблицей (4.4)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= \omega_{x_3} \cos \varepsilon + \omega_{y_3} \sin \varepsilon, \\ \omega_{y_0} &= -\omega_{x_3} \sin \varepsilon + \omega_{y_3} \cos \varepsilon, \\ \omega_{z_0} &= \omega_{z_3} + \dot{\varepsilon}, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где  $\omega_{x_3}$ ,  $\omega_{y_3}$ ,  $\omega_{z_3}$  — проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_3y_3z_3$  на его оси.

Трехгранник  $x_3y_3z_3$  вращается вместе с трехгранником  $\xi'\eta'\zeta'$  в его движении с Землей и, кроме того, вращается из-за изменения со временем координат  $z$  и  $S$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_3} &= -\dot{z} + u_{x_3}, \quad \omega_{y_3} = \dot{S} \cos z + u_{y_3}, \\ \omega_{z_3} &= \dot{S} \sin z + u_{z_3}, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

где  $u_{x_3}$ ,  $u_{y_3}$ ,  $u_{z_3}$  — проекции вектора  $u$  угловой скорости вращения Земли на соответствующие оси. Так как вектор  $u$  совпадает с осью  $\zeta$ , то, находя из таблиц (4.1), (1.16) косинусы углов между этой осью и осями  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ , получаем следующие выражения для проекций  $u_{x_3}$ ,  $u_{y_3}$ ,  $u_{z_3}$ :

$$\left. \begin{aligned} u_{x_3} &= u(-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ u_{y_3} &= u(-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ u_{z_3} &= u(\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z). \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$



Из второго и третьего равенств (4.15) вытекает еще такая связь:

$$\omega_{z_3} = (\omega_{y_3} - u_{y_3}) \operatorname{tg} z + u_{z_3}. \quad (4.17)$$

Соотношения (4.14)–(4.17) позволяют получить выражения для  $z$  и  $S$  через  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ :

$$\left. \begin{aligned} z &= \int_0^t (-\omega_{x_0} \cos \varepsilon + \omega_{y_0} \sin \varepsilon + u_{x_3}) dt + z^0, \\ S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u_{y_3}) dt + S^0, \\ \varepsilon &= \int_0^t [\omega_{z_0} - (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u_{y_3}) \operatorname{tg} z + u_{z_3}] dt + \\ &\quad + \varepsilon^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Обратившись к соотношениям (4.13), (4.18), (4.16), можно заключить, что для того, чтобы эти соотношения образовали замкнутую систему уравнений, в них надо определить  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  и  $r$ .

Согласно равенствам (4.4), (1.20) и таблице (1.19),

$$\left. \begin{aligned} g_{x_0} &= g_{y_2} \frac{1}{\cos \varphi} [(-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \cos \varepsilon + \\ &\quad + (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \sin \varepsilon], \\ g_{y_0} &= g_{y_2} \frac{1}{\cos \varphi} [-(\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \sin \varepsilon + \\ &\quad + (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \cos \varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Здесь проекция  $g_{y_2}$  вектора напряженности поля тяготения является функцией  $r$  и геоцентрической широты  $\varphi$  и задана первой формулой (1.27). Связь  $\varphi$  с  $z$  и  $S$  определена третьим равенством (4.3).

Величина  $r$ , входящая в выражение для  $g_{y_2}$  и непосредственно в правые части соотношений (4.19), определяется через показание высотометра  $h$  и геоцентрическую широту  $\varphi$  посредством формул (1.13), из которых, очевидно, географическая широта  $\varphi'$  может быть исключена.

Объединяя соотношения (4.13), (4.18), (4.16), (4.19), (1.13), (4.5), (4.6), третью формулу (4.3) и первую формулу (1.27), получаем следующую замкнутую систему уравнений идеальной работы инерциальной навигационной системы с двумя ньютонометрами, определяющей ортодромические координаты;

$$\left. \begin{aligned}
 v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + \omega_{z_0} v_{y_1} - \dot{r} \omega_{y_0} + g_{x_0}) dt + v_{x_0}^0, \\
 v_{y_0} &= \int_0^t (n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - \omega_{z_0} v_{x_0} + g_{y_0}) dt + v_{y_0}^0; \\
 \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{r}, \quad \omega_{x_0} = -\frac{v_{y_0}}{r}, \\
 \omega_{z_0} &= \dot{\varepsilon} + (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u_{y_3}) \operatorname{tg} z - u_{z_3}; \\
 M_y^2 &= -H_2 \omega_{x_0}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_0}, \quad M_x^3 = H_3 \omega_z; \\
 z &= \int_0^t (-\omega_{x_0} \cos \varepsilon + \omega_{y_0} \sin \varepsilon + u_{x_3}) dt + z^0, \\
 S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u_{y_3}) dt + S^0, \\
 \varepsilon &= \int_0^t [\omega_{z_0} - (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon - u_{y_3}) \operatorname{tg} z + \\
 &\quad + u_{z_3}] dt + \varepsilon^0; \\
 u_{x_1} &= u(-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\
 u_{y_3} &= u(-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\
 u_{z_3} &= u(\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z); \\
 g_{x_0} &= g_{y_2} \frac{1}{\cos \varphi} [(-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \cos \varepsilon + \\
 &\quad + (-\alpha_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \sin \varepsilon], \\
 g_{y_0} &= g_{y_2} \frac{1}{\cos \varphi} [-(\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \sin \varepsilon + \\
 &\quad + (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \cos \varepsilon],
 \end{aligned} \right\} (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 g_{y_1} &= \frac{ge}{2} (q - e^2) \left( \frac{a}{r} \right)^4 \sin 2\varphi \times \\
 &\quad \times \left[ 1 + e^2 \frac{7e^2 - 30q}{14(q - e^2)} \right] \left\{ 1 + \left[ \frac{30q - 21e^2}{14(q - e^2)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{7e^2 - 10q}{2(q - e^2)} \sin^2 \varphi \right] e^2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right\}; \\
 \sin \varphi &= \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z, \\
 r &= \left[ \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \right] \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}, \\
 \operatorname{tg} \varphi &= \left[ 1 - \frac{ae^2}{a + h(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] \operatorname{tg} \varphi'.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

При  $\varepsilon = 0$  уравнения (4.20) переходят, как нетрудно убедиться, в уравнения (2.23).

Перейдем к прямому выводу уравнений ошибок. Учтем при их выводе основные инструментальные погрешности (т. е. погрешности чувствительных элементов): погрешности ньютонометров  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$  и свободные уходы гироскопов  $\Delta \omega_{x_0}$ ,  $\Delta \omega_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{z_0}$ , которые в соответствии с формулами (4.5) равны:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \omega_{x_0} &= -\Delta \left( \frac{M_y^2}{H_2} \right), & \Delta \omega_{y_0} &= \Delta \left( \frac{M_x^1}{H_1} \right), \\
 \Delta \omega_{z_0} &= \Delta \left( \frac{M_x^3}{H_3} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Пусть возмущенное положение трехгранника  $Oxuz$ , связанного с гироскопом, определяется относительно его невозмущенного положения малыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  согласно таблице направляющих косинусов

	$x$	$y$	$z$	
$x_0$	1	$-\gamma$	$\beta$	
$y_0$	$\gamma$	1	$-\alpha$	
$z_0$	$-\beta$	$\alpha$	1	(4.22)

Тогда разности проекций абсолютной угловой скорости трехгранника  $Oxuz$  на его оси в возмущенном и невозмущенном

положениях равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x - \omega_{x_0} &= \dot{\alpha} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta, \\ \omega_y - \omega_{y_0} &= \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha, \\ \omega_z - \omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Варьируя шестое, седьмое и восьмое уравнения (4.20), находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \omega_x - \omega_{x_0} - \Delta\omega_{x_0} = \dot{\alpha} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta - \Delta\omega_{x_0}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \omega_y - \omega_{y_0} - \Delta\omega_{y_0} = \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha - \Delta\omega_{y_0}, \\ \delta\omega_{z_0} &= \omega_z - \omega_{z_0} - \Delta\omega_{z_0} = \dot{\gamma} + \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha - \Delta\omega_{z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

где, по определению,  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$  — угловые скорости свободных уходов платформы по соответствующим осям.

Варьируя (изохронно) первые четыре уравнения (4.20), приходим к равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{v}_{x_0} &= \delta n_{x_0} + \omega_{z_0}\delta v_{y_0} + \\ &\quad + v_{y_0}\delta\omega_{z_0} - \dot{r}\delta\omega_{y_0} - \omega_{y_0}\delta\dot{r} + \delta g_{x_0}, \\ \delta\dot{v}_{y_0} &= \delta n_{y_0} + \dot{r}\delta\omega_{x_0} + \omega_{x_0}\delta\dot{r} - \omega_{z_0}\delta v_{x_0} - \\ &\quad - v_{x_0}\delta\omega_{z_0} + \delta g_{y_0}, \\ \delta v_{x_0} &= r\delta\omega_{y_0} + \omega_{y_0}\delta r, \quad \delta v_{y_0} = -r\delta\omega_{x_0} - \omega_{x_0}\delta r. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

В равенствах (4.25)

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{x_0} &= n_{y_0}\gamma - n_{z_0}\beta + \Delta n_{x_0}, \\ \delta n_{y_0} &= -n_{x_0}\gamma + n_{z_0}\alpha + \Delta n_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

где  $n_{x_0}$ ,  $n_{y_0}$  определены формулами (4.7), а  $n_{z_0}$  — аналогичной формулой

$$n_{z_0} = \omega_{z_0} - g_{z_0}. \quad (4.27)$$

Исключая из равенств (4.24) — (4.26) все переменные, кроме  $\alpha$  и  $\beta$ , и принимая при этом во внимание соотношения

(4.7), (4.27), (4.8), (4.12), приходим к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\alpha} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\alpha} + \left( -\frac{g_{z_0}}{r} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{z_0}^2 + \frac{\ddot{r}}{r} \right) \alpha - \\ - \left( \omega_{y_0} \omega_{x_0} + \dot{\omega}_{z_0} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \omega_{z_0} \right) \beta - 2 \omega_{z_0} \dot{\beta} = \\ = -\frac{1}{r} (\delta g_{y_0} + \Delta n_{y_0}) + (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \frac{\delta r}{r} - 2 \omega_{x_0} \frac{\delta \dot{r}}{r} + \\ + 2 \Delta \omega_{x_0} \frac{\dot{r}}{r} + \Delta \dot{\omega}_{x_0} - \omega_{y_0} \Delta \omega_{z_0} - \omega_{z_0} \Delta \omega_{y_0}, \\ \ddot{\beta} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{\beta} + \left( -\frac{g_{z_0}}{r} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 + \frac{\ddot{r}}{r} \right) \beta - \\ - \left( \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0} - 2 \frac{\dot{r}}{r} \omega_{z_0} \right) \alpha + 2 \omega_{z_0} \dot{\alpha} = \\ = \frac{1}{r} (\delta g_{x_0} + \Delta n_{x_0}) - (\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \frac{\delta r}{r} - \\ - 2 \omega_{y_0} \frac{\delta \dot{r}}{r} + 2 \Delta \omega_{y_0} \frac{\dot{r}}{r} + \Delta \dot{\omega}_{y_0} + \omega_{x_0} \Delta \omega_{z_0} + \omega_{z_0} \Delta \omega_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

К ним присоединяется уравнение для  $\gamma$ , получающееся из третьего равенства (4.24):

$$\dot{\gamma} = -\omega_{x_0} \beta + \omega_{y_0} \alpha + \delta \omega_{z_0} + \Delta \omega_{z_0}. \quad (4.29)$$

Начальные условия уравнений (4.28), (4.29) вытекают из интегральных уравнений, соответствующих уравнениям (4.25). Ими будут величины:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha^0, \quad \beta(0) = \beta^0, \quad \gamma(0) = \gamma^0, \\ \dot{\beta}(0) &= \delta \omega_{y_0}^0 + \Delta \omega_{y_0}^0 + \omega_{x_0}^0 \gamma^0 - \omega_{z_0}^0 \alpha^0 - \omega_{y_0}^0 \frac{\delta r^0}{r^0}, \\ \dot{\alpha}(0) &= \delta \omega_{x_0}^0 + \Delta \omega_{x_0}^0 - \omega_{y_0}^0 \gamma^0 + \omega_{z_0}^0 \beta^0 + \omega_{x_0}^0 \frac{\delta r^0}{r^0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

Перейдем к составлению уравнений ошибок координат  $z$ ,  $S$  и азимутального угла  $\varepsilon$ . Варьируя девятое, десятое

и одиннадцатое уравнения (4.20), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{z} &= -\delta \omega_{x_0} \cos \varepsilon + \delta \omega_{y_0} \sin \varepsilon + \\ &+ (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon) \delta \varepsilon - u (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \delta S, \\ \delta \dot{S} \cos z &= \delta \omega_{x_0} \sin \varepsilon + \delta \omega_{y_0} \cos \varepsilon + \\ &+ (\omega_{x_0} \cos \varepsilon - \omega_{y_0} \sin \varepsilon) \delta \varepsilon + \operatorname{tg} z (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \omega_{y_0} \cos \varepsilon) \delta z + \\ &+ u \sin z (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \delta S + \\ &\quad + u \sec z (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \delta z, \\ \delta \dot{\varepsilon} \cos z &= \delta \omega_{x_0} \cos z - \sin z (\delta \omega_{x_0} \sin \varepsilon + \delta \omega_{y_0} \cos \varepsilon) - \\ &- \sin z (\omega_{x_0} \cos \varepsilon - \omega_{y_0} \sin \varepsilon) \delta \varepsilon + \\ &+ u (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S) \delta S - [\sec z (\omega_{x_0} \sin \varepsilon + \\ &\quad + \omega_{y_0} \cos \varepsilon) + u \operatorname{tg} z (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)] \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

Здесь  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$  заданы соотношениями (4.24). Начальные условия уравнений (4.31) очевидны.

Уравнения (4.28), (4.29), (4.31), если исключить из них  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$  посредством соотношений (4.24), приводят к шести уравнениям относительно шести неизвестных:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta \varepsilon$ ,  $\delta z$ ,  $\delta S$ . Эти уравнения, таким образом, дают возможность найти ошибки координат  $\delta z$ ,  $\delta S$ , ошибку азимутального угла  $\delta \varepsilon$  и ошибки ориентации платформы инерциальной системы, т. е. углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Следовательно, уравнения (4.28), (4.29), (4.31) — это полная система уравнений ошибок рассматриваемой схемы.

На первый взгляд полученные уравнения существенно отличаются от уравнений (2.28), (1.96), (1.97), (1.116), полученных ранее и распространяющихся, очевидно, на рассматриваемую схему. Однако более внимательное изучение уравнений (4.28), (4.29), (4.31) позволяет свести их к общим уравнениям (2.28), (1.96), (1.97), (1.116).

Начнем с уравнений (4.28). Произведем в них замену переменных

$$\delta x = r\beta, \quad \delta y = -r\alpha. \quad (4.32)$$

Пренебрежем вариациями  $\delta g_{x_0}$ ,  $\delta g_{y_0}$  несферической составляющей поля тяготения. Замечая, что с этой же точностью

можно принять

$$g_{z_0} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (4.33)$$

и что в первом приближении имеет место равенство

$$\delta r = \Delta r = \Delta h, \quad (4.34)$$

приходим к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \right) \delta x + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} - \dot{\omega}_{z_0}) \delta y - \\ - 2\omega_{z_0} \delta \dot{y} = \Delta n_{x_0} - (\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \\ + 2\Delta \omega_{y_0} \dot{r} + \Delta \dot{\omega}_{y_0} r + r \omega_{x_0} \Delta \omega_{z_0} + r \omega_{z_0} \Delta \omega_{x_0}, \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{z_0}^2 - \omega_{x_0}^2 \right) \delta y + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} + \dot{\omega}_{z_0}) \delta x + \\ + 2\omega_{z_0} \delta \dot{x} = \Delta n_{y_0} - (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r + 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r} - \\ - 2\Delta \omega_{x_0} \dot{r} - \Delta \dot{\omega}_{x_0} r + r \omega_{y_0} \Delta \omega_{z_0} + r \omega_{z_0} \Delta \omega_{y_0} \\ (\Delta r = \Delta h). \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Они отличаются от уравнений (2.28) лишь тем, что в правые части уравнений (4.35) входят величины  $-\Delta \omega_{x_0}$ ,  $-\Delta \omega_{y_0}$ ,  $-\Delta \omega_{z_0}$ , а в правые части уравнений (2.28) — соответственно величины  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$ . Это различие легко объясняется. Дело в том, что при выводе уравнений (4.35) величины  $\Delta \omega_{x_0}$ ,  $\Delta \omega_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{z_0}$  введены как свободные уходы управляемой гирорамы, имеющие положительные знаки. Величины же  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$  в уравнениях (2.28) соответствуют отрицательным знакам свободных уходов. В самом деле, вектор  $\Delta \mathbf{m}$  был введен как инструментальная погрешность гироскопического измерителя абсолютной угловой скорости. Если рассматривать управляемую гирораму как измеритель угловой скорости, где мериллом этой скорости будут величины управляющих моментов, то при наличии положительных свободных уходов измеренные значения проекций угловой скорости окажутся меньше действительных как раз на величину скорости уходов, что соответствует отрицательным значениям ошибок измерения при положительных свободных уходах. Таким образом,

$$\Delta m_{x_0} = -\Delta \omega_{x_0}, \quad \Delta m_{y_0} = -\Delta \omega_{y_0}, \quad \Delta m_{z_0} = -\Delta \omega_{z_0} \quad (4.36)$$

и поэтому уравнения (4.35) и (2.28) полностью идентичны.

Обратимся к уравнениям (4.31). Введем в них новые переменные \*):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= -\delta z \cos \varepsilon + \delta S \cos z \sin \varepsilon, \\ \beta_2 &= \delta z \sin \varepsilon + \delta S \cos z \cos \varepsilon, \\ \gamma_2 &= \delta \varepsilon + \delta S \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

Тогда уравнения (4.31) могут быть преобразованы к такому виду:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_2 + \omega_{y_0} \gamma_2 - \omega_{z_0} \beta_2 &= \delta \omega_{x_0}, \\ \dot{\beta}_2 + \omega_{z_0} \alpha_2 - \omega_{x_0} \gamma_2 &= \delta \omega_{y_0}, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_{x_0} \beta_2 - \omega_{y_0} \alpha_2 &= \delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Легко видеть, что переменные  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  представляют собой полные угловые погрешности определения координат и азимута. Введя новые переменные

$$\theta_{x_0} = \alpha_2 - \alpha, \quad \theta_{y_0} = \beta_2 - \beta, \quad \theta_{z_0} = \gamma_2 - \gamma, \quad (4.39)$$

из уравнений (4.38), (4.24) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{x_0} + \omega_{y_0} \theta_{z_0} - \omega_{z_0} \theta_{y_0} &= -\Delta \omega_{x_0}, \\ \dot{\theta}_{y_0} + \omega_{z_0} \theta_{x_0} - \omega_{x_0} \theta_{z_0} &= -\Delta \omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + \omega_{x_0} \theta_{y_0} - \omega_{y_0} \theta_{x_0} &= -\Delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Здесь с учетом равенств (4.26) мы пришли ко второй группе уравнений ошибок (1.96).

Введем величины:

$$\delta x_2 = r \beta_2, \quad \delta y_2 = -r \alpha_2. \quad (4.41)$$

Тогда из соотношений (4.39), (4.32) получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_1 &= r \theta_{y_0}, \quad \delta y_1 = -r \theta_{x_0}, \\ \delta x_2 &= \delta x + \delta x_1, \quad \delta y_2 = \delta y + \delta y_1, \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

что совпадает с формулами (1.97), если учесть, что для рассматриваемого случая в формулах (1.97) надо положить  $x = y = 0$  и отбросить соотношение для  $\delta z_2$ .

---

\*) Андреев В. Д., К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта. Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 1, 1964.



Нам осталось показать лишь, что из уравнений (4.28), (4.29), (4.31) вытекают формулы (1.118). Заметив, что, по определению,

$$\alpha = \theta_{1x_0}, \quad \beta = \theta_{1y_0}, \quad (4.43)$$

и обратившись к равенствам (4.32), приходим к первым двум соотношениям (1.118). Аналогично можно прийти и к третьему из этих соотношений. В частности, когда  $\varepsilon = 0$ , из третьих равенств (4.37), (4.39) получаем:

$$\gamma = \theta_{1z_0} = -\theta_{z_0} + \frac{\delta x_2}{r} \operatorname{tg} z, \quad (4.44)$$

что совпадает с формулой (1.120), являющейся частным случаем третьей формулы (1.118).

**4.2.2. Некоторые частные случаи азимутальной ориентации ньютонометров.** Уравнения (4.20) представляют собой уравнения идеальной работы инерциальной системы с двумя ньютонометрами, определяющей ортодромические координаты объекта. Ньютонометры расположены в плоскости геоцентрического горизонта. Ориентация их в этой плоскости (азимутальная ориентация) произвольна. Эта произвольность вытекает из произвольности угла  $\varepsilon$ , а следовательно,  $\omega_{z_0}$  и  $M_x^3$ . Рассмотрим некоторые частные случаи выбора угла  $\varepsilon$  и вытекающие из этого упрощения уравнений идеальной работы.

Если

$$\varepsilon = 0, \quad (4.45)$$

то получается случай ориентации ньютонометров по осям сопровождающего трехгранника ортодромической координатной сетки. Уравнения (4.20) переходят тогда в уравнения (2.23), а при совмещении трехгранников  $\xi\eta\zeta$  и  $\xi'\eta'\zeta'$  — в уравнения (2.25) для геоцентрических координат.

Интересным случаем является такой выбор угла  $\varepsilon$ , когда

$$\omega_{z_0} = 0, \quad M_x^3 = 0. \quad (4.46)$$

В этом случае проекция абсолютной угловой скорости платформы инерциальной системы на направление геоцентрической вертикали равна нулю. Схемы с такой ориентацией платформы называют иногда в литературе «азимутально сво-

бодными» \*). В такой схеме может отсутствовать датчик управляющих моментов по оси кожуха гироскопа  $\Gamma_3$  (см. рис. 4.2).

Если условие (4.46) имеет место, то из уравнений (4.20) выпадают пятое и восьмое соотношения, а в подынтегральных выражениях первого, второго и одиннадцатого соотношений выпадают слагаемые, содержащие  $\omega_{z_0}$ .

Отметим еще, что наряду с условием (4.46) можно принять другое:

$$\omega_{z_0} = \omega_{z_0}^0 = \text{const}, \quad M_x^3 = \text{const},$$

что иногда (при надлежащем выборе величины  $\omega_{z_0}^0$ ) оказывается удобным.

Рассмотрим теперь такой случай. Выберем угол  $\varepsilon$  так, чтобы все время выполнялось равенство

$$v_{x_0} = v_{y_0}. \quad (4.47)$$

Тогда из первых двух уравнений (4.20) получим для  $\omega_{z_0}$  следующее выражение:

$$\omega_{z_0} = \frac{n_{y_0} - n_x + g_{y_0} - g_{x_0}}{2v_{x_0}}. \quad (4.48)$$

Посмотрим, как изменятся уравнения (4.20). Из четырех первых уравнений останутся, очевидно, лишь два:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + \omega_{z_0} v_{x_0} - \dot{r} \omega_{y_0} + g_{x_0}) dt + v_{x_0}^0, \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Изменяются все уравнения, содержащие  $\omega_{x_0}$ , так как теперь

$$\omega_{x_0} = -\omega_{y_0}. \quad (4.50)$$

---

\*) См., например, Фридлендер Г. О., Инерциальные системы навигации, Физматгиз, 1961.

В соответствии с этим вместо шестого, девятого, десятого и одиннадцатого соотношений (4.20) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= H_1 \omega_{y_0}, \\ z &= \int_0^t [\omega_{y_0} (\cos \varepsilon + \sin \varepsilon) + u_{x_3}] dt + z^0, \\ S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} [\omega_{y_0} (\cos \varepsilon - \sin \varepsilon) - u_{y_3}] dt + S^0, \\ \varepsilon &= \int_0^t \{ \omega_{z_0} - [\omega_{y_0} (\cos \varepsilon - \sin \varepsilon) - u_{y_3}] \operatorname{tg} z + u_{z_3} \} dt + \varepsilon^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Остальные соотношения (4.20) не изменятся.

Заметим, что вместо условия (4.47) можно взять более общее условие

$$v_{x_0} = k v_{y_0}, \quad (4.52)$$

где  $k$  — произвольный постоянный коэффициент, или даже условие

$$v_{x_0} = f(v_{y_0}, t). \quad (4.53)$$

Соответствующие уравнения идеальной работы легко могут быть построены.

Обсудим сравнительные достоинства и недостатки выбора азимутальной ориентации ньютометров в соответствии с условиями (4.45) — (4.47).

Условие (4.46) позволяет изъять из схемы моментный датчик гироскопа  $\Gamma_3$  и упрощает подынтегральные выражения ( $\omega_{z_0} = 0$ ) первых двух уравнений (4.20). Однако это условие приводит по сравнению с условием (4.45) к дополнительному интегрированию в соответствии с одиннадцатым уравнением (4.20). Условие (4.46) усложняет по сравнению с (4.45) подынтегральные выражения в уравнениях для определения  $z$  и  $S$ , т. е. в девятом и десятом уравнениях (4.20). Наконец, условие

$\omega_{z_0} = 0$  делает более сложными формулы для проекций  $g_{x_0}$  и  $g_{y_0}$ . В целом условие (4.46) не дает существенных выгод по сравнению с условием (4.45), когда  $\varepsilon = 0$ .

Обратимся к условию (4.47). Это условие требует столько же операций интегрирования, что и условие (4.45). В случае условия (4.45) нужно выполнить операции интегрирования для отыскания  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ , а в случае условия (4.47) — для отыскания  $v_{x_0}$  и  $\varepsilon$ . Формулы для нахождения  $S$  и  $z$  сложнее в случае условия (4.47). Моментный датчик гироскопа  $\Gamma_3$  сохраняется. Следует отметить еще, что условие (4.47) приводит к необходимости формирования  $\omega_{z_0}$  в соответствии с равенством (4.48). Величина  $v_{x_0}$  переменна. Значит, необходимо делить показания ньютонометров до их интегрирования на переменные величины. Это является дополнительным существенным недостатком схемы, в которой используется условие (4.47). Таким образом, принятие условия (4.47), так же как и принятие условия (4.46), не приводит к упрощениям в построении схемы. Наиболее экономным, по-видимому, оказывается принятие условия (4.45), когда  $\varepsilon = 0$  и ньютонометры ориентированы вдоль осей  $x_3$ ,  $y_3$  сопровождающего трехгранника  $x_3y_3z_3$  ортодромической координатной сетки. В дальнейшем будет рассматриваться лишь этот вариант. Его уравнения идеальной работы — это уравнения (2.23).

В заключение заметим, что условия (4.45) — (4.47) оставляют уравнения идеальной работы точными. Поэтому уравнения ошибок для всех этих трех вариантов одни и те же. Это уравнения (4.35), (4.40), (4.42), (1.118), которые были проанализированы нами выше.

**4.2.3. Упрощения, вытекающие из близости формы Земли к сфере.** Рассмотрим уравнения идеальной работы (4.20) при  $\varepsilon = 0$ , т. е. уравнения (2.23). Выясним возможность упрощения этих уравнений за счет того, что форма поверхности Земли близка к сфере, а поле тяготения — к сферическому полю, т. е. в конечном счете, выясним возможность упрощения уравнений идеальной работы за счет малости эксцентриситета эллипсоида Клеро.

В первую очередь, очевидно, указанные упрощения могут касаться формул для  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ , а также последних двух формул (2.23), дающих связь между географическими координатами  $h$ ,  $\varphi'$  и геоцентрическими координатами  $r$  и  $\varphi$ .

Проекция  $g_{y_2}$  вектора напряженности поля тяготения Земли на направление оси  $y_2$  геоцентрического сопровождающего трехгранника, лежащей в плоскости меридиана, задана первой формулой (1.27). В первом приближении, если сохранить в этой формуле лишь члены порядка  $e^2$ , получим:

$$g_{y_2} \approx \frac{g_e}{2} (q - e^2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 2\varphi. \quad (4.54)$$

В соответствии с первой формулой (1.27) погрешность формулы (4.54) оценивается величиной

$$\Delta g_{y_2} \approx \frac{g_e e^2}{28} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin 2\varphi \left\{ 7e^2 - 30q + \right. \\ \left. + [30q - 21e^2 + 7(7e^2 - 10q) \sin^2 \varphi] \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\}. \quad (4.55)$$

Если вместо точного значения  $g_{y_2}$  использовать для формирования  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  приближенное значение (4.54), то, согласно восьмой и девятой формулам (2.23), получим:

$$\left. \begin{aligned} g_{x_0} &= g_e (q - e^2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

В соответствии с соотношением (4.55) погрешности  $\Delta g_{x_0}$ ,  $\Delta g_{y_0}$  этих представлений получаются тогда в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{x_0} &\approx \frac{g_e e^2}{14} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin \varphi \left\{ 7e^2 - 30q + \right. \\ &\quad \left. + [30q - 21e^2 + 7(7e^2 - 10q) \sin^2 \varphi] \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\} \times \\ &\quad \times (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta g_{y_0} &\approx \frac{g_e e^2}{14} \left(\frac{a}{r}\right)^4 \sin \varphi \left\{ 7e^2 - 30q + \right. \\ &\quad \left. + [30q - 21e^2 + 7(7e^2 - 10q) \sin^2 \varphi] \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\} \times \\ &\quad \times (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Численные значения входящих в формулы (4.56), (4.57) величин таковы \*):

$$\left. \begin{aligned} g_e &= 978,049 \text{ см/сек}^2, & e^2 &= 0,0067386, \\ q &= 0,00346775, & a &= 6\,378\,245 \text{ м.} \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

Приняв во внимание эти величины, можно легко найти оценки максимальных значений погрешностей (4.57). Они получаются такими:

$$|\Delta g_{x_0}|, |\Delta g_{y_0}| \leq 10^{-2} \text{ см/сек}^2 \approx 10^{-5} g_e. \quad (4.59)$$

В формулах (4.54), (4.56) можно взять поэтому

$$g_e(q - e^2) = 3,16 \text{ см/сек}^2, \quad (4.60)$$

и тогда эти формулы будут представлять величины  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  с точностью порядка 0,01 см/сек<sup>2</sup>.

Займемся упрощением последних двух формул (2.23). Посредством этих формул находится величина  $r$ . Исключив из них  $\varphi$ , приходим к такому выражению для  $r$ :

$$r = \left[ \left( \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right)^2 \cos^2 \varphi' + \left( \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi'}} + h \right)^2 \sin^2 \varphi' \right]^{1/2}. \quad (4.61)$$

Разложив правую часть в ряд по степеням  $e$ , с точностью до  $e^4$  получим:

$$r = r|_{e=0} + \frac{\partial r}{\partial e^2} \Big|_{e=0} e^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial e^4} \Big|_{e=0} e^4. \quad (4.62)$$

Из выражения (4.61) находим:

$$\left. \begin{aligned} r|_{e=0} &= a + h, \\ \frac{\partial r}{\partial e^2} \Big|_{e=0} &= -\frac{a}{2} \sin^2 \varphi', \\ \frac{\partial^2 r}{\partial e^4} \Big|_{e=0} &= \frac{a \sin^2 \varphi'}{4(a+h)} [a(4 - 5 \sin^2 \varphi') - h \sin^2 \varphi']. \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

---

\*) Значения  $e^2$  и  $q$  приведены для параметров эллипсоида Ф. Н. Красовского; см., например, Г р а у р А. В., Математическая картография, изд. ЛГУ им. Жданова, 1956. Значение  $g_e$  см. в книге: Г р у ш и н с к и й Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.

Подставим значения производных (4.63) в разложение (4.62). Тогда для  $r$  получается такое представление:

$$r = a + h - \frac{ae^2}{2} \sin^2 \varphi' + \frac{ae^4 \sin^2 \varphi'}{8(a+h)} [a(4 - 5 \sin^2 \varphi') - h \sin^2 \varphi']. \quad (4.64)$$

Если сохранить здесь лишь слагаемое с  $e^2$ , то тогда

$$r = a + h - \frac{ae^2}{2} \sin^2 \varphi'. \quad (4.65)$$

Эта формула дает выражение для  $r$  через  $h$  и  $\varphi'$ . Географическая широта  $\varphi'$  входит в уравнения (2.23) лишь при определении  $r$ . Если определять  $r$  с точностью до  $e^2$ , то географическая широта  $\varphi'$  может быть совсем исключена из этих уравнений. В самом деле, согласно равенствам (1.15), разность  $\varphi' - \varphi$  имеет порядок  $e^2$ . Поэтому в формуле (4.65) географическую широту  $\varphi'$  можно заменить на геоцентрическую  $\varphi$ . Следовательно, с точностью до членов с  $e^2$  включительно будем иметь:

$$r = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right) + h. \quad (4.66)$$

Чтобы оценить погрешность  $\Delta r$  этой формулы, можно поступить следующим образом. Из предпоследней формулы (2.23) с точностью до  $e^2$  находим:

$$\sin \varphi = \sin \varphi' \left[ 1 + \frac{ae^2}{a+h} \left( -1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi' \right) \right]. \quad (4.67)$$

Отсюда с той же точностью

$$\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi' = \sin^2 \varphi' \frac{ae^2}{a+h} (-2 + \sin^2 \varphi'). \quad (4.68)$$

Теперь замечаем, что формула (4.64) может быть переписана таким образом:

$$r = a + h - \frac{ae^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{ae^2}{2} (\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi') + \frac{ae^4 \sin^2 \varphi'}{8(a+h)} [a(4 - 5 \sin^2 \varphi') - h \sin^2 \varphi']. \quad (4.69)$$

Сравнивая равенство (4.69) с равенством (4.66) и принимая во внимание соотношение (4.68), заключаем, что

погрешность  $\Delta r$  формулы (4.66) имеет следующее выражение:

$$\Delta r \approx \frac{ae^4 \sin^2 \varphi'}{2} \left( -1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi' + \frac{h}{a+h} \right). \quad (4.70)$$

Отсюда вытекает, что

$$|\Delta r| \leq \frac{5}{8} ae^4 \approx 180 \text{ м}, \quad (4.71)$$

причем эта оценка не зависит от  $h$ .

С учетом формул (4.66), (4.57) уравнения (2.23) идеальной работы схемы с двумя ньютонотрами, определяющей ортодромические координаты, упрощаются и принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} + g_{x_0}) dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t (n_{y_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{r} \omega_{x_0} + g_{y_0}) dt + v_{y_0}^0; \\ \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{r}, \quad \omega_{y_0} = \frac{v_{x_0}}{r}; \\ S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} [\omega_{y_0} + u (\beta_{31} \sin z \cos S + \beta_{32} \sin z \sin S - \\ &\quad - \beta_{33} \cos z)] dt + S^0, \\ z &= \int_0^t [-\omega_{x_0} + u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)] dt + z^0; \\ \omega_{z_0} &= \omega_{y_0} \operatorname{tg} z + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S); \\ g_{x_0} &= g_e (q - e^2) \left( \frac{a}{r} \right)^4 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \left( \frac{a}{r} \right)^4 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z); \\ \sin \varphi &= \beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z; \\ M_y^2 &= -H_2 \omega_{x_0}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_0}, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_{z_0}; \\ r &= h + a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.72)$$



Выясним, как при принятых упрощениях изменятся уравнения ошибок (4.35). Левые части этих уравнений, очевидно, не изменятся, так как в уравнениях (4.72) учтены все те члены, которые входят и в точные уравнения (2.23). Принятые в уравнениях (4.72) упрощения меняют коэффициенты левых частей уравнений ошибок (4.35) на величины первого порядка малости. Это несущественно, так как после умножения на  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta \dot{x}$ ,  $\delta \dot{y}$  приводит к величинам второго порядка малости. В первом приближении, таким образом, левые части первой группы уравнений ошибок сохранят свой вид.

Правые части уравнений ошибок изменятся. К собственно инструментальным погрешностям  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{x_0}$ ,  $\Delta \omega_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_z$  прибавятся некоторые эквивалентные им инструментальные погрешности. Их легко найти, проследив вывод уравнений ошибок (4.35), который проделан выше.

В правых частях уравнений ошибок (4.35) появятся прежде всего эквивалентные погрешности ньютонометров  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$ , вызванные упрощением формул для  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ , причем

$$\Delta \tilde{n}_{x_0} = \Delta g_{x_0}, \quad \Delta \tilde{n}_{y_0} = \Delta g_{y_0}, \quad (4.73)$$

где  $\Delta g_{x_0}$  и  $\Delta g_{y_0}$  суть функции, заданные равенствами (4.57). Оценки (4.59) показывают, что принятые упрощения формул для  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  равносильны инструментальным погрешностям ньютонометров порядка  $10^{-5} g_e$ . Ими можно во многих случаях пренебречь. Эффект этих погрешностей пренебрежимо мал во всяком случае для скоростей движения, существенно меньших первой космической. Это следует из проведенного в гл. 2 анализа уравнений ошибок схем с двумя ньютонометрами. Величины ошибок, вызываемых погрешностями (4.73), могут быть легко оценены по формулам, полученным в гл. 2, и в случае движения объекта с произвольной скоростью.

В правые части уравнений ошибок (4.35) входят выражения, содержащие  $\Delta r = \Delta h$ , где  $\Delta h$  — инструментальная погрешность высотомера. Упрощение формул для вычисления  $r$ , т. е. принятие для этого вычисления формулы (4.66), приведет к тому, что к инструментальной погрешности высотомера  $\Delta h$  добавится погрешность, определяемая равенством (4.70). Она равносильна инструментальной погрешности

высотомера и не превышает, согласно оценке (4.71), величины 180 м.

Здесь полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. На первый взгляд может показаться, что погрешность  $\Delta r$  вычисления  $r$  должна привести к некоторым эквивалентным инструментальным погрешностям  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$ , равносильным свободным уходам гироскопов, что в свою очередь должно привести к изменению правых частей второй группы уравнений ошибок (4.40). Такое впечатление может создаться, если рассмотреть вариации третьего и четвертого соотношений (2.23) или (4.72). В самом деле, из них получается:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} + \tilde{\Delta\omega}_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{r + \Delta r} = \omega_{x_0} - \omega_{x_0} \frac{\Delta r}{r}, \\ \omega_{y_0} + \tilde{\Delta\omega}_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{r + \Delta r} = \omega_{y_0} - \omega_{y_0} \frac{\Delta r}{r}, \\ \omega_{z_0} + \tilde{\Delta\omega}_{z_0} &= (\omega_{y_0} + \tilde{\Delta\omega}_{y_0}) \operatorname{tg} z + \\ &+ \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) = \omega_{z_0} + \tilde{\Delta\omega}_{y_0} \operatorname{tg} z, \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

и погрешность  $\Delta r$  ведет, следовательно, к погрешностям

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Delta\omega}_{x_0} &= -\omega_{x_0} \frac{\Delta r}{r}, \quad \tilde{\Delta\omega}_{y_0} = -\omega_{y_0} \frac{\Delta r}{r}, \\ \tilde{\Delta\omega}_{z_0} &= -\omega_{y_0} \frac{\Delta r}{r} \operatorname{tg} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Последние приводят в свою очередь к тому, что к гироскопам платформы инерциальной системы прикладываются дополнительные моменты, что кажется равносильным свободным уходам платформ.

Однако рассмотрение всей совокупности уравнений в вариациях, соответствующих уравнениям (2.23), показывает, что это не так. Действительно, величины  $\tilde{\Delta\omega}_{x_0}$ ,  $\tilde{\Delta\omega}_{y_0}$ , заданные равенствами (4.75), войдут наряду со свободными уходами в первые два равенства (4.24), а значит, в уравнения (4.28) и далее в уравнения (4.35). Но величины  $\tilde{\Delta\omega}_{x_0}$ ,  $\tilde{\Delta\omega}_{y_0}$ , в отличие от свободных уходов, войдут также и в правые части первых двух равенств (4.31), а поэтому пропадут при переходе к уравнениям (4.40), так как в процессе этого перехода образуются разности (4.39) равенств (4.24) и (4.31).

Поэтому величины  $\Delta\tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0}$  не войдут в правые части первых двух уравнений второй группы (4.40) и не приведут, таким образом, к эквивалентным инструментальным погрешностям гироскопов.

Что касается величины  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$ , то она не войдет в правую часть третьего равенства (4.24), ибо в последнем  $\Delta\omega_{z_0}$ , по определению, есть инструментальная погрешность, не зависящая от  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ , тогда как величина  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$ , согласно второму и третьему равенствам (4.75), равна  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0} \operatorname{tg} z$ . Величина  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$  войдет, как легко усмотреть, в уравнение (4.29), так как она содержится в выражении  $\delta\omega_{y_0} \operatorname{tg} z$ . Но в ходе образования третьего уравнения (4.40) величина  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$  выпадает. Она не войдет в правую часть этого уравнения и, как и  $\Delta\tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0}$ , не приведет к погрешности, равносильной свободному уходу.

Если, согласно равенствам (4.75), заменить в правых частях уравнений (4.35) величины  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$  на  $\Delta\tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} 2\dot{r}\Delta\tilde{\omega}_{y_0} + r\Delta\tilde{\dot{\omega}}_{y_0} + r\omega_{x_0}\Delta\tilde{\omega}_{z_0} + r\omega_{z_0}\Delta\tilde{\omega}_{x_0} = \\ = -\dot{r}\omega_{y_0}\frac{\Delta r}{r} - \dot{\omega}_{y_0}\Delta r - \omega_{x_0}\omega_{z_0}\Delta r - \\ - \omega_{y_0}\Delta\dot{r} - \omega_{x_0}\omega_{y_0}\Delta r \operatorname{tg} z, \\ -2\dot{r}\Delta\tilde{\omega}_{x_0} - r\Delta\tilde{\dot{\omega}}_{x_0} + r\omega_{y_0}\Delta\tilde{\omega}_{z_0} + r\omega_{z_0}\Delta\tilde{\omega}_{y_0} = \\ = \dot{r}\omega_{x_0}\frac{\Delta r}{r} + \dot{\omega}_{y_0}\Delta r - \omega_{z_0}\omega_{y_0}\Delta r + \omega_{x_0}\Delta\dot{r} - \\ - \omega_{y_0}^2\Delta r \operatorname{tg} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.76)$$

Но в правые части уравнений (4.35) величина  $\Delta r$  войдет не только через  $\Delta\tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0}$ ,  $\Delta\tilde{\omega}_{z_0}$ , но и при варьировании слагаемых  $v_{y_0}\omega_{z_0} - \dot{r}\omega_{y_0}$  и  $-v_{x_0}\omega_{z_0} + \dot{r}\omega_{x_0}$  в подынтегральных выражениях первых двух уравнений (2.23) или (4.72). Это дает выражения

$$\left. \begin{aligned} -\omega_{y_0}\Delta\dot{r} + r\omega_{x_0}\omega_{y_0}\Delta r \operatorname{tg} z + \dot{r}\omega_{y_0}\frac{\Delta r}{r}, \\ \omega_{x_0}\Delta\dot{r} + \omega_{y_0}^2\Delta r \operatorname{tg} z - \dot{r}\omega_{x_0}\frac{\Delta r}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

Складывая правые части равенств (4.76) с выражениями (4.77), получаем соответственно:

$$\left. \begin{aligned} -2\omega_{y_0} \Delta \dot{r} - (\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r, \\ 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r} - (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r. \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

А это совпадает со слагаемыми правых частей уравнений (4.35), содержащими  $\Delta r$ .

Погрешности  $\Delta r$  из-за упрощений при вычислении  $r$  и погрешностей высотомера равносильны. Они входят в правые части первой группы уравнений ошибок и эквивалентны некоторым погрешностям ньютометров. Правые части второй группы уравнений ошибок они не меняют, и поэтому к ошибкам, эквивалентным уходам гироскопов, не приводят. Это объясняется, как было выяснено, появлением  $\Delta \tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{y_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{z_0}$  одновременно как в выражениях для управляющих моментов, так и в соотношениях для отыскания координат  $z$  и  $S$ . Одновременность обусловлена общей причиной возникновения ошибок: погрешностью  $\Delta r$ .

Если бы погрешности  $\Delta \tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{y_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{z_0}$ , появившись в результате какой-нибудь другой причины, вошли либо только в уравнения определения координат, либо только в соотношения, по которым формируются управляющие моменты, то это привело бы к изменению правых частей уравнений второй группы и, значит, к погрешностям, эквивалентным свободным уходам гироскопов. В дальнейшем будет дан пример такой ситуации.

**4.2.4. Упрощения, связанные с близостью траектории движения объекта к поверхности Земли и к плоскости ортодромии.** Упрощения уравнений идеальной работы, рассмотренные в предшествующем разделе настоящего параграфа, не связывались с характером траектории движения объекта, но лишь с малостью сжатия Земли. В то же время представляется достаточно очевидным, что знание характерных особенностей движения объекта (или класса объектов), для которого предназначается инерциальная система навигации, может позволить значительно упростить уравнения ее работы, а значит, и саму систему. Ниже рассматриваются упрощения, связанные с видом траектории объекта, с ее геометрической формой

(но не со скоростью движения). При этом речь будет идти о траекториях, близких к поверхности Земли и к плоскости ортодромии  $z = 0$ , т. е. будут рассматриваться движения при малых значениях  $h$  и  $z$ . Имеется в виду высота движения над поверхностью Земли порядка 50—100 км, что охватывает задачи современной и перспективной авиации. Что касается близости движения к ортодромии, то здесь будут предполагаться величины  $z$  порядка 100—500 км.

Обратившись к уравнениям (4.72), замечаем, что величина  $h$  непосредственно входит лишь в последнее равенство, а уже через него — в первые четыре уравнения, а также в восьмое и девятое равенства для  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ .

Последнее равенство (4.72) не нуждается, очевидно, в каком-либо упрощении для малых  $h$ .

Формулы для  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$  могут быть при малых  $h$  записаны приближенно так:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &\approx -\frac{v_{y_0}}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right), \\ \omega_{y_0} &\approx \frac{v_{x_0}}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

Погрешности определения проекций абсолютной угловой скорости трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  по этим формулам равносильны определению  $r$  с дополнительной к (4.70) погрешностью

$$\Delta r' = a \left( \frac{h}{a} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{e^4}{4} \sin^4 \varphi - \frac{h^2}{a^2} \right). \quad (4.80)$$

При  $h \approx 50$  км

$$\Delta r' \leq 500 \text{ м}, \quad (4.81)$$

а при  $h \approx 100$  км

$$\Delta r' \leq 1,5 \text{ км}. \quad (4.82)$$

Дополнительная погрешность (4.80) вводится лишь в третью и четвертую формулы (4.72). В подынтегральных же выражениях первых двух формул используется представление  $r$  последним равенством (4.72). Поэтому эквивалентные погрешности ньютометров для  $\Delta r'$  будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r' - \omega_{y_0} \Delta \dot{r}', \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r' + \omega_{x_0} \Delta \dot{r}', \end{aligned} \right\} \quad (4.83)$$

в то время как для погрешности  $\Delta r$ , согласно равенствам (4.78), имели место выражения

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\omega_{y_0} \Delta \dot{r}, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r + 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

Отметим следующее. Формулы (4.79) могут быть записаны так:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{a} - \frac{v_{y_0}}{a} \left( \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right), \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{a} + \frac{v_{x_0}}{a} \left( \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.85)$$

Здесь первые слагаемые в правых частях, составляющие основную долю сумм, получаются из  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  умножением на постоянный множитель  $1/a$ , т. е. отличаются от  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  лишь масштабом. Вторые слагаемые, для формирования которых необходимы  $\sin^2 \varphi$  и  $h$ , малы по сравнению с первыми. Поэтому в них функция  $\sin^2 \varphi$  может быть сформирована достаточно грубо. Грубо могут быть выполнены и остальные операции, необходимые для формирования вторых слагаемых в правых частях равенств (4.85). Точной операцией здесь должна быть лишь операция сложения. Представления типа (4.83) обычно широко используются в тех случаях, когда в качестве вычислительных устройств используются моделирующие счетно-решающие устройства непрерывного действия.

Рассмотрим восьмое и девятое равенства (4.72). В них входит отношение  $a^4/r^4$ . Раскладывая это отношение в ряд по степеням  $e$  и  $h/a$ , получим в соответствии с последней формулой (4.72) следующее представление:

$$\begin{aligned} \left( \frac{a}{r} \right)^4 &= 1 - 4 \frac{h}{a} + 2e^2 \sin^2 \varphi + 10 \frac{h^2}{a^2} - \\ &\quad - 10 \frac{he^2}{a} \sin^2 \varphi + \frac{5e^4}{4} \sin^4 \varphi. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Для высот порядка 100 км здесь достаточно ограничиться выражением

$$\left( \frac{a}{r} \right)^4 = 1 - 4 \frac{h}{a}, \quad (4.87)$$

что дает формулы

$$\left. \begin{aligned} g_{x_0} &= g_e (q - e^2) \left( 1 - 4 \frac{h}{a} \right) \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \left( 1 - \frac{4h}{a} \right) \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \end{aligned} \right\} \quad (4.88)$$

сравнение которых с соответствующими формулами (4.72) приводит к эквивалентным инструментальным погрешностям ньютонометров

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &\approx g_e (q - e^2) \left( 2e^2 \sin^2 \varphi + 10 \frac{h^2}{a^2} \right) \times \\ &\quad \times \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &\approx g_e (q - e^2) \left( 2e^2 \sin^2 \varphi + 10 \frac{h^2}{a^2} \right) \times \\ &\quad \times \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \end{aligned} \right\} \quad (4.89)$$

добавляющимся к погрешностям (4.57). Из выражений (4.89) при  $h = 100$  км получаются оценки

$$|\Delta \tilde{n}_{x_0}|, |\Delta \tilde{n}_{y_0}| \leq 5 \cdot 10^{-5} g_e. \quad (4.90)$$

Для высот порядка 50 км можно отбросить в равенствах (4.88) и величину  $4h/a$ , что дает погрешности  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$ , оцениваемые неравенствами

$$|\Delta \tilde{n}_{x_0}|, |\Delta \tilde{n}_{y_0}| \leq 10^{-4} g_e. \quad (4.91)$$

Из изложенного следует, что при высотах 50—100 км величину  $h$  для формирования  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  надо знать достаточно грубо либо даже можно принять равной некоторому среднему постоянному значению. Тогда оказывается, что высотомер нужен лишь для формирования вертикальной скорости  $\dot{h}$ , входящей в подынтегральные выражения первых двух уравнений (4.72) [согласно формуле (4.69),  $\dot{r} = \dot{h} + \dots$ ]. Поэтому при малых вертикальных скоростях может оказаться достаточно точной автономная система без коррекции от высотомера.

Займемся упрощениями, вытекающими из близости движения к плоскости ортодромии  $z = 0$ . Такое движение может, например, иметь место, если объект автоматически управляется

инерциальной системой и достаточно жестко удерживается на программной траектории, которая лежит в плоскости ортодромии  $z=0$ . В этом случае, полагая в уравнениях (4.72)  $z=0$  и принимая во внимание соотношения (4.85), (4.88), получим следующие уравнения идеальной работы:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} + g_{x_0}) dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t (n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} + g_{y_0}) dt + v_{y_0}^0; \\ \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right), \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi - \frac{h}{a} \right); \\ \sin \varphi &= \beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S; \\ S &= \int_0^t (\omega_{y_0} - u \beta_{33}) dt + S^0, \\ z &= \int_0^t [-\omega_{x_0} + u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)] dt + z^0; \\ \omega_{z_0} &= u (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S); \\ M_x^1 &= H_1 \omega_{y_0}, \quad M_y^2 = -H_2 \omega_{x_0}, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_{z_0}; \\ r &= h + a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right); \\ g_{x_0} &= g_e (q - e^2) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \sin \varphi, \\ g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \beta_{33} \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

Оценим погрешности принятых упрощений, для чего обратимся к уравнениям ошибок. Очевидно, левые части уравнений ошибок (4.35), (4.40) сохраняют свой вид. В правых частях добавятся эквивалентные инструментальные погрешности  $\Delta \tilde{n}_{x_0}^1$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}^1$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{x_0}^1$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{y_0}^1$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{z_0}^1$ . Их можно найти сравнением правых частей формул (4.92) и (4.72). Вычислим те части



эквивалентных инструментальных погрешностей, которые зависят от величины  $z$  и добавляются к изученным выше.

Займемся сначала эквивалентными погрешностями ньютонометров. Они возникают, во-первых, из-за упрощения формулы для вычисления  $\sin \varphi$ , погрешность в вычислении которого приводит к погрешности вычисления  $r$  и  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ . Во-вторых, к эквивалентным погрешностям ньютонометров приводит упрощение формулы для формирования  $\omega_{z_0}$  и сомножителей в выражениях для  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ , содержащих  $z$ .

Сравнив выражения для  $\sin \varphi$  в системах уравнений (4.72) и (4.92), находим:

$$\Delta \sin \varphi = (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)(1 - \cos z) - \beta_{33} \sin z. \quad (4.93)$$

Будем считать  $z$  малым настолько, что можно положить

$$\sin z = \operatorname{tg} z = z, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2}. \quad (4.94)$$

Тогда, сохраняя в равенстве (4.93) лишь главные члены, получим:

$$\Delta \sin \varphi = -\beta_{33} z. \quad (4.95)$$

Отсюда и из формулы для  $r$ , входящей в систему (4.92), имеем:

$$\Delta r = ae^2 (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \beta_{33} z. \quad (4.96)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{x_0} &= -g_e (q - e^2) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \beta_{33} z, \\ \Delta g_{y_0} &= -g_e (q - e^2) [\beta_{33}^2 - (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)^2] z, \\ \Delta \omega_{z_0} &= -\omega_{y_0} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.97)$$

Теперь, приняв во внимание вид правых частей уравнений ошибок (4.35), получим эквивалентные погрешности ньютонометров:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) \Delta r - 2\dot{\omega}_{y_0} \Delta \dot{r} + \\ &\quad + \Delta g_{x_0} + r \omega_{x_0} \Delta \omega_{z_0}, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) \Delta r + 2\omega_{x_0} \Delta \dot{r} + \\ &\quad + \Delta g_{y_0} + r \omega_{y_0} \Delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

Здесь  $\Delta r$ ,  $\Delta g_{x_0}$ ,  $\Delta g_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{z_0}$  определены равенствами (4.96), (4.97), а выражения для  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_z$  получаются из соотношений (4.14) — (4.16), если в них положить  $\varepsilon = 0$ ,  $z = 0$ .

Эти выражения получаются в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -\dot{z} + u(-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \omega_{y_0} &= \dot{S} + u\beta_{33}, \\ \omega_{z_0} &= u(\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

что соответствует седьмой, шестой и восьмой формулам (4.92).

Дадим численные оценки погрешностей  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$ , определяемых равенствами (4.98).

Пусть

$$\left. \begin{aligned} z &= z^0 = \text{const} > 0, \quad r\dot{S} = V^0, \\ r &= a + h (\approx a) = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (4.100)$$

т. е. пусть объект движется параллельно плоскости ортодромии (на некотором расстоянии  $z^0$  от нее) с постоянной скоростью  $V^0$  на постоянном удалении от центра Земли. Тогда из соотношений (4.95)—(4.99) находим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= z^0 (\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) [-u^2 a e^2 (\beta_{31} \cos S + \\ &\quad + \beta_{32} \sin S)^2 \beta_{33} - 2 \left( \frac{V^0}{a} + u\beta_{33} \right) V^0 e^2 \beta_{33} - \\ &\quad - u(V^0 + au\beta_{33}) - g_e(q - e^2) \beta_{33}], \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= z^0 \{ -au e^2 (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)^2 \beta_{33} (2V^0 + \\ &\quad + au\beta_{33}) + 2ue^2 (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)^2 V^0 \beta_{33} - \\ &\quad - a \left( \frac{V^0}{a} + u\beta_{33} \right)^2 - g_e(q - e^2) \times \\ &\quad \times [\beta_{33}^2 - (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)^2] \}. \end{aligned} \right\} \quad (4.101)$$

Так как  $e^2 \ll 1$ , то приходим к приближенным равенствам \*):

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -z^0 (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) [(V^0 + au\beta_{33})u + \\ &\quad + g_e(q - e^2) \beta_{33}], \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -z^0 \left\{ 2a \left( \frac{V^0}{a} + u\beta_{33} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + g_e(q - e^2) [\beta_{33}^2 - (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)^2] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

\*) Величина  $g_e(q - e^2)$  имеет порядок  $au^2$ , и поэтому слагаемые, содержащие эту величину множителем, здесь сохранены.

Если

$$V^0^2 \gg a^2 u^2,$$

что будет иметь место при скоростях объекта, превосходящих 1000 м/сек, то равенства (4.102) могут быть упрощены до вида

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -z^0 (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) u V^0, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -z^0 V^0 \left( \frac{V^0}{a} + 2u\beta_{33} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.103)$$

Замечая, что

$$|-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S| \leq 1, \quad |\beta_{33}| \leq 1,$$

получаем оценки:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &\leq z^0 u V^0, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &\leq z^0 V^0 \left( \frac{V^0}{a} + 2u \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.104)$$

При  $V^0 = 1000$  м/сек и  $z^0 = 15'$  ( $r z^0 \approx 25$  км), получим, например:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &\leq 0,3 \text{ см/сек}^2 \approx 3 \cdot 10^{-4} g_e, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &\leq 1,25 \text{ см/сек}^2 \approx 1,25 \cdot 10^{-3} g_e. \end{aligned} \right\} \quad (4.105)$$

Перейдем к отысканию эквивалентных инструментальных погрешностей  $\Delta \tilde{\omega}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{y_0}$ ,  $\Delta \tilde{\omega}_{z_0}$  (т. е. эквивалентных уходов гироскопов системы), которые войдут в правые части уравнений ошибок второй группы (4.40). Так как формула для определения  $z$  в уравнениях (4.92) не изменена по сравнению с уравнениями (4.92), то

$$\Delta \tilde{\omega}_{x_0} = 0. \quad (4.106)$$

Из сравнения же формул (4.72) и (4.92) для  $S$  и  $\omega_z$  получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{\omega}_{y_0} &= u (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) z, \\ \Delta \tilde{\omega}_{z_0} &= -(\dot{S} + u\beta_{33})z. \end{aligned} \right\} \quad (4.107)$$

Отсюда следуют оценки:

$$|\Delta \tilde{\omega}_{y_0}| < u z^0, \quad |\Delta \tilde{\omega}_{z_0}| < \left( \frac{V^0}{a} + u \right) z^0. \quad (4.108)$$

При  $V^0 = 1000$  м/сек,  $z^0 = 15'$  имеем:

$$|\Delta\tilde{\omega}_{y_0}| \leq 0,06^\circ/\text{час}, \quad |\Delta\tilde{\omega}_{z_0}| \leq 0,2^\circ/\text{час}. \quad (4.109)$$

Оценки (4.104), (4.108) показывают, что упрощение уравнений идеальной работы (4.72) до уравнений (4.92) возможно лишь при весьма малых отклонениях объекта от плоскости ортодромии. Так, уже при отклонениях порядка 25 км (для скорости движения  $V^0 \approx 1000$  м/сек) соответствующие погрешности — это следует из численных оценок (4.105), (4.109) — достаточно велики и при высоких требованиях к точности работы инерциальной системы могут оказаться недопустимыми. В самом деле, как было выяснено в гл. 2, постоянные погрешности  $\Delta\tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{n}_{y_0}$  приводят к ошибкам координат

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta\tilde{n}_{x_0}}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \\ \delta y &= \frac{\Delta\tilde{n}_{y_0}}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \end{aligned} \right\} \quad (4.109a)$$

а постоянная погрешность  $\Delta\tilde{\omega}_{y_0}$  — к ошибке

$$\delta x_1 = r \Delta\tilde{\omega}_{y_0} t. \quad (4.110)$$

Поэтому оценкам (4.104), (4.108) соответствуют следующие оценки полных ошибок определения координат:

$$\left. \begin{aligned} |\delta x_2| &\leq |\delta x| + |\delta x_1| \leq \left( \frac{2uV^0}{\omega_0^2} + urt \right) z^0, \\ |\delta y_2| &\leq \frac{2V^0}{\omega_0^2} \left( \frac{V^0}{a} + u \right) z^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

Отсюда и из соотношений (4.105), (4.109) получаем такие численные оценки ошибок за 1 час работы (время существенно лишь для  $\delta x_2$ ):

$$|\delta x_2| \leq 10 \text{ км}, \quad |\delta y_2| \leq 15 \text{ км}. \quad (4.112)$$

При переходе от формул (4.72) к формулам (4.92) мы положили  $\sin z = 0$ ,  $\cos z = 1$ . Существенного повышения

точности можно достичь, если при упрощении формул (4.72) взять

$$\sin z = z, \quad \cos z = 1. \quad (4.113)$$

Тогда вместо пятой, шестой, восьмой и двух последних формул (4.92) получатся такие:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &= \beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S + \beta_{33} z, \\ S &= \int_0^t \{ \omega_{y_0} + u [(\beta_{31} \cos S + \\ &\quad + \beta_{32} \sin S) z + \beta_{33}] \} dt + S^0, \\ \omega_{z_0} &= \omega_{y_0} z + u (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \\ g_{x_0} &= g_e (q - e^2) \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \sin \varphi \times \\ &\quad \times [-(\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) z + \beta_{33}]. \end{aligned} \right\} \quad (4.114)$$

Вместо выражений (4.95), (4.96) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sin \varphi &= \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \\ \Delta r &= -ae^2 \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S)^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.115)$$

Вместо соотношений (4.97) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_{x_0} &= g_e (q - e^2) \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \\ &\quad + \beta_{32} \sin S) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta g_{y_0} &= g_e (q - e^2) \frac{z^2}{2} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \beta_{33}, \\ \Delta \omega_{z_0} &= -u \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S). \end{aligned} \right\} \quad (4.116)$$

Соответствующие оценки ошибок координат легко могут быть получены. Заметим, что при вычислении ошибок в предшествующем случае было выяснено, что они в основном определяются погрешностями  $\Delta \omega_{y_0}$  и  $\Delta \omega_{z_0}$ . В рассматриваемом случае дело будет обстоять аналогичным образом. Эквивалентные погрешности ньютонометров и свободные уходы

гироскопов, соответствующие значениям  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$ , получаются здесь такими:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tilde{n}_{x_0} &= -u^2 \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \\ &\quad + \beta_{32} \sin S) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta\tilde{n}_{y_0} &= u \left( \frac{V^0}{a} + u\beta_{33} \right) \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S), \\ \Delta\tilde{\omega}_{y_0} &= \left( \frac{V^0}{a} + u\beta_{33} \right) \frac{z^2}{2}, \\ \Delta\tilde{\omega}_{z_0} &= -u \frac{z^2}{2} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S). \end{aligned} \right\} \quad (4.117)$$

Из равенств (4.117) вытекают оценки:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta\tilde{n}_{x_0}| &\leq au^2 \frac{z^2}{2}, \quad |\Delta\tilde{n}_{y_0}| \leq au \left( \frac{V^0}{a} + u \right) \frac{z^2}{2}, \\ |\Delta\tilde{\omega}_{y_0}| &\leq \left( \frac{V^0}{a} + u \right) \frac{z^2}{2}, \quad |\Delta\tilde{\omega}_{z_0}| \leq u \frac{z^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.118)$$

Например, при  $V^0 = 2000$  м/сек,  $z = 2^\circ$  ( $rz \approx 220$  км) получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tilde{n}_{x_0} &\leq 0,015 \text{ см/сек}^2 \approx 1,5 \cdot 10^{-5} g_e, \\ \Delta\tilde{n}_{y_0} &\leq 0,075 \text{ см/сек}^2 \approx 7,5 \cdot 10^{-5} g_e, \\ \Delta\tilde{\omega}_{y_0} &\leq 0,04^\circ/\text{час}, \quad \Delta\tilde{\omega}_{z_0} \leq 0,008^\circ/\text{час}. \end{aligned} \right\} \quad (4.119)$$

Сравнение с оценками (4.105), (4.109) показывает, насколько эффективнее формулы (4.114) по сравнению с соответствующими формулами (4.92).

Формулы (4.114) получены из соответствующих формул (4.72) заменой (4.113), а формулы (4.92) — заменой  $\sin z = 0$ ,  $\cos z = 1$  одновременно во всех соотношениях сразу. Можно поступить иначе: в формуле для  $\sin \varphi$  положить  $\sin z = 0$ ,  $\cos z = 1$ , а в формулах для  $S$  и  $\omega_{z_0}$  принять  $\sin z = z$ ,  $\cos z = 1$ . При скоростях до 2000 м/сек и отклонениях от ортодромии до 200 км ( $z \approx 2^\circ$ ) это дает оценки, близкие к оценкам (4.119).

В заключение укажем еще следующее. В подынтегральные выражения первых двух формул (4.92) входят величины  $\dot{r}\omega_{y_0}$  и  $\dot{r}\omega_{x_0}$ . Для малых по сравнению с первой космической

скоростей движения при формировании этих величин может оказаться приемлемой замена  $\dot{r}$  на  $\dot{h}$ . Это приведет к дополнительным эквивалентным погрешностям ньютонометров

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= ae^2 \dot{\varphi} \omega_y \sin \varphi \cos \varphi, \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -ae^2 \dot{\varphi} \omega_x \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

которые легко оцениваются, так как очевидно, что

$$|\dot{\varphi}| \leq \max \{ |\omega_{x_0}|, |\omega_{y_0}| \}.$$

**4.2.5. О различных способах учета горизонтальной составляющей поля тяготения Земли.** Выше рассмотрены упрощения уравнений идеальной работы инерциальной системы, определяющей ортодромические координаты, которые вытекают из приближенных представлений отдельных формул и соотношений, входящих в эти уравнения.

Дальнейшие упрощения уравнений идеальной работы могут состоять в пренебрежении целиком отдельными членами или в приближенном формировании их как функций времени по параметрам программной траектории движения объекта. Последнее возможно в том случае, если объект имеет определенную программную траекторию движения и удерживается на ней системой управления с достаточной точностью.

Рассмотрим одно из таких упрощений. В подынтегральные выражения первых двух уравнений (2.23) входят проекции вектора напряженности поля тяготения Земли на оси  $x_0$  и  $y_0$ , т. е. величины

$$\left. \begin{aligned} \frac{g_{y_2}(r, \varphi)}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \frac{g_{y_2}(r, \varphi)}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \end{aligned} \right\} \quad (4.121)$$

которые формируются по определенным инерциальной системой координатам  $S$  и  $\varphi$ . Выясним, какого рода ошибки возникнут, если эти проекции, характеризующие несферическую составляющую поля тяготения, не вводить.

Очевидно, что изъятие указанных горизонтальных составляющих вектора напряженности поля тяготения Земли из первых двух уравнений (4.121) поведет к появлению в правых

частях уравнений ошибок (4.35) эквивалентных погрешностей ньютонометров

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= -g_e(q - e^2) \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= -g_e(q - e^2) \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.122)$$

Ограничимся случаем движения объекта с постоянной скоростью  $V^0$  на постоянном удалении  $r^0$  от центра Земли в плоскости ортодромии  $z = 0$ . Полагая начальное значение угла  $S$  равным нулю, что не уменьшает общности, будем иметь для произвольного момента времени:

$$S = \frac{V^0 t}{r^0} = \dot{S}^0 t. \quad (4.123)$$

Так как при движении в плоскости ортодромии  $z = 0$  для  $\sin \varphi$  имеет место формула

$$\sin \varphi = \beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S,$$

то выражения (4.122) для  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$  представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} \Delta n_{x_0} &= -g_e(q - e^2) \left( \frac{\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2}{2} \sin 2S + \beta_{31} \beta_{32} \cos 2S \right), \\ \Delta n_{y_0} &= -g_e(q - e^2) \beta_{31} (\beta_{33} \cos S + \beta_{32} \sin S), \end{aligned} \right\} \quad (4.124)$$

где величина  $S$  задана формулой (4.123).

Пусть собственно инструментальные погрешности отсутствуют и правые части уравнений ошибок (4.35) состоят лишь из  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$ . Уравнения ошибок принимают тогда такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \delta \dot{y} = \Delta \tilde{n}_{x_0}, \\ \delta \ddot{y} + (\omega_0^2 - \omega_z^2 - \omega_x^2) \delta y + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + \\ + 2\omega_z \delta \dot{x} = \Delta \tilde{n}_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.125)$$

где через  $\omega_0^2$  обозначена величина  $\mu/r^0^3$ .



Пусть  $\dot{S}^0$  мало, так что

$$(\dot{S}^0 + u)^2 \ll \omega_0^2. \quad (4.126)$$

Тогда, как показано в § 2.3, можно вместо уравнений (4.125) рассматривать упрощенные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta\tilde{n}_{x_0}, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta\tilde{n}_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.127)$$

Решения этих уравнений в течение по крайней мере нескольких периодов частоты  $\omega_0$ , т. е. в течение нескольких часов, с большой точностью совпадают с решениями уравнений (4.125).

Полагая начальные условия уравнений (4.127) нулевыми, получаем их решения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta\tilde{n}_{x_0}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau, \\ \delta y &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta\tilde{n}_{y_0}(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (4.128)$$

Подставляя сюда вместо  $\Delta\tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta\tilde{n}_{y_0}$  их значения (4.124) и интегрируя с учетом равенства (4.123), находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= - \frac{g_e(q - e^2)}{\omega_0^2 - 4\dot{S}^0{}^2} \left[ \frac{\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2}{2} (\sin 2S - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\dot{S}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \beta_{31}\beta_{32} (\cos 2S - \cos \omega_0 t) \right], \\ \delta y &= - \frac{g_e(q - e^2)}{\omega_0^2 - \dot{S}^0{}^2} \left[ \beta_{31}\beta_{33} (\cos S - \cos \omega_0 t) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_{31}\beta_{32} \left( \sin S - \frac{\dot{S}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.129)$$

Разложим полученные выражения по степеням  $\dot{S}^0/\omega_0$ , сохранив при этом члены порядка  $(\dot{S}^0/\omega_0)^2$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta x = & -\frac{g_e(q-e^2)}{\omega_0^2} \left\{ \frac{\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2}{2} \sin 2S + \right. \\ & + \beta_{31}\beta_{32} \cos 2S - \beta_{31}\beta_{32} \cos \omega_0 t - \\ & - \frac{\dot{S}^0}{\omega_0} (\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2) \sin \omega_0 t + \frac{2\dot{S}^{0^2}}{\omega_0^2} [2\beta_{31}\beta_{32} (\cos \omega_0 t - \\ & \quad \left. - \cos 2S) - (\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2) \sin 2S] \right\}, \\ \delta y = & -\frac{g_e(q-e^2)}{\omega_0^2} \{ \beta_{31}\beta_{33} \cos S + \beta_{31}\beta_{32} \sin S + \\ & + \beta_{31}\beta_{33} \cos \omega_0 t + \beta_{31}\beta_{32} \frac{\dot{S}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \\ & + \frac{\dot{S}^{0^2}}{\omega_0^2} [\beta_{31}\beta_{33} (\cos \omega_0 t - \cos S) - \beta_{31}\beta_{32} \sin S] \}. \end{aligned} \right\} \quad (4.130)$$

Сравнение равенств (4.130) с равенствами (4.124) позволяет представить выражения для  $\delta x$ ,  $\delta y$  в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta x = & \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}}{\omega_0^2} - \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}^0}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}^0}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t - \\ & - \frac{g_e(q-e^2)}{\omega_0^2} \frac{2\dot{S}^{0^2}}{\omega_0^2} [2\beta_{31}\beta_{32} (\cos \omega_0 t - \cos 2S) - \\ & \quad \left. - (\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2) \sin 2S] \right\}, \\ \delta y = & \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}}{\omega_0^2} - \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}^0}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}^0}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t + \\ & + \frac{g_e(q-e^2)}{\omega_0^2} [\beta_{31}\beta_{33} (\cos \omega_0 t - \cos S) - \beta_{31}\beta_{32} \sin S]. \end{aligned} \right\} \quad (4.131)$$

Согласно равенствам (4.43), (4.32), ошибки  $\delta x$ ,  $\delta y$  соответствуют отклонениям оси  $z$  платформы инерциальной системы от направления к центру Земли на углы

$$\theta_{1x_0} = -\frac{\delta y}{r^0}, \quad \theta_{1y_0} = \frac{\delta x}{r^0}. \quad (4.132)$$

С другой стороны, величины

$$\theta'_{1x_0} = -\frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}}{r\omega_0^2}, \quad \theta'_{1y_0} = \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}}{r\omega_0^2} \quad (4.133)$$

есть не что иное, как углы, характеризующие отклонение направления вектора напряженности поля тяготения Земли от направления к ее центру.

Из соотношений (4.130) — (4.133) следует, что если в начальный момент отклонить ось  $z$  платформы инерциальной системы от направления к центру Земли на углы

$$\theta_{1x_0}^0 = -\theta_{1x_0}'^0, \quad \theta_{1y_0}^0 = -\theta_{1y_0}'^0, \quad (4.134)$$

т. е. совместить ее с направлением вектора напряженности поля тяготения, и сообщить платформе такую дополнительную угловую скорость, что

$$\dot{\theta}_{1x_0}^0 = -\dot{\theta}_{1x_0}'^0, \quad \dot{\theta}_{1y_0}^0 = -\dot{\theta}_{1y_0}'^0, \quad (4.135)$$

то в дальнейшем направление оси  $z$  платформы будет совпадать с направлением вектора напряженности поля тяготения с точностью до углов

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_{1x_0} &= -\frac{g_e(q-e^2)}{r^0\omega_0^2} \frac{\dot{S}^0}{\omega_0^2} a, \\ \Delta\theta_{1y_0} &= -\frac{g_e(q-e^2)}{r^0\omega_0^2} \frac{2\dot{S}^0}{\omega_0^2} b. \end{aligned} \right\} \quad (4.136)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} a &= \beta_{31}\beta_{33}(\cos \omega_0 t - \cos S) - \beta_{31}\beta_{32} \sin S, \\ b &= 2\beta_{31}\beta_{32}(\cos \omega_0 t - \cos 2S) - (\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2) \sin 2S. \end{aligned} \right\} \quad (4.137)$$

Возьмем значения  $\beta_{ij} = n_{ij}$  в соответствии с формулами (II. 4) Приложения II. Тогда

$$\beta_{31} = \sin \varphi_1, \quad \beta_{32} = \cos \varphi_1 \cos \psi_0, \quad \beta_{33} = \cos \varphi_1 \sin \psi_0,$$

где  $\varphi_1$  — широта начальной точки движения, а  $\psi_0$  — угол, составленный плоскостью ортодромии  $z=0$  с направлением на север в начальной точке.

Подставив эти значения  $\beta_{ij}$  в формулы (4.137) для  $a$  и  $b$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi_1 [\sin \psi_0 \cos \omega_0 t - \sin (\psi_0 + S)], \\ b &= \sin 2\varphi_1 \cos \psi_0 (\cos \omega_0 t - \cos 2S) - \\ &\quad - (\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \psi_0 - \sin^2 \varphi_1) \sin 2S. \end{aligned} \right\} \quad (4.138)$$

Исследование на экстремум дает:

$$\max a = 1, \quad \max b = 2. \quad (4.139)$$

Последнее значение достигается при  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$  и  $\psi_0 = 0$ . Вследствие равенств (4.139) имеют место оценки:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta \theta_{1x_0}| &\leq (e^2 - q) \frac{\dot{S}^0}{\omega_0^2}, \\ |\Delta \theta_{1y_0}| &\leq (e^2 - q) \frac{4\dot{S}^0}{\omega_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.140)$$

Для морских судов, например, когда скорость движения относительно Земли можно принять меньшей 50 узлов ( $\approx 30$  м/сек), правые части неравенств (4.140) становятся исчезающе малы. Обратившись к формулам (4.132), (4.131), можно убедиться, что при столь малых скоростях в формулах для  $\theta_{1x_0}$ ,  $\theta_{1y_0}$  пренебрежимо малы и слагаемые, содержащиеся множителем  $\dot{S}^0/\omega_0$  в первой степени. В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}^0}{r_0^0 \omega_0^3} &= (e^2 - q) (\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2) \frac{\dot{S}^0}{\omega_0}, \\ \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}^0}{r_0^0 \omega_0^3} &= (e^2 - q) \beta_{31} \beta_{32} \frac{\dot{S}^0}{\omega_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.141)$$

и при величине  $\dot{S}^0$ , соответствующей скорости 50 узлов, правые части равенств (4.141) не превышает соответственно величин  $4' \cdot 10^{-2}$  и  $2' \cdot 10^{-2}$ . Таким образом, для  $\theta_{1x_0}$  и  $\theta_{1y_0}$

получаются следующие приближенные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x_0} &= -\frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}}{r_0^0 \omega_0^2} + \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}^0}{r_0^0 \omega_0^2} \cos \omega_0 t, \\ \theta_{1y_0} &= \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}}{r_0^0 \omega_0^2} - \frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}^0}{r_0^0 \omega_0^2} \cos \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (4.142)$$

Формулы (4.142) дают, в частности, ответ на поставленный в конце § 3.2 вопрос о том, к чему приведет отсутствие компенсации влияния горизонтальной составляющей силы притяжения в гиригоризонткомпасе. Сравнив выражения (3.106) для компенсирующих моментов  $M_{x_0}^*$ ,  $M_{y_0}^*$  с выражениями (4.124) для  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$ , легко убедиться в том, что формулы (4.142) дают отклонение оси  $z$  чувствительного элемента гиригоризонткомпаса от направления к центру Земли. Отсюда следует также, что если в начальный момент ось  $z$  гиригоризонткомпаса установить по направлению вектора напряженности поля тяготения Земли (по гравитационной вертикали), то и в дальнейшем ось  $z$  будет с большой точностью совпадать с направлением гравитационной вертикали.

Для летательных аппаратов с дозвуковой скоростью полета, когда  $V^0 < 300$  м/сек, правые части неравенств (4.140) также пренебрежимо малы, а правые части равенств (4.141) оцениваются соответственно величинами 0,13 и 0,07.

Для скоростей полета объекта  $V^0 \approx 1000$  м/сек из неравенств (4.140) следует, что

$$|\Delta \theta_{1x_0}| < 5 \cdot 10^{-5} \approx 0,17, \quad |\Delta \theta_{1y_0}| < 2 \cdot 10^{-4} \approx 0,7. \quad (4.143)$$

Правые части равенств (4.141) имеют для этой скорости оценки: 0,34 и 0,17.

Таким образом, если в первых двух уравнениях (4.72) опустить слагаемые, характеризующие горизонтальную составляющую силы тяготения, то при малых скоростях движения, например до 300 м/сек, к правым частям пятого и шестого равенств (4.72) надо добавить величины

$$\Delta S = -\frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}}{r_0^0 \omega_0^2}, \quad \Delta z = -\frac{\Delta \tilde{n}_{x_0}}{r_0^0 \omega_0^2}. \quad (4.144)$$

При скоростях движения порядка 1000 м/сек необходимо, кроме того, заменить в трех предпоследних формулах (4.72), по которым формируются управляющие моменты гирорамы, величины  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  на  $\omega_{x_0} + \Delta\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0} + \Delta\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0} + \Delta\omega_{z_0}$ , где

$$\left. \begin{aligned} \Delta\omega_{x_0} &= \frac{\tilde{\Delta n}_{y_0}^0}{r_0^0 \omega_0^2}, & \Delta\omega_{y_0} &= -\frac{\tilde{\Delta n}_{x_0}^0}{r_0^0 \omega_0^2}, \\ \Delta\omega_{z_0} &= \Delta\omega_{y_0} \operatorname{tg} z. \end{aligned} \right\} \quad (4.145)$$

При любой скорости движения ось  $z$  гирорамы должна быть в начальный момент ориентирована по направлению вектора напряженности поля тяготения Земли.

Это последнее обстоятельство делает практически нецелесообразным изменение уравнений (4.72), заключающееся в изъятии из первых двух формул величин  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$  и добавлении соотношений (4.144), (4.145). В самом деле, количество вычислительных операций здесь не уменьшается, а осуществить начальную ориентацию оси  $z$  платформы по направлению вектора напряженности поля тяготения не проще, чем по направлению к центру Земли.

Можно, однако, поступить несколько иначе: опустить в подынтегральных выражениях первых двух уравнений (4.72) не слагаемые  $g_{x_0}$ ,  $g_{y_0}$ , характеризующие горизонтальную составляющую силы тяготения, а проекции составляющих силы тяжести на оси  $x_0$ ,  $y_0$ . За счет этого и добавлений, аналогичных (4.144), (4.145), можно прийти к начальной ориентации оси  $z$  платформы по направлению силы тяжести. При этом ориентация этой оси платформы по направлению силы тяжести сохранится (с некоторой погрешностью, разумеется) и во все время движения.

Проекции на оси  $x_0$ ,  $y_0$  центробежной силы от вращения Земли, действующей на единичную массу, помещенную в точке  $O$ , имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} f_{x_0} &= -ru^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ f_{y_0} &= -ru^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.146)$$

Представим подынтегральные выражения первых двух уравнений (4.72) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} + g_{x_0} &= \\ &= n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0} - \\ &\quad - g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} + g_{y_0} &= \\ &= n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0} - \\ &\quad - g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.147)$$

Теперь первые две формулы (4.92) приобретают вид:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t [n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0} - \\ &\quad - g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)] dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t [n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0} - \\ &\quad - g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z)] dt + v_{y_0}^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.148)$$

Отбросим здесь в подынтегральных выражениях последние слагаемые. С учетом равенств (4.146) получим:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t [n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} + \\ &\quad + r u^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)] dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t [n_{y_0} + \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} + \\ &\quad + r u^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z)] dt + v_{y_0}^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.149)$$

В правых частях уравнений ошибок (4.35) появятся теперь эквивалентные погрешности ньютонометров

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= g_e e^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.150)$$

Подставив сюда выражение  $\sin \varphi$  через тригонометрические функции углов  $S$ ,  $z$  и постоянные  $\beta_{ij}$ , найдем при  $z=0$ :

$$\left. \begin{aligned} \Delta \tilde{n}_{x_0} &= g_e e^2 \left( \frac{\beta_{32}^2 - \beta_{31}^2}{2} \sin 2S + \beta_{31} \beta_{32} \cos 2S \right), \\ \Delta \tilde{n}_{y_0} &= g_e e^2 (\beta_{31} \beta_{33} \cos S + \beta_{31} \beta_{32} \sin S). \end{aligned} \right\} \quad (4.151)$$

Правые части выражений (4.151) отличаются от выражений (4.124) лишь постоянным множителем, так же как и выражения (4.150) от выражений (4.122). Поэтому решением уравнений (4.125) будут выражения (4.131), и все выводы из проведенного выше обсуждения этого решения сохраняют силу. В частности, сохраняют вид оценки (4.140) и равенства (4.141), только в них величина  $(e^2 - q)$  заменяется на  $e^2$ . Так как  $e^2 \approx 2(e^2 - q)$ , то все приведенные выше численные оценки увеличиваются в два раза.

Таким образом, при небольших скоростях движения объекта по отношению к Земле можно первые два уравнения (4.72) заменить на уравнения (4.149), к правым частям пятого и шестого уравнений добавить в соответствии с равенствами (4.144), (4.150) величины

$$\left. \begin{aligned} \Delta S &= -ae^2 \sin \varphi (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \cos S + \beta_{33} \cos z), \\ \Delta z &= -\frac{ae^2 \sin \varphi}{\cos z} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \end{aligned} \right\} \quad (4.152)$$

а к  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  в предпоследних трех уравнениях (4.72) добавить, согласно (4.145), величины

$$\Delta \omega_{x_0} = \frac{\Delta \tilde{n}_{y_0}^0}{r^0 \omega_0^2}, \quad \Delta \omega_{y_0} = \frac{-\Delta \tilde{n}_{x_0}^0}{r^0 \omega_0^2}, \quad \Delta \omega_{z_0} = \Delta \omega_{y_0} \operatorname{tg} z, \quad (4.153)$$



где  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$  заданы равенствами (4.150), и в начальный момент установить ось  $z$  платформы по направлению силы тяжести, не меняя азимутальной ориентации платформы. В этом случае, в соответствии с приведенными выше оценками, для морских судов и для летательных аппаратов с дозвуковыми скоростями движения вблизи поверхности Земли ошибки определения координат будут пренебрежимо малыми, а ось  $z$  платформы во все время движения будет расположена (с пренебрежимо малой ошибкой) по направлению силы тяжести. Пренебрежение величинами (4.153) дает ошибку ориентации порядка  $0',25$  и ошибку определения координат порядка  $0,5$  км.

При скоростях движения объекта порядка  $1000$  м/сек для ошибок определения координат при введении поправок (4.145) получается оценка  $\approx 2,5$  км, а для ошибок ориентации — величина  $\approx 1',4$ . Это уже существенные ошибки. Следует, однако, иметь в виду, что приведенные оценки предельные и могут не достигаться на действительных траекториях объекта.

**4.2.6. Другие упрощения.** Продолжая рассмотрение упрощений уравнений идеальной работы (4.72), остановимся еще на одной имеющейся здесь возможности. В подынтегральные выражения упрощенных уравнений (4.149) входят величины

$$v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0}, \quad \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0}. \quad (4.154)$$

Их можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0} &= \\ &= -r \omega_{x_0} \dot{S} \sin z + r \dot{z} u \sin \varphi - \dot{r} \omega_{y_0}, \\ \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0} &= \dot{r} \omega_{x_0} - r \dot{S} (\omega_{y_0} + u \sin \varphi \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.155)$$

Если принять для  $r$  приближенное выражение (4.65), то для небольших значений  $h$ ,  $\dot{S}$  и  $\dot{z}$  формулы (4.155) могут быть упрощены таким образом:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0} &= \\ &= -\omega_{y_0} \dot{h} - a \dot{S} \omega_{x_0} \sin z + a \dot{z} u \sin \varphi, \\ \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0} &= \\ &= \omega_{x_0} \dot{h} - a \dot{S} (\omega_{y_0} + u \sin \varphi \cos z). \end{aligned} \right\} \quad (4.156)$$

Возникающие при этом погрешности эквивалентны, очевидно, некоторым погрешностям ньютонометров и легко могут быть найдены вычитанием правых частей равенств (4.155) из правых частей равенств (4.156). Определив оценки этих погрешностей, можно убедиться, что они пренебрежимо малы для дозвуковых скоростей движения вблизи поверхности Земли. Этими погрешностями в некоторых случаях можно пренебречь и при скоростях движения объекта порядка 1000 м/сек. Все зависит здесь от требований к точности инерциальной системы.

Правые части равенств (4.155), (4.156) зависят от скорости движения объекта по отношению к Земле таким образом, что обращаются в нуль, когда объект неподвижен относительно Земли. При малых скоростях движения объекта относительно Земли правые части равенств (4.155), (4.156) в силу непрерывности также оказываются малыми величинами. Так, при движении морского судна по поверхности Земли вблизи плоскости  $z=0$ , учитывая, что скорость судна много меньше периферических скоростей точек земного экватора из-за вращения Земли, получаем:

$$\begin{aligned} v_{x_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0} &\approx au \dot{z} \sin \varphi, \\ \dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0} &\approx -a \dot{S} (\beta_{33} + \sin \varphi). \end{aligned}$$

При скорости порядка 50 узлов, когда  $|a \dot{z}|, |a \dot{S}| < 30$  м/сек, имеют место оценки:

$$\left. \begin{aligned} |v_{x_0} \omega_{z_0} - \dot{r} \omega_{y_0} - f_{x_0}| &< u |a \dot{z}| \approx 0,22 \text{ см/сек}^2, \\ |\dot{r} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} - f_{y_0}| &< 2u |a \dot{S}| \approx 0,44 \text{ см/сек}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.157)$$

Если иметь в виду определение местоположения корабля с точностью 1—2 мили ( $\approx 1,8$ — $3,6$  км), то величинами (4.156) в подынтегральных выражениях уравнений (4.149) можно пренебречь. Тогда уравнения (4.149) принимают вид:

$$v_{x_0} = \int_0^t n_{x_0} dt + v_{x_0}^0, \quad v_{y_0} = \int_0^t n_{y_0} dt + v_{y_0}^0. \quad (4.158)$$

Если иметь в виду определение местоположения объекта с погрешностью, меньшей 1 мили, или если иметь в виду существенно большие скорости движения, например того же порядка величины, что и окружная скорость точек земного

экватора, то пренебрежение в уравнениях (4.149) величинами (4.156) может оказаться недопустимым.

При известных условиях можно говорить тогда о другом упрощении: о формировании величин (4.156) или (4.155) по приближенным значениям входящих в них переменных и параметров. Здесь возможны два варианта: либо информация о приближенных значениях переменных, входящих в выражения (4.155), (4.156), поступает в инерциальную систему из сторонних источников информации, либо эти переменные формируются как функции времени в соответствии с номинальной траекторией движения объекта. Последнее возможно лишь в том случае, если объект движется по заранее заданной программной траектории.

Упрощения (4.158), заключающиеся в пренебрежении величинами (4.156), а также формирование этих величин в соответствии с программной траекторией или посредством использования сторонней информации существенно изменяют первую группу (4.35) уравнений ошибок инерциальной системы.

В случае, когда величины (4.156) совсем не учитываются в уравнениях идеальной работы системы, т. е. когда принимаются равенства (4.158), в правых частях уравнений (4.35) появляются эквивалентные инструментальные погрешности  $\Delta \tilde{n}_{x_0}$ ,  $\Delta \tilde{n}_{y_0}$  ньютонометров, равные правым частям равенств (4.156), взятым с обратным знаком. Если же величины (4.156) формируются приближенно, то эквивалентные погрешности ньютонометров будут равны разностям между приближенными и истинными значениями этих величин. Изменяется также зависимость правых частей уравнений (4.35) от собственно инструментальных погрешностей.

Изменяются в обоих случаях и левые части уравнений (4.35). Теперь выражения  $v_{y_0}\omega_{z_0} - \dot{r}\omega_{y_0}$ ,  $\dot{r}\omega_{x_0} - v_{x_0}\omega_{z_0}$  в первых двух уравнениях (4.20) не формируются как функции определенных инерциальной системой координат и скоростей. Поэтому из левых частей уравнений (4.35) выпадут слагаемые, появившиеся в результате варьирования указанных выражений.

Пренебрегая, как всегда, вариацией несферической составляющей поля тяготения, вместо уравнений (4.25) получим теперь уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_{x_0} &= \delta n_{x_0}, \\ \delta \dot{v}_{y_0} &= \delta n_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.159)$$

Подставив сюда выражения для  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$ ,  $\delta v_{x_0}$ ,  $\delta v_{y_0}$ , вытекающие из соотношений (4.26), (4.24), (4.7), (4.8), (4.27), (4.12), выполнив замену переменных (4.32) и заменив  $\gamma$  на  $\theta_{1z_0}$ , а  $g_{z_0}$  на  $-\mu/r^3$ , придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} - \frac{\dot{r}}{r} \delta \dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right) \delta x - \\ - \omega_{z_0} \delta \dot{y} - \dot{\omega}_{z_0} \delta y - r \omega_{x_0} \dot{\theta}_{1z_0} + (\dot{r} \omega_{x_0} - r \omega_{y_0} \omega_{z_0}) \theta_{1z_0} = \\ = \Delta n_{x_0} + \dot{r} \Delta \omega_{y_0} + r \Delta \dot{\omega}_{y_0} - \dot{\omega}_{y_0} \Delta r + \omega_{y_0} \Delta \dot{r}, \\ \delta \ddot{y} - \frac{\dot{r}}{r} \delta \dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 + \frac{\dot{r}^2}{r^2} \right) \delta y + \\ + \omega_{z_0} \delta \dot{x} + \dot{\omega}_{z_0} \delta x - r \omega_{y_0} \dot{\theta}_{1z_0} + (\dot{r} \omega_{y_0} + r \omega_{x_0} \omega_{z_0}) \theta_{1z_0} = \\ = \Delta n_{y_0} - \dot{r} \Delta \omega_{x_0} - r \Delta \dot{\omega}_{x_0} + \dot{\omega}_{x_0} \Delta r + \omega_{x_0} \Delta \dot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (4.160)$$

Вместе с уравнениями (4.40)—(4.44) они образуют в рассматриваемом случае замкнутую систему уравнений ошибок.

Сравнение уравнений (4.160) с уравнениями (4.35) в общем случае обнаруживает их существенное различие. При  $\dot{r} = \omega_{x_0} = \omega_{y_0} = \omega_{z_0} = 0$ , т. е. в случае неподвижного объекта, эти уравнения совпадают. Последнее легко было предвидеть, так как для неподвижного объекта упрощенные уравнения (4.158) оказываются точными.

Общее исследование уравнений (4.160) может быть проведено теми же способами, которыми ранее исследовались уравнения (4.35). При этом полезно иметь в виду следующие обстоятельства.

В уравнения (4.160) входят проекции  $\theta_{1z_0}$  и  $\dot{\theta}_{1z_0}$ , которые в силу соотношений (4.44), (4.42) зависят как от переменных  $\delta x$ ,  $\delta y$ , так и от переменных  $\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$ . Таким образом, уравнения (4.160) оказываются связанными с уравнениями (4.40). От этой связи можно освободиться, подставив в уравнения (4.160) вместо  $\theta_{1z_0}$  выражение (4.44) и заменив  $\delta x_2$  через  $\delta x$  и  $\theta_{y_0}$  согласно равенствам (4.42).

Далее, упрощение уравнений идеальной работы, при котором величины (4.156) либо опускаются, либо формируются как функции времени, имеет смысл лишь при малых  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ , имеющих порядок угловой скорости вращения Земли.

Малостью  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  можно воспользоваться в этом случае и для упрощения уравнений ошибок (4.160). Для упрощения уравнений ошибок (4.160) можно использовать также малость величины  $z$ , что обычно имеет место.

### § 4.3. Упрощения в инерциальной системе, определяющей географические координаты объекта

**4.3.1. Точные уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок.** Рассмотрим инерциальную систему, определяющую географические координаты  $h$ ,  $\varphi'$ ,  $\lambda$ . Два ньютонометра системы расположены в невозмущенном положении в плоскости географического горизонта, причем один из них расположен в плоскости меридиана текущей точки объекта, а другой — в плоскости параллели. Уравнениями идеальной работы такой схемы, если в ее основу положена управляемая гиropлатформа, будут уравнения (2.26). Уравнениями ошибок, как было выяснено в п. 2.2.2, будут уравнения (2.28), (1.96), (1.97), (1.118).

Указанные уравнения были получены в гл. 2 из общих уравнений инерциальной навигации в криволинейных координатах. Как и в предшествующем параграфе, прежде чем переходить к упрощениям уравнений идеальной работы (2.26), получим эти уравнения (а также соответствующие уравнения ошибок), исходя непосредственно из рассматриваемой схемы. Будем придерживаться той же последовательности рассуждений и выкладок, что и при выводе соответствующих уравнений для ортодромической координатной сетки.

Обозначим, как и раньше, связанный с Землей трехгранник через  $O_1\xi\eta\zeta$  (ось  $\zeta$  совпадает с осью вращения Земли), а сопровождающий трехгранник географической координатной сетки — через  $Ox_0y_0z_0$ . Взаимное расположение этих трехгранников определится следующей таблицей направляющих косинусов:

	$x_0$	$y_0$	$z_0$	
$\xi$	$-\sin \lambda$	$-\sin \varphi' \cos \lambda$	$\cos \varphi' \cos \lambda$	
$\eta$	$\cos \lambda$	$-\sin \varphi' \sin \lambda$	$\cos \varphi' \sin \lambda$	
$\zeta$	0	$\cos \varphi'$	$\sin \varphi'$	(4.161)

Вычислим проекции  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  абсолютной угловой скорости  $\omega$  трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  на его оси. Трехгранник  $Ox_0y_0z_0$

вращается по отношению к трехграннику  $O_1\xi\eta\zeta$  с угловой скоростью  $\omega - u$ . Поэтому производные  $dx_0/dt$ ,  $dy_0/dt$ ,  $dz_0/dt$  ортов  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  осей  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  в системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$  представляются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} &= (\omega - u) \times x_0, & \frac{dy_0}{dt} &= (\omega - u) \times y_0, \\ \frac{dz_0}{dt} &= (\omega - u) \times z_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.162)$$

Умножая левую и правую части второго равенства (4.162) скалярно на  $z_0$  или третьего на  $y_0$ , получаем:

$$\omega_{x_0} = u_{x_0} + \frac{dy_0}{dt} \cdot z_0 = u_{x_0} - \frac{dz_0}{dt} \cdot y_0. \quad (4.163)$$

В результате аналогичного умножения третьего равенства (4.162) на  $x_0$  или первого на  $z_0$  находим:

$$\omega_{y_0} = u_{y_0} + \frac{dz_0}{dt} \cdot x_0 = u_{y_0} - \frac{dx_0}{dt} \cdot z_0. \quad (4.164)$$

И таким же образом

$$\omega_{z_0} = u_{z_0} + \frac{dx_0}{dt} \cdot y_0 = u_{z_0} - \frac{dy_0}{dt} \cdot x_0. \quad (4.165)$$

Для дальнейшего вычисления воспользуемся таблицей направляющих косинусов (4.161). Согласно этой таблице, например,

$$\left. \begin{aligned} u_{x_0} &= 0, & z_0 &= \xi \cos \varphi' \cos \lambda + \eta \cos \varphi' \sin \lambda + \zeta \sin \varphi', \\ \frac{dy_0}{dt} &= -\xi \frac{d}{dt} (\sin \varphi' \cos \lambda) - \eta \frac{d}{dt} (\sin \varphi' \sin \lambda) + \\ &\quad + \xi \frac{d}{dt} (\cos \varphi'), \end{aligned} \right\} \quad (4.166)$$

где  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  — единичные векторы осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  (производная  $dy_0/dt$  взята в системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$ , т. е. в предположении, что  $d\xi/dt = d\eta/dt = d\zeta/dt = 0$ ).

Подставляя значения (4.166) в равенство (4.163), получаем:

$$\omega_{x_0} = -\dot{\varphi}'. \quad (4.167)$$

Аналогично из таблицы (4.161) и равенств (4.164), (4.165) следует, что

$$\omega_{y_0} = (\dot{\lambda} + u) \cos \varphi', \quad \omega_{z_0} = (\dot{\lambda} + u) \sin \varphi' = \omega_{y_0} \operatorname{tg} \varphi'. \quad (4.168)$$

Найдем теперь проекции  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $v_{z_0}$  абсолютной скорости  $v$  вершины трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  на направления его ребер. Для этого воспользуемся формулами (4.9).

Возьмем снова за точку  $P$  центр Земли  $O_1$ . Тогда координаты  $x_0^{O_1}$ ,  $y_0^{O_1}$ ,  $z_0^{O_1}$  точки  $O_1$  в трехграннике  $Ox_0y_0z_0$  получатся такими:

$$\left. \begin{aligned} x_0^{O_1} &= 0, & y_0^{O_1} &= \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}}, \\ z_0^{O_1} &= -h - a(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.169)$$

Формулы (4.169) для  $y_0^{O_1}$  и  $z_0^{O_1}$  получаются, если провести меридиональное сечение земного сфероида, проходящее через

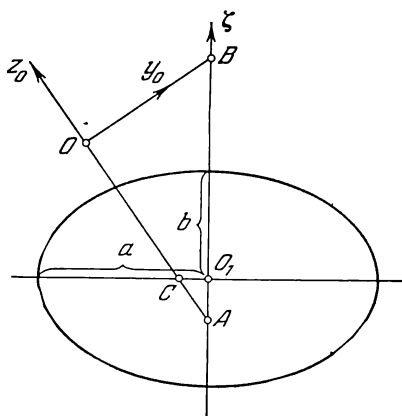


Рис. 4.3.

оси  $y_0$ ,  $z_0$  (рис. 4.3), рассмотреть подобные прямоугольные треугольники  $O_1AC$  и  $OAB$  и воспользоваться равенствами (1.8а).

Подставив выражения (4.169) в равенства (4.9) и заметив, что ввиду неподвижности точки  $O_1$  относительно трехгранника  $O_1\xi\eta\zeta$

$$v_{x_0}^{O_1} = v_{y_0}^{O_1} = v_{z_0}^{O_1} = 0, \quad (4.170)$$

придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} - \omega_{y_0} [h + a(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}] - \\ - \omega_{z_0} \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} = 0, \\ \frac{ae^2 \dot{\varphi}' [\cos^2 \varphi' - \sin^2 \varphi' (1 - e^2 \sin^2 \varphi')]}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + \\ + v_{y_0} + \omega_{x_0} [h + a(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}] = 0, \\ - \dot{h} - \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \dot{\varphi}'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + v_{z_0} + \\ + \omega_{x_0} \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.171)$$

В силу формул (4.167), (4.168)  $\dot{\varphi}' = -\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{z_0} = \omega_{y_0} \operatorname{tg} \varphi'$ . С учетом этого уравнения (4.171) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} - \omega_{y_0} \left[ h + \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] &= 0, \\ v_{y_0} + \omega_{x_0} \left[ h + \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} \right] &= 0, \\ -\dot{h} + v_{z_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.172)$$

Отсюда следуют соотношения, аналогичные соотношениям (4.12):

$$v_{x_0} = r_2 \omega_{y_0}, \quad v_{y_0} = -r_3 \omega_{x_0}, \quad v_{z_0} = \dot{h}, \quad (4.173)$$

где величины

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h, \\ r_3 &= \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{1/2}} + h \end{aligned} \right\} \quad (4.174)$$

суть радиусы кривизны главных нормальных сечений поверхности  $h = \text{const}$  в точке  $O$ ;  $r_3$  — радиус кривизны меридионального сечения (проходящего через ось  $y_0$ ), а  $r_2$  — радиус кривизны перпендикулярного ему сечения (проходящего через ось  $x_0$ ).

Согласно основному уравнению инерциальной навигации, показания  $n_{x_0}$ ,  $n_{y_0}$  ньютометров, установленных вдоль осей  $x_0$ ,  $y_0$  трехгранника  $x_0 y_0 z_0$ , определяются равенствами

$$n_{x_0} = \omega_{x_0}, \quad n_{y_0} = \omega_{y_0} - g_{y_0}, \quad (4.175)$$



где в соответствии с соотношениями (4.8) и (4.173)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= \dot{v}_{x_0} + \dot{h}\omega_{y_0} - \omega_{z_0}v_{y_0}, \\ \omega_{y_0} &= \dot{v}_{y_0} + \omega_{z_0}v_{x_0} - \dot{h}\omega_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.176)$$

Теперь все исходные соотношения, необходимые для построения уравнений идеальной работы рассматриваемой схемы, найдены. Разрешая уравнения (4.175), (4.176) относительно  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ , приходим к первым двум уравнениям (2.26). Из соотношений (4.173) и второго соотношения (4.168) следуют третья, четвертая и пятая формулы (2.26). Из равенства (4.167) и первого равенства (4.168) получаются шестая и седьмая формулы (2.26). Восьмая и девятая формулы (2.26) совпадают с формулами (4.174). К перечисленным соотношениям, дополняя их до замкнутой системы уравнений, присоединяются последние шесть формул (2.26).

Перейдем к непосредственному выводу уравнений ошибок, для чего проварьируем уравнения идеальной работы (2.26), только что подтвержденные прямым выводом. Учтем, как и в предшествующем параграфе, лишь основные инструментальные погрешности схемы: погрешности  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$  ньютонометров, свободные уходы  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$  гироскопов, а также погрешность  $\Delta h$  информации о величине  $h$ .

Из первых двух уравнений (2.26) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta\dot{v}_{x_0} &= \delta n_{x_0} + \delta v_{y_0}\omega_{z_0} + v_{y_0}\delta\omega_{z_0} - \dot{h}\delta\omega_{y_0} - \Delta\dot{h}\omega_{y_0}, \\ \delta v_{y_0} &= \delta n_{y_0} + \Delta\dot{h}\omega_{x_0} + \dot{h}\delta\omega_{x_0} - \\ &\quad - \delta v_{x_0}\omega_{z_0} - v_{x_0}\delta\omega_{z_0} + \delta g_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.177)$$

где вариация  $\delta g_{y_0}$  должна быть вычислена в соответствии с последними тремя равенствами (2.26) и первой формулой (1.27).

Из третьего, четвертого, восьмого и девятого соотношений (2.26) находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta v_{x_0} &= r_2 \delta\omega_{y_0} + \omega_{y_0} \delta r_2, \\ \delta v_{y_0} &= -r_3 \delta\omega_{x_0} - \omega_{x_0} \delta r_3, \\ \delta r_2 &= \frac{ae^2 \sin \varphi' \cos \varphi' \delta\varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}} + \Delta h, \\ \delta r_3 &= \frac{3ae^2 (1 - e^2) \sin \varphi' \cos \varphi' \delta\varphi'}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi')^{5/2}} + \Delta h. \end{aligned} \right\} \quad (4.178)$$

Из шестого и седьмого равенств (2.26) вытекают уравнения в вариациях

$$\delta\dot{\varphi}' = -\delta\omega_{x_0}, \quad \delta[(\dot{\lambda} + u) \cos \varphi'] = \delta\omega_{y_0}. \quad (4.179)$$

Наконец, из пятого, десятого, одиннадцатого и двенадцатого соотношений (2.26) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \dot{\alpha} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta - \Delta\omega_{x_0}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha - \Delta\omega_{y_0}, \\ \delta\omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha - \Delta\omega_{z_0}, \\ \delta\omega_{z_0} &= \delta\omega_{y_0} \operatorname{tg} \varphi' + \omega_{y_0} \frac{\delta\varphi'}{\cos^2 \varphi'}. \end{aligned} \right\} \quad (4.180)$$

Здесь  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$  — свободные уходы гироскопической платформы вокруг соответствующих осей, а углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  характеризуют возмущенное положение связанного с платформой трехгранника  $xuz$  по отношению к его невозмущенному положению  $x_0y_0z_0$ . Взаимное расположение трехгранников  $xuz$  и  $x_0y_0z_0$  определяется таблицей направляющих косинусов (4.22). В соответствии с этой таблицей для входящих в уравнения (4.177) вариаций  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$  получаются следующие представления:

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{x_0} &= \Delta n_{x_0} + n_{y_0}\gamma - n_{z_0}\beta, \\ \delta n_{y_0} &= \Delta n_{y_0} + n_{z_0}\alpha - n_{x_0}\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.181)$$

В формулах (4.181) через  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$  обозначены, как обычно, инструментальные погрешности ньютонометров;  $n_{x_0}$ ,  $n_{y_0}$  заданы равенствами (4.175), (4.176), а для определения  $n_{z_0}$  служит соотношение

$$n_{z_0} = w_{z_0} - g_{z_0}. \quad (4.182)$$

Здесь

$$w_{z_0} = \ddot{h} + \omega_{x_0}v_{y_0} - \omega_{y_0}v_{x_0}, \quad (4.183)$$

а

$$g_{z_0} = g_{z_2} \cos(\varphi' - \varphi) + g_{y_2} \sin(\varphi' - \varphi), \quad (4.184)$$

где функции  $g_{y_2}(r, \varphi)$  и  $g_{z_2}(r, \varphi)$  заданы формулами (1.27).

Уравнения (4.177)–(4.180) вместе с соотношениями (4.181)–(4.183), (4.175), (4.176), (1.27) представляют собой

замкнутую систему дифференциальных и алгебраических уравнений, определяющих ошибки  $\delta\varphi'$ ,  $\delta\lambda$  вычисления географических координат. Покажем, что указанные уравнения равносильны уравнениям (2.28), (1.96), (1.97).

Из уравнений (4.179), вводя аналогично (4.37) новые переменные

$$\alpha_2 = -\delta\varphi', \quad \beta_2 = \delta\lambda \cos \varphi', \quad \gamma_2 = \delta\lambda \sin \varphi' \quad (4.184a)$$

и принимая во внимание равенства

$$\gamma_2 = \beta_2 \operatorname{tg} \varphi', \quad \omega_{z_0} = \omega_{y_0} \operatorname{tg} \varphi', \quad (4.185)$$

получаем в новых переменных уравнения

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_2 + \omega_{y_0} \gamma_2 - \omega_{z_0} \beta_2 &= \delta\omega_{x_0}, \\ \dot{\beta}_2 + \omega_{z_0} \alpha_2 - \omega_{x_0} \gamma_2 &= \delta\omega_{y_0}, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_{x_0} \beta_2 - \omega_{y_0} \alpha_2 &= \delta\omega_{z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (4.186)$$

совпадающие с уравнениями (4.38).

Теперь из уравнений (4.186) и (4.180), вводя переменные

$$\theta_{x_0} = \alpha_2 - \alpha, \quad \theta_{y_0} = \beta_2 - \beta, \quad \theta_{z_0} = \gamma_2 - \gamma, \quad (4.187)$$

получим уравнения, отличающиеся от уравнений (1.96) лишь тем, что в правых частях вместо величин  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$  будут стоять равносильные им величины  $-\Delta\omega_{x_0}$ ,  $-\Delta\omega_{y_0}$ ,  $-\Delta\omega_{z_0}$ .

Получим первую группу уравнений ошибок. При их получении пренебрежем, как и ранее, вариацией несферической составляющей поля тяготения Земли, а также произведениями вариаций переменных на величины, содержащие множителем  $e^2$ . Это равносильно, очевидно, принятию в уравнениях (4.177), (4.178), (4.184) следующих упрощений:

$$\left. \begin{aligned} r_2 = r_3 = r, \quad \dot{h} = \dot{r}, \quad \ddot{h} = \ddot{r}, \\ \delta r_2 = \delta r_3 = \Delta r = \Delta h, \quad \delta \dot{r}_2 = \delta \dot{r}_3 = \Delta \dot{h}, \\ \delta g_{y_0} = 0, \quad g_{z_0} = -\mu/r^3. \end{aligned} \right\} \quad (4.188)$$

Но тогда уравнения (4.177) вместе с соотношениями (4.178) совпадут с уравнениями (4.25), из них получатся уравне-

ния (4.28), а после замены переменных (4.32) — уравнения (4.35), равносильные уравнениям (2.28).

**4.3.2. Возможные упрощения уравнений определения географических координат.** Рассмотрим возможности упрощения уравнений (2.26) идеальной работы инерциальной системы, определяющей географические координаты. Эти упрощения, очевидно, должны быть аналогичны упрощениям для случая ортодромических координат, которые рассмотрены в предыдущем параграфе. Так, здесь возможны упрощения, связанные с малостью эксцентриситета Земли, близостью движения объекта к ее поверхности, малостью скорости движения объекта и т. д. В случае ортодромических координат рассматривались еще упрощения, вытекающие из близости движения объекта к плоскости ортодромии. В географических координатах аналогом этой плоскости будет плоскость экватора. В принципе можно перенести сюда полученные в предыдущем параграфе результаты. Однако упрощения, связанные с близостью движения объекта к плоскости экватора, не могут представлять практического интереса, так как область возможных движений объекта нельзя, очевидно, ограничить лишь областью, прилегающей к экватору.

Для небольших высот, когда величина  $h/a$  имеет тот же порядок, что и  $e^2$  (т. е. для  $h < 50 - 100$  км), в уравнениях (2.26) возможны упрощения, касающиеся формул для  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $g_{y_0}$  и формул, связывающих координаты  $r$ ,  $\varphi$  с координатами  $h$ ,  $\varphi'$  (последние две формулы). Так, можно принять

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= a \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' + h \right), \\ r_3 &= a \left( 1 - e^2 + \frac{3e^2}{2} \sin^2 \varphi' \right) + h. \end{aligned} \right\} \quad (4.189)$$

Из последних трех формул (2.26) и из формул (1.27) можно получить также такое приближенное представление для  $g_{y_0}$ :

$$g_{y_0} = \frac{g_e q}{2} \sin 2\varphi'. \quad (4.190)$$

В этом случае последние три формулы (2.26) выпадают из уравнений идеальной работы.

Особо следует отметить упрощения, возможные при движении по поверхности эллипсоида Клеро, т. е. по поверхности океана. В этом случае  $h = 0$ . Поэтому высотомер становится ненужным и навигационная система становится автономной. В этом случае упрощаются выражения для  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $g_{y_0}$  и подынтегральные выражения в первых двух уравнениях (2.26).

Заметим, что при движении по поверхности Земли последние три равенства (2.26) можно совсем исключить из уравнений идеальной работы. В самом деле, рассмотрим сумму

$$-v_{x_0}\omega_{z_0} + g_{y_0}, \quad (4.191)$$

входящую в подынтегральное выражение второго уравнения (2.26). Так как

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= r_2\omega_{y_0}, & \omega_{y_0} &= (\dot{\lambda} + u) \cos \varphi', \\ \omega_{z_0} &= (\dot{\lambda} + u) \sin \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (4.192)$$

то

$$-v_{x_0}\omega_{z_0} + g_{y_0} = -r_2(\dot{\lambda} + u)^2 \sin \varphi' \cos \varphi'. \quad (4.193)$$

Но поскольку эллипсоид Клеро является уровенной поверхностью, то

$$-r_2u^2 \sin \varphi' \cos \varphi' + g_{y_0} = 0 \quad (4.194)$$

и поэтому

$$-v_{x_0}\omega_{z_0} + g_{y_0} = -r_2\dot{\lambda}(\dot{\lambda} + 2u) \sin \varphi' \cos \varphi'. \quad (4.195)$$

Произведение  $v_{y_0}\omega_{z_0}$ , входящее в первое уравнение (2.26), может быть представлено в виде

$$v_{y_0}\omega_{z_0} = r_3\dot{\varphi}'(\dot{\lambda} + u \sin \varphi'). \quad (4.196)$$

При медленном движении объекта (например, морское судно), когда величины  $v_{y_0}\omega_{z_0}$ ,  $-v_{x_0}\omega_{z_0} + g_{y_0}$  малы, в них можно заменить  $r_2$ ,  $r_3$  на  $a$  и пренебречь величинами  $\dot{\varphi}'\dot{\lambda}$  и  $\dot{\lambda}^2$  по сравнению с  $\dot{\lambda}u$  и  $\dot{\varphi}'u$ . Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} -v_{x_0}\omega_{z_0} + g_{y_0} &= -2au\dot{\lambda} \sin \varphi' \cos \varphi', \\ v_{y_0}\omega_{z_0} &= au\dot{\varphi}' \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.197)$$

В результате уравнения идеальной работы в случае медленного движения объекта по поверхности Земли примут вид:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t (n_{x_0} + a\dot{\varphi}' u \sin \varphi') dt + v_{x_0}^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_{y_0} - 2au\dot{\lambda} \sin \varphi' \cos \varphi') dt + v_y^0; \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{a} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi' \right), \\ \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{a} \left( 1 + e^2 - \frac{3e^2}{2} \sin^2 \varphi' \right); \\ \varphi' &= \int_0^t \omega_{x_0} dt + \varphi'^0; \quad \lambda = \int_0^t \left( \frac{\omega_{y_0}}{\cos \varphi'} - u \right) dt + \lambda^0; \\ M_y^2 &= H_2 \omega_{x_0}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_0}, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_{z_0}; \\ \omega_{z_0} &= \omega_{y_0} \operatorname{tg} \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (4.198)$$

Разумеется, при медленном движении объекта может случиться, что слагаемыми  $au\dot{\varphi}' \sin \varphi'$ ,  $2au\dot{\lambda} \sin \varphi' \cos \varphi'$  в подынтегральных выражениях можно пренебречь по малости или сформировать их по приближенным значениям координат. Таким же образом можно поступить и со слагаемыми, содержащими множителями  $e^2$ , в выражениях для  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ .

Ввиду явной аналогии упрощений в ортодромических и географических координатах ограничимся для последних сделанными выше замечаниями. Соответствующие величины эквивалентных погрешностей можно найти из сравнения упрощенных и точных формул совершенно подобно тому, как это было сделано в случае ортодромических координат.

#### § 4.4. Определение ортодромических координат при ориентации ньютометров в плоскости географического горизонта

Инерциальная система, оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  платформы которой в невозмущенном положении совпадают с соответствующими осями сопровождающего трехгранника географической координатной сетки, а определяемыми координатами являются

географические широта и долгота, имеет, по-видимому, некоторые преимущества перед другими. К числу этих преимуществ относится, во-первых, то, что географические координаты традиционны, общеприняты и универсальны. Далее, уравнения идеальной работы инерциальной системы относительно просты. Наконец, немаловажным преимуществом является то, что ось  $z_0$  платформы такой инерциальной системы совпадает с направлением нормали к уровенному эллипсоиду, а ось  $y_0$  расположена в плоскости географического меридиана. Это облегчает, в частности, задачу начальной подготовки системы, ибо ось  $z_0$  платформы в начальный момент (при старте с поверхности Земли) может быть автоматически установлена в исходное положение (по направлению отвеса) при помощи сигналов ньютонометров, а ось  $y_0$  может быть приведена в меридиан с помощью гироскопов системы, для чего можно использовать гирокомпасный эффект. Совпадение оси  $z_0$  с нормалью к эллипсоиду облегчает также использование в системе информации о высоте  $h$  движения над поверхностью Земли.

Однако географическая координатная сетка вырождается на полюсах Земли, и поэтому работа инерциальной системы с сохранением необходимой точности оказывается невозможной в непосредственной окрестности полюсов.

Этого недостатка не имеет инерциальная система, работающая в ортодромических координатах. Полярную ось  $\xi'$  ортодромического трехгранника  $\xi'\eta'\zeta'$  всегда можно выбрать таким образом, чтобы движение объекта происходило вблизи плоскости  $z = 0$ , т. е. вне непосредственной окрестности полюса ортодромической сетки. Но ортодромические координаты сферические. Поэтому ось  $z_0$  платформы должна быть ориентирована по направлению радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Это может затруднить решение задачи предстартовой ориентации платформы.

Выше, при рассмотрении упрощений уравнений идеальной работы ортодромической системы, было показано, что для малых скоростей движения объекта указанный недостаток может быть устранен. Надо только заменить первые два уравнения (4.72) на уравнения (4.149) с одновременным прибавлением к правым частям пятого и шестого уравнений (4.72) величин  $\Delta S$  и  $\Delta z$ , определенных равенствами (4.152), а также заменить  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  в трех предпоследних уравнениях (4.72) на  $\omega_{x_0} + \Delta\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0} + \Delta\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0} + \Delta\omega_{z_0}$ , где  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$

заданы равенствами (4.153). Тогда, будучи в начальный момент ориентированной по нормали к уровенному эллипсоиду (по отвесу), ось  $z_0$  платформы сохраняет эту ориентацию во все время движения с некоторой ошибкой, зависящей от скорости движения по отношению к Земле. Этот путь, как было показано в п. 4.2.5, приемлем для скоростей движения, сравнимых с окружной скоростью точек земного экватора, но уже при скорости порядка 1000 м/сек может привести к существенным ошибкам (ошибки определения координат  $\approx 2,5$  км и ошибки ориентации платформы  $\approx 1',4$ ).

Имеется другой путь, по которому можно обойти указанное затруднение. Оставив определяемыми координатами ортодромические координаты  $z$  и  $S$ , изменим невозмущенную ориентацию связанного с платформой трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  следующим образом. Ось  $z_0$  его совместим с направлением нормали к уровенному эллипсоиду, а ось  $x_0$  расположим в плоскости, параллельной плоскости ортодромии  $z=0$ .

Для определения единичных векторов  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  осей трехгранника  $x_0 y_0 z_0$  получаем тогда формулы:

$$\left. \begin{aligned} z_0 &= z_2, & x_0 &= \frac{\xi' \times z_0}{|\xi' \times z_0|}, \\ y_0 &= z_0 \times x_0 = \frac{\xi' - z_0(\xi' \cdot z_0)}{|\xi \times z_0|}. \end{aligned} \right\} \quad (4.199)$$

Здесь вектор  $z_2$  — единичный вектор нормали к уровенному эллипсоиду, а  $\xi'$  — единичный вектор полярной оси ортодромического трехгранника  $O_1 \xi' \eta' \zeta'$ .

Обозначим через  $Ox_3 y_3 z_3$  сопровождающий трехгранник ортодромической координатной сетки и построим таблицу направляющих косинусов осей  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ , определенных равенствами (4.199), по отношению к осям  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ :

	$x_0$	$y_0$	$z_0$	
$x_3$	$\gamma_{11}$	$\gamma_{12}$	$\gamma_{13}$	
$y_3$	$\gamma_{21}$	$\gamma_{22}$	$\gamma_{23}$	
$z_3$	$\gamma_{31}$	$\gamma_{32}$	$\gamma_{33}$	(4.200)

Положение совпадающей с нормалью к эллипсоиду Клеро оси  $z_0$  по отношению к осям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , жестко связанным с Землей, задано третьим столбцом таблицы (4.161). Положение осей  $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$  по отношению к осям  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  задано



таблицами (4.1) и (1.16). Из этих данных легко находятся элементы третьего столбца таблицы (4.200). После очевидных преобразований, в которых используются тождества

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi' &= \sin(\varphi' - \varphi) \cos \varphi + \cos(\varphi' - \varphi) \sin \varphi, \\ \cos \varphi' &= \cos(\varphi' - \varphi) \cos \varphi - \sin(\varphi' - \varphi) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4.201)$$

тождества (4.3) и свойства ортогональности таблиц (4.1), (1.16), (4.161), получаются следующие выражения для элементов  $\gamma_{iz}$  таблицы (4.200):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{13} &= \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \gamma_{23} &= \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ \gamma_{33} &= \cos(\varphi' - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4.202)$$

Теперь из второго равенства (4.199) находим:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{\sin(\widehat{\xi', z_0})} \left[ \cos z \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{\sin z \sin(\varphi' - \varphi)}{\cos \varphi} \times \right. \\ &\quad \times (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \cos S + \beta_{33} \cos z) \Big], \\ \gamma_{21} &= \frac{\sin z \sin(\varphi' - \varphi)}{\sin(\widehat{\xi', z_0}) \cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S), \\ \gamma_{31} &= -\frac{\cos z \sin(\varphi' - \varphi)}{\sin(\widehat{\xi', z_0}) \cos \varphi} (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S). \end{aligned} \right\} \quad (4.203)$$

Наконец, из третьего равенства (4.199)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{12} &= -\frac{1}{\sin(\widehat{\xi', z_0})} \times \\ &\quad \times \frac{\sin(\varphi' - \varphi) \cos(\widehat{\xi', z_0}) (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S)}{\cos \varphi}, \\ \gamma_{22} &= \frac{1}{\sin(\widehat{\xi', z_0})} \left[ \cos z - \frac{\sin(\varphi' - \varphi) \cos(\widehat{\xi', z_0})}{\cos \varphi} \times \right. \\ &\quad \times (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) \Big], \\ \gamma_{32} &= \frac{1}{\sin(\widehat{\xi', z_0})} [\sin z - \cos(\varphi' - \varphi) \cos(\widehat{\xi', z_0})]. \end{aligned} \right\} \quad (4.204)$$

В формулах (4.203), (4.204) угол  $(\widehat{\xi'}, z_0)$  определен равенством

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\xi'}, z_0) &= \xi' \cdot z_0 = \sin z \cos(\varphi' - \varphi) + \\ &+ \frac{\cos z \sin(\varphi' - \varphi)}{\cos \varphi} (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z). \end{aligned} \quad (4.205)$$

Обозначим через  $p_{x_0}$ ,  $p_{y_0}$ ,  $p_{z_0}$  проекции на оси  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  угловой скорости вращения трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  по отношению к трехграннику  $Ox_3y_3z_3$ . Применяя формулы, аналогичные формулам (4.163), (4.165), получим:

$$\left. \begin{aligned} p_{x_0} &= \dot{\gamma}_{12}\gamma_{13} + \dot{\gamma}_{22}\gamma_{23} + \dot{\gamma}_{32}\gamma_{33}, \\ p_{y_0} &= \dot{\gamma}_{13}\gamma_{11} + \dot{\gamma}_{23}\gamma_{21} + \dot{\gamma}_{33}\gamma_{31}, \\ p_{z_0} &= \dot{\gamma}_{11}\gamma_{12} + \dot{\gamma}_{21}\gamma_{22} + \dot{\gamma}_{31}\gamma_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (4.206)$$

Так как выражения для проекций  $\omega_{x_3}$ ,  $\omega_{y_3}$ ,  $\omega_{z_3}$  абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $Ox_3y_3z_3$  на его оси известны [они заданы равенствами (4.15)], теперь можно найти проекции абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  на оси этого трехгранника. Они равны:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= p_{x_0} + \omega_{x_3}\gamma_{11} + \omega_{y_3}\gamma_{21} + \omega_{z_3}\gamma_{31}, \\ \omega_{y_0} &= p_{y_0} + \omega_{x_3}\gamma_{12} + \omega_{y_3}\gamma_{22} + \omega_{z_3}\gamma_{32}, \\ \omega_{z_0} &= p_{z_0} + \omega_{x_3}\gamma_{13} + \omega_{y_3}\gamma_{23} + \omega_{z_3}\gamma_{33}. \end{aligned} \right\} \quad (4.207)$$

Дальнейший план заключается в следующем: при помощи формул (4.9) найти связь между проекциями  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  абсолютной скорости вершины трехгранника  $Ox_0y_0z_0$  на его оси и проекциями  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ , а также связь  $\omega_{z_0}$  с  $\omega_{x_0}$  и  $\omega_{y_0}$ . Знание этих зависимостей позволит, очевидно, решить поставленную задачу, т. е. построить замкнутую систему точных уравнений идеальной работы для инерциальной системы, ось  $z_0$  платформы которой совпадает с нормалью к уровенному эллипсоиду, а координатами, определяемыми системой, остаются ортодромические координаты  $z$  и  $S$ .

В целях упрощения дальнейших выкладок и записей ограничимся наиболее интересным частным случаем задачи: расположим оси  $\xi'$ ,  $\eta'$  ортодромического трехгранника

в плоскости земного меридиана, совместив ось  $\eta'$  с осью вращения Земли, т. е. с осью  $\zeta$ .

Тогда величины  $\beta_{3i}$ , входящие в формулы (4.202)–(4.204), окажутся равными:

$$\beta_{32} = 1, \quad \beta_{31} = \beta_{33} = 0. \quad (4.208)$$

В формулы (4.202)–(4.204) входят также тригонометрические функции  $\sin(\varphi' - \varphi)$ ,  $\cos(\varphi' - \varphi)$ . Если разложить их в ряды по степеням  $e$  и ограничиться при этом лишь членами с  $e^2$ , то получим:

$$\sin(\varphi' - \varphi) = e^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \cos(\varphi' - \varphi) = 1. \quad (4.209)$$

В то же время из третьей формулы (4.3) при условии (4.208) имеем:

$$\sin \varphi = \cos z \sin S. \quad (4.210)$$

Подстановка выражений (4.208)–(4.210) в формулы (4.202)–(4.204) значительно упрощает последние, приводя их к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} &= 1, & \gamma_{12} &= -e^2 \sin z \sin S \cos S, \\ \gamma_{13} &= e^2 \cos z \sin S \cos S, \\ \gamma_{21} &= e^2 \sin z \sin S \cos S, & \gamma_{22} &= 1, \\ \gamma_{23} &= -e^2 \sin z \cos z \sin^2 S, \\ \gamma_{31} &= -e^2 \cos z \sin S \cos S, \\ \gamma_{32} &= e^2 \sin z \cos z \sin^2 S, \\ \gamma_{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.211)$$

Теперь для  $p_{x_0}$ ,  $p_{y_0}$ ,  $p_{z_0}$  с точностью до величин порядка  $e^2$  получаются значения:

$$\left. \begin{aligned} p_{x_0} &= \dot{\gamma}_{32} = e^2 [\dot{z} (\cos^2 z - \sin^2 z) + \\ &\quad + 2\dot{S} \sin z \cos z \sin S \cos S], \\ p_{y_0} &= \dot{\gamma}_{13} = e^2 [-\dot{z} \sin z \sin S \cos S + \\ &\quad + \dot{S} \cos z (\cos^2 S - \sin^2 S)], \\ p_{z_0} &= \dot{\gamma}_{21} = e^2 [\dot{z} \cos z \sin S \cos S + \\ &\quad + \dot{S} \sin z (\cos^2 S - \sin^2 S)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.212)$$

Из соотношений (4.15), (4.208) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_3} &= -\dot{z} + u \cos S, & \omega_{y_3} &= \dot{S} \cos z - u \sin z \sin S, \\ \omega_{z_3} &= \dot{S} \sin z + u \cos z \sin S. \end{aligned} \right\} \quad (4.213)$$

Подставив выражения (4.213), (4.212), (4.211) в формулы (4.207), получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -\dot{z} + u \cos \dot{S} + \\ &\quad + e^2 \sin S [\dot{z} \sin S (\cos^2 z - \sin^2 z) + \\ &\quad + 2\dot{S} \cos S \sin z \cos z - u \sin S \cos S], \\ \omega_{y_0} &= (\dot{S} \cos z - u \sin z \sin S) \times \\ &\quad \times [1 + e^2 (\cos^2 S - \sin^2 S \cos^2 z)], \\ \omega_{z_0} &= \dot{S} \sin z + u \cos z \sin S + \\ &\quad + e^2 [\dot{S} \sin z (\cos^2 S - \sin^2 S - \cos^2 z \sin^2 S) + \\ &\quad + u \cos z \sin S (\cos^2 S + \sin^2 z \sin^2 S)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.214)$$

Найдем связь  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  с  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ . Воспользуемся для этого соотношениями (4.9). Возьмем в качестве точки  $P$  центр Земли  $O_1$ . Координаты этой точки в трехграннике  $Ox_3y_3z_3$  суть

$$x_3^{O_1} = y_3^{O_1} = 0, \quad z_3^{O_1} = -r. \quad (4.215)$$

Так как взаимная ориентация трехгранников  $x_3y_3z_3$  и  $x_0y_0z_0$  определена направляющими косинусами (4.200), (4.211), а вершины этих трехгранников совпадают, то координаты  $x_0^{O_1}$ ,  $y_0^{O_1}$ ,  $z_0^{O_1}$  центра Земли  $O_1$  равны:

$$\left. \begin{aligned} x_0^{O_1} &= r e^2 \cos z \sin S \cos S, \\ y_0^{O_1} &= -r e^2 \sin z \cos z \sin^2 S, & z_0^{O_1} &= -r. \end{aligned} \right\} \quad (4.216)$$

Возьмем в качестве приближенного значения для  $r$  выражение

$$r = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right) + h. \quad (4.217)$$

Полагая величину  $h/a$  имеющей тот же порядок малости, что и  $e^2$ , из формул (4.216) получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_0^{O_1} &= ae^2 \cos z \sin S \cos S, \\ y_0^{O_1} &= -ae^2 \sin z \cos z \sin^2 S, \\ z_0^{O_1} &= -a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right) - h. \end{aligned} \right\} \quad (4.218)$$

Внесем выражения (4.218) для  $x_0^{O_1}$ ,  $y_0^{O_1}$ ,  $z_0^{O_1}$  в формулы (4.9), предварительно заменив  $\sin^2 \varphi$  согласно (4.210). Так как точка  $O_1$  неподвижна в системе координат  $O_1 \xi \eta \zeta$ , то

$$v_{x_0}^{O_1} = v_{y_0}^{O_1} = v_{z_0}^{O_1} = 0 \quad (4.219)$$

и формулы (4.9) дают уравнения:

$$\left. \begin{aligned} &ae^2 \frac{d}{dt} (\cos z \sin S \cos S) + \\ &\quad + v_x - a\omega_{y_0} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 z \sin^2 S + \frac{h}{a} \right) + \\ &\quad + ae^2 \omega_{z_0} \sin z \cos z \sin^2 S = 0, \\ &-ae^2 \frac{d}{dt} (\sin z \cos z \sin^2 S) + \\ &\quad + v_y + ae^2 \omega_{z_0} \cos z \sin S \cos S + \\ &\quad + a\omega_{x_0} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 z \sin^2 S + \frac{h}{a} \right) = 0, \\ &-a \frac{d}{dt} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \cos^2 z \sin^2 S + \frac{h}{a} \right) + \\ &\quad + v_{z_0} - ae^2 \omega_{x_0} \sin z \cos z \sin^2 S - \\ &\quad - ae^2 \omega_{y_0} \cos z \sin S \cos S = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.220)$$

Выполнив дифференцирование в третьем уравнении (4.220) и подставив в него  $\omega_{x_0}$  и  $\omega_{y_0}$  из (4.214), находим:

$$v_{z_0} = \dot{h}. \quad (4.221)$$

Первые два уравнения (4.220) после выполнения дифференцирования и замены  $\dot{S}$  и  $\dot{z}$  на их выражения из первого

и второго равенств (4.214) приводят к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \omega_{y_0} a \left[ 1 + \frac{h}{a} + e^2 \left( \frac{1}{2} \cos^2 z \sin^2 S - \cos^2 S \right) \right] + \\ &\quad + \omega_{x_0} a e^2 \sin z \sin S \cos S, \\ v_{y_0} &= -\omega_{x_0} a \left[ 1 + \frac{h}{a} + e^2 \sin^2 S \left( \frac{1}{2} \cos^2 z - \sin^2 z \right) \right] + \\ &\quad + \omega_{y_0} a e^2 \sin z \sin S \cos S. \end{aligned} \right\} \quad (4.222)$$

Разрешая ее относительно  $\omega_{x_0}$  и  $\omega_{y_0}$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{a} \left[ 1 - \frac{h}{a} + e^2 \sin^2 S \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 z \right) \right] + \\ &\quad + \frac{v_{x_0}}{a} e^2 \sin z \sin S \cos S, \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{a} \left[ 1 - \frac{h}{a} + e^2 \left( \cos^2 S - \frac{1}{2} \cos^2 z \sin^2 S \right) \right] - \\ &\quad - \frac{v_{y_0}}{a} e^2 \sin z \sin S \cos S. \end{aligned} \right\} \quad (4.223)$$

Из второго и третьего уравнений (4.214), исключая из них  $\dot{S}$ , получаем связь  $\omega_{z_0}$  с  $\omega_{y_0}$ :

$$\omega_{z_0} = \omega_{y_0} \operatorname{tg} z (1 - e^2 \sin^2 S) + \\ + \frac{u \sin S}{\cos z} [1 + e^2 (\cos^2 S - \sin^2 z \sin^2 S)]. \quad (4.224)$$

В дальнейшем понадобятся косинусы углов между осями  $x_0$ ,  $y_0$  и осью  $y_2$  географического сопровождающего трехгранника. Они нужны для вычисления проекций горизонтальной составляющей вектора напряженности поля тяготения на оси  $x_0$ ,  $y_0$ . Так как эта горизонтальная составляющая имеет порядок  $e^2$ , то можно принять

$$\cos(\widehat{x_0, y_2}) = \cos(\widehat{x_3, y_1}), \quad \cos(\widehat{y_0, y_2}) = \cos(\widehat{y_3, y_1}), \quad (4.225)$$

где  $y_1$  — направленная на север ось геоцентрического сопровождающего трехгранника. Обращаясь к равенствам (1.20)

и принимая во внимание равенства (4.208), приходим к формулам:

$$\cos(\widehat{x_0, y_2}) = \frac{\cos S}{\cos \varphi}, \quad \cos(\widehat{y_0, y_2}) = -\frac{\sin z \sin S}{\cos \varphi}. \quad (4.226)$$

Выражение для проекции  $g_{y_2}$  вектора напряженности поля тяготения Земли на ось  $y_2$  представлено первой формулой (1.30). Сохраняя в ней лишь члены порядка  $e^2$ , получаем:

$$g_{y_2} = -\frac{geq}{2} \sin 2\varphi. \quad (4.227)$$

Теперь с учетом (4.210), (4.226) находим проекции вектора напряженности поля тяготения на оси  $x_0, y_0$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{x_0} &= \frac{geq}{2} \cos z \sin 2S, \\ g_{y_0} &= -\frac{geq}{2} \sin^2 S \sin 2z. \end{aligned} \right\} \quad (4.228)$$

Все соотношения, необходимые для составления уравнений идеальной работы, найдены. Составим уравнения идеальной работы рассматриваемой инерциальной системы.

В них войдут прежде всего уравнения для определения  $v_{x_0}, v_{y_0}$ , аналогичные первым двум уравнениям (4.26):

$$\left. \begin{aligned} v_{x_0} &= \int_0^t \left( n_{x_0} + v_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{h} \omega_{y_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{geq}{2} \cos z \sin 2S \right) dt + v_{x_0}^0, \\ v_{y_0} &= \int_0^t \left( n_{y_0} + \dot{h} \omega_{x_0} - v_{x_0} \omega_{z_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{geq}{2} \sin^2 S \sin 2z \right) dt + v_{y_0}^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.229)$$

К этим уравнениям должны быть присоединены соотношения (4.223), (4.224), посредством которых по известным

$v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  находятся  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_0} &= -\frac{v_{y_0}}{a} \left[ 1 - \frac{h}{a} + e^2 \sin^2 S \left( 1 - \frac{3}{2} \cos^2 z \right) \right] + \\ &\quad + \frac{v_{x_0}}{a} e^2 \sin z \sin S \cos S, \\ \omega_{y_0} &= \frac{v_{x_0}}{a} \left[ 1 - \frac{h}{a} + e^2 \left( \cos^2 S - \frac{1}{2} \cos^2 z \sin^2 S \right) \right] - \\ &\quad - \frac{v_{y_0}}{a} e^2 \sin z \sin S \cos S, \\ \omega_{z_0} &= \omega_{y_0} \operatorname{tg} z (1 - e^2 \sin^2 S) + \\ &\quad + \frac{u \sin S}{\cos z} [1 + e^2 (\cos^2 S - \sin^2 z \sin^2 S)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.230)$$

Далее следуют уравнения для отыскания  $S$  и  $z$  по известным  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ . Они получаются из первых двух уравнений (4.213) и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} z &= \int_0^t [-\omega_{x_0} + u \cos S + \\ &\quad + e^2 (-\omega_{x_0} \sin^2 S \cos 2z + \omega_{y_0} \sin z \sin 2S)] dt + z^0, \\ S &= \int_0^t \frac{1}{\cos z} \{ \omega_{y_0} [1 - e^2 (\cos^2 S - \sin^2 S \cos^2 z)] + \\ &\quad + u \sin z \sin S \} dt + S^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.231)$$

Наконец, в уравнения идеальной работы входят, как обычно, соотношения для формирования управляющих моментов

$$M_y^2 = -H_2 \omega_{x_0}, \quad M_x^1 = H_1 \omega_{y_0}, \quad M_x^3 = -H_3 \omega_{z_0}. \quad (4.232)$$

Уравнения ошибок рассматриваемой инерциальной системы сводятся к уравнениям (2.28), (1.96), (1.97) и могут быть получены тем же путем, что и для систем, рассмотренных в двух предшествующих параграфах.

В заключение сопоставим уравнения (4.229) — (4.232) с уравнениями (2.26) с учетом упрощений (4.189), (4.190). Если в уравнениях (4.229) — (4.232) положить  $z = 0$ , что



соответствует движению объекта в плоскости географического меридиана, а в уравнениях (2.26) также считать движение объекта происходящим в плоскости этого же меридиана, то легко убедиться, что уравнения (2.26) с учетом упрощений (4.189), (4.190) и уравнения (4.229) — (4.232) равносильны друг другу. Для этого надо лишь заметить, что трехгранники  $x_0y_0z_0$  в двух этих системах развернуты относительно друг друга на угол  $\pi/2$ . Поэтому переменная  $z$  в уравнениях (4.229) — (4.232) соответствует долготе  $\lambda$  в уравнениях (2.26), а переменная  $S$  соответствует геоцентрической широте  $\varphi$ , связанной с географической широтой  $\varphi'$  соотношением

$$\varphi' - \varphi = \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi' = \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi. \quad (4.233)$$

Полезно отметить еще следующее обстоятельство. Уравнения (4.229) — (4.232) получены в предположении (4.208), т. е. для случая, когда полярная ось ортодромической координатной сетки располагается в плоскости земного экватора. Это ограничивающее предположение можно было бы снять. Однако уравнения при этом, естественно, усложняются. В то же время, если считать, что вычислительное устройство инерциальной системы может выполнять как вычисления по уравнениям (2.26), так и вычисления по уравнениям (4.229) — (4.232), то двух этих вариантов достаточно, чтобы обеспечить работу системы для произвольной траектории движения объекта. В низких широтах, когда  $\varphi < \frac{\pi}{4}$ , следует воспользоваться уравнениями (2.26), в высоких широтах — уравнениями (4.229) — (4.232). Тогда, очевидно,  $z < \frac{\pi}{4}$ .

## Коррекция инерциальных систем от доплеровского измерителя скорости (или от лага)

### § 5.1. Проблема асимптотической устойчивости инерциальной системы. Скоростные девиации

В предшествующих трех главах рассмотрена коррекция инерциальных систем от высотомера. Было показано, в частности, что привлечение информации о расстоянии  $h$  объекта до поверхности Земли позволяет обеспечить неасимптотическую устойчивость инерциальной системы, во всяком случае для произвольного движения объекта на постоянном удалении от центра Земли и для кеплерова движения.

Информация о величине  $h$  может быть использована двумя способами. В первом из них в схеме сохраняются все три ньютометра, а информация о величине  $h$  используется лишь для формирования модуля величины  $\mu/r^3$  напряженности поля тяготения Земли в уравнениях идеальной работы. В этом случае однородное уравнение ошибок первой группы в векторной форме принимает вид:

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = \dot{0}. \quad (5.1)$$

В проекциях на оси трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого направлена вдоль  $\mathbf{r}$ , уравнение (5.1) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - \\ - 2\omega_z \dot{\delta y} + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \dot{\delta z} = 0, \\ \delta \ddot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - \\ - 2\omega_x \dot{\delta z} + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \dot{\delta x} = 0, \\ \delta \ddot{z} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 - \omega_y^2 \right) \delta z + (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) \delta x - \\ - 2\omega_y \dot{\delta x} + (\omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x) \delta y + 2\omega_x \dot{\delta y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

При втором способе использования информации от высотомера из схемы изымается ньютонометр, ориентированный по оси  $z$ , и тогда однородные уравнения ошибок первой группы имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - 2\omega_z \dot{\delta y} &= 0, \\ \ddot{\delta y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + (\omega_x \omega_y + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \dot{\delta x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

В гл. 2 было показано, что уравнения (5.2), (5.3) в тех случаях, когда коэффициенты их становятся постоянными, имеют своими решениями незатухающие колебания. В простейшем случае, когда  $r = \text{const}$ ,  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$  — это гармонические колебания с частотой Шулера. Таким образом, здесь имеет место неасимптотическая устойчивость. Естественно поставить задачу обеспечения асимптотически устойчивого движения инерциальной системы в окрестности положения, определяемого уравнениями идеальной работы. Эта задача может быть, очевидно, решена введением в уравнения (5.2), (5.3) слагаемых, пропорциональных  $\dot{\delta x}$ ,  $\dot{\delta y}$ ,  $\dot{\delta z}$ .

Системы (5.2), (5.3) суть уравнения в вариациях соответствующих уравнений идеальной работы. Поэтому ввести в уравнения (5.2), (5.3) слагаемые, пропорциональные  $\dot{\delta x}$ ,  $\dot{\delta y}$ ,  $\dot{\delta z}$ , можно, если надлежащим образом изменить уравнения идеальной работы инерциальной системы, а именно: ввести в уравнения идеальной работы такие слагаемые, вариации которых привели бы к появлению величин, пропорциональных  $\dot{\delta x}$ ,  $\dot{\delta y}$ ,  $\dot{\delta z}$ .

Обратившись к первой группе уравнений идеальной работы (1.36), изменим \*) ее следующим образом ( $k_1 = \text{const}$ ):

$$\mathbf{v}' = \int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v}' + \mathbf{g} - k_1 \mathbf{v}') dt + \mathbf{v}^0, \quad \mathbf{r}' = \int_0^t (\mathbf{v}' - \mathbf{m} \times \mathbf{r}') dt + \mathbf{r}^0. \quad (5.4)$$

---

\*) Уравнения (5.4) содержат  $\mathbf{v}'$  и  $\mathbf{r}'$  (в отличие от  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ ) потому, что при изменении уравнений идеальной работы, в соответствии с (5.4),  $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}$  даже при отсутствии инструментальных погрешностей и правильно заданных начальных условиях [см. (5.5)].

Пусть элементы схемы идеальны, т. е. не имеют инструментальных погрешностей, а величина  $r(t)$  для формирования модуля вектора  $\mathbf{g}$  напряженности поля тяготения известна точно. Тогда из соотношений (5.4), (1.36) вместо уравнения (5.1) получается такое векторное уравнение для ошибки  $\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ :

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu \delta \mathbf{r}}{r^3} = -k_1 \frac{d \mathbf{r}}{dt}. \quad (5.5)$$

В проекциях на оси трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совпадает с  $\mathbf{r}$ , вместо уравнений (5.2) теперь получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - k_1 \omega_z) \delta y - 2\omega_z \delta \dot{y} + \\ + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y + k_1 \omega_y) \delta z + 2\omega_y \delta \dot{z} = -k_1 r \omega_y, \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x - k_1 \omega_x) \delta z - 2\omega_x \delta \dot{z} + \\ + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_1 \omega_z) \delta x + 2\omega_z \delta \dot{x} = k_1 r \omega_x, \\ \delta \ddot{z} + k_1 \delta \dot{z} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 - \omega_y^2 \right) \delta z + \\ + (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y - k_1 \omega_y) \delta x - 2\omega_y \delta \dot{x} + \\ + (\omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x + k_1 \omega_x) \delta y + 2\omega_x \delta \dot{y} = k_1 \dot{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Соответственно для схемы с двумя ньютонометрами вместо уравнений (5.3) придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - k_1 \omega_z) \delta y - 2\omega_z \delta \dot{y} = -k_1 r \omega_y, \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_1 \omega_z) \delta x + 2\omega_z \delta \dot{x} = k_1 r \omega_x. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Рассмотрим однородные уравнения (5.5) — (5.7). Решения однородных уравнений (5.5), (5.6), как это следует из вида уравнения (5.5), представляют собой затухающие колебания.

Вектор  $\delta \mathbf{r}$ , а значит, и  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  в однородных уравнениях (5.6) при  $k_1 > 0$ ,  $r = \text{const}$  стремятся со временем к нулю независимо от закона изменения по времени  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . Несколько иначе обстоит дело с решениями  $\delta x$ ,  $\delta y$  однородных уравнений (5.7). Они могут быть затухающими или, наоборот, возрастающими со временем в зависимости от соотношения между величинами  $k_1$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ , а при переменных  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  — и в зависимости от вида функций  $\omega_x(t)$ ,  $\omega_y(t)$ ,  $\omega_z(t)$ .

При  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ,  $r = \text{const}$  решения уравнений (5.7) с течением времени стремятся, очевидно, к нулю. При  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ,  $r = \text{const}$ ,  $\omega_y = \text{const}$ , т. е. при движении объекта с постоянной скоростью по большому кругу на сфере с центром в точке  $O_1$ , не участвующей во вращении Земли, уравнения (5.7) разделяются и условием затухания при  $k_1 > 0$  оказывается неравенство

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 > 0 \quad \left( \omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3} \right). \quad (5.8)$$

При движении объекта с постоянной скоростью по параллели, если принять, что ось  $u$  расположена в плоскости земного меридиана, будем иметь:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \text{const}, \quad \omega_z = \text{const}, \quad r = \text{const}. \quad (5.9)$$

Коэффициенты однородных уравнений (5.7) будут в этом случае постоянными, что позволяет для исследования устойчивости применить критерий Гурвица.

Характеристическое уравнение системы (5.7) имеет вид:

$$\begin{aligned} p^4 + 2k_1 p^3 + (2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2 + k_1^2) p^2 + \\ + k_1 (2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2) p + \\ + (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_z^2) + k_1^2 \omega_z^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Неравенства Гурвица дают следующие условия асимптотической устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} k_1 > 0, \quad 2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 + 2k_1^2 - \omega_y^2 > 0, \\ (8\omega_z^2 + 2k_1^2)(2\omega_0^2 - \omega_y^2) + \omega_y^4 > 0, \\ (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_z^2) + k_1^2 \omega_z^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

В области параметров  $k_1$ ,  $\omega_y^2$ ,  $\omega_z^2$ , в которой удовлетворяются неравенства (5.11), решение однородных уравнений (5.7) будет затухающим.

Интересно сравнить области (5.11) асимптотической устойчивости однородных уравнений (5.7) с областями неасимптотической устойчивости однородных уравнений (5.3), в которые превращаются уравнения (5.7) при  $k_1 = 0$ . Условия неасимптотической устойчивости уравнений (5.3) определяются неравенствами (2.45). Области неасимптотической устойчивости в плоскости параметров  $\omega_z^2$ ,  $\omega_y^2$  представлены на рис. 5.1.

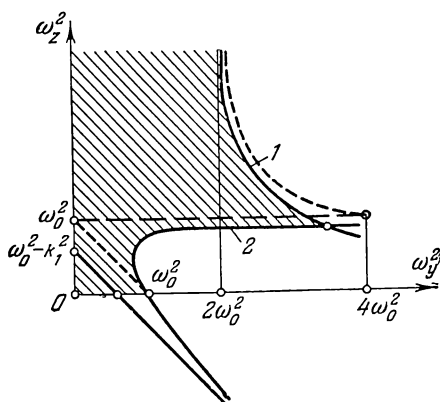


Рис. 5.1.

Легко видеть, что при  $k_1 = 0$  условия (5.11) превращаются в условия (2.45). Таким образом, в силу непрерывности при достаточно малых  $k_1$  области неасимптотической устойчивости, приведенные на рис. 2.1, становятся областями асимптотической устойчивости однородных уравнений (5.7). Легко заметить также, что при увеличении  $k_1$  область 1 (рис. 2.1) не сужается. Это видно из того, что при

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0 \quad (5.12)$$

условия (5.11) выполняются при любом  $k_1 > 0$ . При любом  $k_1 > 0$  выполняются также условия (5.11) в полуполосе  $\omega_z^2 > \omega_0^2$ ,  $\omega_y^2 < 2\omega_0^2$ .

В общем случае второе неравенство (5.11) выполняется при выполнении третьего и четвертого. Третье неравенство

разбивает плоскость параметров  $\omega_z^2$ ,  $\omega_y^2$  на три области (рис. 5.1). Кривая, образующая границы областей, — это гипербола 1 (на рисунке показана одна ее ветвь)

$$\omega_z^2 = -k_1^2/4 + \omega_y^4/[8(\omega_y^2 - 2\omega_0^2)]. \quad (5.13)$$

Асимптотами гиперболы являются прямые

$$\omega_y^2 = 2\omega_0^2, \quad \omega_z^2 = (\omega_0^2 - k_1^2)/4 + \omega_y^2/8. \quad (5.14)$$

Неравенству  $(8\omega_z^2 + 2k_1^2)(2\omega_0^2 - \omega_y^2) + \omega_y^4 > 0$  соответствует область между ветвями гиперболы, а так как одна из ее ветвей лежит целиком в нижней полуплоскости \*)  $\omega_z^2 < 0$ , то остается область между ветвью гиперболы 1 и прямыми  $\omega_z^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 = 0$ .

Четвертому неравенству (5.11) соответствует гипербола 2

$$\omega_y^2 = \omega_0^2 - \omega_z^2 + k_1^2\omega_z^2/(\omega_0^2 - \omega_z^2), \quad (5.15)$$

асимптотами которой являются прямые

$$-k_1^2 + \omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 = 0, \quad \omega_z^2 = \omega_0^2. \quad (5.16)$$

Одна из ветвей гиперболы (5.15) лежит в полуплоскости \*)  $\omega_y^2 < 0$ , вторая — в полуплоскости  $\omega_y^2 > 0$ . Эта последняя ветвь пересекает ось абсцисс  $\omega_z^2 = 0$  в точке  $\omega_y^2 = \omega_0^2$  и гиперболу (5.13) в точке с абсциссой  $\omega_y^2 \leq 4\omega_0^2$ . Область асимптотической устойчивости однородных уравнений (5.7) при  $k_1 > 0$  на рис. 5.1 заштрихована. Для сравнения здесь пунктиром нанесены также границы области неасимптотической устойчивости уравнений (5.3). При  $k_1 = 0$  указанные области, естественно, совпадают. При  $k_1 \rightarrow \infty$  областью устойчивости будет полоса  $\omega_y^2 < 2\omega_0^2$ ,  $\omega_z^2 > 0$ .

Таким образом, изменение уравнений идеальной работы в соответствии с (5.4) позволяет ввести затухание в уравнения ошибок первой группы. Однако это достигается ценой того, что в правых частях уравнений ошибок (5.5) — (5.7)

---

\*) Физический смысл имеет, разумеется, лишь первый квадрат плоскости  $\omega_y^2$ ,  $\omega_z^2$ .

О частях графиков гипербол (5.14), (5.15), лежащих в полуплоскостях  $\omega_z^2 < 0$ ,  $\omega_y^2 < 0$ , говорится лишь для пояснения геометрии рис. 5.1. Для этого же на рис. 5.1 нанесена и часть прямой  $-k_1^2 + \omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 = 0$ , лежащая в полуплоскости  $\omega_z^2 < 0$ .

появляются дополнительные возмущения, пропорциональные скорости движения объекта. Эти возмущения приводят к ошибкам системы — скоростным девиациям. Дело обстоит здесь точно таким же образом, как при демпфировании физического маятника Шулера, рассмотренного в гл. 3.

Оценим величину скоростной девиации. Рассмотрим движение объекта вдоль земного экватора. Пусть ось  $x$  трехгранника  $x_{yz}$  направлена вдоль экватора. Тогда  $\omega_z = \omega_x = 0$ ,  $\omega_y = \text{const}$ . Уравнения (5.7) разделяются. Первое из них принимает вид:

$$\delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + \omega_0^2\delta x = -k_1r\omega_y. \quad (5.17)$$

Если  $\omega_y = \text{const}$ , то установившееся значение скоростной девиации будет:

$$\delta\tilde{x} = -\frac{k_1r\omega_y}{\omega_0^2}. \quad (5.18)$$

Для эффективного («заметного») демпфирования величины  $k_1$  должна иметь порядок  $\omega_0$ ; если положить  $k_1 = \omega_0$ , то

$$\delta\tilde{x} = -\frac{r\omega_y}{\omega_0}. \quad (5.19)$$

Теперь видно, что уже для неподвижного относительно Земли объекта, когда  $\omega_y/\omega_0 \approx 1/16$ , значение  $|\delta\tilde{x}|$  имеет величину порядка 400 км, что, конечно, недопустимо.

Чтобы сохранить точность работы демпфированной инерциальной системы, надо устранить скоростные девиации. Для этого, очевидно, нужна информация о величине и направлении абсолютной скорости объекта. Одним из возможных источников такой информации является доплеровский измеритель скорости, который позволяет измерить скорость движения объекта по отношению к Земле. Так как угловая скорость вращения Земли известна с большой точностью, то сложение показаний доплеровского измерителя с величиной переносной скорости объекта из-за вращения Земли позволяет получить необходимую для коррекции абсолютную скорость.

Для морских судов источником информации об относительной скорости может быть также лаг (при этом скорости морских течений надо полагать известными).

Прежде чем перейти к коррекции инерциальной системы от доплеровского измерителя (или лага), обратим внимание еще на одну возникающую здесь возможность.



Изменим уравнения идеальной работы (1.36) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \int_0^t \left[ \mathbf{n} - \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{g} - k_1 \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right) \right] dt + \frac{d\mathbf{r}^0}{dt}, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right) dt + \mathbf{r}^0. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Пусть инструментальные погрешности ньютонометров и гироскопических измерителей абсолютной угловой скорости отсутствуют. Пусть, далее, трехгранник *хуз*, связанный с платформой инерциальной системы, каким-либо способом удерживается в положении, когда его ось *z* совпадает с *r*. Это может быть сделано, например, посредством гравиметрических схем с ньютонометрами \*). В этом случае координаты, определяемые инерциальной системой из решения уравнений (5.20), не используются для ориентации оси *z* платформы вдоль радиуса-вектора *r*. Вместо уравнений ошибок (5.6) получим тогда уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - 2\omega_z \delta\dot{y} + \\ + (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \delta z + 2\omega_y \delta\dot{z} = 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \delta z - 2\omega_x \delta\dot{z} + \\ + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = 0, \\ \delta\ddot{z} + k_1 \delta\dot{z} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 - \omega_y^2 \right) \delta z + \\ + (\omega_z \omega_x - \dot{\omega}_y) \delta x - 2\omega_y \delta\dot{x} + \\ + (\omega_z \omega_y + \dot{\omega}_x) \delta y + 2\omega_x \delta\dot{y} = -k_1 \mathbf{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

\*) См. нашу книгу «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.

Вместо уравнений (5.7), если величина  $r$  известна точно, будем иметь соответственно такие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + (\omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z) \delta y - 2\omega_z \delta \dot{y} = 0, \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) \delta x + 2\omega_z \delta \dot{x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

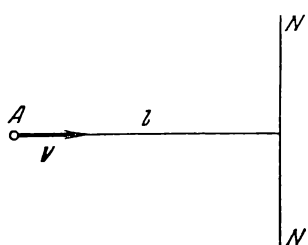
Структура левых частей уравнений (5.21), (5.22) несколько отличается от левых частей уравнений (5.6), (5.7). Однако в уравнениях (5.21), (5.22), как и в уравнениях (5.6), (5.7), есть слагаемые  $k_1 \delta \dot{x}$ ,  $k_1 \delta \dot{y}$ ,  $k_1 \delta \dot{z}$ , создающие эффект демпфирования. В то же время правые части уравнений (5.22) равны нулю, что означает отсутствие скоростных девиаций, а скоростные девиации в уравнениях (5.21) создаются лишь вертикальной составляющей  $\dot{r}$  скорости объекта и при  $r = \text{const}$  также отсутствуют.

На первый взгляд может показаться, что скоростные девиации убраны без дополнительной информации о скорости объекта, во всяком случае без информации об ее горизонтальной составляющей. На самом деле это не так. Действительно, мы предположили, что ось  $z$  трехгранника  $xuz$ , связанного с платформой, ориентирована вдоль  $r$  посредством гравиметрической схемы, а гироскопические измерители абсолютной угловой скорости трехгранника  $xuz$  идеальны. Но тогда известны  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , а следовательно (заметим, что  $r$  известно), и горизонтальные составляющие абсолютной скорости объекта  $v_x = r\omega_y$ ,  $v_y = -r\omega_x$ . Таким образом, дополнительная информация о скорости здесь использована, хотя она и получена (если не говорить о величине  $r$ ) посредством лишь инерциальных элементов.

## § 5.2. Необходимые сведения о доплеровском измерителе скорости

Работа доплеровского измерителя скорости основана на известном эффекте Доплера. Элементарная теория этого эффекта сводится к следующему.

Пусть (рис. 5.2) в точке  $A$  расположен излучатель электромагнитных волн. Пусть в этой же точке расположен



приемник отраженных от плоскости  $NN$  волн. Пусть, далее, точка  $A$  движется со скоростью  $V$  по отношению к плоскости  $NN$ , причем направление  $V$  нормально этой плоскости. Излучаемый сигнал может быть представлен в форме

$$E_1 = E_1^0 \sin \omega t, \quad (5.23)$$

Рис. 5.2.

где  $\omega$  — круговая частота излучаемого сигнала.

Тогда принимаемый сигнал можно записать в виде

$$E_2 = E_2^0 \sin \left[ \omega t - \omega \frac{2 \left( l^0 - \int_0^t V dt \right)}{c} \right], \quad (5.24)$$

где  $V$  — модуль скорости точки  $A$ ,  $l^0$  — расстояние от точки  $A$  до плоскости  $NN$  в начальный момент времени,  $c$  — скорость света.

Если  $\omega$  — круговая частота излучаемого сигнала, то круговая частота принимаемого отраженного сигнала равна:

$$\omega' = \frac{d}{dt} \left[ \omega t - \omega \frac{2 \left( l^0 - \int_0^t V dt \right)}{c} \right] = \omega \left( 1 + \frac{2V}{c} \right). \quad (5.25)$$

Допплеровское смещение частоты

$$\Delta \omega = \omega' - \omega = \frac{2\omega}{c} V, \quad (5.26)$$

т. е. величина доплеровского смещения частоты пропорциональна скорости  $V$  перемещения точки по отношению к отражающей плоскости.

Аналогичная зависимость имеет место при направленном облучении земной поверхности с движущегося по отношению

к ней объекта\*). В самом деле, пусть (рис. 5.3) из точки  $A$  (объекта) по направлению  $AB$  послан пакет (цуг) электромагнитных волн. После отражения в точке  $B$  от земной поверхности он принимается затем приемником в точке  $C$ , в которую переместится объект за время между моментами излучения и приема. Если скорость объекта  $V$  составляет угол  $\varphi$  с направлением излучения  $AB$ , то как  $V$ , так и  $\varphi$  можно считать постоянными за время между моментами излучения и приема, а угол  $\delta$  — малым. Поэтому доплеровский сдвиг частоты

$$\Delta\omega = \frac{2\omega}{c} V \cos \varphi, \quad (5.27)$$

т. е. сдвиг частоты пропорционален проекции вектора  $V$  на направление излучения — приема.

Таким образом, если на борту объекта есть три излучателя-приемника, облучающие земную поверхность по направлениям  $q_1, q_2, q_3$ , то получаются три проекции  $V_1, V_2, V_3$  вектора относительной скорости объекта на эти направления. Обозначив через  $q^1 q^2 q^3$  трехгранник, взаимный с трехгранником  $q_1 q_2 q_3$ , найдем тогда вектор  $V$  в таком виде:

$$V = q^1 V_1 + q^2 V_2 + q^3 V_3. \quad (5.28)$$

Ориентация антенн доплеровского измерителя относительно корпуса объекта задана, т. е. задано положение единичных векторов  $q_1, q_2, q_3$ . Известна также ориентация платформы инерциальной системы по отношению к корпусу объекта. Это позволяет по величинам  $V_1, V_2, V_3$  получить проекции  $V_x, V_y, V_z$  вектора  $V$  скорости объекта по отношению к Земле на направления осей чувствительности ньютонометров инерциальной системы.

Заметим, что инерциальная система определяет абсолютную скорость движения той точки, в которой (или вблизи которой)

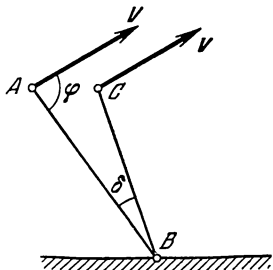


Рис. 5.3.

\*) См., например, Винницкий А. С., Очерк основ радиолокации при непрерывном излучении радиоволн, изд-во «Советское радио», 1961; Астафьев Г. П., Шебшаевич В. С., Юрков Ю. А., Радионавигационные устройства и системы, изд-во «Советское радио», 1958.

расположены чувствительные массы ньютометров. Допплеровский измеритель определяет проекции на направления излучения—приема относительной скорости тех точек объекта, в которых (или вблизи которых) расположены антенны. Места расположения антенн (или пар антенн: излучающей и принимающей) разнесены относительно друг друга и по отношению к месту, в котором на объекте установлены чувствительные элементы инерциальной системы. Это ведет к тому, что вектор относительной скорости, определенный инерциальной системой, будет отличаться от определенного доплеровским измерителем даже в том случае, если и инерциальная система и доплеровский измеритель были бы идеальны. Однако интеграл от разности их, очевидно, мал, а именно им и определяется эффект указанной погрешности. Поэтому в дальнейшем будем считать, что доплеровский измеритель дает относительную скорость той же точки объекта, координаты которой определяются инерциальной системой.

Отметим еще следующее обстоятельство. Излучение антенн происходит в телесном угле конечной величины, поэтому облучению подвергаются целые участки поверхности Земли. Следовательно, принимаемый отраженный сигнал содержит некоторый спектр доплеровских смещений частот. К такому же эффекту приводит изменение  $V$  и  $\varphi$  за время излучения и приема цуга волн (или пакета импульсов). В то же время доплеровский измеритель работает при достаточно высоком уровне случайных помех. Это приводит к тому, что эффективная полоса пропускания тракта обработки принимаемого сигнала выбирается достаточно узкой. Вследствие этого доплеровский измеритель не может дать мгновенного значения относительной скорости, а лишь осредненное за некоторое время, что равносильно некоторому запаздыванию. Другими словами, величины  $V_{D1}$ ,  $V_{D2}$ ,  $V_{D3}$ , получаемые от доплеровского измерителя, не равны проекциям  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  относительной скорости на направления  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , а связаны с ними в первом приближении дифференциальными соотношениями вида

$$T \frac{dV_{D1}}{dt} + V_{D1} = V_1. \quad (5.29)$$

Здесь постоянная времени  $T = 1/\Delta\Omega$ , где  $\Delta\Omega$  — эффективная полоса пропускания канала обработки отраженного

сигнала. Постоянная времени  $T$  не превышает нескольких секунд. При анализе работы доплеровского измерителя в комплексе с инерциальной системой этой постоянной времени можно пренебречь, так как период собственных колебаний инерциальной системы имеет порядок периода Шулера, т. е. порядок десятков минут. Период же колебаний центра масс объекта при автоматическом управлении по сигналам инерциальной системы имеет порядок минут.

В дальнейшем будем считать, что доплеровский измеритель скорости измеряет скорость  $V_D$  объекта по отношению к находящемуся под ним участку земной поверхности. Полагая, что измеряется скорость по отношению к окрестности точки, в которой радиус-вектор  $r$  текущего местоположения объекта пересекает поверхность земного эллипсоида, имеем:

$$V_D = v - u \times r \frac{\rho}{r}, \quad (5.30)$$

где  $v$  — абсолютная скорость движения объекта,  $u$  — угловая скорость вращения Земли, а  $\rho$  — расстояние от центра Земли до указанной выше точки ее поверхности. При движении в непосредственной близости к земной поверхности  $\rho/r \approx 1$ .

Инструментальную погрешность доплеровского измерителя обозначим через  $\Delta V_D$ . Если  $V'_D$  — показание доплеровского измерителя с учетом его инструментальной погрешности, то  $V'_D = V_D + \Delta V_D$ . Вариация  $\delta V_D$  показаний доплеровского измерителя равна:

$$\delta V_D = V'_D - V_D = \Delta V_D. \quad (5.31)$$

Величина  $|\Delta V_D|$  имеет \*) порядок  $0,001 |V|$ .

### § 5.3. Демпфирование инерциальной системы с использованием информации о скорости от доплеровского измерителя

**5.3.1. Уравнения невозмущенной (идеальной) работы. Уравнения ошибок.** Из предшествующего рассмотрения следует, что

$$V_D = v - u \times r \frac{\rho}{r}. \quad (5.32)$$

---

\*) См., например, Мак-Клур К. Л., Теория инерциальной навигации, изд-во «Наука», 1964.

В то же время в инерциальной системе, согласно уравнениям идеальной работы (1.36), в результате первого интегрирования получается вектор скорости  $\mathbf{v}$ , а в результате второго интегрирования — радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Поэтому может быть найдена относительная скорость

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{\rho}{r}. \quad (5.33)$$

Образуюм разность

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D. \quad (5.34)$$

Если  $\Delta \mathbf{V}_D = 0$  (т. е. доплеровский измеритель не имеет погрешностей), а инерциальная система работает без ошибок, то  $\Delta \mathbf{V} = 0$ .

Для возмущенного режима работы инерциальной системы и при  $\Delta \mathbf{V}_D \neq 0$  величина  $\Delta \mathbf{V}' = \delta \Delta \mathbf{V}$  определяется следующим равенством:

$$\begin{aligned} \delta \Delta \mathbf{V} = & - \left( \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{\rho}{r} + \Delta \mathbf{V}_D \right) + \\ & + \left[ \mathbf{v} + \delta \mathbf{v} - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{\rho}{r} - \delta \left( \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{\rho}{r} \right) \right] = \\ & = \delta \mathbf{v} - \delta \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{\rho}{r} - \mathbf{u} \times \delta \left( \mathbf{r} \frac{\rho}{r} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Вектор  $\delta \mathbf{u}$  находится из следующих соображений. Вектор угловой скорости вращения Земли задан в основной декартовой системе координат, положение которой известно на борту объекта с точностью до малого угла поворота  $\theta$ , определяемого второй группой уравнений ошибок. Поэтому

$$\delta \mathbf{u} = -\theta \times \mathbf{u}. \quad (5.36)$$

Далее,

$$\delta \left( \mathbf{r} \frac{\rho}{r} \right) = \delta \mathbf{r} \frac{\rho}{r} + \mathbf{r} \frac{\delta \rho}{r} - \mathbf{r} \frac{\rho \delta r}{r^2}.$$

С точностью до слагаемых, содержащих произведения вариаций переменных на квадрат эксцентриситета эллипсоида Клеро, находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \left( \mathbf{r} \frac{\rho}{r} \right) &= \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{r} \frac{\delta \rho}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2}, \\ \Delta r &= \Delta h, \\ \delta \mathbf{u} \frac{\rho}{r} &= -\theta \times \mathbf{u} \frac{a}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Подставляя выражения (5.37) в формулу (5.35) и пренебрегая по малости произведением  $u \delta r$ , получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V = & \delta v + \left( \theta \times u \frac{a}{r} \right) \times r - \\ & - u \times \left( \delta r \frac{a}{r} - r \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta V_D \\ & (\Delta r = \Delta h). \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Разность  $\Delta V$  между относительной скоростью, определенной инерциальной системой, и скоростью, определенной доплеровским измерителем, можно использовать для введения демпфирования в инерциальную систему. Для этого достаточно изменить уравнения идеальной работы (1.36) аналогично уравнениям (5.4), а именно взять их в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} v = & \int_0^t (n - m \times v + g - k_1 \Delta V) dt + v^0, \\ r = & \int_0^t (v - m \times r) dt + r^0, \\ \Delta V = & V - V_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.39)$$

Здесь, как и в уравнениях (5.4), постоянная  $k_1$  имеет размерность  $1/\text{сек}$ .

К цели приводит также и другое изменение уравнений (1.36), а именно представление их в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} v = & \int_0^t (n - m \times v + g) dt + v^0, \\ r = & \int_0^t [v - m \times r + k'_1 (\Delta \dot{V} + m \times \Delta V)] dt + r^0, \\ \Delta V = & V - V_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

Здесь постоянная  $k'_1$  имеет, очевидно, размерность  $\text{сек}$ . Точкой обозначено дифференцирование в осях, связанных с платформой инерциальной системы, т. е. в тех же осях, в которых проведено интегрирование в уравнениях (5.39), (5.40).



Если доплеровский измеритель идеален, элементы инерциальной системы не имеют погрешностей, а начальные условия работы инерциальной системы соблюдены точно, то, как уже говорилось выше,  $\Delta \mathbf{V} \equiv 0$ , и поэтому уравнения (5.39), (5.40) совпадают с соответствующими уравнениями (1.36). В противном случае система будет совершать некоторое возмущенное движение. Это движение будет, вообще говоря, различным для случаев уравнений (5.39), (5.40). В обоих случаях оно будет отличаться от того движения, которое имеет место при  $k_1 = 0$ ,  $k'_1 = 0$  и которое изучено в предыдущих главах.

Рассмотрим возмущенное движение в случае уравнений (5.39).

Варьирование этих уравнений дает:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g} - k_1 \delta \Delta \mathbf{V}, \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Рассматривается схема с тремя ньютонометрами, в которой для формирования модуля вектора напряженности поля тяготения используется внешняя информация о величине  $h$  расстояния до поверхности Земли. В этом случае, в соответствии с формулой (2.12),

$$\delta \mathbf{g} = -\delta \left( \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} - \mathbf{r} \mu \delta \left( \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} + \frac{3\mu}{r^4} \Delta \mathbf{r} \mathbf{r}. \quad (5.42)$$

Подставим теперь  $\delta \mathbf{v}$  из второго уравнения (5.41) в первое. Одновременно подставим в это уравнение выражения (5.38), (5.42) для  $\delta \Delta \mathbf{V}$  и  $\delta \mathbf{g}$ . После очевидных группировок придем к векторному уравнению

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} - k_1 \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mu \frac{\delta \mathbf{r}}{r^3} = \\ = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \\ + 3\mu \frac{\mathbf{r} \Delta \mathbf{r}}{r^4} + k_1 \left[ \Delta \mathbf{V}_D - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta \mathbf{r}}{r^2} - \right. \\ \left. - (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

$$(\Delta \mathbf{r} = \Delta h).$$

Уравнение (5.43) дает первую группу скалярных уравнений ошибок инерциальной системы, корректируемой одновременно от высотометра и доплеровского измерителя ско-

рости. Оно заменяет, очевидно, уравнение (2.15а) и переходит в последнее при  $k_1 = 0$ . Вторая группа уравнений ошибок не меняется и сохраняет тот же вид  $\left(\frac{d\theta}{dt} = \Delta m\right)$ , что и для автономной инерциальной системы.

Уравнение (5.43) — это уравнение ошибок схемы с тремя ньютонометрами. Первую группу уравнений ошибок для схемы с двумя ориентированными в плоскости горизонта ньютонометрами также можно получить из уравнения (5.43). Для этого следует спроектировать векторное уравнение (5.43) на оси  $x$ ,  $y$  трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого направлена вдоль радиуса-вектора  $r$ , и в полученных таким образом уравнениях заменить  $\delta z$  на  $\Delta r (= \Delta h)$ . В результате придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + \left[ \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) \right] \delta y - 2\omega_z \delta \dot{y} = \\ = \Delta n_x - 2\Delta m_y \dot{r} - \Delta \dot{m}_y r - \omega_x r \Delta m_z - \omega_z r \Delta m_x - \\ - (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y + k_1 \omega_y) \Delta r - 2\omega_y \Delta \dot{r} + \\ + k_1 (\Delta V_{Dx} + a u_z \theta_x - a u_x \theta_z - r \Delta m_y), \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + \left[ \omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) \right] \delta x + 2\omega_z \delta \dot{x} = \\ = \Delta n_y + 2\Delta m_x \dot{r} + \Delta \dot{m}_x r - \omega_y r \Delta m_z - \\ - \omega_z r \Delta m_y - (\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x - k_1 \omega_x) \Delta r + 2\omega_x \Delta \dot{r} + \\ + k_1 (\Delta V_{Dy} + a u_z \theta_y - a u_y \theta_z + r \Delta m_x) \\ (\Delta r = \Delta h). \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

При  $k_1 = 0$  эти уравнения переходят в уравнения (2.28).

Уравнения ошибок (5.43), (5.44) получены для случая, когда доплеровская коррекция осуществляется в соответствии с формулами (5.39). Аналогично могут быть получены уравнения ошибок для схемы, работающей по формулам (5.40).

Варьирование первых двух уравнений (5.40) дает соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g}, \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \\ &\quad + k'_1 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}). \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Подставим во второе из них выражение (5.38) для  $\delta \Delta \mathbf{V}$  и разрешим полученное уравнение относительно  $\delta \dot{\mathbf{v}}$ . Получим:

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \frac{1}{k'_1} (\delta \dot{\mathbf{r}} - \delta \mathbf{v} + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} + \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Теперь из равенства (5.46) и первого равенства (5.45) находим  $\delta \mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v} &= -k'_1 (\Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \delta \mathbf{g}) + \delta \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} - \\ &\quad - k'_1 \frac{d}{dt} \left[ \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} + \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Подставим это значение  $\delta \mathbf{v}$  вместе с выражением (5.42) для  $\delta \mathbf{g}$  в уравнение (5.46) или в первое уравнение (5.45). После очевидных преобразований придем к следующему векторному уравнению:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k'_1 \frac{\mu}{r^3} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + k'_1 \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + \\ &\quad + \frac{\mu}{r^3} \left( 1 - 3k'_1 \frac{\dot{r}}{r} \right) \delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} - \\ &\quad - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + 3\mu \mathbf{r} \frac{\Delta r}{r^4} + \\ &\quad + k'_1 \left\{ \frac{d}{dt} \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + 3\mu \mathbf{r} \frac{\Delta r}{r^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2}{dt^2} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right] \right\} \\ &\quad (\Delta r = \Delta h). \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

При  $k'_1 = 0$  это уравнение переходит в уравнение (2.15а).

Уравнение (5.48) — это уравнение ошибок схемы с тремя ньютонометрами, работающей по формулам (5.40). Чтобы получить соответствующие уравнения для схемы с двумя ньютонометрами, надо спроектировать векторное уравнение (5.48) на оси  $x$ ,  $y$  трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совмещена с  $r$ . В полученных таким образом уравнениях надо заменить  $\delta z$  на  $\Delta r$  и опустить в их правых частях проекции вектора  $\frac{d}{dt} \left( \frac{3\mu r \Delta r}{r^4} \right)$ .

**5.3.2. Уравнения идеальной работы и уравнения ошибок схемы, определяющей ортодромические координаты.** Прежде чем перейти к анализу уравнений ошибок (5.43), (5.44), (5.48), полезно повторить вывод этих уравнений на примере какой-либо конкретной системы инерциальной навигации. В качестве такого примера можно взять систему с двумя ньютонометрами, определяющую ортодромические координаты. Уравнения идеальной работы этой схемы образуют систему уравнений (2.23).

Введем в эту схему демпфирование в соответствии с уравнениями (5.39). Согласно соотношениям (5.39), (5.33), (5.34), (5.31), первые два уравнения (2.23) изменятся тогда следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_0^t (n_x + v_y \omega_z - \dot{r} \omega_y + g_x - k_1 \Delta V_x) dt + v_x^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_y + \dot{r} \omega_x - v_x \omega_z + g_y - k_1 \Delta V_y) dt + v_y^0. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

В уравнениях (5.49)

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_x &= V_x - V_{Dx}, \quad \Delta V_y = V_y - V_{Dy}, \\ V_x &= v_x - \rho u (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \\ &\quad + \beta_{33} \cos z), \\ V_y &= v_y + \rho u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S). \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Здесь полезно заметить — это относится как к уравнениям (5.49), так и к первым двум уравнениям (2.23), — что

выполнение вычислительных операций над показаниями ньютометров до интегрирования может оказаться нецелесообразным. Об этом уже говорилось ранее. Причина этого — наличие в величинах  $n_x$ ,  $n_y$  быстро меняющихся со временем составляющих. При построении схемы может оказаться удобным разбить каждый из интегралов в правых частях уравнений (5.49) по крайней мере на две.

Первыми из этих интегралов будут интегралы от  $n_x$ ,  $n_y$ . Тогда вычислительные операции будут выполняться с достаточно медленно меняющимися величинами  $\int n_x dt$ ,  $\int n_y dt$ ,

что позволит обойтись менее быстродействующими вычислительными устройствами. Аналогично можно отдельно проинтегрировать величины  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$  или даже, раскрыв  $\Delta V_x$ ,  $\Delta V_y$  в соответствии с последними тремя равенствами (5.50), проинтегрировать отдельно  $V_{Dx}$ ,  $V_{Dy}$ . С точки зрения конечного результата и уравнений ошибок все перечисленные варианты равносильны, поэтому в дальнейшем будут рассматриваться уравнения идеальной работы в форме (5.49).

Уравнения ошибок рассматриваемой демпфированной схемы вытекают из уравнений ошибок рассмотренной в предшествующем разделе общей схемы. Ими будут уравнения (5.44). Однако для того чтобы лучше освоить эти уравнения, полезно вывести их для ортодромической инерциальной системы непосредственно из уравнений работы этой системы. Речь идет лишь о первой группе уравнений ошибок, ибо вторая группа, очевидно, не меняется.

Для получения первой группы уравнений ошибок надо проварьировать уравнения (5.49), (5.50) вместе с остальными соотношениями (2.23), дополняющими уравнения (5.49), (5.50) до замкнутой системы уравнений. Решение поставленной задачи облегчается тем, что в § 4.2 нами уже выводились уравнения ошибок системы, определяющей ортодромические координаты и не корректируемой от доплеровского измерителя. Мы исходили при этом из уравнений идеальной работы (4.20). Уравнения (4.20), если в них положить  $\varepsilon = 0$ , будут отличаться от уравнений (4.49), (4.50), (2.23) лишь отсутствием в первых двух уравнениях (4.20) слагаемых  $k_1 \Delta V_x$ ,  $k_1 \Delta V_y$  в подынтегральных выражениях. Соответственно уравнения ошибок будут отличаться лишь вариациями  $k_1 \delta \Delta V_x$ ,  $k_1 \delta \Delta V_y$

указанных слагаемых. Задача сводится поэтому к вычислению этих вариаций, после чего можно будет воспользоваться результатами, полученными в § 4.2.

Обозначим, как обычно, невозмущенное положение трехгранника, связанного с платформой инерциальной системы, через  $x_0 y_0 z_0$ . Возмущенное положение  $x y z$  этого трехгранника зададим по отношению к трехграннику  $x_0 y_0 z_0$  малыми углами  $\alpha, \beta, \gamma$  в соответствии с таблицей направляющих косинусов (4.22). В соответствии с этой таблицей и равенством  $V'_D = V_D + \Delta V_D$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} V'_{Dx} &= V_{x_0} + V_{y_0} \gamma - V_{z_0} \beta + \Delta V_{Dx_0}, \\ V'_{Dy} &= V_{y_0} + V_{z_0} \alpha - V_{x_0} \gamma + \Delta V_{Dy_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

где  $\Delta V_{Dx_0}, \Delta V_{Dy_0}$  — инструментальные погрешности доплеровского измерителя. В них входят и инструментальные погрешности пересчета проекций относительной скорости с направлений осей антенн доплеровского измерителя на направления осей платформы инерциальной системы.

Из последних двух равенств (5.50) следует, что проекции  $V'_x, V'_y$  относительной скорости, определенные инерциальной системой в возмущенном режиме работы, равны:

$$\left. \begin{aligned} V'_x &= v_{x_0} + \delta v_{x_0} - (\rho + \delta \rho) u (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) - \rho u \delta (-\beta_{31} \sin z \cos S - \\ &\quad - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ V'_y &= v_{y_0} + \delta v_{y_0} + (\rho + \delta \rho) u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) + \\ &\quad + \rho u \delta (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S). \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Но

$$\left. \begin{aligned} u (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) &= u_{y_0}, \\ u (\beta_{31} \cos z \cos S + \beta_{32} \cos z \sin S + \beta_{33} \sin z) &= u_{z_0}, \\ u (\beta_{31} \sin S - \beta_{32} \cos S) &= -u_{x_0}, \\ u (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) &= u_{z_0} \cos z - u_{y_0} \sin z. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Далее,

$$\left. \begin{aligned} u \delta (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z) &= \\ &= -(u_{z_0} \delta z + u_{x_0} \sin z \delta S), \\ u \delta (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) &= \\ &= -(u_{z_0} \cos z - u_{y_0} \sin z) \delta S. \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

Подставим выражения (5.53), (5.54) в формулы (5.52) и введем при этом новые переменные  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , определяемые равенствами (4.37), если положить в них  $\varepsilon = 0$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} V'_x &= v_{x_0} - \rho u_{y_0} + \delta v_{x_0} - u_{y_0} \delta \rho + \rho (-u_{z_0} \alpha_2 + u_{x_0} \gamma_2), \\ V'_y &= v_{y_0} + \rho u_{x_0} + \delta v_{y_0} + u_{x_0} \delta \rho - \rho (u_{z_0} \beta_2 - u_{y_0} \gamma_2). \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Наконец, заменим углы  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  на их выражения через  $\alpha, \beta, \gamma, \theta_{x_0}, \theta_{y_0}, \theta_{z_0}$  в соответствии с равенствами (4.39). После этого формулы (5.55), если в них пренебречь еще величинами  $u_{x_0} \delta \rho, u_{y_0} \delta \rho$ , примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} V'_x &= v_{x_0} - \rho u_{y_0} + \delta v_{x_0} + \rho (-u_{z_0} \theta_{x_0} + u_{x_0} \theta_{z_0}) + \\ &\quad + \rho (-u_{z_0} \alpha + u_{x_0} \gamma), \\ V'_y &= v_{y_0} + \rho u_{x_0} + \delta v_{y_0} - \rho (u_{z_0} \theta_{y_0} - u_{y_0} \theta_{z_0}) - \\ &\quad - \rho (u_{z_0} \beta - u_{y_0} \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (5.56)$$

Из соотношений (5.56), (5.51), замечая, что

$$V_{x_0} = v_{x_0} - \rho u_{y_0}, \quad V_{y_0} = v_{y_0} + \rho u_{x_0}, \quad V_{z_0} = \dot{r}, \quad (5.57)$$

находим вариации  $\delta \Delta V_{x_0} = V'_x - V'_{Dx}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0} = V'_y - V'_{Dy}$ . Они равны:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= \delta v_{x_0} + \rho (-u_{z_0} \theta_{x_0} + u_{x_0} \theta_{z_0}) - \\ &\quad - \rho u_{z_0} \alpha + r \omega_{x_0} \gamma + \dot{r} \beta - \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta \Delta V_{y_0} &= \delta v_{y_0} - \rho (u_{z_0} \theta_{y_0} - u_{y_0} \theta_{z_0}) - \\ &\quad - \rho u_{z_0} \beta + r \omega_{y_0} \gamma - \dot{r} \alpha - \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.58)$$

Для дальнейшего преобразования формул (5.58) воспользуемся последними двумя равенствами (4.25). Заметив, что в этих равенствах можно положить  $\delta r = \Delta r$ , и подставив в них  $\delta \omega_{x_0}, \delta \omega_{y_0}$  из соотношений (4.24), получим выражения  $\delta v_{x_0}, \delta v_{y_0}$  через  $\alpha, \beta, \gamma, \Delta r, \Delta \omega_{x_0}, \Delta \omega_{y_0}, r, \omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}$ . Подставив эти выражения в формулы (5.58) и введя вместо  $\alpha$  и  $\beta$  переменные  $\delta x$  и  $\delta y$  в соответствии с равенствами

(4.32), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= \Delta r \omega_{y_0} - r \Delta \omega_{y_0} + \delta \dot{x} - \\ &\quad - \left( \omega_{z_0} - \frac{\rho}{r} u_{z_0} \right) \delta y + \rho (u_{x_0} \theta_{z_0} - u_{z_0} \theta_{x_0}) - \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta \Delta V_{y_0} &= -\Delta r \omega_{x_0} + r \Delta \omega_{x_0} + \delta \dot{y} + \\ &\quad + \left( \omega_{z_0} - \frac{\rho}{r} u_{z_0} \right) \delta x + \rho (u_{y_0} \theta_{z_0} - u_{z_0} \theta_{y_0}) - \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.59)$$

Легко видеть, что в невозмущенном режиме работы, когда инструментальные погрешности отсутствуют и  $\delta x = \delta y = \theta_{x_0} = \theta_{y_0} = \theta_{z_0} = 0$ , правые части равенств (5.59) обращаются в нуль. Таким образом, в этом случае  $\delta \Delta V_{x_0} = \delta \Delta V_{y_0} = 0$ , как это и должно быть.

Сравним выражения (5.59) с теми, которые получаются из формул (5.38), (5.41), соответствующих общему случаю схемы с двумя горизонтально ориентированными ньютонометрами. Из равенства (5.38) и второго равенства (5.41) имеем:

$$\delta \Delta V = \delta \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} + \\ + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{\Delta r a}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \quad (5.60)$$

Но в рассматриваемом случае

$$\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{x}_0 + \delta y \mathbf{y}_0 + \delta z \mathbf{z}_0, \quad (5.61)$$

где через  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  обозначены орты соответствующих осей. Поэтому, спроектировав равенство (5.60) на оси  $x_0$ ,  $y_0$ , получим равенства (5.59), если в последних положить  $\rho = a$  и заметить еще, что  $\Delta m_{x_0} = -\Delta \omega_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0} = -\Delta \omega_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0} = -\Delta \omega_{z_0}$ .

В результате варьирования уравнений (5.49) получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= \delta n_x + \omega_z \delta v_y + v_y \delta \omega_z - \dot{r} \delta \omega_y - \omega_y \delta \dot{r} + \\ &\quad + \delta g_x - k_1 \delta \Delta V_x, \\ \delta \dot{v}_y &= \delta n_y + \omega_x \delta \dot{r} + \dot{r} \delta \omega_x - v_x \delta \omega_z - \omega_z \delta v_x + \\ &\quad + \delta g_y - k_1 \delta \Delta V_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Эти уравнения отличаются от первых двух уравнений (4.25) лишь присутствием в правых частях слагаемых  $-k_1 \delta \Delta V_x$ ,



—  $k_1 \delta \Delta V_y$ . Из уравнений (4.25) были получены уравнения (4.28), а затем уравнения (4.35). Следовательно, уравнения (5.44) должны получаться из уравнений (4.35) добавлением к их правым частям указанных слагаемых. Приняв во внимание выражения (5.59), легко убеждаемся, что прибавление величин  $-k_1 \delta \Delta V_{x_0}$ ,  $-k_1 \delta \Delta V_{y_0}$  к правым частям уравнений (4.35) действительно приводит к уравнениям (5.44), так как  $\Delta \omega_{x_0} = -\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta \omega_{y_0} = -\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{z_0} = -\Delta m_{z_0}$ .

Выше дан непосредственный вывод уравнений ошибок для инерциальной системы, определяющей ортодромические координаты в том случае, когда ее уравнения идеальной работы изменены в соответствии с уравнениями (5.39). Если же ввести демпфирование в рассматриваемую инерциальную систему согласно уравнениям (5.40), а не (5.39), то первые два уравнения (2.23) останутся неизменными, зато изменятся два последующих уравнения (2.23). Они примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\frac{1}{r} [v_y + k'_1 (\dot{\Delta V}_y + \omega_z \Delta V_x - \omega_x \Delta V_z)], \\ \omega_y &= \frac{1}{r} [v_x + k'_1 (\dot{\Delta V}_x + \omega_y \Delta V_z - \omega_z \Delta V_y)], \end{aligned} \right\} \quad (5.63)$$

где  $\Delta V_x$  и  $\Delta V_y$  определены формулами (5.50).

В этом случае первая группа уравнений ошибок получается из соотношений

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_{x_0} &= \delta n_{x_0} + \omega_{z_0} \delta v_{y_0} + v_{y_0} \delta \omega_{z_0} - \dot{\Delta r} \omega_{y_0} - \dot{r} \delta \omega_{y_0}, \\ \delta \dot{v}_{y_0} &= \delta n_{y_0} + \dot{\Delta r} \omega_{x_0} + \dot{r} \delta \omega_{x_0} - \omega_{z_0} \delta v_{x_0} - v_{x_0} \delta \omega_{z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.63a)$$

полученных варьированием первых двух уравнений (2.23), и из вариаций равенств (5.63)

$$\left. \begin{aligned} -\Delta r \omega_{x_0} - r \delta \omega_{x_0} &= \delta v_{y_0} + k'_1 (\delta \dot{\Delta V}_{y_0} + \omega_{z_0} \delta \Delta V_{x_0} - \\ &\quad - \omega_{x_0} \delta \Delta V_{z_0}), \\ \Delta r \omega_{y_0} + r \delta \omega_{y_0} &= \delta v_{x_0} + k'_1 (\delta \dot{\Delta V}_{x_0} + \omega_{y_0} \delta \Delta V_{z_0} - \\ &\quad - \omega_{z_0} \delta \Delta V_{y_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.64)$$

К уравнениям (5.63a), (5.64) надо присоединить, разумеется, формулы (5.58) для  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$ , равенства (4.24), (4.26), определяющие величины  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$ ,  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$ , а также соотношения (4.32).

**5.3.3. Исследование устойчивости.** Рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} - k_1 \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} + \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = 0, \quad (5.65)$$

соответствующее векторному уравнению (5.43), т. е. уравнению ошибок инерциальной системы, корректируемой от высотомера и доплеровского измерителя, когда коррекция от доплеровского измерителя осуществляется по уравнениям (5.39).

Исследуем устойчивость движения, описываемого уравнением (5.65). Заметим прежде всего, что структура этого уравнения несколько отлична от однородного уравнения (5.5).

В уравнении (5.65) появилось дополнительное слагаемое —  $k_1 \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r}$ . Причина этого различия понятна. Она заключается в том, что демпфирование в уравнении (5.5) было введено по абсолютной скорости, тогда как в уравнении (5.65) — по относительной скорости, поступающей от доплеровского измерителя. Если бы Земля не вращалась ( $\mathbf{u} = 0$ ), то указанное различие пропало бы.

В случае, когда  $r = \text{const}$ , т. е. когда движение объекта происходит на постоянном удалении от центра Земли, векторное уравнение (5.65) при проектировании его на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  или  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  приводит к уравнениям с постоянными коэффициентами. Так, проектируя на неизменно ориентированные оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ , не участвующие во вращении Земли, и замечая, что  $u_{\xi_*} = u_{\eta_*} = 0$ ,  $u_{\zeta_*} = u = \text{const}$ ,  $\delta \mathbf{r} = \delta \xi_* \mathbf{e}_{\xi_*} + \delta \eta_* \mathbf{e}_{\eta_*} + \delta \zeta_* \mathbf{e}_{\zeta_*}$ , приходим к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k_1 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* + k_1 \frac{a}{r} u \delta \eta_* &= 0, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k_1 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* - k_1 \frac{a}{r} u \delta \xi_* &= 0, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k_1 \delta \dot{\zeta}_* + \omega_0^2 \delta \zeta_* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.66)$$

Третье уравнение (5.66) отделилось. Соответствующее ему характеристическое уравнение имеет корни ( $k_1 - 4\omega_0^2 < 0$ ):

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} (-k_1 \pm j\nu), \quad \nu = \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}. \quad (5.67)$$

При  $k_1 > 0$  ошибка  $\delta \zeta_*$  затухает со временем.

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости первых двух уравнений (5.66), выпишем соответствующее им характеристическое уравнение. Оно имеет вид:

$$p^4 + 2k_1 p^3 + (k_1^2 + 2\omega_0^2) p^2 + 2k_1 \omega_0^2 p + \omega_0^4 + k_1^2 u^2 \frac{a^2}{r^2} = 0. \quad (5.68)$$

Условия Гурвица сводятся для этого уравнения к неравенствам

$$\left. \begin{aligned} k_1 > 0, \quad 2k_1 (k_1^2 + \omega_0^2) > 0, \\ 4k_1^4 \left( \omega_0^2 - u^2 \frac{a^2}{r^2} \right) > 0, \quad \omega_0^4 + k_1^2 u^2 \frac{a^2}{r^2} > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.69)$$

Так как  $\omega_0^2 > u^2 \frac{a^2}{r^2}$ , то эти неравенства всегда удовлетворяются при  $k_1 > 0$ . Таким образом, при  $k_1 > 0$  уравнение (5.65) свидетельствует об асимптотической устойчивости рассматриваемой инерциальной системы с тремя ньютонометрами, корректируемой от высотомера и доплеровского измерителя скорости, при произвольном движении объекта на постоянном удалении от центра Земли.

К этому же выводу можно прийти, рассмотрев уравнение (5.65) в проекциях на оси связанного с Землей трехгранника. Вместо уравнений (5.66) получим тогда уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi} + k_1 \delta \dot{\xi} + (\omega_0^2 - u^2) \delta \xi - 2u \delta \dot{\eta} - k_1 u \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \delta \eta &= 0, \\ \delta \ddot{\eta} + k_1 \delta \dot{\eta} + (\omega_0^2 - u^2) \delta \eta + 2u \delta \dot{\xi} + k_1 u \left( 1 - \frac{a}{r} \right) \delta \xi &= 0, \\ \delta \ddot{\zeta} + k_1 \delta \dot{\zeta} + \omega_0^2 \delta \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.70)$$

Третье уравнение (5.70) совпало по виду с третьим уравнением (5.66). Это естественно, так как ось  $\zeta$  совпадает с осью  $\zeta_*$ , и поэтому  $\delta \zeta = \delta \zeta_*$ .

Характеристическое уравнение системы, образованной двумя первыми уравнениями (5.70), имеет вид:

$$\begin{aligned} p^4 + 2k_1 p^3 + [k_1^2 + 2(\omega_0^2 + u^2)] p^2 + \\ + 2k_1 \left[ \omega_0^2 + u^2 \left( 1 - 2 \frac{a}{r} \right) \right] p + (\omega_0^2 - u^2)^2 + k_1^2 u^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Неравенства Гурвица дают следующие условия отрицательности вещественных частей корней характеристического уравнения (5.71):

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 > 0, \quad 2k_1 \left[ k_1^2 + \omega_0^2 + u^2 \left( 1 + 2 \frac{a}{r} \right) \right] > 0, \\ 4k_1^2 \left( \omega_0^2 - \frac{u^2 a^2}{r^2} \right) (k_1^2 + 4u^2) > 0, \\ (\omega_0^2 - u^2)^2 + k_1^2 u^2 \left( 1 - \frac{a}{r} \right)^2 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Эти условия, как и условия (5.69), выполняются, коль скоро  $k_1 > 0$ .

Мы рассмотрели движение объекта на постоянном удалении от центра Земли. Покажем теперь, что соответствующим выбором величины  $k_1$  можно обеспечить асимптотическую устойчивость и при переменном  $r$ . В самом деле, пусть

$$r = r^0 + \rho(t), \quad r^0 = \text{const}, \quad \frac{|\rho(t)|}{r^0} \ll 1, \quad (5.73)$$

т. е. движение объекта происходит вблизи некоторого постоянного расстояния  $r^0$  от центра Земли. Тогда уравнения (5.66) можно представить в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k_1 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} \delta \xi_* - k_1 \frac{a}{r} u \delta \eta_*, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k_1 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} \delta \eta_* + k_1 \frac{a}{r} u \delta \xi_*, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k_1 \delta \dot{\zeta}_* + \omega_0^2 \delta \zeta_* &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} \delta \zeta_*, \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^0{}^3} = \text{const}. \quad (5.75)$$

Займемся сначала третьим уравнением (5.74). Запишем его в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка (в форме Коши)

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 - \omega_0^2 x_2 + \varphi_x, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

где

$$x_2 = \delta \zeta_*, \quad \varphi_x = \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} x_2. \quad (5.77)$$

Перейдем к нормальным координатам \*)  $b_3, u_3$ , для чего сделаем замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_3 (\varepsilon \cos u_3 - v \sin u_3), \\ x_2 &= b_3 \cos u_3, \\ \varepsilon &= -\frac{k_1}{2}, \quad v = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.78)$$

В переменных  $b_3, u_3$  получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_3}{dt} &= \varepsilon b_3 - \frac{1}{v} \tilde{\varphi}_x \sin u_3, \\ \frac{du_3}{dt} &= v - \frac{1}{b_3 v} \tilde{\varphi}_x \cos u_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.79)$$

где теперь

$$\tilde{\varphi}_x = \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} b_3 \cos u_3. \quad (5.80)$$

Подставив  $\tilde{\varphi}_x$  в первое уравнение (5.79), будем иметь:

$$\frac{db_3}{dt} = b_3 \left( \varepsilon - \frac{1}{v} \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} \sin u_3 \cos u_3 \right). \quad (5.81)$$

Для устойчивости достаточно, очевидно, чтобы выражение, стоящее в скобках, было всегда отрицательным. Отсюда и из соотношений (5.78) получаем условие

$$q = \frac{k_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}} \omega_0^2 \frac{3\rho}{2r^0} \sin 2u_3 > 0. \quad (5.82)$$

Это условие будет выполняться, если

$$\frac{k_1}{2} - \frac{\omega_0^2 c}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}} > 0, \quad (5.83)$$

---

\*) См. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.

где

$$c = \frac{3 \max |\rho|}{2r^0} \ll 1. \quad (5.84)$$

Из неравенства (5.83) вытекает, что для обеспечения асимптотической устойчивости величина  $k_1$  должна выбираться в интервале

$$2\omega_0 c < k_1 < \omega_0(2 - c^2). \quad (5.85)$$

Мера устойчивости будет определяться при этом величиной  $q$ .

Обратимся теперь к первым двум уравнениям (5.74). Запишем \*) их в форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_1 &= -k_1 y_1 - \omega_0^2 y_2 + \varphi_y, \\ \dot{y}_2 &= y_1, \\ \dot{z}_1 &= -k_1 z_1 - \omega_0^2 z_2 + \varphi_z, \\ \dot{z}_2 &= z_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.86)$$

где

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \delta \xi_*, \quad z_2 = \delta \eta_*, \\ \varphi_y &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} y_2 - k_1 \frac{a}{r} u z_2, \\ \varphi_z &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} z_2 + k_1 \frac{a}{r} u y_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

Перейдем к нормальным координатам по формулам:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_1 (\varepsilon \cos u_1 - v \sin u_1), \\ y_2 &= b_1 \cos u_1, \\ z_1 &= b_2 (\varepsilon \cos u_2 - v \sin u_2), \\ z_2 &= b_2 \cos u_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

---

\*) Нижеследующая методика исследования устойчивости разработана совместно с Н. А. Парусниковым.

В новых переменных уравнения (5.86) запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \varepsilon b_1 - \frac{1}{v} \tilde{\varphi}_y \sin u_1, \\ \frac{du_1}{dt} &= v - \frac{1}{vb_1} \tilde{\varphi}_y \cos u_1, \\ \frac{db_2}{dt} &= \varepsilon b_2 - \frac{1}{v} \tilde{\varphi}_z \sin u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= v - \frac{1}{b_2 v} \tilde{\varphi}_z \cos u_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.89)$$

В соответствии с соотношениями (5.87), (5.88) функции  $\tilde{\varphi}_y$ ,  $\tilde{\varphi}_z$  определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_y &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} b_1 \cos u_1 - k_1 \frac{a}{r} u b_2 \cos u_2, \\ \tilde{\varphi}_z &= \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} b_2 \cos u_2 + k_1 \frac{a}{r} u b_1 \cos u_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.90)$$

Введем функцию

$$U = b_1^2 + b_2^2. \quad (5.91)$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, очевидно, чтобы эта функция стремилась к нулю при стремлении  $t$  к бесконечности. Тогда  $b_1$ ,  $b_2$ , а с ними  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ , а значит, и  $\delta \xi_*$ ,  $\delta \xi_*^*$ ,  $\delta \eta_*$ ,  $\delta \eta_*^*$  будут с течением времени асимптотически стремиться к нулю.

Найдем достаточные условия того, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U = 0. \quad (5.92)$$

Для этого вычислим полную производную  $dU/dt$ . Из определения (5.91) функции  $U$ , из первого и третьего уравнений (5.89) и из соотношений (5.90) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= 2\varepsilon U - \frac{2}{v} \left[ \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} (b_1^2 \sin u_1 \cos u_1 + b_2^2 \sin u_2 \cos u_2) - \right. \\ &\quad \left. - k_1 \frac{a}{r} u b_1 b_2 \sin(u_1 - u_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Пусть

$$b_1 = b \sin \chi, \quad b_2 = b \cos \chi, \quad b^2 = b_1^2 + b_2^2. \quad (5.93a)$$

Тогда из равенства (5.93) получаем:

$$\frac{dU}{dt} = 2U \left\{ \varepsilon - \frac{1}{v} \left[ \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} (\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \chi + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \chi) - k_1 \frac{a}{r} u \sin(u_1 - u_2) \sin \chi \cos \chi \right] \right\}. \quad (5.94)$$

В фигурных скобках здесь стоит функция

$$q_1 = \varepsilon - \frac{1}{v} \left[ \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} (\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \chi + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \chi) - \right. \\ \left. - k_1 \frac{a}{r} u \sin(u_1 - u_2) \sin \chi \cos \chi \right]. \quad (5.94a)$$

Для того чтобы величина  $U$  при  $t \rightarrow \infty$  обращалась в нуль, достаточно, чтобы производная  $dU/dt$  все время имела знак, обратный знаку  $U$ . А для этого достаточно потребовать в свою очередь, чтобы выполнялось неравенство

$$q_1 < 0. \quad (5.95)$$

Очевидны оценки:

$$\left. \begin{aligned} |\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \chi + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \chi| &\leq \frac{1}{2}, \\ |\sin(u_1 - u_2) \sin \chi \cos \chi| &\leq \frac{1}{2}, \quad \frac{a}{r} \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.96)$$

Поэтому неравенство (5.95) выполняется во всяком случае при

$$\frac{k_1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}} \left( c\omega_0^2 + u \frac{k_1}{2} \right) > 0, \quad (5.97)$$

где величина  $c$  определена соотношением (5.84).

Отсюда, принимая во внимание малость  $c$  и  $u/\omega_0$  по сравнению с единицей получаем интервал значений  $k_1$ :

$$2c(\omega_0 + u) < k_1 < 2(\omega_0 + uc). \quad (5.98)$$

Так как  $c \ll 1$  и  $u/\omega_0 \ll 1$ , то интервал (5.98) для  $k_1$  можно считать совпадающим с интервалом (5.85).

Величина  $q_2$  будет мерой устойчивости. Затухание в системе будет не худшим, чем характеризваемое множителем  $e^{-\min |q_2|}$ . Это вытекает из определения  $U$  и равенства (5.94).



В самом деле, из равенства (5.94) следует, что

$$\frac{dU}{dt} \leq -2U \min |q_2|. \quad (5.99)$$

Значит,

$$U \leq U^0 e^{-2 \min |q_2|}. \quad (5.100)$$

Но тогда

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leq b^0 e^{-\min |q_2|}, \quad (5.101)$$

где  $b^0$  — начальное значение  $b$ .

На этом мы закончим исследование устойчивости инерциальной системы с тремя ньютонометрами, работающей в соответствии с уравнениями (5.39), и перейдем к исследованию инерциальной системы, работающей по уравнениям (5.40). В этом случае векторное уравнение ошибок — это уравнение (5.48). Ему соответствует однородное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k'_1 \frac{\mu}{r^3} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k'_1 \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{\mathbf{a}}{r}) + \\ + \frac{\mu}{r^3} \left( 1 - 3k'_1 \frac{\dot{r}}{r} \right) \delta \mathbf{r} = 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

При  $r = \text{const}$  это уравнение дает при проектировании его на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  три скалярных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k'_1 \omega_0^2 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* - k'_1 u \frac{a}{r} \delta \ddot{\eta}_* &= 0, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k'_1 \omega_0^2 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* + k'_1 u \frac{a}{r} \delta \ddot{\xi}_* &= 0, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k'_1 \omega_0^2 \delta \dot{\zeta}_* + \omega_0^2 \delta \zeta_* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.103)$$

При  $k'_1 \omega_0^2 = k_1$  третье уравнение (5.103) переходит в третье уравнение (5.74). Характеристическое уравнение, соответствующее двум первым уравнениям (5.103), получается в виде

$$\begin{aligned} \left( 1 + k'_1 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right) p^4 + 2k'_1 \omega_0^2 p^3 + \omega_0^2 (2 + k'_1 \omega_0^2) p^2 + \\ + 2k'_1 \omega_0^4 p + \omega_0^4 = 0. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Применив к этому уравнению критерий Гурвица, можно убедиться, что в силу неравенства  $\omega_0^2 - \frac{u^2 a^2}{r^2} > 0$  вещественные части корней уравнения (5.104) будут всегда отрица-

тельными, коль скоро  $k'_1 > 0$ . Таким образом, решение однородного уравнения (5.102) при  $r = \text{const}$  затухает со временем. Система асимптотически устойчива при  $k'_1 > 0$ .

В случае, если величина  $r$  не постоянна, а является функцией времени, можно обеспечить асимптотическую устойчивость надлежащим выбором величины  $k'_1$ . Определение  $k'_1$  можно провести аналогично тому, как это было сделано выше для уравнения (5.65), т. е. переходом к нормальным координатам. Здесь следует отметить, однако, что в отличие от уравнения (5.65) в коэффициенты уравнения (5.102) входит не только расстояние  $r$  до центра Земли, но и его производные по времени. Поэтому при выборе величины  $k'_1$  при  $r = r(t)$  придется учитывать не только отличие  $r$  от некоторого постоянного значения  $r^0$ , но также скорость  $\dot{r}$  и ускорение  $\ddot{r}$ .

Уравнения (5.65), (5.102) описывают при отсутствии инструментальных погрешностей возмущенное движение схем с тремя ньютонометрами. Соответствующие уравнения для схем с двумя ньютонометрами, ориентированными в горизонте (географическом или геоцентрическом), получаются, как уже выше было отмечено, из уравнений (5.65), (5.102) проектированием их на оси  $x, y$  сопровождающего трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совпадает с радиусом-вектором  $r$ , а ось  $y$  расположена, например, в плоскости меридиана. Так, из уравнения (5.65) получатся в результате такого проектирования уравнения (5.44), если в последних оставить лишь левые части. Соответствующие однородные уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 - \omega_z^2 \right) \delta x + \\ + \left[ \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) \right] \delta y - 2\omega_z \delta\dot{y} = 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_z^2 - \omega_x^2 \right) \delta y + \\ + \left[ \omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) \right] \delta x + 2\omega_z \delta\dot{x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.105)$$

Исследуем устойчивость этих уравнений. Рассмотрим сначала случай движения объекта с постоянной скоростью по

параллели, когда коэффициенты уравнений (5.105) будут постоянными. В этом случае  $\omega_x = u_x = 0$ . Характеристическое уравнение системы уравнений (5.105) принимает вид:

$$p^4 + 2k_1 p^3 + (k_1^2 + 2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2) p^2 + \\ + k_1 \left( 2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2 - 4\omega_z u_z \frac{a}{r} \right) p + \\ + (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_z^2 - \omega_y^2) + k_1^2 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right)^2 = 0. \quad (5.106)$$

Уравнение (5.106) отличается от уравнения (5.10) коэффициентом при  $p$  и свободным членом. При  $u = 0$  это уравнение переходит в уравнение (5.10), а при  $k_1 = 0$  — в уравнение (2.43).

Применение к уравнению (5.106) критерия Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &> 0, \\ 2k_1^2 + 2\omega_0^2 + 2\omega_z^2 - \omega_y^2 + 4\omega_z u_z \frac{a}{r} &> 0, \\ (8\omega_z^2 + 2k_1^2) \left( 2\omega_0^2 - \omega_y^2 - 2u_z^2 \frac{a^2}{r^2} \right) + \omega_y^4 &> 0, \\ (\omega_0^2 - \omega_z^2)(\omega_0^2 - \omega_z^2 - \omega_y^2) + k_1^2 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right)^2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.107)$$

Ранее нами было установлено, что в области

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0 \quad (5.108)$$

инерциальная система с двумя ньютонометрами неасимптотически устойчива без доплеровской коррекции. Можно легко усмотреть, что теперь в области (5.108) при  $k_1 > 0$  удовлетворяются все условия (5.107) асимптотической устойчивости. Для первого, третьего и четвертого условий это очевидно. Из второго же условия получаем:

$$2k_1^2 + 2\omega_0^2 + \omega_z^2 - \omega_y^2 - 2 \frac{u_z^2 a^2}{r^2} + \left( \omega_z + 2 \frac{u_z a}{r} \right)^2 > 0. \quad (5.109)$$

Так как

$$\omega_0^2 > 2 \frac{u_z^2 a^2}{r^2}, \quad (5.110)$$

то неравенство (5.109) также удовлетворяется в области (5.108).

При движении объекта по экватору, когда  $\omega_z = 0$ ,  $u_z = 0$ , неравенства (5.107) сводятся к двум неравенствам:

$$k_1 > 0, \quad \omega_0^2 - \omega_y^2 > 0. \quad (5.111)$$

В этом случае система (5.105) распадается на два уравнения второго порядка. Их характеристические уравнения:

$$p^2 + k_1 p + (\omega_0^2 - \omega_y^2) = 0, \quad p^2 + k_1 p + \omega_0^2 = 0, \quad (5.112)$$

откуда также следуют неравенства (5.111).

Отметим, что условия (5.107) асимптотической устойчивости аналогичны условиям (5.11), в которые первые переходят при  $u = 0$ . Подобно тому, как это было сделано для условий (5.11), можно построить по условиям (5.107) области устойчивости в плоскости параметров  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ . Ввиду малости угловой скорости вращения Земли  $u$  по сравнению с  $\omega_0$  эти области будут близки к приведенным на рис. 5.1 для неравенств (5.11).

Условия (5.107) дают ответ на вопрос об устойчивости инерциальной системы при движении объекта с постоянной скоростью вдоль параллели. При более общем характере движения объекта точное исследование устойчивости уравнений (5.105) затруднительно, ибо речь должна идти тогда об исследовании системы дифференциальных уравнений четвертого порядка достаточно общего вида с переменными коэффициентами, которые могут быть по существу произвольными функциями времени. Мы не располагаем регулярными способами решения такого рода задачи. Однако можно найти достаточные условия асимптотической устойчивости для произвольного движения объекта в том случае, когда скорость его движения существенно меньше первой космической скорости. Это охватывает достаточно широкий класс движений, таких, например, как движение морских судов, самолетов, крылатых ракет.

Чтобы найти достаточные условия асимптотической устойчивости для таких движений объекта, рассмотрим уравнения (5.105) в проекциях на оси азимутально свободного

трехгранника, для которого  $\omega_z = 0$ . Уравнения (5.105) примут тогда следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2\right) \delta x + \left(\omega_x \omega_y + k_1 u_z \frac{a}{r}\right) \delta y &= 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2\right) \delta y + \left(\omega_x \omega_y - k_1 u_z \frac{a}{r}\right) \delta x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.113)$$

Здесь  $r$ ,  $u_z$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  — некоторые функции времени, определяемые законом движения объекта. Будем в дальнейшем полагать, что

$$\left. \begin{aligned} \Omega^2 &= \omega_x^2 + \omega_y^2 \ll \omega_0^2, \quad r = r^0 + \rho(t), \\ r^0 &= \text{const}, \quad \frac{|\rho|}{r^0} \ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.114)$$

Первое неравенство (5.114) означает, что скорость движения объекта значительно меньше первой космической скорости. Остальные условия (5.114) ограничивают изменение  $r$ . Они означают, что объект движется вблизи окружающей Землю сферы постоянного радиуса  $r^0$ .

Если  $\frac{|\rho|}{r^0} \ll 1$ , то уравнения (5.113) могут быть представлены в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \left(\omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_y^2\right) \delta x - \\ &\quad - \left(\omega_x \omega_y + k_1 u_z \frac{a}{r}\right) \delta y, \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \left(\omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_x^2\right) \delta y - \\ &\quad - \left(\omega_x \omega_y - k_1 u_z \frac{a}{r}\right) \delta x, \end{aligned} \right\} \quad (5.114a)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{\mu}{r_0^3}.$$

Производя замену переменных

$$\delta\dot{x} = x_1, \quad \delta x = x_2, \quad \delta\dot{y} = y_1, \quad \delta y = y_2, \quad (5.115)$$

запишем уравнения (5.114а) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 - \omega_0^2 x_2 + \varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{y}_1 &= -k_1 y_1 - \omega_0^2 y_2 + \varphi_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.116)$$

где, в соответствии с (5.114а), (5.115),

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \left( \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_y^2 \right) x_2 - \left( \omega_x \omega_y + k_1 u_z \frac{a}{r} \right) y_2, \\ \varphi_2 &= \left( \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_x^2 \right) y_2 - \left( \omega_x \omega_y - k_1 u_z \frac{a}{r} \right) x_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.117)$$

Перейдем к нормальным координатам  $b_1$ ,  $u_1$ ,  $b_2$ ,  $u_2$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1 (\varepsilon \cos u_1 - \nu \sin u_1), \\ x_2 &= b_1 \cos u_1, \\ y_1 &= b_2 (\varepsilon \cos u_2 - \nu \sin u_2), \\ y_2 &= b_2 \cos u_2, \\ \varepsilon &= -\frac{k_1}{2}, \quad \nu = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.117a)$$

Уравнения (5.116) в нормальных координатах примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \varepsilon b_1 - \frac{1}{\nu} \tilde{\varphi}_1 \sin u_1, \\ \frac{du_1}{dt} &= \nu - \frac{1}{b_1 \nu} \tilde{\varphi}_1 \cos u_1, \\ \frac{db_2}{dt} &= \varepsilon b_2 - \frac{1}{\nu} \tilde{\varphi}_2 \sin u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= \nu - \frac{1}{b_2 \nu} \tilde{\varphi}_2 \cos u_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.118)$$

Здесь теперь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= \left( \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_y^2 \right) b_1 \cos u_1 - \\ &\quad - \left( \omega_x \omega_y + k_1 u_z \frac{a}{r} \right) b_2 \cos u_2, \\ \tilde{\varphi}_2 &= \left( \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} + \omega_x^2 \right) b_2 \cos u_2 - \\ &\quad - \left( \omega_x \omega_y - k_1 u_z \frac{a}{r} \right) b_1 \cos u_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.119)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$U = b_1^2 + b_2^2. \quad (5.120)$$

В силу уравнений (5.118)

$$\frac{dU}{dt} = 2 \left[ \varepsilon U - \frac{1}{v} (\tilde{\varphi}_1 b_1 \sin u_1 + \tilde{\varphi}_2 b_2 \sin u_2) \right]. \quad (5.121)$$

Подставив сюда выражения (5.119) для  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2$ , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= 2 \left\{ \varepsilon U - \frac{1}{v} \left[ b_1^2 \omega_y^2 \sin u_1 \cos u_1 + b_2^2 \omega_x^2 \cos u_2 \sin u_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. - b_1 b_2 \omega_x \omega_y \sin (u_1 + u_2) + k_1 u_z \frac{a}{r} b_1 b_2 \sin (u_2 - u_1) \right] + \\ &\quad \left. + \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} (b_1^2 \sin u_1 \cos u_1 + b_2^2 \sin u_2 \cos u_2) \right\}. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  можно представить таким образом:

$$\omega_x = \Omega \sin \psi_1, \quad \omega_y = \Omega \cos \psi_1, \quad (5.123)$$

где функция  $\Omega(t)$  определена первым соотношением (5.114), а  $\psi_1$  — некоторый угол, являющийся функцией времени. Очевидно, что

$$\sin \psi_1 = \frac{\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}, \quad \cos \psi_1 = \frac{\omega_y}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}.$$

Аналогично соотношениям (5.123) можно записать:

$$b_1 = b \sin \psi_2, \quad b_2 = b \cos \psi_2, \quad b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}. \quad (5.124)$$

Внесем выражения (5.123), (5.124) в правую часть равенства (5.122). Получим:

$$\frac{dU}{dt} = 2U \left\{ \varepsilon - \frac{1}{v} \left[ \Omega^2 (\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \psi_2 \cos^2 \psi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin(u_1 + u_2) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + k_1 u_z \frac{a}{r} \sin(u_2 - u_1) \sin \psi_2 \cos \psi_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_0^2 \frac{3\rho}{r^0} (\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \psi_1 + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \psi_1) \right] \right\}. \quad (5.125)$$

Для асимптотической устойчивости достаточно, чтобы функция, стоящая в фигурных скобках в правой части равенства (5.125), была все время отрицательной.

Имеем очевидные неравенства:

$$\left. \begin{aligned} & |\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \psi_1 + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \psi_1| \leq \frac{1}{2}, \\ & |\sin u_1 \cos u_1 \sin^2 \psi_2 \cos^2 \psi_1 + \\ & \quad + \sin u_2 \cos u_2 \cos^2 \psi_2 \sin^2 \psi_1 - \\ & \quad - \sin(u_1 + u_2) \sin \psi_1 \cos \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_2| \leq \frac{3}{4}, \\ & |\sin(u_2 - u_1) \sin \psi_2 \cos \psi_2| \leq \frac{1}{2}, \\ & \frac{a}{r} \leq 1, \quad |u_z| \leq u. \end{aligned} \right\} \quad (5.126)$$

Введем еще обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \max \Omega^2 &= \Omega_*^2, \\ \frac{3 \max |\rho|}{2r^0} &= c. \end{aligned} \right\} \quad (5.127)$$

С учетом соотношений (5.126), (5.127) приходим к выводу: чтобы выражение в фигурных скобках в формуле (5.125)



было отрицательным, достаточно выполнения неравенства

$$q_2 = -\frac{k_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}} \left( \frac{3\Omega_*^2}{4} + \omega_0^2 c + u \frac{k_1}{2} \right) < 0. \quad (5.128)$$

Сравнивая неравенство (5.128) с неравенством (5.97), по аналогии с (5.98) заключаем, что для выполнения неравенства (5.128) величина  $k_1$  должна лежать в диапазоне:

$$2 \left( \frac{3\Omega_*^2}{4\omega_0^2} + c \right) (\omega_0 + u) < k_1 < 2 \left[ \omega_0 + u \left( \frac{3\Omega_*^2}{4\omega_0^2} + c \right) \right]. \quad (5.129)$$

Величина  $-\min |q_2|$  будет мерой устойчивости, ибо по аналогии с соотношением (5.101) имеет место соотношение

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} < b^0 e^{-\min |q_2|}. \quad (5.130)$$

Выше проведен анализ устойчивости схемы с двумя ньютонометрами, когда уравнения ошибок получаются проектированием на оси  $x$ ,  $y$  векторного уравнения (5.65). В случае векторного уравнения (5.102) анализ устойчивости схемы с двумя ньютонометрами может быть проведен аналогично.

**5.3.4. Решение уравнений ошибок. Зависимость ошибок инерциальной системы от инструментальных погрешностей.** Рассмотрим уравнения ошибок (5.43), (5.48) схем с тремя ньютонометрами, корректируемых от доплеровского измерителя. Построим решение этих уравнений, ограничившись случаем движения объекта на постоянном удалении от центра Земли, когда соответствующие однородные уравнения приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Векторное уравнение (5.43), если спроектировать его на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ , приводит к скалярным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k_1 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* + k_1 \frac{a}{r} u \delta \eta_* &= f_{\xi_*}, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k_1 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* - k_1 \frac{a}{r} u \delta \xi_* &= f_{\eta_*}, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k_1 \delta \dot{\zeta}_* + \omega_0^2 \delta \zeta_* &= f_{\zeta_*}, \end{aligned} \right\} \quad (5.131)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_{\xi_*} &= \Delta n_{\xi_*} - 2(\Delta m_{\eta_*} \dot{\xi}_* - \Delta m_{\xi_*} \dot{\eta}_*) - \Delta \dot{m}_{\eta_*} \xi_* + \\ &+ \Delta \dot{m}_{\xi_*} \eta_* + 3 \frac{\mu \Delta r}{r^4} \xi_* + k_1 \left[ \Delta V_{D\xi_*} - \Delta m_{\eta_*} \xi_* + \right. \\ &\quad \left. + \Delta m_{\xi_*} \eta_* + \frac{au}{r} \left( \frac{\Delta r \eta_*}{r} + \theta_{\xi_*} \dot{\xi}_* \right) \right], \\ f_{\eta_*} &= \Delta n_{\eta_*} - 2(\Delta m_{\xi_*} \dot{\xi}_* - \Delta m_{\xi_*} \dot{\xi}_*) - \Delta \dot{m}_{\xi_*} \xi_* + \\ &+ \Delta \dot{m}_{\xi_*} \xi_* + 3 \frac{\mu \Delta r}{r^4} \eta_* + k_1 \left[ \Delta V_{D\eta_*} - \Delta m_{\xi_*} \xi_* + \right. \\ &\quad \left. + \Delta m_{\xi_*} \xi_* + \frac{au}{r} \left( -\frac{\Delta r \xi_*}{r} + \theta_{\eta_*} \dot{\xi}_* \right) \right], \\ f_{\zeta_*} &= \Delta n_{\zeta_*} - 2(\Delta m_{\xi_*} \dot{\eta}_* - \Delta m_{\eta_*} \dot{\xi}_*) - \Delta \dot{m}_{\xi_*} \eta_* + \\ &+ \Delta \dot{m}_{\eta_*} \xi_* + 3 \frac{\mu \Delta r}{r^4} \zeta_* + k_1 \left[ \Delta V_{D\zeta_*} - \Delta m_{\xi_*} \eta_* + \right. \\ &\quad \left. + \Delta m_{\eta_*} \xi_* - \frac{au}{r} (\theta_{\xi_*} \xi_* + \theta_{\eta_*} \eta_*) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.132)$$

Решение третьего уравнения (5.131) очевидно:

$$\left. \begin{aligned} \delta \zeta_* &= e^{-\frac{k_1 t}{2}} \left[ \delta \zeta_*^0 \cos vt + \frac{1}{v} \left( \delta \dot{\zeta}_*^0 + \frac{k_1}{2} \delta \zeta_*^0 \right) \sin vt \right] + \\ &+ \frac{1}{v} \int_0^t f_{\zeta_*}(\tau) e^{-\frac{k_1}{2}(t-\tau)} \sin v(t-\tau) d\tau, \\ v &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.133)$$

Два первых уравнения (5.131) образуют связанную систему уравнений. Для ее решения надо найти корни характеристического уравнения (5.68). Ввиду малости  $u^2$  по сравнению с  $\omega_0^2$  здесь можно получить достаточно точные и простые приближенные выражения для этих корней.

Как известно, корни алгебраического уравнения четвертой степени

$$p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0 \quad (5.134)$$

совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$x^2 + (a_1 + A_{1,2}) \frac{x}{2} + \left( y + \frac{a_1 y - a_3}{A_{1,2}} \right) = 0, \quad (5.135)$$

где

$$A_{1,2} = \pm \sqrt{8y + a_1^2 - 4a_2}, \quad (5.136)$$

а  $y$  — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4a_2y^2 + (2a_1a_3 - 8a_4)y + a_4(4a_2 - a_1^2) - a_3^2 = 0. \quad (5.137)$$

В рассматриваемом случае это вспомогательное кубическое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f(y) = & 2y^3 - (k_1^2 + 2\omega_0^2)y^2 + \\ & + \left[ 2\omega_0^2(k_1^2 - \omega_0^2) - 2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2} \right] y + \\ & + \omega_0^4(2\omega_0^2 - k_1^2) + 2\omega_0^2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.138)$$

При  $u = 0$  это уравнение имеет корни:

$$y_1 = \frac{k_1^2}{2} - \omega_0^2, \quad y_{2,3} = \omega_0^2. \quad (5.139)$$

Взяв корень  $y_1$  в качестве первого приближения, из уравнения (5.138) методом Ньютона найдем уточненное значение этого корня:

$$y'_1 = \frac{k_1^2}{2} - \omega_0^2 - \frac{2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2}}{4\omega_0^2 - k_1^2}. \quad (5.140)$$

Теперь с точностью до слагаемых с множителем  $u^2$  имеем:

$$A_{1,2} = \pm 2j \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \left[ 1 + \frac{2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2}}{(4\omega_0^2 - k_1^2)^2} \right]. \quad (5.141)$$

Для коэффициентов квадратных уравнений (5.135) получаем выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1 + A_{1,2}}{2} &= k_1 \pm j \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \left[ 1 + \frac{2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2}}{(4\omega_0^2 - k_1^2)^2} \right], \\ y'_1 + \frac{a_1y'_1 - a_3}{A_{1,2}} &= \frac{k_1^2}{2} - \omega_0^2 - \\ &- \frac{2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2}}{4\omega_0^2 - k_1^2} \pm j \frac{k_1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \left[ 1 + \frac{2k_1^2 \frac{a^2u^2}{r^2}}{(4\omega_0^2 - k_1^2)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.142)$$

Решая квадратные уравнения (5.135), получаем с точностью до членов с  $u^2$  включительно следующие выражения для корней характеристического уравнения (5.68):

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{k_1}{2} \left( 1 \pm \frac{2 \frac{ua}{r}}{\sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}} \right) - \\ &\quad - \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \left[ 1 + \frac{2k_1^2 \frac{a^2 u^2}{r^2}}{(4\omega_0^2 - k_1^2)^2} \right], \\ p_{3,4} &= -\frac{k_1}{2} \left( 1 \pm \frac{2 \frac{ua}{r}}{\sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}} \right) + \\ &\quad + \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \left[ 1 + \frac{2k_1^2 \frac{a^2 u^2}{r^2}}{(4\omega_0^2 - k_1^2)^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.143)$$

или в первом приближении

$$p_{1,2,3,4} = -\frac{k_1}{2} \left( 1 \pm \frac{2 \frac{au}{r}}{\sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}} \right) \pm \frac{j}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}. \quad (5.144)$$

Заметим, что таким же способом могут быть найдены корни характеристического уравнения (5.71). В первом приближении они получаются такими:

$$p_{1,2,3,4} = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{j}{2} (\sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2} \pm 2u). \quad (5.145)$$

После того как найдены корни характеристического уравнения (5.68), дальнейшее построение общих решений первых двух уравнений (5.131) может быть выполнено обычными способами.

Из вида корней (5.144), (5.145) характеристических уравнений (5.68), (5.71) вытекает, что вместо системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, образованной первыми двумя уравнениями (5.131), можно рассматривать два

уравнения второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta \xi}_* + k_1 \dot{\delta \xi}_* + \omega_0^2 \delta \xi_* &= f_{\xi_*}, \\ \ddot{\delta \eta}_* + k_1 \dot{\delta \eta}_* + \omega_0^2 \delta \eta_* &= f_{\eta_*}. \end{aligned} \right\} \quad (5.146)$$

Эта возможность вытекает из того обстоятельства, что связь первого и второго дифференциальных уравнений (5.131) ввиду малости  $u$  является слабой, и в демпфированной системе эффекты, обусловленные этой связью, не успевают развиваться за время затухания переходных процессов.

Решение уравнений (5.146) имеет вид, аналогичный решению (5.133) последнего уравнения (5.131). Эти три решения могут быть объединены в одно векторное

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{r} = e^{-\frac{k_1 t}{2}} & \left[ \delta \mathbf{r}^0 \cos \nu t + \frac{1}{\nu} \left( \frac{d \delta \mathbf{r}^0}{dt} - \frac{k_1}{2} \delta \mathbf{r}^0 \right) \sin \nu t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\nu} \int_0^t \mathbf{f}_1(\tau) e^{-\frac{k_1}{2}(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau \right] \\ & \left( \nu = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{k_1^2}{4}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.147)$$

соответствующее векторному уравнению (5.43), если в левой части его положить  $u=0$ , т. е. уравнению

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \delta \mathbf{r} = \mathbf{f}_1, \quad (5.148)$$

где векторная функция  $\mathbf{f}_1$  есть правая часть уравнения (5.43). Проекция этой функции на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  заданы формулами (5.132). Интегрирование в правой части равенства (5.147) выполнено в осях  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ .

Остановимся подробнее на правой части уравнения (5.43). По сравнению с недемпфированной инерциальной системой здесь появляется дополнительное слагаемое

$$k_1 \left[ \Delta V_D - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right]. \quad (5.149)$$

Наряду с инструментальной погрешностью доплеровского измерителя скорости сюда входит вектор  $\boldsymbol{\theta}$ , являющийся решением второй группы уравнений ошибок. Ввиду малости

величины  $u$  по сравнению с  $\omega_0$  и  $k_1$  это не приводит, однако, к существенным дополнительным ошибкам определения координат. В первом приближении в выражении (5.149) можно сохранить лишь первый и последний члены. В этом случае в качестве функции  $f_1$  в решении (5.147) следует взять

$$f_1 = \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + \frac{d}{dt}(r \times \Delta m) + \\ + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} + k_1 (\Delta V_D - \Delta m \times r). \quad (5.150)$$

Полезно заметить, что демпфирование инерциальной системы приводит к появлению дополнительного слагаемого ( $-k_1 \Delta m \times r$ ) в правой части уравнения ошибок, даже если  $\Delta V_D = 0$ , т. е. при идеальном доплеровском измерителе.

Для количественной оценки влияния инструментальных погрешностей на ошибки определения координат в демпфированной инерциальной системе рассмотрим случай, когда функция  $f_1$  представляет собой постоянный вектор в осях  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ . Пусть  $f_1 = a = \text{const}$ . Тогда решение (5.147) примет вид:

$$\delta r = e^{-\frac{k_1 t}{2}} \left[ \delta r^0 \cos vt + \frac{1}{v} \left( \frac{d \delta r^0}{dt} - \frac{k_1}{2} \delta r^0 \right) \sin vt \right] + \\ + \frac{a}{\omega_0^2} \left[ 1 - \frac{1}{v} e^{-\frac{k_1 t}{2}} \left( -\frac{k_1}{2} \sin vt + v \cos vt \right) \right]. \quad (5.151)$$

Установившееся значение ошибки

$$\delta r = \frac{a}{\omega_0^2}. \quad (5.152)$$

Если другие погрешности, кроме постоянной погрешности  $\Delta V_D$  доплеровского измерителя, отсутствуют, то  $a = k_1 \Delta V_D$  и

$$\delta r = \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta V_D. \quad (5.153)$$

Если отношение  $k_1/\omega_0$  есть величина порядка единицы, то  $\delta r \approx \Delta V_D/\omega_0$ . Пусть, например,  $\Delta V_D = 0,001 V$ . Тогда  $\delta r \approx \approx V/1,25$ . При скорости порядка 1000 м/сек получим тогда, что  $|\delta r| \approx 0,8$  км. Аналогично проявляет себя слагаемое ( $-k_1 \Delta m \times r$ ) в правой части формулы (5.150).

Что касается остальных инструментальных погрешностей, т. е. первых четырех слагаемых в правой части (5.150), то здесь полезно отметить следующее. Эти слагаемые входят в правую часть уравнения ошибок демпфированной системы в таком же виде, как и в уравнение ошибок системы без доплеровской коррекции. Однако установившееся значение ошибки  $\delta r$  от влияния этих слагаемых в демпфированной системе равно половине максимального значения ошибки в недемпфированной системе. В самом деле, пусть, например, единственной инструментальной погрешностью будет постоянная погрешность  $\Delta n = \text{const}$  ньютонометров. Тогда из формулы (5.151) получаем установившуюся ошибку

$$|\delta r| = \frac{|\Delta n|}{\omega_0^2}. \quad (5.154)$$

В недемпфированной же системе

$$\delta r = \frac{\Delta n}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) \quad (5.155)$$

и поэтому

$$\max |\delta r| = 2 \frac{|\Delta n|}{\omega_0^2}. \quad (5.156)$$

Мы построили выше решение уравнения (5.43). Аналогично может быть построено решение уравнения (5.48) для схемы с тремя ньютонометрами, корректируемой от доплеровского измерителя в соответствии с уравнениями (5.40). Здесь также можно показать, что при  $r = \text{const}$  вместо уравнения (5.48) в первом приближении можно рассматривать уравнение

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} + k_1' \omega_0^2 \frac{d \delta r}{dt} + \omega_0^2 \delta r = f_2, \quad (5.157)$$

где в качестве  $f_2$  можно взять правую часть уравнения (5.48) при  $u = 0$ :

$$\begin{aligned} f_2 = & \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r) + \\ & + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} + k_1' \left[ \frac{d}{dt} \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d^2}{dt^2} \Delta V_D \right]. \end{aligned} \quad (5.158)$$

При  $k_1'\omega_0^2 = k_1$  левая часть уравнения (5.157) совпадает с левой частью уравнения (5.148). Решение уравнения (5.157) определится формулой (5.147), если в последней заменить  $f_1$  на  $f_2$ , а  $k_1$  на  $k_1'\omega_0^2$ .

Обратимся к уравнениям ошибок демпфированных систем с двумя ньютонометрами. Рассмотрим сначала уравнения (5.44). Ограничимся случаем малых  $\omega_x, \omega_y$ , т. е. случаем медленных (по сравнению с первой космической) скоростей движения объекта на постоянном расстоянии от центра Земли (или при небольших изменениях этого расстояния).

При исследовании устойчивости однородных уравнений (5.44) было выяснено, что в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника они представляются в виде (5.114а), причем правые части этих уравнений мало сказываются на решении. Связь уравнений (5.114а) между собой, обусловленная слагаемыми, стоящими в правых частях, оказывается слабой при малых  $\omega_x, \omega_y, \rho$ . Эффекты, вызванные этой связью, не успевают развиться за сравнительно малое время затухания переходных процессов при достаточно эффективном демпфировании. Поэтому в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника можно пренебречь слагаемыми, стоящими в правых частях уравнений (5.114а). Это вполне аналогично пренебрежению последними слагаемыми в левых частях двух первых уравнений (5.131), которое было принято при построении решения (5.147) уравнения (5.43).

Из сказанного вытекает, что в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника вместо уравнений (5.44) можно в первом приближении рассмотреть уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + \omega_0^2\delta x &= f_x, \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + \omega_0^2\delta y &= f_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.159)$$

Функции  $f_x$  и  $f_y$ , стоящие здесь справа, суть правые части уравнений (5.44), если в них положить  $\omega_z = 0$ , что имеет место для азимутально свободного трехгранника. В первом приближении в правых частях уравнений (5.44) можно пренебречь по малости слагаемыми, содержащими множителями  $\omega_y, \omega_x, u_x, u_y, u_z$ , сохранив слагаемые с  $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y$ . Тогда



будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} f_x &= \Delta n_x - \dot{\Delta m}_y r - \dot{\omega}_y \Delta r + k_1 (\Delta V_{Dx} - r \Delta m_y), \\ f_y &= \Delta n_y + \dot{\Delta m}_x r + \dot{\omega}_x \Delta r + k_1 (\Delta V_{Dy} + r \Delta m_x). \end{aligned} \right\} \quad (5.160)$$

Решение уравнений (5.159) можно получить из формулы (5.147), если в ней вектор  $\delta \mathbf{r}$  заменить на  $\delta x$ ,  $\delta y$ , а  $\mathbf{f}_1$  — на  $f_x$ ,  $f_y$ .

Уравнения (5.44) суть уравнения ошибок схем с двумя ньютонометрами, работающих по формулам (5.39). Для схем с двумя ньютонометрами, работающих по формулам (5.40), уравнения ошибок получаются из векторного уравнения (5.48) проектированием его на оси  $x$ ,  $y$  сопровождающего трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совпадает с  $\mathbf{r}$ . При этом, как было указано в конце п. 5.3.1, по выполнению проектирования надо заменить  $\delta z$  на  $\Delta r$  и опустить проекции вектора  $\frac{d}{dt} \left( 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} \right)$ .

При медленных движениях на постоянном удалении от центра Земли в первом приближении получим тогда в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника [в тех же предположениях, что и уравнения (5.159)] следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k'_1 \omega_0^2 \delta x + \omega_0^2 \delta x &= f'_x, \\ \delta \ddot{y} + k'_1 \omega_0^2 \delta y + \omega_0^2 \delta y &= f'_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.161)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= \Delta n_x - \dot{\Delta m}_y r - \dot{\omega}_y \Delta r + \\ &\quad + k'_1 (\Delta \dot{n}_x - r \dot{\omega}_x \Delta m_z - \Delta \ddot{V}_{Dx}), \\ f'_y &= \Delta n_y + \dot{\Delta m}_x r + \dot{\omega}_x \Delta r + \\ &\quad + k'_1 (\Delta \dot{n}_y - r \dot{\omega}_y \Delta m_z - \Delta \ddot{V}_{Dy}). \end{aligned} \right\} \quad (5.162)$$

При  $k'_1 \omega_0^2 = k'_1$  уравнения (5.161) и (5.159) отличаются друг от друга лишь правыми частями и то лишь теми слагаемыми в них, которые содержат множителями  $k_1$  и  $k'_1$ . Наиболее существенное различие заключается в том, что в функции  $f'_x$ ,  $f'_y$

инструментальные погрешности доплеровского измерителя входят лишь своими вторыми производными  $\Delta \ddot{V}_{Dx}$ ,  $\Delta \ddot{V}_{Dy}$ , тогда как функции  $f_x$ ,  $f_y$  зависят непосредственно от  $\Delta V_{Dx}$ ,  $\Delta V_{Dy}$ .

## § 5.4. Изменение собственных частот инерциальной системы, корректируемой от доплеровского измерителя

**5.4.1. Уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок.** В § 5.3 было выяснено, что первая группа уравнений ошибок демпфированной инерциальной системы в простейшем случае сводится к дифференциальным уравнениям второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение имеет при этом вид:

$$p^2 + k_1 p + \omega_0^2 = 0. \quad (5.163)$$

Его корни

$$p_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 - 4\omega_0^2}. \quad (5.164)$$

Если  $4\omega_0^2 > k_1^2$ , то корни характеристического уравнения равны:

$$p_{1,2} = -\mu \pm j\nu, \quad \mu = \frac{k_1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - k_1^2}. \quad (5.165)$$

Максимальное значение  $\mu$  достигается, очевидно, при  $k_1 = 2\omega_0$  и равно

$$\mu_0 = \omega_0. \quad (5.166)$$

При дальнейшем увеличении  $k_1$  корни (5.164) становятся отрицательными вещественными (заметим, что  $k_1 > 0$ ):  $p_1 = -\mu_1$ ,  $p_2 = -\mu_2$ , причем  $\mu_1 < \mu_0$ ,  $\mu_2 > \mu_0$ . Поэтому при  $\mu = \mu_0 = \omega_0$  получается максимально достижимая величина затухания в системе.

Ввиду малости  $\mu_0 = \omega_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$  это затухание может оказаться недостаточным, во всяком случае при небольшом времени работы системы и больших величинах начальных условий уравнений ошибок. В самом деле,  $\omega_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$  и поэтому функция  $e^{-\omega_0 t}$ , характеризующая затухание, уменьшается медленно. Она достигает значения  $1/e \approx 1/3$  при  $t \approx 800$  сек. В реальных схемах обычно  $k_1 < 2\omega_0$  и эффект

затухания собственных колебаний оказывается еще слабее. Выход из указанного затруднения может быть найден на пути искусственного увеличения частоты  $\omega_0$  собственных колебаний инерциальной системы.

В автономной инерциальной системе увеличение частоты собственных колебаний приведет к баллистическим девиациям. Это легко понять, если вспомнить аналогию между инерциальной системой, определяющей местоположение объекта с помощью ньютонометров и гироскопов, и физическим маятником Шулера. Именно выбор собственной частоты маятника, равной  $\omega_0 = \sqrt{g/r}$ , обеспечивает невозмущаемость относительного равновесия маятника ускорениями его точки опоры.

Однако с помощью информации от доплеровского измерителя относительной скорости, как будет ниже показано, можно увеличить собственную частоту инерциальной системы и избежать баллистических девиаций аналогично тому, как с помощью этой информации удалось избавиться от скоростных девиаций при введении демпфирования.

Изменение частоты собственных колебаний инерциальной системы может быть осуществлено двумя способами. В первом из них первая группа (1.36) уравнений идеальной работы заменяется на уравнения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}) dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t (\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} + k_2 \Delta \mathbf{V}) dt + \mathbf{r}^0 \end{aligned} \right\} \quad (5.167)$$

$(\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D).$

Во втором способе уравнения (1.36) заменяются следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t [\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + k'_2 (\Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{V})] dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t (\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r}) dt + \mathbf{r}^0 \end{aligned} \right\} \quad (5.168)$$

$(\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D).$

В уравнениях (5.167), (5.168)  $\Delta \mathbf{V}$  — разность относительных скоростей, определенных соответственно инерциальной системой и доплеровским измерителем, а коэффициенты  $k_2$  и  $k'_2$  — некоторые безразмерные постоянные. При  $k_2 = 0$ ,  $k'_2 = 0$  уравнения (5.167), (5.168) превращаются в уравнения (1.36).

Чтобы убедиться в том, что изменение уравнений идеальной работы в соответствии с соотношениями (5.167), (5.168) действительно приводит к изменению частоты собственных колебаний инерциальной системы, надо составить уравнения возмущенного движения.

Начнем со случая уравнений (5.167). Из этих уравнений и из равенства (5.38) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g}, \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + k_2 \delta \Delta \mathbf{V}, \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + \left( \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u} \frac{a}{r} \right) \times \mathbf{r} - \\ &\quad - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{\Delta r a}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.169)$$

Из второго и третьего уравнений (5.169) имеем:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v} = \frac{1}{1+k_2} \left\{ \delta \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + k_2 \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + \right. \\ \left. + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} + k_2 \left[ - \left( \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u} \frac{a}{r} \right) \times \mathbf{r} - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} + \Delta \mathbf{V}_D \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.170)$$

Подстановка этого результата в первое уравнение (5.169) вместе с выражением (5.42) для  $\delta \mathbf{g}$  приводит к векторному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + (1+k_2) \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = \\ = (1+k_2) \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \\ + k_2 \frac{d}{dt} \left[ \left( \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Это и есть искомое уравнение ошибок схемы, работающей по уравнениям (5.167). При  $k_2 = 0$  уравнение (5.171)

переходит в уравнение (2.15а), т. е. в уравнение ошибок схемы, работающей в соответствии с уравнениями (1.36). Заметим, что изменение (5.167) касается лишь первой группы уравнений идеальной работы, посредством которых находятся координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в подвижном трехграннике  $O_1xyz$ . Вторая группа уравнений идеальной работы, касающихся определения направляющих косинусов  $\beta_{ij}$  между осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и координат  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , остается без изменений. В соответствии с этим не меняется и вторая группа уравнений ошибок.

Выше дан вывод уравнения ошибок схемы, работающей по уравнениям (5.167). Обратимся теперь ко второму случаю — случаю уравнений (5.168). Варьируя эти уравнения и вспоминая соотношение (5.38), приходим к системе уравнений в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g} + \\ &\quad + k'_2 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}), \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}, \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \\ &\quad - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{\Delta r a}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.172)$$

Из второго и третьего уравнений (5.172) получаем:

$$\begin{aligned} (1 - k'_2) \frac{d \delta \mathbf{v}}{dt} - \delta \mathbf{g} + k'_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} - \\ - k'_2 \frac{d}{dt} \left[ -(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} + \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.173)$$

Подставив сюда  $\delta \mathbf{v}$  из второго уравнения (5.172),  $\delta \mathbf{g}$  из соотношения (5.42) и поделив результат на  $1 - k'_2$ , находим окончательный вид уравнения ошибок для варианта (5.168):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{k'_2}{1 - k'_2} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + \frac{\mu}{r^3 (1 - k'_2)} \delta \mathbf{r} &= \\ = \frac{1}{1 - k'_2} \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \\ + \frac{k'_2}{1 - k'_2} \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.174)$$

**5.4.2. Анализ уравнений ошибок.** Сравним уравнения ошибок (5.171) и (5.174). Легко видеть, что они имеют совершенно одинаковую структуру и различаются лишь коэффициентами, содержащими  $k_2$  и  $k'_2$ .

Если взять эти коэффициенты такими, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{1 - k'_2} = 1 + k_2, \quad (5.175)$$

то будет иметь место также равенство

$$\frac{k'_2}{1 - k'_2} = k_2. \quad (5.176)$$

Теперь видно, что замена (5.175) сводит уравнение (5.174) к уравнению (5.171). Таким образом, изменения (5.167) и (5.168) уравнений идеальной работы динамически равносильны. Они приводят к одному и тому же уравнению ошибок. Поэтому в дальнейшем достаточно рассмотреть лишь одно из уравнений (5.171), (5.174), например уравнение (5.171).

Рассмотрим прежде всего однородное уравнение (5.171)

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + (1 + k_2) \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = 0. \quad (5.177)$$

Если бы Земля не вращалась, то это уравнение приняло бы вид ( $\mathbf{u} = 0$ ):

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + (1 + k_2) \frac{\mu}{r^3} \delta \mathbf{r} = 0. \quad (5.178)$$

При  $r = \text{const}$ , введя, как обычно, обозначение  $\mu/r^3 = \omega_0^2$ , получим решение уравнения (5.178) в виде формулы

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} = & \delta r^0 \cos \omega_0 \sqrt{1 + k_2} t + \\ & + \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 + k_2}} \frac{d \delta r^0}{dt} \sin \omega_0 \sqrt{1 + k_2} t. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Таким образом, действительно, собственная частота системы изменилась: вместо величины  $\omega_0$  она стала иметь величину  $\omega_0 \sqrt{1 + k_2}$ .

Предположение о том, что  $\mathbf{u} = 0$ , означает, что относительная скорость, измеряемая доплеровской станцией, равна абсолютной скорости, т. е. скорости в системе координат

$O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$ , не участвующей во вращении Земли. В действительности  $\mathbf{u} \neq 0$  и доплеровский измеритель дает лишь относительную скорость. Этим объясняется появление в уравнении (5.177) слагаемого  $k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right)$ .

Указанное слагаемое обуславливает появление в уравнении ошибок сил гироскопического характера, которые не влияют на устойчивость (неасимптотическую). В самом деле, умножим уравнение (5.177) скалярно на  $d\delta \mathbf{r}/dt$ . Так как вектор  $\mathbf{u}$  постоянен и  $r = \text{const}$ , то

$$\frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) = \frac{a}{r} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} \cdot \left( \mathbf{u} \times \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} \right) \quad (5.180)$$

и получается равенство

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \mathbf{r} \cdot \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} = 0, \quad (5.181)$$

которое после интегрирования дает соотношение

$$\left( \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 (1 + k_2) (\delta \mathbf{r})^2 = \text{const}. \quad (5.182)$$

Из этого соотношения и следует неасимптотическая устойчивость системы.

В проекциях на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  векторное уравнение (5.177) дает три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta \xi_* - k_2 u \frac{a}{r} \delta \dot{\eta}_* &= 0, \\ \delta \ddot{\eta}_* + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta \eta_* + k_2 u \frac{a}{r} \delta \dot{\xi}_* &= 0, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta \zeta_* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.183)$$

Решением третьего уравнения (5.183) будут гармонические колебания с частотой  $\nu = \omega_0 \sqrt{1 + k_2}$ . Характеристическое уравнение системы, образованной двумя первыми уравнениями (5.183), имеет вид:

$$p^4 + p^2 \left[ 2\omega_0^2 (1 + k_2) + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] + \omega_0^4 (1 + k_2)^2 = 0. \quad (5.184)$$

Корни этого биквадратного уравнения суть

$$p_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt{-\omega_0^2(1+k_2) - k_2^2 \frac{a^2 u^2}{2r^2} \pm k_2 \frac{au}{r}} \sqrt{\omega_0^2(1+k_2) + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{4r^2}}. \quad (5.185)$$

Так как  $\omega_0^2 \gg \frac{a^2 u^2}{r^2}$ , то, сохранив в выражениях для корней лишь линейные относительно  $au/r$  слагаемые, получаем такие приближенные значения:

$$p_{1, 2, 3, 4} = \pm j \left( \omega_0 \sqrt{1+k_2} \mp \frac{k_2}{2} \frac{au}{r} \right).$$

Таким образом, решение двух первых уравнений (5.183) представляет собой суперпозицию двух гармонических колебаний. Одно из них имеет частоту  $\omega_0 \sqrt{1+k_2}$ , второе — частоту  $\frac{k_2}{2} \frac{au}{r}$ .

После того как найдены корни характеристического уравнения (5.184), легко может быть построено общее решение однородной и неоднородной систем (5.183).

Если  $k_2$  невелико (например,  $k_2 \approx 10$ ), то вследствие малости  $u$  по сравнению с  $\omega_0$  величина  $\frac{k_2}{2} \frac{au}{r}$  будет малой по сравнению с  $\omega_0 \sqrt{1+k_2}$ . Корни характеристического уравнения (5.184) будут мало отличаться от величин  $\pm j\omega_0 \sqrt{1+k_2}$ . Связь первого и второго уравнений (5.183) будет в этом случае слабой. Вместо них, во всяком случае для небольшого времени работы, можно рассматривать уравнения

$$\delta \ddot{\xi}_* + (1+k_2) \omega_0^2 \delta \xi_* = 0, \quad \delta \ddot{\eta}_* + (1+k_2) \omega_0^2 \delta \eta_* = 0,$$

которые получаются из уравнений (5.183), если положить в них  $u = 0$ .

В этом случае вместо векторного уравнения (5.171) можно рассматривать уравнение

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + (1+k_2) \omega_0^2 \delta \mathbf{r} = \mathbf{f}, \quad (5.185a)$$



где через  $f$  обозначена правая часть уравнения (5.171). Ввиду малости  $u$  можно принять, что

$$f = (1 + k_2) \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - \\ - \frac{d}{dt} (\Delta m \times \mathbf{r}) - k_2 \frac{d\Delta V_D}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4}. \quad (5.186)$$

Общее решение уравнения (5.185a) находится в таком виде:

$$\delta \mathbf{r} = \delta r^0 \cos vt + \\ + \frac{1}{v} \frac{d\delta r^0}{dt} \sin vt + \frac{1}{v} \int_0^t f(\tau) \sin v(t - \tau) d\tau, \quad (5.187)$$

где

$$v = \omega_0 \sqrt{1 + k_2}. \quad (5.188)$$

Уравнение (5.171) — это уравнение ошибок схемы с тремя ньютонометрами, работающей согласно формулам (5.167). Уравнения ошибок аналогичной схемы с двумя ньютонометрами, когда отсутствует ньютонометр вдоль оси  $z$ , в невозмущенном положении совпадающей с направлением  $\mathbf{r}$ , получаются из векторного уравнения (5.171) проектированием его на оси  $x$  и  $y$  сопровождающего трехгранника, причем в указанных проекциях надо положить

$$\left. \begin{aligned} \delta z &= \Delta r (= \Delta h), \\ \Delta V_{Dz} &= \Delta \dot{r} - (\mathbf{V}_D \times \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{z} = \\ &= \Delta \dot{r} - \left( \omega_y - \frac{\rho}{r} u_y \right) \delta x + \left( \omega_x - \frac{\rho}{r} u_x \right) \delta y, \end{aligned} \right\} \quad (5.188a)$$

где можно взять  $\rho/r = a/r$ . Так как вектор  $\mathbf{u}$  постоянен в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$ , в которой проведено дифференцирование в уравнении (5.171), то при  $\mathbf{r} = \text{const}$

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) = \frac{a}{r} \mathbf{u} \times \frac{d\delta \mathbf{r}}{dt}. \quad (5.189)$$

Приняв это во внимание, уравнения ошибок для схемы с двумя ньютонометрами получим в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left[ (1+k_2)(\omega_0^2 - \omega_y^2) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta x + \\ + \left[ (1+k_2) \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z + k_2 \frac{a}{r} (u_y \omega_x - u_x \omega_y) \right] \delta y - \\ - \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{y} = f_x, \\ \delta\ddot{y} + \left[ (1+k_2)(\omega_0^2 - \omega_x^2) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta y + \\ + \left[ (1+k_2) \omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_2 \frac{a}{r} (u_x \omega_y - u_y \omega_x) \right] \delta x + \\ + \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{x} = f_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.190)$$

где  $f_x$  и  $f_y$  определены равенствами:

$$\left. \begin{aligned} f_x = -(\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y) \Delta r - (2+k_2) \omega_y \Delta \dot{r} + \\ + (1+k_2) \Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r - (1+k_2) r \omega_x \Delta m_z - \\ - r \omega_z \Delta m_x - k_2 \left[ \frac{d}{dt} (\Delta V_{Dx} + a u_z \theta_x - a u_x \theta_z) - \right. \\ \left. - \omega_z (\Delta V_{Dy} + a u_z \theta_y - a u_y \theta_z) \right], \\ f_y = -(\omega_y \omega_z - \dot{\omega}_x) \Delta r + (2+k_2) \omega_x \Delta \dot{r} + \\ + (1+k_2) \Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r - (1+k_2) r \omega_y \Delta m_z - \\ - r \omega_z \Delta m_y - k_2 \left[ \frac{d}{dt} (\Delta V_{Dy} + a u_z \theta_y - a u_y \theta_z) + \right. \\ \left. + \omega_z (\Delta V_{Dx} + a u_z \theta_x - a u_x \theta_z) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.191)$$

При движении объекта по параллели с постоянной скоростью однородные уравнения (5.190) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \left[ (1+k_2)(\omega_0^2 - \omega_y^2) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta x - \\ - \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{y} = 0, \\ \delta\ddot{y} + \left[ (1+k_2) \omega_0^2 - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta y + \\ + \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.192)$$

Характеристическое уравнение этой системы уравнений сводится к биквадратному уравнению

$$p^4 + \left[ (2\omega_0^2 - \omega_y^2)(1 + k_2) + 2\omega_z^2 + 2k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z + \right. \\ \left. + k_2^2 \frac{a^2 u_z^2}{r^2} \right] p^2 + \left[ (\omega_0^2 - \omega_y^2)(1 + k_2) - \omega_z^2 - \right. \\ \left. - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \left[ \omega_0^2(1 + k_2) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] = 0. \quad (5.193)$$

Можно показать, что по крайней мере в области

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2 > 0$$

уравнение (5.193) имеет две пары сопряженных чисто мнимых корней, т. е. в этой области система неасимптотически устойчива.

Если речь идет о медленных движениях объекта на постоянном удалении от центра Земли, то в первом приближении в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника вместо уравнений (5.190) можно рассмотреть упрощенные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \omega_0^2(1 + k_2) \delta x &= f'_x, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2(1 + k_2) \delta y &= f'_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.194)$$

причем в качестве правых частей этих уравнений могут быть взяты функции

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= -\dot{\omega}_y \Delta r + (1 + k_2) \Delta n_x - \Delta \dot{m}_y r - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx}, \\ f'_y &= \dot{\omega}_x \Delta r + (1 + k_2) \Delta n_y + \Delta \dot{m}_x r - k_2 \Delta \dot{V}_{Dy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.195)$$

## § 5.5. Демпфирование инерциальной системы с одновременным изменением собственных частот

**5.5.1. Уравнения идеальной работы. Уравнения ошибок.** В §§ 5.2 и 5.3 было рассмотрено демпфирование инерциальных систем с использованием информации от доплеровского измерителя относительной скорости. В предыдущем параграфе рассмотрено изменение собственных частот инерциальной системы при использовании этой же информации.

Перейдем теперь к рассмотрению демпфирования инерциальных систем с одновременным изменением собственных частот.

Два варианта демпфирования [уравнения (5.39), (5.40)] и два варианта изменения собственных частот [уравнения (5.167), (5.168)] дадут четыре варианта схем, в которых демпфирование осуществляется с одновременным изменением частот собственных колебаний. Составим соответствующие уравнения идеальной работы.

Комбинируя уравнения (5.39), (5.167), получим уравнения идеальной работы первого из четырех указанных вариантов:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} - k_1 \Delta \mathbf{V}) dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t (\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} + k_2 \Delta \mathbf{V}) dt + \mathbf{r}^0 \\ &(\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D). \end{aligned} \right\} \quad (5.196)$$

В качестве второго варианта возьмем комбинацию уравнений (5.39), (5.168). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t [\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} - k_1 \Delta \mathbf{V} + \\ &\quad + k'_2 (\Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{V})] dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t (\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r}) dt + \mathbf{r}^0 \\ &(\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D). \end{aligned} \right\} \quad (5.197)$$

Третий вариант образуется уравнениями (5.40), (5.167):

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t (\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}) dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t [\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} + k'_1 (\Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{V}) + \\ &\quad + k_2 \Delta \mathbf{V}] dt + \mathbf{r}^0 \\ &(\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D). \end{aligned} \right\} \quad (5.198)$$

Наконец, для получения уравнений идеальной работы четвертого варианта надо скомбинировать уравнения (5.40), (5.168). В результате приходим к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= \int_0^t [\mathbf{n} - \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \mathbf{g} + k'_2(\Delta \dot{\mathbf{V}} + \\ &\quad + \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{V})] dt + \mathbf{v}^0, \\ \mathbf{r} &= \int_0^t [\mathbf{v} - \mathbf{m} \times \mathbf{r} + k'_1(\Delta \dot{\mathbf{V}} + \mathbf{m} \times \Delta \mathbf{V})] dt + \mathbf{r}^0 \\ &\quad (\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_D). \end{aligned} \right\} \quad (5.199)$$

Получим уравнения ошибок для всех этих вариантов. Варьируя уравнения (5.196), получаем систему уравнений в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \delta \mathbf{g} - k_1 \delta \Delta \mathbf{V}, \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + k_2 \delta \Delta \mathbf{V}, \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \\ &\quad \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.200)$$

Исключив из уравнений (5.200) сначала  $\delta \Delta \mathbf{V}$ , а затем  $\delta \mathbf{v}$  и подставив вместо  $\delta \mathbf{g}$  его выражение (5.42), придем к векторному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu}{r^3} (1 + k_2) \delta \mathbf{r} + \\ + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) - k_1 \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} = \\ = (1 + k_2) \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) - \\ - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) - k_1 (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \\ + k_2 \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right] - \\ - k_1 \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right]. \quad (5.201) \end{aligned}$$

При  $k_2 = 0$  это уравнение превращается, как нетрудно убедиться, в уравнение (5.43), при  $k_1 = 0$  — в уравнение (5.171), а если одновременно  $k_1 = 0$  и  $k_2 = 0$ , то уравнение (5.201) переходит в уравнение (2.15а).

Аналогично, варьируя уравнения (5.197), получаем систему уравнений в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g} - \\ &\quad - k_1 \delta \Delta \mathbf{V} + k'_2 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}), \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}, \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \\ &\quad \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.202)$$

Подставив в первое уравнение (5.202) выражение  $\delta \Delta \mathbf{V}$  из третьего уравнения, а затем  $\delta \mathbf{v}$  из второго, получим уравнение ошибок для варианта (5.197) в таком виде:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{k_1}{1 - k'_2} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu}{r^3 (1 - k'_2)} \delta \mathbf{r} + \\ &+ \frac{k'_2}{1 - k'_2} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) - \frac{k_1}{1 - k'_2} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{1 - k'_2} \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) - \\ &- \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) - \frac{k_1}{1 - k'_2} \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \frac{k_1}{1 - k'_2} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \right. \\ &+ \left. \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right] + \frac{k'_2}{1 - k'_2} \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right]. \quad (5.203) \end{aligned}$$

При  $k'_2 = 0$  это уравнение переходит в уравнение (5.43), при  $k_1 = 0$  — в уравнение (5.174), а при  $k'_2 = k_1 = 0$  — в уравнение (2.15а).

Получим уравнения ошибок для варианта (5.198). Варьируя уравнения (5.198), находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g}, \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \\ &\quad + k'_1 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}) + k_2 \delta \Delta \mathbf{V}, \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \\ &\quad \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.204)$$

Для приведения этой системы уравнений к обычной форме можно поступить следующим образом. Подставим  $\delta \Delta \mathbf{V}$  из третьего уравнения во второе и разрешим полученное уравнение относительно  $d \delta \mathbf{v} / dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d \delta \mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{k'_1} \left\{ \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - (1 + k_2) \delta \mathbf{v} + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \left[ -(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) + \Delta \mathbf{V}_D \right] \right\} + \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[ -(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) + \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.205)$$

С другой стороны, из первого равенства (5.204) следует, что

$$\frac{d \delta \mathbf{v}}{dt} = \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} + \delta \mathbf{g}. \quad (5.206)$$

Приравняв правые части равенств (5.205), (5.206), найдем:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{v} &= -\frac{k'_1}{1 + k_2} \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + \delta \mathbf{g} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{1 + k_2} \left( \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} \right) - \frac{k_2}{1 + k_2} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D \right] - \frac{k'_1}{1 + k_2} \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.207)$$

Подставляя теперь это значение  $\delta \mathbf{v}$  в соотношение (5.206) или в соотношение (5.205) и вспоминая выражение (5.42) для  $\delta \mathbf{g}$ , придем после очевидных группировок к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k'_1 \frac{\mu}{r^3} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + (1 + k_2) \frac{\mu}{r^3} \left( 1 - 3k'_1 \frac{\dot{r}}{r} \right) \delta \mathbf{r} + \\ & + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + k'_1 \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) = \\ & = (1 + k_2) \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + 3 \frac{\mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + \\ & + k_2 \frac{d}{dt} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right] + \\ & + k'_1 \left\{ \frac{d^2}{dt^2} \left[ (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta \mathbf{V}_D \right] + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dt} \left( \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \frac{d \mathbf{r}}{dt} + \frac{3 \mu \mathbf{r} \Delta r}{r^4} \right) \right\}. \quad (5.208) \end{aligned}$$

При  $k_2 = 0$  уравнение (5.208) переходит, как и следовало ожидать, в уравнение (5.48). При  $k'_1 = 0$  оно превращается в уравнение (5.171). При  $k'_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$  — в уравнение (2.15а).

Уравнение ошибок для четвертого из перечисленных выше вариантов уравнений идеальной работы получается варьированием уравнений (5.199). Это дает систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{v}} &= \Delta \mathbf{n} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{v} + \delta \mathbf{g} + \\ & + k'_2 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}), \\ \delta \dot{\mathbf{r}} &= \delta \mathbf{v} - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} + \\ & + k'_1 (\delta \Delta \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \Delta \mathbf{V}), \\ \delta \Delta \mathbf{V} &= \delta \mathbf{v} + (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} - \\ & - \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta \mathbf{V}_D. \end{aligned} \right\} \quad (5.209)$$

Из второго и третьего уравнений системы (5.209)

$$\begin{aligned} \frac{d \delta \mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{k'_1} \left( \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} - \delta \mathbf{v} \right) + \\ & + \frac{d}{dt} \left[ -(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{r} \frac{a}{r} + \mathbf{u} \times \left( \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} - \mathbf{r} \frac{a \Delta r}{r^2} \right) + \Delta \mathbf{V}_D \right]. \end{aligned} \quad (5.210)$$



Из первого и третьего уравнений (5.209)

$$\begin{aligned} \frac{d \delta v}{dt} = & \frac{1}{1-k'_2} \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + \delta g \right) - \\ & - \frac{k'_2}{1-k'_2} \frac{d}{dt} \left[ -(\theta \times u) \times r \frac{a}{r} + u \times \left( \delta r \frac{a}{r} - r \frac{a \Delta r}{r^2} \right) + \Delta V_D \right]. \end{aligned} \quad (5.211)$$

Сравнивая между собой равенства (5.210) и (5.211), находим выражение для  $\delta v$ :

$$\begin{aligned} \delta v = & \frac{d \delta r}{dt} + \Delta m \times r - \frac{k'_1}{1-k'_2} \left\{ \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + \delta g + \right. \\ & \left. + \frac{d}{dt} \left[ (\theta \times u) \times r \frac{a}{r} - u \times \left( \delta r \frac{a}{r} - r \frac{a \Delta r}{r^2} \right) - \Delta V_D \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.212)$$

Чтобы закончить вывод уравнения ошибок для варианта (5.199), осталось подставить это значение в уравнение (5.210) или в уравнение (5.211) и воспользоваться равенством (5.42). В обоих случаях приходим к одному и тому же уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{k'_1}{1-k'_2} \frac{\mu}{r^3} \frac{d \delta r}{dt} + \frac{1}{1-k'_2} \frac{\mu}{r^3} \left( 1 - 3k'_1 \frac{\dot{r}}{r} \right) \delta r + \\ + \frac{k'_1}{1-k'_2} \frac{d^2}{dt^2} \left( u \times \delta r \frac{a}{r} \right) + \frac{k'_2}{1-k'_2} \frac{d}{dt} \left( u \times \delta r \frac{a}{r} \right) = \\ = \frac{1}{1-k'_2} \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r) + \\ + \frac{k'_1}{1-k'_2} \frac{d}{dt} \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} \right) + \\ + \frac{k'_1}{1-k'_2} \frac{d^2}{dt^2} \left[ (\theta \times u) \times r \frac{a}{r} + u \times r \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta V_D \right] + \\ + \frac{k'_2}{1-k'_2} \frac{d}{dt} \left[ (\theta \times u) \times r \frac{a}{r} + u \times r \frac{a \Delta r}{r^2} - \Delta V_D \right]. \end{aligned} \quad (5.213)$$

Легко убедиться в том, что при  $k_1' = 0$  это уравнение превращается в уравнение (5.174), а при  $k_2' = 0$  — в уравнение (5.48). Если же одновременно положить  $k_1' = 0$  и  $k_2' = 0$ , то уравнение (5.213) переходит в уравнение (2.15а).

Итак, нами получены уравнения ошибок для всех четырех вариантов уравнений идеальной работы (5.196) — (5.199). Это соответственно уравнения (5.201), (5.203), (5.208), (5.213). Сравнив эти четыре уравнения друг с другом, можно легко усмотреть, что уравнения (5.201), (5.203) могут быть переведены друг в друга. В самом деле, структура этих уравнений одинакова. Они различаются лишь множителями при одинаковых слагаемых. Эти множители зависят от коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_2'$ . Обозначим коэффициент  $k_1$  в уравнении (5.203) через  $k_1''$ . Если теперь положить

$$\frac{1}{1 - k_2'} = 1 + k_2, \quad \frac{k_1''}{1 - k_2'} = k_1, \quad (5.214)$$

то уравнения (5.201) и (5.203) совпадут. В этом случае, следовательно, возмущенные движения инерциальных систем, построенных в соответствии с уравнениями (5.196) и (5.197), будут идентичны друг другу. Сравнив уравнения (5.208) и (5.213), убеждаемся, что структура их также одинакова и при выполнении условия (5.214) они полностью совпадают. Таким образом, возмущенные движения систем, работающих по уравнениям (5.198) и (5.199), также будут одинаковыми.

Из проведенного сопоставления вытекает, что в дальнейшем достаточно рассмотреть одно из уравнений (5.201), (5.203) и одно из уравнений (5.208), (5.213). Какие именно, вообще говоря, принципиально безразлично. Однако варианты уравнений идеальной работы (5.196), (5.198) структурно проще, чем варианты (5.197), (5.199). К тому же, как это видно из уравнений ошибок, в вариантах (5.196), (5.198) изменение коэффициентов  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_1'$ ,  $k_2'$  позволяет менять величину демпфирования и собственную частоту независимо друг от друга. По этим соображениям варианты (5.196), (5.198) уравнений идеальной работы могут оказаться предпочтительнее при практической реализации, нежели варианты (5.197), (5.199). Поэтому в дальнейшем будут рассмат-

риваться именно уравнения ошибок (5.201), (5.208), относящиеся к указанным двум вариантам уравнений идеальной работы.

Уравнения (5.201), (5.208) суть уравнения ошибок схем инерциальных систем с тремя ньютонометрами. Соответствующие уравнения ошибок схем с двумя ориентированными в плоскости горизонта ньютонометрами могут быть получены из векторных уравнений (5.201), (5.202) проектированием последних на оси  $x$ ,  $y$  сопровождающего трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого направлена вдоль радиуса-вектора  $r$ . При этом в полученных уравнениях надо положить  $\delta z = \Delta r (= \Delta h)$ , а вместо  $\Delta V_{Dz}$  подставить выражение этой проекции согласно второму равенству (5.188а). Из векторного уравнения (5.201) получаем тогда, например, такую систему скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + & \\ + \left[ (1 + k_2) \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta x + & \\ + \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) - \right. & \\ - k_2 u_z \frac{a \dot{r}}{r^2} + k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \Big] \delta y - & \\ - \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{y} = f_x, & \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + & \\ + \left[ (1 + k_2) \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 \right) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta y + & \\ + \left[ (1 + k_2) \omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z + k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) - \right. & \\ - k_2 u_z \frac{a \dot{r}}{r^2} + k_2 \frac{a}{r} (\omega_y u_x - \omega_x u_y) \Big] \delta x + & \\ + \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta \dot{x} = f_y. & \end{aligned} \right\} \quad (5.215)$$

Функции  $f_x$ ,  $f_y$ , стоящие в правых частях уравнений (5.215), суть проекции правой части уравнения (5.201) на оси  $x$ ,  $y$  сопровождающего трехгранника. Они равны соот-

ветственно [с учетом соотношений (5.188a)]:

$$\left. \begin{aligned} f_x = & (1 + k_2) (\Delta n_x - r \omega_x \Delta m_z) - \\ & - (\omega_x \omega_z + \dot{\omega}_y + k_1 \omega_y) \Delta r - (2 + k_2) \omega_y \Delta \dot{r} - \\ & - (2 + k_2) \dot{r} \Delta m_y - r \Delta \dot{m}_y - r \omega_z \Delta m_x + \\ & + k_1 [\Delta V_{Dx} - r \Delta m_y + a (u_z \theta_x - u_x \theta_z)] - \\ & - k_2 \left\{ \frac{d}{dt} [\Delta V_{Dx} + a (u_z \theta_x - u_x \theta_z)] - \right. \\ & \quad \left. - \omega_z [\Delta V_{Dy} + a (u_z \theta_y - u_y \theta_z)] \right\}, \\ f_y = & (1 + k_2) (\Delta n_y - r \omega_y \Delta m_z) + \\ & + (\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z + k_1 \omega_x) \Delta r + (2 + k_2) \omega_x \Delta \dot{r} + \\ & + (2 + k_2) \dot{r} \Delta m_x + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_z \Delta m_y + \\ & + k_1 [\Delta V_{Dy} + r \Delta m_x + a (u_z \theta_y - u_y \theta_z)] - \\ & - k_2 \left\{ \frac{d}{dt} [\Delta V_{Dy} + a (u_z \theta_y - u_y \theta_z)] + \right. \\ & \quad \left. + \omega_z [\Delta V_{Dx} + a (u_z \theta_x - u_x \theta_z)] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.216)$$

Легко видеть, что при  $k_1 = 0$  уравнения (5.215) совпадают с уравнениями (5.190), а при  $k_2 = 0$  переходят в уравнения (5.44). Если же одновременно равны нулю  $k_1$  и  $k_2$ , то уравнения (5.215) превращаются в уравнения (2.28).

Уравнения (5.215) соответствуют векторному уравнению (5.201). Уравнения ошибок для схемы с двумя ньютонометрами, соответствующие векторному уравнению (5.208), получаются совершенно аналогично уравнениям (5.215).

**5.5.2. Случай ортодромических координат.** Прежде чем переходить к дальнейшему анализу уравнений ошибок демпфированных инерциальных систем с измененными собственными частотами, обратимся к схеме с двумя ньютонометрами, определяющей ортодромические координаты. Выпишем для этой схемы уравнения идеальной работы и непосредственным варьированием их получим уравнения ошибок. Ограничимся при этом тем вариантом ввода в инерциальную систему информации от доплеровского измерителя, который соответствует уравнениям (5.196). Случай, соответствующий уравнениям (5.198), может быть рассмотрен аналогично.

Уравнения идеальной работы определяющей ортодромические координаты инерциальной системы с двумя ньютонометрами в случае отсутствия доплеровской коррекции — это уравнения (2.23). В соответствии с равенствами (5.196), первые четыре уравнения (2.23) заменяются теперь следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \int_0^t (n_x + v_y \omega_z - \dot{r} \omega_y + g_x - k_1 \Delta V_x) dt + v_x^0, \\ v_y &= \int_0^t (n_y + \dot{r} \omega_x - v_x \omega_z + g_y - k_1 \Delta V_y) dt + v_y^0, \\ \omega_y &= \frac{v_x + k_2 \Delta V_x}{r}, \quad \omega_x = -\frac{\dot{v}_y + k_2 \Delta V_y}{r}; \\ \Delta V_x &= V_x - V_{Dx}, \quad \Delta V_y = V_y - V_{Dy}; \\ V_x &= v_x - \\ &- \rho u (-\beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S + \beta_{33} \cos z), \\ V_y &= v_y + \rho u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S). \end{aligned} \right\} \quad (5.217)$$

Остальные одиннадцать соотношений (2.23) остаются, очевидно, без изменений.

Выведем уравнения ошибок схемы, работающей в соответствии с соотношениями (5.217) и последними одиннадцатью равенствами (2.23), исходя непосредственно из этих соотношений и равенств. В результате мы должны прийти, очевидно, к уравнениям (5.215).

Варьируя первые четыре соотношения (5.217) и пренебрегая вариациями  $\delta g_x$ ,  $\delta g_y$  несферической составляющей поля тяготения, приходим к системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= \delta n_x + \delta v_y \omega_z + v_y \delta \omega_z - \omega_y \Delta \dot{r} - \\ &\quad - \dot{r} \delta \omega_y - k_1 \delta \Delta V_x, \\ \delta \dot{v}_y &= \delta n_y + \omega_x \Delta \dot{r} + \dot{r} \delta \omega_x - \omega_z \delta v_x - \\ &\quad - v_x \delta \omega_z - k_1 \delta \Delta V_y, \\ r \delta \omega_y + \omega_y \Delta r &= \delta v_x + k_2 \delta \Delta V_x, \\ -r \delta \omega_x - \omega_x \Delta r &= \delta v_y + k_2 \delta \Delta V_y \\ &(\Delta r = \Delta h). \end{aligned} \right\} \quad (5.218)$$

Обозначим невозмущенное положение трехгранника, связанного с платформой инерциальной системы, через  $x_0 y_0 z_0$ . В этом положении ось  $z_0$  направлена вдоль радиуса-вектора  $r$ .

Оси  $x_0, y_0$  расположены в плоскости геоцентрического горизонта и вдоль них установлены ньютонометры  $n_{x_0}, n_{y_0}$ . Возмущенное положение связанного с платформой трехгранника обозначим через  $x y z$ . Взаимное расположение трехгранников  $x_0 y_0 z_0$  и  $x y z$  определим малыми углами  $\alpha, \beta, \gamma$  в соответствии с таблицей направляющих косинусов (4.22).

При таком вводе углов  $\alpha, \beta, \gamma$  для вариаций  $\delta \Delta V_x, \delta \Delta V_y$  из последних четырех равенств (5.217) получатся уже найденные нами ранее выражения (5.58). В этих выражениях через  $\Delta V_{Dx_0}, \Delta V_{Dy_0}$  обозначены инструментальные погрешности доплеровского измерителя, углы  $\theta_{x_0}, \theta_{y_0}, \theta_{z_0}$  введены равенствами (4.39), в которых в свою очередь углы  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  связаны с полными ошибками  $\delta z, \delta S$  определяемых системой ортодромических координат. Эта связь дается соотношениями

$$\alpha_2 = -\delta z, \quad \beta_2 = \delta S \cos z, \quad \gamma_2 = \delta S \sin z, \quad (5.219)$$

которые вытекают из соотношений (4.37), если в последних положить  $\varepsilon = 0$ .

В равенствах (5.218) индексы « $x$ », « $y$ », « $z$ » могут быть заменены соответственно на « $x_0$ », « $y_0$ », « $z_0$ ». С учетом этого из них получаются следующие выражения для  $\delta v_{x_0}, \delta v_{y_0}$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta v_{x_0} &= r \delta \omega_{y_0} + \omega_{y_0} \Delta r - k_2 \delta \Delta V_{x_0}, \\ \delta v_{y_0} &= -r \delta \omega_{x_0} - \omega_{x_0} \Delta r - k_2 \delta \Delta V_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.220)$$

Подставим эти выражения в уравнения (5.58) и разрешим их относительно  $\delta \Delta V_{x_0}, \delta \Delta V_{y_0}$ . Заменяя еще, как и ранее,  $\rho$  на  $a$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} [r \delta \omega_{y_0} + \omega_{y_0} \Delta r + \\ &+ a (u_{x_0} \theta_{z_0} - u_{z_0} \theta_{x_0}) - a u_{z_0} \alpha + r \omega_{x_0} \gamma + \dot{r} \beta - \Delta V_{Dx_0}], \\ \delta \Delta V_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} [-r \delta \omega_{x_0} - \omega_{x_0} \Delta r + \\ &+ a (u_{y_0} \theta_{z_0} - u_{z_0} \theta_{y_0}) - a u_{z_0} \beta + r \omega_{y_0} \gamma - \dot{r} \alpha - \Delta V_{Dy_0}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.221)$$

Теперь для получения уравнений ошибок необходимо сделать следующее. Подставить выражения для проекций  $\delta v_{x_0}$ ,  $\delta v_{y_0}$  из последних двух равенств (5.218) в первые два из этих равенств, одновременно заменив  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$  на  $-r\omega_{y_0}$ ,  $r\omega_{x_0}$ . В полученные соотношения внести значения  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$  из формул (5.221). Далее следует заменить  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$ ,  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$  на их значения, вытекающие из формул (4.24), (4.26), (4.7), (4.27), (4.33), (4.8), (4.12). Наконец, надо произвести замену переменных (4.32). В результате мы должны прийти к уравнениям, отличающимся от уравнений (5.215) лишь тем, что теперь в правых частях вместо величин  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$  появятся равносильные им величины  $-\Delta \omega_{x_0}$ ,  $-\Delta \omega_{y_0}$ ,  $-\Delta \omega_{z_0}$ .

Намеченная выше программа подстановок и исключений достаточно громоздка. Однако наша задача облегчается тем, что нет необходимости выполнять сейчас эту программу полностью. Частично она была уже выполнена. Поэтому можно частично воспользоваться уже готовыми результатами. В самом деле, ранее было показано (п. 5.3.2), что прямой вывод уравнений ошибок демпфированной инерциальной системы (способом, идентичным излагаемому) приводит к уравнениям (5.44), если в последних заменить  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$  на  $-\Delta \omega_{x_0}$ ,  $-\Delta \omega_{y_0}$ ,  $-\Delta \omega_{z_0}$ . Уравнения же (5.44) совпадают с уравнениями (5.215), если в них положить  $k_2 = 0$ . Значит, чтобы убедиться в том, что из соотношений (5.218), (5.221), (4.24), (4.26), (4.7), (4.27), (4.33), (4.8), (4.12), (4.32) вытекают уравнения (5.215), надо проверить лишь, что из перенумерованных соотношений действительно получаются те же слагаемые, содержащие множителем  $k_2$ , которые содержатся в уравнениях (5.215). Ниже показывается, что это действительно так.

Из соотношений (5.221), (5.218) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \dots - k_2 \frac{d}{dt} [a(u_{x_0}\theta_{z_0} - u_{z_0}\theta_{x_0}) - au_{z_0}\alpha + \\ + r\omega_{x_0}\gamma + \dot{r}\beta - \Delta V_{Dx_0}] = \\ = \dots + k_2 \delta n_{x_0} - k_2 \omega_{z_0} [a(u_{y_0}\theta_{z_0} - u_{z_0}\theta_{y_0}) - \\ - au_{z_0}\beta + r\omega_{y_0}\gamma - \dot{r}\alpha - \Delta V_{Dy_0}] + \\ + k_2 (v_{y_0} \delta \omega_{z_0} - \omega_{y_0} \dot{r} - \dot{r} \delta \omega_{y_0}), \end{aligned} \right\} \quad (5.222)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{y} + \dots - k_2 \frac{d}{dt} [a(u_{y_0}\theta_{z_0} - u_{z_0}\theta_{y_0}) - \\ - au_{z_0}\beta + r\omega_{y_0}\gamma - \dot{r}\alpha - \Delta V_{Dy_0}] = \\ = \dots + k_2 \delta n_{y_0} + k_2 \omega_{z_0} [a(u_{x_0}\theta_{z_0} - u_{z_0}\theta_{x_0}) - \\ - au_{z_0}\alpha + r\omega_{x_0}\gamma + \dot{r}\beta - \Delta V_{Dx_0}] - \\ - k_2 (v_{x_0} \delta\omega_{z_0} - \omega_{x_0} \Delta\dot{r} - \dot{r} \delta\omega_{x_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.222)$$

Здесь многоточиями обозначены слагаемые уравнений ошибок (за вычетом  $\delta\ddot{x}$ ,  $\delta\ddot{y}$ ), не содержащие  $k_2$ .

С другой стороны, сохранив в уравнениях (5.215) лишь слагаемые, содержащие множителем коэффициент  $k_2$ , и заменив индексы « $x$ », « $y$ », « $z$ » на « $x_0$ », « $y_0$ », « $z_0$ », запишем указанные уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) \delta x + \\ + k_2 \left[ \omega_{x_0} \omega_{y_0} - u_{z_0} \frac{a\dot{r}}{r^2} + \frac{a}{r} (\omega_{x_0} u_{y_0} - \omega_{y_0} u_{x_0}) \right] \delta y - \\ - k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta\dot{y} = \dots + k_2 (\Delta n_{x_0} - r\omega_{x_0} \Delta m_{z_0}) - \\ - k_2 (\omega_{y_0} \Delta\dot{r} + \dot{r} \Delta m_{y_0}) - k_2 \left\{ \frac{d}{dt} [\Delta V_{Dx_0} + \right. \\ \left. + a(u_{z_0}\theta_{x_0} - u_{x_0}\theta_{z_0})] - \omega_{z_0} [\Delta V_{Dy_0} + a(u_{z_0}\theta_{y_0} - u_{y_0}\theta_{z_0})] \right\}, \\ \delta\ddot{y} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) \delta y + k_2 \left[ \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \right. \\ \left. - u_{z_0} \frac{a\dot{r}}{r^2} + \frac{a}{r} (\omega_{y_0} u_{x_0} - \omega_{x_0} u_{y_0}) \right] \delta x + k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta\dot{x} = \\ = \dots + k_2 (\Delta n_{y_0} - r\omega_{y_0} \Delta m_{z_0}) + k_2 (\omega_{x_0} \Delta\dot{r} + \dot{r} \Delta m_{x_0}) - \\ - k_2 \left\{ \frac{d}{dt} [\Delta V_{Dy_0} + a(u_{z_0}\theta_{y_0} - u_{y_0}\theta_{z_0})] + \right. \\ \left. + \omega_{z_0} [\Delta V_{Dx_0} + a(u_{z_0}\theta_{x_0} - u_{x_0}\theta_{z_0})] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.223)$$

Убедимся в тождественном совпадении равенств (5.222) и (5.223). Прежде всего легко усматривается, что слагаемые равенств (5.222), (5.223), содержащие величины  $\Delta V_{Dx_0}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$ ,



$\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$ , полностью совпадают. С учетом этого задача сводится к сравнению равенств

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \dots + k_2 \frac{d}{dt} (au_{z_0}\alpha - r\omega_{x_0}\gamma - \dot{r}\beta) = \\ = \dots + k_2 [\delta n_{x_0} + v_{y_0}\delta\omega_{z_0} - \omega_{y_0}\Delta\dot{r} - \\ - \omega_{z_0}(-au_{z_0}\beta + r\omega_{y_0}\gamma - \dot{r}\alpha) - \dot{r}\delta\omega_{y_0}], \\ \delta\ddot{y} + \dots + k_2 \frac{d}{dt} (au_{z_0}\beta - r\omega_{y_0}\gamma + \dot{r}\alpha) = \\ = \dots + k_2 [\delta n_{y_0} - v_{x_0}\delta\omega_{z_0} + \omega_{x_0}\Delta\dot{r} + \\ + \omega_{z_0}(-au_{z_0}\alpha + r\omega_{x_0}\gamma + \dot{r}\beta) + \dot{r}\delta\omega_{x_0}], \end{aligned} \right\} \quad (5.224)$$

которые получаются из равенств (5.222), если в них опустить слагаемые, содержащие  $\Delta V_{Dx_0}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$ ,  $\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$ , с равенствами

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0}\omega_{z_0} \right) \delta x + \\ + k_2 \left[ \omega_{x_0}\omega_{y_0} - u_{z_0} \frac{a\dot{r}}{r^2} + \frac{a}{r} (\omega_{x_0}u_{y_0} - \omega_{y_0}u_{x_0}) \right] \delta y - \\ - k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta\dot{y} = \dots + k_2 (\Delta n_{x_0} - r\omega_{x_0}\Delta m_{z_0} - \omega_{y_0}\Delta\dot{r} - \dot{r}\Delta m_{y_0}), \\ \delta\ddot{y} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0}\omega_{z_0} \right) \delta y + \\ + k_2 \left[ \omega_{x_0}\omega_{y_0} - u_{z_0} \frac{a\dot{r}}{r^2} + \frac{a}{r} (\omega_{y_0}u_{x_0} - \omega_{x_0}u_{y_0}) \right] \delta x + \\ + k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta\dot{x} = \dots + k_2 (\Delta n_{y_0} - r\omega_{y_0}\Delta m_{z_0} + \omega_{x_0}\Delta\dot{r} + \dot{r}\Delta m_{x_0}), \end{aligned} \right\} \quad (5.225)$$

получающимися из равенств (5.223), если в правых частях этих равенств отбросить последние слагаемые, зависящие от величин  $\Delta V_{Dx_0}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$ ,  $\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$ .

Чтобы убедиться в совпадении равенств (5.224) и (5.225), преобразуем первые из них. Для преобразования используем соотношения (4.24), (4.26), (4.7), (4.27), (4.33), (4.8), (4.12), (4.32).

В соответствии с формулами (4.26), (4.7), (4.27) для вариаций  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$ , входящих в равенства (5.224), получаются

следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{x_0} &= (\omega_{y_0} - g_{y_0}) \gamma - (\omega_{z_0} - g_{z_0}) \beta + \Delta n_{x_0}, \\ \delta n_{y_0} &= -(\omega_{x_0} - g_{x_0}) \gamma + (\omega_{z_0} - g_{z_0}) \alpha + \Delta n_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.226)$$

Пренебрегая в правых частях этих выражений произведениями  $g_{y_0} \gamma$  и  $g_{x_0} \gamma$ , имеющими второй порядок малости, и заменяя величину  $g_{z_0}$  ее значением (4.33), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{x_0} &= \omega_{y_0} \gamma - \left( \omega_{z_0} + \frac{\mu}{r^2} \right) \beta + \Delta n_{x_0}, \\ \delta n_{y_0} &= -\omega_{x_0} \gamma + \left( \omega_{z_0} + \frac{\mu}{r^2} \right) \alpha + \Delta n_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.227)$$

Подставим в эти формулы вместо проекций  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  их значения из равенств (4.8), (4.12). Тогда формулы (5.227) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta n_{x_0} &= [r(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \dot{\omega}_{x_0}) - 2\dot{r} \omega_{x_0}] \gamma - \\ &\quad - \left[ \ddot{r} + r \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 \right) \right] \beta + \Delta n_{x_0}, \\ \delta n_{y_0} &= -[r(\omega_{x_0} \omega_{z_0} + \dot{\omega}_{y_0}) + 2\dot{r} \omega_{y_0}] \gamma + \\ &\quad + \left[ \ddot{r} + r \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 \right) \right] \alpha + \Delta n_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.228)$$

Внесем выражения (5.228) для  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$  в равенства (5.224). Одновременно заменим в этих равенствах величины  $v_{x_0}$ ,  $v_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$  на их значения из соотношений (4.12), (4.24). После приведения подобных членов в равенствах (5.224) пропадут слагаемые, содержащие угол  $\gamma$ . В результате равенства (5.224) запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) r \beta - \\ - k_2 \left( \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \frac{a}{r} \dot{u}_{z_0} \right) r \alpha + k_2 a u_{z_0} \dot{\alpha} = \\ = \dots + k_2 (\Delta n_{x_0} + r \omega_{x_0} \Delta \omega_{z_0} - \omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \dot{r} \Delta \omega_{y_0}), \\ \delta \ddot{y} + \dots - k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) r \alpha + \\ + k_2 \left( \omega_{x_0} \omega_{y_0} + \frac{a}{r} \dot{u}_{z_0} \right) r \beta + k_2 a u_{z_0} \dot{\beta} = \\ = \dots + k_2 (\Delta n_{y_0} + r \omega_{y_0} \Delta \omega_{z_0} + \omega_{x_0} \Delta \dot{r} - \dot{r} \Delta \omega_{x_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.229)$$

Введем теперь вместо  $\alpha$  и  $\beta$  переменные  $\delta x$ ,  $\delta y$  согласно формулам (4.32). Получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{y_0}^2 - k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) \delta x + \\ + k_2 \left( \omega_{x_0} \omega_{y_0} - u_{z_0} \frac{a \dot{r}}{r^2} - \frac{a}{r} \dot{u}_{z_0} \right) \delta y - k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta \dot{y} = \\ = \dots + k_2 (\Delta n_{x_0} + r \omega_{x_0} \Delta \omega_{z_0} - \omega_{y_0} \Delta \dot{r} + \dot{r} \Delta \omega_{y_0}), \\ \delta \ddot{y} + \dots + k_2 \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_{x_0}^2 - \frac{a}{r} u_{z_0} \omega_{z_0} \right) \delta y + \\ + k_2 \left( \omega_{x_0} \omega_{y_0} - u_{z_0} \frac{a \dot{r}}{r^2} + \frac{a}{r} \dot{u}_{z_0} \right) \delta x + k_2 \frac{a}{r} u_{z_0} \delta \dot{x} = \\ = \dots + k_2 (\Delta n_{y_0} + r \omega_{y_0} \Delta \omega_{z_0} + \omega_{x_0} \Delta \dot{r} - \dot{r} \Delta \omega_{x_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.230)$$

Сравнивая левые части равенств (5.230) и (5.225), замечаем, что они разнятся лишь тем, что в равенства (5.230) в коэффициенты при  $\delta x$  и  $\delta y$  входит величина  $\dot{u}_{z_0}$ , тогда как в соответствующих коэффициентах равенств (5.225) стоит выражение  $(\omega_{y_0} u_{x_0} - \omega_{x_0} u_{y_0})$ . Но вектор  $u$  угловой скорости вращения Земли считается постоянным в системе координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$ , в которой ведется все рассмотрение. Поэтому из равенства

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} + \omega \times u = 0 \quad (5.231)$$

вытекает, что

$$\dot{u}_{z_0} = -\omega_{x_0} u_{y_0} + \omega_{y_0} u_{x_0}. \quad (5.232)$$

Таким образом, принимая во внимание соотношение (5.232), приходим к выводу, что левые части равенств (5.230) и (5.225) полностью совпадают. Что касается правых частей указанных равенств, то они различаются лишь тем, что вместо величин  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta m_{z_0}$ , стоящих в правых частях равенств (5.225), в правых частях равенств (5.230) стоят величины  $-\Delta \omega_{x_0}$ ,  $-\Delta \omega_{y_0}$ ,  $-\Delta \omega_{z_0}$ . Но

$$\Delta m_{x_0} = -\Delta \omega_{x_0}, \quad \Delta m_{y_0} = -\Delta \omega_{y_0}, \quad \Delta m_{z_0} = -\Delta \omega_{z_0}, \quad (5.233)$$

поэтому правые части равенств (5.230) и (5.225) также полностью совпадают.

Из совпадения равенств (5.225) и (5.230) вытекает, что совпадают равенства (5.222) и (5.223). Это означает, что уравнения ошибок определяющей ортодромической координаты инерциальной системы с двумя горизонтально ориентированными ньютонометрами, получающиеся непосредственным варьированием уравнений идеальной работы (2.23), (5.217), в точности совпадают с уравнениями ошибок (5.215), полученными из векторного уравнения (5.201), относящегося к произвольной инерциальной системе.

**5.5.3. Исследование устойчивости.** Рассмотрим векторные дифференциальные уравнения (5.201), (5.208). Как было показано в п. 5.5.1, к этим уравнениям сводятся уравнения ошибок корректируемых от доплеровского измерителя инерциальных систем с тремя ньютонометрами, если коррекция осуществляется в соответствии с уравнениями идеальной работы (5.196)—(5.199).

Основная цель применения доплеровской коррекции состоит, как уже было отмечено выше, в том, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость положения (движения) инерциальной системы, соответствующего уравнениям идеальной работы. Для этого надо, чтобы решения уравнений ошибок (5.201), (5.208) с течением времени стремились к нулю, т. е. чтобы были устойчивыми тривиальные решения однородных уравнений (5.201), (5.208).

Исследуем устойчивость однородного уравнения (5.201)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu}{r^3} (1 + k_2) \delta \mathbf{r} + \\ + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) - k_1 \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} = 0 \end{aligned} \quad (5.234)$$

при  $r = \text{const}$ .

Проектируя это векторное уравнение на оси неизменно ориентированной системы координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  (ось  $O_1 \xi_*$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{u}$  угловой скорости вращения Земли) и замечая, что

$$u_{\xi_*} = u_{\eta_*} = 0, \quad u_{\zeta_*} = u = \text{const}, \quad (5.235)$$

приходим к скалярным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k_1 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \xi_* - \\ - k_2 \frac{au}{r} \delta \dot{\eta}_* + k_1 \frac{au}{r} \delta \eta_* = 0, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k_1 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \eta_* + \\ + k_2 \frac{au}{r} \delta \dot{\xi}_* - k_1 \frac{au}{r} \delta \xi_* = 0, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k_1 \delta \dot{\zeta}_* + \frac{11}{r^3} (1 + k_2) \delta \zeta_* = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.236)$$

Если  $r = \text{const}$ , то коэффициенты уравнений (5.236) постоянны. Третье уравнение (5.236) отделилось. Его решение очевидно. При  $k_1 > 0$  и  $1 + k_2 > 0$  решение этого уравнения стремится со временем к нулю. Характеристическое уравнение оставшейся системы четвертого порядка [первое и второе уравнения (5.236)] записывается таким образом:

$$\begin{aligned} p^4 + 2k_1 p^3 + \left[ 2\omega_0^2 (1 + k_2) + k_1^2 + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] p^2 + \\ + 2k_1 \left[ \omega_0^2 (1 + k_2) - k_2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] p + \\ + \omega_0^4 (1 + k_2)^2 + k_1^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.237)$$

Условиями устойчивости будут следующие неравенства Гурвица:

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 &> 0, \\ 2k_1 \left[ \omega_0^2 (1 + k_2) + k_1^2 + k_2 (1 + k_2) \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] &> 0, \\ 4k_1^2 (1 + k_2) \left( \omega_0^2 - \frac{a^2 u^2}{r^2} \right) \left( k_1^2 + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right) &> 0, \\ \omega_0^4 (1 + k_2)^2 + k_1^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.238)$$

Так как

$$\omega_0^2 \gg \frac{a^2 u^2}{r^2}, \quad (5.238a)$$

то при

$$k_1 > 0, \quad 1 + k_2 > 0 \quad (5.239)$$

условия (5.238) всегда выполняются,

Таким образом, движение, описываемое векторным уравнением (5.234), асимптотически устойчиво при  $r = \text{const}$ . Следовательно, доплеровская коррекция инерциальной системы с тремя ньютонометрами, осуществляемая по уравнениям (5.196), (5.197), обеспечивает асимптотическую устойчивость инерциальной системы при произвольном движении объекта, на котором она установлена, на постоянном удалении от центра Земли. Асимптотическая устойчивость имеет место в том числе и для случая движения спутника по круговой орбите.

Обратимся к уравнению (5.208). Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1' \frac{\mu}{r^3} \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \frac{\mu}{r^3} (1 + k_2) \left( 1 - 3k_1' \frac{\dot{r}}{r} \right) \delta \mathbf{r} + k_2 \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) + k_1' \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathbf{u} \times \delta \mathbf{r} \frac{a}{r} \right) = 0. \quad (5.240)$$

Если объект движется на постоянном удалении от центра Земли, то  $\dot{r} = 0$ ,  $\mu/r^3 = \omega_0^2 = \text{const}$  и проектирование уравнения (5.240) на неизменно ориентированные оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  (ось  $\zeta_*$  совпадает с осью вращения Земли) приводит к такой системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{\xi}_* + k_1' \omega_0^2 \delta \dot{\xi}_* + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \xi_* - \\ - k_2 u \frac{a}{r} \delta \dot{\eta}_* - k_1' u \frac{a}{r} \delta \ddot{\eta}_* = 0, \\ \delta \ddot{\eta}_* + k_1' \omega_0^2 \delta \dot{\eta}_* + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \eta_* + \\ + k_2 u \frac{a}{r} \delta \dot{\xi}_* + k_1' u \frac{a}{r} \delta \ddot{\xi}_* = 0, \\ \delta \ddot{\zeta}_* + k_1' \omega_0^2 \delta \dot{\zeta}_* + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta \zeta_* = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.241)$$

Устойчивость третьего уравнения (5.241) при

$$k_1' > 0, \quad 1 + k_2 > 0 \quad (5.242)$$

очевидна. Характеристическим уравнением системы двух первых уравнений (5.241) является уравнение четвертой степени

$$\begin{aligned} \left( 1 + k_1' \frac{u^2 a^2}{r^2} \right) p^4 + 2k_1' \left( \omega_0^2 + k_2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right) p^3 + \\ + \left[ 2\omega_0^2 (1 + k_2) + k_1'^2 \omega_0^4 + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] p^2 + \\ + 2k_1' \omega_0^4 (1 + k_2) p + \omega_0^4 (1 + k_2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.243)$$

Применив к этому уравнению критерий Гурвица, можно убедиться, что вследствие неравенства (5.238a) вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, если  $k_1' > 0$  и  $1 + k_2 > 0$ . Таким образом, инерциальные системы, корректируемые в соответствии с уравнениями (5.198), (5.199), асимптотически устойчивы при выполнении условий (5.242). Условия (5.242) вполне аналогичны, очевидно, условиям (5.239).

Перейдем к исследованию устойчивости корректируемых от доплеровского измерителя инерциальных систем с двумя ньютонометрами. Соответствующие уравнения ошибок получаются проектированием векторных уравнений (2.201), (2.208) на оси  $x$ ,  $y$  сопровождающего трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совпадает с  $r$ . Мы ограничимся исследованием уравнений (2.201). Исследование уравнений, вытекающих из векторного уравнения (2.208), может быть проведено аналогично.

В соответствии с уравнениями (5.215), однородные уравнения ошибок инерциальной системы с двумя ньютонометрами имеют в рассматриваемом случае следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + \left[ (1 + k_2) \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2 \right) - \omega_z^2 - \right. \\ \left. - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta x + \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y - \dot{\omega}_z - \right. \\ \left. - k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) - k_2 u_z \frac{a\dot{r}}{r^2} + \right. \\ \left. + k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] \delta y - \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta\dot{y} = 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + \left[ (1 + k_2) \left( \frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2 \right) - \omega_z^2 - \right. \\ \left. - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z \right] \delta y + \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y + \dot{\omega}_z + \right. \\ \left. + k_1 \left( \omega_z - u_z \frac{a}{r} \right) - k_2 \frac{a\dot{r}}{r^2} - \right. \\ \left. - k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] \delta x + \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right) \delta\dot{x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.244)$$

Если движение объекта, на котором установлена инерциальная система, произвольно, то коэффициенты уравнений (5.244) также являются произвольными функциями времени.

Исследование (точное) устойчивости уравнений (5.244) связано в этом случае с непреодолимыми математическими трудностями, так как регулярные методы такого исследования отсутствуют в арсенале средств современной теории дифференциальных уравнений. Точное исследование устойчивости уравнений (5.244) может быть выполнено поэтому лишь для случая движения объекта с постоянной скоростью вдоль земной параллели, когда коэффициенты указанных уравнений становятся постоянными. Кроме того, оказывается возможным отыскание достаточных условий устойчивости для случая медленных движений объекта вблизи земной поверхности (когда скорость движения существенно меньше первой космической скорости).

При движении объекта с постоянной скоростью вдоль параллели в уравнениях (5.244)

$$\left. \begin{aligned} u_x = \omega_x = 0, \quad u_y = \text{const}, \quad \omega_y = \text{const}, \\ u_z = \text{const}, \quad \omega_z = \text{const}, \quad r = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (5.245)$$

и они принимают вид  $\left(\frac{\mu}{r^3} = \omega_0^2\right)$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + \left[(1+k_2)(\omega_0^2 - \omega_y^2) - \right. \\ \left. - \omega_z^2 - k_2\frac{a}{r}u_z\omega_z\right]\delta x - k_1\left(\omega_z - \frac{a}{r}u_z\right)\delta y - \\ \left. - \left(2\omega_z + k_2\frac{a}{r}u_z\right)\delta\dot{y} = 0, \right. \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + \left[(1+k_2)\omega_0^2 - \omega_z^2 - k_2\frac{a}{r}u_z\omega_z\right]\delta y + \\ \left. + k_1\left(\omega_z - \frac{a}{r}u_z\right)\delta x + \left(2\omega_z + k_2\frac{a}{r}u_z\right)\delta\dot{x} = 0. \right\} \quad (5.246) \end{aligned}$$

Прежде чем перейти к исследованию устойчивости этих уравнений, рассмотрим их частный случай, соответствующий движению объекта вдоль экватора. В этом случае

$$u_z = 0, \quad \omega_z = 0 \quad (5.247)$$

и система уравнений (5.246) распадается на два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + (1+k_2)(\omega_0^2 - \omega_y^2)\delta x = 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + \omega_0^2(1+k_2)\delta y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.248)$$



Первое из этих уравнений дает ошибку в направлении движения, второе — в нормальном к нему горизонтальном направлении. Из вида уравнений (5.248) следует, что при  $k_1 > 0$ ,  $1 + k_2 > 0$  корректируемая инерциальная система устойчива, если

$$\omega_0^2 - \omega_y^2 > 0, \quad (5.249)$$

т. е. для скоростей движения, меньших первой космической скорости.

Вернемся к уравнениям (5.246), т. е. к общему случаю движения объекта вдоль параллели. Применим для исследования устойчивости этих уравнений критерий Гурвица.

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \omega_0^2(1 + k_2) - \omega_z^2 - k_2 \frac{a}{r} u_z \omega_z, \\ a_2 &= \omega_y^2(1 + k_2), \\ a_3 &= \omega_z - \frac{a}{r} u_z, \quad a_4 = 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.250)$$

С учетом этих обозначений система (5.246) записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (a_1 - a_2) \delta x - k_1 a_3 \delta y - a_4 \delta \dot{y} &= 0, \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + a_1 \delta y + k_1 a_3 \delta x + a_4 \delta \dot{x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.251)$$

Характеристическое уравнение системы (5.251) есть

$$p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4 = 0, \quad (5.252)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 2k_1, \quad b_2 = k_1^2 + 2a_1 - a_2 + a_4^2, \\ b_3 &= 2k_1 a_1 - k_1 a_2 + 2k_1 a_3 a_4, \\ b_4 &= a_1^2 - a_1 a_2 + k_1^2 a_3^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.253)$$

Условия Гурвица для уравнения (5.252) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &> 0, \quad b_1 b_2 - b_3 > 0, \\ b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 &> 0, \\ b_4 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.254)$$

При выполнении первого, третьего и четвертого из этих условий второе условие выполняется автоматически, поэтому оно несущественно.

Первое условие (5.254) означает, что

$$k_1 > 0, \quad (5.255)$$

и является очевидным.

Третье условие (5.254) после подстановки в него вместо коэффициентов  $b_i$  их выражений (5.253) через величины  $a_i$  принимает вид:

$$k_1^2 \{ 2(k_1^2 + a_1^2) [2a_1 - a_2 + 2a_3(a_4 - a_3)] + a_2^2 \} > 0. \quad (5.256)$$

Подставляя сюда выражения для  $a_1, a_2, a_3, a_4$  из (5.250), приходим к неравенству

$$(1 + k_2) \left\{ 2 \left[ k_1^2 + \left( 2\omega_z + k_2 \frac{a}{r} u_z \right)^2 \right] \left( 2\omega_0^2 - \omega_y^2 - 2 \frac{a^2}{r^2} u_z^2 \right) + (1 + k_2) \omega_y^4 \right\} > 0. \quad (5.257)$$

Наконец, четвертое условие (5.254) дает неравенство

$$(1 + k_2)^2 (\omega_0^2 - \omega_z^2) (\omega_0^2 - \omega_y^2 - \omega_z^2) + k_2 (1 + k_2) \omega_z \left( \omega_z - \frac{a}{r} u_z \right) (2\omega_0^2 - 2\omega_z^2 - \omega_y^2) + (k_1^2 + k_2^2 \omega_z^2) \left( \omega_z - \frac{a}{r} u_z \right)^2 > 0. \quad (5.258)$$

Неравенства (5.255), (5.257), (5.258) и определяют [вместе со вторым неравенством (5.254)] области асимптотической устойчивости корректируемой инерциальной системы при движении объекта по параллели. При  $k_2 = 0$  эти неравенства переходят в неравенства (5.107), а если наряду с  $k_2 = 0$  положить еще  $u_z = 0$ , то указанные неравенства совпадут с условиями (5.11).

Ввиду малости  $u_z$  по сравнению с  $\omega_0$  области устойчивости, определяемые условиями (5.255), (5.257), (5.258), близки к областям, определяемым этими условиями в предположении, что  $u_z = 0$ . В этом предположении и при выполнении очевидных условий  $k_1 > 0$  и  $1 + k_2 > 0$  неравенство (5.257) можно преобразовать к такому виду:

$$\omega_z^2 > -\frac{k_1^2}{4} + \frac{1 + k_2}{8} \frac{\omega_y^4}{\omega_y^2 - 2\omega_0^2}. \quad (5.259)$$

Аналогично неравенство (5.258) принимает вид:

$$\omega_y^2 < \frac{1}{1+k_2} \left[ (1+k_2) \omega_0^2 - \omega_z^2 + \frac{k_1^2 \omega_z^2}{\omega_0^2(1+k_2) - \omega_z^2} \right]. \quad (5.260)$$

Неравенство (5.259) разбивает плоскость параметров  $\omega_y^2$ ,  $\omega_z^2$  на три области. Кривая, образующая границы области

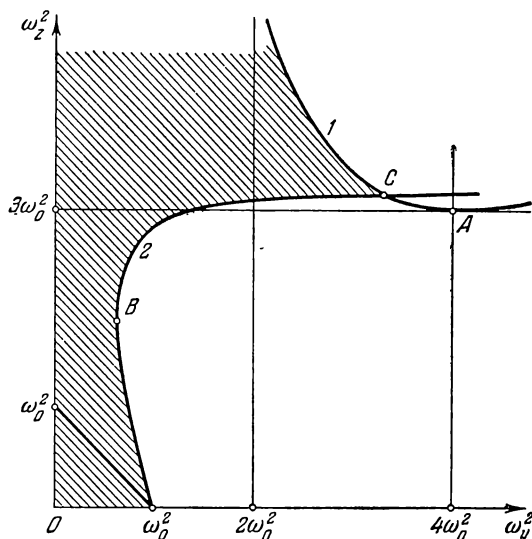


Рис. 5.4.

(рис. 5.4), есть гипербола 1 (на рисунке показана одна ветвь гиперболы)

$$\omega_z^2 = -\frac{k_1^2}{4} + \frac{1+k_2}{8} \frac{\omega_y^4}{\omega_0^2 - 2\omega_0^2}. \quad (5.261)$$

Асимптотами гиперболы (5.261) являются прямые

$$\omega_y^2 = 2\omega_0^2, \quad \omega_z^2 = \frac{1+k_2}{8} \omega_y^2 - \frac{k_1^2}{4} + \frac{\omega_0^2}{4} (1+k_2). \quad (5.262)$$

Неравенству (5.259) соответствует область между ветвями гиперболы (5.261). Так как одна из ветвей этой гиперболы лежит целиком в нижней полуплоскости  $\omega_z^2 < 0$ , то остается

область между ветвью 1 и осями  $\omega_y^2 = 0$ ,  $\omega_z^2 = 0$ . Указанная ветвь гиперболы ближе всего подходит к оси  $\omega_z^2 = 0$  в точке А [ $\omega_y^2 = 4\omega_0^2$ ,  $\omega_z^2 = \omega_0^2(1 + k_2)$ ]. На рис. 5.4 гипербола (5.261) изображена для случая

$$k_2 = 2, \quad k_1^2 = \frac{\omega_0^2}{4}. \quad (5.263)$$

Неравенству (5.260) соответствует также гипербола (на рисунке она обозначена цифрой 2)

$$\omega_y^2 = \frac{1}{1 + k_2} \left[ (1 + k_2) \omega_0^2 - \omega_z^2 + \frac{k_1 \omega_z^2}{\omega_0^2(1 + k_2) - \omega_z^2} \right] \quad (5.264)$$

с асимптотами

$$\left. \begin{aligned} \omega_z^2 &= (1 + k_2) \omega_0^2, \\ (1 + k_2) \omega_y^2 &= -\omega_z^2 + (1 + k_2) \omega_0^2 - k_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.265)$$

Неравенству (5.260) удовлетворяет область между ветвью гиперболы (5.264), лежащей в первом квадранте, и осями  $\omega_y^2 = 0$ ,  $\omega_z^2 = 0$ . Эта ветвь проходит через точку ( $\omega_z^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 = \omega_0^2$ ), ближе всего подходит к оси  $\omega_y^2 = 0$  в точке В с координатами

$$\left. \begin{aligned} \omega_z^2 &= \omega_0^2(1 + k_2) - k_1 \omega_0 \sqrt{1 + k_2}, \\ \omega_y^2 &= \frac{k_1}{1 + k_2} (2\omega_0 \sqrt{1 + k_2} - k_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.266)$$

и пересекает гипербола (5.261) в точке С [ $\tilde{\omega}_y^2 < 4\omega_0^2$ ,  $\tilde{\omega}_z^2 < \omega_0^2(1 + k_2)$ ]. На рис. 5.4 указанная ветвь изображена при значениях (5.263) коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

Таким образом, областью устойчивости уравнений (5.246), соответствующей условиям (5.259), (5.260), будет область, ограниченная отрезком прямой  $\omega_z^2 = 0$  между точками  $\omega_y^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 = \omega_0^2$ , частью гиперболы (5.264) между точкой ( $\omega_z^2 = 0$ ,  $\omega_y^2 = \omega_0^2$ ) и точкой С ( $\tilde{\omega}_z^2$ ,  $\tilde{\omega}_y^2$ ), частью гиперболы (5.261) от точки С ( $\tilde{\omega}_z^2$ ,  $\tilde{\omega}_y^2$ ) до асимптоты  $\omega_y^2 = 2\omega_0^2$  и осью  $\omega_y^2 = 0$ . При  $k_1 = k_2 = 0$  эта область переходит в область неасимптотической устойчивости, представленную на рис. 2.1. При

заданном  $k_1$  область устойчивости максимальна при

$$k_2 = \frac{k_1^2}{\omega_0^2} - 1, \quad (5.267)$$

когда касательная к гиперболе (5.264) в точке  $(\omega_y^2 = \omega_0^2, \omega_z^2 = 0)$  становится параллельной оси  $\omega_y^2 = 0$ .

Выше рассмотрен вопрос об устойчивости корректируемой от доплеровского измерителя инерциальной системы с двумя ньютонометрами при движении объекта с постоянной скоростью вдоль параллели. Это одно из возможных движений объекта, однако это достаточно частный вид движения. В общем случае движение объекта происходит под произвольным углом к параллели и скорость движения переменна.

При произвольном движении объекта коэффициенты уравнений (5.244) становятся переменными и, как уже было отмечено в начале настоящего раздела, точное исследование устойчивости наталкивается на непреодолимые математические трудности.

Однако если предположить, что скорость движения объекта мала по сравнению с первой космической скоростью, то возможно весьма эффективное приближенное решение задачи, которое позволяет получить достаточные условия устойчивости уравнений (5.244).

Рассмотрим уравнения (5.244) в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника. Для этого положим в этих уравнениях  $\omega_z = 0$ . Получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_y^2\right)(1 + k_2)\delta x + \\ + \left[(1 + k_2)\omega_x\omega_y + k_1\frac{a}{r}u_z - k_2u_z\frac{a\dot{r}}{r^2} + \right. \\ \left. + k_2\frac{a}{r}(\omega_xu_y - \omega_yu_x)\right]\delta y - k_2\frac{a}{r}u_z\delta\dot{y} = 0, \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + \left(\frac{\mu}{r^3} - \omega_x^2\right)(1 + k_2)\delta y + \\ + \left[(1 + k_2)\omega_x\omega_y - k_1u_z\frac{a}{r} - k_2\frac{a\dot{r}}{r^2} - \right. \\ \left. - k_2\frac{a}{r}(\omega_xu_y - \omega_yu_x)\right]\delta x + k_2\frac{a}{r}u_z\delta\dot{x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.268)$$

Для упрощения дальнейших выкладок примем, что  $r = \text{const.}$  Введем обозначение  $\omega_0^2 = \frac{\mu}{r^3}$  и с помощью замены переменных

$$\delta \dot{x} = x_1, \quad \delta x = x_2, \quad \delta \dot{y} = y_1, \quad \delta y = y_2 \quad (5.268a)$$

представим уравнения (5.268) в форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 - \omega_0^2 (1 + k_2) x_2 + \varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{y}_1 &= -k_1 y_1 - \omega_0^2 (1 + k_2) y_2 + \varphi_2, \\ \dot{y}_2 &= y_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.269)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= (1 + k_2) \omega_y^2 x_2 - \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y + k_1 u_z \frac{a}{r} + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] y_2 + k_2 \frac{a}{r} u_z y_1, \\ \varphi_2 &= (1 + k_2) \omega_x^2 y_2 - \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y - k_1 u_z \frac{a}{r} - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] x_2 - k_2 \frac{a}{r} u_z x_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.270)$$

Перейдем в уравнениях (5.269) к нормальным координатам  $b_1, u_1, b_2, u_2$  по формулам

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1 (\varepsilon \cos u_1 - v \sin u_1), & x_2 &= b_1 \cos u_1, \\ y_1 &= b_2 (\varepsilon \cos u_2 - v \sin u_2), & y_2 &= b_2 \cos u_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.271)$$

где

$$\varepsilon = -\frac{k_1}{2}, \quad v = \sqrt{\omega_0^2 (1 + k_2) - \frac{k_1^2}{4}}. \quad (5.272)$$

Уравнения (5.269) в нормальных координатах примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \varepsilon b_1 - \frac{1}{v} \tilde{\varphi}_1 \sin u_1, \\ \frac{du_1}{dt} &= v - \frac{1}{b_1 v} \tilde{\varphi}_1 \cos u_1, \\ \frac{db_2}{dt} &= \varepsilon b_2 - \frac{1}{v} \tilde{\varphi}_2 \sin u_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= v - \frac{1}{b_2 v} \tilde{\varphi}_2 \cos u_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.273)$$

В правые части уравнений (5.273) входят функции  $\tilde{\varphi}_1$  и  $\tilde{\varphi}_2$ . В соответствии с равенствами (5.270), (5.271) эти функции представляются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &= (1 + k_2) \omega_y^2 b_1 \cos u_1 - \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y + k_1 \frac{a}{r} u_z + \right. \\ &\quad \left. + k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] b_2 \cos u_2 + \\ &\quad \left. + k_2 \frac{a}{r} u_z b_2 (\varepsilon \cos u_2 - \nu \sin u_2), \right. \\ \tilde{\varphi}_2 &= (1 + k_2) \omega_x^2 b_2 \cos u_2 - \left[ (1 + k_2) \omega_x \omega_y - k_1 \frac{a}{r} u_z - \right. \\ &\quad \left. - k_2 \frac{a}{r} (\omega_x u_y - \omega_y u_x) \right] b_1 \cos u_1 - \\ &\quad \left. - k_2 \frac{a}{r} u_z b_1 (\varepsilon \cos u_1 - \nu \sin u_1). \right\} \end{aligned} \right) \quad (5.274)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$U = b_1^2 + b_2^2. \quad (5.275)$$

Полная производная функции  $U$  в силу уравнений (5.273) представляется таким выражением:

$$\frac{dU}{dt} = 2 \left[ \varepsilon U - \frac{1}{\nu} (b_1 \tilde{\varphi}_1 \sin u_1 + b_2 \tilde{\varphi}_2 \sin u_2) \right]. \quad (5.276)$$

Подставим сюда значения (5.274) функций  $\tilde{\varphi}_1$ ,  $\tilde{\varphi}_2$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= 2 \left\{ \varepsilon U - \frac{1}{\nu} \left[ \frac{1 + k_2}{2} (b_1^2 \omega_y^2 \sin 2u_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_2^2 \omega_x^2 \sin 2u_2 - 2 \omega_x \omega_y b_1 b_2 \sin (u_1 + u_2)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a}{r} b_1 b_2 (k_1 u_z + k_2 (\omega_x u_y - \omega_y u_x) - k_2 u_z \varepsilon) \sin (u_1 - u_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.277)$$

Величины  $b_1$ ,  $b_2$  можно представить в виде:

$$b_1 = b \sin \psi_1, \quad b_2 = b \cos \psi_1, \quad b^2 = U. \quad (5.278)$$

Аналогично

$$\omega_x = \Omega \sin \psi_2, \quad \omega_y = \Omega \cos \psi_2, \quad \Omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2. \quad (5.279)$$

Если через  $v$  обозначить абсолютную скорость объекта, то, очевидно,  $\Omega = v/r$ , так как  $\dot{r} = 0$ .

Наконец, для  $u_x$  и  $u_y$  имеем представления:

$$u_x = u_0 \sin \chi, \quad u_y = u_0 \cos \chi, \quad u_0^2 = u_x^2 + u_y^2, \quad (5.280)$$

где, очевидно,  $u_0$  — проекция вектора  $u$  угловой скорости вращения Земли на горизонтальную плоскость.

С учетом представлений (5.278), (5.279), (5.280) выражение (5.277) для производной  $dU/dt$  может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} = 2U \left\{ \varepsilon - \frac{1}{v} \left[ \frac{1+k_2}{2} \Omega^2 \left( \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \sin 2u_1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \sin 2u_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin(u_1 + u_2) \right) + \right. \\ \left. \left. + \frac{a}{2r} \left( (k_1 - \varepsilon k_2) u_z + k_2 \Omega u_0 \sin(\psi_2 - \chi) \right) \sin(u_2 - u_1) \sin 2\psi_1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.281)$$

Введя обозначение

$$\begin{aligned} \mu^* = -\varepsilon + \frac{1}{v} \left\{ \frac{1+k_2}{2} \Omega^2 \left[ \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \sin 2u_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \sin 2u_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin(u_1 + u_2) \right] + \right. \\ \left. + \frac{a}{2r} \left[ (k_1 - \varepsilon k_2) u_z + k_2 \Omega u_0 \sin(\psi_2 - \chi) \right] \sin(u_2 - u_1) \sin 2\psi_1 \right\}, \end{aligned} \quad (5.282)$$

представим равенство (5.281) в таком виде:

$$\frac{dU}{dt} = -2U\mu^*. \quad (5.283)$$

Для асимптотической устойчивости уравнений (5.268) при  $r = \text{const}$  достаточно, чтобы величина  $\mu^*$  была всегда положительной. В самом деле, из уравнения (5.283) тогда получается, что с течением времени функция  $U$  стремится к нулю. По определению этой функции, вместе с нею стремятся к нулю величины  $b_1$  и  $b_2$ , следовательно, в соответствии с равенствами (5.271), стремятся к нулю  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , а значит, согласно соотношениям (5.268а), и  $\delta x$ ,  $\delta u$ ,  $\delta \chi$ ,  $\delta \psi$ . Последнее и означает, что достаточным условием устойчивости является условие

$$\mu^* > 0. \quad (5.284)$$



Заменяя в выражении (5.282) для  $\mu^*$  величины  $\varepsilon$  и  $\nu$  их выражениями через  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\omega_0$ , получаем:

$$\begin{aligned} \mu^* = & \frac{k_1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2(1+k_2) - \frac{k_1^2}{4}}} \left\{ \frac{1+k_2}{2} \Omega^2 [\sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \sin 2u_1 + \right. \\ & + \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \sin 2u_2 - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin (u_1 + u_2)] + \\ & + \frac{a}{2r} \left[ k_1 \left( 1 + \frac{k_2}{2} \right) u_z + k_2 \Omega u_0 \sin (\psi_2 - \chi) \right] \times \\ & \left. \times \sin (u_2 - u_1) \sin 2\psi_1 \right\} > 0. \quad (5.285) \end{aligned}$$

Имеют место оценки:

$$\left. \begin{aligned} & \left| \sin^2 \psi_1 \cos^2 \psi_2 \sin 2u_1 + \cos^2 \psi_1 \sin^2 \psi_2 \sin 2u_2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin (u_1 - u_2) \right| \leq \frac{3}{2}, \\ & |\sin (u_2 - u_1) \sin 2\psi_1| \leq 1, \\ & |\sin (\psi_2 - \chi) \sin (u_2 - u_1) \sin 2\psi_1| \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.286)$$

Поэтому, если  $k_1 > 0$ ,  $1 + k_2 > 0$ , то из соотношения (5.285) следует, что

$$\begin{aligned} \min \mu^* \geq \tilde{\mu}^* = & \frac{k_1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2(1+k_2) - \frac{k_1^2}{4}}} \left\{ \frac{3(1+k_2)}{4} \Omega^{*2} + \right. \\ & \left. + \frac{a}{2r} \left[ k_1 \left( 1 + \frac{k_2}{2} \right) u + k_2 \Omega^* u \right] \right\}, \quad (5.287) \end{aligned}$$

где  $u$  — угловая скорость вращения Земли, а  $\Omega^* = \max |\Omega|$ .

Для устойчивости достаточно, чтобы величина  $\tilde{\mu}^*$  была положительной. Это дает следующее условие асимптотической устойчивости:

$$\begin{aligned} k_1 - \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2(1+k_2) - \frac{k_1^2}{4}}} \left\{ \frac{3}{2} (1+k_2) \Omega^{*2} + \right. \\ \left. + \frac{a}{r} \left[ k_1 \left( 1 + \frac{k_2}{2} \right) u + k_2 \Omega^* u \right] \right\} > 0, \quad (5.288) \end{aligned}$$

которое при  $k_2 = 0$  переходит в условие (5.128), если заметить, что  $\frac{a}{r} \approx 1$ , и положить в (5.128)  $c = 0$ .

Условие (5.288) при заданных  $r$  и  $\Omega^*$  позволяет выбрать величины  $k_1$  и  $k_2$  так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость инерциальной системы при любом законе изменения скорости объекта. При этом мерой затухания начальных ошибок будет как раз величина  $\tilde{\mu}^*$ . В самом деле, из соотношения (5.283)

$$U = U^0 e^{-2 \int_0^t \mu^* dt} \leq U^0 e^{-2\tilde{\mu}^* t}, \quad (5.289)$$

где  $U^0$  — начальное значение функции  $U$ .

В соответствии с определением (5.275) функции  $U$ , получаем теперь:

$$b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leq b^0 e^{-\tilde{\mu}^* t}. \quad (5.290)$$

В заключение отметим следующее. Условие устойчивости (5.288) получено нами в предположении, что  $r = \text{const}$ , т. е. для произвольного движения объекта на постоянном удалении от центра Земли. Легко видеть, что тем же путем можно получить достаточное условие асимптотической устойчивости и с учетом вертикальных перемещений объекта. Тогда в это условие войдут максимальные значения  $|\dot{r}|$  и  $|r - r^0|$ , где  $r^0$  — постоянное значение  $r$ , в окрестности которого происходит движение объекта. Аналогичное замечание справедливо и в отношении устойчивости корректируемой от доплеровского измерителя схемы инерциальной системы с тремя ньютонометрами, исследование которой было проведено нами также в предположении, что  $r = \text{const}$ .

**5.5.4. Решение уравнений ошибок. Зависимость ошибок от инструментальных погрешностей. Выбор величин коэффициентов коррекции.** Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее векторному уравнению (5.234). В проекциях на оси неизменно ориентированной в пространстве системы координат  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$  (ось  $\zeta_*$  совмещена с осью вращения Земли) уравнение (5.234) приводит к трем скалярным уравнениям (5.236). При  $r = \text{const}$  коэффициенты линейных дифференциальных уравнений (5.236) постоянны. Общее решение

последнего из этих уравнений очевидно. Решение соответствующего неоднородного уравнения может быть найдено методом вариаций произвольных постоянных общего решения однородного уравнения.

Для построения общего решения однородной системы четвертого порядка, образованной первым и вторым уравнениями (5.236), необходимо найти корни характеристического уравнения (5.237).

Так как  $\omega_0^2 \gg \frac{u^2 a^2}{r^2}$ , то достаточно точные приближенные значения корней уравнения (5.237) можно найти способом, аналогичным примененному при отыскании корней (5.143) уравнения (5.68). В рассматриваемом случае вспомогательное кубическое уравнение (5.137) записывается таким образом:

$$2y^3 - \left[ 2\omega_0^2(1+k_2) + k_1^2 + k_2^2 \frac{a^2 u^2}{r^2} \right] y^2 + \\ + 2 \left\{ \omega_0^2(1+k_2) [k_1^2 - \omega_0^2(1+k_2)] - k_1^2(1+k_2) \frac{a^2 u^2}{r^2} \right\} y + \\ + \omega_0^4(1+k_2)^2 [2\omega_0^2(1+k_2) - k_1^2] + \\ + \omega_0^2(1+k_2)^2 (2k_1^2 + \omega_0^2 k_2^2) \frac{a^2 u^2}{r^2} = 0. \quad (5.291)$$

Легко находится следующее приближенное значение корня  $y_1'$  этого уравнения:

$$y_1' = \frac{k_1^2}{2} - \omega_0^2(1+k_2) - \frac{k_1^2 a^2 u^2}{2\sigma^2 r^2} [k_2^2 + 4(1+k_2)], \quad (5.292)$$

где  $\sigma^2 = 4\omega_0^2(1+k_2) - k_1^2$ .

Это значение представляет собой начало разложения точного значения корня по степеням  $\frac{a^2 u^2}{r^2 \sigma^2}$ .

Мы ограничились при этом лишь нулевым и первым слагаемыми указанного разложения. Так как обычно

$$\sigma^2 = 4\omega_0^2(1+k_2) - k_1^2 \gg \frac{a^2 u^2}{r^2}, \quad (5.293)$$

то формула (5.292) дает удовлетворительную точность вычисления корня  $y_1$ .

Теперь задача приближенного решения уравнения (5.237) сводится к отысканию корней двух квадратных уравнений

$$p^2 + b_1 p + c_1 = 0, \quad p^2 + b_2 p + c_2 = 0, \quad (5.294)$$

коэффициенты которых выражаются через коэффициенты уравнения (5.237) и найденное значение  $y'_1$ . В соответствии с равенствами (5.135), (5.136), эти коэффициенты могут быть представлены в таком виде:

$$b_{1,2} = k_1 \pm j\sigma \left( 1 + q_1 \frac{a^2 u^2}{r^2 \sigma^2} \right),$$

$$c_{1,2} = \frac{k_1^2}{2} - \omega_0^2 (1 + k_2) \pm j \frac{k_1 \sigma}{2} + (q_2 \pm j q_3) \frac{a^2 u^2}{r^2 \sigma^2},$$

где

$$q_1 = \frac{2}{\sigma^2} (1 + k_2) (k_1^2 + \omega_0^2 k_2^2), \quad q_2 = -\frac{k_1^2}{2} [4(1 + k_2) + k_2^2],$$

$$q_3 = \frac{k_1}{2\sigma} [k_1^2 (2 + 4k_2 + k_2^2) - 2\omega_0^2 k_2 (1 + k_2) (k_2 + 4)].$$

Решая первое уравнение (5.294), находим два из корней характеристического уравнения (5.237) в таком виде:

$$p_{1,2} = -\frac{k_1}{2} - j \frac{\sigma}{2} \pm \frac{au}{r\sigma} \sqrt{-\frac{q_1 \sigma^2}{2} - q_2 + j \left( \frac{k_1 q_1 \sigma}{2} - q_3 \right) - \frac{j\sigma q_1 a^2 u^2}{2r^2 \sigma^2}}. \quad (5.295)$$

Аналогично из второго уравнения (5.294) получаем:

$$p_{3,4} = -\frac{k_1}{2} + j \frac{\sigma}{2} \pm \frac{au}{r} \sqrt{-\frac{q_1 \sigma^2}{2} - q_2 + j \left( \frac{k_1 q_1 \sigma}{2} - q_3 \right) + \frac{j\sigma q_1 a^2 u^2}{2r^2 \sigma^2}}. \quad (5.295a)$$

При  $k_2 = 0$  значения (5.295), (5.295a) корней характеристического уравнения становятся равными соответствующим выражениям (5.143).

После того как корни характеристического уравнения найдены, построение общего решения однородной системы первых двух уравнений (5.236), а затем и соответствующей неоднородной системы может быть выполнено обычными способами. Однако это решение получается весьма громоздким, а поэтому неудобным для практических расчетов.

Для упрощения решения можно воспользоваться следующими обстоятельствами.

Из вида корней (5.295), (5.295а) характеристического уравнения (5.237) следует, что при выполнении неравенства (5.293) они близки к значениям

$$p_{1,2} = p_{3,4} = -\varepsilon \pm j\nu, \quad \varepsilon = \frac{k_1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2(1+k_2) - k_1^2}, \quad (5.295б)$$

т. е. близки к корням характеристического уравнения

$$p^2 + k_1 p + \omega_0^2(1+k_2) = 0,$$

соответствующего векторному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2(1+k_2) \delta \mathbf{r} = 0. \quad (5.296)$$

Это означает, что из-за малости величины  $\frac{ua}{r}$  по сравнению с  $k_1$  и  $\omega_0$  связь первого и второго уравнений (5.236) оказывается слабой. В демпфированной системе эффекты, обусловленные этой связью, не успевают развиться за время, необходимое для затухания начальных ошибок.

Таким образом, при выполнении неравенства (5.293) вместо уравнения (5.201) можно в первом приближении ограничиться рассмотрением уравнения

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{r}}{dt^2} + k_1 \frac{d \delta \mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2(1+k_2) \delta \mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad (5.297)$$

где через  $\mathbf{f}(t)$  обозначена правая часть уравнения (5.201).

Общее решение уравнения (5.297) может быть записано в таком виде:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} = e^{-\varepsilon t} \left[ \delta \mathbf{r}^0 \cos \nu t + \frac{1}{\nu} \left( \frac{d \delta \mathbf{r}^0}{dt} + \varepsilon \delta \mathbf{r}^0 \right) \sin \nu t \right] + \\ + \frac{1}{\nu} \int_0^t \mathbf{f}(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5.298)$$

где  $\varepsilon$  и  $\nu$  заданы последними двумя равенствами (5.295б), а дифференцирование и интегрирование проведено в осях  $O_1 \xi_* \eta_* \zeta_*$ .

В решении (5.298) через  $\mathbf{f}(t)$  обозначена правая часть уравнения (5.201). В первом приближении, если пренебречь в правой части уравнения (5.201) слагаемыми, содержащими

множителем  $u$ , выражение для  $f(t)$  может быть взято в следующем виде:

$$f(t) = (1 + k_2) \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + \frac{3\mu r \Delta r}{r^4} \right) - \\ - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r) - k_1 (\Delta m \times r) - k_2 \frac{d\Delta V_D}{dt} + k_1 \Delta V_D. \quad (5.299)$$

Возможность такого упрощения функции  $f(t)$  вытекает из следующего соображения. Вторая группа уравнений ошибок инерциальной системы, корректируемой от доплеровского измерителя, сохраняет тот же вид, что и в случае автономной системы. Согласно соотношениям (1.94), ошибки  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ , определяемые уравнениями второй группы, приводят к ошибкам вычисления местоположения объекта  $\delta r = \theta_1 \times r$ . Если иметь в виду точность определения координат объекта порядка 1 км, то должно выполняться неравенство  $|\theta| \leq \leq 1,5 \cdot 10^{-4}$  рад. Но тогда  $\left| (\theta \times u) \times \frac{ra}{r} \right| < 7,4 \cdot 10^{-2}$  м/сек. Такого же порядка величина  $|u \times r| \frac{a \Delta r}{r^2}$ , если  $\Delta r < 1$  км. Погрешность  $(\theta \times u) \times \frac{ra}{r} + u \times r \frac{a \Delta r}{r^2}$  суммируется в правой части уравнения (2.201) с инструментальной погрешностью  $\Delta V_D$  доплеровского измерителя. Величина  $\left| (\theta \times u) \times \right. \\ \left. \times r \frac{a}{r} + u \times r \frac{a \Delta r}{r^2} \right| < 0,15$  м/сек, а инструментальная погрешность доплеровского измерителя имеет обычно порядок 1 м/сек. Отсюда и следует возможность пренебрежения в правой части уравнения (5.201) слагаемыми, содержащими множителем  $u$ .

Рассмотрим решение (5.298). Если функция  $f$  представляет собой постоянный вектор  $b$ , то установившееся значение ошибки равно:

$$\delta r = \frac{b}{v^2 + \varepsilon^2} = \frac{b}{\omega_0^2 (1 + k_2)}. \quad (5.300)$$

Сравним эту ошибку и установившуюся ошибку (5.152) системы, в которой демпфирование введено без изменения периода колебаний. Если

$$\Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} = a_1, \quad (5.301)$$

где  $\mathbf{a}_1$  — постоянный вектор, то  $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1(1 + k_2)$ . Следовательно, согласно равенствам (5.300), (5.152),

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}_1}{\omega_0^2} = \frac{\mathbf{b}_1}{\omega_0^2(1 + k_2)}. \quad (5.301a)$$

Таким образом, установившаяся погрешность из-за постоянной инструментальной погрешности (5.301) одинакова в обоих случаях и не зависит от выбора величин  $k_1$ ,  $k_2$  коэффициентов коррекции.

В правой части (5.150) уравнения ошибок схемы, демпфированной без изменения частоты, остается еще величина

$$k_1(\Delta V_D - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) - \frac{d}{dt}(\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}), \quad (5.302)$$

а в правой части (5.299) уравнения (5.297) — величина

$$-\frac{d}{dt}(\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) + k_1(\Delta V_D - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) - k_2 \frac{d \Delta V_D}{dt}. \quad (5.303)$$

Пусть

$$-\frac{d}{dt}(\Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r}) - \Delta \mathbf{m} \times \mathbf{r} = \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2, \quad (5.304)$$

причем  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2$  — постоянные векторы. Тогда из соотношений (5.152) и (5.300) получаем соответственно:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}_2}{\omega_0^2}, \quad \delta \mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}_2}{\omega_0^2(1 + k_2)}, \quad (5.305)$$

т. е. установившаяся ошибка от инструментальной погрешности (5.304) меньше в  $(1 + k_2)$  раз в схеме с изменением частоты. Аналогичное обстоятельство имеет место и по отношению к инструментальной погрешности  $k_1 \Delta V_D$ .

В схеме с изменением частоты в правой части присутствует еще величина  $k_2 \frac{d \Delta V_D}{dt}$ . Если  $\frac{d \Delta V_D}{dt} = \mathbf{b}_3$ , то установившаяся ошибка в этом случае равна:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{k_2 \mathbf{b}_3}{\omega_0^2(1 + k_2)}. \quad (5.306)$$

Так как обычно  $\frac{k_2}{1 + k_2} \approx 1$ , то

$$\delta \mathbf{r} \approx \frac{\mathbf{b}_3}{\omega_0^2}. \quad (5.307)$$

Обратимся к уравнению (5.208). Соответствующее ему однородное уравнение (5.240) в проекциях на оси  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  приводит при  $r = \text{const}$  к линейным дифференциальным уравнениям (5.241). Решение последнего из этих уравнений очевидно. Отыскание корней характеристического уравнения (5.243) системы первых двух уравнений (5.241) может быть проведено таким же способом, каким выше были найдены корни уравнений (5.68), (5.237). Вследствие малости величины  $u$  по сравнению с  $\omega_0$  корни здесь также оказываются близкими к величинам (5.295б), в которых надо только  $k_1$  заменить на  $k'_1\omega_0^2$ . Связь первых двух уравнений (5.241) оказывается благодаря малости  $u$  слабой, как и в случае уравнений (5.236). Поэтому вместо уравнения (5.240) в качестве первого приближения здесь также может быть взято уравнение (5.296), куда вместо  $k_1$  надо подставить  $k'_1\omega_0^2$ . Соответственно вместо уравнения (5.208) можно (положив в нем  $u = 0$ ,  $r = \text{const}$ ) взять уравнение

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} + k'_1 \omega_0^2 \frac{d \delta r}{dt} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta r = f'(t), \quad (5.308)$$

где теперь

$$\begin{aligned} f'(t) = & (1 + k_2) (\Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4}) + \\ & + k'_1 \frac{d}{dt} \left( \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} + 3 \frac{\mu r \Delta r}{r^4} \right) - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r) - \\ & - k_2 \frac{d \Delta V_D}{dt} - k'_1 \frac{d^2 \Delta V_D}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5.309)$$

При  $r = \text{const}$  и  $k'_1\omega_0^2 = k_1$  левые части уравнений (5.297) и (5.308) совпадают. Таким образом, в первом приближении при отсутствии инструментальных погрешностей все приведенные выше четыре варианта (5.196) — (5.199) коррекции равносильны.

Общим решением неоднородного уравнения (5.308) при  $r = \text{const}$  является, очевидно, формула (5.298), в которую вместо  $f(t)$  надо подставить  $f'(t)$ . Правые части уравнений (5.297) и (5.308), т. е. векторные функции  $f(t)$  и  $f'(t)$ , существенно различаются между собой. Таким образом, основное отличие схем (5.196), (5.197) от схем (5.198), (5.199) заключается в различном влиянии на точность их работы инструментальных погрешностей элементов и погрешностей



$\Delta V_D$ ,  $\Delta r$  внешней информации. При практической реализации схемы коррекции это обстоятельство может оказаться решающим. Так, например, если основной погрешностью является постоянная погрешность  $\Delta V_D$  доплеровского измерителя, то предпочтительнее могут оказаться варианты (5.198), (5.199), так как в правую часть (5.309) уравнений ошибок этих вариантов погрешность  $\Delta V_D$  входит лишь своими производными по времени. Постоянная составляющая этой погрешности к ошибкам не приводит.

Уравнения (2.201), (2.208), решения которых обсуждены выше, — это уравнения ошибок корректируемых инерциальных систем с тремя ньютонометрами. Соответствующие уравнения для схем с двумя ньютонометрами получаются из векторных уравнений (2.201), (2.208) проектированием их на горизонтальные оси  $x$ ,  $y$  сопровождающего трехгранника, ось  $z$  которого направлена вдоль  $r$ . Из уравнения (2.201) получается при этом система (5.215). Ей соответствует однородная система (5.244).

Структура этой системы уравнений достаточно сложна. Как уже было отмечено ранее, в случае произвольного движения объекта коэффициенты системы (5.244) будут некоторыми функциями времени.

Уравнения ошибок могут быть точно решены до конца лишь в случае движения объекта с постоянной скоростью вдоль параллели, когда уравнения (5.244) переходят в систему дифференциальных уравнений (5.246) с постоянными коэффициентами. При этом, если  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  малы по сравнению с  $\omega_0$ , то для приближенного решения характеристического уравнения (5.252) системы (5.246) можно применить тот же прием, что и при решении уравнений (5.68), (5.237), причем, если  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  достаточно малы, то корни характеристического уравнения (5.252) оказываются близкими к величинам (5.295б). Связь первого и второго уравнений системы (5.246) оказывается слабой, и вместо этой системы можно рассматривать в первом приближении два независимых уравнения второго порядка, на которые распадается система (5.246), если в ней положить

$$\omega_y = \omega_z = u_z = 0. \quad (5.310)$$

Здесь необходимо обратить внимание на следующее. При движении объекта по параллели со скоростями, существенно

меньшими первой космической скорости, всегда  $|\omega_y| \ll \omega_0$ . В то же время величина  $|\omega_z|$  может оказаться близкой к  $\omega_0$  или даже превзойти величину  $\omega_0$ , если движение происходит по параллели, лежащей в достаточно высоких широтах. Указанное обстоятельство является следствием того, что уравнения (5.246) записаны в проекциях на оси трехгранника  $xuz$ , ось  $u$  которого направлена на север. Если рассмотреть уравнения ошибок в проекциях на оси сопровождающего (ось  $z$  совпадает с  $r$ ) трехгранника  $xuz$ , абсолютная угловая скорость вращения которого вокруг оси  $z$  равна нулю ( $\omega_z = 0$ ), т. е. в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника), то отмеченное затруднение можно обойти.

В проекциях на оси азимутально свободного трехгранника однородные уравнения ошибок рассматриваемой системы переходят в уравнения (5.268). Теперь  $\omega_z$  не входит в коэффициенты уравнений. Величины же  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  (теперь переменные даже при движении вдоль параллели) при малых скоростях движения (1000—2000 м/сек) существенно меньше по модулю, чем  $\omega_0$ . Поэтому в первом приближении можно положить их равными нулю. С учетом сказанного уравнения (5.215) в проекциях на оси азимутально свободного трехгранника для медленных движений могут быть упрощены до вида

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x &= f_x(t), \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta y &= f_y(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.311)$$

причем в первом приближении в качестве функций  $f_x(t)$  и  $f_y(t)$  могут быть взяты функции

$$\left. \begin{aligned} f_x(t) &= (1 + k_2) \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y + k_1 (\Delta V_{Dx} - \\ &\quad - r \Delta m_y) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx}, \\ f_y(t) &= (1 + k_2) \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x + k_1 (\Delta V_{Dy} + \\ &\quad + r \Delta m_x) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dy}, \end{aligned} \right\} \quad (5.312)$$

получающиеся из правых частей (5.216) уравнений (5.215) при  $\omega_x = \omega_y = u_x = u_y = u_z = 0$ .

Уравнения (5.311) получены упрощением уравнений (5.215), которые в свою очередь получены проектированием векторного

уравнения (5.201) на горизонтальные оси  $x$ ,  $y$ . Аналогично можно получить для инерциальной системы с двумя ньютонометрами упрощенные уравнения, соответствующие векторному уравнению (5.208). Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k'_1 \omega_0^2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta x &= f'_x, \\ \delta \ddot{y} + k'_1 \omega_0^2 \delta \dot{y} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta y &= f'_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.313)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= \Delta n_x (1 + k_2) + k'_1 \Delta \dot{n}_x - r \Delta \dot{m}_y - \\ &\quad - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx} - k'_1 \Delta \ddot{V}_{Dx}, \\ f'_y &= \Delta n_y (1 + k_2) + k'_1 \Delta \dot{n}_y + r \Delta \dot{m}_x - \\ &\quad - k_2 \Delta \dot{V}_{Dy} - k'_1 \Delta \ddot{V}_{Dy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.314)$$

При  $k'_1 \omega_0^2 = k_1$  однородные уравнения (5.311) и (5.313) совпадают. Корни соответствующих характеристических уравнений суть величины (5.295б). Решение уравнений (5.311), (5.313) записывается формулами вида (5.298), в которых вместо  $\delta r$  будут стоять соответственно  $\delta x$  или  $\delta y$ , а вместо векторной функции  $f(\tau)$  — скалярные функции  $f_x(\tau)$ ,  $f_y(\tau)$ ,  $f'_x(\tau)$ ,  $f'_y(\tau)$ .

Заметим, что функции  $f_x$ ,  $f_y$  и  $f'_x$ ,  $f'_y$  различаются лишь слагаемыми, содержащими множителями  $k_1$  и  $k'_1$ . Слагаемые же с множителем  $k_2$  одинаковы в обоих случаях. Различие в решениях уравнений (5.311) и (5.313) обусловлено указанным отличием друг от друга функций  $f_x$ ,  $f_y$ , и  $f'_x$ ,  $f'_y$ . Характер этого различия очевиден.

Уравнениям (5.297), (5.308), (5.311), (5.313) соответствует одно и то же характеристическое уравнение

$$p^2 + k_1 p + (1 + k_2) \omega_0^2 = 0 \quad (5.315)$$

с корнями

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm j\nu, \quad \varepsilon = \frac{k_1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2(1 + k_2) - k_1^2}. \quad (5.316)$$

Корни (5.316) характеристического уравнения (5.315) являются одними из основных расчетных параметров инерциальной системы, корректируемой от доплеровского измерителя скорости. Ниже приведена таблица, характеризующая

значения этих корней в зависимости от величин коэффициентов коррекции  $k_1$  и  $k_2$ . В таблице даны значения постоянной

	$T, \text{ мин} \rightarrow$	10	20	30	40	50	60
$t_c, \text{ сек}$	$k_1$	$k_2$	$k_2$	$k_2$	$k_2$	$k_2$	$k_2$
1	2	649070	649017	649007	649004	649002	649001
		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
10	0,2	6560,3	6507,0	6497,0	6494,0	6492,0	6491,0
		0,995	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
100	0,02	135,2	81,87	76,86	68,39	66,78	65,92
		0,691	0,886	0,914	0,968	0,979	0,985
200	0,01	86,5	33,17	23,16	19,69	18,08	17,21
		0,431	0,689	0,819	0,886	0,922	0,944
300	0,0067	77,6	24,23	14,21	10,74	9,14	8,27
		0,304	0,538	0,692	0,787	0,849	0,888
400	0,0050	74,32	21,00	10,98	7,51	5,91	5,04
		0,233	0,431	0,534	0,692	0,768	0,821
500	0,0040	72,86	19,54	9,52	6,05	4,45	3,58
		0,187	0,355	0,497	0,605	0,691	0,752
600	0,0033	72,03	18,71	8,69	5,22	3,62	2,75
		0,156	0,300	0,428	0,534	0,619	0,686
700	0,0029	71,59	18,27	8,25	4,78	3,18	2,31
		0,137	0,267	0,385	0,488	0,574	0,643
800	0,0025	71,28	17,95	7,94	4,47	2,86	2,00
		0,119	0,232	0,338	0,432	0,515	0,584
900	0,0022	71,07	17,74	7,72	4,26	2,65	1,79
		0,105	0,206	0,302	0,387	0,466	0,533
1000	0,002	70,59	17,60	7,57	4,11	2,50	1,63
		0,016	0,188	0,276	0,358	0,433	0,500

времени

$$t_c = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{k_1} \quad (5.317)$$

и периода колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{4\pi}{\sqrt{4\omega_0^2(1+k_2) - k_1^2}}. \quad (5.318)$$

Во вторых строчках таблицы под значениями  $k_2$  выписаны значения степени затухания

$$\zeta = \frac{k_1}{2\omega_0 \sqrt{1+k_2}}. \quad (5.319)$$

Выбор коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  имеет своей целью обеспечить достаточно эффективное затухание, т. е. достаточно

малое значение постоянной времени  $t_c$  при минимальных ошибках от инструментальных погрешностей. При этом стремятся обычно оставить период  $T$  достаточно большим, чтобы сохранить за инерциальной системой свойства хорошего фильтра низких частот.

В заключение заметим, что выбор величин коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  по приведенной таблице возможен лишь в той области их значений, где справедливы условия перехода к упрощенным уравнениям (5.297), (5.308), (5.311), (5.313), т. е. условия вида (5.293). В противном случае для системы с тремя ньютонометрами следует рассматривать не упрощенное характеристическое уравнение (5.315), а уравнения (5.237), (5.243). В схемах же инерциальных систем с двумя ньютонометрами следует учитывать дополнительно условия устойчивости вида (5.288) полных уравнений ошибок.

При выборе величин коэффициентов коррекции  $k_1$  и  $k_2$  приходится, как правило, учитывать случайный характер инструментальных погрешностей и в первую очередь случайный характер инструментальных погрешностей доплеровского измерителя скорости. Влияние случайных погрешностей будет рассмотрено в седьмой главе книги.

## **§ 5.6. Дополнительные замечания о доплеровской коррекции инерциальных систем**

**5.6.1. Некоторые варианты коррекции инерциальной системы, построенной на основе управляемой гиросплатформы.** Рассмотрим инерциальную систему с двумя ньютонометрами, основой которой является управляемая гиросtabilизированная платформа (или управляемая гирорама). Ось  $z$  платформы в невозмущенном положении совпадает с радиусом-вектором  $r$ , а ньютонометры установлены вдоль ее осей  $x$  и  $y$ , которые в невозмущенном положении располагаются в плоскости геоцентрического горизонта. Ограничимся случаем определения ортодромических координат, что не уменьшит общности дальнейшего рассмотрения. Уравнениями идеальной работы указанной схемы в случае, когда доплеровская коррекция отсутствует, являются уравнения (2.23).

Исследованные в предшествующих параграфах варианты построения схем доплеровской коррекции инерциальных систем основаны на формулах (5.196)—(5.199), полученных

для случая произвольной ориентации платформы инерциальной системы. В применении к инерциальной системе, определяющей ортодромические координаты, формулы (5.196)—(5.199) приводили к изменению лишь первых четырех уравнений (2.23). Остальные уравнения не менялись, что видно, например, из формул (5.217). В частности, оставались неизменными пятое и шестое уравнения (2.23), посредством которых находятся координаты  $S$  и  $z$  по известным  $\omega_x$  и  $\omega_y$ . Оставались без изменения также одиннадцатое, двенадцатое и тринадцатое уравнения (2.23), по которым формируются управляющие моменты гиросtabilизированной платформы (гирорамы) системы.

В то же время в пятое, шестое, одиннадцатое, двенадцатое и тринадцатое уравнения (2.23) входят проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $xuy$  платформы на ее оси  $x$  и  $y$ . Так как трехгранник  $xuy$  сопровождающий, т. е. ось  $z$  его в невозмущенном положении направлена вдоль  $r$ , то величины  $\omega_x$  и  $\omega_y$  определяются через  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ . Но доплеровский измеритель дает как раз величины  $V_x$  и  $V_y$ . Поэтому здесь появляется возможность коррекции от доплеровского измерителя путем добавления дополнительных слагаемых к  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  в уравнениях для определения  $S$  и  $z$ , а также в уравнениях для управляющих моментов. Рассмотрим эту возможность. Возьмем вместо  $\omega_x$  и  $\omega_y$  величины

$$\omega_x - k_2 \frac{\Delta V_y}{r}, \quad \omega_y + k_2 \frac{\Delta V_x}{r}, \quad (5.320)$$

в которых  $\Delta V_x$  и  $\Delta V_y$  заданы последними четырьмя равенствами (5.217). Подставим указанные величины вместо  $\omega_x$  и  $\omega_y$  в выражения для управляющих моментов, т. е. сформируем эти моменты по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 \left( \omega_x - k_2 \frac{\Delta V_y}{r} \right), \\ M_x^1 &= H_1 \left( \omega_y + k_2 \frac{\Delta V_x}{r} \right), \\ M_x^3 &= H_3 \left[ \left( \omega_y + k_2 \frac{\Delta V_x}{r} \right) \operatorname{tg} z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.321)$$

Первые два уравнения (2.23) заменим на уравнения (5.49) с привлечением соотношений (5.50). Остальные уравнения (2.23) оставим без изменения.

Получим уравнения ошибок для этого случая. Варьируя уравнения (5.49) вместе с третьим и четвертым уравнениями (2.23), отбрасывая по малости вариации  $\delta g_x$ ,  $\delta g_y$  и полагая  $\delta r = \Delta r$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_y \Delta \dot{r} + \dot{r} \delta \omega_y + (\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \Delta r + \frac{d}{dt} (r \delta \omega_y) = \\ = \delta n_x - r \omega_z \delta \omega_x - r \omega_x \delta \omega_z - k_1 \delta \Delta V_x, \\ -2\omega_x \Delta \dot{r} - \dot{r} \delta \omega_x + (-\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \Delta r - \frac{d}{dt} (r \delta \omega_x) = \\ = \delta n_y - r \omega_y \delta \omega_z - r \omega_z \delta \omega_y - k_1 \delta \Delta V_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.322)$$

Обозначим, как и ранее, связанный с платформой трехгранник  $xuz$  в его невозмущенном положении через  $x_0 y_0 z_0$ , а отклонение платформы от ее невозмущенного положения зададим малыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  в соответствии с таблицей направляющих косинусов (4.22). Тогда величины  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$  будут заданы формулами (4.26), (4.27), (4.7), (4.8), (4.12).

В уравнения (5.322) входят вариации  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$ . Их надо связать с  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Очевидно, что ранее решавшие эту задачу соотношения (4.24) теперь непригодны, так как мы изменили выражения для управляющих моментов, взяв вместо соответствующих формул (2.23) формулы (5.321). Из формул (5.321) и равенств (4.23) получаются вместо (4.24) следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_{x_0} &= \dot{\alpha} + \omega_{y_0} \gamma - \omega_{z_0} \beta - \Delta \omega_{x_0} + k_2 \frac{\delta \Delta V_{y_0}}{r}, \\ \delta \omega_{y_0} &= \dot{\beta} - \omega_{x_0} \gamma + \omega_{z_0} \alpha - \Delta \omega_{y_0} - k_2 \frac{\delta \Delta V_{x_0}}{r}, \\ \delta \omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{x_0} \beta - \omega_{y_0} \alpha - \Delta \omega_{z_0} - k_2 \frac{\delta \Delta V_{x_0}}{r} \operatorname{tg} z. \end{aligned} \right\} \quad (5.323)$$

Здесь, как и в формулах (5.322), величины  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$  определены равенствами (5.58).

Из третьего и четвертого уравнений (2.23) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta v_{y_0} &= -\Delta r \omega_{x_0} - r \delta \omega_{x_0}, \\ \delta v_{x_0} &= \Delta r \omega_{y_0} + r \delta \omega_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.324)$$

Подставим эти значения  $\delta v_{x_0}$  и  $\delta v_{y_0}$  в правые части равенств (5.58). Заменяем также величины  $\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$  их выражениями (4.39) через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ . Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= r \delta \omega_{y_0} + \omega_{y_0} \Delta r + \rho (-u_{z_0} \alpha_2 + u_{x_0} \gamma_2) + \\ &\quad + r \left( \omega_{x_0} - \frac{\rho}{r} u_{x_0} \right) \gamma + \dot{r} \beta - \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta \Delta V_{y_0} &= -r \delta \omega_{x_0} - \omega_{x_0} \Delta r - \rho (u_{z_0} \beta_2 - u_{y_0} \gamma_2) + \\ &\quad + r \left( \omega_{y_0} - \frac{\rho}{r} u_{y_0} \right) \gamma - \dot{r} \alpha - \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.325)$$

Из соотношений (5.323) и (5.325) можно найти выражения для  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left\{ \dot{\alpha} + \omega_{y_0} \gamma - \omega_{z_0} \beta - \Delta \omega_{x_0} + \right. \\ &\quad + \frac{k_2}{r} [-\omega_{x_0} \Delta r - \rho (u_{z_0} \beta_2 - u_{y_0} \gamma_2) + \\ &\quad \left. + (r \omega_{y_0} - \rho u_{y_0}) \gamma - \dot{r} \alpha - \Delta V_{Dy_0}] \right\}, \\ \delta \omega_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left\{ \dot{\beta} - \omega_{x_0} \gamma + \omega_{z_0} \alpha - \Delta \omega_{y_0} - \right. \\ &\quad - \frac{k_2}{r} [\omega_{y_0} \Delta r + \rho (-u_{z_0} \alpha_2 + u_{x_0} \gamma_2) + \\ &\quad \left. + (r \omega_{x_0} - \rho u_{x_0}) \gamma + \dot{r} \beta - \Delta V_{Dx_0}] \right\}, \\ \delta \omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{z_0} \beta - \omega_{y_0} \alpha - \Delta \omega_{z_0} - \\ &\quad - \frac{k_2 \operatorname{tg} z}{1+k_2} \left\{ \dot{\beta} + \omega_{z_0} \alpha - \Delta \omega_{y_0} + \frac{\Delta r}{r} \omega_{y_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho}{r} (-u_{z_0} \alpha_2 + u_{x_0} \gamma_2) - \frac{\rho}{r} u_{x_0} \gamma + \frac{\dot{r}}{r} \beta - \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.326)$$

Теперь надо подставить выражения (5.326) для  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{z_0}$  в уравнения (5.322). В эти уравнения надо подставить также вместо  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$  выражения (5.325), предварительно заменив в них  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$  в соответствии с равенствами (5.326). Кроме того, в уравнения (5.322) надо ввести значения  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$  согласно равенствам (4.26), (4.27), (4.7), (4.8), (4.12). В результате получится первая группа уравнений ошибок рассматриваемой схемы.



Обратимся ко второй группе уравнений ошибок. Подчеркнем, что во всех предшествующих случаях коррекции вторая группа уравнений ошибок не претерпевала изменений, сохраняя все время тот же вид, что и для автономной инерциальной системы. В данном случае дело обстоит иначе. Это является следствием дополнительного вмешательства в формирование управляющих моментов гиросплатформы.

Варьируя пятое и шестое уравнения (2.23), получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{z} &= -\delta \omega_{x_0} - u(-\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \delta S, \\ \delta \dot{S} \cos z &= \delta \omega_{y_0} + \\ &+ \left[ \omega_{y_0} \operatorname{tg} z + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \right] \delta z + \\ &+ u \sin z (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \delta S, \end{aligned} \right\} \quad (5.327)$$

в которых вариации  $\delta \omega_{x_0}$  и  $\delta \omega_{y_0}$  определены формулами (5.326). Вводя в соотношения (5.327) новые переменные

$$\alpha_2 = -\delta z, \quad \beta_2 = \delta S \cos z, \quad \gamma_2 = \delta S \sin z \quad (5.328)$$

и привлекая седьмое равенство (2.23) и равенства (4.15), (4.16), приходим к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_2 + \omega_{y_0} \gamma_2 - \omega_{z_0} \beta_2 &= \delta \omega_{x_0}, \\ \dot{\beta}_2 + \omega_{z_0} \alpha_2 - \omega_{x_0} \gamma_2 &= \delta \omega_{y_0}, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_{x_0} \beta_2 - \omega_{y_0} \alpha_2 &= \delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.329)$$

Вместе с соотношениями (5.326) уравнения (5.329) составляют вторую группу уравнений ошибок.

Прodelав необходимые выкладки, можно убедиться в том, что замена переменных (4.39) не приводит уравнения (5.329), (5.326) к уравнениям (4.40). Таким образом, уравнения второй группы получаются отличными от соответствующих уравнений автономной инерциальной системы. Уравнения ошибок второй группы в общем случае не отделяются от уравнений первой группы (5.322), (5.325), (5.326). В рассматриваемом случае уравнения первой и второй групп образуют связанную систему дифференциальных уравнений седьмого порядка.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая малых значений  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ . Примем также для упрощения, что

$\rho = r = \text{const}$  и  $z = 0$ . Пренебрегая членами, содержащими  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ ,  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$ ,  $u_{z_0}$  и их производные, получим тогда вместо равенств (5.325) такие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= r \delta \omega_{y_0} - \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta \Delta V_{y_0} &= -r \delta \omega_{x_0} - \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.330)$$

Вместо равенств (5.326) теперь будем иметь более простые равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} (\dot{\alpha} - \Delta \omega_{x_0}) - \frac{k_2}{r(1+k_2)} \Delta V_{Dy_0}, \\ \delta \omega_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} (\dot{\beta} - \Delta \omega_{y_0}) + \frac{k_2}{r(1+k_2)} \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta \dot{\omega}_{z_0} &= \dot{\gamma} - \Delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.331)$$

Аналогично уравнения (5.329) упрощаются до вида

$$\dot{\alpha}_2 = \delta \omega_{x_0}, \quad \dot{\beta}_2 = \delta \omega_{y_0}, \quad \dot{\gamma}_2 = \delta \omega_{z_0}. \quad (5.332)$$

Равенства (5.322) теперь записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (r \delta \omega_{y_0}) &= \delta n_{x_0} - k_1 \delta \Delta V_{x_0}, \\ -\frac{d}{dt} (r \delta \omega_{x_0}) &= \delta n_{y_0} - k_1 \delta \Delta V_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.333)$$

причем в этом случае, согласно равенствам (4.26),

$$\delta n_{x_0} = -\omega_0^2 r \beta + \Delta n_{x_0}, \quad \delta n_{y_0} = \omega_0^2 r \alpha + \Delta n_{y_0}, \quad (5.334)$$

где, как обычно, введено обозначение  $\omega_0^2 = \mu/r^3$ .

Подставим в равенства (5.333) выражения для  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$ ,  $\delta \omega_{x_0}$ ,  $\delta \omega_{y_0}$ ,  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$  из соотношений (5.334), (5.331) (5.330) и произведем замену переменных  $\delta x = r\beta$ ,  $\delta y = -r\alpha$ . Получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1+k_2) \omega_0^2 \delta x &= \\ &= (1+k_2) \Delta n_{x_0} + r \Delta \dot{\omega}_{y_0} - k_2 \dot{\Delta V}_{Dx_0} + \\ &\quad + k_1 (r \Delta \omega_{y_0} + \Delta V_{Dx_0}), \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + (1+k_2) \omega_0^2 \delta y &= \\ &= (1+k_2) \Delta n_{y_0} - r \Delta \dot{\omega}_{x_0} - k_2 \dot{\Delta V}_{Dy_0} + \\ &\quad + k_1 (-r \Delta \omega_{x_0} + \Delta V_{Dy_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.335)$$

Легко видеть, что эти уравнения совпадают с уравнениями (5.311), так как  $\Delta\omega_{x_0} = -\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0} = -\Delta m_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0} = -\Delta m_{z_0}$ .

Обратимся теперь к уравнениям (5.332) второй группы. Вводя замену переменных

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{x_0} &= (1 + k_2) \alpha_2 - \alpha, & \vartheta_{y_0} &= (1 + k_2) \beta_2 - \beta, \\ \vartheta_{z_0} &= \gamma_2 - \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (5.336)$$

получим уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vartheta}_{x_0} &= -\Delta\omega_{x_0} - k_2 \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r}, \\ \dot{\vartheta}_{y_0} &= -\Delta\omega_{y_0} + k_2 \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r}, \\ \dot{\vartheta}_{z_0} &= -\Delta\omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.337)$$

Во всех предшествующих случаях уравнения ошибок второй группы имели (при сделанных упрощениях) такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{x_0} &= -\Delta\omega_{x_0}, & \dot{\theta}_{y_0} &= -\Delta\omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} &= -\Delta\omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.338)$$

Уравнения (5.337) отличаются от уравнений (5.338) не столько формой, сколько самим смыслом входящих в них переменных. В случае уравнений (5.338) полные ошибки  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$  определения координат вычисляются в соответствии с равенствами

$$\delta x_2 = \delta x + \theta_{y_0} r, \quad \delta y_2 = \delta y - \theta_{x_0} r, \quad (5.339)$$

в то время как в случае уравнений (5.337) полные ошибки равны соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= r\beta_2 = (r\vartheta_{y_0} + \delta x) \frac{1}{1 + k_2}, \\ \delta y_2 &= -r\alpha_2 = (-r\vartheta_{x_0} + \delta y) \frac{1}{1 + k_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.340)$$

Указанное различие делает интересным сравнение с рассматриваемым основным из изученных ранее вариантов доплеровской коррекции — варианта, определяемого уравнениями (5.217).

В случае варианта (5.217) полная система уравнений ошибок включает в себя уравнения (5.311), (5.338) и (5.339), к которым добавляются уравнения для определения ошибок ориентации платформы инерциальной системы

$$\theta_{1x_0} = -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y_0} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z_0} = -\theta_{z_0}. \quad (5.341)$$

В варианте, рассматриваемом в настоящем разделе, уравнениями ошибок будут уравнения (5.335), (5.337), (5.340) и соотношения

$$\theta_{1x_0} = -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y_0} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z_0} = -\vartheta_{z_0}. \quad (5.342)$$

С точки зрения ошибок ориентации платформы (отклонения оси  $z$  платформы от направления к центру Земли и ошибки азимутальной ориентации) оба варианта одинаковы.

Действительно, уравнения (5.335) совпадают с уравнениями (5.311), совпадают также соотношения (5.341) и (5.342), так как

$$\theta_{z_0} = \vartheta_{z_0}. \quad (5.343)$$

Последнее видно из сравнения \*) третьего уравнения (5.338) с третьим уравнением (5.337).

Полные же ошибки определения координат различны в двух рассматриваемых вариантах, даже если взять в обоих случаях инструментальные погрешности одинаковыми.

В самом деле, пусть величины  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ ,  $\Delta\omega_{z_0}$ ,  $\Delta V_{Dx_0}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$  постоянны. Тогда из уравнений (5.337), полагая начальные условия нулевыми, получим:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{x_0} &= -\left(\Delta\omega_{x_0} + k_2 \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r}\right) t, \\ \vartheta_{y_0} &= \left(-\Delta\omega_{y_0} + k_2 \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r}\right) t. \end{aligned} \right\} \quad (5.344)$$

---

\*) Сравниваются дифференциальные уравнения. Строго говоря, надо проверить еще соответствие начальных условий. Легко убедиться, что это соответствие также имеет место.

Из уравнений же (5.338) следует, что

$$\theta_{x_0} = -\Delta\omega_{x_0}t, \quad \theta_{y_0} = -\Delta\omega_{y_0}t, \quad \theta_{z_0} = -\Delta\omega_{z_0}t. \quad (5.345)$$

С другой стороны, если считать инструментальные погрешности  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$  ньютонометров также постоянными, то из уравнений (5.335) после затухания переходных процессов получаются такие установившиеся значения  $\delta x$  и  $\delta y$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (r \Delta\omega_{y_0} + \Delta V_{Dx_0}), \\ \delta y &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (-r \Delta\omega_{x_0} + \Delta V_{Dy_0}). \end{aligned} \right\} \quad (5.346)$$

Теперь из соотношений (5.339), (5.345), (5.346) находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (r \Delta\omega_{y_0} + \Delta V_{Dx_0}) - r \Delta\omega_{y_0}t, \\ \delta y_2 &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (-r \Delta\omega_{x_0} + \Delta V_{Dy_0}) + r \Delta\omega_{x_0}t. \end{aligned} \right\} \quad (5.347)$$

Соответственно из равенств (5.340), (5.344), (5.346) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{1}{1+k_2} (-r \Delta\omega_{y_0} + k_2 \Delta V_{Dx_0})t + \\ &\quad + \frac{1}{1+k_2} \left[ \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (r \Delta\omega_{y_0} + \Delta V_{Dx_0}) \right], \\ \delta y_2 &= \frac{1}{1+k_2} (r \Delta\omega_{x_0} + k_2 \Delta V_{Dy_0})t + \\ &\quad + \frac{1}{1+k_2} \left[ \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2(1+k_2)} (-r \Delta\omega_{x_0} + \Delta V_{Dy_0}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.348)$$

Сравнение правых частей равенств (5.347) и (5.348) показывает, что постоянные составляющие погрешностей в случае равенств (5.348) в  $(1+k_2)$  раз меньше, чем в случае (5.347). Однако растущие пропорционально времени составляющие ошибок также существенно различны. В случае (5.347) это

$$\delta x'_2 = -r \Delta\omega_{y_0}t, \quad \delta y'_2 = r \Delta\omega_{x_0}t, \quad (5.349)$$

в случае же (5.348) —

$$\left. \begin{aligned} \delta x'_2 &= \frac{1}{1+k_2} (-r \Delta \omega_{y_0} + k_2 \Delta V_{Dx_0}) t, \\ \delta y'_2 &= \frac{1}{1+k_2} (r \Delta \omega_{x_0} + k_2 \Delta V_{Dy_0}) t. \end{aligned} \right\} \quad (5.350)$$

Так как обычно  $k_2 \gg 1$ , так что  $k_2/(1+k_2) \approx 1$ , и, кроме того, вследствие  $k_2 \gg 1$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1+k_2} |r \Delta \omega_{y_0}| &\ll |\Delta V_{Dx_0}|, \\ \frac{1}{1+k_2} |r \Delta \omega_{x_0}| &\ll |\Delta V_{Dy_0}|, \end{aligned} \right\} \quad (5.351)$$

то вместо равенств (5.350) можно написать приближенные равенства

$$\delta x'_2 = \Delta V_{Dx_0} t, \quad \delta y'_2 = \Delta V_{Dy_0} t. \quad (5.352)$$

Сравнивая выражения (5.349) и (5.352), заключаем, что при

$$|r \Delta \omega_{y_0}| > |\Delta V_{Dx_0}|, \quad |r \Delta \omega_{x_0}| > |\Delta V_{Dy_0}| \quad (5.353)$$

меньшие ошибки дает вариант доплеровской коррекции с изменением управляющих моментов по формулам (5.321). В противном случае более выгодным оказывается коррекция, построенная в соответствии с уравнениями (5.217). Отметим, что сравнение здесь проведено для постоянных инструментальных погрешностей. Случайные погрешности требуют, разумеется, специального рассмотрения, и оно в дальнейшем будет проведено.

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Легко усмотреть, что вариант доплеровской коррекции с изменением управляющих моментов при  $k_2 \gg 1$  по существу равносильно [это, в частности, следует из равенств (5.352)] схеме счисления пути посредством интегрирования вектора  $V_D$  путевой скорости, измеренного доплеровским измерителем. Роль инерциальной системы практически сводится здесь лишь к поддержанию ориентации платформы в плоскости горизонта и по отношению к меридиану, что и дает возможность получить с помощью доплеровского измерителя вектор путевой скорости.

Рассмотренный выше вариант доплеровской коррекции построен, как мы помним, следующим изменением уравнений (2.23). Вместо первых двух из этих уравнений взяты уравнения (5.49), (5.50), а управляющие моменты сформированы согласно равенствам (5.321). При этом формулы для моментов отличаются от соответствующих выражений (2.23) тем, что вместо  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  взяты выражения (5.320).

Однако проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  абсолютной угловой скорости трехгранника  $xuz$  платформы на его оси входят не только в те из уравнений (2.23), по которым формируются управляющие моменты. Они входят также в пятое и шестое уравнения (2.23), служащие для отыскания  $S$  и  $z$ .

В этих уравнениях проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  также можно заменить на величины (5.320). При этом управляющие моменты можно либо оставить в том виде, как они выглядят в уравнениях (2.23), либо изменить в соответствии с равенствами (5.321). Легко убедиться, что первый из этих вариантов не приводит к изменению частоты собственных колебаний инерциальной системы и поэтому мало интересен. Интерес может представить лишь второй из указанных вариантов, в котором проекции  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  заменяются на выражения (5.320) одновременно как в уравнениях для определения  $z$  и  $S$ , так и в формулах для управляющих моментов.

Тогда вместо пятого и шестого уравнений (2.23) получим следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} S &= \int_0^t \left[ \frac{1}{\cos z} \left( \omega_{y_0} + k_2 \frac{\Delta V_{x_0}}{r} \right) - \frac{u}{\cos z} (\beta_{33} \cos z - \right. \\ &\quad \left. - \beta_{31} \sin z \cos S - \beta_{32} \sin z \sin S) \right] dt + S^0, \\ z &= \int_0^t \left[ -\omega_{x_0} + k_2 \frac{\Delta V_{y_0}}{r} + \right. \\ &\quad \left. + u (-\beta_{31} \sin S + \beta_{32} \cos S) \right] dt + z^0. \end{aligned} \right\} \quad (5.354)$$

Рассмотрим уравнения ошибок. Очевидно, что уравнения (5.322), (5.325), (5.326) сохраняют свой вид. Уравнения же

(5.329) изменятся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}_2 + \omega_{y_0} \gamma_2 - \omega_{z_0} \beta_2 &= \delta \omega_{x_0} - \frac{k_2}{r} \delta \Delta V_{y_0}, \\ \dot{\beta}_2 + \omega_{z_0} \alpha_2 - \omega_{x_0} \gamma_2 &= \delta \omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \delta \Delta V_{x_0}, \\ \dot{\gamma}_2 + \omega_{x_0} \beta_2 - \omega_{y_0} \alpha_2 &= \delta \omega_{z_0} - \frac{k_2}{r} \delta \Delta V_{x_0} \operatorname{tg} z. \end{aligned} \right\} \quad (5.355)$$

Если принять  $r = \text{const}$ ,  $z = 0$ ,  $\omega_{x_0} = \omega_{y_0} = \omega_{z_0} = 0$ , то для  $\delta x$  и  $\delta y$  получатся уравнения (5.335), а уравнения (5.355) перейдут [следует учесть соотношения (4.43), (4.44)] в уравнения (5.338). Таким образом, рассматриваемый вариант коррекции оказывается динамически равносильным изученному ранее варианту, описываемому уравнениями (5.217).

**5.6.2. Допплеровская коррекция с повышением порядка уравнений ошибок. Линейная коррекция с переменными коэффициентами. Нелинейная коррекция.** Рассмотрим инерциальную систему, в которую доплеровская информация вводится следующим образом. Первые два уравнения (2.23) заменяются на уравнения (5.49), управляющие моменты формируются согласно равенствам ( $k_3$  — некоторый постоянный коэффициент)

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 \left( \omega_{x_0} - \frac{k_2 \Delta V_{y_0}}{r} - k_3 \int_0^t \frac{\Delta V_{y_0}}{r} dt \right), \\ M_x^1 &= H_1 \left( \omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta V_{x_0} + k_3 \int_0^t \frac{\Delta V_{x_0}}{r} dt \right), \\ M_x^3 &= H_3 \left[ \omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta V_{x_0} + \right. \\ &\quad \left. + k_3 \int_0^t \frac{\Delta V_{x_0}}{r} dt + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \right], \end{aligned} \right\} \quad (5.356)$$

а остальные уравнения (2.23) остаются без изменения.

Этот вариант является развитием рассмотренного в предшествующем разделе настоящего параграфа. Выражения (5.356) для управляющих моментов отличаются от выражений (5.321) лишь тем, что в правые части равенств (5.356) введены интегралы от  $\Delta V_{x_0}$  и  $\Delta V_{y_0}$ .



Составим уравнения ошибок рассматриваемого варианта. Будем считать для простоты, что  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ ,  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$ ,  $u_{z_0}$  равны нулю,  $r = \text{const}$ ,  $z = 0$ . Тогда из равенств (5.49) получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(r \delta \omega_{y_0}) &= \delta n_{x_0} - k_1 \delta \Delta V_{x_0}, \\ -\frac{d}{dt}(r \delta \omega_{x_0}) &= \delta n_{y_0} - k_1 \delta \Delta V_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (5.357)$$

совпадающие с уравнениями (5.333).

Вместо равенств (5.323) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \delta \omega_{x_0} &= \dot{\alpha} - \Delta \omega_{x_0} + \frac{k_2}{r} \delta \Delta V_{y_0} + \frac{k_3}{r} \int_0^t \delta \Delta V_{y_0} dt, \\ \delta \omega_{y_0} &= \dot{\beta} - \Delta \omega_{y_0} - \frac{k_2}{r} \delta \Delta V_{x_0} - \frac{k_3}{r} \int_0^t \delta \Delta V_{x_0} dt, \\ \delta \omega_{z_0} &= \dot{\gamma} - \Delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.358)$$

Для  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$ ,  $\delta n_{x_0}$  и  $\delta n_{y_0}$  останутся в силе формулы (5.330), (5.334).

Подставим выражения (5.330), (5.334) в равенства (5.357) и разрешим последние относительно  $\delta \dot{\omega}_{x_0}$ ,  $\delta \dot{\omega}_{y_0}$ . Получим:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_{x_0} &= -\omega_0^2 \alpha - \frac{\Delta n_{y_0}}{r} + k_1 \left( \delta \omega_{x_0} + \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r} \right), \\ \delta \dot{\omega}_{y_0} &= -\omega_0^2 \beta + \frac{\Delta n_{x_0}}{r} - k_1 \left( \delta \omega_{y_0} - \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.359)$$

С другой стороны, подставив  $\delta \Delta V_{x_0}$ ,  $\delta \Delta V_{y_0}$  из соотношений (5.330) в первые два равенства (5.358) и продифференцировав их, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{\omega}_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left[ \ddot{\alpha} - \Delta \dot{\omega}_{x_0} - \frac{k_2}{r} \Delta \dot{V}_{Dy_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_3}{r} (-r \delta \omega_{x_0} - \Delta V_{Dy_0}) \right], \\ \delta \dot{\omega}_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left[ \ddot{\beta} - \Delta \dot{\omega}_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta \dot{V}_{Dx_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_3}{r} (r \delta \omega_{y_0} - \Delta V_{Dx_0}) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.360)$$

Приравняв правые части соотношений (5.359), (5.360), придем к таким выражениям для  $\delta\omega_{x_0}$  и  $\delta\omega_{y_0}$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \frac{1+k_2}{k_1(1+k_2)-k_3} \left( -\omega_0^2 \alpha - \frac{\Delta n_{y_0}}{r} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{k_1(1+k_2)-k_3} \left( \ddot{\alpha} - \Delta\dot{\omega}_{x_0} - \frac{k_2}{r} \Delta\dot{V}_{Dy_0} \right) - \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \frac{1+k_2}{k_1(1+k_2)-k_3} \left( -\omega_0^2 \beta + \frac{\Delta n_{x_0}}{r} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{k_1(1+k_2)-k_3} \left( \ddot{\beta} - \Delta\dot{\omega}_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta\dot{V}_{Dx_0} \right) + \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.361)$$

Введем выражения (5.361) в уравнения (5.359) или (5.360), сделав одновременно замену переменных  $\delta x = r\beta$ ,  $\delta y = -r\alpha$ . После очевидных группировок и упрощений придем к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\ddot{y} + (1+k_2)\omega_0^2 \delta\dot{x} + \omega_0^2 k_3 \delta x &= \\ &= (1+k_2)\Delta\dot{n}_{x_0} + k_3 \Delta n_{x_0} + r \Delta\ddot{\omega}_{y_0} + r k_1 \Delta\dot{\omega}_{y_0} - \\ &\quad - k_2 \Delta\dot{V}_{Dx_0} + (k_1 - k_3) \Delta\dot{V}_{Dx_0}, \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\ddot{x} + (1+k_2)\omega_0^2 \delta\dot{y} + \omega_0^2 k_3 \delta y &= \\ &= (1+k_2)\Delta\dot{n}_{y_0} + k_3 \Delta n_{y_0} - r \Delta\ddot{\omega}_{x_0} - \\ &\quad - r k_1 \Delta\dot{\omega}_{x_0} - k_2 \Delta\dot{V}_{Dy_0} + (k_1 - k_3) \Delta\dot{V}_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.362)$$

Уравнения (5.362) описывают  $\left( \alpha = -\frac{\delta y}{r}, \beta = \frac{\delta x}{r} \right)$  колебания оси  $z$  платформы рассматриваемой инерциальной системы около направления к центру Земли. Уравнения (5.362) имеют третий порядок. Раньше при аналогичных упрощающих допущениях получались всегда уравнения второго порядка: например, уравнения (5.335), (5.311), (5.313). Повышение порядка связано с введением интегралов от  $\Delta V_{x_0}$ ,  $\Delta V_{y_0}$  в управляющие моменты. Легко видеть, что при  $k_3 = 0$  уравнения (5.362) после интегрирования перейдут в уравнения (5.335). Аналогично соотношения (5.361) при  $k_3 = 0$  перейдут в соотношения (5.331). Чтобы в этом убедиться, надо подставить в равенства (5.361) величины  $\ddot{\alpha}$  и  $\ddot{\beta}$ , вытекающие из уравнений (5.335).

Характеристическое уравнение, соответствующее каждому из двух уравнений (5.362), является полным кубическим уравнением

$$p^3 + k_1 p^2 + (1 + k_2) \omega_0^2 p + \omega_0^3 k_3 = 0. \quad (5.363)$$

Так как коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  независимы, то всегда можно подобрать их так, чтобы характеристическое уравнение имело корни с отрицательными вещественными частями. Тогда свободные колебания платформы со временем затухают и остается лишь вынужденная часть решения.

Сравнение правых частей уравнений (5.335) и (5.362) показывает, что в них входят одни и те же инструментальные погрешности. Разница лишь в том, что в уравнения (5.362) они входят своими производными высших порядков, нежели в уравнения (5.335). Если инструментальные погрешности  $\Delta n_{x_0}$ ,  $\Delta n_{y_0}$ ,  $\Delta \omega_{x_0}$ ,  $\Delta \omega_{y_0}$ ,  $\Delta V_{Dx_0}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$  постоянны, то установившиеся значения  $\delta x$  и  $\delta y$  решений уравнений (5.362) будут иметь следующие значения:

$$\delta x = \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2}, \quad \delta y = \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2}. \quad (5.364)$$

Они зависят лишь от инструментальных погрешностей ньютонометров. В отличие от решений (5.346) уравнений (5.335) постоянные погрешности гироскопов (свободные уходы) и доплеровского измерителя не приводят здесь к установившимся ошибкам ориентации оси  $z$  платформы.

Посмотрим теперь, как обстоит дело с полными ошибками  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$  определения координат. Как и ранее, примем

$$\delta x_2 = r \beta_2, \quad \delta y_2 = -r \alpha_2, \quad (5.365)$$

где  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  определены уравнениями

$$\dot{\alpha}_2 = \delta \omega_{x_0}, \quad \dot{\beta}_2 = \delta \omega_{y_0}. \quad (5.366)$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= r \int_0^t \delta \omega_{y_0} dt + \delta x_2^0, \\ \delta y_2 &= -r \int_0^t \delta \omega_{x_0} dt + \delta y_2^0. \end{aligned} \right\} \quad (5.367)$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правых частях формул (5.367), преобразуем формулы (5.361) для  $\delta\omega_{x_0}$ ,  $\delta\omega_{y_0}$ . Подставим в них вместо  $\alpha$  и  $\beta$  их выражения через  $\delta\dot{x}$ ,  $\delta\dot{y}$ ,  $\delta\ddot{x}$ ,  $\delta\ddot{y}$ ,  $\delta\ddot{\dot{y}}$  и инструментальные погрешности согласно уравнениям (5.362). Для постоянных инструментальных погрешностей получим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \frac{1}{r[k_1(1+k_2)-k_3]} \left[ -\frac{1+k_2}{k_3} \delta\ddot{y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_3-k_1(1+k_2)}{k_3} \delta\ddot{y} - \frac{\omega_0^2(1+k_2)^2}{k_3} \delta\dot{y} \right] - \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \frac{1}{r[k_3-k_1(1+k_2)]} \left[ -\frac{1+k_2}{k_3} \delta\ddot{x} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_3-k_1(1+k_2)}{k_3} \delta\ddot{x} - \frac{\omega_0^2(1+k_2)^2}{k_3} \delta\dot{x} \right] + \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (5.368)$$

Подставляя теперь эти выражения в равенства (5.367), интегрируя и замечая, что по затухании переходных процессов

$$\delta x = \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} = \text{const}, \quad \delta y = \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} = \text{const} \quad (5.369)$$

и, значит,

$$\delta\dot{x} = \delta\ddot{x} = 0, \quad \delta\dot{y} = \delta\ddot{y} = 0, \quad (5.370)$$

получим следующие установившиеся значения полных ошибок определения координат:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{1}{k_3-k_1(1+k_2)} \left[ \frac{1+k_2}{k_3} \delta\ddot{x}^0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_3-k_1(1+k_2)}{k_3} \delta\dot{x}^0 - \frac{\omega_0^2(1+k_2)^2}{k_3} \left( \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \delta x^0 \right) \right] + \delta x_2^0 + \Delta V_{Dx_0} t, \\ \delta y_2 &= \frac{1}{k_3-k_1(1+k_2)} \left[ \frac{1+k_2}{k_3} \delta\ddot{y}^0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_3-k_1(1+k_2)}{k_3} \delta\dot{y}^0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1+k_2)^2}{k_3} \left( \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} - \delta y^0 \right) \right] + \delta y_2^0 + \Delta V_{Dy_0} t. \end{aligned} \right\} \quad (5.371)$$

В отличие от формул (5.348), здесь в выражения для  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$  не входят слагаемые вида  $r \Delta \omega_{x_0} t$ ,  $r \Delta \omega_{y_0} t$ ; слагаемые же, пропорциональные  $\Delta V_{Dx}$ ,  $\Delta V_{Dy_0}$ , при  $k_2 \gg 1$  становятся практически одинаковыми как в решениях (5.371), так и в решениях (5.348).

Заметим, что по пути повышения порядка уравнений ошибок можно идти еще дальше. Так, добавив к правым частям выражений (5.356) для управляющих моментов вторые интегралы от  $\Delta V_{x_0}$ ,  $\Delta V_{y_0}$ , можно прийти к уравнениям ошибок четвертого порядка. Такое повышение, увеличивая каждый раз порядок астатизма схемы по отношению к детерминированным инструментальным погрешностям, может, однако, привести (в дальнейшем это будет показано) одновременно к увеличению случайных ошибок корректируемой системы.

До сих пор рассматривалась коррекция инерциальной системы с постоянными коэффициентами. Разумеется, коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и т. д. могут быть сделаны и заданными функциями времени. Уравнения, соответствующие этому случаю, могут быть получены теми же способами, что и для постоянных коэффициентов. Однако нельзя просто заменять в выведенных выше уравнениях ошибок указанные коэффициенты заданными функциями времени, так как в процессе вывода уравнений ошибок приходилось дифференцировать выражения, содержащие эти коэффициенты. В силу постоянства коэффициентов их производные при этом выпали.

К интересным результатам можно прийти, например, если заменить постоянные коэффициенты функциями вида \*)

$$k_1(t) = k_1^0 + k_{1\alpha} e^{-\alpha t}, \quad (5.372)$$

где  $k_1^0$  и  $k_{1\alpha}$  — некоторые постоянные.

Соответствующая  $t = 0$  величина

$$k_1 = k_1^0 + k_{1\alpha}$$

может быть большой, в то время как величина  $k_1(t \rightarrow \infty) = k_1^0$  может быть взята достаточно малой.

---

\*) См., например, Ма к-К л у р К. Л., Теория инерциальной навигации, изд-во «Наука», 1964.

Наконец, можно мыслить себе схемы с нелинейной коррекцией, когда величины  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и т. д. берутся как функции  $\Delta V$ . Получить соответствующие уравнения ошибок не составляет большого труда. Однако в нашем распоряжении нет регулярных методов анализа получаемых при этом уравнений даже для простейших видов функций  $k_1(\Delta V)$ ,  $k_2(\Delta V)$ ,  $k_3(\Delta V)$ .

Для такого рода анализа необходимо прибегать, как правило, к численному решению уравнений. Поэтому мы ограничимся лишь сделанными замечаниями.

## **Астрономическая коррекция систем инерциальной навигации. Совместная астро-доплеровская коррекция**

### **§ 6.1. Вводные соображения**

Рассмотренные в предшествующих двух главах коррекция инерциальных систем навигации от высотомера и коррекция от доплеровского измерителя скорости (или лага) меняют структуру лишь первой группы (1.95) уравнений ошибок и совершенно не затрагивают уравнений ошибок (1.96) второй группы (за вычетом разве лишь варианта доплеровской коррекции с изменением управляющих моментов, рассмотренного в последнем параграфе предыдущей главы).

Правые части второй группы уравнений ошибок суть инструментальные погрешности гироскопических чувствительных элементов инерциальной системы. Из проведенного в предшествующих главах анализа уравнений ошибок вытекает, что инструментальные погрешности гироскопов (погрешности измерителей абсолютной угловой скорости, свободные уходы платформ) могут привести к нарастающим со временем ошибкам определения координат и параметров ориентации объекта. В инерциальных системах с двумя ньютонометрами инструментальные погрешности гироскопов в первую очередь ограничивают время непрерывной работы системы, в течение которого она сохраняет заданную точность. Следует отметить, что в случае, когда инерциальная система не содержит гироскопов, а чувствительными элементами являются лишь ньютонометры, дело не меняется. В этом случае инструментальные погрешности тех ньютонометров, которые используются для определения ориентации платформы, также приводят к возрастающим со временем ошибкам определения навигационных параметров\*).

Чтобы сохранить точность инерциальных систем, применяется коррекция работы гироскопических чувствительных

---

\*) См. нашу книгу «Теория инерциальной навигации (автономные системы)», изд-во «Наука», 1966.

элементов (или заменяющих их ньютонометров). Коррекция осуществляется путем сравнения действительной и расчетной ориентаций чувствительных элементов инерциальной системы по отношению к направлениям на объекты, положение которых в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  или  $O_1\xi\eta\zeta$  известно в каждый момент времени.

Такого рода объектами могут быть прежде всего небесные тела: звезды, Солнце, планеты и Луна, а также источники мирового радиоизлучения. Объектами, по направлениям на которые осуществляется коррекция, могут быть также искусственные спутники Земли и ориентиры, расположенные на земной поверхности.

Наиболее употребительна оптическая коррекция по звездам (астрокоррекция). Схемы коррекции оказываются здесь наиболее простыми по двум причинам. Во-первых, при движении объекта вблизи Земли направления из точки текущего местоположения объекта на звезды можно считать неизменными в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , т. е. эффектами параллактического смещения и собственного движения звезд можно пренебречь. Во-вторых, при определении направлений на звезды не приходится учитывать их угловые размеры.

В дальнейшем будет рассматриваться главным образом коррекция по звездам (астрокоррекция). Но как процедура рассмотрения, так и основные результаты его без труда могут быть перенесены на другие случаи. В дальнейшем речь будет идти о коррекции гироскопических чувствительных элементов. Однако в силу сделанного выше замечания результаты рассмотрения в равной степени относятся и к безгироскопным системам.

Остановимся коротко на характере некоторых задач, которые возникают при анализе работы схем астрокоррекции.

Первая задача, с которой здесь приходится иметь дело, — это определение в заданный момент времени расчетных направлений на небесные тела. Для решения этой задачи необходимо знать движение Земли относительно звезд и принятые в астрономии способы задания направлений на небесные тела в различных системах отсчета. Вторая задача связана с изучением характера информации, которая получается при наблюдении звезд (или других небесных тел) посредством телескопов. Наряду с другими эффектами, здесь должно быть учтено отличие видимого расположения небесных тел от дей-



ствительного, возникающее вследствие скоростной аберрации из-за движения Земли по орбите и атмосферной рефракции. Кроме того, если иметь в виду коррекцию в нижних слоях атмосферы в дневное время, должны быть учтены помехи от фона рассеянной атмосферой солнечной радиации. Третьей и основной задачей является анализ динамики работы схемы астрокоррекции, изучение изменений в структуре уравнений ошибок инерциальной системы, а также исследование зависимости ошибок системы от инструментальных погрешностей.

## § 6.2. Движение Земли. Определение направлений на небесные тела в связанных с ней системах координат

**6.2.1. Упрощенное описание движения Земли.** Если пренебречь влиянием планет и Луны на движение Земли, считать Солнце неподвижной звездой, а действие притяжения Земли Солнцем считать сводящимся к силе, направленной по линии, соединяющей центр Земли с центром Солнца, то движение центра масс Земли будет подчиняться законам движения материальной точки в центральном (сферическом) поле сил \*).

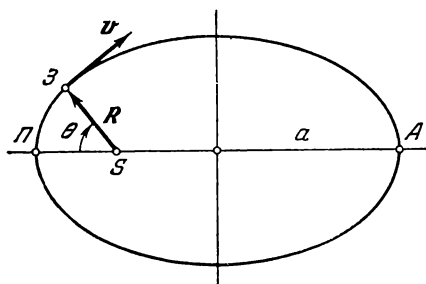


Рис. 6.1.

В соответствии с этими законами движение центра масс Земли будет происходить в плоскости, проходящей через

центр Солнца и сохраняющей неизменной свою ориентацию относительно неподвижных звезд. Эту плоскость в астрономии называют *плоскостью эклиптики* \*\*). Орбита Земли в плоскости эклиптики представляет собой эллипс (рис. 6.1), в одном из фокусов которого  $S$  расположено Солнце. Точка  $P$  эллипса, лежащая на его большой оси (линии апсид), для которой расстояние между Землей и Солнцем минимально,

\*) См., например, А п п е л ь П., Теоретическая механика, т. I, Физматгиз, 1960.

\*\*) При точном определении эклиптики учитывается влияние планет и Луны на движение центра масс Земли.

называется *перигелием* орбиты, а точка  $A$ , наиболее удаленная от Солнца, — *афелием* орбиты.

Если длину радиуса-вектора, проведенного из точки  $S$  в точку  $Z$  текущего местоположения Земли, обозначить через  $R$ , а угол, который он составляет с радиусом-вектором точки  $\Pi$ , обозначить через  $\theta$ , то уравнение рассматриваемого эллипса будет иметь вид:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (6.1)$$

где  $a$  — большая полуось орбиты Земли, а  $e$  — эксцентриситет орбиты. Численные значения этих величин равны \*):

$$a = 149,5 \cdot 10^6 \text{ км}, \quad e = 0,01675. \quad (6.2)$$

Обозначив через  $\sigma$  площадь сектора эллипса  $ZS\Pi$ , через  $P$  — период обращения Земли вокруг Солнца, а через  $t$ , как обычно, время, запишем интеграл площадей, имеющий место при движении материальной точки в центральном поле сил в такой форме (закон Кеплера):

$$\frac{\sigma}{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}} = \frac{t}{P\pi}. \quad (6.3)$$

Из равенств (6.1), (6.3) следует, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi(1 + e \cos \theta)^2}{P(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \frac{dR}{dt} = \frac{2\pi a e \sin \theta}{P(1 - e^2)^{1/2}}. \quad (6.4)$$

Поэтому скорость  $v$  движения центра масс Земли в зависимости от угла  $\theta$  выражается формулой

$$v = \frac{2\pi a}{P\sqrt{1 - e^2}} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \theta}. \quad (6.5)$$

Так как  $P = 31,558 \cdot 10^6 \text{ сек}$ , то средняя скорость движения центра масс Земли

$$v_0 = \frac{2\pi a}{P\sqrt{1 - e^2}} = 29,770 \text{ км/сек}. \quad (6.6)$$

Если в первом уравнении (6.4) пренебречь членами с  $e^2$  и высшего порядка малости по сравнению с единицей, то

---

\*) Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, Гостехиздат, 1954.

можно легко прийти к соотношению

$$\theta = \frac{2\pi}{P} t + 2e \sin \frac{2\pi}{P} t. \quad (6.7)$$

Движение Земли вокруг центра масс в вопросах навигации можно в первом приближении считать\*) сводящимся к равномерному вращению с угловой скоростью  $\omega = 7,292116 \cdot 10^{-5}$  1/сек вокруг ее оси (малой оси эллипсоида Клеро) в ту же сторону, что и орбитальное вращение. При этом ось Земли отклонена от нормали к плоскости эклиптики на угол  $\varepsilon = 23^\circ 27'$ .

### 6.2.2. Определение направлений на небесные тела.

Для определения направлений на небесные тела введем принятые в астрономии горизонтальную, экваториальную и эклиптическую системы координат.

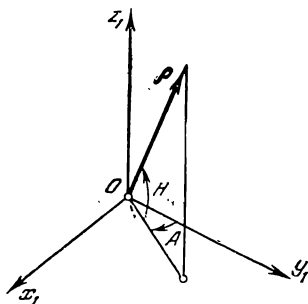


Рис. 6.2.

В качестве горизонтальной системы координат возьмем трехгранник  $Ox_1y_1z_1$ , введенный в п. 1.1.2. Если взять  $h = 0$  и пренебречь различием направлений нормали к эллипсоиду Клеро и геодезической вертикали (отвеса), то трехгранник  $Ox_1y_1z_1$  (см. рис. 1.3), грань  $Ox_1y_1$  которого касательна к земному эллипсоиду, будет совпадать с принятой в астро-

номии горизонтальной системой координат. Произвольное направление с единичным вектором  $\rho$  определим относительно трехгранника  $Ox_1y_1z_1$  углом  $H$  между этим направлением и плоскостью  $Ox_1y_1$  и углом  $A$  между проекцией вектора  $\rho$  на плоскость  $Ox_1y_1$  и осью  $Oy_1$  (рис. 6.2). Угол  $A$ , изменяющийся от 0 до  $2\pi$ , называют азимутом направления  $\rho$ . За положительное направление отсчета угла  $A$  принимается отсчет от оси  $Oy_1$  в направлении к оси  $Ox_1$ , т. е. от направления на север к направлению на восток. Угол  $H$  называется *высо-*

\*) Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, Гостехиздат, 1954. Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.

той направления  $\rho$  над горизонтом. Он изменяется от 0 до  $\pm \pi$ ; при положительном угле  $H$  направление  $\rho$  лежит над плоскостью горизонта. Если  $x_1, y_1, z_1$  — единичные векторы осей  $Ox_1, Oy_1, Oz_1$ , то

$$\rho = x_1 \cos H \sin A + y_1 \cos H \cos A + z_1 \sin H. \quad (6.8)$$

Вместо угла  $H$  употребляется также угол  $z$  между направлением  $\rho$  и осью  $Oz_1$ ; ввиду того, что ось  $Oz_1$  направлена в зенит, этот угол называется *зенитным расстоянием* направления  $\rho$ . Так как  $z = \pi/2 - H$ , то

$$\rho = x_1 \sin z \sin A + y_1 \sin z \cos A + z_1 \cos z. \quad (6.9)$$

Первую экваториальную систему координат  $O\xi_1\eta_1\xi_1$  (рис. 6.3) определим следующим образом. Ось  $O\xi_1$  напомним параллельно вектору  $u$  угловой скорости вращения Земли (вдоль оси мира). Оси  $O\xi_1$  и  $O\eta_1$  расположим в плоскости, нормальной вектору  $u$ , т. е. параллельной плоскости земного экватора, причем ось  $O\xi_1$  расположим в плоскости меридиана точки  $O$ . Произвольное направление, характеризуемое единичным вектором  $\rho$ , определим в этой системе углами  $\delta$  и  $t$ , аналогичными углам  $H$  и  $A$ .

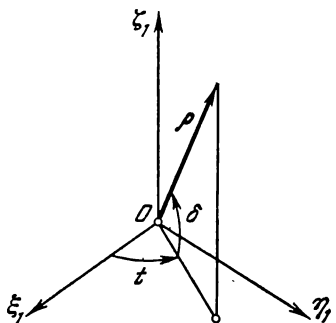


Рис. 6.3.

Угол  $\delta$ , называемый *склонением* направления  $\rho$ , меняется от 0 до  $\pm \pi/2$  и считается положительным, когда вектор  $\rho$  составляет с осью  $O\xi_1$  острый угол. Вместо угла  $\delta$  употребляется также его дополнение до  $\pi/2$  — *полярное расстояние*  $p$ .

Угол  $t$  называется *часовым углом* направления  $\rho$ . Он изменяется от 0 до  $2\pi$ . За положительное направление его отсчета принимается направление, обратное направлению вращения Земли, т. е. угол  $t$  отсчитывается от оси  $O\xi_1$  к отрицательному направлению оси  $O\eta_1$ . Угол  $t$  часто удобно измерять не в градусной или радианной, а в часовой мере от 0 до  $24^h$ .

Таким образом, в системе координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$

$$\rho = \xi_1 \cos \delta \cos t - \eta_1 \cos \delta \sin t + \zeta_1 \sin \delta \quad (6.10)$$

или

$$\rho = \xi_1 \sin p \cos t - \eta_1 \sin p \sin t + \zeta_1 \cos p, \quad (6.11)$$

где  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  — орты соответствующих осей.

Заметим, что системы координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  и  $Ox_1y_1z_1$  меняют свою ориентацию относительно удаленных звезд как вследствие вращения Земли, так и при перемещении точки  $O$  вблизи земной поверхности, причем система  $Ox_1y_1z_1$  меняет, очевидно, ориентацию как при изменении обеих географических координат  $\varphi'$  и  $\lambda$  точки  $O$ , так и при неизменных  $\varphi'$  и  $\lambda$  с течением времени. Система же  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  — только при изменении долготы  $\lambda$  точки  $O$  и времени.

Переход от системы координат  $Ox_1y_1z_1$  к системе координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  осуществляется посредством таблицы направляющих косинусов:

	$\xi_1$	$\eta_1$	$\zeta_1$	
$x_1$	0	1	0	
$y_1$	$-\sin \varphi'$	0	$\cos \varphi'$	(6.12)
$z_1$	$\cos \varphi'$	0	$\sin \varphi'$ .	

Перейдем, например, от углов  $\delta$  и  $t$  к углам  $H$  и  $A$ . Из таблицы (6.12) и соотношения (6.10) имеем:

$$\rho = -x_1 \cos \delta \sin t + y_1 (-\sin \varphi' \cos \delta \cos t + \cos \varphi' \sin \delta) + z_1 (\cos \varphi' \cos \delta \cos t + \sin \varphi' \sin \delta). \quad (6.13)$$

Сравнение с равенством (6.8) дает формулы перехода:

$$\left. \begin{aligned} \cos H \sin A &= -\cos \delta \sin t, \\ \cos H \cos A &= -\sin \varphi' \cos \delta \cos t + \cos \varphi' \sin \delta, \\ \sin H &= \cos \varphi' \cos \delta \cos t + \sin \varphi' \sin \delta. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Для определения второй экваториальной и эклиптической систем координат проведем через точку  $O$  кроме плоскости, параллельной земному экватору, еще плоскость, параллельную плоскости эклиптики. Если плоскость орбиты Земли и направление вектора угловой скорости ее вращения считать неизменно ориентированными относительно удаленных звезд,

то плоскости, параллельные плоскостям экватора и эклиптики, пересекутся по некоторой прямой, проходящей через точку  $O$  и также неизменно ориентированной в звездном пространстве. Введем единичный вектор  $\mathbf{l}$  нормали к плоскости орбиты Земли так, чтобы вращение Земли вокруг Солнца происходило против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{l}$ . Тогда, очевидно, угловая скорость  $\dot{\theta}$  будет направлена вдоль  $\mathbf{l}$ , а вектор  $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$  — вдоль прямой, по которой плоскость эклиптики пересекается с плоскостью экватора.

Теперь вторую экваториальную систему координат  $O\xi_2\eta_2\xi_2$  (рис. 6.4) можно определить таким образом. Ось  $O\xi_2$  направим вдоль вектора  $\mathbf{u}$  угловой скорости вращения Земли, ось  $O\xi_2$  — вдоль вектора  $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$ , ось  $O\eta_2$  пусть дополняет оси  $O\xi_2$  и  $O\xi_2$  до правой ортогональной тройки. Плоскость  $O\xi_2\eta_2$  этой

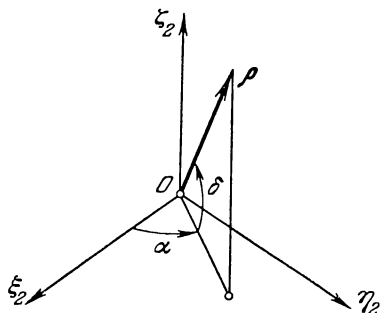


Рис. 6.4.

системы координат параллельна плоскости экватора. Направление оси  $O\xi_2$  можно назвать *направлением весеннего равноденствия*\*). Когда Земля, совершая движение вокруг Солнца, занимает такое положение, что ориентация радиуса-вектора  $\mathbf{R}$ , направленного от Солнца к Земле, противоположна ориентации оси  $O\xi_2$ , ось Земли становится, очевидно, нормальной к радиусу-вектору  $\mathbf{R}$  и в северном полушарии происходит астрономическая смена времени года: зима сменяется весной. Это обстоятельство и объясняет название направления вектора  $\mathbf{u} \times \mathbf{l}$ .

Произвольное направление  $\rho$  задается во второй экваториальной системе координат (рис. 6.4) углом  $\delta$  между направлением  $\rho$  и плоскостью  $O\xi_2\eta_2$  и углом  $\alpha$  между осью  $O\xi_2$  и проекцией вектора  $\rho$  на плоскость  $O\xi_2\eta_2$ . Угол склонения  $\delta$  имеет тот же смысл, что и в первой экваториальной системе координат. Угол  $\alpha$  называется *прямым восхождением*. Он

\*) В сферической астрономии это направление называется обычно направлением *на точку* весеннего равноденствия.

изменяется от 0 до  $2\pi$  и положительным направлением его отсчета считается отсчет от оси  $O\xi_2$  к оси  $O\eta_2$ . Угол  $\alpha$ , как и часовой угол  $t$ , измеряется не только в градусной и радианной, но также и в часовой мере от 0 до  $24^h$ .

Обозначив через  $\xi_2$ ,  $\eta_2$ ,  $\zeta_2$  единичные векторы направлений осей  $O\xi_2$ ,  $O\eta_2$ ,  $O\zeta_2$ , будем иметь:

$$\rho = \xi_2 \cos \delta \cos \alpha + \eta_2 \cos \delta \sin \alpha + \zeta_2 \sin \delta. \quad (6.15)$$

Если обозначить через  $s$  угол между осью  $O\xi_2$  и осью  $O\xi_1$  первой экваториальной системы, то, очевидно,

$$s = \alpha + t. \quad (6.16)$$

Величина  $s$  численно равна, как это будет ясно из дальнейшего, звездному времени на меридиане оси  $O\xi_1$ .

Взаимное расположение систем координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  и  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  определяется следующей таблицей направляющих косинусов:

	$\xi_2$	$\eta_2$	$\zeta_2$	
$\xi_1$	$\cos s$	$-\sin s$	0	(6.17)
$\eta_1$	$\sin s$	$\cos s$	0	
$\zeta_1$	0	0	1.	

Таблица (6.17) совместно с равенствами (6.15), (6.16) позволяет перейти от координат  $t$  и  $\delta$  к координатам  $\alpha$  и  $\delta$  и наоборот. Формулы перехода получаются таким же образом, каким были получены формулы (6.14) перехода от углов  $\delta$  и  $t$  к углам  $H$  и  $A$ .

Определим эклиптическую систему координат  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$ . Начало ее, как и в предыдущих случаях, поместим в точку  $O$  текущего местоположения объекта, ось  $O\zeta_3$  направим вдоль нормали  $l$  к плоскости эклиптики, ось  $O\xi_3$  совместим с осью  $O\xi_2$ . Положение оси  $O\eta_3$  определится тогда однозначно. Так как угол между плоскостями экватора и эклиптики обозначен через  $\varepsilon$ , то направляющие косинусы углов между осями систем координат  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  образуют следующую таблицу:

	$\xi_3$	$\eta_3$	$\zeta_3$	
$\xi_2$	1	0	0	(6.18)
$\eta_2$	0	$\cos \varepsilon$	$-\sin \varepsilon$	
$\zeta_2$	0	$\sin \varepsilon$	$\cos \varepsilon$ .	

Произвольное направление  $\rho$  определяется в системе координат  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  широтой  $B$  и долготой  $L$ , аналогичными геоцентрическим координатам  $\varphi$  и  $\lambda$ . Поэтому

$$\rho = \xi_3 \cos B \cos L + \eta_3 \cos B \sin L + \zeta_3 \sin B. \quad (6.19)$$

В отличие от систем координат  $Ox_1y_1z_1$  и  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  системы  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  ориентированы в звездном пространстве неизменно. Поэтому направления на удаленные звезды в этих системах неизменны, а следовательно, координаты  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $B$ ,  $L$  этих направлений постоянны.

В астрономических справочниках (ежегодниках) направления на небесные тела задаются обычно на начало астрономического года координатами  $\alpha$ ,  $\delta$  или  $B$ ,  $L$  во второй экваториальной или эклиптической системах координат. Зная эти координаты, с помощью таблиц (6.17), (6.12) можно перейти к координатам небесных тел в первой экваториальной и горизонтальной системах координат, а с помощью соответствующих таблиц направляющих косинусов — к координатам направлений на небесные тела относительно любой другой системы координат, положение которой по отношению к Земле в заданный момент времени известно, например по отношению к системе координат, жестко связанной с платформой инерциальной системы. Это позволяет нужным образом установить по отношению к осям платформы оси визирующих устройств (телескопов) системы астрокоррекции.

Здесь необходимо иметь еще в виду следующие обстоятельства. Мы предполагали выше, что ориентация второй экваториальной и эклиптической систем координат неизменна по отношению к направлениям на неподвижные звезды. Это связано с предположением о неизменности ориентации оси вращения Земли и плоскости ее орбиты (плоскости эклиптики).

В действительности эти предположения выполняются лишь в первом приближении. Так, ориентация мгновенной оси вращения Земли в звездном пространстве не остается неизменной. Главной причиной этого является то обстоятельство, что притяжение Земли Солнцем и Луной сводится не только к результирующим силам, направленным по линиям, соединяющим центр масс Земли с центрами масс Солнца и Луны, но и к результирующим моментам относительно центра масс Земли. Возникновение этих моментов обусловлено сжатием Земли, т. е. асимметрией распределения масс Земли относительно



направлений, соединяющих ее центр с центрами масс Солнца и Луны. Векторы результирующих моментов сил притяжения Солнца и Луны лежат в плоскости земного экватора и стремятся совместить эту плоскость соответственно с плоскостью эклиптики и плоскостью лунной орбиты. Действие этих моментов приводит к прецессии вектора угловой скорости вращения Земли относительно нормали к плоскости эклиптики по конусу с углом при вершине  $2\varepsilon$  с периодом, приблизительно равным 26 000 годам, и к нутации с основным периодом около 18,6 года, приводящей к периодическому изменению наклона эклиптики к плоскости экватора на угол  $\Delta\varepsilon$  ( $\approx 10''$ ).

Далее, вследствие возмущающего воздействия планет плоскость орбиты Земли также не остается в звездном пространстве неизменной, как это было нами принято выше. Она вращается вокруг оси, лежащей в плоскости орбиты, со скоростью, имеющей в настоящую эпоху величину порядка  $47''$  в столетие. Это вращение приводит к медленному изменению (уменьшению в настоящую эпоху) угла  $\varepsilon$ . Кроме того, вследствие движения Луны и Земли вокруг общего центра масс плоскость орбиты Земли уклоняется от плоскости эклиптики, вблизи которой происходит движение центра масс системы Земля — Луна, на величину порядка  $1''$ .

Вращение плоскости эклиптики, прецессия и нутация вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли приводят к тому, что ориентация введенных нами выше эклиптической и второй экваториальной систем координат не сохраняется неизменной относительно направлений на неподвижные звезды. Вследствие этого координаты направлений на небесные тела, если задать их в предположении неизменной ориентации трехгранников  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$ , будут содержать ошибки. Если направления на эти тела использовать для коррекции инерциальной системы, то появятся соответствующие ошибки определения координат объекта.

Очевидно, что вращением плоскости эклиптики ( $\approx 0'',5$  в год), эффектом движения Земли относительно центра масс системы Луна — Земля ( $\approx 0'',1$ ) и нутацией ( $0'',5$  в год от длиннопериодической и столько же от короткопериодической) в вопросах навигации можно пренебречь, если иметь в виду точность определения местоположения порядка одного километра. Это следует уже из того, что погрешности определения координат объекта не превысят сумму перечисленных величин

и тогда, когда положение систем координат  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  взято на начало астрономического года, а отнесено к любому времени в течение года.

Прецессия оси вращения Земли дает в этом случае существенную погрешность, ибо она приводит к изменению ориентации вектора угловой скорости вращения Земли (а следовательно, оси  $O\xi_2$ ) приблизительно на  $20''$  в год и повороту направления весеннего равноденствия, т. е. оси  $O\xi_2$  ( $O\xi_3$ ), на  $50''$  в год в плоскости эклиптики. Погрешности определения координат будут иметь ту же величину. Поэтому эффект прецессии должен учитываться в том смысле, что ориентация систем координат  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  должна браться на момент начала работы системы астрокоррекции либо близко к этому моменту. Так как длительность непрерывной работы системы навигации относительно непродолжительна и, по-видимому, не будет в большинстве случаев превышать величины порядка одного месяца, то накопление ошибок не превысит тогда величины порядка  $5''$ . Заметим, что если говорить об удаленных звездах, то изменение направлений на них в системах координат  $O\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O\xi_3\eta_3\zeta_3$  связано, разумеется, с определением самих этих систем координат и заданием положения звезд именно в этих системах, а не с изменением положения направлений на звезды в пространстве. Изменения углов между направлениями на удаленные звезды (за счет собственного движения звезд и их параллактического смещения) либо вовсе не наблюдаются, либо эти изменения исчезающе малы ( $\approx 1''$ ).

Отметим еще, что в расчетах, связанных с астрокоррекцией инерциальных систем, следует различать координаты действительного и видимого положений небесных тел. Они различаются на величину абберации, вызванной движением Земли по орбите. Постоянная годичной абберации, определяемая отношением скорости движения Земли по орбите к скорости света, равна  $\approx 20''$ . Если не вводить поправки на эффект абберации и использовать видимые координаты звезд, то их надо брать на момент начала коррекции. В самом деле, если в момент начала астрокоррекции (или начала работы системы) определены видимые (кажущиеся) направления на звезды, используемые для астрокоррекции, то изменения этих направлений из-за годичной абберации не превзойдут в течение последующего месяца величины  $\approx 10''$ , так как изменение направления вектора скорости Земли относительно звезд за месяц

составляет величину порядка  $\pi/6$ . Несколько меньше величина погрешности аберрации из-за суточного вращения Земли и из-за перемещения объекта относительно земной поверхности. Даже если скорость объекта приближается к первой космической, величина аберрации остается здесь меньшей  $5''$ .

В заключение остановимся еще на эффекте параллактического смещения. Если коррекция осуществляется по звездам, то явление параллакса и собственные движения звезд можно не учитывать, ибо последние пренебрежимо малы, а величина годичного параллакса для звезд не превосходит  $1''$ . Суточные параллаксы имеют значение только при коррекции по Солнцу, планетам, Луне и, разумеется, искусственным спутникам Земли. Для Солнца суточным параллаксом ( $\approx 8''$ ) можно еще пренебречь. Суточный параллакс близких планет может достигать  $1'$ , а суточный параллакс Луны уже имеет величину порядка  $2^\circ$  и должен учитываться достаточно точно. При использовании для астрокоррекции направлений на искусственные спутники Земли параллактическое смещение, как нетрудно понять, является одним из основных эффектов, которые необходимо учитывать при определении направлений на них.

**6.2.3. Движение Земли и измерение времени.** Соотношением (6.16) нами было введено звездное время  $s$ . Ввиду важности понятия времени в расчетах, связанных с астрокоррекцией, остановимся на нем подробнее.

Если считать, что угловая скорость вращения Земли относительно удаленных звезд постоянна по величине, то в качестве единицы времени естественно взять *звездные сутки* — время одного оборота Земли по отношению к звездам. Начало местных звездных суток относится к моменту совпадения осей  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$  первой и второй экваториальных систем, т. е. к моменту прохождения направления весеннего равноденствия через меридиан точки места наблюдения. Именно вследствие этого звездное время и определено формулой (6.16). Очевидно, что если  $s_1$  и  $s_2$  суть значения звездного времени на двух различных меридианах  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для одного и того же момента времени, то разность звездного времени численно равна разности долгот, взятой с обратным знаком:

$$s_1 - s_2 = \lambda_2 - \lambda_1. \quad (6.20)$$

Для практического применения удобнее оказывается не звездное, а солнечное время. Единицей истинного солнечного времени—*солнечными сутками* называется время между двумя последовательными совмещениями радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  (рис. 6.1) с плоскостью фиксированного земного меридиана. За меру истинного солнечного времени в некоторой точке  $O$  принимается угол между проекцией радиуса-вектора  $\mathbf{R}$  на плоскость земного экватора и линией пересечения плоскости экватора с плоскостью меридиана точки  $O$ . Вследствие того, что векторы  $\mathbf{l}$  и  $\mathbf{u}$  составляют острый угол  $\pi/2 - \varepsilon$ , солнечные сутки длиннее звездных.

Рассмотрим ход истинного солнечного времени на меридиане, который совпадает с направлением —  $\mathbf{R}$  в момент прохождения Землей перигелия орбиты. Перенесем начала введенных ранее двух экваториальных и эклиптической систем координат из точки  $O$  в центр Земли  $O_1$  и обозначим их в этом случае соответственно через  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ ,  $O_1\xi_2\eta_2\zeta_2$ ,  $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$ . Если  $\omega$  — долгота перигелия в системе координат  $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$ , то, обозначив через  $\mathbf{R}_0$  единичный вектор направления  $\mathbf{R}$ , получим для его определения равенство

$$-\mathbf{R}_0 = -\xi_1 \cos(\omega + \theta) - \eta_1 \sin(\omega + \theta). \quad (6.21)$$

Таблица направляющих косинусов между осями систем координат  $O_1\xi_2\eta_2\zeta_2$  и  $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$  приобретает вид:

	$\xi_3$	$\eta_3$	$\zeta_3$	
$\xi_2$	$\cos(\chi + ut)$	$\sin(\chi + ut)$	0	(6.22)
$\eta_2$	$-\sin(\chi + ut)$	$\cos(\chi + ut)$	0	
$\zeta_2$	0	0	1.	

Здесь  $u$  — угловая скорость вращения Земли относительно звезд,  $t$  — звездное время\*), отсчитываемое от момента прохождения Землей перигелия, а угол  $\chi$  определяется из условия совмещения плоскости меридиана с направлением —  $\mathbf{R}_0$  в начальный момент:

$$\operatorname{tg} \chi = \cos \varepsilon \operatorname{tg} \omega. \quad (6.23)$$

---

\*) Величина  $t$  пропорциональна  $s$ , и коэффициентом пропорциональности является, очевидно, угловая скорость  $u$  вращения Земли относительно звезд.

Наряду с формулой (6.21) для определения единичного вектора  $-\mathbf{R}_0$  в системе координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  имеем, согласно соотношению (6.10), выражение

$$-\mathbf{R}_0 = \xi_1 \cos \delta_\odot \cos T - \eta_1 \cos \delta_\odot \sin T + \zeta_1 \sin \delta_\odot, \quad (6.24)$$

где  $\delta_\odot$  — склонение Солнца, а  $T$  — часовой угол Солнца, т. е. измеренное в угловых единицах истинное солнечное время.

Приравнявая теперь составляющие вектора  $-\mathbf{R}_0$  по осям  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , вытекающие из равенства (6.24), и составляющие, полученные из формулы (6.19) при переходе с помощью таблиц (6.22), (6.17) от системы координат  $O_1\xi_3\eta_3\zeta_3$  к системе  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ , находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta_\odot \cos T &= -\cos(\omega + \theta) \cos(\chi + ut) - \\ &\quad - \cos \varepsilon \sin(\chi + ut) \sin(\omega + \theta), \\ \cos \delta_\odot \sin T &= -\cos(\omega + \theta) \sin(\chi + ut) + \\ &\quad + \cos \varepsilon \cos(\chi + ut) \sin(\omega + \theta), \\ \sin \delta_\odot &= -\sin \varepsilon \sin(\omega + \theta). \end{aligned} \right\} \quad (6.25)$$

Поделив второе равенство (6.25) на первое, придем к формуле

$$\operatorname{tg} T = \frac{\operatorname{tg}(\chi + ut - \omega - \theta) + \frac{(1 - \cos \varepsilon) \cos(\chi + ut) \sin(\omega + \theta)}{\cos(\chi + ut - \omega - \theta)}}{1 - \frac{(1 - \cos \varepsilon) \sin(\chi + ut) \sin(\omega + \theta)}{\cos(\chi + ut - \omega - \theta)}}. \quad (6.26)$$

Сохраняя в этой формуле лишь члены первого порядка малости относительно  $(1 - \cos \varepsilon)$  и используя формулу (6.23) и приближенное выражение (6.7) для  $\theta(t)$ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} T &= \left(u - \frac{2\pi}{P}\right)t - 2e \sin \frac{2\pi}{P}t + \\ &\quad + \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\left(\omega + \frac{2\pi}{P}t\right) - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin 2\omega. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Это соотношение, называемое уравнением времени\*), с точностью до принятых упрощений связывает ход звездного и истинного солнечного времени.

---

\*) Б л а ж к о С. Н., Курс сферической астрономии, Гостехиздат, 1954.

Из соотношения (6.27) следует, что ход истинного солнечного времени неравномерен. По этой причине для практического применения вместо него вводится *среднее солнечное* время, связь которого со звездным определяется первым слагаемым правой части равенства (6.27). Если задать отличные от нуля начальные условия, то зависимость *часового угла*  $T$  среднего Солнца от звездного времени  $t$  запишется следующим образом:

$$T - T_0 = \left(u - \frac{2\pi}{P}\right)(t - t_0), \quad (6.28)$$

где  $T_0$  — часовой угол среднего Солнца на рассматриваемом меридиане, соответствующий звездному времени  $t_0$ . Равенство (6.28) задавало бы солнечное время точно, если бы Земля двигалась вокруг Солнца с постоянной скоростью по круговой орбите ( $e=0$ ), а ось вращения Земли была бы нормальна плоскости орбиты ( $\varepsilon=0$ ). Именно этим объясняется название определенного равенством (6.28) угла  $T$  часовым углом среднего Солнца.

За единицу измерения звездного времени  $t$  берутся звездные сутки, т. е. время одного оборота Земли относительно звезд. Тогда численно  $u=2\pi$ , а  $P$  — количество звездных суток в году. За единицу измерения среднего солнечного времени  $\tau$  берутся средние солнечные сутки, так что

$$T - T_0 = 2\pi(\tau - \tau_0). \quad (6.29)$$

Подставляя это равенство в равенство (6.28) и учитывая, что  $u=2\pi$ , получаем:

$$\tau - \tau_0 = \frac{P-1}{P}(t - t_0), \quad (6.30)$$

где  $\tau_0$  и  $t_0$  — соответствующие начальные значения.

Пусть  $Q$  — количество средних солнечных суток в году. Так как Земля совершает за год относительно звезд на один оборот больше, чем относительно Солнца, то

$$Q = P - 1 = 365,2422, \quad (6.31)$$

и формулу (6.30) можно переписать так:

$$\tau - \tau_0 = \frac{Q}{Q+1}(t - t_0). \quad (6.32)$$

Формула (6.32) дает связь звездного и среднего солнечного времени в некоторый момент на заданном меридиане. Для двух различных меридианов  $\lambda_2 > \lambda_1$  и двух различных моментов времени (1) и (2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} t_{(1)}^{\lambda_1} &= t_{(1)0}^{\lambda_1} + \frac{Q+1}{Q} [\tau_{(1)}^{\lambda_1} - \tau_{(1)0}^{\lambda_1}], \\ t_{(2)}^{\lambda_2} &= t_{(2)0}^{\lambda_2} + \frac{Q+1}{Q} [\tau_{(2)}^{\lambda_2} - \tau_{(2)0}^{\lambda_2}]. \end{aligned} \right\} \quad (6.33)$$

Так как для одного меридиана

$$t_{(2)}^{\lambda_1,2} - t_{(1)}^{\lambda_1,2} = \frac{Q+1}{Q} [\tau_{(2)}^{\lambda_1,2} - \tau_{(1)}^{\lambda_1,2}], \quad (6.34)$$

а для одного момента времени

$$t_{(1),(2)}^{\lambda_2} - t_{(1),(2)}^{\lambda_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\pi}, \quad (6.35)$$

то

$$t_{(2)}^{\lambda_2} = t_{(1)0}^{\lambda_1} - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\pi} + \frac{Q+1}{Q} [\tau_{(2)}^{\lambda_2} - \tau_{(1)0}^{\lambda_1}]. \quad (6.36)$$

Последняя формула определяет звездное время  $t_{(2)}^{\lambda_2}$  в некоторый момент времени для меридиана  $\lambda_2$  по среднему солнечному времени  $\tau_{(2)}^{\lambda_2}$  для этого момента на заданном меридиане  $\lambda_2$  и по звездному и солнечному времени  $t_{(1)0}^{\lambda_1}$  и  $\tau_{(1)0}^{\lambda_1}$  для другого момента времени на другом меридиане ( $\lambda_1$ ). Обычно в качестве меридиана  $\lambda_1$  берется гринвичский меридиан. Если  $t_{(1)0}^{\lambda_1}$  — звездное время на гринвичском меридиане в среднюю полночь, то, очевидно,  $\tau_{(1)0}^{\lambda_1} = 0$ .

**6.2.4. Определение местоположения на Земле посредством астрономических наблюдений.** Отыскание направлений на небесные тела относительно трехгранника  $Ox_1y_1z_1$  в определенные (фиксированные) моменты времени издавна используется в навигации, геодезии и картографии для нахождения координат точки  $O$  на земной поверхности.

Принцип определения широты  $\varphi'$  следует из соотношений (6.14). Если измерить высоту  $H$  направления на небесное тело в момент верхней кульминации, т. е. когда  $t = 0$ , и считать, что склонение  $\delta$  известно в момент наблюдения

(для удаленной звезды  $\delta = \text{const}$ ), то из третьей формулы (6.14) следует, что

$$\sin H = \cos(\varphi' - \delta), \quad (6.37)$$

причем при  $t = 0$  направление на светило лежит в плоскости  $Oy_1z_1$ , так как  $\sin A = 0$ .

Задача определения долготы  $\lambda$  сводится, очевидно, к сопоставлению местного времени (безразлично какого: звездного, истинного или среднего солнечного) со временем на некотором исходном меридиане в один и тот же физический момент, так как разница во времени на двух различных меридианах в один и тот же момент равна разности долгот этих меридианов.

Если измерить высоты  $H_1$  и  $H_2$  над горизонтом двух небесных тел и зная звездное время  $s_1$  и  $s_2$  на гринвичском меридиане в моменты замеров, то можно определить (способ Сомнера) одновременно широту и долготу. В самом деле, из последнего равенства (6.14), соотношения (6.16), связывающего прямое восхождение  $\alpha$  и часовой угол  $t$  с местным звездным временем  $s$ , и из того обстоятельства, что разница между местным и гринвичским звездным временем равна долготе места, следует система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sin H_1 &= \sin \varphi' \sin \delta_1 + \cos \varphi' \cos \delta_1 \cos(s_1 - \alpha_1 + \lambda), \\ \sin H_2 &= \sin \varphi' \sin \delta_2 + \cos \varphi' \cos \delta_2 \cos(s_2 - \alpha_2 + \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Уравнения (6.38) представляют собой уравнения в координатах  $\varphi'$  и  $\lambda$  двух линий равных высот, соответствующих замеренным высотам  $H_1$  и  $H_2$ . Легко видеть, что система уравнений (6.38) имеет две пары решений. Выбор нужной пары предполагает знание приблизительных координат определяемого места. При достаточно большой разнице между высотами  $H_1$  и  $H_2$  это обстоятельство не вносит дополнительных затруднений.

### § 6.3. Коррекция инерциальной системы по двум звездам

**6.3.1. Информация, получаемая при наблюдении звезд посредством телескопов. Возможные способы астрокоррекции.** Основным элементом схемы астрокоррекции является телескоп, с помощью которого определяется направление на звезду. Выясним поэтому прежде всего характер той



информации, которая может быть получена в результате наблюдения звезды в телескоп, установленный на платформе инерциальной системы.

Пусть основой инерциальной системы является свободная гиросtabilизированная платформа, с которой (рис. 6.5) жестко

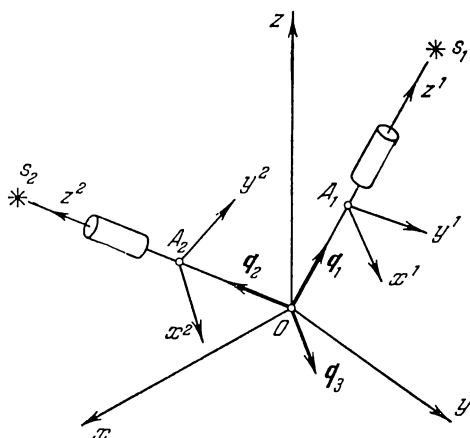


Рис. 6.5.

связан трехгранник  $Qxyz$ . Пусть с платформой жестко связаны два телескопа, направления оптических осей которых характеризуются единичными векторами  $q_1$  и  $q_2$ , занимающими неизменное положение по отношению к трехграннику  $Oxyz$ . Введем следующие координатные трехгранники. Косоугольный трехгранник  $q_1q_2q_3$  с вершиной в точке  $O$ , образованный единичными векторами  $q_1$ ,  $q_2$  направлений оптических осей телескопов и единичным вектором  $q_3$ , нормальным этим направлениям:

$$q_3 = \frac{q_1 \times q_2}{\sin B}, \quad (6.39)$$

где  $B$  — угол между направлениями  $q_1$  и  $q_2$ , и поэтому

$$\cos B = q_1 \cdot q_2. \quad (6.40)$$

Трехгранник  $q_1q_2q_3$  будем называть в дальнейшем основным.

Введем также трехгранник  $q^1 q^2 q^3$ , взаимный с трехгранником  $q_1 q_2 q_3$ , так что

$$\left. \begin{aligned} q^1 &= \frac{1}{v} q_2 \times q_3, & q^2 &= \frac{1}{v} q_3 \times q_1, \\ q^3 &= \frac{1}{v} q_1 \times q_2, & v &= (q_1 \times q_2) \cdot q_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Подставив в равенства (6.41) выражение для  $q_3$  из (6.39) и используя соотношение (6.40), найдем:

$$\left. \begin{aligned} q^1 &= \frac{1}{\sin^2 B} (q_1 - q_2 \cos B), \\ q^2 &= \frac{1}{\sin^2 B} (q_2 - q_1 \cos B), & q^3 &= q_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

По определению векторов  $q_1, q_2, q_3$  и  $q^1, q^2, q^3$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} q_s \cdot q^k &= 0 \quad \text{при } s \neq k, \\ q_s \cdot q^s &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Введем также правые ортогональные трехгранники  $A_1 x^1 y^1 z^1$  и  $A_2 x^2 y^2 z^2$ , связанные с фокальными плоскостями телескопов. Их начала  $A_1$  и  $A_2$  пусть находятся на осях телескопов  $q_1$  и  $q_2$ , оси  $z^1$  и  $z^2$  направлены вдоль осей телескопов, а плоскости  $A_1 x^1 y^1$  и  $A_2 x^2 y^2$  совпадают с фокальными плоскостями соответственно первого и второго телескопов. Расположим оси  $y^1$  и  $y^2$  в плоскости векторов  $q_1, q_2$ , тогда оси  $x^1, x^2$  окажутся нормальными этой плоскости.

Если  $x^1, y^1, z^1$  и  $x^2, y^2, z^2$  — единичные векторы осей  $x^1, y^1, z^1$  и  $x^2, y^2, z^2$ , то очевидны равенства:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x^2 = q_3 = q^3, \\ y^1 &= -\sin B q^2, & y^2 &= \sin B q^1, \\ z^1 &= q_1, & z^2 &= q_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

Пусть начальная ориентация платформы и направлений  $q_1, q_2$  выбрана так, что направления осей телескопов  $q_1, q_2$  в начальный момент точно совпадают с направлениями на две звезды  $s_1$  и  $s_2$ . Тогда изображения звезд будут находиться в фокальных плоскостях телескопов в точках  $A_1$  и  $A_2$ , т. е. на оптических осях телескопов. Если гиросtabilизированная платформа идеальна, т. е. сохраняет неизменной свою ориентацию в пространстве, то, очевидно, и в течение всего

дальнейшего времени изображения звезд будут находиться в точках  $A_1$  и  $A_2$ .

Пусть теперь гироскопы имеют свободные уходы, тогда платформа и связанный с ней трехгранник  $Oxyz$  будут менять свою ориентацию по отношению к своему начальному положению, которое мы обозначим через  $Ox^*y^*z^*$ . Направления осей телескопов  $q_1, q_2$  отклонятся при этом от направлений на звезды  $s_1, s_2$ , а изображения звезд в фокальной плоскости займут некоторые положения, характеризуемые координатами  $x^1, y^1$  и  $x^2, y^2$ .

Величины  $x^1, y^1$  и  $x^2, y^2$  могут быть индцированы с помощью фоточувствительных элементов, расположенных в фокальных плоскостях телескопов, и будут являться той информацией, которую дает наблюдение звезд. Эти величины являются, очевидно, мерой отклонения платформы от ее начального положения.

Пусть  $(-\theta)$ , как и раньше, есть вектор малого угла поворота платформы относительно ее начального положения. Этот же вектор характеризует, очевидно, отклонения трехгранников  $x^1y^1z^1$  и  $x^2y^2z^2$  от их начальных положений  $x^{1*}y^{1*}z^{1*}$ ,  $x^{2*}y^{2*}z^{2*}$ . Сдвиги  $x^1, y^1$  и  $x^2, y^2$  изображений звезд  $s_1$  и  $s_2$  в фокальных плоскостях телескопов пропорциональны проекциям  $\theta_{y^1}, \theta_{x^1}, \theta_{y^2}, \theta_{x^2}$  вектора  $\theta$  на соответствующие оси:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= a\theta_{y^1}, & y^1 &= -a\theta_{x^1}, \\ x^2 &= a\theta_{y^2}, & y^2 &= -a\theta_{x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

где  $a$  — коэффициент пропорциональности.

Из соотношений (6.45) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{y^1} &= \theta \cdot q^2 \sin B = \theta^2 \sin B, & \theta_{x^1} &= \theta \cdot q^3 = \theta^3, \\ \theta_{y^2} &= \theta \cdot q^1 \sin B = \theta^1 \sin B, & \theta_{x^2} &= \theta \cdot q^3 = \theta^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.46)$$

Здесь  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$  — контравариантные составляющие вектора  $\theta$  по векторам  $q_1, q_2, q_3$ , так что

$$\theta = q_s \theta^s, \quad (6.47)$$

где по индексу  $s$  ведется суммирование от 1 до 3.

Из соотношений (6.45), (6.46) следует, что знание координат  $x^1, y^1, x^2, y^2$  смещенного положения изображения звезд в фокальных плоскостях телескопов равносильно знанию

контравариантных составляющих вектора  $\theta$  ухода \*) гиростабилизированной платформы по векторам  $q_1, q_2, q_3$ :

$$\theta^1 = \frac{x^2}{a \sin B}, \quad \theta^2 = -\frac{x^1}{a \sin B}, \quad \theta^3 = -\frac{y^1}{a} = -\frac{y^2}{a}. \quad (6.48)$$

Вектор ухода  $\theta$  представляется при этом, согласно равенствам (6.47), (6.48), двумя равнозначными выражениями

$$\left. \begin{aligned} \theta &= q_1 \frac{x^2}{a \sin B} - q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - q_3 \frac{y^1}{a}, \\ \theta &= q_1 \frac{x^2}{a \sin B} - q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - q_3 \frac{y^2}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Отсюда вытекает, что одновременное определение координат  $y^1$  и  $y^2$  избыточно: достаточно определять лишь одну из них.

Представление (6.49) дает возможность найти по известным  $x^1, y^1, x^2, y^2$  проекции  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  вектора ухода  $\theta$  на оси стабилизированной платформы. Из первого равенства (6.49) получаем, например:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= x \cdot q_1 \frac{x^2}{a \sin B} - x \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - x \cdot q_3 \frac{y^1}{a}, \\ \theta_y &= y \cdot q_1 \frac{x^2}{a \sin B} - y \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - y \cdot q_3 \frac{y^1}{a}, \\ \theta_z &= z \cdot q_1 \frac{x^2}{a \sin B} - z \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - z \cdot q_3 \frac{y^1}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

Аналогичные выражения получаются и из второго равенства (6.49). В формулы (6.50) входят скалярные произведения ортов  $x, y, z$  осей стабилизированной платформы на единичные векторы  $q_1, q_2, q_3$ , т. е. направляющие косинусы углов между векторами  $q_1, q_2, q_3$  и осями  $x, y, z$ . Эти направляющие косинусы известны. В случае стабилизированной платформы, когда  $q_1, q_2$ , а следовательно, и  $q_3$  ориентированы неизменно по отношению к ней, указанные направляющие косинусы постоянны.

Перейдем к рассмотрению случая, когда кинематической основой инерциальной системы является не свободная, а управляемая гиростабилизированная платформа (или гирорама).

---

\*) Здесь и далее вектор  $\theta$  называется вектором ухода лишь для краткости; на самом деле вектором ухода является вектор  $(-\theta)$ .

Этот случай представляется на первый взгляд существенно более сложным, чем предыдущий. Такое впечатление вызвано тем, что теперь трехгранник  $Oxuz$ , связанный с платформой управляемой гироскопы, меняет свою ориентацию по отношению к направлениям на звезды. Поэтому направления  $q_1, q_2$  не могут оставаться жестко связанными с платформой. Ориентация этих направлений по отношению к осям платформы должна быть функцией изменения ориентации самой платформы по отношению к осям  $\xi_*, \eta_*, \zeta_*$  или, что все равно, по отношению к направлениям на удаленные звезды. Так как изменение ориентации платформы по отношению к осям  $\xi_*, \eta_*, \zeta_*$  зависит от координат, определяемых инерциальной системой, то и положение осей телескопов относительно платформы должно зависеть от этих координат.

Координаты определяются инерциальной системой с ошибками, которые являются не только функцией погрешностей гироскопических элементов, но и остальных элементов, в частности ньютометров.

На первый взгляд представляется, что эти погрешности войдут в ошибки ориентации осей телескопов, и, таким образом, координаты  $x^1, y^1, x^2, y^2$  звезд в фокальных плоскостях телескопов будут зависеть не только от инструментальных погрешностей гироскопов.

Однако более внимательное рассмотрение показывает, что формулы (6.48) — (6.50) сохраняют силу и для случая управляемой гиropлатформы. В них только векторы  $q_1, q_2, q_3$  становятся соответствующим образом сформированными переменными величинами, а угол  $\theta$  принимает смысл вектора, входящего во вторую группу уравнений ошибок (1.96). Этот вектор в случае управляемой гироскопы определяется лишь инструментальными погрешностями гироскопов  $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$  совершенно так же, как и в случае гиросtabilизированной платформы.

Чтобы убедиться в справедливости высказанного утверждения, достаточно обратиться к формулам (1.116). Эти формулы дают проекции на соответственные оси вектора  $\theta_1$  ошибки ориентации некоторого трехгранника  $xuz$ , невозмущенное положение которого задано по отношению к осям  $\xi_*, \eta_*, \zeta_*$  направляющими косинусами  $\alpha_{ij}(\xi_*, \eta_*, \zeta_*)$ . Невозмущенная ориентация этого трехгранника является, таким образом, заданной функцией определенных инерциальной си-

стемой координат. Правые части формул (1.116) содержат поэтому как ошибки  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , вызванные лишь погрешностями гироскопов (в силу уравнений ошибок второй группы), так и складываемые, вызванные ошибками  $\delta\xi_*$ ,  $\delta\eta_*$ ,  $\delta\zeta_*$  координат, определенных инерциальной системой.

Применим формулы (1.116) к трехгранникам  $Ox^1y^1z^1$  и  $Ox^2y^2z^2$ . В невозмущенном положении эти трехгранники жестко связаны с направлениями  $q_1^*$ ,  $q_2^*$  на звезды  $s_1$ ,  $s_2$ , и поэтому их невозмущенная ориентация по отношению к осям  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$  неизменна. Вследствие этого в формулах (1.116) следует в рассматриваемом случае считать  $a_{ij} = \text{const}$ . Принимая это во внимание, находим:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x^1} &= -\theta_{x^1}, & \theta_{1y^1} &= -\theta_{y^1}, \\ \theta_{1y^2} &= -\theta_{y^2}, & \theta_{1x^2} &= -\theta_{x^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.51)$$

что и требовалось. Этот же результат получается и из равенства (1.122).

Таким образом, в результате наблюдений звезд определяется вектор  $\theta$ , входящий во вторую группу уравнений ошибок (1.96). Следовательно, по уравнениям (1.96) может быть определен, если известен угол  $\theta$ , вектор  $\Delta m$  инструментальной погрешности определения абсолютной угловой скорости вращения трехгранника платформы инерциальной системы. В проекциях на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  платформы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta m_x &= \dot{\theta}_x + \omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y, \\ \Delta m_y &= \dot{\theta}_y + \omega_z \theta_x - \omega_x \theta_z, \\ \Delta m_z &= \dot{\theta}_z + \omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x. \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

Величины (6.52) можно было бы и использовать для коррекции показаний гироскопических чувствительных элементов. Однако формирование  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  по формулам (6.52) предполагает дифференцирование проекций  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , а следовательно, и  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$ . Схемы для получения величин  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  ввиду малости световых потоков, излучаемых звездами, работают с большими коэффициентами усиления при высоком уровне случайных помех. Поэтому дифференцирование координат  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  затруднительно, и схемы коррекции гироскопических элементов инерциальных

систем строят, как правило, в виде схем, следящих за направлением на звезды и сводящих угол  $\theta$  к нулю. Основные принципы построения такого рода схем будут изложены в последующих разделах настоящего параграфа.

**6.3.2. Линейная одновременная коррекция по двум звездам.** Рассмотрим астрономическую коррекцию инструментальных погрешностей гироскопических чувствительных элементов инерциальной системы, когда основой ее кинематической схемы является гиростабилизированная платформа. Пусть известны по наблюдениям двух звезд посредством телескопов величины  $x^1, y^1, x^2, y^2$ . Тогда по формулам (6.50) можно найти величины  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ .

Уравнения движения гиростабилизированной платформы при отсутствии астрокоррекции — это вторая группа (1.96) уравнений ошибок инерциальной системы. В проекциях на оси гиростабилизированной платформы эти уравнения имеют вид:

$$\dot{\theta}_x = \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z. \quad (6.53)$$

Уравнениям (6.53) соответствует векторное уравнение (1.93)

$$\frac{d\theta}{dt} = \Delta m. \quad (6.54)$$

Здесь вектор  $\theta$  является вектором ухода (малого угла поворота) платформы, а вектор  $\Delta m$  есть не что иное, как скорость свободного ухода гиростабилизированной платформы \*).

Первая группа уравнений ошибок сводится в случае автономной системы к векторному уравнению (1.92)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \frac{\mu \delta r}{r^3} - \frac{\mu r}{r^3} \frac{3r \cdot \delta r}{r^2} = \\ = \Delta n - \Delta m \times \frac{dr}{dt} - \frac{d}{dt} (\Delta m \times r), \end{aligned} \quad (6.55)$$

где  $\delta r = \delta x x + \delta y y + \delta z z$ , а  $x, y, z$  — орты осей стабилизированной платформы при отсутствии уходов.

Для инерциальных систем, корректируемых от высотомера и доплеровского измерителя скорости, первая группа

---

\*) Точнее, взятая с обратным знаком скорость свободного ухода.

уравнений ошибок будет иметь другой вид, однако на настоящем этапе рассмотрения задачи астрокоррекции это не существенно.

К уравнениям (6.54), (6.55) добавляются в рассматриваемом случае алгебраические соотношения

$$\delta \mathbf{r}_1 = \theta \times \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{r}_2 = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{r}_1, \quad (6.56)$$

где

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta x_1 x + \delta y_1 y + \delta z_1 z, \\ \delta r_2 &= \delta x_2 x + \delta y_2 y + \delta z_2 z. \end{aligned}$$

Посредством этих соотношений находится полная ошибка  $\delta \mathbf{r}_2$  определения местоположения объекта. Соотношения (1.116) в рассматриваемом случае приводят снова к уравнению (6.54), а значит, не вносят ничего нового.

Просмотр уравнений (6.53) — (6.56) приводит к следующим возможным способам использования полученных с помощью телескопов величин  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  для коррекции инерциальной системы.

Прежде всего можно, согласно первому равенству (6.56), сформировать величины

$$\delta x_1 = \theta_y z - \theta_z y, \quad \delta y_1 = \theta_z x - \theta_x z, \quad \delta z_1 = \theta_x y - \theta_y x \quad (6.57)$$

и вычесть их из тех значений координат, которые определены инерциальной системой. Тогда ошибки координат сведутся лишь к величинам  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , получающимся в результате решения первой группы уравнений ошибок, вытекающей из векторного уравнения (6.55). В этом случае мы по существу не вмешиваемся в работу инерциальной системы, а корректируем только ее выходные показания. Использование информации о величинах  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  здесь неполно. Ориентация гиросtabilизированной платформы остается нескорректированной. В правых частях уравнений ошибок первой группы остаются величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . Они войдут, таким образом, в ошибки координат  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , хотя и не вызовут составляющих ошибок, растущих пропорционально времени (во всяком случае, при постоянных  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ ).

Вторым путем, о котором уже упоминалось в предыдущем параграфе, оказывается такой. Продифференцировав проекции  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , полученные с помощью телескопов,



можно найти по уравнениям (6.53) величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  и сформировать моменты, приложение которых к гироскопам гиросtabilизированной платформы вызвало бы угловые скорости прецессии последней, компенсирующие уходы  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . Используя одновременно начальные значения  $\theta_x^0$ ,  $\theta_y^0$ ,  $\theta_z^0$ , придем к тому, что уравнения (6.53) второй группы выпадут совсем из уравнений ошибок; а в правых частях уравнений ошибок первой группы, получающихся из векторного уравнения (6.55), пропадут величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . Этот путь наиболее полно использует информацию, получаемую от схемы индикации звезд телескопами. Однако он предполагает дифференцирование величин  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $y^1$ ,  $y^2$ , что, как уже ранее говорилось, практически трудно осуществить.

Третий путь заключается в том, чтобы по величинам  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , полученным со схемы индикации звезд, сформировать моменты, приложение которых к гироскопам стабилизированной платформы сводит величины  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  или, что все равно, величины  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  к нулю. Речь идет здесь, таким образом, о непрерывном удержании стабилизированной платформы в таком положении, когда оптические оси телескопов совпадают с направлениями на визируемые звезды.

Простейшим способом здесь будет формирование величин корректирующих моментов  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  гиросtabilизированной платформы пропорциональными  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , т. е. пропорциональными правым частям выражений (6.50). В этом случае

$$M_y^2 = -H_2 k \theta_x, \quad M_x^1 = H_1 k \theta_y, \quad M_x^3 = H_3 k \theta_z, \quad (6.58)$$

где  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  — величины кинетических моментов гироскопов, а  $k$  — некоторый постоянный коэффициент.

Тогда система уравнений (6.53) движения платформы превратится в систему

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_x + k \theta_x &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y + k \theta_y = \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z + k \theta_z &= \Delta m_z, \end{aligned} \quad (6.59)$$

равносильную векторному уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} + k_1 \theta = \Delta m. \quad (6.60)$$

Решение уравнения (6.60) очевидно:

$$\theta = \int_0^t \Delta m(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau + \theta^0 e^{-kt}. \quad (6.61)$$

Здесь под интегралом от вектора понимается новый вектор, проекции которого на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , связанные со стабилизированной платформой, равны интегралам от проекций на эти же оси вектора, образующего подынтегральное выражение. Поэтому выражение для  $\theta_x$ , например, имеет вид:

$$\theta_x = \int_0^t \Delta m_x(\tau) e^{-k(t-\tau)} d\tau + \theta_x^0 e^{-kt}. \quad (6.62)$$

Выражения для  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  совершенно аналогичны.

Из равенства (6.61) видно, что при  $k > 0$  и  $\Delta m = 0$  начальная погрешность ориентации платформы со временем сводится к нулю. Если  $\Delta m \neq 0$ , но величина  $|\Delta m|$  ограничена, то ограниченной оказывается и величина  $|\theta|$ . В самом деле, из формулы (6.61) вытекает оценка

$$|\theta| \leq \int_0^t |\Delta m| e^{-k(t-\tau)} d\tau + |\theta^0| e^{-kt}, \quad (6.63)$$

или

$$|\theta| \leq \frac{\max |\Delta m|}{k} (1 - e^{-kt}) + |\theta^0| e^{-kt}. \quad (6.64)$$

Таким образом, по истечении некоторого времени (с момента начала коррекции), длительность которого зависит от величины  $k$ , слагаемые правой части неравенства (6.64), содержащие экспоненциальные множители, затухнут и остаются

$$|\theta| \leq \frac{\max |\Delta m|}{k}. \quad (6.65)$$

Выбором достаточно большого  $k$  величина  $|\theta|$  может быть сделана настолько малой, что можно будет пренебречь величинами  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$ . Ошибки инерциальной системы будут определяться тогда лишь решениями уравнений первой группы. Из соотношений (6.60), (6.54) следует при этом,

что в правых частях уравнений первой группы величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  должны быть заменены на

$$\left. \begin{aligned} \Delta m'_x &= \Delta m_x - k\theta_x, & \Delta m'_y &= \Delta m_y - k\theta_y, \\ \Delta m'_z &= \Delta m_z - k\theta_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

Если величины  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  постоянны, то из равенств (6.66) получается, что по истечении некоторого времени с момента начала коррекции будут иметь место равенства

$$\Delta m'_x = \Delta m'_y = \Delta m'_z = 0. \quad (6.67)$$

Полезно отметить здесь, что остаточные погрешности

$$\theta_x = \frac{\Delta m_x}{k}, \quad \theta_y = \frac{\Delta m_y}{k}, \quad \theta_z = \frac{\Delta m_z}{k}, \quad (6.68)$$

имеющие место при постоянных  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ , могут быть использованы для определения постоянных составляющих уходов гиросtabilизированной платформы, что в принципе позволяет скорректировать возмущающее воздействие этих постоянных составляющих в периоды между сеансами астрономической коррекции.

Остаточные рассогласования можно убрать также, введя в корректирующие моменты составляющие, пропорциональные интегралам от  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ . Тогда вместо равенств (6.58) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 \left( k\theta_x + k_{-1} \int_0^t \theta_x dt \right), \\ M_x^1 &= H_1 \left( k\theta_y + k_{-1} \int_0^t \theta_y dt \right), \\ M_x^3 &= H_3 \left( k\theta_z + k_{-1} \int_0^t \theta_z dt \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

а вместо уравнения (6.60) получим уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} + k\theta + k_{-1} \int_0^t \theta dt = \Delta m. \quad (6.70)$$

Характеристическое уравнение, соответствующее линейному интегро-дифференциальному уравнению (6.70), имеет вид

$$p^2 + kp + k_{-1} = 0. \quad (6.71)$$

При

$$k^2 - 4k_{-1} > 0 \quad (6.72)$$

характеристическое уравнение имеет два отрицательных корня:

$$p_{1,2} = -\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - k_{-1}}. \quad (6.73)$$

Решение уравнения (6.70) представляется в виде

$$\theta = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \int_0^t \Delta \dot{m}(\tau) [e^{-\lambda_1(t-\tau)} - e^{-\lambda_2(t-\tau)}] d\tau + \right. \\ \left. + [\theta^0(\lambda_2 + k) - \Delta m^0] e^{-\lambda_1 t} - [\theta^0(\lambda_1 + k) - \Delta m^0] e^{-\lambda_2 t} \right\}. \quad (6.74)$$

Проинтегрировав по частям, получим:

$$\theta = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \int_0^t \Delta m(\tau) [\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-\tau)} - \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-\tau)}] d\tau + \right. \\ \left. + \theta^0 [(\lambda_2 + k) e^{-\lambda_1 t} - (\lambda_1 + k) e^{-\lambda_2 t}] \right\}. \quad (6.75)$$

Если величина  $|\Delta m|$  ограничена, то, как и в предыдущем случае, ограниченной оказывается и величина  $|\theta|$ .

При постоянном  $\Delta m$  по прошествии некоторого времени  $t_1$  с момента начала коррекции, когда затухнут переходные процессы, величины  $\theta$  и  $\dot{\theta}$  можно считать равными нулю. Из уравнения (6.70) при этом получим:

$$k_{-1} \int_0^{t_1} \theta dt = \Delta m, \quad (6.76)$$

т. е. постоянная составляющая вектора  $\Delta m$  оказывается в дальнейшем скомпенсированной накопленным интегралом. Она остается, естественно, скомпенсированной и по окончании сеанса астрокоррекции.

Сравнение уравнений (6.54) и (6.70) показывает, что в рассматриваемом случае коррекции вектор  $\Delta m$  в правой

части уравнения (6.55) ошибок первой группы должен быть заменен на вектор

$$\Delta m' = \Delta m - k\theta - k_{-1} \int_0^t \theta dt. \quad (6.77)$$

Из равенства (6.76) при этом следует, что по окончании переходных процессов

$$\Delta m' = 0 \quad (6.78)$$

и инструментальные погрешности гироскопов выпадают и из первой группы уравнений ошибок.

Закончим на этом рассмотрение астрокоррекции схемы со свободной (при отсутствии астрокоррекции) гиростабилизированной платформой и перейдем к случаю, когда основой схемы является управляемая гиropлатформа. Покажем, что на этот случай можно распространить способы коррекции, рассмотренные выше для случая со свободной гиropлатформой.

Что касается первых двух способов — коррекции лишь значений координат, определенных инерциальной системой, и коррекции путем формирования величин  $-\Delta m_x$ ,  $-\Delta m_y$ ,  $-\Delta m_z$  по величинам  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  и их производным, — то эти способы здесь в такой же степени очевидны, как и в рассмотренном выше случае.

Как было показано в предыдущем разделе настоящего параграфа, в случае управляемой гиropлатформы сохраняют силу соотношения (6.47) — (6.50) с той лишь разницей, что теперь векторы  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  меняют свою ориентацию относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в зависимости от определенных инерциальной системой координат и времени. Относительно же трехгранника  $\xi_* \eta_* \zeta_*$  ориентация направлений  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  сохраняется неизменной, как и в случае свободной гиростабилизированной платформы.

Уравнения (6.53) заменяются теперь уравнениями (1.96)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_x + \omega_y \theta_z - \omega_z \theta_y &= \Delta m_x, \\ \dot{\theta}_y + \omega_z \theta_x - \omega_x \theta_z &= \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z + \omega_x \theta_y - \omega_y \theta_x &= \Delta m_z, \end{aligned} \right\} \quad (6.79)$$

или равносильным векторным уравнением

$$\dot{\theta} + \omega \times \theta = \Delta m, \quad (6.80)$$

в котором точкой обозначено локальное дифференцирование по времени в подвижной системе координат  $Oxyz$ , связанной жестко с вращающейся с угловой скоростью  $\omega$  платформой.

Рассмотрим линейную коррекцию. Сформируем моменты  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  согласно равенствам

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 x \cdot q_s \left( k\theta^s + k_{-1} \int_0^t \theta^s dt \right), \\ M_x^1 &= H_1 y \cdot q_s \left( k\theta^s + k_{-1} \int_0^t \theta^s dt \right), \\ M_x^3 &= H_3 z \cdot q_s \left( k\theta^s + k_{-1} \int_0^t \theta^s dt \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.81)$$

где составляющие  $\theta^s$  получаются по известным  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  из соотношений (6.48), а по  $s$  ведется суммирование от 1 до 3.

Приложение этих корректирующих моментов к гироскопам платформы вместе с управляющими моментами превратит векторное уравнение ошибок второй группы (6.80) в уравнение

$$\dot{\theta} + \omega \times \theta + k\theta + k_{-1} \int_0^t \theta dt = \Delta m, \quad (6.82)$$

или, в иной записи, в уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} + k\theta + k_{-1} \int_0^t \theta dt = \Delta m. \quad (6.83)$$

Интегрирование в третьем слагаемом левой части этого уравнения проведено, как это следует из формул (6.81), по направлениям  $q_s$ . Эти направления неизменны относительно осей системы координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$  и интегрирование вдоль этих осей равносильно интегрированию вдоль ортов  $\xi_*$ ,  $\eta_*$ ,  $\zeta_*$ , поэтому уравнение (6.83) целиком оказывается написанным

в неизменно ориентированной системе координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$ . При этом, конечно, если вектор  $\Delta\mathbf{m}$  физически задан в проекциях на оси системы координат  $Oxyz$ , то в уравнении (6.83) его надо полагать пересчитанным в проекции на оси системы  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$ .

Уравнение (6.83) и по форме и по сути своей совпадает с уравнением (6.70), рассмотренным при анализе коррекции схемы со стабилизированной платформой. Решением его является формула (6.75). Если вектор  $\Delta\mathbf{m}$  постоянен в системе координат  $O\xi_*\eta_*\zeta_*$ , то сохраняют силу равенство (6.76) и выводы из него.

Таким образом, корректирующие моменты (6.81) дают решение задачи линейной астрокоррекции управляемой гиросtabilизированной платформы. Однако это лишь одно из возможных решений.

Второе решение можно получить, сформировав корректирующие моменты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2(kx \cdot q_s \theta^s + k_{-1} \int_0^t x \cdot q_s \theta^s dt - \\ &\quad - \omega_y \theta_z + \omega_z \theta_y), \\ M_x^1 &= H_1(ky \cdot q_s \theta^s + k_{-1} \int_0^t y \cdot q_s \theta^s dt - \\ &\quad - \omega_z \theta_x + \omega_x \theta_z), \\ M_z^3 &= H_3(kz \cdot q_s \theta^s + k_{-1} \int_0^t z \cdot q_s \theta^s dt - \\ &\quad - \omega_x \theta_y + \omega_y \theta_x), \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

где

$$\theta_x = x \cdot q_s \theta^s, \quad \theta_y = y \cdot q_s \theta^s, \quad \theta_z = z \cdot q_s \theta^s. \quad (6.85)$$

Тогда вместо уравнения (6.82) будем иметь уравнение

$$\dot{\theta} + k\theta + k_{-1} \int_0^t \theta dt = \Delta\mathbf{m}. \quad (6.86)$$

В отличие от уравнения (6.83), здесь дифференцирование и интегрирование проведены в осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , связанных

с управляемой гирос платформой. Соотношение (6.76) оказывается здесь справедливым в том случае, если вектор  $\Delta \mathbf{m}$  постоянен в системе координат  $Oxuz$ , связанной с платформой инерциальной системы.

**6.3.3. Релейная одновременная коррекция по двум звездам.** В предшествующем разделе рассмотрена астро-коррекция инерциальной системы, построенной на основе свободной или управляемой гиростабилизированной платформы, когда корректирующие моменты, прикладываемые к гироскопам платформы, формировались как линейные функции величин  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  и их интегралов. Такого рода линейная коррекция предполагает известными координаты  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  изображений звезд в фокальных плоскостях телескопов.

В то же время наиболее распространенные фазовые схемы\*) обработки сигналов, получаемых при наблюдении звезд посредством телескопов, могут дать лишь знаки координат  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  и их отношения  $x^1/y^1$ ,  $x^2/y^2$ . Покажем, как осуществить коррекцию в этом случае.

Рассмотрим сначала случай, когда кинематической основой инерциальной системы является свободная гиростабилизированная платформа. Построим, полагая известными знаки координат  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$ , корректирующие моменты, приложение которых к гироскопам платформы парирует ее уходы, т. е. сводит координаты  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  к нулю.

Из соотношений (6.48) следует, что величины  $x^2$ ,  $x^1$ ,  $y^1$  ( $y^2$ ) пропорциональны контравариантным составляющим  $\theta^1$ ,  $\theta^2$ ,  $\theta^3$  вектора  $\theta$  по векторам  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{q}_3$ . В соответствии с этими соотношениями, если  $\sin B > 0$ , имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{sign } x^2 &= \text{sign } \theta^1, & \text{sign } x^1 &= -\text{sign } \theta^2, \\ \text{sign } y^1 &= \text{sign } y^2 = -\text{sign } \theta^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

С другой стороны, уравнения (6.53) равносильны, очевидно, системе

$$\dot{\theta}^1 = \Delta m^1, \quad \dot{\theta}^2 = \Delta m^2, \quad \dot{\theta}^3 = \Delta m^3, \quad (6.88)$$

---

\*) Подробнее работа фазовых схем рассматривается в следующем параграфе.



где  $\Delta m^1, \Delta m^2, \Delta m^3$  — контравариантные составляющие вектора  $\Delta m$  инструментальной погрешности гироскопов по тем же векторам  $q_1, q_2, q_3$ .

Из сравнения соотношений (6.87), (6.88) вытекает, что для осуществления коррекции достаточно сформировать три тройки корректирующих моментов  $M_{y1}^2, M_{x1}^1, M_{x1}^3$ ;  $M_{y2}^2, M_{x2}^1, M_{x2}^3$ ;  $M_{y3}^2, M_{x3}^1, M_{x3}^3$  так, чтобы каждая тройка приводила к прецессии гиростабилизированной платформы соответственно вокруг направлений  $q_1, q_2, q_3$ , и надлежащим образом коммутировать эти тройки моментов в соответствии со знаками  $\text{sign } x^1, \text{sign } x^2, \text{sign } y^1$  ( $\text{sign } y^2$ ) координат  $x^1, x^2, y^1$  ( $y^2$ ).

Пусть  $H_1 = H_2 = H_3 = H$ . Тогда, очевидно, для указанных троек моментов имеем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -M_{y1}^2 x + M_{x1}^1 y + M_{x1}^3 z = Hkq_1, \\ M_2 &= -M_{y2}^2 x + M_{x2}^1 y + M_{x2}^3 z = Hkq_2, \\ M_3 &= -M_{y3}^2 x + M_{x3}^1 y + M_{x3}^3 z = Hkq_3. \end{aligned} \right\} \quad (6.89)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} M_{y1}^2 &= -Hkq_1 \cdot x, & M_{x1}^1 &= Hkq_1 \cdot y, & M_{x1}^3 &= Hkq_1 \cdot z, \\ M_{y2}^2 &= -Hkq_2 \cdot x, & M_{x2}^1 &= Hkq_2 \cdot y, & M_{x2}^3 &= Hkq_2 \cdot z, \\ M_{y3}^2 &= -Hkq_3 \cdot x, & M_{x3}^1 &= Hkq_3 \cdot y, & M_{x3}^3 &= Hkq_3 \cdot z. \end{aligned} \right\} \quad (6.90)$$

Образуем моменты

$$\left. \begin{aligned} M_{1*} &= M_1 \text{sign } x^2 = -Hkq_1 \text{sign } x^2, \\ M_{2*} &= M_2 \text{sign } x^1 = Hkq_2 \text{sign } x^1, \\ M_{3*} &= M_3 \text{sign } y^1 = Hkq_3 \text{sign } y^1 (= M_3 \text{sign } y^2 = \\ &= Hkq_3 \text{sign } y^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.91)$$

Контравариантные составляющие суммарного момента коррекции

$$M = M_{1*} + M_{2*} + M_{3*} \quad (6.92)$$

оказываются теперь в силу соотношений (6.87) равными:

$$\left. \begin{aligned} M^1 &= -Hk \text{sign } \theta^1, & M^2 &= Hk \text{sign } \theta^2, \\ M^3 &= Hk \text{sign } \theta^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.93)$$

Приложение момента  $M$  к гиростабилизированной платформе приводит теперь вместо уравнений (6.88) к таким уравнениям ее движения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}^1 + k \operatorname{sign} \theta^1 &= \Delta m^1, \\ \dot{\theta}^2 + k \operatorname{sign} \theta^2 &= \Delta m^2, \\ \dot{\theta}^3 + k \operatorname{sign} \theta^3 &= \Delta m^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.94)$$

Из этих уравнений следует, что при

$$k > \max \{ |\Delta m^1|, |\Delta m^2|, |\Delta m^3| \} \quad (6.95)$$

отклонения  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ , а значит, и  $x^1, x^2, y^1, y^2$  сводятся с течением времени к нулю.

Согласно уравнениям (6.94), в районе нулевых значений  $\theta^1, \theta^2, \theta^3$  будут иметь место незатухающие колебания (скользящие режимы).

Чтобы избежать их, можно, например, ввести коммутирующие сигналы  $y_1, y_2, y_3$ , сформировав их не по равенствам

$$y_1 = \operatorname{sign} \theta^1, \quad y_2 = \operatorname{sign} \theta^2, \quad y_3 = \operatorname{sign} \theta^3, \quad (6.96)$$

а следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} y_i &= 0 && \text{при } |\theta^i| \leq c, \\ y_i &= \operatorname{sign} \theta^i && \text{при } |\theta^i| > c \end{aligned} \right\} \quad (6.97)$$

( $i = 1, 2, 3$ ).

В этом случае в окрестности точки  $x^1 = x^2 = y^1 = 0$  будет существовать зона нечувствительности (мертвая зона) размером  $c \times c \times c$ , в которую и будет приводиться изображение звезды.

С точностью до погрешностей (обычно малых), обусловленных зоной нечувствительности, по окончании приведения проекции  $\Delta m_x, \Delta m_y, \Delta m_z$  в уравнения ошибок первой группы можно считать равными нулю, как и в случае линейной коррекции.

Из соотношений (6.48), (6.94), (6.95) следует, что эффективность релейной схемы коррекции зависит от угла  $B$  между направлениями на звезды. Чем меньше угол  $B$ , тем больше  $|\Delta m^i|$  при заданном  $|\Delta m|$ , поэтому тем большей должна быть величина  $k$ . Впрочем, ухудшение работы схемы

коррекции при уменьшении угла  $B$  имеет место и в случае линейной коррекции. Из выражений (6.50) видно, что при малых величинах  $\sin B$  большим значениям  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  могут соответствовать малые значения координат  $x^1$ ,  $x^2$ , т. е. эффективная чувствительность схемы коррекции понижается при уменьшении угла  $B$  между наблюдаемыми звездами.

Рассмотрим релейную коррекцию в случае, когда кинематической основой инерциальной системы является управляемая гиropлатформа. По аналогии с соотношениями (6.89) — (6.91) сформируем корректирующие моменты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -Hkx \cdot q_s \operatorname{sign} \theta^s, \\ M_x^1 &= Hky \cdot q_s \operatorname{sign} \theta^s, \\ M_x^3 &= Hkz \cdot q_s \operatorname{sign} \theta^s, \end{aligned} \right\} \quad (6.98)$$

где теперь, в отличие от формул (6.90), произведения  $x \cdot q_s$ ,  $y \cdot q_s$ ,  $z \cdot q_s$  являются не постоянными величинами, а некоторыми функциями времени и координат объекта.

Для контравариантных составляющих  $\theta^1$ ,  $\theta^2$ ,  $\theta^3$  вектора  $\theta$  по векторам  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  придем тогда снова к уравнениям (6.94), а следовательно, и к вытекающим из этих уравнений выводам.

**6.3.4. Поочередная коррекция по двум звездам.** Рассмотренные выше схемы линейной и релейной коррекций предполагали одновременное наблюдение двух звезд двумя телескопами. Возможно и другое решение задачи: поочередное наблюдение двух звезд одним телескопом. При этом либо телескоп периодически переводится из положения, когда его оптическая ось совпадает с направлением  $q_1$  на первую звезду, в положение, когда эта ось совпадает с направлением  $q_2$  на вторую звезду, либо телескоп остается неподвижным, но в него поочередно поступает лучистая энергия от двух звезд, что может быть осуществлено с помощью специальных зеркальных или призматических оптических устройств.

Основа принципа построения схемы поочередной астрокоррекции по двум звездам заключается в наблюдении следующего условия: сведение к нулю отклонений  $x^1$ ,  $y^1$  изображения первой звезды от центра фокальной плоскости не должно приводить (за счет действия корректирующих момен-

тов) к увеличению координат  $x^2$ ,  $y^2$  изображения второй звезды.

Что касается описанного выше релейного способа коррекции, то он полностью удовлетворяет этому условию и поэтому может быть целиком перенесен на случай поочередной коррекции. Действительно, момент  $k \operatorname{sign} \theta^1$ , входящий в первое уравнение (6.94), сводит к нулю величину  $\theta^1$ , т. е., как это следует из первого равенства (6.48), координату  $x^2$ . При этом прецессия платформы, как видно из первого равенства (6.89), происходит вокруг оси  $q_1$ , так что координаты  $x^1$ ,  $y^1$  не меняются. Момент  $k \operatorname{sign} \theta^2$  во втором уравнении (6.94) сводит к нулю, согласно второму равенству (6.48), координату  $x^1$ . Вращение платформы происходит вокруг оси  $q_2$ , и координаты  $x^2$ ,  $y^2$  в силу этого не меняются. Наконец, момент  $k \operatorname{sign} \theta^3$  сводит к нулю координаты  $y^1$ ,  $y^2$  одновременно вне зависимости от того, по какой из звезд совершается коррекция. Приведенные соображения справедливы, очевидно, как в случае, когда основой инерциальной системы является свободная гиросtabilизированная платформа, так и в случае управляемой платформы.

Легко усмотреть, что линейная коррекция в том виде, в каком она выше была построена, в случае гиросtabilизированной платформы приводит к цели и при поочередном наблюдении двух звезд. Действительно, когда визируется первая звезда, то из равенств (6.50) выпадает  $x^2$ , и, таким образом, корректирующие моменты (6.69) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 \left( kJ_x + k_{-1} \int_0^t J_x dt \right), \\ M_x^1 &= H_1 \left( kJ_y + k_{-1} \int_0^t J_y dt \right), \\ M_x^3 &= H_3 \left( kJ_z + k_{-1} \int_0^t J_z dt \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.99)$$

где, согласно соотношениям (6.50), (6.48),

$$\left. \begin{aligned} J_x &= x \cdot (q_2 \theta^2 + q_3 \theta^3), & J_y &= y \cdot (q_2 \theta^2 + q_3 \theta^3), \\ J_z &= z \cdot (q_2 \theta^2 + q_3 \theta^3). \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

Выражения для моментов  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  при визировании второй звезды будут отличаться от формул (6.99), (6.100) лишь тем, что вместо  $q_2\theta^2$  в них будет стоять  $q_1\theta^1$ .

В период коррекции по первой звезде вместо уравнения (6.70) будет, таким образом, иметь место уравнение

$$\frac{d\theta}{dt} + k(q_2\theta^2 + q_3\theta^3) + k_{-1} \int_0^t (q_2\theta^2 + q_3\theta^3) dt = \Delta m. \quad (6.101)$$

Это векторное уравнение равносильно, очевидно, системе скалярных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}^1 &= \Delta m^1, \quad \dot{\theta}^2 + k\theta^2 + k_{-1} \int_0^t \theta^2 dt = \Delta m^2, \\ \dot{\theta}^3 + k\theta^3 + k_{-1} \int_0^t \theta^3 dt &= \Delta m^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.102)$$

Решение каждого из двух последних уравнений (6.102) аналогично решению (6.75) уравнения (6.70). Первое же уравнение (6.102) совпадает с первым уравнением (6.88). Приняв во внимание равенства (6.48), заключаем, что при слежении за первой звездой координаты  $x^1$ ,  $y^1$  (а следовательно, и  $y^2$ ) сводятся к нулю. Координата же  $x^2$  меняется таким образом, как если бы коррекция отсутствовала вообще. Аналогичным образом обстоит дело и при коррекции по второй звезде, когда сводятся к нулю координаты  $x^2$ ,  $y^2$  и не затрагивается координата  $x^1$ . Очевидно, что дело не меняется, если в равенствах (6.99) коэффициент  $k_{-1}$  равен нулю.

Можно убедиться также, что в случае, когда основой схемы инерциальной системы будет не свободная гиросtabilизированная платформа, а управляемая, формирование корректирующих моментов в соответствии с равенствами (6.81) решает задачу линейной коррекции и при поочередном наблюдении звезд. Формирование же корректирующих моментов в точном соответствии с равенствами (6.84) становится при поочередной коррекции невозможным, так как в правые части этих равенств входят проекции  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , в которые, в соответствии с формулами (6.50), входят координаты изображений обеих звезд одновременно.

Из изложенного следует, что одновременное или поочередное наблюдение двух звезд посредством телескопов позволяет скорректировать инструментальные погрешности гироскопических чувствительных элементов.

Наблюдение одной звезды, например  $s_1$ , позволяет корректировать лишь ту часть погрешностей, которая приводит к появлению составляющих  $\theta^2$ ,  $\theta^3$  ошибки. Составляющая  $\theta^1$ , т. е. поворот платформы инерциальной системы вокруг направления на наблюдаемую звезду, остается нескорректированным. Поэтому полная коррекция инструментальных погрешностей гироскопических элементов при наблюдении лишь одной звезды невозможна без привлечения какой-либо дополнительной информации.

**6.3.5. О формировании корректирующих моментов.** В полученные выше формулы (6.50), (6.58), (6.69), (6.81), (6.84), (6.90), (6.98), (6.99), по которым формируются корректирующие моменты, входят единичные векторы  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , точнее, проекции  $q_i \cdot x$ ,  $q_i \cdot y$ ,  $q_i \cdot z$  этих векторов на оси платформы инерциальной системы. Векторы  $q_1$  и  $q_2$  суть единичные векторы направлений на звезды, по которым осуществляется коррекция, вектор  $q_3$  выражается через векторы  $q_1$  и  $q_2$  равенством (6.39).

Укажем путь вычисления проекций векторов  $q_1$  и  $q_2$  на оси платформы инерциальной системы для случаев, когда оси платформы в невозмущенном положении ориентированы неизменно или совпадают с осями сопровождающих трехгранников географической, геоцентрической и ортодромической координатных сеток.

Если звезды  $s_1$  и  $s_2$ , по которым должна быть проведена астрокоррекция, выбраны, то можно считать заданными направления на них  $q_1$  и  $q_2$  в связанной с Землей системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$  в момент начала коррекции. Соотношения, необходимые для определения векторов  $q_1$  и  $q_2$  в этой системе координат, приведены в § 6.2. Пусть в момент  $t^*$  начала коррекции направления  $q_1$ ,  $q_2$  характеризуются следующими направляющими косинусами:

$$\begin{array}{llll} & \xi & \eta & \zeta \\ q_1 & \cos \varphi_{1*}^0 \cos \lambda_{1*}^0 & \cos \varphi_{1*}^0 \sin \lambda_{1*}^0 & \sin \varphi_{1*}^0 \\ q_2 & \cos \varphi_{2*}^0 \cos \lambda_{2*}^0 & \cos \varphi_{2*}^0 \sin \lambda_{2*}^0 & \sin \varphi_{2*}^0 \end{array} \quad (6.103)$$

где  $\varphi_{1*}^0$ ,  $\varphi_{2*}^0$ ,  $\lambda_{1*}^0$ ,  $\lambda_{2*}^0$  — географические широты и долготы направлений  $q_1$  и  $q_2$ .

Если основной инерциальной системы является свободная гиросtabilизированная платформа, то ее положение по отношению к системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$  в момент начала работы системы должно быть, очевидно, заданным. Пусть оно задано таблицей направляющих косинусов:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	
$x$	$\cos \varphi_x'^0 \cos \lambda_x^0$	$\cos \varphi_x'^0 \sin \lambda_x^0$	$\sin \varphi_x'^0$	(6.104)
$y$	$\cos \varphi_y'^0 \cos \lambda_y^0$	$\cos \varphi_y'^0 \sin \lambda_y^0$	$\sin \varphi_y'^0$	
$z$	$\cos \varphi_z'^0 \cos \lambda_z^0$	$\cos \varphi_z'^0 \sin \lambda_z^0$	$\sin \varphi_z'^0$	

Так как в дальнейшем положение осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в пространстве остается неизменным, то, полагая, как обычно, угловую скорость  $u$  вращения Земли постоянной и направленной вдоль оси  $O_1\zeta$ , получим для момента  $t^*$  следующую таблицу направляющих косинусов:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	
$x$	$\cos \varphi_x'^0 \cos (\lambda_x^0 - ut^*)$	$\cos \varphi_x'^0 \sin (\lambda_x^0 - ut^*)$	$\sin \varphi_x'^0$	(6.105)
$y$	$\cos \varphi_y'^0 \cos (\lambda_y^0 - ut^*)$	$\cos \varphi_y'^0 \sin (\lambda_y^0 - ut^*)$	$\sin \varphi_y'^0$	
$z$	$\cos \varphi_z'^0 \cos (\lambda_z^0 - ut^*)$	$\cos \varphi_z'^0 \sin (\lambda_z^0 - ut^*)$	$\sin \varphi_z'^0$	

Таблицы (6.105) и (6.103) полностью определяют проекции векторов  $q_1$ ,  $q_2$  (а значит, и  $q_3$ ) на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  платформы в момент  $t^*$  начала астрокоррекции. Так как ориентация осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  неизменна, то в дальнейшем эти проекции остаются постоянными.

Если оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  платформы инерциальной системы в невозмущенном положении совпадают с осями сопровождающего трехгранника географической координатной сетки, то положение этих осей по отношению к осям системы координат  $O_1\xi\eta\zeta$  задается таблицей направляющих косинусов (1.10). Таблица (1.10) вместе с таблицей (6.103) определяет проекции векторов  $q_1$ ,  $q_2$  на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в момент  $t^*$  начала астрокоррекции. В дальнейшем, в отличие от предшествующего

случая, эти проекции не остаются постоянными. Чтобы определить их, надо, очевидно, вместо таблицы (6.103) взять следующую таблицу направляющих косинусов:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xi & & \eta & \zeta \\
 q_1 & \cos \varphi_{1*}' \cos [\lambda_{1*}^0 - u(t - t^*)] & \cos \varphi_{1*}' \sin [\lambda_{1*}^0 - u(t - t^*)] & \sin \varphi_{1*}' & \\
 q_2 & \cos \varphi_{2*}' \cos [\lambda_{2*}^0 - u(t - t^*)] & \cos \varphi_{2*}' \sin [\lambda_{2*}^0 - u(t - t^*)] & \cos \varphi_{2*}' & \\
 & & & & (6.106)
 \end{array}$$

Аналогичным образом можно определить проекции векторов  $q_1$  и  $q_2$  на оси сопровождающих трехгранников геоцентрической и ортодромической координатных сеток. Для этого надо лишь наряду с таблицами (6.106), (1.10) привлечь таблицы направляющих косинусов (1.14) и (1.16).

## § 6.4. Схемы астрокоррекции с фазовой индикацией звезд

**6.4.1. Принцип действия фазовой схемы индикации.** В предшествующих параграфах была рассмотрена астрокоррекция инерциальных систем путем наблюдения за двумя звездами посредством телескопов. Предполагалось, что в результате этого наблюдения определяются (индицируются) координаты  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  изображений звезд в фокальных плоскостях телескопов или по крайней мере знаки этих координат.

Индикация изображений звезд, т. е. определение величин  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$ , может быть осуществлена посредством светочувствительных элементов, размещенных в фокальных плоскостях телескопов. Например, в фокальной плоскости можно разместить телевизионную трубку типа «Видикон» или «Суперортикон». Тогда, ориентируя направления строчной и кадровой разверток опросных импульсов вдоль осей  $x^1(x^2)$ ,  $y^1(y^2)$ , получим координаты  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  в виде интервалов времени, им пропорциональных.

Вторым примером схем для получения координат  $x^1$ ,  $y^1$ ,  $x^2$ ,  $y^2$  могут быть так называемые фазовые схемы. В них в фокальной плоскости размещается фотоэлемент или какой-либо другой фоточувствительный элемент, а перед ним располагается вращающийся обтюратор, модулирующий световой поток звезды. Простейшим обтюратором такого типа является.



очевидно, полудисковый (рис. 6.6), представляющий собой прозрачный диск с зачерненной половиной. При вращении такого обтюратора с угловой скоростью  $\omega$  в сигнале, который снимается со светочувствительного элемента, будет содержаться составляющая частоты  $f = \frac{2\pi}{\omega}$ . Выделив ее с помощью узкополосного фильтра, можно, очевидно, получить гармонический сигнал модуляции светового потока звезды, сравнение фазы которого с фазой опорного сигнала, вращающего обтюратор,

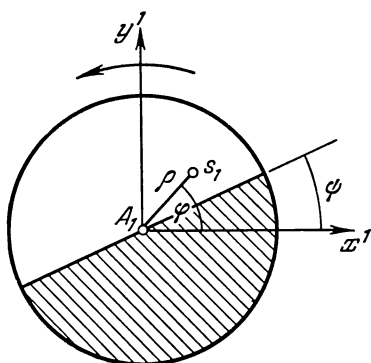


Рис. 6.6.

позволяет определить угловое положение направления на звезду в поле зрения телескопа.

Отстояние направления на звезду от оси телескопа такого рода обтюратором при произвольном положении звезды в поле зрения обычно не индицируется, хотя принципиально это и возможно. Для этого можно было бы, например, прозрачность незачерненной части полудискового обтюратора сделать функцией расстояния от его центра.

Если же звезда располагается вблизи оси поля зрения, то ввиду конечного размера изображения звезды глубина модуляции ее светового потока обтюратором становится функцией расстояния изображения звезды от центра фокальной плоскости. В этом случае, таким образом, в сигнале, который снимается со светочувствительного элемента, окажется информация и об отстоянии направления на звезду от оптической оси телескопа.

В дальнейшем телевизионные схемы выделения информации о положении изображения звезды в фокальной плоскости рассматриваться не будут, так как анализ их — дело чисто радиотехнических методов. В схемах же с механическими обтюраторами существует ряд вопросов, анализ которых требует применения методов теоретической механики. Имея в виду в дальнейшем рассмотрение некоторых из этих вопросов, остановимся подробнее на структуре фазовой схемы с механическим полудисковым обтюратором.

Схема выделения сигнала от звезды (схема индикации звезды) включает в себя (рис. 6.7) телескоп 1 с обтюратором и фоточувствительным элементом, привод обтюратора 2, усилитель 3, резонансный фильтр 4, синхронный фазовый детектор 5, фильтр-выпрямитель 6. В устройства 2 и 5 подается сигнал опорной частоты  $\omega$ .

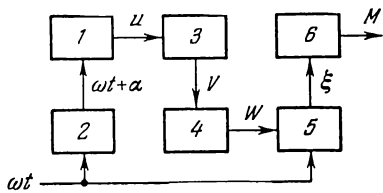


Рис. 6.7.

Если считать звезду точечным источником излучения, оптику телескопа идеальной, а помехи отсутствующими, то изображение звезды  $s_1$  в фокальной плоскости будет точечным. Пусть (рис. 6.6) направление из точки  $A_1$  в точку  $s_1$  составляет угол  $\varphi$  с осью  $x^1$ . Тогда

$$x^1 = \rho \cos \varphi, \quad y^1 = \rho \sin \varphi, \quad (6.107)$$

где  $\rho$  — расстояние от изображения звезды  $s_1$  до оптической оси телескопа. Пусть, далее, линия раздела прозрачной и непрозрачной частей полудискового обтюратора составляет в начальный момент угол  $\psi$  с направлением оси  $x^1$ . Тогда при вращении обтюратора с угловой скоростью  $\omega$  (направление вращения показано на рис. 6.6 стрелкой) сигнал  $E$ , снимаемый с фоточувствительного элемента, будет иметь вид:

$$E = \frac{E_0}{2} [1 - \text{sign} \sin(\omega t - \varphi + \psi)]. \quad (6.108)$$

Здесь коэффициент  $E_0$  характеризует яркость звезды и чувствительность фоточувствительного элемента.

Носителем информации о положении изображения звезды является в сигнале (6.108) фаза  $\varphi$ , поэтому системы такого рода и названы фазовыми системами.

Сигнал с фоточувствительного элемента поступает в усилитель, а затем в резонансный фильтр частоты  $\omega$ . Если считать усилитель линейным, то, обозначив его коэффициент усиления через  $\mu$ , будем иметь на входе резонансного фильтра величину

$$p_* = \frac{p}{2} [1 - \text{sign} \sin(\omega t - \varphi + \psi)], \quad (6.109)$$

где  $p = \mu E_0$ .

Будем считать фильтр идеальным, т. е. пропускающим лишь частоту  $\omega$ . Функция  $p_*(t)$  — периодическая с периодом  $2\pi/\omega$ . Ее разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$p_* = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos k\omega t + b_k^0 \sin k\omega t), \quad (6.110)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_* dt, \\ a_k^0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_* \cos k\omega t dt, \\ b_k^0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} p_* \sin k\omega t dt. \end{aligned} \right\} \quad (6.111)$$

Подставив выражение (6.109) в формулы (6.111), найдем величины коэффициентов при первых гармониках:

$$a_1^0 = -\frac{2p}{\pi} \sin(\varphi - \psi), \quad b_1^0 = \frac{2p}{\pi} \cos(\varphi - \psi). \quad (6.112)$$

Таким образом, сигнал  $V$  с резонансного фильтра получается в виде

$$V = \frac{2p}{\pi} \sin(\omega t + \psi - \varphi). \quad (6.113)$$

Этот сигнал через фильтр поступает, согласно приведенной на рис. 6.7 схеме, в синхронный детектор. Если детектор множительного типа, то его действие можно считать сводящимся к умножению входного сигнала на  $\sin(\omega t + \alpha)$ ; если же детектор коммутационный, то умножение производится на  $\text{sign} \sin(\omega t + \alpha)$ . Обозначив через  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  выходные сигналы множительного и коммутационного синхронных детекторов, получим для этих случаев:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{2p}{\pi} \sin(\omega t + \psi - \varphi) \sin(\omega t + \alpha), \\ \vartheta_2 &= \frac{2p}{\pi} \sin(\omega t + \psi - \varphi) \text{sign} \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

Здесь  $\alpha$  — сдвиг фазы управляющего детектором сигнала частоты  $\omega$  по отношению к сигналу, вращающему обтюратор.

Далее по схеме (рис. 6.7) следует выпрямитель. Он пропускает лишь постоянную составляющую сигналов (6.114). Подставив правые части равенств (6.114) вместо  $p_*(t)$  в первую формулу (6.111), найдем для постоянных составляющих такие значения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\vartheta}_1 &= \frac{p}{\pi^2} \cos(-\varphi + \psi - \alpha), \\ \bar{\vartheta}_2 &= \frac{4p}{\pi^2} \cos(-\varphi + \psi - \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

В обоих случаях величина  $\bar{\vartheta}$  пропорциональна  $\cos(-\varphi + \psi - \alpha)$ . Если коэффициент пропорциональности обозначить через  $\mu'$ , то

$$\bar{\vartheta} = \mu' \cos(-\varphi + \psi - \alpha). \quad (6.116)$$

Полагая

$$\psi - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi - \alpha_2 = \pi, \quad (6.117)$$

из соотношения (6.116) получим:

$$\bar{\vartheta}' = \mu' \sin \varphi, \quad \bar{\vartheta}'' = \mu' \cos \varphi. \quad (6.118)$$

Сравнивая равенства (6.118) и (6.107), заключаем, что

$$\bar{\vartheta}'' = \frac{\mu'}{\rho} x^1, \quad \bar{\vartheta}' = \frac{\mu'}{\rho} y^1, \quad (6.119)$$

т. е. величины  $\bar{\vartheta}''$ ,  $\bar{\vartheta}'$  пропорциональны координатам  $x^1$ ,  $y^1$  изображения звезды в фокальной плоскости телескопа. Соотношения (6.119) не определяют координаты  $x^1$ ,  $y^1$  изображения звезды, а определяют лишь знаки этих координат и их отношение. Однако, как было показано выше, этого оказывается достаточным для коррекции инструментальных погрешностей гироскопических чувствительных элементов инерциальных систем.

В проведенных выше выкладках величина  $\varphi$  полагалась постоянной. Однако полученные при этом соотношения (в дальнейшем это будет показано) сохраняют свою силу и в том случае, если величина  $\varphi$  переменна, но скорость  $\dot{\varphi}$  изменения  $\varphi$  мала по сравнению с  $\omega$ .

**6.4.2. Динамика замкнутой фазовой схемы астрокоррекции вблизи положения равновесия. Исследование устойчивости.** Рассмотрим работу фазовой схемы астрокоррекции стабилизированной платформы с учетом типичных особенностей составляющих ее элементов \*).

Откажемся прежде всего от предположения о том, что телескоп является идеальным и изображение звезды точечным. Примем, что яркость изображения является функцией расстояния от текущей точки изображения до его центра. Пусть, как и ранее (рис. 6.6),  $\psi$  — угол линии раздела прозрачной и непрозрачной частей обтюратора с осью  $x^1$ ,  $x^1 = \rho \cos \varphi$  и  $y^1 = \rho \sin \varphi$  — координаты центра изображения, а  $r_0$  — радиус поля зрения телескопа. Тогда освещенность  $E$  фоточувствительного элемента, равная интегралу от яркости по прозрачной части обтюратора, будет, очевидно, функцией величин

$$r_0 - \rho \text{ и } l = \rho \sin(\varphi - \psi)$$

расстояний центра изображения звезды до границ области интегрирования:

$$E = E[r_0 - \rho, \rho \sin(\varphi - \psi)]. \quad (6.120)$$

Для вращающегося с частотой  $\omega$  обтюратора выражение (6.120) превращается в такое:

$$E = E[r_0 - \rho, \rho \sin(\omega t + \varphi - \psi)]. \quad (6.121)$$

Если считать фоточувствительный элемент линейным, то на его выходе получим сигнал

$$u = \mu E + f(t), \quad (6.122)$$

где коэффициент  $\mu$  характеризует чувствительность приемника, а функция  $f(t)$  — помехи: детерминированные (фон неба, например) и случайные (шумы приемника, случайная составляющая фона \*\*).

\*) Десянин Е. А., Об уравнениях систем автоматического сопровождения. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1965.

\*\*) Влияние помех от фона неба на работу систем астрокоррекции с радиально-щелевыми обтюраторами (в частности, с полудисковыми) рассмотрено в Приложении I. Влияние случайных помех рассматривается в последней главе.

Примем далее, что усилитель (рис. 6.7) может быть описан уравнением

$$P(D)V = R(D)u, \quad (6.123)$$

где  $D = \frac{d}{dt}$  — оператор дифференцирования,  $P(D)$  и  $R(D)$  — полиномы с постоянными коэффициентами,  $V$  — выходной сигнал усилителя.

Синхронный детектор, как известно\*), можно описать уравнениями

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= h(V) \Omega(t), \\ W_2 &= h(V) \Omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right), \end{aligned} \right\} \quad (6.124)$$

где  $W_1$ ,  $W_2$  — выходные сигналы синхронного детектора,  $h(V)$  — его нелинейная характеристика,  $\Omega(t)$  — периодическая функция частоты  $\omega$ . Для детектора коммутационного типа  $\Omega(t) = \text{sign} \sin(\omega t + \alpha)$ , для детектора множительного типа  $\Omega(t) = \sin(\omega t + \alpha)$ , где  $\alpha$  — фазовая погрешность опорного сигнала.

Резонансные фильтры, следующие за усилителем, будем также считать линейными с постоянными параметрами. Их уравнения будут тогда иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_1(D)\xi &= S_1(D)W_1, \\ Q_2(D)\eta &= S_2(D)W_2, \end{aligned} \right\} \quad (6.125)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — выходные сигналы фильтров.

Рассмотрим случай линейной коррекции гиросtabilизированной платформы по первой звезде. Воспользовавшись равенствами (6.58), (6.50) и заметив, что в формулах (6.125) «образами» координат  $x^1$  и  $y^1$  являются соответственно величины  $\eta$  и  $\xi$ , сформируем корректирующие моменты следующим

---

\*) См., например, Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962; Большаков И. А., Прохождение регулярных и случайных сигналов через фазовый детектор коммутационного типа, Вестник МГУ, № 6, 1958.

образом:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 k \left( -x \cdot q_2 \frac{\eta}{a \sin B} - x \cdot q_3 \frac{\xi}{a} \right), \\ M_x^1 &= H_1 k \left( -y \cdot q_2 \frac{\eta}{a \sin B} - y \cdot q_3 \frac{\xi}{a} \right), \\ M_x^3 &= H_3 k \left( -z \cdot q_2 \frac{\eta}{a \sin B} - z \cdot q_3 \frac{\xi}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.126)$$

Тогда движение гиросtabilизированной платформы относительно ее невозмущенного положения будет, согласно соотношениям (6.59), описываться уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_x - \frac{M_y^2}{H_2} &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y + \frac{M_x^1}{H_1} = \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z + \frac{M_x^3}{H_3} &= \Delta m_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.127)$$

К выписанным уравнениям (6.120) — (6.127) необходимо добавить соотношения, связывающие величины  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  с величинами  $\rho$  и  $\varphi$ . Согласно равенствам (6.50), (6.107), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= -x \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - x \cdot q_3 \frac{y^1}{a}, \\ \theta_y &= -y \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - y \cdot q_3 \frac{y^1}{a}, \\ \theta_z &= -z \cdot q_2 \frac{x^1}{a \sin B} - z \cdot q_3 \frac{y^1}{a}, \\ x^1 &= \rho \cos \varphi, \quad y^1 = \rho \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.128)$$

Упростим полученные уравнения. Начнем с соотношения (6.120). Функция, стоящая в правой части равенства (6.120), является периодической функцией аргумента  $\varphi - \psi$  с периодом  $2\pi$ . Ее можно разложить в ряд Фурье. При этом, очевидно, коэффициенты разложения окажутся функциями  $\rho$ . Таким образом, получим представление:

$$E = \frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(\rho) \cos k(\varphi - \psi) + b_k(\rho) \sin k(\varphi - \psi)]. \quad (6.129)$$

В первом приближении для типичных форм «колоколообразной» зависимости яркости изображения от расстояния

до его центра правая часть равенства (6.120) может быть представлена в виде

$$E = E_0 + C_1(\rho) \sin(\varphi - \psi), \quad (6.130)$$

где разложение  $C_1(\rho)$  в ряд по степеням  $\rho$  начинается с первой степени  $\rho$ . Для малых  $\rho$  поэтому равенство (6.121) превращается в такое:

$$E = E_0 + E_1 \rho \sin(\varphi - \psi), \quad (6.131)$$

где  $E_1$  — постоянный коэффициент.

Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим такой пример. Пусть изображение звезды представляет собой круг радиуса  $\rho_0$ , яркость которого  $B$  постоянна. Если  $2\rho_0 < r_0$  ( $r_0$  — радиус поля зрения телескопа), то освещенность  $E$  будет равна яркости  $B$ , умноженной на площадь изображения звезды, приходящуюся на прозрачную часть диска обтюратора.

Поэтому

$$E = B \left\{ \pi \rho_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\rho}{\rho_0} \sin(\varphi - \psi) \right] + \right. \\ \left. + \rho \rho_0 \sin(\varphi - \psi) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \sin^2(\varphi - \psi)} \right\}. \quad (6.132)$$

Пусть изображение звезды находится вблизи центра поля зрения, так что  $\rho/\rho_0 \ll 1$ . Тогда, раскладывая правую часть равенства (6.132) в ряд по степеням  $\rho/\rho_0$ , получаем следующее приближенное представление:

$$E = B \left[ \frac{\pi \rho_0^2}{2} + 2\rho_0 \rho \sin(\varphi - \psi) \right]. \quad (6.133)$$

Это представление совпадает, как легко видеть, с формулой (6.131), если взять  $E_0 = \frac{B\pi\rho_0^2}{2}$ ,  $E_1 = 2B\rho_0$ .

Качественный характер зависимости  $C_1(\rho)$  при возрастании  $\rho$  может быть представлен в общем случае графиком, изображенным на рис. 6.8, что позволяет хорошо аппроксимировать эту зависимость функцией

$$\left. \begin{aligned} C_1(\rho) &= E_1 \rho && \text{при } \rho \leq \rho_1, \\ C_1(\rho) &= E_1 \rho_1 = \text{const} && \text{при } \rho > \rho_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.134)$$



Приняв для  $E$  представление (6.130) и положив  $\psi = 0$ , что не уменьшает общности, получим вместо соотношения (6.122) следующее равенство:

$$u = \mu C_1(\rho) \sin(\omega t + \varphi) + f_1, \quad f_1 = f(t) + \mu E_0. \quad (6.135)$$

Возьмем далее синхронный детектор множительного типа

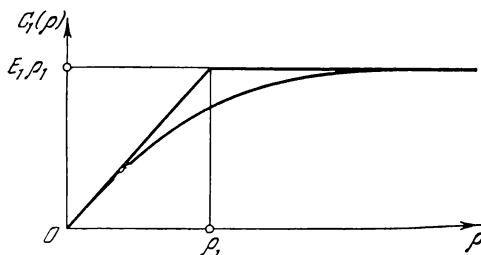


Рис. 6.8.

и положим  $h(V) = V$ . Тогда уравнения (6.124) примут вид

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= V \sin(\omega t + \alpha), \\ W_2 &= V \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.136)$$

Упростим также соотношения (6.126), (6.128). Пусть  $B = \frac{\pi}{2}$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = x$ ,  $a = 1$ . Тогда вместо указанных соотношений получим:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= H_2 k \xi, & M_x^1 &= -H_1 k \eta, \\ \theta_x &= -y^1, & \theta_y &= -x^1, \\ x^1 &= \rho \cos \varphi, & y^1 &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (6.137)$$

Третьи равенства (6.126), (6.128) выпадают. Из трех уравнений (6.127) остаются также лишь первые два, которые с учетом соотношений (6.137) принимают вид:

$$\dot{\theta}_x - k \xi = \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y - k \eta = \Delta m_y. \quad (6.138)$$

Объединив равенства (6.135), (6.123), (6.136), (6.125) и четыре последних равенства (6.137), получим следующую

систему уравнений, описывающую процесс астрокоррекции:

$$\left. \begin{aligned} u &= \mu C_1(\rho) \sin(\omega t + \varphi) + f_1, \\ R(D)u &= P(D)V, \\ W_1 &= V \sin(\omega t + \alpha), \quad W_2 = V \cos(\omega t + \alpha), \\ Q_1(D)\xi &= S_1(D)W_1, \quad Q_2(D)\eta = S_2(D)W_2, \\ \dot{\theta}_x - k\xi &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y - k\eta = \Delta m_y, \\ \theta_y &= \rho \cos \varphi, \quad \theta_x = -\rho \sin \varphi, \\ \rho &= \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.139)$$

Если каналы коррекции по углам  $\theta_x$  и  $\theta_y$  симметричны, то

$$Q_1(D) = Q_2(D), \quad S_1(D) = S_2(D). \quad (6.140)$$

Если теперь считать  $C_1(\rho) = E_1\rho$ , т. е. принять представление (6.131), то система уравнений (6.139) заменой переменных

$$\left. \begin{aligned} a &= \theta_x \sin \omega t + \theta_y \cos \omega t, \\ b &= \theta_x \cos \omega t - \theta_y \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (6.141)$$

может быть приведена к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим для простоты случай, когда фильтры после коммутатора отсутствуют, т. е. когда

$$Q_1(D) = Q_2(D) = S_1(D) = S_2(D) = 1, \quad (6.142)$$

а резонансный усилитель настроен на частоту  $\nu$ , близкую к частоте  $\omega$  вращения обтюратора, и описывается уравнением

$$\left( \frac{D^2}{\nu^2} + 2\zeta \frac{D}{\nu} + 1 \right) V = u. \quad (6.143)$$

Тогда с учетом равенства (6.131) получим:

$$\left. \begin{aligned} u &= \mu E_1 [\rho \sin(\omega t + \varphi) + f_2], \quad f_2 = \frac{f_1}{\mu E_1}, \\ \left( \frac{D^2}{\nu^2} + 2\zeta \frac{D}{\nu} + 1 \right) V &= u, \\ \xi &= V \sin(\omega t + \alpha), \quad \eta = V \cos(\omega t + \alpha), \\ \dot{\theta}_x - k\xi &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y - k\eta = \Delta m_y, \\ \theta_y &= \rho \cos \varphi, \quad \theta_x = -\rho \sin \varphi, \\ \rho &= \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.144)$$

Выполнив замену переменных (6.141), приходим к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} u &= \mu E_1 (a + f_2), \\ \left( \frac{D^2}{v^2} + 2\zeta \frac{D}{v} + 1 \right) V &= u, \\ \dot{a} - \omega b - kV \cos \alpha &= \Delta m_x \sin \omega t + \Delta m_y \cos \omega t, \\ \dot{b} + \omega a - kV \sin \alpha &= \Delta m_x \cos \omega t - \Delta m_y \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (6.145)$$

Исследуем устойчивость движения. Характеристический определитель однородной системы (6.145) имеет вид:

$$\Delta(p) = p^4 + 2\zeta v p^3 + (\omega^2 + v^2) p^2 + 2v(\zeta \omega^2 - n v \cos \alpha) p + \omega^2 v (\omega - 2n \sin \alpha), \quad (6.146)$$

где  $n = \frac{\mu E_1 k}{2}$ .

Критерий Гурвица дает следующие условия устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} 2\zeta v &> 0, \\ \zeta v + n \cos \alpha &> 0, \\ n[-\zeta \cos \alpha (v^2 - \omega^2) + 2\zeta^2 v \omega \sin \alpha - n \cos^2 \alpha] &> 0, \\ \omega - 2n \sin \alpha &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.147)$$

Первое из этих условий выполняется всегда. Второе несущественно, так как выполняется при выполнении третьего и четвертого условий. Таким образом, область устойчивости системы определяется при  $n > 0$  неравенствами

$$\left. \begin{aligned} -\zeta \cos \alpha (v^2 - \omega^2) + 2\zeta^2 v \omega \sin \alpha - n \cos^2 \alpha &> 0, \\ \omega - 2n \sin \alpha &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.148)$$

В плоскости параметров  $n, \alpha$  область устойчивости для  $n > 0$  изображена на рис. 6.9. Граница области устойчивости пересекает ось абсцисс  $n = 0$  в точке, где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2 - \omega^2}{2\zeta \omega v}. \quad (6.149)$$

При  $\alpha = \pi$  получаем, что

$$n = \zeta (v^2 - \omega^2). \quad (6.150)$$

Область устойчивости на рис. 6.9 построена в предположении, что  $\omega^2 - v^2 > 0$ .

При отрицательных  $n$  аналогичная область устойчивости получается, очевидно, при  $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ .

Из рис. 6.9 вытекают следующие выводы. Для обеспечения устойчивости работы схемы необходимо ввести в опорный сигнал частоты  $\omega$  фазовый сдвиг  $\alpha$ . Его оптимальное значение при малой величине  $v^2 - \omega^2$  близко к  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Этот сдвиг компенсирует изменение фазы выходного сигнала  $V$  резонансного фильтра по отношению к входному сигналу  $u$ . Чем меньше  $\zeta$ , т. е. чем выше добротность резонансного контура усилителя, тем плотнее прилегают боковые ветви границы области устойчивости к оси абсцисс  $n = 0$  и тем строже, следовательно, должна выбираться величина  $\alpha$ . Последнее связано с видом фазовой частотной характеристики резонансного фильтра: чем меньше затухание  $\zeta$ , тем резче изменение фазы  $V$  по сравнению с  $u$  в окрестности частоты  $\omega$ . При  $\zeta = 0$  обеспечить устойчивость работы схемы нельзя.

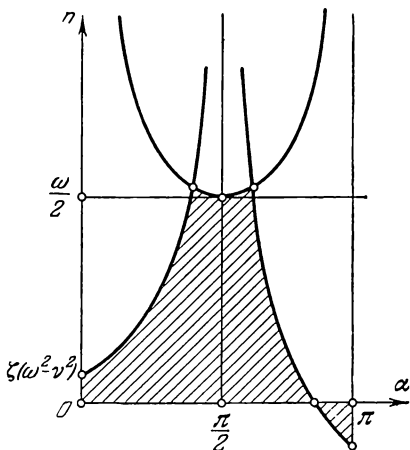


Рис. 6.9.

Физически это связано с тем, что в замкнутой системе, когда изображение звезды движется в фокальной плоскости, фильтр должен пропускать некоторую полосу частот в окрестности частоты  $\omega$ . При уменьшении же  $\zeta$  ширина полосы пропускания фильтра также уменьшается.

Далее, как видно из рис. 6.9, область устойчивости резко сужается при больших  $n$ , причем величина  $n$  не может быть больше (при  $\alpha = \pi/2$ ) чем  $\omega/2$ . Качественный смысл этого понятен. Большие значения  $n$  соответствуют большим скоростям перемещения изображения звезды по рисунку обтюратора в процессе коррекции. Ясно, что скорость обтюрации должна превышать скорость перемещения изображения звезды. В противном случае работа схемы коррекции невозможна. Поэтому при заданной конечной скорости коррекции частота обтюрации  $\omega$  не может быть взята произвольно малой.

## § 6.5. Совместная астро-доплеровская коррекция

**6.5.1. Схема с одновременной подачей сигналов доплеровской и астрокоррекции на моментные датчики гироскопов.** Уравнения ошибок автономной инерциальной системы распадаются на две группы дифференциальных уравнений, решаемых независимо друг от друга. Астрономическая коррекция гироскопических устройств инерциальной системы, как мы выяснили в предшествующих параграфах настоящей главы, изменяет лишь вторую группу уравнений ошибок. Первая же группа уравнений ошибок не меняется. Точнее, не меняются левые части уравнений ошибок первой группы. Входящие же в правые части инструментальные погрешности  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  либо совсем выпадают из уравнений (по окончании переходных процессов в цепях астрокоррекции), либо заменяются на выражения вида (6.66), (6.77).

В предшествующих главах мы выяснили также, что коррекция инерциальной системы от высотомера и основные варианты доплеровской коррекции изменяют, наоборот, лишь первую группу уравнений ошибок, совершенно не затрагивая вторую. Очевидно, что в таком случае совместная астро-доплеровская коррекция (вместе с коррекцией от высотомера) дает простую сумму эффектов от каждой из указанных коррекций в отдельности.

Однако в частном случае, когда основой инерциальной системы является управляемая гиростабилизированная платформа (или управляемая гирорама), возможно такое построение схемы доплеровской коррекции, когда она затрагивает и вторую группу уравнений ошибок. Этот случай исследован в п. 5.6.1. Он характерен тем, что сигналы доплеровской коррекции подаются на управляющие моментные датчики гироскопов. В этом случае при совместной астро-доплеровской коррекции уравнения ошибок первой и второй групп не разделяются, и совместная астро-доплеровская коррекция требует здесь специального рассмотрения.

Рассмотрим, как и в п. 5.6.1, инерциальную систему с двумя ньютонометрами, определяющую ортодромические координаты. Эта схема построена на базе управляемой гироскопической платформы, ось  $z$  которой в невозмущенном положении совпадает с радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , т. е. с геоцентрической вер-

тикалью, а ньютонометры расположены по осям  $x$  и  $y$  платформ, лежащим в горизонтальной плоскости. Уравнения идеальной работы схемы при отсутствии доплеровской и астрономической коррекции — это уравнения (2.23).

Введем в указанную схему сигналы астро-доплеровской коррекции следующим образом. Заменим первые два уравнения (2.23) на уравнения (5.49). Остальные уравнения (2.23) за вычетом равенств, определяющих управляющие моменты  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$ , оставим без изменения. Управляющие моменты зададим в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} M_y^2 &= -H_2 \left( \omega_x - k_2 \frac{\Delta V_y}{r} \right) + M_{y*}^2, \\ M_x^1 &= H_1 \left( \omega_y + k_2 \frac{\Delta V_x}{r} \right) + M_{x*}^1, \\ M_x^3 &= H_3 \left[ \left( \omega_y + k_2 \frac{\Delta V_x}{r} \right) \operatorname{tg} z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{\cos z} (\beta_{31} \cos S + \beta_{32} \sin S) \right] + M_{x*}^3. \end{aligned} \right\} \quad (6.151)$$

Здесь  $M_{y*}^2$ ,  $M_{x*}^1$ ,  $M_{x*}^3$  — моменты астрокоррекции. Если они равны нулю, то выражения (6.151) для  $M_y^2$ ,  $M_x^1$ ,  $M_x^3$  превращаются в выражения (5.321).

Моменты астрокоррекции сформируем в соответствии с равенствами (6.81), положив в них для простоты  $k_{-1} = 0$ . Тогда получим, что

$$\left. \begin{aligned} M_{y*}^2 &= -H_2 k \theta_x, & M_{x*}^1 &= H_1 k \theta_y, \\ M_{x*}^3 &= H_3 k \theta_z. \end{aligned} \right\} \quad (6.152)$$

Составим уравнения ошибок рассматриваемой системы.

В результате варьирования уравнений (5.49) вместе с третьим и четвертым уравнениями (2.23) придем к уравнениям (5.322), которые мы здесь и перепишем:

$$\left. \begin{aligned} 2\omega_y \Delta \dot{r} + \dot{r} \delta \omega_y + (\dot{\omega}_y + \omega_x \omega_z) \Delta r + \\ + \frac{d}{dt} (r \delta \omega_y) &= \delta n_x - r \omega_z \delta \omega_x - r \omega_x \delta \omega_z - k_1 \delta \Delta V_x, \\ -2\omega_x \Delta \dot{r} - \dot{r} \delta \omega_x + (-\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z) \Delta r - \\ - \frac{d}{dt} (r \delta \omega_x) &= \delta n_y - r \omega_y \delta \omega_z - r \omega_z \delta \omega_y - k_1 \delta \Delta V_y. \end{aligned} \right\} \quad (6.153)$$

Если обозначить связанный с платформой инерциальной системы трехгранник  $xuz$  в его невозмущенном положении через  $x_0y_0z_0$ , то отклонение платформы от ее невозмущенного положения можно задать малыми углами  $\alpha, \beta, \gamma$  в соответствии с таблицей направляющих косинусов (4.22). Величины  $\delta n_{x_0}, \delta n_{y_0}$  определяются тогда равенствами (4.26), (4.27), (4.7), (4.8), (4.12).

Из равенств (6.152), (6.153), (4.23) получаем соотношения

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \dot{\alpha} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta - \Delta\omega_{x_0} + k_2 \frac{\delta\Delta V_{y_0}}{r} - k\theta_{x_0}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha - \Delta\omega_{y_0} - k_2 \frac{\delta\Delta V_{x_0}}{r} - k\theta_{y_0}, \\ \delta\omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{x_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha - \Delta\omega_{z_0} - \\ &\quad - k_2 \frac{\delta\Delta V_{x_0}}{r} \operatorname{tg} z - k\theta_{z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (6.154)$$

аналогичные соотношениям (5.323), в которые они переходят при  $k=0$ . В правых частях равенств (6.154), как и в соотношениях (5.323), величины  $\delta\Delta V_{x_0}$  и  $\delta\Delta V_{y_0}$  определены формулами (5.58).

В формулы (5.58) входят вариации  $\delta v_{x_0}$  и  $\delta v_{y_0}$ . В силу третьего и четвертого уравнений (2.23) они равны:

$$\left. \begin{aligned} \delta v_{x_0} &= -\omega_{x_0} \Delta r - r \delta\omega_{x_0}, \\ \delta v_{y_0} &= \omega_{y_0} \Delta r + r \delta\omega_{y_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.155)$$

Подставив эти значения  $\delta v_{x_0}, \delta v_{y_0}$  в формулы (5.58), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Delta V_{x_0} &= r \delta\omega_{y_0} + \omega_{y_0} \Delta r + \rho(-u_{z_0}\theta_{x_0} + u_{x_0}\theta_{z_0}) - \\ &\quad - \rho u_{z_0}\alpha + r\omega_{x_0}\gamma + \dot{r}\beta - \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta\Delta V_{y_0} &= -r \delta\omega_{x_0} - \omega_{x_0} \Delta r - \rho(u_{z_0}\theta_{y_0} - u_{y_0}\theta_{z_0}) - \\ &\quad - \rho u_{z_0}\beta + r\omega_{y_0}\gamma - \dot{r}\alpha - \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.156)$$

Теперь из соотношений (6.154), (6.156) можно найти  $\delta\omega_{x_0}$ ,  $\delta\omega_{y_0}$ ,  $\delta\omega_{z_0}$ . Для них получаются следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left\{ \dot{\alpha} + \omega_{y_0}\gamma - \omega_{z_0}\beta - \Delta\omega_{x_0} - k\theta_{x_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_2}{r} [-\omega_{x_0}\Delta r - \rho(u_{z_0}\theta_{y_0} - u_{y_0}\theta_{z_0}) - \rho u_{z_0}\beta + \right. \\ &\quad \left. + r\omega_{y_0}\gamma - \dot{r}\alpha - \Delta V_{Dy_0}] \right\}, \\ \delta\omega_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left\{ \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha - \Delta\omega_{y_0} - \right. \\ &\quad \left. - k\theta_{y_0} - \frac{k_2}{r} [\omega_{y_0}\Delta r + \rho(-u_{z_0}\theta_{x_0} + u_{x_0}\theta_{z_0}) - \right. \\ &\quad \left. - \rho u_{z_0}\alpha + r\omega_{x_0}\gamma + \dot{r}\beta - \Delta V_{Dx_0}] \right\}, \\ \delta\omega_{z_0} &= \dot{\gamma} + \omega_{z_0}\beta - \omega_{y_0}\alpha - \Delta\omega_{z_0} - k\theta_{z_0} - \\ &\quad - \frac{k_2 \operatorname{tg} z}{1+k_2} \left[ \dot{\beta} - \omega_{x_0}\gamma + \omega_{z_0}\alpha - \Delta\omega_{y_0} - k\theta_{y_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta r}{r} \omega_{y_0} + \frac{\rho}{r} (-u_{z_0}\theta_{x_0} + u_{x_0}\theta_{z_0}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{r} u_{z_0}\alpha + \omega_{x_0}\gamma + \frac{\dot{r}}{r} \beta - \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.157)$$

Подставляя эти выражения в равенства (6.156), получаем в свою очередь:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Delta V_{x_0} &= \frac{r}{1+k_2} \left[ \dot{\beta} + \left( \omega_{z_0} - \frac{\rho}{r} u_{z_0} \right) \alpha - \Delta\omega_{y_0} - \right. \\ &\quad \left. - k\theta_{y_0} + \frac{\Delta r}{r} \omega_{y_0} + \frac{\rho}{r} (-u_{z_0}\theta_{x_0} + u_{x_0}\theta_{z_0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{r}}{r} \beta - \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right], \\ \delta\Delta V_{y_0} &= -\frac{r}{1+k_2} \left[ \dot{\alpha} - \left( \omega_{z_0} - \frac{\rho}{r} u_{z_0} \right) \beta - \right. \\ &\quad \left. - \Delta\omega_{x_0} - k\theta_{x_0} + \frac{\Delta r}{r} \omega_{x_0} + \frac{\rho}{r} (u_{z_0}\theta_{y_0} - u_{y_0}\theta_{z_0}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{r}}{r} \alpha + \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.158)$$



Для того чтобы закончить вывод первой группы уравнений ошибок, осталось лишь подставить выражения (6.157), (6.158) в равенства (6.153). Одновременно в эти равенства надо подставить выражения для  $\delta n_{x_0}$ ,  $\delta n_{y_0}$ , вытекающие из соотношений (4.26), (4.27), (4.7), (4.8), (4.12).

Займемся выводом второй группы уравнений ошибок. Варьируя пятое и шестое равенства (2.23), получаем соотношения (5.327) и далее соотношения (5.329). Последние, если заменить  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  на их выражения через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta_{x_0}$ ,  $\theta_{y_0}$ ,  $\theta_{z_0}$  согласно равенствам (4.39), записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{x_0} + \dot{\alpha} + \omega_{y_0}(\theta_{z_0} + \gamma) - \omega_{z_0}(\theta_{y_0} + \beta) &= \delta\omega_{x_0}, \\ \dot{\theta}_{y_0} + \dot{\beta} + \omega_{z_0}(\theta_{x_0} + \alpha) - \omega_{x_0}(\theta_{z_0} + \gamma) &= \delta\omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + \dot{\gamma} + \omega_{x_0}(\theta_{y_0} + \beta) - \omega_{y_0}(\theta_{x_0} + \alpha) &= \delta\omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.159)$$

Эти уравнения вместе с соотношениями (6.157) и составляют вторую группу уравнений ошибок.

Дальнейшее изучение уравнений ошибок рассматриваемой системы проведем в предположении малости проекций  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$  абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $x_0y_0z_0$  на его оси. Примем также для упрощения, что  $\rho = r = \text{const}$  и  $z = 0$ . Тогда, пренебрегая слагаемыми, содержащими проекции  $\omega_{x_0}$ ,  $\omega_{y_0}$ ,  $\omega_{z_0}$ ,  $u_{x_0}$ ,  $u_{y_0}$ ,  $u_{z_0}$  и их производные, из уравнений (6.153) получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(r \delta\omega_{y_0}) &= \delta n_{x_0} - k_1 \delta \Delta V_{x_0}, \\ -\frac{d}{dt}(r \delta\omega_{x_0}) &= \delta n_{y_0} - k_1 \delta \Delta V_{y_0}, \end{aligned} \right\} \quad (6.160)$$

где теперь, согласно равенствам (4.26),

$$\delta n_{x_0} = -\omega_0^2 r \beta + \Delta n_{x_0}, \quad \delta n_{y_0} = \omega_0^2 r \alpha + \Delta n_{y_0}. \quad (6.161)$$

С этими же упрощениями выражения (6.157) для вариаций  $\delta\omega_{x_0}$ ,  $\delta\omega_{y_0}$ ,  $\delta\omega_{z_0}$  принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_{x_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left( \dot{\alpha} - \Delta\omega_{x_0} - k\theta_{x_0} - k_2 \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r} \right), \\ \delta\omega_{y_0} &= \frac{1}{1+k_2} \left( \dot{\beta} - \Delta\omega_{y_0} - k\theta_{y_0} + k_2 \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right), \\ \delta\omega_{z_0} &= \dot{\gamma} - \Delta\omega_{z_0} - k\theta_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.162)$$

Аналогично вместо равенств (6.156) имеем более простые равенства:

$$\left. \begin{aligned} \delta \Delta V_{x_0} &= \frac{r}{1+k_2} \left( \dot{\beta} - \Delta \omega_{y_0} - k \theta_{y_0} - \frac{\Delta V_{Dx_0}}{r} \right), \\ \delta \Delta V_{y_0} &= -\frac{r}{1+k_2} \left( \dot{\alpha} - \Delta \omega_{x_0} - k \theta_{x_0} + \frac{\Delta V_{Dy_0}}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.163)$$

Наконец, вместо уравнений (6.159) получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{x_0} + \dot{\alpha} &= \delta \omega_{x_0}, \quad \dot{\theta}_{y_0} + \dot{\beta} = \delta \omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + \dot{\gamma} &= \delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.164)$$

Сделанные допущения позволяют написать уравнения ошибок в сравнительно простом виде. Так, из равенств (6.160) — (6.163), производя замену переменных

$$\delta x = r\beta, \quad \delta y = -r\alpha \quad (6.165)$$

и вспоминая, что  $r = \text{const}$ , получаем уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x}_1 + (1+k_2) \omega_0^2 \delta x - rk \dot{\theta}_{y_0} - rk_1 k \theta_{y_0} &= \\ &= (1+k_2) \Delta n_{x_0} + r \Delta \dot{\omega}_{y_0} + \\ &+ k_1 (\Delta V_{Dx_0} + r \Delta \omega_{y_0}) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx_0}, \\ \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y}_1 + (1+k_2) \omega_0^2 \delta y + rk \dot{\theta}_{x_0} + rk_1 k \theta_{x_0} &= \\ &= (1+k_2) \Delta n_{y_0} - r \Delta \dot{\omega}_{x_0} + \\ &+ k_1 (\Delta V_{Dy_0} - r \Delta \omega_{x_0}) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.166)$$

Уравнения (6.166) образуют первую группу уравнений ошибок рассматриваемой системы. Вторая группа получается из соотношений (6.164), (6.162), (6.165). Она записывается таким образом:

$$\left. \begin{aligned} (1+k_2) \dot{\theta}_{x_0} + k \theta_{x_0} - k_2 \frac{\delta \dot{y}}{r} &= -\Delta \omega_{x_0} - \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dy_0}, \\ (1+k_2) \dot{\theta}_{y_0} + k \theta_{y_0} + k_2 \frac{\delta \dot{x}}{r} &= -\Delta \omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dx_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + k \theta_{z_0} &= -\Delta \omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.167)$$

Полные ошибки определения координат представляются, как и в автономной системе, выражениями

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \delta x + r \theta_{y_0}, \\ \delta y_2 &= \delta y - r \theta_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.168)$$

Легко установить, что при  $k=0$  уравнения (6.166) — (6.168) равносильны уравнениям (5.335), (5.337), (5.340). В самом деле, при  $k=0$  уравнения (6.166) превращаются в уравнения (5.335). Чтобы убедиться в равносильности уравнений (5.337), (5.340) и уравнений (6.167), (6.168), надо в первых из них сделать замену переменных:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{x_0} &= (1 + k_2) \theta_{x_0} - k_2 \frac{\delta y}{r}, \\ \vartheta_{y_0} &= (1 + k_2) \theta_{y_0} + k_2 \frac{\delta x}{r}, \\ \vartheta_{z_0} &= \theta_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.169)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (6.166), (6.167). Первое уравнение (6.166) и второе уравнение (6.167) образуют систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta x - k r (\dot{\theta}_{y_0} + k_1 \theta_{y_0}) &= \\ &= \Delta n_{x_0} (1 + k_2) + r \Delta \dot{\omega}_{y_0} + \\ &+ k_1 (\Delta V_{Dx_0} + r \Delta \omega_{y_0}) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx_0}, \\ (1 + k_2) \dot{\theta}_{y_0} + k \theta_{y_0} + k_2 \frac{\delta \dot{x}}{r} &= -\Delta \omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dx_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.170)$$

Аналогичную же систему образует второе уравнение (6.166) с первым уравнением (6.167).

Характеристическое уравнение каждой из указанных двух систем дифференциальных уравнений имеет вид:

$$p^3 + (k_1 + k) p^2 + [\omega_0^2 (1 + k_2) + k_1 k] p + k \omega_0^2 = 0. \quad (6.171)$$

Структура коэффициентов этого уравнения такова, что надлежащим выбором величин  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  корни характеристического уравнения могут быть сделаны любыми наперед заданными. Устойчивость процесса астро-доплеровской коррекции, таким образом, всегда может быть обеспечена. Свободные колебания в системе затухают.

Следует, однако, отметить, что при  $k \rightarrow \infty$  уравнение (6.171) раскладывается на множители

$$\left. \begin{aligned} p + k &= 0, \\ p^2 + k_1 p + \omega_0^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.172)$$

Другими словами, при достаточно жесткой астрокоррекции, т. е. при больших значениях  $k$ , что часто имеет место, пропадает эффект изменения собственной частоты инерциальной системы, что, как мы помним, является одной из целей, преследуемых при введении доплеровской коррекции.

Если считать устойчивость системы обеспеченной надлежащим выбором величин коэффициентов  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ , то при постоянных инструментальных погрешностях в системе по затухании переходных процессов устанавливаются такие величины ошибок:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{y_0} &= \frac{1}{k} \left( -\Delta\omega_{y_0} + \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dx_0} \right), \\ \theta_{x_0} &= \frac{1}{k} \left( -\Delta\omega_{x_0} - \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dy_0} \right), \\ \theta_{z_0} &= -\frac{1}{k} \Delta\omega_{z_0}, \\ \delta x &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta V_{Dx_0}, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta V_{Dy_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.173)$$

Поэтому, в соответствии с равенствами (6.168), установившиеся значения полных ошибок  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$  определения координат оказываются равными соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2 &= \frac{1}{\omega_0^2} (\Delta n_{x_0} + k_1 \Delta V_{Dx_0}) + \frac{1}{k} (k_2 \Delta V_{Dx_0} - r \Delta\omega_{y_0}), \\ \delta y_2 &= \frac{1}{\omega_0^2} (\Delta n_{y_0} + k_1 \Delta V_{Dy_0}) + \frac{1}{k} (k_2 \Delta V_{Dy_0} + r \Delta\omega_{x_0}). \end{aligned} \right\} \quad (6.174)$$

Представляется интересным сравнить установившиеся ошибки рассматриваемого варианта астро-доплеровской

коррекции с основными вариантами, в которых уравнения ошибок первой и второй групп разделяются.

Пусть доплеровская коррекция вводится в соответствии с уравнениями (5.196) или, что в рассматриваемом случае все равно, в соответствии с уравнениями (5.217).

Тогда при отсутствии астрокоррекции и при тех же упрощениях, которые принимались при выводе уравнений (6.166), первую группу уравнений ошибок будут образовывать уравнения (5.311), (5.312). Если в этих уравнениях заменить  $\Delta m_{x_0}$ ,  $\Delta m_{y_0}$  на  $-\Delta\omega_{x_0}$ ,  $-\Delta\omega_{y_0}$ , то они примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1 \delta\dot{x} + (1 + k_2)\omega_0^2 \delta x &= (1 + k_2) \Delta n_{x_0} + \\ &+ r \Delta\dot{\omega}_{y_0} - k_2 \Delta\dot{V}_{Dx_0} + k_1 (\Delta V_{Dx_0} + r \Delta\omega_{y_0}), \\ \delta\ddot{y} + k_1 \delta\dot{y} + (1 + k_2)\omega_0^2 \delta y &= (1 + k_2) \Delta n_{y_0} - \\ &- r \Delta\dot{\omega}_{x_0} - k_2 \Delta\dot{V}_{Dy_0} + k_1 (\Delta V_{Dy_0} - r \Delta\omega_{x_0}). \end{aligned} \right\} \quad (6.175)$$

Уравнения второй группы — это уравнения

$$\dot{\theta}_{x_0} = -\Delta\omega_{x_0}, \quad \dot{\theta}_{y_0} = -\Delta\omega_{y_0}, \quad \dot{\theta}_{z_0} = -\Delta\omega_{z_0}. \quad (6.176)$$

Полные ошибки определения координат находятся по формулам (6.168).

Если ввести теперь астрокоррекцию, сформировав корректирующие моменты в соответствии с равенствами (6.152), то уравнения второй группы запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{x_0} + k\theta_{x_0} &= -\Delta\omega_{x_0}, \quad \dot{\theta}_{y_0} + k\theta_{y_0} = -\Delta\omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + k\theta_{z_0} &= -\Delta\omega_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.177)$$

При этом изменяются и уравнения (6.175). В них величины  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$  заменяются, как это было выяснено в п. 6.3.2, на величины

$$\Delta\omega'_{x_0} = \Delta\omega_{x_0} + k\theta_{x_0}, \quad \Delta\omega'_{y_0} = \Delta\omega_{y_0} + k\theta_{y_0}, \quad (6.178)$$

что в рассматриваемом случае следует и непосредственно из сравнения уравнений (6.176) и (6.177).

Таким образом, для схемы, в которой астро-доплеровская коррекция осуществляется в соответствии с соотношениями (5.196), (6.152), упрощенная система уравнений ошибок сводится к уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + k_1\delta\dot{x} + (1 + k_2)\omega_0^2\delta x &= \\ &= (1 + k_2)\Delta n_{x_0} + r(\Delta\dot{\omega}_{y_0} + k\dot{\theta}_{y_0}) - k_2\Delta\dot{V}_{Dx_0} + \\ &\quad + k_1(\Delta V_{Dx_0} + r\Delta\omega_{y_0} + rk\theta_{y_0}), \\ \delta\ddot{y} + k_1\delta\dot{y} + (1 + k_2)\omega_0^2\delta y &= \\ &= (1 + k_2)\Delta n_{y_0} - r(\Delta\dot{\omega}_{x_0} + k\dot{\theta}_{x_0}) - k_2\Delta\dot{V}_{Dy_0} + \\ &\quad + k_1(\Delta V_{Dy_0} - r\Delta\omega_{x_0} - rk\theta_{x_0}), \\ \dot{\theta}_{x_0} + k\theta_{x_0} &= -\Delta\omega_{x_0}, \quad \dot{\theta}_{y_0} + k\theta_{y_0} = -\Delta\omega_{y_0}, \\ \dot{\theta}_{z_0} + k\theta_{z_0} &= -\Delta\omega_{z_0}, \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_{y_0}, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_{x_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.179)$$

При постоянных инструментальных погрешностях установленные значения ошибок, вытекающие из уравнений (6.179), таковы:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{x_0} &= -\frac{\Delta\omega_{x_0}}{k}, \quad \theta_{y_0} = -\frac{\Delta\omega_{y_0}}{k}, \quad \theta_{z_0} = -\frac{\Delta\omega_{z_0}}{k}, \\ \delta x &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1\Delta V_{Dx_0}}{\omega_0^2(1 + k_2)}, \\ \delta y &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1\Delta V_{Dy_0}}{\omega_0^2(1 + k_2)}, \\ \delta x_2 &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1\Delta V_{Dx_0}}{\omega_0^2(1 + k_2)} - \frac{r\Delta\omega_{y_0}}{k}, \\ \delta y_2 &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{k_1\Delta V_{Dy_0}}{\omega_0^2(1 + k_2)} + \frac{r\Delta\omega_{x_0}}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (6.180)$$

Аналогично для схемы, в которой астро-доплеровская коррекция осуществлена в соответствии с равенствами (5.198), (6.152), уравнения ошибок получаются из соотношений (5.313),

(6.177), (6.178), (6.168). Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta x &= \\
 &= \Delta n_{x_0} (1 + k_2) + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \dot{n}_{x_0} + r (\Delta \dot{\omega}_{y_0} + k \dot{\theta}_{y_0}) - \\
 &\quad - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx_0} - \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \ddot{V}_{Dx_0}, \\
 \delta \ddot{y} + k_1 \delta \dot{y} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta y &= \\
 &= \Delta n_{y_0} (1 + k_2) + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \dot{n}_{y_0} - r (\Delta \dot{\omega}_{x_0} + k \dot{\theta}_{x_0}) - \\
 &\quad - k_2 \Delta \dot{V}_{Dy_0} - \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \ddot{V}_{Dy_0}, \\
 \dot{\theta}_{x_0} + k \theta_{x_0} &= -\Delta \omega_{x_0}, \quad \dot{\theta}_{y_0} + k \theta_{y_0} = -\Delta \omega_{y_0}, \\
 \dot{\theta}_{z_0} + k \theta_{z_0} &= -\Delta \omega_{z_0}, \\
 \delta x_2 &= \delta x + r \theta_{y_0}, \quad \delta y_2 = \delta y - r \theta_{x_0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.181)$$

Из этих уравнений получаются при постоянных инструментальных погрешностях следующие значения установившихся ошибок:

$$\left. \begin{aligned}
 \theta_{x_0} &= -\frac{\Delta \omega_{x_0}}{k}, \quad \theta_{y_0} = -\frac{\Delta \omega_{y_0}}{k}, \\
 \theta_{z_0} &= -\frac{\Delta \omega_{z_0}}{k}, \\
 \delta x &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2}, \quad \delta y = \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2}, \\
 \delta x_2 &= \frac{\Delta n_{x_0}}{\omega_0^2} - \frac{r \Delta \omega_{y_0}}{k}, \\
 \delta y_2 &= \frac{\Delta n_{y_0}}{\omega_0^2} + \frac{r \Delta \omega_{x_0}}{k}.
 \end{aligned} \right\} \quad (6.182)$$

Из сравнения выражений (6.173), (6.174) с выражениями (6.180) и (6.182) вытекает, что варианты (6.180) и (6.182) дают меньшие значения ошибок. Это относится как к ошиб-

кам ориентации, так и к полным ошибкам определения координат.

Заметим в заключение, что из полученных решений уравнений ошибок вытекает, что в случае применения совместной астро-доплеровской коррекции начальные ошибки со временем затухают, поэтому начальные условия работы инерциальной системы могут быть взяты приближенно. Здесь допустимы достаточно большие отклонения начальных условий от их точных значений.

**6.5.2. О возможности астрономической коррекции по одной звезде.** Рассмотрев в предшествующих параграфах астрономическую коррекцию инерциальных систем, мы пришли к выводу, что для устранения возрастающих со временем ошибок, вызванных свободными уходами гироскопов инерциальной системы, необходима одновременная или поочередная коррекция по двум звездам. Если иметь в виду полное устранение ошибок от инструментальных погрешностей гироскопов, то и при астро-доплеровской коррекции также необходима астрономическая коррекция по двум звездам. Однако можно говорить не о полном устранении влияния указанных погрешностей, а о том, чтобы уменьшить их влияние до уровня, удовлетворяющего некоторым заданным требованиям к точности работы инерциальной системы. В этом случае оказывается возможным говорить об астрокоррекции инерциальной системы по одной звезде, во всяком случае при постоянных инструментальных погрешностях гироскопов.

Прежде чем перейти к обсуждению этой возможности, полезно остановиться на следующем уже отмечавшемся ранее обстоятельстве. Как в случае автономной инерциальной системы с двумя ориентированными в плоскости горизонта ньютонометрами (установленными по осям  $x$  и  $y$  платформы, ось  $z$  которой в невозмущенном положении совпадает с  $r$ ), так и в случае этой схемы с доплеровской коррекцией, инструментальные погрешности гироскопов (постоянные) не приводят к возрастающему отклонению оси  $z$  платформы от вертикали (от направления радиуса-вектора  $r$ ). Эти отклонения остаются ограниченными. Возрастает со временем лишь ошибка азимутальной ориентации платформы, т. е. отклонение осей  $x$  и  $y$  от их невозмущенного положения в плоскости горизонта. Таким образом, платформа уходит лишь вокруг



оси  $z$ . В самом деле, ошибки  $\theta_{1x_0}$ ,  $\theta_{1y_0}$ ,  $\theta_{1z_0}$  ориентации платформы равны:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{1x_0} &= -\frac{\delta y}{r}, & \theta_{1y_0} &= \frac{\delta x}{r}, \\ \theta_{1z_0} &= -\theta_{z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.183)$$

Но во всех случаях, когда отсутствует астрономическая коррекция, угол  $\theta_{1z_0}$  растет со временем, так как

$$\dot{\theta}_{z_0} = -\Delta\omega_{z_0}t, \quad (6.184)$$

в то время как решения  $\delta x$ ,  $\delta y$  уравнений ошибок первой группы ограничены при постоянных инструментальных погрешностях, а следовательно, ограничены и величины  $\theta_{1x_0}$ ,  $\theta_{1y_0}$ .

При этом в схемах с доплеровской коррекцией установившиеся значения углов  $\theta_{1x_0}$ ,  $\theta_{1y_0}$ , вызванные постоянными погрешностями  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ , содержат множителем  $\frac{1}{1+k_2}$ . Это видно из уравнений (5.311) — (5.314) и (5.335). Если выбрать величину  $k_2$  достаточно большой, то упомянутые установившиеся значения углов  $\theta_{1x_0}$ ,  $\theta_{1y_0}$  могут быть сделаны достаточно малыми. Тогда ось  $z$  платформы инерциальной системы будет с большой точностью совпадать с направлением вертикали.

Что касается полных ошибок определения координат, то, когда астрокоррекция отсутствует, они содержат растущие со временем составляющие, зависящие от  $\Delta\omega_{x_0}$ ,  $\Delta\omega_{y_0}$ .

Однако в случае, если сигналы доплеровской коррекции входят в управляющие моменты гиropлатформы в соответствии с равенствами (5.321), указанные составляющие при заданном времени работы системы также могут быть сделаны малыми за счет выбора величины коэффициента  $k_2$ . Это следует из равенств (5.350). Таким образом, в этом случае, если единственными инструментальными погрешностями являются погрешности гироскопов, остается лишь одна вызываемая ими существенная ошибка, которая не затронута доплеровской коррекцией, — ошибка  $\theta_{z_0}$  ориентации платформы в азимуте. Она определяется формулой (6.184). Ясно, что для устранения этой ошибки достаточно астрономической коррекции лишь по одной звезде.

Заметим, что проведенное выше рассуждение, строго говоря, справедливо лишь при отсутствии других инстру-

ментальных погрешностей, кроме погрешностей гироскопов, или при малой их величине по сравнению с последними. Так, из равенств (5.350), (5.352) следует, что будут иметь место возрастающие со временем ошибки, зависящие от инструментальных погрешностей доплеровского измерителя скорости. При астрономической коррекции по двум звездам эти ошибки устраняются, что следует из формул (6.174) для полных ошибок определения координат в этом случае.

Отметим еще, что наличие достаточно точной вертикали в случае доплеровской коррекции (малость углов  $\theta_{1x_0}$  и  $\theta_{1y_0}$ ) позволяет осуществить следующий способ астрокоррекции полных ошибок определения координат. Можно измерять углы между осью  $z$  (вертикалью) и осями телескопов, следящих за двумя звездами, затем воспользоваться для вычисления координат текущего местоположения уравнениями типа уравнений (6.38). Однако такая коррекция также требует двух звезд.

## Динамика инерциальных систем с учетом случайного характера инструментальных погрешностей

### § 7.1. Основные соотношения корреляционной теории случайных процессов

Инструментальные погрешности инерциальной системы и устройств коррекции могут быть не только детерминированными, но и случайными функциями времени. Тогда ошибки определения инерциальной системой навигационных параметров будут содержать случайные составляющие. В этом случае анализ уравнений ошибок инерциальных систем может быть проведен методами теории случайных функций и статистической динамики. Ниже приводятся (без доказательства) основные соотношения этой теории \*). Мы ограничимся при этом рамками корреляционной теории действительных стационарных (и стационарно связанных) случайных функций времени.

Действительной случайной функцией времени [случайным процессом  $X(t)$ ] называется множество действительных функций  $x(t)$ , обладающих определенными статистическими свойствами. Полное и исчерпывающее задание действительной случайной функции времени  $X(t)$  может быть сделано с помощью соответствующих ей функций  $f_1, f_2 \dots$  плотности распределения вероятностей. Функцией плотности распределения вероятностей  $k$ -го порядка  $f_k(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_k, t_k)$  для случайной функции  $X(t)$  называется сложная вероятность того, что значение случайной функции  $X(t)$  в момент времени  $t_1$  лежит в диапазоне  $x_1 < X(t_1) < x_1 + dx_1$ , в момент времени  $t_2$  — в диапазоне  $x_2 < X(t_2) < x_2 + dx_2$ , ..., наконец, в момент времени  $t_k$  — в диапазоне  $x_k < X(t_k) < x_k + dx_k$ . Задание плотности вероятности  $k$ -го порядка

---

\*) Подробное и обстоятельное изложение затрагиваемых здесь вопросов можно найти в книге: Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.

означает по существу задание ряда плотностей вероятности  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , ибо имеет место соотношение \*)

$$f_{k-1} = \int_{-\infty}^{\infty} f_k dx_k. \quad (7.1)$$

Корреляционная теория оперирует понятиями математического ожидания и корреляционной функции случайной функции времени. Математическое ожидание и корреляционная функция определяются, как мы увидим сейчас, лишь функциями плотности вероятности первого и второго порядка, т. е. это существенно более бедные характеристики случайных функций, чем полная система функций плотности вероятности. Однако в большинстве практических задач эти характеристики оказываются достаточными.

Математическое ожидание  $M[X(t)] = m_x(t)$  случайной функции  $X(t)$  определяется соотношением

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx, \quad (7.2)$$

а корреляционная функция  $K_x$  — соотношением

$$\begin{aligned} K_x(t, t') &= M\{[X(t) - m_x(t)][X(t') - m_x(t')]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - m_x(t)][x' - m_x(t')] f_2(x, x', t, t') dx dx'. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Дисперсия  $D_x$  случайной функции  $X(t)$  равна значению корреляционной функции при  $t' = t$ , т. е.

$$D_x = K_x(t, t) = M[X(t) - m_x(t)]^2. \quad (7.4)$$

Дисперсия  $D_x$  случайной функции  $X(t)$  есть, таким образом, математическое ожидание квадрата отклонения значений случайной функции от ее математического ожидания. Поэтому среднеквадратичное отклонение  $\bar{x}(t)$  функции  $X(t)$  от ее математического ожидания равно  $\sqrt{D_x(t)}$ .

---

\*) Здесь и в дальнейшем предполагается, что несобственные интегралы существуют в смысле главного значения.

Наряду с корреляционными функциями  $K_x(t, t')$ ,  $K_y(t, t')$  случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  вводится их взаимная корреляционная функция

$$K_{xy}(t, t') = M \{ [X(t) - m_x(t)] [Y(t') - m_y(t')] \}. \quad (7.5)$$

Если  $K_{xy}(t, t') \equiv 0$ , то случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$  называются некоррелированными. Для действительных случайных функций

$$K_{xy}(t, t') = K_{yx}(t', t). \quad (7.6)$$

Если

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad (7.7)$$

то из равенств (7.3), (7.5), (7.6) вытекает, что

$$K_z(t, t') = K_x(t, t') + K_y(t, t') + K_{xy}(t, t') + K_{xy}(t', t). \quad (7.8)$$

Отсюда следует, что дисперсия суммы некоррелированных случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  равна сумме дисперсий этих функций.

Если

$$Y(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}, \quad (7.9)$$

то корреляционная функция случайной функции  $Y(t)$  равна

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^{2n} K_x(t, t')}{\partial t^n \partial t'^n}. \quad (7.10)$$

Аналогично, если

$$Y(t) = \frac{d^p X(t)}{dt^p}, \quad Z(t) = \frac{d^q X(t)}{dt^q}, \quad (7.11)$$

то взаимная корреляционная функция случайных функций  $Y(t)$  и  $Z(t)$  находится в виде

$$K_{yz}(t, t') = \frac{\partial^{p+q} K_x(t, t')}{\partial t^p \partial t'^q}. \quad (7.12)$$

Если случайная функция задана в виде

$$X(t) = Af(t), \quad (7.13)$$

где  $A$  — случайная постоянная величина, а  $f(t)$  — неслучайная (детерминированная) функция времени, то

$$K_x(t, t') = M[A]^2 f(t) f(t') = D_A f(t) f(t'). \quad (7.14)$$

Аналогично для двух случайных функций

$$X = Af(t) \quad \text{и} \quad Y = B\varphi(t) \quad (7.15)$$

взаимная корреляционная функция

$$K_{xy}(t, t') = M[AB] f(t) \varphi(t'), \quad (7.16)$$

где  $M[AB]$  — взаимный корреляционный момент случайных величин  $A$  и  $B$ .

В дальнейшем для нас особое значение будут иметь стационарные и стационарно связанные случайные функции. Они характерны тем, что вид их функций плотности вероятности не зависит от начала отсчета времени. В соответствии с этим корреляционные и взаимные корреляционные функции будут зависеть лишь от разности  $t - t'$  аргументов  $t$  и  $t'$ :

$$k_x = k_x(\tau), \quad k_{xy} = k_{xy}(\tau), \quad \tau = t - t'. \quad (7.17)$$

В этом случае, очевидно,

$$D_x = k_x(0). \quad (7.18)$$

Из определения корреляционной  $k_x(\tau)$  и взаимных корреляционных  $k_{xy}(\tau)$ ,  $k_{yx}(\tau)$  функций вытекают следующие их свойства:

$$\left. \begin{aligned} k_x(\tau) &= k_x(-\tau), \quad k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau), \\ |k_x(\tau)| &\leq k_x(0) = D_x = \text{const}, \\ |k_{xy}(\tau)| &\leq \sqrt{D_x D_y} = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Отметим еще, что если

$$Z(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}, \quad (7.20)$$

то, согласно равенству (7.10),

$$k_z(\tau) = (-1)^n \frac{d^{2n} k_x(\tau)}{d\tau^{2n}}, \quad (7.21)$$

откуда следует, что все производные стационарной случайной функции (если эти производные существуют) суть стационарные случайные функции. Обратное утверждение не имеет

места. В результате интегрирования стационарной случайной функции может быть получена функция нестационарная.

Для характеристики стационарной случайной функции наряду с корреляционной функцией употребляется также спектральная плотность  $S_x(\omega)$ , представляющая собой преобразование Фурье корреляционной функции  $k_x(\tau)$ :

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (7.22)$$

В свою очередь корреляционная функция выражается через спектральную плотность интегралом

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (7.23)$$

т. е. корреляционная функция является преобразованием Фурье для спектральной плотности.

Из равенства (7.23) следует, что

$$D_x = k_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (7.24)$$

Так как функция  $k(\tau)$  четная, то из соотношения (7.22) вытекает четность функции  $S_x(\omega)$ .

Из формул (7.8) и (7.22) следует также, что спектральная плотность суммы двух некоррелированных стационарных случайных функций равна сумме их спектральных плотностей.

Из теории стационарных случайных функций известно\*), что любая такая функция  $X(t)$  представима на отрезке  $-T < t < T$  в виде разложения

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{j\omega_l t}. \quad (7.25)$$

Здесь  $a_l$  — взаимно некоррелированные случайные величины, математические ожидания которых равны нулю, а

$$\omega_l = \frac{\pi l}{2T}. \quad (7.26)$$

---

\*) См., например, книгу, указанную в подстрочном примечании на стр. 490.

Дисперсии  $D_l$  случайных величин  $a_l$  равны коэффициентам разложения в ряд Фурье корреляционной функции  $k_x(\tau)$  в интервале  $-2T < \tau < 2T$ :

$$k_x(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l e^{j\omega_l \tau}, \quad \omega_l = \frac{\pi l}{2T}. \quad (7.27)$$

Таким образом,

$$D_l = M[a_l]^2 = \frac{1}{4T} \int_{-2T}^{2T} k_x(\tau) e^{j\omega_l \tau} d\tau. \quad (7.28)$$

Переход в формуле (7.27) к пределу при  $T \rightarrow \infty$  дает соотношение (7.23). Переход же к пределу при  $T \rightarrow \infty$  в формуле (7.25) дает интегральное представление стационарной случайной функции  $X(t)$ :

$$X(t) = m_x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (7.29)$$

где случайная функция

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j\omega t} dt, \quad (7.30)$$

так что ее корреляционная функция представляется выражением

$$K_Q(\omega, \omega') = S_x(\omega) \delta(\omega - \omega'), \quad (7.31)$$

где  $\delta(\omega - \omega')$  — дельта-функция Дирака \*).

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть дифференциальное уравнение, связывающее случайные функции  $X(t)$  и  $Y(t)$ , задано в виде

$$P(D)Y = e(D)X, \quad (7.32)$$

где через  $P(D)$  и  $e(D)$  обозначены полиномы с постоянными коэффициентами от оператора дифференцирования  $D = \frac{d}{dt}$ .

Пусть функция  $X(t)$  стационарна и пусть известны математическое ожидание функции  $X(t)$ , а также ее корреляционная

---

\*) Обычно допускают, что корреляционная функция может иметь разрывы первого рода и включать в себя дельта-функции.



функция  $k_x(\tau)$  или спектральная плотность  $S_x(\omega)$ . Пусть также начальные условия функции  $Y(t)$  заданы как некоторые случайные величины. Требуется найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции  $Y(t)$ , являющуюся решением уравнения (7.32).

Решение однородного  $[X(t) \equiv 0]$  уравнения (7.32) при случайных начальных условиях находится, очевидно, таким же образом, что и обычное решение при детерминированных начальных условиях. Оно получится в виде суммы некоторых функций времени со случайными коэффициентами, зависящими от случайных начальных условий. Если заданы математические ожидания, дисперсии начальных условий и их взаимные корреляционные моменты, то можно легко найти математическое ожидание и дисперсию решения однородного уравнения (7.32). Если выполнены условия устойчивости, т. е. если корни  $\alpha_i$  характеристического уравнения  $P(\alpha) = 0$  имеют отрицательные вещественные части, то математическое ожидание и дисперсия решения однородного уравнения (7.32) будут, очевидно, стремиться с течением времени к нулю.

Рассмотрим решение неоднородного уравнения (7.32) при нулевых начальных условиях. Применяя к обеим частям равенства (7.32) операцию математического ожидания и замечая, что она перестановочна с операцией дифференцирования, приходим к следующему уравнению, связывающему математические ожидания  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$ :

$$P(D)m_y(t) = e(D)m_x(t). \quad (7.33)$$

Это уравнение решается, очевидно, обычными способами.

Осталось найти дисперсию  $D_y$  решения неоднородного уравнения (7.32). При этом можно, очевидно, оставить в правой части вместо функции  $X(t)$  центрированную случайную функцию

$$X^0(t) = X(t) - m_x(t), \quad (7.34)$$

математическое ожидание которой равно нулю. Соответствующее значение  $Y(t)$  обозначим через  $Y^0(t)$ . Это будет, очевидно, также центрированная (с равным нулю математическим ожиданием) случайная функция.

Вместо уравнения (7.32) получим теперь уравнение

$$P(D)Y^0(t) = e(D)X^0(t). \quad (7.35)$$

Пусть  $g(t)$  — решение уравнения (7.35) в случае, когда вместо  $X^0(t)$  в правую часть его подставлена импульсная функция  $\delta(t)$ .

Функцию  $g(t)$  называют обычно весовой функцией или импульсной переходной функцией.

Тогда, как известно, решение уравнения (7.35) при нулевых начальных условиях может быть формально записано следующим образом:

$$Y^0(t) = \int_{t_0}^t g(t - \tau) X^0(\tau) d\tau. \quad (7.36)$$

В соответствии с этим равенством и определением корреляционной функции (7.3) и дисперсии (7.4) получим:

$$\left. \begin{aligned} K_y(t, t') &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} g(t - \tau) g(t' - \tau') k_x(\tau, \tau') d\tau d\tau', \\ D_y(t) &= K_y(t, t). \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Для отыскания дисперсии  $D_y(t)$  случайной функции  $Y^0(t)$ , когда случайная функция  $X^0(t)$  стационарна, можно поступить и иначе. Согласно равенству (7.25), стационарная функция  $X^0(t)$  может быть представлена разложением

$$X^0(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{j\omega_l t}. \quad (7.38)$$

Для каждого элементарного слагаемого правой части равенства (7.38) можно найти решение  $y_l(t, \omega_l)$  уравнения (7.35). В соответствии с формулой (7.36) получаем:

$$y_l(t, \omega_l) = \int_{t_0}^t g(t - \tau) e^{j\omega_l \tau} d\tau. \quad (7.39)$$

Теперь

$$Y^0(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l y_l(t, \omega_l) \quad (7.40)$$

и, значит, так как случайные величины  $a_l$  не коррелированы,

$$D_y(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} M[a_l]^2 |y(t, \omega_l)|^2. \quad (7.41)$$

Или с учетом равенства (7.28)

$$D_y(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l |y_l(t, \omega_l)|^2. \quad (7.42)$$

Переход в формулах (7.28), (7.39), (7.42) к пределу при  $T \rightarrow \infty$  с учетом соотношений (7.27), (7.22), (7.23) приводит к такому выражению для дисперсии:

$$D_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |y(t, \omega)|^2 d\omega, \quad (7.43)$$

где

$$y(t, \omega) = \int_{t_0}^t g(t - \tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (7.44)$$

Формулы (7.37), (7.42), (7.43) дают значение дисперсии случайной функции  $Y^0(t)$ , а значит, и случайной функции  $Y(t)$  в функции времени. Если выполнены условия устойчивости, то можно получить значение дисперсии  $D_y$  по затухании переходных процессов [когда случайный процесс  $Y^0(t)$  становится стационарным при стационарном процессе  $X^0(t)$ ], т. е.  $D_y(t = \infty)$ . В этом случае, очевидно,

$$|y_l(t, \omega_l)| = |\Phi(j\omega_l)|, \quad (7.45)$$

где через  $\Phi(j\omega_l)$  обозначена передаточная функция

$$\Phi(j\omega_l) = \frac{e(j\omega_l)}{P(j\omega_l)}. \quad (7.46)$$

Вместо формулы (7.42) получим теперь формулу

$$D_y(\infty) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} D_l |\Phi(j\omega_l)|^2, \quad (7.47)$$

а вместо формулы (7.43) — соотношение

$$D_y(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) |\Phi(j\omega)|^2 d\omega. \quad (7.48)$$

Мы рассмотрели случай, когда правая часть уравнения (7.35) зависела от одной случайной функции.

Если правая часть уравнения (7.35) зависит не от одной, а от нескольких случайных функций  $X_l(t)$ , т. е. если правая

часть представляется суммой

$$F(t) = \sum_{i=1}^n e_i(D) X_i(t), \quad (7.49)$$

то описанным выше способом могут быть найдены дисперсии  $D_{y_i}(t)$ , соответствующие каждой из случайных функций  $X_i(t)$ . В случае, когда случайные функции  $X_i(t)$  попарно не коррелированы, дисперсия  $D_y(t)$ , соответствующая всей правой части (7.49), получается простым суммированием дисперсий  $D_{y_i}(t)$ . Если же случайные функции  $X_i(t)$  коррелированы, то для вычисления дисперсии следует воспользоваться формулами, вытекающими из соотношений (7.4), (7.8). При этом понадобятся взаимные корреляционные функции  $K_{y_i y_j}(t, t')$ . Очевидно, что если решению  $y_i(t)$  уравнения (7.35) с правой частью (7.49) соответствует функция веса  $g_i(t)$ , а решению  $y_j(t)$  — функция веса  $g_j(t)$ , то

$$K_{y_i y_j}(t, t') = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} g_i(t - \tau) g_j(t' - \tau') K_{x_i x_j}(\tau, \tau') d\tau d\tau', \quad (7.50)$$

где  $K_{x_i x_j}(\tau, \tau')$  — взаимная корреляционная функция случайных функций  $X_i(t)$  и  $X_j(t)$ , входящих в выражение (7.49).

Далее, если правая часть уравнения (7.35) не коррелирована со случайными начальными условиями, то дисперсия решения уравнения (7.35) с ненулевыми начальными условиями получается как сумма найденной выше дисперсии  $D_y(t)$  с дисперсией решения однородного уравнения. При наличии корреляции между случайными начальными условиями и случайными функциями в правой части уравнения эту корреляцию необходимо, разумеется, также учитывать при вычислении общей дисперсии.

Отметим еще следующее. Если даны несколько дифференциальных уравнений типа (7.35)

$$P_i(D) Y_i(t) = e_i(D) X_i(t), \quad (7.51)$$

причем их правые части коррелированы, то при вычислении дисперсии случайной функции

$$Z(t) = \sum_i Y_i(t) \quad (7.52)$$

также необходимо учитывать, что функции  $Y_i(t)$  оказываются коррелированными. Вычисление дисперсии должно быть про-

ведено с привлечением формул типа формулы (7.8), причем взаимные корреляционные функции  $K_{y_i y_j}(t, t')$  находятся из соотношений, аналогичных соотношению (7.50).

К решению уравнений типа (7.35) сводится задача исследования случайных движений, в сущности, любой линейной динамической системы. Приведенные выше соотношения позволяют найти математические ожидания и дисперсии при заданных статистических характеристиках случайных возмущающих воздействий и начальных условий.

В предшествующем рассмотрении мы полагали, что математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты случайных начальных условий известны. Полагались также известными математические ожидания, корреляционные функции (или спектральные плотности) случайных функций, образующих правую часть уравнения (7.35), а также взаимные корреляционные функции этих случайных функций друг с другом и с начальными условиями. Все эти исходные статистические характеристики при решении конкретных задач должны быть либо заданы из априорных соображений, либо найдены в результате постановки специальных экспериментов.

Экспериментальное определение математических ожиданий, корреляционных и взаимных корреляционных функций само по себе представляет достаточно сложную задачу. При ее решении, как правило, исходят из предположения об эргодичности рассматриваемых случайных процессов. В случае выполнения гипотезы эргодичности для приближенного определения математического ожидания и корреляционной функции достаточно иметь запись одной реализации  $x(t)$  случайной функции  $X(t)$  в достаточно большом интервале времени  $0 < t < T$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} m_x &\approx \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \\ K_x(\tau) &\approx \frac{1}{T} \int_0^t [x(t+\tau) - m_x][x(t) - m_x] dt. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Аналогично по одновременно записанным реализациям  $x(t)$ ,  $y(t)$  двух случайных функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  находится их взаимная корреляционная функция.

## § 7.2. Влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки автономных инерциальных систем

**7.2.1. Случай неподвижного объекта.** Рассмотрим влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки автономных инерциальных систем. Ограничимся при этом двумя случаями: случаем неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$  объекта и случаем движения спутника по круговой орбите. Эти случаи являются достаточно характерными, так как первый дает хорошее приближение для медленного движения объекта, а второй — для слабо возмущенного движения спутника. Они позволяют, как мы увидим, хорошо проследить зависимость ошибок от случайных инструментальных погрешностей при изменении характера движения объекта.

В первом случае, когда объект неподвижен в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , уравнения ошибок автономной инерциальной системы сводятся, как показано в § 1.2, к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x, \\ \delta\ddot{z} - 2\omega_0^2 \delta z &= \Delta n_z, \\ \dot{\theta}_x &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z, \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_x, \quad \delta z_2 = \delta z, \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z. \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

Здесь  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  — полные ошибки определения координат, а  $\theta_{1x}$ ,  $\theta_{1y}$ ,  $\theta_{1z}$  — ошибки ориентации платформы инерциальной системы.

Из симметрии уравнений (7.54) по переменным  $\delta x$  и  $\delta y$  вытекает, что вместо этих уравнений достаточно рассмотреть систему

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y, \\ \dot{\theta}_y &= \Delta m_y, \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \\ \theta_{1y} &= \frac{\delta x}{r} \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

и уравнение

$$\delta \ddot{z}_2 - 2\omega_0^2 \delta z_2 = \Delta n_z. \quad (7.56)$$

Будем считать, что инструментальные погрешности ньютонометров  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_z$  и гироскопов  $\Delta m_y$  являются центрированными случайными стационарными функциями времени. Пусть эти функции не коррелированы друг с другом и пусть их спектральные плотности суть:

$$\left. \begin{aligned} S_{\Delta n_x} &= \frac{D_{\Delta n_x}}{\pi} \frac{\alpha_x}{\alpha_x^2 + \omega^2}, \\ S_{\Delta n_z} &= \frac{D_{\Delta n_z}}{\pi} \frac{\alpha_z}{\alpha_z^2 + \omega^2}, \\ S_{\Delta m_y} &= \frac{D_{\Delta m_y}}{\pi} \frac{\beta_y}{\beta_y^2 + \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.57)$$

Наконец, пусть начальные условия уравнений (7.55), (7.56) — независимые центрированные случайные величины  $\delta x^0$ ,  $\delta \dot{x}^0$ ,  $\theta_y^0$ ,  $\delta z^0$ ,  $\delta \dot{z}^0$  с известными дисперсиями  $D_{\delta x^0}$ ,  $D_{\delta \dot{x}^0}$ ,  $D_{\theta_y^0}$ ,  $D_{\delta z^0}$ ,  $D_{\delta \dot{z}^0}$ . Примем, что начальные условия не коррелированы с инструментальными погрешностями.

Найдем дисперсии случайных функций  $\delta z_2$ ,  $\delta x_2$  и  $\theta_{1y}$ .

Начнем с уравнения (7.56). Дисперсию  $D_{\delta z_2}$  ввиду независимости (некоррелированности)  $\delta z^0$ ,  $\delta \dot{z}^0$ ,  $\Delta n_z$  можно представить в виде суммы

$$D_{\delta z_2} = D_{\delta z^0} + D_{\delta \dot{z}^0} + D_{\Delta n_z}. \quad (7.58)$$

Так как решение однородного уравнения (7.56) имеет вид

$$\delta z_2 = \delta z^0 \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t + \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t, \quad (7.59)$$

то, в соответствии с равенством (7.14), имеем:

$$D_{\delta z^0} = D_{\delta z^0} \operatorname{ch}^2 \omega_0 \sqrt{2} t, \quad D_{\delta \dot{z}^0} = \frac{D_{\delta \dot{z}^0}}{2\omega_0^2} \operatorname{sh}^2 \omega_0 \sqrt{2} t. \quad (7.60)$$

Осталось вычислить дисперсию  $D_{\Delta n_z}$  решения уравнения (7.56) при нулевых начальных условиях. Для этого

заметим, что весовая функция уравнения (7.56) имеет вид

$$g(t) = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t, \quad (7.61)$$

а корреляционная функция  $K_{\Delta n_z}(t, t')$  случайной функции  $\Delta n_z(t)$  в силу соотношений (7.23), (7.57) равна:

$$K_{\Delta n_z}(t, t') = D_{\Delta n_z} e^{-\alpha_z |t-t'|}. \quad (7.62)$$

Поэтому, в соответствии с равенствами (7.37), при  $t_0 = 0$  получаем:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z}(t) = \frac{D_{\Delta n_z}}{2\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} (t-\tau) \times \\ \times \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} (t-\tau') e^{-\alpha_z |\tau-\tau'|} d\tau d\tau'. \quad (7.62a)$$

Выполнив интегрирование\*) в правой части равенства (7.62a), найдем:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z}(t) = \frac{D_{\Delta n_z}}{2\omega_0^2(2\omega_0^2 - \alpha_z^2)} \left\{ -\alpha_z \left( \frac{1}{2\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t - t \right) + \right. \\ \left. + \frac{4\omega_0^2}{2\omega_0^2 - \alpha_z^2} \left[ 1 - e^{-\alpha_z t} \left( \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\alpha_z}{\omega_0 \sqrt{2}} \operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t \right) \right] + \operatorname{sh}^2 \omega_0 \sqrt{2} t \right\}. \quad (7.63)$$

Легко видеть, что  $D_{\delta z_2}^{\Delta n_z}(0) = 0$ , как это и должно быть. При малых значениях  $t$ , раскладывая правую часть равенства (7.63) в ряд, получаем следующее приближенное выражение:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z}(t) = D_{\Delta n_z} \left( \frac{t^4}{4} - \alpha_z \frac{t^5}{15} \right). \quad (7.64)$$

При достаточно большом  $t$ , когда  $\operatorname{sh} \omega_0 \sqrt{2} t \approx \operatorname{ch} \omega_0 \sqrt{2} t \approx \frac{1}{2} e^{\omega_0 \sqrt{2} t}$ , из формулы (7.63) можно получить следующее

---

\*) Для вычисления внутреннего интеграла надо разбить область интегрирования на две:  $\tau - \tau' > 0$  и  $\tau - \tau' \leq 0$ .



асимптотическое выражение для дисперсии:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} = \frac{D_{\Delta n_z} e^{2\omega_0 \sqrt{2} t}}{8\omega_0^3 \sqrt{2} (\omega_0 \sqrt{2} + \alpha_z)}. \quad (7.65)$$

Если  $\alpha_z \gg \omega_0$ , то

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} \approx \frac{D_{\Delta n_z} e^{2\omega_0 \sqrt{2} t}}{8\omega_0^3 \alpha_z \sqrt{2}}. \quad (7.66)$$

Обратимся к системе уравнений (7.55) и найдем дисперсии  $D_{\delta x_2}(t)$  и  $D_{\theta_{1y}}(t)$ . Для этого надо, очевидно, найти корреляционные функции случайных функций  $\delta x$  и  $\theta_y$ , а также их взаимную корреляционную функцию.

Аналогично представлению (7.58) имеем:

$$K_{\theta_y}(t, t') = K_{\theta_y}^0(t, t') + K_{\theta_y}^{\Delta m_y}(t, t'). \quad (7.67)$$

Очевидно,

$$K_{\theta_y}^0 = D_{\theta_y}^0. \quad (7.68)$$

Далее, весовая функция второго уравнения (7.55) равна единице, а корреляционная функция  $K_{\Delta m_y}(t, t')$  случайной функции  $\Delta m_y(t)$  равна:

$$K_{\Delta m_y}(t, t') = D_{\Delta m_y} e^{-\beta_y |t-t'|}. \quad (7.69)$$

Поэтому ( $t_0 = 0$ ) по первой формуле (7.37) находим:

$$K_{\theta_y}^{\Delta m_y}(t, t') = D_{\Delta m_y} \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\beta_y (\tau - \tau')} d\tau d\tau', \quad (7.70)$$

откуда

$$K_{\theta_y}^{\Delta m_y} = D_{\Delta m_y} \left[ \frac{2}{\beta_y} \left( \frac{t+t'}{2} - \frac{|t-t'|}{2} \right) + \frac{1}{\beta_y^2} (-e^{-\beta_y |t-t'|} + e^{-\beta_y t'} + e^{-\beta_y t} - 1) \right]. \quad (7.71)$$

Теперь

$$\left. \begin{aligned} D_{\theta_y}^{\Delta m_y}(t) &= 2D_{\Delta m_y} \left[ \frac{t}{\beta_y} + \frac{1}{\beta_y^2} (e^{-\beta_y t} - 1) \right], \\ D_{\theta_y}(t) &= D_{\theta_y^0} + D_{\theta_y}^{\Delta m_y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.72)$$

С течением времени второе слагаемое в квадратных скобках перестает играть существенную роль, и при достаточно больших  $t$  имеет место асимптотическая формула

$$D_{\theta_y} = \frac{2D_{\Delta m_y} t}{\beta_y}. \quad (7.73)$$

При малых значениях  $t$  получается приближенное равенство

$$D_{\theta_y} = D_{\Delta m_y} t^2 + D_{\theta_y^0}. \quad (7.74)$$

Рассмотрим первое уравнение (7.55). Так как мы условились считать случайные функции  $\Delta n_x$  и  $\Delta m_y$  некоррелированными, то можно написать, что

$$D_{\delta x}(t) = D_{\delta x}^{\delta x^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta m_y}. \quad (7.75)$$

Здесь, очевидно,

$$D_{\delta x}^{\delta x^0} = D_{\delta x^0} \cos^2 \omega_0 t, \quad D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} = \frac{D_{\delta \dot{x}^0}}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t, \quad (7.76)$$

и задача сводится к вычислению  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$  и  $D_{\delta x}^{\Delta m_y}$ .

Оставляя в правой части первого уравнения (7.55) лишь  $\Delta n_x$ , замечаем, что в этом случае весовая функция будет равна:

$$g(t) = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (7.77)$$

Отсюда и из соотношений (7.37), (7.57), (7.62) получаем:

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x}(t) &= \\ &= \frac{D_{\Delta n_x}}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) \sin \omega_0(t-\tau') e^{-a_x |\tau-\tau'|} d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Вычисление интеграла, стоящего в правой части этого равенства, приводит к формуле

$$D_{\delta x}^{\Delta n_x}(t) = \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\alpha_x t} \left( \frac{\alpha_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}. \quad (7.79)$$

При малых  $t$  имеем приближенное выражение:

$$D_{\delta x}^{\Delta n_x}(t) = D_{\Delta n_x} \frac{t^4}{4}. \quad (7.80)$$

Наоборот, при достаточно больших  $t$  из формулы (7.79) следует асимптотическое представление

$$D_{\delta x}^{\Delta n_x}(t) = \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left[ \frac{\alpha_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right] \quad (7.81)$$

или приближенно

$$D_{\delta x}^{\Delta n_x}(t) = \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x \omega_0^2} t, \quad (7.82)$$

если можно считать, что

$$\alpha_x^2 \gg \omega_0^2. \quad (7.83)$$

Оставим теперь в правой части первого уравнения (7.55) лишь  $-r \Delta \dot{m}_y$ . Весовая функция по отношению к этому возмущению задана равенством (7.77). В то же время, согласно равенствам (7.69) и (7.21),

$$K_{\Delta \dot{m}_y}(t, t') = D_{\Delta m_y} [2\beta_y \delta(t - t') - \beta_y^2 e^{-\beta_y |t - t'|}]. \quad (7.84)$$

Поэтому

$$D_{\delta x}^{\Delta m_y}(t) = \frac{\beta_y r^2 D_{\Delta m_y}}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t \sin \omega_0(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau') \times \\ \times [2\delta(\tau - \tau') - \beta_y e^{-\beta_y |\tau - \tau'|}] d\tau d\tau'. \quad (7.85)$$

Но

$$\left. \begin{aligned} \int_0^t \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) \sin \omega_0(t-\tau') \delta(\tau-\tau') d\tau d\tau' &= \\ &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right), \\ \int_0^t \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) \sin \omega_0(t-\tau') e^{-\beta_y |\tau-\tau'|} d\tau d\tau' &= \\ &= \int_0^t \left[ \sin \omega_0(t-\tau') \int_0^{\tau'} \sin \omega_0(t-\tau) e^{-\beta_y(\tau'-\tau)} d\tau + \right. \\ &+ \left. \sin \omega_0(t-\tau') \int_{\tau'}^t \sin \omega_0(t-\tau) e^{-\beta_y(\tau-\tau')} d\tau \right] d\tau' = \\ &= \frac{1}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left\{ \beta_y \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &+ \frac{2\omega_0^2}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta_y t} \left( \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \\ &\quad \left. - \sin^2 \omega_0 t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.86)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta m_y}(t) &= \frac{r^2 \beta_y D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left\{ t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \right. \\ &- \frac{2\beta_y}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta_y t} \left( \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] + \\ &\quad \left. + \frac{\beta_y}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Разложив выражение, стоящее в правой части этого равенства, в ряд по степеням  $t$ , приходим к следующей приближенной формуле:

$$D_{\delta x}^{\Delta m_y}(t) = \frac{2r^2 \beta_y (\omega_0^2 + 2\beta_y^2) D_{\Delta m_y} t^3}{3(\beta_y^2 + \omega_0^2)}. \quad (7.88)$$

Если  $\beta_y^2 \gg \omega_0^2$ , то формула (7.88) может быть упрощена до вида

$$D_{\delta x}^{\Delta m y}(t) = \frac{4}{3} r^2 \beta_y D_{\Delta m y} t^3. \quad (7.89)$$

При больших значениях времени  $t$  из равенства (7.87) получается следующее асимптотическое выражение для дисперсии:

$$D_{\delta x}^{\Delta m y}(t) = \frac{r^2 \beta_y D_{\Delta m y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \frac{2\beta_y}{\beta_y^2 + \omega_0^2} + \frac{\beta_y}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right). \quad (7.90)$$

Приближенно

$$D_{\delta x}^{\Delta m y}(t) = \frac{r^2 D_{\Delta m y} t}{\beta_y}. \quad (7.91)$$

Если подставить теперь выражения (7.76), (7.79), (7.87) в правую часть равенства (7.75), то получим выражение для дисперсии  $D_{\delta x}(t)$  случайной функции  $\delta x$ :

$$\begin{aligned} D_{\delta x} = & D_{\delta x^0} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2} D_{\delta x^0} \sin^2 \omega_0 t + \\ & + \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ & + \frac{2}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\alpha_x t} \left( \frac{\alpha_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \left. \right\} + \frac{r^2 \beta_y D_{\Delta m y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left\{ t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \right. \\ & - \frac{2\beta_y}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta_y t} \left( \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] + \frac{\beta_y}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \left. \right\}. \end{aligned} \quad (7.92)$$

После этого, согласно последнему равенству (7.55), дисперсия функции  $\theta_{1y}$  находится по формуле

$$D_{\theta_{1y}}(t) = \frac{1}{r^2} D_{\delta x}(t). \quad (7.93)$$

Для малых значений  $t$  получается, например, следующее приближенное выражение:

$$D_{\theta_{1y}}(t) = \frac{D_{\delta x^0}}{r^2} + \frac{D_{\delta \dot{x}^0}}{r^2} t^2 + \frac{4}{3} \beta_y D_{\Delta m_y} t^3 + \frac{1}{4r^2} D_{\Delta n_x} t^4. \quad (7.94)$$

Для больших значений  $t$  асимптотически

$$\begin{aligned} D_{\theta_{1y}} = & \frac{D_{\delta x^0}}{r^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{D_{\delta \dot{x}^0}}{r^2 \omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t + \\ & + \frac{D_{\Delta n_x}}{r^2 (\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \left[ \frac{\alpha_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \frac{2}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right] + \\ & + \frac{\beta_y D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left[ t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \frac{2\beta_y}{\beta_y^2 + \omega_0^2} + \frac{\beta_y}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right]. \quad (7.95) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что с течением времени величину дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  все в большей степени определяют слагаемые, пропорциональные времени. Так что для достаточно больших значений  $t$  получаем (предполагается еще малость  $\omega_0^2$  по сравнению с  $\alpha_x^2$  и  $\beta_y^2$ ) приближенное равенство

$$D_{\theta_{1y}} = \left( \frac{D_{\Delta n_x}}{r^2 \alpha_x^2 \omega_0^2} + \frac{D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2} \right) t. \quad (7.96)$$

Чтобы закончить решение поставленной нами задачи, осталось вычислить дисперсию  $D_{\delta x_2}$  полной ошибки  $\delta x_2$  определения координаты  $x$ . В соответствии с третьим равенством (7.55) и соотношением (7.8) имеем:

$$\begin{aligned} K_{\delta x_2}(t, t') = & K_{\delta x}(t, t') + r^2 K_{\theta_y}(t, t') + \\ & + r [K_{\delta x, \theta_y}(t, t') + K_{\delta x, \theta_y}(t', t)]. \quad (7.97) \end{aligned}$$

Поэтому

$$D_{\delta x_2}(t) = D_{\delta x}(t) + r^2 D_{\theta_y}(t) + 2r K_{\delta x, \theta_y}(t, t). \quad (7.98)$$

Выражения для  $D_{\delta x}(t)$  и  $D_{\theta_y}(t)$  вычислены выше. Они определены соответственно равенством (7.92) и вторым равенством (7.72). Найдем  $K_{\delta x, \theta_y}$ .

В правые части уравнений (7.55) для  $\delta x$  и  $\theta_y$  входят случайные функции  $\Delta \dot{m}_y$  и  $\Delta m_y$ . Они, очевидно, коррелированы, причем, согласно равенствам (7.12) и (7.69), их взаимная корреляционная функция равна:

$$K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}(t, t') = -D_{\Delta m_y} \beta_y e^{-\beta_y |t-t'|} \text{sign}(t-t'). \quad (7.99)$$

Поэтому

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r \beta_y D_{\Delta m_y}}{\omega_0} \int_0^t \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) \times \\ \times e^{-\beta_y |\tau-\tau'|} \text{sign}(\tau-\tau') d\tau d\tau'. \quad (7.100)$$

Вычислив интеграл в правой части равенства (7.100), получаем:

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta_y t} - \right. \\ \left. - e^{-\beta_y t} \left( \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) - \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right]. \quad (7.101)$$

При малых значениях  $t$  приближенно

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = -\frac{r \beta_y D_{\Delta m_y}}{6} t^3. \quad (7.102)$$

При больших значениях  $t$  асимптотически

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 + \omega_0^2} \left( 1 - \frac{\beta_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right). \quad (7.103)$$

Из соотношений (7.98), (7.101), (7.92) и (7.72) получается теперь следующее выражение для дисперсии

ошибки  $\delta x_2$ :

$$\begin{aligned}
 D_{\delta x_2} = & D_{\delta x^0} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0^2} D_{\delta \dot{x}^0} \sin^2 \omega_0 t + r^2 D_{\theta^0} + \\
 & + \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\
 & + \frac{2}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\alpha_x t} \left( \frac{\alpha_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \left. \right\} + \\
 & + \frac{r^2 \omega_0^2 D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 (\beta_y^2 + \omega_0^2)} \left[ \frac{\beta_y (3\beta_y^2 + 2\omega_0^2)}{\omega_0^2} t - \frac{2(\beta_y^4 + \omega_0^2 \beta_y^2 + \omega_0^4)}{\omega_0^2 (\beta_y^2 + \omega_0^2)} + \right. \\
 & + \frac{\omega_0^2}{\beta_y^2 + \omega_0^2} e^{-\beta_y t} + \frac{2\beta_y^2}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{2\beta_y^3}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t - \\
 & - \frac{\beta_y^3}{2\omega_0^3} \sin 2\omega_0 t + \frac{\beta_y^4}{\omega_0^4} \sin^2 \omega_0 t - \frac{2\beta_y^3}{\omega_0 (\beta_y^2 + \omega_0^2)} e^{-\beta_y t} \sin \omega_0 t \left. \right]. \quad (7.104)
 \end{aligned}$$

При малых значениях  $t$ , в соответствии с равенствами (7.102), (7.94), (7.74), находим:

$$D_{\delta \dot{x}_2} = D_{\delta x^0} + r^2 D_{\theta^0} + D_{\delta \dot{x}^0} t^2 + r^2 \beta_y D_{\Delta m_y} t^3 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} t^4. \quad (7.105)$$

При больших значениях  $t$  аналогично формуле (7.96) имеем:

$$D_{\delta x_2} = \left( \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x \omega_0^2} + \frac{3r^2 D_{\Delta m_y}}{\beta_y} \right) t. \quad (7.106)$$

Заметим, что вычисление дисперсии  $D_{\delta x_2}$  можно провести и несколько иначе, чем это было сделано выше. Для этого следует рассмотреть уравнение

$$\delta \ddot{x}_2 + \omega_0^2 \delta x_2 = \Delta n_x + r \omega_0^2 \theta_y, \quad (7.107)$$

которое получается из первых трех уравнений (7.55), причем здесь надо учесть, что в силу второго и третьего из указанных уравнений начальные условия уравнения (7.107) имеют вид:

$$\delta x_2^0 = \delta x^0 + r \theta_y^0, \quad \delta \dot{x}_2^0 = \delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0. \quad (7.108)$$



Поэтому начальное значение производной  $\dot{\delta x}_2^0$  коррелировано со случайной функцией  $\theta_y(t)$ .

Дисперсию  $D_{\delta x_2}$  можно, очевидно, представить в виде суммы

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x_2}^{\Delta n_x} + \tilde{D}_{\delta x_2}. \quad (7.109)$$

Первые три слагаемых определены равенствами (7.76) и (7.79). Что касается слагаемого  $\tilde{D}_{\delta x_2}$ , то для его определения получается такое соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\delta x_2} = & r^2 D_{\theta_y^0} \cos^2 \omega_0 t + \frac{r^2}{\omega_0^2} D_{\Delta m_y} \sin^2 \omega_0 t + \\ & + r^2 \omega_0^2 \int_0^t \int_0^t K_{\theta_y}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \\ & + 2r^2 \omega_0 \cos \omega_0 t \int_0^t K_{\theta_y}(\tau, 0) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau + \\ & + 2r^2 \sin \omega_0 t \int_0^t K_{\theta_y, \Delta m_y}(\tau, 0) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau. \quad (7.110) \end{aligned}$$

Корреляционная функция  $K_{\theta_y}(\tau, \tau')$  была вычислена ранее. В соответствии с равенствами (7.67), (7.68), (7.71) она равна:

$$\begin{aligned} K_{\theta_y}(\tau, \tau') = & D_{\theta_y^0} + D_{\Delta m_y} \left[ \frac{2}{\beta_y} \left( \frac{\tau + \tau'}{2} - \frac{|\tau - \tau'|}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta_y^2} (-e^{-\beta_y |\tau - \tau'|} + e^{-\beta_y \tau'} + e^{-\beta_y \tau} - 1) \right], \quad (7.111) \end{aligned}$$

откуда также

$$\begin{aligned} K_{\theta_y}(\tau, 0) = & D_{\theta_y^0} + D_{\Delta m_y} \left[ \frac{1}{\beta_y} (\tau - |\tau|) + \frac{1}{\beta_y^2} (-e^{-\beta_y |\tau|} + e^{-\beta_y \tau}) \right]. \quad (7.112) \end{aligned}$$

В подынтегральное выражение последнего слагаемого правой части равенства (7.110) входит взаимная корреляционная

функция  $K_{\theta_y, \Delta m_y}$ . Так как  $\Delta m_y = \dot{\theta}_y$ , то

$$K_{\theta_y, \Delta m_y} = K_{\theta_y, \dot{\theta}_y}. \quad (7.113)$$

Поэтому из формул (7.111), (7.12) получаем:

$$\begin{aligned} K_{\theta_y, \Delta m_y}(\tau, \tau') &= \\ &= \frac{D_{\Delta m_y}}{\beta_y} [1 - e^{-\beta_y \tau'} + \text{sign}(\tau - \tau')(1 - e^{-\beta_y |\tau - \tau'|})], \end{aligned} \quad (7.114)$$

откуда также

$$K_{\theta_y, \Delta m_y}(\tau, 0) = \frac{D_{\Delta m_y}}{\beta_y} \text{sign} \tau (1 - e^{-\beta_y |\tau|}). \quad (7.115)$$

Теперь можно вычислить входящие в равенство (7.110) интегралы. Приняв во внимание соотношение (7.111), находим:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t K_{\theta_y}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau') \sin \omega_0(t - \tau) d\tau d\tau' &= \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} D_{\theta_y^0} (1 - \cos \omega_0 t)^2 + \\ &+ \frac{D_{\Delta m_y}}{\beta_y^2 (\beta_y^2 + \omega_0^2)} \left[ -\frac{2(\beta_y^4 + \omega_0^2 \beta_y + \omega_0^4)}{\omega_0^2 (\beta_y^2 + \omega_0^2)} + \frac{\beta_y (3\beta_y^2 + 2\omega_0^2)}{\omega_0^2} t + \right. \\ &+ 2e^{-\beta_y t} - \frac{2\beta_y (2\beta_y^2 + \omega_0^2)}{\omega_0^3} \sin \omega_0 t + \frac{2\beta_y^2}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{\beta_y^3}{2\omega_0^3} \sin 2\omega_0 t + \frac{\beta_y^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t - \frac{2\beta_y^2}{\beta_y^2 + \omega_0^2} e^{-\beta_y t} \cos \omega_0 t + \\ &\left. + \frac{2\omega_0 \beta_y}{\beta_y^2 + \omega_0^2} e^{-\beta_y t} \sin \omega_0 t \right]. \end{aligned} \quad (7.116)$$

Учитывая соотношение (7.115), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t K_{\theta_y, \Delta m_y}(\tau, 0) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau &= \\ &= \frac{D_{\Delta m_y}}{\beta_y} \left\{ \frac{1}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t) - \frac{\omega_0}{\beta_y^2 + \omega_0^2} e^{-\beta_y t} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\beta_y^2 + \omega_0^2} [-\beta_y \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t] \right\}. \end{aligned} \quad (7.117)$$

Наконец, приняв во внимание значение (7.112) функции  $K_{\theta_y}(\tau, 0)$ , получаем:

$$\int_0^t K_{\theta_y}(\tau, 0) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau = \frac{D_{\theta_y}^0}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t). \quad (7.118)$$

Подставив значения интегралов (7.116)–(7.118) в правую часть равенства (7.110), находим выражение для  $\tilde{D}_{\delta x_2}$ . Подстановка этого выражения вместе со значениями (7.76), (7.79) функций  $D_{\delta x_2}^{\delta x}$ ,  $D_{\delta x_2}^{\delta x^0}$ ,  $D_{\delta x_2}^{\Delta n_x}$  в соотношение (7.109) приводит снова к формуле (7.104).

В заключение отметим следующее. Выше при отыскании дисперсий случайных функций  $\delta x$ ,  $\delta x_2$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_{1y}$  были использованы формулы (7.37), которые дают выражение дисперсии через корреляционную функцию правой части дифференциального уравнения. Можно было бы, разумеется, провести соответствующие вычисления по формуле (7.43). Однако это вычисление связано с отысканием значений несобственных интегралов и в рассматриваемом случае приводит к существенно более сложным выкладкам.

**7.2.2. Движение спутника по круговой орбите.** В случае движения спутника по круговой орбите уравнения ошибок в проекциях на оси орбитального трехгранника имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + 2\omega_0 \delta \dot{z} &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - r\omega_0 \Delta m_z, \\ \delta \ddot{z} - 3\omega_0^2 \delta z - 2\omega_0 \delta \dot{x} &= \Delta n_z + 2r\omega_0 \Delta m_y; \\ \dot{\theta}_x + \omega_0 \theta_z &= \Delta m_x, \\ \dot{\theta}_y &= \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z - \omega_0 \theta_x &= \Delta m_z; \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_x, \\ \delta z_2 &= \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (7.119)$$

Они получаются из общих уравнений (1.95) — (1.97), если положить в последних

$$x = y = 0, \quad r = z, \quad \omega_x = \omega_z = 0, \quad \omega_y = \omega_0. \quad (7.120)$$

Решение первых трех уравнений (7.119) дается формулами (1.152).

Согласно этим формулам,

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_x [-3\omega_0(t-\tau) + 4 \sin \omega_0(t-\tau)] d\tau - \\ &- r \int_0^t \Delta m_y d\tau - \frac{2}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_z [1 - \cos \omega_0(t-\tau)] d\tau + \\ &+ \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{\omega_0} (4 \sin \omega_0 t - 3\omega_0 t) + \\ &+ 6 \delta z^0 (\sin \omega_0 t - \omega_0 t) + \frac{2 \delta \dot{z}^0}{\omega_0} (\cos \omega_0 t - 1), \\ \delta y &= \frac{1}{\omega_0} \int_0^t (\Delta n_y - r \omega_0 \Delta m_z) \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + \\ &+ r \int_0^t \Delta m_x \cos \omega_0(t-\tau) d\tau + \delta y^0 \cos \omega_0 t + \\ &+ \frac{\delta \dot{y}^0 - r \Delta m_x^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \\ \delta z &= \frac{2}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_x [1 - \cos \omega_0(t-\tau)] d\tau + \\ &+ \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \Delta n_z \sin \omega_0(t-\tau) d\tau + \delta z^0 (4 - 3 \cos \omega_0 t) + \\ &+ \frac{\delta \dot{z}^0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{2(\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0)}{\omega_0} (1 - \cos \omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (7.121)$$

Решение системы, образованной четвертым и шестым уравнениями (7.119), получается в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \theta_x^0 \cos \omega_0 t - \theta_z^0 \sin \omega_0 t + \\ &+ \int_0^t [\Delta m_x \cos \omega_0 (t - \tau) - \Delta m_z \sin \omega_0 (t - \tau)] d\tau, \\ \theta_z &= \theta_x^0 \sin \omega_0 t + \theta_z^0 \cos \omega_0 t + \\ &+ \int_0^t [\Delta m_x \sin \omega_0 (t - \tau) + \Delta m_z \cos \omega_0 (t - \tau)] d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.122)$$

Это следует из формул (1.179), если в них взять  $\omega_y = \omega_0 = \text{const}$ . Решение пятого уравнения (7.119) очевидно:

$$\theta_y = \theta_y^0 + \int_0^t \Delta m_y d\tau. \quad (7.123)$$

В дальнейшем будем предполагать, что математические ожидания случайных начальных условий и случайных инструментальных погрешностей равны нулю. Будем полагать случайные функции  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta n_z$ ,  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  некоррелированными друг с другом и с начальными условиями  $\delta x^0$ ,  $\delta y^0$ ,  $\delta z^0$ ,  $\delta \dot{x}^0$ ,  $\delta \dot{y}^0$ ,  $\delta \dot{z}^0$ ,  $\theta_x^0$ ,  $\theta_y^0$ ,  $\theta_z^0$ . Корреляцию между начальными условиями будем также считать отсутствующей.

Найдем дисперсии  $D_{\theta_{1x}}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\theta_{1z}}$  ошибок ориентации платформы инерциальной системы и дисперсии  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$ ,  $D_{\delta z_2}$  полных ошибок определения координат по заданным дисперсиям начальных условий и заданным корреляционным функциям  $K_{\Delta n_x}$ ,  $K_{\Delta n_y}$ ,  $K_{\Delta n_z}$ ,  $K_{\Delta m_x}$ ,  $K_{\Delta m_y}$ ,  $K_{\Delta m_z}$  инструментальных погрешностей. Последние по аналогии с равенствами (7.62), (7.69) возьмем в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} K_{\Delta n_{x,y,z}} &= D_{\Delta n_{x,y,z}} e^{-\alpha_{x,y,z} |t-t'|}, \\ K_{\Delta m_{x,y,z}} &= D_{\Delta m_{x,y,z}} e^{-\beta_{x,y,z} |t-t'|}. \end{aligned} \right\} \quad (7.124)$$

Согласно седьмому, восьмому и девятому равенствам (7.119) имеем:

$$D_{\theta_{1x}} = \frac{1}{r^2} D_{\delta y}, \quad D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} D_{\delta x}, \quad D_{\theta_{1z}} = D_{\theta_z}. \quad (7.125)$$

Из выражения (7.121) для  $\delta x$  следует, что дисперсию  $D_{\delta x}$  можно представить в виде суммы

$$D_{\delta x} = D_{\delta x^0}^{\delta x^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x}^{\delta z^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{z}^0} + D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta n_z} + D_{\delta x}^{\Delta m_y}, \quad (7.126)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\delta x^0} &= D_{\delta x^0}, \\ D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} &= \frac{1}{\omega_0^2} D_{\delta \dot{x}^0} (4 \sin \omega_0 t - 3 \omega_0 t)^2, \\ D_{\delta x}^{\delta z^0} &= 36 D_{\delta z^0} (\sin \omega_0 t - \omega_0 t)^2, \\ D_{\delta x}^{\delta \dot{z}^0} &= \frac{4}{\omega_0^2} D_{\delta \dot{z}^0} (\cos \omega_0 t - 1)^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.127)$$

а остальные слагаемые определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_x}(\tau, \tau') [-3\omega_0(t-\tau) + \\ &\quad + 4 \sin \omega_0(t-\tau)] [-3\omega_0(t-\tau') + \\ &\quad + 4 \sin \omega_0(t-\tau')] d\tau d\tau', \\ D_{\delta x}^{\Delta n_z} &= \frac{4}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') [1 - \cos \omega_0(t-\tau)] \times \\ &\quad \times [1 - \cos \omega_0(t-\tau')] d\tau d\tau', \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= r^2 \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') d\tau d\tau' + \\ &\quad + \frac{r^2}{\omega_0^2} D_{\Delta m_y} (4 \sin \omega_0 t - 3 \omega_0 t)^2 - \\ &\quad - \frac{2r^2}{\omega_0^2} (4 \sin \omega_0 t - 3 \omega_0 t) \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, 0) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.128)$$

Подставляя в первое из этих равенств значение корреляционной функции  $K_{\Delta n_x}(\tau, \tau')$ , получаем:

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} = & 9D_{\Delta n_x} \int_0^t \int_0^t (t - \tau)(t - \tau') e^{-\alpha_x |\tau - \tau'|} d\tau d\tau' - \\ & - \frac{24D_{\Delta n_x}}{\omega_0} \int_0^t \int_0^t (t - \tau) e^{-\alpha_x |\tau - \tau'|} \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \\ & + \frac{16D_{\Delta n_x}}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha_x |\tau - \tau'|} \sin \omega_0(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \quad (7.129) \end{aligned}$$

Последний из интегралов в формуле (7.129) уже вычислен нами ранее и выражается формулой (7.79). Для двух первых интегралов получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^t (t - \tau)(t - \tau') e^{-\alpha_x |\tau - \tau'|} d\tau d\tau' = \\ = \frac{2}{3\alpha_x} t^3 - \frac{1}{\alpha_x^2} t^2 + \frac{2}{\alpha_x^4} [1 - (\alpha_x t + 1) e^{-\alpha_x t}], \\ \int_0^t \int_0^t (t - \tau) e^{-\alpha_x |\tau - \tau'|} \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' = \\ = \frac{2\alpha_x^2 + \omega_0^2}{\alpha_x \omega_0 (\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \left( \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} - t \cos \omega_0 t \right) + \\ + \frac{1}{\alpha_x^2 (\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \{ \omega_0 [1 - (\alpha_x t + 1) e^{-\alpha_x t}] - \\ - e^{-\alpha_x t} (\alpha_x \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t) - \\ - \alpha_x^2 t \sin \omega_0 t + \omega_0 \cos \omega_0 t \}. \quad (7.130) \end{aligned}$$

Подставляя полученные значения интегралов в равенство (7.129), после приведения подобных членов приходим

к соотношению

$$\begin{aligned}
 D_{\delta x}^{\Delta n x} = D_{\Delta n x} \left\{ \frac{6t^3}{\alpha_x} - \frac{9t^2}{\alpha_x^2} + \frac{16\alpha_x t}{\omega_0^2(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} + \right. \\
 + \frac{1}{\alpha_x^2 + \omega_0^2} \left[ \frac{26\alpha_x^4 + 12\alpha_x^2\omega_0^2 + 18\omega_0^4}{\alpha_x^4(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} + \right. \\
 + \frac{6(\alpha_x^2 - 3\omega_0^2)}{\alpha_x^4} (\alpha_x t + 1) e^{-\alpha_x t} + \\
 + \frac{24(2\alpha_x^2 + \omega_0^2)}{\alpha_x \omega_0^3} (\omega_0 t \cos \omega_0 t - \sin \omega_0 t) + \\
 + \frac{24}{\omega_0} t \sin \omega_0 t - \frac{24}{\alpha_x^2} \cos \omega_0 t - \frac{8\alpha_x}{\omega_0^3} \sin 2\omega_0 t - \\
 - \frac{16}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t - \frac{8(\alpha_x^2 - 3\omega_0^2)}{\alpha_x^2(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \left( \frac{\alpha_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \right. \\
 \left. \left. + \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_x t} \right] \left. \right\}. \quad (7.131)
 \end{aligned}$$

Аналогично (7.129) получаем далее:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') [1 - \cos \omega_0(t - \tau)] [1 - \cos \omega_0(t - \tau')] d\tau d\tau' = \\
 = \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') d\tau d\tau' - \\
 - 2 \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \\
 + \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \quad (7.132)
 \end{aligned}$$



Но

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' = \\
 & = \frac{D_{\Delta n_z}}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left[ (e^{-\alpha_z t} - 1) \left( 1 + \cos \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\alpha_z} \sin \omega_0 t \right) + \right. \\
 & \quad \left. + 2 \frac{\alpha_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right], \\
 & \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' = \\
 & = D_{\Delta n_z} \left\{ \frac{\alpha_z}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left( t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{2\alpha_z}{(\alpha_z^2 + \omega_0^2)^2} e^{-\alpha_z t} (\alpha_z \cos \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega_0 t) + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t - \frac{2\alpha_z^2}{(\alpha_z^2 + \omega_0^2)^2} \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (7.133)$$

Поэтому, приняв еще во внимание первое равенство (7.72), вместо второй формулы (7.128) приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
 D_{\delta x}^{\Delta n_z} = & \frac{4D_{\Delta n_z}}{\omega_0^2(\alpha_z^2 + \omega_0^2)} \left[ \frac{3\alpha_z^2 + 2\omega_0^2}{\alpha_z} t - \right. \\
 & - \frac{2\alpha_z^4 + 2\alpha_z^2\omega_0^2 + 2\omega_0^4}{\alpha_z^2(\alpha_z^2 + \omega_0^2)} + \frac{2\omega_0^2}{\alpha_z^2} e^{-\alpha_z t} + \\
 & + \frac{\alpha_z}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \frac{2(2\alpha_z^2 + \omega_0^2)}{\alpha_z\omega_0} \sin \omega_0 t + \\
 & + 2 \cos \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t + \\
 & \left. + \frac{2\omega_0^3}{\alpha_z(\alpha_z^2 + \omega_0^2)} \left( \sin \omega_0 t - \frac{\alpha_z}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_z t} \right]. \quad (7.134)
 \end{aligned}$$

Наконец, приняв опять во внимание первое равенство (7.72), из третьего равенства (7.128) находим:

$$D_{\delta x}^{\Delta m y}(t) = r^2 D_{\Delta m y} \left[ 9t^2 - \frac{4}{\beta_y} t - \frac{2}{\beta_y^2} + \right. \\ \left. + \frac{16}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{8}{\beta_y \omega_0} (1 - e^{-\beta_y t}) \sin \omega_0 t - \right. \\ \left. - \frac{24}{\omega_0} t \sin \omega_0 t + \frac{2}{\beta_y^2} e^{-\beta_y t} + \frac{6}{\beta_y} t e^{-\beta_y t} \right]. \quad (7.135)$$

Соотношения (7.126), (7.127), (7.131), (7.134), (7.135) вместе со вторым равенством (7.125) определяют дисперсию  $D_{\theta_{1y}}$  угла  $\theta_{1y}$  для произвольного момента времени. В частности, при малых значениях времени  $t$  из указанных соотношений получается такое приближенное выражение для дисперсии:

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} \left( D_{\delta x^0} + D_{\delta \dot{x}^0} t^2 + D_{\delta z^0} \omega_0^2 t^3 + \right. \\ \left. + D_{\delta \ddot{z}^0} \omega_0^2 t^4 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} t^4 + \frac{1}{9} D_{\Delta n_z} \omega_0^2 t^6 \right) + \frac{2}{3} \beta_y D_{\Delta m_y} t^3. \quad (7.136)$$

При возрастании  $t$  в формулах (7.131), (7.134), (7.135) для  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta n_z}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta m_y}$  слагаемые, имеющие множители  $e^{-\alpha t}$  и  $e^{-\beta t}$ , быстро убывают (во всяком случае при  $\alpha, \beta \gg \omega_0$ ) и перестают сказываться на величине  $D_{\theta_{1y}}$ . При достаточно больших значениях  $t$  величина дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  определяется первым слагаемым правой части формулы (7.131), так как в этом случае имеет место приближенное равенство

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{6}{\alpha_x} D_{\Delta n_x} t^3 + 9 (D_{\delta \dot{x}^0} + 4 D_{\delta z^0} \omega_0^2) t^2 + \right. \\ \left. + \frac{12}{\omega_0^2 \alpha_z} D_{\Delta n_z} t \right] + 9 D_{\Delta m_y} t^2. \quad (7.137)$$

Продолжая рассмотрение поставленной задачи, найдем дисперсию  $D_{\theta_{1x}}(t)$ . Для ее отыскания необходимо, как это следует из первого равенства (7.125), найти  $D_{\delta y}(t)$ . Согласно второй формуле (7.121), дисперсия  $D_{\delta y}$  может быть представлена суммой

$$D_{\delta y} = D_{\delta y}^{\delta y^0} + D_{\delta y}^{\delta \dot{y}^0} + D_{\delta y}^{\Delta n_y} + D_{\delta y}^{\Delta m_x} + D_{\delta y}^{\Delta m_z}, \quad (7.138)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta y}^{\delta y^0} &= D_{\delta y^0} \cos^2 \omega_0 t, \\ D_{\delta y}^{\delta y^0} &= \frac{1}{\omega_0^2} D_{\delta y^0} \sin^2 \omega_0 t, \end{aligned} \right\} \quad (7.139)$$

а остальные слагаемые определяются интегралами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta y}^{\Delta n_y} &= \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_y}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\delta y}^{\Delta m_z} &= r^2 \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_z}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\delta y}^{\Delta m_x} &= r^2 \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \frac{r^2}{\omega_0^2} D_{\Delta m_x} \sin^2 \omega_0 t - \\ &\quad - \frac{2r^2}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, 0) \cos \omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.140)$$

Принимая во внимание соотношения (7.78), (7.79), приходим к таким выражениям для  $D_{\delta y}^{\Delta n_y}$  и  $D_{\delta y}^{\Delta m_z}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta y}^{\Delta n_y} &= \frac{D_{\Delta n_y}}{\alpha_y^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_y}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad + \frac{2}{\alpha_y^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\alpha_y t} \left( \frac{\alpha_y}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}, \\ D_{\delta y}^{\Delta m_z} &= \frac{r^2 \omega_0^2 D_{\Delta m_z}}{\beta_z^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\beta_z}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad + \frac{2}{\beta_z^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - e^{-\beta_z t} \left( \frac{\beta_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.141)$$

Аналогично из третьего соотношения (7.140), приняв во внимание второе равенство (7.133), находим:

$$D_{\delta y}^{\Delta m_x} = \frac{r^2 D_{\Delta m_x}}{\beta_x^2 + \omega_0^2} \left[ \beta_x \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta_x^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t - \frac{2\beta_x^2}{\beta_x^2 + \omega_0^2} + \frac{2\beta_x^2}{\beta_x^2 + \omega_0^2} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\beta_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) e^{-\beta_x t} \right]. \quad (7.142)$$

Формулы (7.138), (7.139), (7.141), (7.142) вместе со вторым равенством (7.125) определяют дисперсию  $D_{\theta_{1x}}$  угла  $\theta_{1x}$ . При малых значениях  $t$  из указанных соотношений получается следующее приближенное значение:

$$D_{\theta_{1x}} = \frac{1}{r^2} \left( D_{\delta y^0} + D_{\delta y^0} t^2 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_y} t^4 \right) + \\ + \frac{2\beta_x}{3} D_{\Delta m_x} t^3 + \frac{\omega_0^2}{4} D_{\Delta m_z} t^4. \quad (7.143)$$

При достаточно больших значениях времени  $t$  величину дисперсии определяют пропорциональные времени слагаемые правых частей формул (7.141), (7.142), так что приближенно (с учетом неравенств  $\alpha \gg \omega_0$ ,  $\beta \gg \omega_0$ )

$$D_{\theta_{1x}} = \left( \frac{1}{r^2 \alpha_y \omega_0^2} D_{\Delta n_y} + \frac{1}{\beta_z} D_{\Delta m_z} + \frac{1}{\beta_x} D_{\Delta m_x} \right) t. \quad (7.144)$$

Чтобы закончить определение дисперсий отклонений платформы инерциальной системы от невозмущенного положения, в котором ее оси совпадают с осями орбитального трехгранника, осталось найти  $D_{\theta_{1z}}$ . Согласно последнему равенству (7.125) и второй формуле (7.122),

$$D_{\theta_{1z}} = D_{\theta_{1z}}^{\theta^0} + D_{\theta_{1z}}^{\theta^z} + D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_x} + D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_z}, \quad (7.145)$$

где первые два слагаемых суть

$$D_{\theta_{1z}}^{\theta^0} = D_{\theta_0^0} \sin^2 \omega_0 t, \quad D_{\theta_{1z}}^{\theta^z} = D_{\theta_0^0} \cos^2 \omega_0 t, \quad (7.146)$$

а последние два слагаемых заданы интегралами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_x} &= \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_z} &= \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_z}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (7.147)$$

Принимая во внимание равенства (7.79) и (7.133), получаем:

$$\left. \begin{aligned} D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_x} &= \frac{\omega_0^2}{\beta_x^2 + \omega_0^2} D_{\Delta m_x} \left\{ \frac{\beta_x}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad + \frac{2}{\beta_x^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\beta_x}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) e^{-\beta_x t} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right] \right\}, \\ D_{\theta_{1z}}^{\Delta m_z} &= \frac{1}{\beta_z^2 + \omega_0^2} D_{\Delta m_z} \left\{ \beta_z \left( t + \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad + \frac{2\beta_z}{\beta_z^2 + \omega_0^2} [(\beta_z \cos \omega_0 t - \omega_0 \sin \omega_0 t) e^{-\beta_z t} - \beta_z] + \\ &\quad \left. + \sin^2 \omega_0 t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.148)$$

Из формул (7.145), (7.146), (7.148) вытекает, что при малых значениях  $t$  величина дисперсии  $D_{\theta_{1z}}$  определяется выражением

$$D_{\theta_{1z}} = D_{\theta_z^0} + \left( \omega_0^2 D_{\theta_x^0} + \frac{1}{2} D_{\Delta m_z} \right) t^2 + \frac{\omega_0^2}{4} D_{\Delta m_x} t^4, \quad (7.149)$$

при больших же значениях  $t$  имеет место приближенное равенство

$$D_{\theta_{1z}} = \left( \frac{D_{\Delta m_x}}{\beta_x} + \frac{D_{\Delta m_z}}{\beta_z} \right) t. \quad (7.150)$$

Выше определены дисперсии  $D_{\theta_{1x}}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\theta_{1z}}$  случайных угловых ошибок ориентации платформы. Найдем теперь дисперсии  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$ ,  $D_{\delta z_2}$  полных ошибок  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  определения координат.

Начнем с отыскания  $D_{\delta z_2}$ . Согласно последнему равенству (7.119),  $\delta z_2 = \delta z$ , а поэтому в соответствии с третьей формулой (7.121) дисперсию  $D_{\delta z_2}$  случайной ошибки  $\delta z_2$  можно представить следующей суммой:

$$D_{\delta z_2} = D_{\delta z_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta z_2}^{\delta z^0} + D_{\delta z_2}^{\delta \dot{z}^0} + D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} + D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} + D_{\delta z_2}^{\Delta m_y}. \quad (7.151)$$

Здесь, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\delta \dot{x}^0} &= \frac{4}{\omega_0^2} D_{\delta \dot{x}^0} (1 - \cos \omega_0 t)^2, \\ D_{\delta z_2}^{\delta z^0} &= D_{\delta z^0} (4 - 3 \cos \omega_0 t)^2, \\ D_{\delta z_2}^{\delta \dot{z}^0} &= \frac{1}{\omega_0^2} D_{\delta \dot{z}^0} \sin^2 \omega_0 t, \\ D_{\delta z_2}^{\Delta m_y} &= \frac{4r^2}{\omega_0^2} D_{\Delta m_y} (1 - \cos \omega_0 t)^2, \end{aligned} \right\} \quad (7.152)$$

а остальные два слагаемых определяются таким образом:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} &= \frac{4}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_x}(\tau, \tau') [1 - \cos \omega_0(t - \tau)] \times \\ &\quad \times [1 - \cos \omega_0(t - \tau')] d\tau d\tau', \\ D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} &= \frac{1}{\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (7.153)$$

Стоящие в правых частях равенств (7.153) интегралы уже встречались ранее. Так, первый из этих интегралов отличается от интеграла во втором равенстве (7.128) лишь тем, что в нем вместо  $K_{\Delta n_z}$  стоит  $K_{\Delta n_x}$ , что несущественно для вычисления указанного интеграла. Поэтому по аналогии

с формулой (7.134) находим:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} = \frac{4D_{\Delta n_x}}{\omega_0^2(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \left[ \frac{3\alpha_x^2 + 2\omega_0^2}{\alpha_x} t - \frac{2(\alpha_x^4 + \alpha_x^2\omega_0^2 + \omega_0^4)}{\alpha_x^2(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} + \frac{2\omega_0^2}{\alpha_x^2} e^{-\alpha_x t} + \frac{\alpha_x}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \frac{2(2\alpha_x^2 + \omega_0^2)}{\alpha_x\omega_0} \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t + \frac{2\omega_0^3}{\alpha_x(\alpha_x^2 + \omega_0^2)} \left( \sin \omega_0 t - \frac{\alpha_x}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_x t} \right]. \quad (7.154)$$

Значение второго интеграла (7.153) устанавливается сравнением с равенствами (7.78), (7.79). Получаем:

$$D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} = \frac{D_{\Delta n_z}}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_z}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \frac{2}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_z t} \right] - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}. \quad (7.155)$$

Из формул (7.151), (7.152), (7.154), (7.155), раскладывая заключенные в них функции времени в ряды Тейлора и ограничиваясь первыми отличными от нуля слагаемыми этих рядов, можно получить такое представление дисперсии  $D_{\delta z_2}$  для малых значений  $t$ :

$$D_{\delta z_2} = D_{\delta z_0} + (D_{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta \dot{z}^0} + r^2 D_{\Delta m_y}) t^2 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} t^4 + \frac{1}{9} D_{\Delta n_x} \omega_0^2 t^6. \quad (7.156)$$

При больших значениях  $t$  приближенно ( $\alpha_x^2 \gg \omega_0^2$ ) имеем:

$$D_{\delta z_2} = \left( \frac{12}{\alpha_x} D_{\Delta n_x} + \frac{1}{\alpha_z} D_{\Delta n_z} \right) \frac{t}{\omega_0^2}. \quad (7.157)$$

Перейдем к отысканию  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$ . Для этого можно поступить следующим образом. По решениям (7.121), (7.122) найти взаимные корреляционные функции  $K_{\delta x, \delta y}(t, t')$ ,  $K_{\delta y, \delta x}(t, t')$ . Затем в соответствии с предпоследними двумя

равенствами (7.119) вычислить  $D_{\delta x_2}$  и  $D_{\delta y_2}$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x_2} &= D_{\delta x} + r^2 D_{\theta_y} + 2r K_{\delta x, \theta_y}(t, t), \\ D_{\delta y_2} &= D_{\delta y} + r^2 D_{\theta_x} - 2r K_{\delta y, \theta_x}(t, t). \end{aligned} \right\} \quad (7.158)$$

Входящие в правые части этих формул дисперсии  $D_{\delta x}$  и  $D_{\delta y}$  уже вычислены нами ранее, как и дисперсия  $D_{\theta_y}$ . Дисперсию же  $D_{\theta_x}$  надо вычислить заново вместе с взаимными корреляционными функциями  $K_{\delta x, \theta_y}$  и  $K_{\delta y, \theta_x}$ .

Из первой формулы (7.122) получаем:

$$\begin{aligned} D_{\theta_x} &= D_{\theta_x 0} \cos^2 \omega_0 t + D_{\theta_z 0} \sin^2 \omega_0 t + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \\ &+ \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_z}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (7.159)$$

Из первой формулы (7.121) и формулы (7.123) имеем:

$$\begin{aligned} K_{\delta x, \theta_y}(t, t) &= -r \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') d\tau d\tau' + \\ &+ \frac{r}{\omega_0} (4 \sin \omega_0 t - 3 \omega_0 t) \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, 0) d\tau. \end{aligned} \quad (7.160)$$

Наконец, из второй формулы (7.121) и первой формулы (7.122) вытекает, что

$$\begin{aligned} K_{\delta y, \theta_x}(t, t) &= \\ &= r \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, \tau') \cos \omega_0(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' + \\ &+ r \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_z}(\tau, \tau') \sin \omega_0(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau') d\tau d\tau' - \\ &- \frac{r}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int_0^t K_{\Delta m_x}(\tau, 0) \cos \omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.161)$$



Обратимся теперь к первому равенству (7.158) и подставим в него выражение (7.126) для  $D_{\delta x}$ , выражение (7.72) для  $D_{\theta_y}$  и выражение (7.160) для  $K_{\delta x, \theta_y}(t, t)$ . При этом в формуле (7.126) заменим последнее слагаемое в соответствии с последним соотношением (7.128). В результате получим:

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x}^{\delta x^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x}^{\delta z^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{z}^0} + \\ + D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta n_z} + r^2 D_{\theta_y^0} + \frac{r^2}{\omega_0^2} \Delta m_y (4 \sin \omega_0 t - 3 \omega_0 t)^2. \quad (7.162)$$

Здесь функции  $D_{\delta x}^{\delta x^0}$ ,  $D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0}$ ,  $D_{\delta x}^{\delta z^0}$ ,  $D_{\delta x}^{\delta \dot{z}^0}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta n_z}$  определены формулами (7.127), (7.131), (7.134).

Обратимся ко второму равенству (7.158). Подставим в него значение (7.138) дисперсии  $D_{\delta y}$ , значение (7.159) дисперсии  $D_{\theta_x}$  и значение (7.161) функции  $K_{\delta y, \theta_x}(t, t)$ , причем, как и при вычислении  $D_{\delta x_2}$ , заменим последние два слагаемых в правой части равенства (7.138) их выражениями, определенными двумя последними формулами (7.140). В результате найдем:

$$D_{\delta y_2} = D_{\delta y}^{\delta y^0} + D_{\delta y}^{\delta \dot{y}^0} + D_{\delta y}^{\Delta n_y} + \frac{r^2}{\omega_0^2} D_{\Delta m_x} \sin^2 \omega_0 t + \\ + r^2 D_{\theta_x^0} \cos^2 \omega_0 t + r^2 D_{\theta_z^0} \sin^2 \omega_0 t. \quad (7.163)$$

В этом равенстве функции  $D_{\delta y}^{\delta y^0}$ ,  $D_{\delta y}^{\delta \dot{y}^0}$  заданы соотношениями (7.139), а функция  $D_{\delta y}^{\Delta n_y}$  — первым соотношением (7.141).

При малых значениях  $t$  формулы (7.162), (7.163) дают следующие приближенные значения дисперсий  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x_2} &= D_{\delta x^0} + (D_{\delta \dot{x}^0} + r^2 D_{\Delta m_y}) t^2 + \\ &+ D_{\delta z^0} \omega_0^2 t^3 + \left( \omega_0^2 D_{\delta \dot{z}^0} + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} \right) t^4 + \frac{1}{9} D_{\Delta n_z} \omega_0^2 t^6, \\ D_{\delta y_2} &= D_{\delta y^0} + r^2 D_{\theta_x^0} + (D_{\delta \dot{y}^0} + r^2 D_{\Delta m_x} + \\ &+ r^2 D_{\theta_z^0} \omega_0^2) t^2 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_y} t^4. \end{aligned} \right\} \quad (7.164)$$

При больших  $t$  значения дисперсий  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$  определяются приближенными равенствами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x_2} &= \frac{12}{\alpha_z \omega_0^2} D_{\Delta n_z} t + 9(4D_{\delta z^0} \omega_0^2 + D_{\delta \dot{x}^0} + \\ &\quad + r^2 D_{\Delta m_y}) t^2 + \frac{6}{\alpha_x} D_{\Delta n_x} t^3, \\ D_{\delta y_2} &= \frac{1}{\omega_0^2 \alpha_y} D_{\Delta n_y} t. \end{aligned} \right\} \quad (7.164a)$$

Заметим, что в выражения (7.164) для  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$  случайные погрешности  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  вошли лишь как начальные условия, а погрешность  $\Delta m_z$  не вошла вовсе. При суммировании в правых частях равенств (7.158) интегралы, содержащие  $K_{\Delta m_x}(\tau, \tau')$ ,  $K_{\Delta m_y}(\tau, \tau')$ ,  $K_{\Delta m_z}(\tau, \tau')$ , взаимно уничтожались. Причину этого легко установить, если рассмотреть уравнения (7.119) несколько иначе, чем это было сделано выше.

Выполним в первых трех уравнениях (7.119) замену переменных

$$\delta x = \delta x_2 - r\theta_y, \quad \delta y = \delta y_2 + r\theta_x, \quad \delta z_2 = \delta z \quad (7.165)$$

согласно двум предпоследним равенствам (7.119). Одновременно подставим в правые части этих уравнений вместо  $\Delta m_x$ ,  $\Delta \dot{m}_y$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  их выражения через  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$  и производные последних согласно четвертому, пятому и шестому уравнениям (7.119). Тогда для полных ошибок  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  определения координат получим дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 \delta \dot{z} &= \Delta n_x, \\ \delta \ddot{y}_2 + \omega_0^2 \delta y_2 &= \Delta n_y, \\ \delta \ddot{z}_2 - 3\omega_0^2 \delta z_2 - 2\omega_0 \delta \dot{x}_2 &= \Delta n_z \end{aligned} \right\} \quad (7.166)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} \delta x_2^0 &= \delta x^0 + r\theta_y^0, & \delta y_2^0 &= \delta y^0 - r\theta_x^0, & \delta z_2^0 &= \delta z^0, \\ \delta \dot{x}_2^0 &= \delta \dot{x}^0 + r\dot{\theta}_y^0, & \delta \dot{y}_2^0 &= \delta \dot{y}^0 - r\dot{\theta}_x^0, & \delta \dot{z}_2^0 &= \delta \dot{z}^0. \end{aligned} \right\} \quad (7.167)$$

Как видим, в правые части уравнений (7.166) не входят инструментальные погрешности  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$ . Их начальные значения входят лишь в начальные условия \*).

Если написать для  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  решение, аналогичное решению (7.121) для  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , и вычислить дисперсии  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$  непосредственно по этому решению, то, разумеется, придем снова к формулам (7.162), (7.163). Прodelав надлежащие выкладки, читатель легко может в этом убедиться.

В заключение отметим еще следующее. Выше мы дважды обращались к дифференциальным уравнениям для полных ошибок  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  определения координат. В случае неподвижного объекта — это уравнения (7.107), в случае движения спутника по круговой орбите — уравнения (7.166). Разумеется, такого рода уравнения могут быть получены и в общем случае, что при решении некоторых задач может оказаться полезным. Так, если обратиться к общим уравнениям ошибок (1.95) — (1.97), то соответствующие уравнения для  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$  можно получить, произведя в уравнениях (1.95) замену переменных в соответствии с равенствами (1.97). Использование равенств (1.97) позволяет при этом исключить из правых частей уравнений инструментальные погрешности  $\Delta m_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta m_z$  и их производные. Вместо них в правых частях появятся слагаемые, зависящие от углов  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\theta_z$ , определяемых в результате решения уравнений (1.97).

### **§ 7.3. Влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки корректируемых инерциальных систем**

**7.3.1. Коррекция от высотомера.** В § 2.2 были получены уравнения ошибок инерциальных систем, корректируемых от высотомера. Рассматривались два варианта схем: с тремя произвольно ориентированными ньютонометрами и с двумя ньютонометрами, ориентированными в плоскости географического или геоцентрического горизонта.

---

\*) Это обстоятельство будет иметь место и при движении спутника не только по круговой, но и по эллиптической орбите. Дело в том, что упругий подвес идеального линейного ньютонометра, расположенного в центре масс объекта, движущегося под действием лишь гравитационных сил, не деформирован (показания ньютонометра равны нулю) вне зависимости от ориентации его оси чувствительности.

Для варианта с тремя ньютонометрами уравнения ошибок в проекциях на оси трехгранника  $xuz$ , ось  $z$  которого совпадает с  $r$ , состоят из уравнений (2.16), уравнений (1.96) и алгебраических соотношений (1.108), (1.118). Для варианта с двумя ньютонометрами уравнения ошибок включают в себя уравнения (2.28), уравнения (1.96) и алгебраические соотношения (1.108), (1.118).

Рассмотрим указанные уравнения, полагая инструментальные погрешности случайными функциями времени с корреляционными функциями вида (7.124). Как и в предшествующем разделе, ограничимся при этом случаем неподвижного в системе координат  $O_1\xi_*\eta_*\xi_*$  объекта и случаем движения спутника по круговой орбите.

Рассмотрим сначала уравнения ошибок схемы с тремя ньютонометрами. Для неподвижного объекта в этом случае получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - r \dot{\Delta m}_y, \\ \ddot{\delta y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \dot{\Delta m}_x, \\ \ddot{\delta z} + \omega_0^2 \delta z &= \Delta n_z + 3\omega_0^2 \Delta r; \\ \dot{\theta}_x &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z; \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_x, \\ \delta z_2 &= \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (7.168)$$

Сравнение этих уравнений с уравнениями (7.54), исследованными в п. 7.2.1, показывает, что они различаются лишь третьими уравнениями. Поэтому дисперсии  $D_{\delta x}$ ,  $D_{\delta y}$ ,  $D_{\theta_x}$ ,  $D_{\theta_y}$ ,  $D_{\theta_z}$ ,  $D_{\theta_{1x}}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\theta_{1z}}$ ,  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\delta y_2}$  решений соответствующих уравнений (7.168) будут определяться выражениями, полученными ранее при исследовании уравнений (7.54). Следовательно, нам осталось найти лишь дисперсию  $D_{\delta z} = D_{\delta z_2}$  решения третьего уравнения (7.168).

Для этого заметим, что левая часть третьего уравнения (7.168) совпадает по виду с левыми частями первых двух уравнений (7.168). Одинаково входят также во все три уравнения инструментальные погрешности  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_y$ ,  $\Delta n_z$

ньтонометров. Таким образом, если представить дисперсию  $D_{\delta z}$  решения третьего уравнения (7.168) в виде суммы

$$D_{\delta z} = D_{\delta z}^{\Delta n_z} + D_{\delta z}^{\delta z^0} + D_{\delta z}^{\delta z^0} + D_{\delta z}^{\Delta r}, \quad (7.169)$$

то первые три слагаемых этой суммы можно получить из выражений (7.79), (7.76), заменив в них лишь индексы. Указанные слагаемые получаются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z}^{\Delta n_z} &= \frac{D_{\Delta n_z}}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_z}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha_z^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_z}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_z t} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}, \\ D_{\delta z}^{\delta z^0} &= D_{\delta z^0} \cos^2 \omega_0 t, \quad D_{\delta z}^{\delta z^0} = D_{\delta z^0} \sin^2 \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (7.170)$$

Если корреляционную функцию случайной инструментальной погрешности  $\Delta r$  задать равенством

$$K_{\Delta r}(t, t') = D_{\Delta r} e^{-\alpha_r |t - t'|}, \quad (7.171)$$

то, очевидно, четвертое слагаемое формулы (7.169) может быть записано в виде, аналогичном первому выражению (7.170):

$$\begin{aligned} D_{\delta z}^{\Delta r} &= \frac{9\omega_0^4}{\alpha_r^2 + \omega_0^2} D_{\Delta r} \left\{ \frac{\alpha_r}{\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\alpha_r^2 + \omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_r}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) e^{-\alpha_r t} \right] - \frac{1}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t \right\}. \end{aligned} \quad (7.172)$$

Равенства (7.169), (7.170), (7.172) дают выражение  $D_{\delta z}$  дисперсии ошибки  $\delta z = \delta z_2$  для произвольного момента времени. Для малых значений  $t$  приближенно

$$D_{\delta z} = D_{\delta z^0} + D_{\delta z^0} t^2 + (D_{\Delta n_z} + 9\omega_0^4 D_{\Delta r}) \frac{t^4}{4}. \quad (7.173)$$

Для больших значений  $t$  величина  $D_{\delta z}$  определяется приближенным равенством

$$D_{\delta z} = \left( \frac{D_{\Delta n_z}}{\alpha_z \omega_0^2} + \frac{9\omega_0^2 D_{\Delta r}}{\alpha_r} \right) t. \quad (7.174)$$

Дисперсия  $D_{\delta z}$  растет здесь лишь пропорционально времени, в то время как в случае автономной инерциальной системы [см. формулы (7.58), (7.60), (7.66)] дисперсия  $D_{\delta z}$  растет со временем (при достаточно больших  $t$ ) по экспоненциальному закону.

В случае движения спутника по круговой орбите уравнения ошибок схемы с тремя ньютонометрами получаются из уравнений (2.16), (1.96), (1.108), (1.118), если в них положить

$$\omega_x = \omega_z = 0, \quad r = \text{const}, \quad \omega_y = \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r^3}} = \text{const}, \quad (7.175)$$

и имеют такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + 2\omega_0 \delta \dot{z} &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y, \\ \delta \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x - r \omega_0 \Delta m_z, \\ \delta \ddot{z} - 2\omega_0 \delta \dot{x} &= \Delta n_z + 2r \omega_0 \Delta m_y + 3\omega_0^2 \Delta r; \\ \dot{\theta}_x + \omega_0 \theta_z &= \Delta m_x, \\ \dot{\theta}_y &= \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z - \omega_0 \theta_z &= \Delta m_z; \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \delta x_2 &= \delta x + r \theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r \theta_x, \\ \delta z_2 &= \delta z. \end{aligned} \right\} \quad (7.176)$$

Сравнение этих уравнений с уравнениями (7.119) показывает, что они различаются также лишь третьими уравнениями. Однако перенесение результатов решения уравнений (7.119) на уравнения (7.176) несколько сложнее, чем перенесение решений уравнений (7.54) на уравнения (7.168). Все же из сравнения уравнений (7.176) и (7.119) следует, что дисперсии  $D_{\theta_x}$ ,  $D_{\theta_y}$ ,  $D_{\theta_z}$ ,  $D_{\delta y}$ , а следовательно, дисперсии  $D_{\theta_{1x}}$ ,  $D_{\delta y_2}$  и  $D_{\theta_{1z}}$  имеют в случае уравнений (7.176) тот же вид, что и в случае уравнений (7.119). Следовательно, осталось вычислить лишь дисперсии  $D_{\delta z} = D_{\delta z_2}$ ,  $D_{\delta x_2}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$ .

Решение системы, образованной первым и третьим уравнениями (7.176), можно получить из формул (2.28), если положить в них  $\dot{r} = 0$ ,  $\omega_y = \omega_0$ , а в качестве  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $C_i^0$  взять выражения (2.230) при  $e = 0$ ,  $v = \omega_0$ . В результате

придем к формулам:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y) \sin 2\omega_0(t - \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 2r\omega_0 \Delta m_y + 3\omega_0^2 \Delta r) \times \\ &\times [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] d\tau + \delta x^0 + \frac{\delta \dot{x}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \\ &+ \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1), \\ \delta z &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 2r\omega_0 \Delta m_y + 3\omega_0^2 \Delta r) \times \\ &\times \sin 2\omega_0(t - \tau) d\tau - \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y) \times \\ &\times [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] d\tau + \delta z^0 + \\ &+ \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - \frac{\delta \dot{x}^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1). \end{aligned} \right\} (7.177)$$

Эти формулы можно несколько упростить, если проинтегрировать по частям слагаемые, содержащие  $\Delta \dot{m}_y$ . Будем иметь тогда:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{r}{2\omega_0} \int_0^t \Delta \dot{m}_y \sin 2\omega_0(t - \tau) d\tau &= \\ &= \frac{r \Delta m_y^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t - r \int_0^t \Delta m_y \cos 2\omega_0(t - \tau) d\tau, \\ \frac{r}{2\omega_0} \int_0^t \Delta \dot{m}_y [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] d\tau &= \\ &= -\frac{r \Delta m_y^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1) - \\ &- r \int_0^t \Delta m_y \sin 2\omega_0(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \right\} (7.178)$$

Теперь

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t \Delta n_x \sin 2\omega_0(t-\tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 3\omega_0^2 \Delta r) [\cos 2\omega_0(t-\tau) - 1] d\tau - \\ &- r \int_0^t \Delta m_y d\tau + \frac{r \Delta m_y^0 + \delta \dot{x}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \\ &\quad + \delta x^0 + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1), \\ \delta z &= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 3\omega_0^2 \Delta r) \sin 2\omega_0(t-\tau) d\tau - \\ &- \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t \Delta n_x [\cos 2\omega_0(t-\tau) - 1] d\tau - \\ &- \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1) + \delta z^0 + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (7.179)$$

В соответствии со второй формулой (7.179) и последним равенством (7.176) имеем:

$$\begin{aligned} D_{\delta z_2} &= D_{\delta z_2}^{\delta z^0} + D_{\delta z_2}^{\delta \dot{z}^0} + D_{\delta z_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} + \\ &\quad + D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} + D_{\delta z_2}^{\Delta r} + D_{\delta z_2}^{\Delta m_y^0}. \end{aligned} \quad (7.180)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\delta z^0} &= D_{\delta z^0}, \quad D_{\delta z_2}^{\delta \dot{z}^0} = \frac{1}{4\omega_0^2} D_{\delta \dot{z}^0} \sin^2 2\omega_0 t, \\ D_{\delta z_2}^{\delta \dot{x}^0} &= \frac{1}{4\omega_0^2} D_{\delta \dot{x}^0} (\cos 2\omega_0 t - 1)^2, \\ D_{\delta z_2}^{\Delta m_y^0} &= \frac{r^2}{4\omega_0^2} D_{\Delta m_y} (\cos 2\omega_0 t - 1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.181)$$



Остальные три слагаемых суммы (7.180) выражаются интегралами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} &= \frac{1}{4\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_x}(\tau, \tau') [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] \times \\ &\quad \times [\cos 2\omega_0(t - \tau') - 1] d\tau d\tau', \\ D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} &= \frac{1}{4\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') \sin 2\omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin 2\omega_0(t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\delta z_2}^{\Delta r} &= \frac{9\omega_0^2}{4} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta r}(\tau, \tau') \sin 2\omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin 2\omega_0(t - \tau') d\tau d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (7.182)$$

Эти интегралы сводятся к уже найденным нами. Так, интеграл в выражении для  $D_{\delta z_2}^{\Delta n_x}$  отличается от второго интеграла (7.128) по существу лишь тем, что вместо  $\omega_0$  в нем в подынтегральном выражении стоит величина  $2\omega_0$ . Поэтому по аналогии с формулой (7.134) получаем:

$$\begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\Delta n_x} &= \frac{D_{\Delta n_x}}{4\omega_0^2(\alpha_x^2 + 4\omega_0^2)} \left[ \frac{3\alpha_x^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_x} t - \frac{2\alpha_x^4 + 8\alpha_x^2\omega_0^2 + 32\omega_0^4}{\alpha_x^2(\alpha_x^2 + 4\omega_0^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{8\omega_0^2}{\alpha_x^2} e^{-\alpha_x t} + \frac{\alpha_x}{4\omega_0} \sin 4\omega_0 t - \frac{2\alpha_x^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_x\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cos 2\omega_0 t + \sin^2 2\omega_0 t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{16\omega_0^3}{\alpha_x(\alpha_x^2 + 4\omega_0^2)} \left( \sin 2\omega_0 t - \frac{\alpha_x}{2\omega_0} \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_x t} \right]. \quad (7.183) \end{aligned}$$

Точно таким же образом из сравнения второго и третьего интегралов (7.182) с интегралом (7.78) находим:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta z_2}^{\Delta n_z} &= \frac{D_{\Delta n_z}}{\alpha_z^2 + 4\omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_z}{4\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{4\omega_0} \sin 4\omega_0 t \right) + \right. \\ &+ \frac{2}{\alpha_z^2 + 4\omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_z}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_z t} \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\omega_0^2} \sin^2 2\omega_0 t \right\}, \\ D_{\delta z_2}^{\Delta r} &= \frac{9\omega_0^4 D_{\Delta r}}{\alpha_r^2 + 4\omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_r}{4\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{4\omega_0} \sin 4\omega_0 t \right) + \right. \\ &+ \frac{2}{\alpha_r^2 + 4\omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_r}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_r t} \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\omega_0^2} \sin^2 2\omega_0 t \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.184)$$

Соотношения (7.180), (7.181), (7.183), (7.184) полностью определяют дисперсию  $D_{\delta z_2}$  как функцию времени, если корреляционные функции случайных инструментальных погрешностей  $\Delta n_x$ ,  $\Delta n_z$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta r$  заданы равенствами (7.124), (7.171). Для малых значений времени  $t$  из этих соотношений вытекает приближенная формула

$$\begin{aligned} D_{\delta z_2} &= D_{\delta z_0} + D_{\delta \dot{z}_0} t^2 + \\ &+ \left( \omega_0^2 D_{\delta \ddot{x}_0} + r^2 D_{\Delta m_y} \omega_0^2 + \frac{9\omega_0^4}{4} D_{\Delta r} + \frac{1}{4} D_{\Delta n_z} \right) t^4 + \\ &+ \frac{\omega_0^2}{9} D_{\Delta n_x} t^6. \end{aligned} \quad (7.185)$$

При больших значениях  $t$ , т. е. при большом времени работы инерциальной системы, приближенно

$$D_{\delta z_2} = \left( \frac{3D_{\Delta n_x}}{4\omega_0^2 \alpha_x} + \frac{D_{\Delta n_z}}{4\omega_0^2 \alpha_z} + \frac{9\omega_0^2 D_{\Delta r}}{4\alpha_r} \right) t. \quad (7.186)$$

Сравнение формулы (7.186) с формулой (7.157) показывает, что при большом времени работы инерциальной системы случайные ошибки  $\delta z_2$  от инструментальных погрешностей  $\Delta n_x$  и  $\Delta n_z$  в корректируемой от высотомера инерциальной системе с тремя ньютонометрами имеют меньшие дисперсии,

нежели в автономной. Хотя в обоих случаях эти дисперсии и растут пропорционально времени, но коэффициенты пропорциональности меньше в корректируемой системе. Однако в этом случае имеет место дополнительная составляющая [последнее слагаемое в формуле (7.186)] дисперсии  $D_{\delta z_2}$ , обусловленная случайной погрешностью высотомера.

Найдем дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$ . Для отыскания первой из них надо найти сначала дисперсию  $D_{\delta x}$  решения первого уравнения (7.176), после чего в соответствии с восьмым равенством (7.168) дисперсия  $D_{\theta_{1y}}$  найдется по формуле

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{D_{\delta x}}{r^2}. \quad (7.187)$$

Решение  $\delta x$  первого уравнения (7.176) нами найдено. Это первая формула (7.179). В соответствии с этой формулой

$$D_{\delta x} = D_{\delta x^0} + D_{\delta x^{\dot{x}^0}} + D_{\delta x^{\dot{z}^0}} + D_{\delta x^{\Delta n_x}} + D_{\delta x^{\Delta n_z}} + D_{\delta x^{\Delta r}} + D_{\delta x^{\Delta m_y}}, \quad (7.188)$$

где первые три слагаемые суть

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x^0} &= D_{\delta x^0}, & D_{\delta x^{\dot{x}^0}} &= \frac{1}{4\omega_0^2} D_{\delta \dot{x}^0} \sin^2 2\omega_0 t, \\ D_{\delta x^{\dot{z}^0}} &= \frac{1}{4\omega_0^2} D_{\delta \dot{z}^0} (\cos 2\omega_0 t - 1)^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.189)$$

Для вычисления же четырех последних слагаемых служат соотношения:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x^{\Delta n_x}} &= \frac{1}{4\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_x}(\tau, \tau') \sin 2\omega_0(t - \tau) \times \\ &\quad \times \sin 2\omega_0(t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\delta x^{\Delta n_z}} &= \frac{1}{4\omega_0^2} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_z}(\tau, \tau') [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] \times \\ &\quad \times [\cos 2\omega_0(t - \tau') - 1] d\tau d\tau', \\ D_{\delta x^{\Delta r}} &= \frac{9\omega_0^2}{4} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta r}(\tau, \tau') [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] \times \\ &\quad \times [\cos 2\omega_0(t - \tau') - 1] d\tau d\tau', \end{aligned} \right\} \quad (7.190)$$

$$D_{\delta x}^{\Delta m} = \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') d\tau d\tau' + \left. \begin{aligned} &+ \frac{r^2}{4\omega_0^2} D_{\Delta m_y} \sin^2 2\omega_0 t - \\ &- \frac{r^2}{\omega_0} \sin 2\omega_0 t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, 0) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (7.190)$$

Интегралы в первых трех полученных соотношениях аналогичны интегралам (7.182). Поэтому по аналогии с формулами (7.183), (7.184) получаем:

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x^2 + 4\omega_0^2} \left\{ \frac{\alpha_x}{4\omega_0^2} \left( t - \frac{1}{4\omega_0} \sin 4\omega_0 t \right) + \right. \\ &+ \frac{2}{\alpha_x^2 + 4\omega_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_x}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_x t} \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\omega_0^2} \sin^2 2\omega_0 t \right\}, \\ D_{\delta x}^{\Delta n_z} &= \frac{D_{\Delta n_z}}{4\omega_0^2 (\alpha_z^2 + 4\omega_0^2)} \left[ \frac{3\alpha_z^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_z} t - \frac{2\alpha_z^4 + 8\alpha_z^2 \omega_0^2 + 32\omega_0^4}{\alpha_z^2 (\alpha_z^2 + 4\omega_0^2)} + \right. \\ &+ \frac{8\omega_0^2}{\alpha_z^2} e^{-\alpha_z t} + \frac{\alpha_z}{4\omega_0} \sin 4\omega_0 t - \frac{2\alpha_z^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_z \omega_0} \sin 2\omega_0 t + \\ &+ 2 \cos 2\omega_0 t + \sin^2 2\omega_0 t + \frac{16\omega_0^3}{\alpha_z (\alpha_z^2 + 4\omega_0^2)} \left( \sin 2\omega_0 t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_z}{2\omega_0} \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_z t} \Big], \\ D_{\delta x}^{\Delta r} &= \frac{9\omega_0^2 D_{\Delta r}}{4 (\alpha_r^2 + 4\omega_0^2)} \left[ \frac{3\alpha_r^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_r} t - \right. \\ &- \frac{2\alpha_r^4 + 8\alpha_r^2 \omega_0^2 + 32\omega_0^4}{\alpha_r^2 (\alpha_r^2 + 4\omega_0^2)} + \frac{8\omega_0^2}{\alpha_r^2} e^{-\alpha_r t} + \frac{\alpha_r}{4\omega_0^2} \sin 4\omega_0 t - \\ &- \frac{2\alpha_r^2 + 4\omega_0^2}{\alpha_r \omega_0} \sin 2\omega_0 t + 2 \cos 2\omega_0 t + \sin^2 2\omega_0 t + \\ &\quad \left. + \frac{16\omega_0^3}{\alpha_r (\alpha_r^2 + 4\omega_0^2)} \left( \sin 2\omega_0 t - \frac{\alpha_r}{2\omega_0} \cos 2\omega_0 t \right) e^{-\alpha_r t} \right]. \end{aligned} \quad (7.191)$$

Из четвертого соотношения (7.190) имеем:

$$D_{\delta x}^{\Delta m y} = r^2 D_{\Delta m y} \left[ \frac{2t}{\beta_y} + \frac{1}{4\omega_0^2} \sin^2 2\omega_0 t + \right. \\ \left. + (e^{-\beta_y t} - 1) \left( \frac{2}{\beta_y^2} + \frac{1}{\omega_0 \beta_y} \sin 2\omega_0 t \right) \right]. \quad (7.192)$$

Формулы (7.187) — (7.189), (7.191), (7.192) определяют дисперсию  $D_{\theta_{1y}}$  для произвольного момента времени. Для малых значений времени из них получается следующее приближенное выражение:

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} \left[ D_{\delta x^0} + D_{\delta \dot{x}^0} t^2 + \left( \omega_0^2 D_{\delta \dot{z}^0} + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} \right) t^4 + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0^2}{9} (D_{\Delta n_z} + 9\omega_0^4 D_{\Delta r}) t^6 \right] + \frac{2}{3} \beta_y D_{\Delta m y} t^3. \quad (7.193)$$

Для больших же значений  $t$  приближенно

$$D_{\theta_{1y}} = \left[ \frac{1}{r^2} \left( \frac{D_{\Delta n_x}}{4\omega_0^2 \alpha_x} + \frac{3D_{\Delta n_z}}{4\omega_0^2 \alpha_z} + \frac{27\omega_0^2 D_{\Delta r}}{4\alpha_r} \right) + \frac{2D_{\Delta m y}}{\beta_y} \right] t. \quad (7.194)$$

Интересно сравнить это выражение с выражением (7.137) дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  для автономной системы. В выражении (7.194) присутствует дополнительно слагаемое, содержащее  $D_{\Delta r}$ . Однако остальные слагаемые содержат время в первой степени, тогда как в выражении (7.137) оно имеется и во второй и в третьей степени. Таким образом, коррекция от высотомера существенно снижает случайные ошибки системы.

Чтобы закончить исследование случайных ошибок корректируемой от высотомера схемы с тремя ньютонометрами, установленной на спутнике, движущемся по круговой орбите, нам осталось лишь найти дисперсию  $D_{\delta x_2}$  ошибки определения местоположения в направлении движения.

Согласно десятому равенству (7.168), величина  $\delta x_2 = \delta x + r\theta_y$ . Выражения для  $\delta x$  и  $\theta_y$  заданы соответственно первой формулой (7.179) и формулой (7.123). Из этих формул

следует, что

$$\begin{aligned} \delta x_2 = & \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t \Delta n_x \sin 2\omega_0(t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\omega_0} \int_0^t (\Delta n_z + 3\omega_0^2 \Delta r) [\cos 2\omega_0(t - \tau) - 1] d\tau + \\ & + \frac{\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t + \delta x^0 + \\ & + \frac{\delta \dot{z}^0}{2\omega_0} (\cos 2\omega_0 t - 1) + r \theta_y^0. \quad (7.195) \end{aligned}$$

Согласно этому представлению решения  $\delta x_2$ , дисперсия  $D_{\delta x_2}$  может быть записана в виде суммы

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\Delta m_y^0} + D_{\delta x_2}^{\theta_y^0} + D_{\delta x_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x_2}^{\delta \dot{z}^0} + D_{\delta x_2}^{\Delta n_x} + D_{\delta x_2}^{\Delta n_z} + D_{\delta x_2}^{\Delta r}.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta m_y^0} &= \frac{r^2}{4\omega_0^2} D_{\Delta m_y} \sin^2 2\omega_0 t, \\ D_{\delta x_2}^{\theta_y^0} &= r^2 D_{\theta_y^0}, \end{aligned} \right\} \quad (7.196)$$

два последующих слагаемых определены первым и третьим равенствами (7.189), а три последних слагаемых — равенствами (7.191).

При малых значениях времени  $t$  из указанных соотношений получаем:

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2} = & D_{\delta x^0} + r^2 D_{\theta_y^0} + (D_{\delta \dot{x}^0} + r^2 D_{\Delta m_y}) t^2 + \\ & + \left( \omega_0^2 D_{\delta \dot{z}^0} + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} \right) t^4 + \left( \frac{1}{9} D_{\Delta n_z} + \omega_0^4 D_{\Delta r} \right) \omega_0^2 t^6. \quad (7.197) \end{aligned}$$

При больших значениях  $t$  приближенно

$$D_{\delta x_2} = \frac{1}{4\omega_0^2} \left( \frac{D_{\Delta n_x}}{\alpha_x} + \frac{3D_{\Delta n_z}}{\alpha_z} + \frac{27\omega_0^4 D_{\Delta r}}{\alpha_r} \right) t. \quad (7.198)$$

Сравнение этой формулы с первой формулой (7.164) показывает, что коррекция от высотомера существенно уменьшает случайную ошибку  $\delta x_2$  системы совершенно аналогично тому, как это уже было выяснено в отношении ошибки  $\theta_{1y}$ .

Выше рассмотрена корректируемая от высотомера инерциальная система с тремя произвольно ориентированными ньютонометрами. Обратимся теперь к схеме с двумя горизонтально ориентированными ньютонометрами. Как и в предыдущем случае, ограничимся при этом двумя крайними случаями: случаем неподвижного объекта и случаем спутника, движущегося по круговой орбите.

Если объект, на котором установлена инерциальная система, неподвижен в системе отсчета  $O_1\xi_*\eta_*\zeta_*$ , то уравнения ошибок инерциальной навигационной системы получаются из уравнений (2.28), (1.96), (1.108), (1.118), если в них положить  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \dot{r} = 0$ . При этом уравнения примут такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta\ddot{x} + \omega_0^2 \delta x &= \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y, \\ \delta\ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \Delta \dot{m}_x; \\ \dot{\theta}_x &= \Delta m_x, \quad \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z; \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_x. \end{aligned} \right\} \quad (7.199)$$

Уравнения (7.199) отличаются от рассмотренных ранее уравнений ошибок (7.168) схемы с тремя ньютонометрами лишь тем, что среди уравнений (7.199) отсутствуют третье и последнее уравнения (7.168), содержащие  $\delta z$ ,  $\delta z_2$ . Так как ошибки  $\delta z$ ,  $\delta z_2$  не входят в остальные уравнения, то анализ уравнений (7.199) приводит к результатам, уже полученным при анализе уравнений (7.168).

Рассмотрим случай спутника на круговой орбите. Для получения уравнений ошибок схемы с двумя ньютонометрами в этом случае следует в уравнениях (2.28), (1.96), (1.108), (1.118) положить:  $\omega_x = \omega_y = \dot{r} = 0$ ,  $\omega_y = \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \text{const}$ ,  $r = \text{const}$ . Тогда получим следующую

систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -2\omega_0 \dot{\Delta r} + \Delta n_x - r \dot{\Delta m}_y, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 \delta y &= \Delta n_y + r \dot{\Delta m}_x - r\omega_0 \Delta m_z; \\ \dot{\theta}_x + \omega_0 \theta_z &= \Delta m_x, \\ \dot{\theta}_y &= \Delta m_y, \\ \dot{\theta}_z - \omega_0 \theta_z &= \Delta m_z; \\ \theta_{1x} &= -\frac{\delta y}{r}, \quad \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \delta x_2 &= \delta x + r\theta_y, \quad \delta y_2 = \delta y - r\theta_x. \end{aligned} \right\} \quad (7.200)$$

Эта система отличается от системы (7.176), рассмотренной выше, отсутствием третьего и последнего уравнений, содержащих  $\delta z$  и  $\delta z_2$ . Кроме того, различна структура первых уравнений.

Поэтому результаты анализа системы (7.176) могут быть отнесены к системе (7.200) лишь частично. Очевидно, что дисперсии  $D_{\theta_x}$ ,  $D_{\theta_y}$ ,  $D_{\theta_z}$ ,  $D_{\theta_{1x}}$ ,  $D_{\theta_{1z}}$ ,  $D_{\delta y}$ ,  $D_{\delta y_2}$  будут иметь в случае уравнений (7.200) те же значения, что и в случае уравнений (7.176). Дисперсии же  $D_{\delta x}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\delta x_2}$  будут другими и их надо вычислить заново.

Решение первого уравнения (7.200) было найдено в § 2.3. Оно определено первой формулой (2.75) и имеет вид:

$$\delta x = \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t + \int_0^t (\Delta n_x - r \dot{\Delta m}_y - 2\omega_0 \dot{\Delta r})(t - \tau) d\tau. \quad (7.201)$$

Интегрируя по частям, можно преобразовать решение (7.201) к такому виду:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x^0 + \delta \dot{x}^0 t + \int_0^t \Delta n_x(t - \tau) d\tau - \\ &- \int_0^t (r \Delta m_y + 2\omega_0 \Delta r) d\tau + r \Delta m_y^0 t + 2\omega_0 \Delta r^0 t. \end{aligned} \quad (7.202)$$



Отсюда следует, что дисперсия  $D_{\delta x}$  случайной ошибки  $\delta x$  представляется суммой

$$D_{\delta x} = D_{\delta x}^{\delta x^0} + D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta r} + D_{\delta x}^{\Delta m_y}. \quad (7.203)$$

Первые два слагаемых этой суммы равны:

$$D_{\delta x}^{\delta x^0} = D_{\delta x^0}, \quad D_{\delta x}^{\delta \dot{x}^0} = D_{\delta \dot{x}^0} t^2. \quad (7.204)$$

Последние три слагаемых находятся из равенств:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= \int_0^t \int_0^t K_{\Delta n_x}(\tau, \tau') (t - \tau) (t - \tau') d\tau d\tau', \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= r^2 \left[ D_{\Delta m_y} t^2 + \int_0^t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') d\tau d\tau' - \right. \\ &\quad \left. - 2t \int_0^t K_{\Delta m_y}(\tau, 0) d\tau \right], \\ D_{\delta x}^{\Delta r} &= 4\omega_0^2 \left[ D_{\Delta r} t^2 + \int_0^t \int_0^t K_{\Delta r}(\tau, \tau') d\tau d\tau' - \right. \\ &\quad \left. - 2t \int_0^t K_{\Delta r}(\tau, 0) d\tau \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.205)$$

Подставляя сюда выражения (7.124), (7.171) корреляционных функций  $K_{\Delta n_x}$ ,  $K_{\Delta r}$ ,  $K_{\Delta m_y}$  случайных инструментальных погрешностей  $\Delta n_x$ ,  $\Delta r$ ,  $\Delta m_y$  и интегрируя, приходим к таким значениям дисперсий  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta m_y}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta r}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= D_{\Delta n_x} \left\{ \frac{2}{3\alpha_x} t^3 - \frac{1}{\alpha_x^2} t^2 + \frac{2}{\alpha_x^4} [1 - (\alpha_x t + 1) e^{-\alpha_x t}] \right\}, \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= r^2 D_{\Delta m_y} \left[ t^2 + \frac{2}{\beta_y^2} (e^{-\beta_y t} - 1) + \frac{2t}{\beta_y} e^{-\beta_y t} \right], \\ D_{\delta x}^{\Delta r} &= 4\omega_0^2 D_{\Delta r} \left[ t^2 + \frac{2}{\alpha_r^2} (e^{-\alpha_r t} - 1) + \frac{2t}{\alpha_r} e^{-\alpha_r t} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.206)$$

Соотношения (7.203), (7.204), (7.206) определяют дисперсию  $D_{\delta x}$  случайной ошибки  $\delta x$ , а вместе с равенством  $D_{\theta_{1y}} = D_{\delta x}/r^2$  — дисперсию  $D_{\theta_{1y}}$ . Для малых значений времени  $t$  указанные соотношения могут быть значительно упрощены. При этом для дисперсии  $D_{\theta_{1x}}$  получается такое приближенное выражение:

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} \left( D_{\delta x^0} + D_{\delta \dot{x}^0} t^2 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} t^4 + \right. \\ \left. + \frac{8}{3} \omega_0^2 \alpha_r D_{\Delta r} t^3 \right) + \frac{2}{3} \beta_y D_{\Delta m_y} t^3. \quad (7.207)$$

Для больших значений  $t$  приближенно

$$D_{\theta_{1y}} = \left[ \frac{1}{r^2} (D_{\delta \dot{x}^0} + 4\omega_0^2 D_{\Delta r}) + D_{\Delta m_y} \right] t^2 + \frac{2}{3r^2 \alpha_x} D_{\Delta n_x} t^3. \quad (7.208)$$

Сравним выражения (7.208), (7.194) и (7.137) для дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  в случаях корректируемых от высотомера схем с тремя и двумя ньютонометрами и в случае автономной инерциальной системы. Видно, что корректируемая система с двумя ньютонометрами дает существенно большие дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ , чем схема с тремя ньютонометрами. Выражение (7.208) гораздо ближе по своей структуре к выражению (7.137) дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  в автономной системе, чем к выражению (7.194) этой дисперсии в корректируемой системе с тремя ньютонометрами.

Перейдем к вычислению дисперсии  $D_{\delta x_2}$ . В соответствии с равенством  $\delta x_2 = \delta x + r\theta_y$  и формулами (7.202), (7.123) получаем такое выражение для  $\delta x_2$ :

$$\delta x_2 = \delta x^0 + r\theta_y^0 + (\delta \dot{x}^0 + r \Delta m_y^0 + 2\omega_0 \Delta r^0) t + \\ + \int_0^t (t - \tau) \Delta n_x d\tau - 2\omega_0 \int_0^t \Delta r d\tau. \quad (7.209)$$

В соответствии с этим выражением имеем:

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\delta x^0} + D_{\delta x_2}^{\delta \dot{x}^0} + D_{\delta x_2}^{\theta_y^0} + D_{\delta x_2}^{\Delta r} + D_{\delta x_2}^{\Delta n_x} + D_{\delta x_2}^{\Delta m_y^0}. \quad (7.210)$$

Здесь первые два слагаемых определены равенствами (7.204), дисперсия  $D_{\delta x_2}^{\theta_y^0}$  определена соотношением

$$D_{\delta x_2}^{\theta_y^0} = r^2 D_{\theta_y^0}, \quad (7.211)$$

четвертое и пятое слагаемые заданы третьим и первым равенствами (7.206), а для вычисления дисперсии  $D_{\delta x_2}^{\Delta m_y^0}$  имеет место формула

$$D_{\delta x_2}^{\Delta m_y^0} = r^2 D_{\Delta m_y} t^2. \quad (7.212)$$

При малых значениях времени  $t$  из выражения (7.210) находится следующее приближенное значение дисперсии  $D_{\delta x_2}$ :

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x^0} + r^2 D_{\theta_y^0} + (D_{\delta x^0} + r^2 D_{\Delta m_y}) t^2 + \\ + \frac{8}{3} \omega_0^2 \alpha_r D_{\Delta r} t^3 + \frac{1}{4} D_{\Delta n_x} t^4. \quad (7.213)$$

При больших значениях  $t$  упрощенное выражение для дисперсии  $D_{\delta x_2}$  получается таким:

$$D_{\delta x_2} = (D_{\delta x^0} + r^2 D_{\Delta m_y} + 4\omega_0^2 D_{\Delta r}) t^2 + \frac{2}{3\alpha_x} D_{\Delta n_x} t^3. \quad (7.214)$$

Сопоставление этого выражения с выражениями (7.198), (7.164а) приводит к выводам, аналогичным сделанным выше при сравнении выражений (7.208), (7.194), (7.137) для дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ .

**7.3.2. Совместная коррекция от высотомера и доплеровского измерителя скорости.** Рассмотрим влияние случайных инструментальных погрешностей на ошибки инерциальной системы, корректируемой одновременно от высотомера и доплеровского измерителя скорости. Ограничимся при этом анализом полученных в гл. 5 упрощенных уравнений ошибок типа уравнений (5.297), (5.299), уравнений (5.308), (5.309), уравнений (5.311), уравнений (5.313) и, наконец,

уравнений (5.335), (5.337), (5.340). Так как упрощенные уравнения (5.297), (5.299) и (5.308), (5.309) схем с тремя ньютонометрами аналогичны упрощенным уравнениям (5.311) и (5.313) схем с двумя ньютонометрами, то можно ограничиться анализом лишь этих последних. Результаты этого анализа могут быть затем легко перенесены на уравнения (5.297), (5.299) и (5.308), (5.309).

В гл. 5 было показано, что в случае уравнений (5.311) вторая группа уравнений ошибок имеет тот же вид, что и для автономной инерциальной системы. Приняв во внимание симметрию этих уравнений и уравнений (5.311), заключаем, что достаточно рассмотреть такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x = \\ = (1 + k_2) \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y + \\ + k_1 (\Delta V_{Dx} - r \Delta m_y) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx}; \\ \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z; \\ \delta x_2 = \delta x + r \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.215)$$

Аналогично, присоединяя к первому уравнению (5.313) последние пять соотношений (7.215), приходим к системе ( $k'_1 \omega_0^2 = k_1$ ):

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x = (1 + k_2) \Delta n_x + \\ + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \dot{n}_x - r \Delta \dot{m}_y - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx} - \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \ddot{V}_{Dx}; \\ \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \dot{\theta}_y = \Delta m_y, \quad \dot{\theta}_z = \Delta m_z; \\ \delta x_2 = \delta x + r \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.216)$$

В свою очередь, присоединяя необходимые дополнительные соотношения к уравнениям (5.335), (5.337), (5.340) и также учитывая их симметрию, убеждаемся, что здесь

достаточно рассмотреть систему следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + \omega_0^2 (1 + k_2) \delta x &= (1 + k_2) \Delta n_x - \\ &\quad - r \Delta \dot{m}_y - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx} + k_1 (\Delta V_{Dx} - r \Delta m_y); \\ \theta_{1y} &= \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z; \\ \dot{\theta}_y &= \Delta m_y + \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dx}, \quad \theta_z = \Delta m_z; \\ \delta x_2 &= \frac{1}{1 + k_2} (\delta x + r \dot{\theta}_y). \end{aligned} \right\} \quad (7.217)$$

Заметим, что в системах (7.215), (7.216), (7.217) уравнения для  $\theta_{1z}$ ,  $\theta_z$  одинаковы и аналогичны соответствующим уравнениям автономной инерциальной системы. Они рассмотрены в предшествующем параграфе и мы ими в дальнейшем заниматься не будем.

Обратимся к уравнениям (7.215). Наша задача заключается в том, чтобы вычислить дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\delta x_2}$  случайных ошибок ориентации платформы и определения местоположения объекта. При этом мы будем, как и ранее, предполагать, что инструментальные погрешности  $\Delta n_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta V_{Dx}$  являются стационарными некоррелированными друг с другом случайными функциями, причем их корреляционные функции будем считать заданными равенствами

$$\left. \begin{aligned} K_{\Delta n_x} &= D_{\Delta n_x} e^{-\alpha |t-t'|}, \quad K_{\Delta m_y} = D_{\Delta m_y} e^{-\beta |t-t'|}, \\ K_{\Delta V_{Dx}} &= D_{\Delta V_{Dx}} e^{-\gamma |t-t'|}. \end{aligned} \right\} \quad (7.218)$$

Из второго соотношения (7.215) следует, что дисперсия  $D_{\theta_{1y}} = D_{\delta x}/r^2$ . Так как решение однородного уравнения для  $\delta x$  затухает со временем (и при надлежащем выборе величин  $k_1$  и  $k_2$  затухает достаточно быстро), то при отыскании дисперсии  $D_{\delta x}$  можно ограничиться вычислением ее установившегося значения, для чего можно воспользоваться формулой (7.48).

Дисперсию  $D_{\delta x}$  можно представить в виде суммы:

$$D_{\delta x} = D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta m_y} + D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}}. \quad (7.219)$$

Так как спектральная плотность

$$S_{\Delta n_x}(\omega) = \frac{D_{\Delta n_x}}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (7.220)$$

и аналогичные формулы имеют место для  $S_{\Delta m_y}$  и  $S_{\Delta V_{Dx}}$ , то слагаемые правой части равенства (7.219) выражаются, согласно соотношению (7.48), следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= \\ &= \frac{D_{\Delta n_x} (1+k_2)^2 \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2) |(j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1+k_2)\omega_0^2|^2}, \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= \\ &= \frac{D_{\Delta m_y} \beta r^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|-j\omega - k_1|^2 d\omega}{(\beta^2 + \omega^2) |(j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1+k_2)\omega_0^2|^2}, \\ D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}} &= \\ &= \frac{D_{\Delta V_{Dx}} \gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_1 - k_2 j\omega|^2 d\omega}{(\gamma^2 + \omega^2) |(j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1+k_2)\omega_0^2|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.221)$$

Интегралы, стоящие здесь в правых частях, вычисляются таким образом. Они представляются в виде

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(j\omega) d\omega}{h_n(j\omega) h_n(-j\omega)}, \quad (7.222)$$

где в общем случае

$$\left. \begin{aligned} h_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \\ g_n(x) &= b_0 x^{2n-2} + b_1 x^{2n-4} + \dots + b_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (7.223)$$

[все корни  $h_n(x) = 0$  лежат в левой полуплоскости].

Интегралы (7.222) выражаются рационально \*) через коэффициенты полиномов  $g_n(x)$  и  $h_n(x)$ . Так, для  $n = 1, 2, 3, 4$

\*) Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.

имеют место следующие выражения\*):

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{\pi b_0}{a_0 a_1}, & J_2 &= \frac{\pi \left( -b_0 + \frac{a_0 b_1}{a_2} \right)}{a_0 a_1}, \\ J_3 &= \frac{\pi \left( -a_2 b_0 + a_0 b_1 - \frac{a_0 a_1 b_2}{a_3} \right)}{a_0 (a_0 a_3 - a_1 a_2)}, \\ J_4 &= \frac{\pi \left[ b_0 (-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4} (a_0 a_3 - a_1 a_2) \right]}{a_0 (a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.224)$$

Для первого из интегралов (7.221)  $n=3$  и

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= k_1 + \alpha, & a_2 &= (1 + k_2) \omega_0^2 + k_1 \alpha, \\ a_3 &= \alpha \omega_0^2 (1 + k_2), & b_0 &= 0, & b_1 &= 0, & b_2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (7.225)$$

Подставив эти величины в третью формулу (7.224), приходим к такому значению дисперсии  $D_{\delta x}^{\Delta n r}$ :

$$D_{\delta x}^{\Delta n r} = D_{\Delta n x} \frac{(k_1 + \alpha)(1 + k_2)}{\omega_0^2 k_1 [\omega_0^2 (1 + k_2) + \alpha(k_1 + \alpha)]}. \quad (7.226)$$

Для второго из интегралов (7.221) коэффициенты  $a_i$  отличаются от величин (7.225) лишь тем, что в них вместо  $\alpha$  надо подставить  $\beta$ . Коэффициенты же  $b_i$  равны:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = k_1^2. \quad (7.227)$$

В результате получим здесь:

$$D_{\delta x}^{\Delta m y} = r^2 D_{\Delta m y} \frac{\beta + \frac{k_1^2 (k_1 + \beta)}{\omega_0^2 (1 + k_2)}}{k_1 [\omega_0^2 (1 + k_2) + \beta(k_1 + \beta)]}. \quad (7.228)$$

---

\*) Значения интегралов  $J_n$  для  $n=1, \dots, 7$  можно найти в книге: Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.

Аналогично находим:

$$D_{\delta x}^{\Delta V D x} = D_{\Delta V D x} \frac{k_2^2 \gamma + \frac{k_1^2 (k_1 + \gamma)}{\omega_0^2 (1 + k_2)}}{k_1 [\omega_0^2 (1 + k_2) + \gamma (k_1 + \gamma)]}. \quad (7.229)$$

Формулы (7.219), (7.226), (7.228), (7.229) определяют установившееся значение дисперсии  $D_{\delta x}$ , а вместе с соотношением

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} D_{\delta x} \quad (7.229a)$$

дают установившееся значение дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ .

Вычислим дисперсию  $D_{\delta x_2}$  полной ошибки определения местоположения в направлении оси  $x$ . В соответствии с последним равенством (7.215)

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x} + r^2 D_{\theta_y} + 2r K_{\delta x, \theta_y}(t, t). \quad (7.230)$$

Величина  $D_{\delta x}$  вычислена (для достаточно больших значений  $t$ ) выше. Величина  $D_{\theta_y}$  имеет то же значение, что и для автономной инерциальной системы, т. е. задана равенствами (7.72). Так как в качестве первого слагаемого в формуле (7.230) имеется в виду установившееся значение  $D_{\delta x}$ , то вместо равенств (7.72) можно взять

$$D_{\theta_y} = D_{\theta_y^0} + 2D_{\Delta m_y} \left( \frac{t}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} \right). \quad (7.231)$$

Осталось найти  $K_{\delta x, \theta_y}(t, t)$ . Случайные инструментальные погрешности и начальные условия мы считаем некоррелированными друг с другом, поэтому в соответствии с первым и четвертым уравнениями (7.215) имеет место формула

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = -\frac{r}{v} \int_0^t \int_0^t [k_1 K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') + \\ + K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}(\tau, \tau')] e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin v(t-\tau) d\tau d\tau', \quad (7.232)$$

где

$$\varepsilon = \frac{k_1}{2}, \quad v = \sqrt{\omega_0^2 (1 + k_2) - \frac{k_1^2}{4}}. \quad (7.233)$$



Подставляя в подынтегральное выражение в правой части равенства (7.232) значения  $K_{\Delta m_y}$  и  $K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}$ , определенные формулами (7.218), (7.99), получаем:

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = -\frac{r}{v} D_{\Delta m_y} \int_0^t \int_0^t [k_1 - \beta \operatorname{sign}(\tau - \tau')] \times \\ \times e^{-\beta |\tau - \tau'| - \varepsilon(t - \tau)} \sin v(t - \tau) d\tau d\tau'. \quad (7.234)$$

Раскрывая значение стоящего здесь в правой части двойного интеграла, находим:

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r}{\beta} D_{\Delta m_y} \left\{ \frac{2k_1}{\varepsilon^2 + v^2} - \frac{k_1 + \beta}{(\varepsilon + \beta)^2 + v^2} - \right. \\ - \frac{k_1 - \beta}{(\varepsilon - \beta)^2 + v^2} e^{-\beta t} + \frac{k_1 + \beta}{v[(\varepsilon + \beta)^2 + v^2]} \left[ -(\varepsilon + \beta) \sin vt + \right. \\ \left. + v \cos vt \right] e^{-(\varepsilon + \beta)t} + \left[ \left( -\frac{2k_1 \varepsilon}{v(\varepsilon^2 + v^2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(k_1 - \beta)(\varepsilon - \beta)}{v[(\varepsilon - \beta)^2 + v^2]} \right) \sin vt + \right. \\ \left. + \left( -\frac{2k_1}{\varepsilon^2 + v^2} + \frac{k_1 - \beta}{(\varepsilon - \beta)^2 + v^2} \right) \cos vt \right] e^{-\varepsilon t} \right\}. \quad (7.235)$$

По затухании переходных процессов

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r D_{\Delta m_y}}{\beta} \left[ \frac{2k_1}{\varepsilon^2 + v^2} - \frac{k_1 + \beta}{(\varepsilon^2 + \beta^2) + v^2} \right]. \quad (7.236)$$

Теперь выражение для дисперсии  $D_{\delta x_2}$  может быть представлено в виде суммы

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x}^{\Delta n} + D_{\delta x}^{\Delta V} + D_{\delta x_2}^{\Delta m_y}, \quad (7.237)$$

где первые два слагаемых вычисляются по формулам (7.226), (7.229), а последнее слагаемое равно:

$$D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} = r^2 D_{\theta_y} + 2r K_{\delta x, \theta_y}(t, t) + D_{\delta x}^{\Delta m_y}, \quad (7.238)$$

что, если учесть соотношения (7.228), (7.231), (7.236), (7.233), приводит к формуле

$$D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} = r^2 D_{\theta_y^0} + 2r^2 D_{\Delta m_y} \left\{ \frac{t}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} - \frac{2k_1}{\beta(1+k_2)\omega_0^2} + \right. \\ \left. + \frac{k_1 + \beta}{\beta[\omega_0^2(1+k_2) + \beta^2 - k_1\beta]} + \frac{\beta + \frac{k_1^2(k_1 + \beta)}{\omega_0^2(1+k_2)}}{k_1[\omega_0^2(1+k_2) + \beta(k_1 + \beta)]} \right\} \quad (7.239)$$

Если считать, что

$$\alpha, \beta, \gamma \gg k_1, \omega_0(1+k_2) \text{ и } k_2 \gg 1, \quad (7.240)$$

то выражения (7.226), (7.228), (7.229) могут быть значительно упрощены. Вместе с ними упрощаются и выражения для дисперсий  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\delta x_2}$ . Для их определения получаются тогда следующие приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} D_{\theta_{1y}} &= \frac{D_{\Delta n_x}}{r^2} \frac{k_2}{\omega_0^2 k_1 \alpha} + \frac{D_{\Delta V_{Dx}}}{r^2} \frac{k_2^2 + \frac{k_1^2}{k_2 \omega_0^2}}{k_1 \gamma} + \\ &\quad + D_{\Delta m_y} \frac{1 + \frac{k_1^2}{k_2 \omega_0^2}}{k_1 \beta}, \\ D_{\delta x_2} &= D_{\Delta n_x} \frac{k_2}{\omega_0^2 k_1 \alpha} + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{k_2^2 + \frac{k_1^2}{\omega_0^2 k_2}}{k_1 \gamma} + \\ &\quad + r^2 D_{\theta_y^0} + 2r^2 D_{\Delta m_y} \left( \frac{t}{\beta} + \frac{\omega_0^2 k_2 - k_1^2}{\omega_0^2 k_1 k_2 \beta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.240a)$$

Из второй из этих формул следует, что с течением времени величина дисперсии  $D_{\delta x_2}$  все в большей степени определяется слагаемым, пропорциональным времени и зависящим от инструментальных погрешностей гироскопов. При больших  $t$  приближенно

$$D_{\delta x_2} = 2r^2 D_{\Delta m_y} \frac{t}{\beta}. \quad (7.241)$$

Выше найдены дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$  для случая уравнений ошибок (7.215). Найдём теперь эти дисперсии для случая системы уравнений (7.216). Эта система отличается от системы (7.215) лишь первым уравнением. Поэтому различие дисперсий  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$  в обоих случаях будет определяться различием дисперсий  $D_{\delta x}$  и функций  $K_{\delta x, \theta_y}(t, t)$ .

В соответствии с первым уравнением (2.216) установившееся значение дисперсии  $D_{\delta x}$  может быть представлено в виде суммы

$$D_{\delta x} = D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta m_y} + D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}}, \quad (7.242)$$

слагаемые которой находятся из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= \\ &= \frac{\alpha D_{\Delta n_x}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| 1 + k_2 + \frac{k_1}{\omega_0^2} j\omega \right|^2 d\omega}{(\alpha^2 + \omega^2) \left| (j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1 + k_2) \omega_0^2 \right|^2}, \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= \\ &= \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|-j\omega|^2 d\omega}{(\beta^2 + \omega^2) \left| (j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1 + k_2) \omega_0^2 \right|^2}, \\ D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}} &= \\ &= \frac{\gamma D_{\Delta V_{Dx}}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| -k_2 j\omega - \frac{k_1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 \right|^2 d\omega}{(\gamma^2 + \omega^2) \left| (j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1 + k_2) \omega_0^2 \right|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7.243)$$

Интегралы (7.243) можно вычислить совершенно аналогично тому, как выше были вычислены интегралы (7.221). В результате получим

$$\left. \begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta n_x} &= D_{\Delta n_x} \frac{(k_1 + \alpha)(1 + k_2)\omega_0^2 + k_1^2 \alpha}{\omega_0^4 k_1 [\omega_0^2(1 + k_2) + \alpha(k_1 + \alpha)]}, \\ D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= D_{\Delta m_y} \frac{\beta r^2}{k_1 [\omega_0^2(1 + k_2) + \beta(k_1 + \beta)]}, \\ D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}} &= D_{\Delta V_{Dx}} \frac{\gamma \{k_1^2 [\omega_0^2(1 + k_2) + k_1 \gamma] + k_2^2 \omega_0^4\}}{\omega_0^4 k_1 [\omega_0^2(1 + k_2) + \gamma(k_1 + \gamma)]}. \end{aligned} \right\} \quad (7.244)$$

Формулы (7.244), (7.242) вместе с соотношением

$$D_{\theta_{1y}} = D_{\delta x}/r^2$$

определяют установившееся значение дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ . Если имеют место неравенства (7.240), то с учетом этих неравенств получается следующее приближенное значение установившейся дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ :

$$D_{\theta_{1y}} = D_{\Delta n_x} \frac{k_2 \omega_0^2 + k_1^2}{r^2 \omega_0^4 k_1 \alpha} + D_{\Delta m_y} \frac{1}{\beta k_1} + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{k_1^2}{r^2 \omega_0^4}. \quad (7.245)$$

Для вычисления дисперсии  $D_{\delta x_2}$  составляющей  $\delta x_2$  полной ошибки определения местоположения можно воспользоваться снова формулой (7.230). В эту формулу входят  $D_{\delta x}$ ,  $D_{\theta_y}$  и  $K_{\delta x, \theta_y}(t, t)$ . Величина  $D_{\delta x}$  найдена выше, функция  $D_{\theta_y}$  имеет тот же вид, что и для автономной инерциальной системы, т. е. задана равенствами (7.72). Так как речь идет о вычислении асимптотического значения дисперсии  $D_{\delta x_2}$ , то вместо равенств (7.72) можно воспользоваться асимптотическим выражением (7.231). Что касается функции  $K_{\delta x, \theta_y}(t, t)$ , то ее надо найти заново, ибо выражение (7.236), полученное для уравнений (7.215), несправедливо, очевидно, для уравнений (7.216).

В соответствии с первым и четвертым уравнениями (7.216) имеем:

$$\begin{aligned} K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \\ = -\frac{r}{v} \int_0^t \int_0^t K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}(\tau, \tau') e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin v(t-\tau) d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (7.246)$$

где величины  $\varepsilon$  и  $v$  заданы равенствами (7.233). Принимая во внимание выражение (7.99) для взаимной корреляционной функции  $K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}$ , получаем далее:

$$\begin{aligned} K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \\ = \frac{r\beta}{v} D_{\Delta m_y} \int_0^t \int_0^t \operatorname{sign}(\tau - \tau') e^{-\beta|\tau - \tau'| - \varepsilon(t-\tau)} \sin v(t-\tau) d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (7.247)$$

Вычисляя значение входящего в правую часть интеграла, приходим к формуле:

$$K_{\delta x, \theta_y}(t, t) = \frac{r}{\beta} D_{\Delta m_y} \left\{ -\frac{\beta}{(\varepsilon + \beta)^2 + v^2} + \frac{\beta}{(\varepsilon - \beta)^2 + v^2} e^{-\beta t} + \right. \\ \left. + \frac{\beta}{v[(\varepsilon + \beta)^2 + v^2]} [-(\varepsilon + \beta) \sin vt + v \cos vt] e^{-(\varepsilon + \beta)t} - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{(\varepsilon - \beta)^2 + v^2} \left( \frac{\varepsilon - \beta}{v} \sin vt + \cos vt \right) e^{-\varepsilon t} \right\}. \quad (7.248)$$

По затухании переходных процессов

$$K_{\delta x, \theta_y} = -\frac{r D_{\Delta m_y}}{(\varepsilon + \beta)^2 + v^2}. \quad (7.249)$$

Чтобы закончить вычисление дисперсии  $D_{\delta x_2}$ , надо подставить выражения (7.242), (7.231), (7.249), (7.244) в равенство (7.230). Если учесть при этом неравенства (7.240), то получим приближенно, что

$$D_{\delta x_2} = D_{\Delta n_x} \frac{k_2 \omega_0^2 + k_1^2}{\omega_0^4 k_1 \alpha} + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{k_1^2 (k_2 \omega_0^2 + k_1 v) + k_2 \omega_0^4}{\omega_0^4 k_1 v} + \\ + D_{\Delta m_y} \frac{r^2}{\beta} \left( \frac{1}{k_1} + 2t \right) + r^2 D_{\theta_y^0}. \quad (7.250)$$

При больших значениях  $t$ , когда величина дисперсии  $D_{\delta x_2}$  будет определяться слагаемым, содержащим множителем время, формула (7.250) перейдет в приближенную формулу (7.241).

Обратимся теперь к системе уравнений (7.217). Как легко видеть, она отличается от системы (7.215) четвертым и последним уравнениями. Первые же уравнения в обоих случаях одинаковы. Поэтому дисперсия  $D_{\delta x}$ , а значит, и дисперсия  $D_{\theta_{1y}}$  будут иметь здесь те же значения, что и в случае уравнений (7.215). Они определяются формулами (7.219), (7.226), (7.228), (7.229), (7.229а). Следовательно, в случае уравнений (7.217) задача сводится к вычислению дисперсии  $D_{\delta x_2}$ , ошибки  $\delta x_2$  определения местоположения объекта.

Согласно последнему равенству (7.217),

$$D_{\delta x_2} = \frac{1}{(1+k_2)^2} D_{\delta x} + \frac{r^2}{(1+k_2)^2} D_{\delta y} + \frac{2r}{1+k_2} K_{\delta x, \delta y}(t, t). \quad (7.251)$$

Как уже говорилось, дисперсия  $D_{\delta x}$  имеет здесь то же значение, что и в случае уравнений (7.215). Легко находится также дисперсия  $D_{\delta y}$ . В самом деле, сравнивая пятое уравнение систем (2.215) и (2.217), принимая во внимание соотношения (7.72), (7.218) и замечая, что инструментальные погрешности  $\Delta V_{Dx}$  и  $\Delta m_y$  не коррелированы, приходим к такому выражению для  $D_{\delta y}$ :

$$D_{\delta y} = D_{\delta y^0} + 2D_{\Delta m_y} \left[ \frac{t}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} (e^{-\beta t} - 1) \right] + \\ + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{2k_2^2}{r^2} \left[ \frac{t}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2} (e^{-\gamma t} - 1) \right]. \quad (7.252)$$

Для больших значений  $t$  величины  $e^{-\beta t}$ ,  $e^{-\gamma t}$  становятся малыми и имеет место асимптотическая формула

$$D_{\delta y} = D_{\delta y^0} + \frac{2}{\beta} D_{\Delta m_y} \left( t - \frac{1}{\beta} \right) + \frac{2k_2^2}{r^2 \gamma} D_{\Delta V_{Dx}} \left( t - \frac{1}{\gamma} \right). \quad (7.253)$$

Осталось найти функцию  $K_{\delta x, \delta y}(t, t)$ . В соответствии с первым и четвертым уравнениями (7.217) находим:

$$K_{\delta x, \delta y}(t, t) = -\frac{r}{\gamma} \int_0^t \int_0^t [k_1 K_{\Delta m_y}(\tau, \tau') + \\ + K_{\Delta \dot{m}_y, \Delta m_y}(\tau, \tau')] e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \gamma(t-\tau) d\tau d\tau' + \\ + \frac{k_2}{r\gamma} \int_0^t \int_0^t [k_1 K_{\Delta V_{Dx}}(\tau, \tau') - \\ - k_2 K_{\Delta \dot{V}_{Dx}, \Delta V_{Dx}}(\tau, \tau')] e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \gamma(t-\tau) d\tau d\tau'. \quad (7.254)$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части равенства (7.254), вычислен нами ранее. Его значение определено выражением, стоящим в правой части соотношения (7.235).

Второй интеграл вычисляется аналогично. Для него получается формула:

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{k_2}{r\gamma} \int_0^t \int_0^t [k_1 K_{\Delta V D_x}(\tau, \tau') - \\
 &\quad - k_2 K_{\Delta V D_x, \Delta V D_x}(\tau, \tau')] e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \nu(t-\tau) d\tau d\tau' = \\
 &= \frac{k_2}{r\gamma} D_{\Delta V D_x} \left\{ \frac{2k_1}{\varepsilon^2 + \nu^2} - \frac{k_1 - k_2\gamma}{(\varepsilon + \gamma)^2 + \nu^2} - \right. \\
 &\quad - \frac{k_1 + k_2\gamma}{(\varepsilon - \gamma)^2 + \nu^2} e^{-\gamma t} + \frac{k_1 - k_2\gamma}{\nu[(\varepsilon + \gamma)^2 + \nu^2]} \times \\
 &\quad \times [-(\varepsilon + \gamma) \sin \nu t + \nu \cos \nu t] e^{-(\varepsilon + \gamma)t} + \\
 &\quad + \left[ \left( -\frac{2k_1\varepsilon}{\nu(\varepsilon^2 + \nu^2)} + \frac{(k_1 + k_2\gamma)(\varepsilon - \gamma)}{\nu[(\varepsilon - \gamma)^2 + \nu^2]} \right) \sin \nu t + \right. \\
 &\quad \left. + \left( -\frac{2k_1}{\varepsilon^2 + \nu^2} + \frac{k_1 + k_2\gamma}{(\varepsilon - \gamma)^2 + \nu^2} \right) \cos \nu t \right] e^{-\varepsilon t} \left. \right\}. \quad (7.255)
 \end{aligned}$$

При больших  $t$  величина  $q$  асимптотически стремится к значению

$$q = \frac{k_2}{r\gamma} \left[ \frac{2k_1}{\varepsilon^2 + \nu^2} - \frac{k_1 - k_2\gamma}{(\varepsilon - \gamma)^2 + \nu^2} \right]. \quad (7.256)$$

Чтобы получить значение  $D_{\delta x_2}$  для случая уравнений (7.217), надо теперь подставить в формулу (7.251) значение  $D_{\delta x}$ , следующее из соотношений (7.219), (7.226), (7.228), (7.229), значение  $D_{\vartheta_y}$ , определенное равенством (7.253), и значение  $K_{\delta x, \vartheta_y}(t, t)$ , вытекающее из равенств (7.254), (7.235), (7.255).

Если полагать выполненными неравенства (7.240), то в результате указанных подстановок получится следующая приближенная формула:

$$\begin{aligned}
 D_{\delta x_2} &= \frac{D_{\Delta n_x}}{\omega_0^2 k_1 k_2 \alpha} + \frac{D_{\Delta V D_x}}{\gamma} \left[ \frac{\omega_0^2 k_2^3 + k_1^2}{\omega_0^2 k_1 k_2} + 2 \left( \frac{2k_1}{\omega_0^2 k_2} - \frac{k_2}{\gamma} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left( t + \frac{1}{\gamma} \right) \right] + \frac{r^2}{k_2^2} D_{\vartheta_y^0} + \frac{2r^2 D_{\Delta m_y}}{\beta k_2} \times \\
 &\quad \times \left[ \frac{1}{k_2} \left( t + \frac{\omega_0^2 k_2 - k_1^2}{\omega_0^2 k_1 k_2 \beta} \right) + \frac{2k_1}{\omega_0^2 k_2} - \frac{1}{\beta} \right]. \quad (7.257)
 \end{aligned}$$

Для достаточно большого значения времени  $t$  работы системы величина дисперсии  $D_{\delta x_2}$  будет, очевидно, определяться слагаемыми, содержащими множителем время. В этом случае приближенно

$$D_{\delta x_2} = 2 \left( \frac{D_{\Delta V_{Dx}}}{\gamma} + \frac{r^2 D_{m_y}}{\beta k_2^2} \right) t. \quad (7.258)$$

Сравнение формулы (7.258) с формулой (7.249) показывает, что вариант коррекции, соответствующий уравнениям ошибок (7.217), предпочтительнее вариантов, соответствующих уравнениям ошибок (7.215), (7.216) в том случае, когда

$$D_{\Delta V_{Dx}} \ll r^2 D_{\Delta m_y}. \quad (7.259)$$

В противном случае более эффективными являются варианты коррекции, соответствующие уравнениям (7.215), (7.216).

Интересно сравнить дисперсии ошибок (7.240а), полученные из уравнений (7.215), с дисперсиями ошибок (7.245), (7.250), полученными из уравнений (7.216). Из сравнения первой формулы (7.240а) с формулой (7.245) видно, что дисперсии ошибок ориентации, вызванных случайными погрешностями ньютонометров и доплеровского измерителя скорости, всегда больше в схеме, соответствующей уравнениям (7.216). Дисперсии ошибок ориентации, вызванных случайными инструментальными погрешностями гироскопов, наоборот, всегда больше в схеме, соответствующей уравнениям (7.215). Поэтому та или иная из этих схем может оказаться предпочтительнее другой в зависимости от того, инструментальные погрешности каких элементов наиболее существенны.

При выборе варианта коррекции необходимо учитывать не только дисперсии, но и математические ожидания случайных ошибок. Так, если математическое ожидание погрешности доплеровского измерителя существенно, то предпочтительнее может оказаться схема, соответствующая уравнениям (7.216), в правые части которых погрешность  $\Delta V_{Dx}$  входит лишь своими производными, несмотря на то, что дисперсии ошибок  $D_{\delta x_2}^{\Delta V_{Dx}}$ ,  $D_{\theta_{1y}}^{\Delta V_{Dx}}$  здесь будут большими, чем в схеме, соответствующей уравнениям (7.215).

Сравнение второй формулы (7.240а) с формулой (7.250) показывает, что влияние погрешностей ньютонометров и



доплеровского измерителя на величины дисперсии  $D_{\delta x_2}$  ошибок определения координат такое же, как и на величины дисперсий ошибок ориентации. Что касается погрешностей гироскопов, то здесь имеет место следующее. Слагаемые, пропорциональные времени, одинаковы как в случае уравнений (7.215), так и в случае уравнений (7.216). Таким образом, если погрешности гироскопов достаточно велики, а время работы системы большое, т. е. если погрешности (уходы) гироскопов являются определяющими, то схемы, соответствующие уравнениям (7.215) и (7.216), оказываются равносильными с точки зрения величин дисперсий ошибок координат.

Отметим, что высказанные выше сравнительные замечания сделаны по упрощенным формулам, которые предполагают выполнение неравенств (7.240). При невыполнении этих неравенств надо сравнивать полученные выше точные формулы для дисперсий ошибок. При сравнении следует еще иметь в виду, что наряду с уменьшением установившихся ошибок целью доплеровской коррекции является введение в схему достаточно большого (эффективного) демпфирования.

**7.3.3. Одновременная коррекция от высотомера и астро-доплеровская коррекция.** Присоединим к коррекции от высотомера и доплеровской еще и астрокоррекцию и рассмотрим их совместную работу при случайных погрешностях.

Ограничимся при этом случаем линейной астрокоррекции. В системе уравнений (7.215) изменятся при добавлении астрокоррекции левые части четвертого и пятого из этих уравнений, а также правая часть первого уравнения [см. (6.66)]. Так как при этом уравнения для  $\theta_y$  и  $\theta_z$  будут идентичными друг другу, то здесь достаточно рассмотреть такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta x} + k_1 \dot{\delta x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x = \\ = (1 + k_2) \Delta n_x - r (\Delta \dot{m}_y k \dot{\theta}_y) + \\ + k_1 [\Delta V_{Dx} - r (\Delta m_y k \theta_y)] - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx}, \\ \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \\ \dot{\theta}_y + k \theta_y = \Delta m_y, \\ \delta x_2 = \delta x + r \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.260)$$

Вместо системы уравнений (7.216) получим соответственно следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x = \\ = (1 + k_2) \Delta n_x + \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \dot{n}_x - r (\Delta \dot{m}_y - k \dot{\theta}_y) - \\ - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx} - \frac{k_1}{\omega_0^2} \Delta \ddot{V}_{Dx}, \\ \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \\ \dot{\theta}_y + k \theta_y = \Delta m_y, \\ \delta x_2 = \delta x + r \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.261)$$

Наконец, вместо системы уравнений (7.217) получаются [см. уравнения (6.166) — (6.168)] уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x - r k \dot{\theta}_y - r k_1 k \theta_y = \\ = (1 + k_2) \Delta n_x - r \Delta \dot{m}_y + \\ + k_1 (\Delta V_{Dx} - r \Delta m_y) - k_2 \Delta \dot{V}_{Dx}, \\ (1 + k_2) \dot{\theta}_y + k \theta_y + k_2 \frac{\delta \dot{x}}{r} = \Delta m_y + \frac{k_2}{r} \Delta V_{Dx}, \\ \dot{\theta}_z + k \theta_z = \Delta m_z, \\ \theta_{1y} = \frac{\delta x}{r}, \quad \theta_{1z} = -\theta_z, \\ \delta x_2 = \delta x + r \theta_y. \end{aligned} \right\} \quad (7.262)$$

При  $k = 0$  уравнения (7.262) заменой переменных (6.169) сводятся к уравнениям (7.217).

Рассмотрим уравнения (7.260). Вычислим установившиеся (по затухании переходных процессов) значения дисперсий  $D_\theta$ ,  $D_{\delta x}$ ,  $D_{\theta_1}$ ,  $D_{\delta x_2}$  ошибок  $\theta$ ,  $\delta x$ ,  $\theta_1$ ,  $\delta x_2$ . При этом будем предполагать, что инструментальные погрешности  $\Delta n_x$ ,  $\Delta m_y$ ,  $\Delta V_{Dx}$  имеют спектральные плотности вида (7.220).

Из третьего уравнения (7.260) и второго равенства (7.218) имеем:

$$D_{\theta_y} = \frac{\beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(\beta^2 + \omega^2) |j\omega + k|^2}. \quad (7.263)$$

Воспользуемся для вычисления интеграла, стоящего в правой части, представлением (7.222). Здесь  $n=2$ , причем  $a_0=1$ ,  $a_1=k+\beta$ ,  $a_2=k\beta$ ,  $b_0=0$ ,  $b_1=1$ . Согласно второму равенству (7.224), получаем поэтому:

$$D_{\theta_y} = \frac{D_{\Delta m_y}}{k(k+\beta)}. \quad (7.264)$$

Как и ранее,

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} D_{\delta x}. \quad (7.265)$$

Для вычисления установившегося значения дисперсии  $D_{\delta x}$  представим ее значение в виде

$$D_{\delta x} = D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}} + D_{\delta x}^{\Delta m_y}, \quad (7.266)$$

где справа стоит сумма дисперсий от независимых случайных инструментальных погрешностей  $\Delta n_x$ ,  $\Delta V_{Dx}$ ,  $\Delta m_y$ , образующих правые части уравнений (7.260). Очевидно, что величины  $D_{\delta x_2}^{\Delta n_x}$  и  $D_{\delta x_2}^{\Delta V_{Dx}}$  будут иметь те же значения, что и величины  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}}$ , полученные ранее при рассмотрении системы уравнений (7.215). Эти последние величины определяются формулами (7.226) и (7.229).

Для отыскания слагаемого  $D_{\delta x}^{\Delta m_y}$  заметим, что если в правой части первого из уравнений (7.260) положить

$$\Delta n_x = 0, \quad \Delta V_{Dx} = 0,$$

а разность  $\Delta m_y - k\theta_y$  заменить на  $\dot{\theta}_y$  согласно третьему уравнению, то первое уравнение (7.260) примет вид

$$\delta \ddot{x} + k_1 \delta \dot{x} + (1 + k_2) \omega_0^2 \delta x = -r (\ddot{\theta}_y + k_1 \dot{\theta}_y). \quad (7.267)$$

Поэтому передаточную функцию

$$\Phi(j\omega) = \frac{\delta x}{\Delta m_y}$$

можно записать следующим образом:

$$\Phi(j\omega) = - \frac{r j\omega (j\omega + k_1)}{[(j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1 + k_2)\omega_0^2] (j\omega + k)}. \quad (7.268)$$

Здесь использовано равенство

$$\frac{\theta_y}{\Delta m_y} = \frac{1}{j\omega + k}.$$

Теперь, замечая, что

$$S_{\Delta m_y}(\omega) = \frac{D_{\Delta m_y}}{\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2}, \quad (7.269)$$

получаем в соответствии с формулой (7.48):

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= \\ &= \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-(j\omega)^2 - k_1 j\omega}{[(j\omega)^2 + k_1 j\omega + \omega_0^2 (1 + k_2)] (j\omega + k)} \right|^2 \frac{d\omega}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (7.270)$$

Для вычисления стоящего здесь интеграла воспользуемся, как обычно, представлением (7.222). В рассматриваемом случае  $n = 4$ , причем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= k + \beta + k_1, \\ a_2 &= \omega_0^2 (1 + k_2) + k\beta + k_1(k + \beta), \\ a_3 &= k_1 k\beta + \omega_0^2 (1 + k_2)(k + \beta), \\ a_4 &= k\beta \omega_0^2 (1 + k_2), \\ b_0 &= 0, \\ b_1 &= 1, \\ b_2 &= -k_1^2, \\ b_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.271)$$

Подставляя эти значения коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$  в четвертую формулу (7.224) и производя очевидные упрощения, получаем:

$$D_{\delta x}^{\Delta m y} = \frac{r^2 \beta D_{\Delta m y}}{(k + \beta)} \times \\ \times [\omega_0^2 (1 + k_2) (k + \beta) + k\beta + k_1 (k_1 + k + \beta)] \times \\ \times \{k\beta + [k\beta + k_1 (k + \beta + k_1)] + \omega_0^4 (1 + k_2)^2 + \\ + \omega_0^2 (1 + k_2) [k_1 (\beta + k) + k^2 + \beta^2]\}^{-1}. \quad (7.272)$$

Формулы (7.266), (7.226), (7.229), (7.272) определяют установившееся значение дисперсии  $D_{\delta x_2}$  при произвольных параметрах коррекции. Если принять неравенства (7.240), а также принять во внимание, что обычно

$$k \gg k_1, \quad \omega_0 \sqrt{1 + k_2}, \quad (7.273)$$

то из указанных формул получается следующее приближенное выражение для дисперсии  $D_{\delta x}$ :

$$D_{\delta x_2} = D_{\Delta n x} \frac{k_2}{\omega_0^2 \alpha k_1} + D_{\Delta m y} \frac{r^2}{k (k + \beta)} + D_{\Delta V D x} \frac{k_1^2 + k_2^3 \omega_0^2}{\omega_0^2 k_1 \gamma k_2}. \quad (7.274)$$

Перейдем к вычислению дисперсии  $D_{\delta x_2}$ . Аналогично (7.266) представим ее значение в виде суммы

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\Delta n x} + D_{\delta x_2}^{\Delta V D x} + D_{\delta x_2}^{\Delta m y}. \quad (7.275)$$

Здесь величины первых двух слагаемых правой части равны соответственно величинам  $D_{\delta x}^{\Delta n x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta V D x}$ , входящим в сумму (7.266) и определенным формулами (7.226) и (7.229):

$$D_{\delta x_2}^{\Delta n x} = D_{\delta x}^{\Delta n x}, \\ D_{\delta x_2}^{\Delta V D x} = D_{\delta x}^{\Delta V D x}.$$

Для отыскания значения третьего слагаемого (7.275) приходим к равенству

$$D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} = \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_0^4 (1+k_2)^2 d\omega}{[(j\omega)^2 + k_1 j\omega + (1+k_2)\omega_0^2] (j\omega + k)^2 (\beta^2 + \omega^2)}, \quad (7.276)$$

которое получается совершенно аналогично равенству (7.270).

Интеграл в соотношении (7.276) вычисляется по четвертой формуле (7.224). В рассматриваемом случае коэффициенты  $a_i$  заданы первыми четырьмя равенствами (7.271), а коэффициенты  $b_i$  равны соответственно

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \omega_0^4 (1+k_2)^2. \quad (7.277)$$

Приняв это во внимание, получим

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} = & \frac{r^2 \omega_0^2 (1+k_2) D_{\Delta m_y}}{k_1 k (k+\beta)} \times \\ & \times \{k_1 \omega_0^2 (1+k_2) + (k+\beta) [k\beta + k_1 (k_1 + k + \beta)]\} \times \\ & \times \{\omega_0^4 (1+k_2)^2 + \omega_0^2 (1+k_2) [k^2 + \beta^2 + k_1 (k+\beta)] + \\ & + k\beta [k\beta + k_1 (k_1 + k + \beta)]\}^{-1}. \quad (7.278) \end{aligned}$$

Равенства (7.272), (7.226), (7.229), (7.278) определяют дисперсию  $D_{\delta x_2}$  ошибки  $\delta x_2$  для произвольных величин коэффициентов коррекции. Если подчинить их значения тем же условиям, что были приняты при выводе приближенной формулы (7.271), то из указанных равенств получается упрощенная формула

$$D_{\delta x_2} = D_{\Delta n_x} \frac{k_2}{\omega_0^2 a k_1} + D_{\Delta m_y} \frac{r^2 \omega_0^2 k_2}{k_1 k^2 \beta} + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{k_1^2 + \omega_0^2 k_2^3}{\omega_0^2 k_1 k_2 \gamma}. \quad (7.279)$$

Рассмотрим уравнения (7.261). Третье уравнение (7.261) совпадает с третьим уравнением (7.260). Значит, для дисперсии  $D_{\theta_y}$  остается в силе выражение (7.264). Заново необходимо вычислить, таким образом, лишь дисперсии  $D_{\delta x}$ ,  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$ .

Представим дисперсию  $D_{\delta x}$  в виде суммы:

$$D_{\delta x} = D_{\delta x}^{\Delta n_x} + D_{\delta x}^{\Delta V D x} + D_{\delta x}^{\Delta m_y}. \quad (7.280)$$

Очевидно, как и ранее,

$$D_{\theta_{1y}} = \frac{1}{r^2} D_{\delta x}.$$

Из сравнения уравнений (7.261) и (7.216) вытекает, что величины  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$ ,  $D_{\delta x}^{\Delta V D x}$  определены первым и третьим равенствами (7.244). Для  $D_{\delta x}^{\Delta m_y}$  получается выражение

$$\begin{aligned} D_{\delta x}^{\Delta m_y} &= \\ &= \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-j\omega}{[(j\omega)^2 + k_1 j\omega + \omega_0^2(1 + k_2)](j\omega + k)} \right|^2 \frac{d\omega}{\beta^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (7.281)$$

Чтобы вычислить интеграл в правой части этого равенства, представим его в форме (7.222). Для коэффициентов  $a_i$  полинома  $h_4(x)$  получаются те же значения, что и значения (7.271); коэффициенты же  $b_i$  равны:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0. \quad (7.282)$$

Подставив указанные значения коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  в четвертую формулу (7.224), после упрощений приходим к выражению

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} &= \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{k_1(k + \beta)} [\omega_0^2(1 + k_2)(k + \beta) + k_1 k \beta] \times \\ &\times \{ \omega_0^4(1 + k_2)^2 + \omega_0^2(1 + k_2)[k_1(k + \beta) + k^2 + \beta^2] + \\ &+ k \beta [k \beta + k_1(k_1 + k + \beta)] \}^{-1}. \end{aligned} \quad (7.283)$$

Если жесткость астрокоррекции конечна, но достаточно велика [например, удовлетворяет условиям (7.273)], и справедливы неравенства (7.240), то из формул (7.283) можно получить следующее приближенное соотношение:

$$D_{\delta x}^{\Delta m_y} = \frac{r^2 D_{\Delta m_y}}{k(k + \beta)}. \quad (7.284)$$

Теперь из равенства (7.280), первого и третьего равенств (7.244) с учетом условий (7.240) и из равенства (7.284) получаем приближенное значение

$$D_{\delta x} = D_{\Delta n_x} \frac{k_2 \omega_0^2 + k_1^2}{\omega_0^4 k_1 \alpha} + D_{\Delta m_y} \frac{r^2}{k(k + \beta)} + D_{\Delta V_{Dx}} \frac{k_1^2}{\omega_0^4}. \quad (7.285)$$

Сравнение формулы (7.274) с формулой (7.285) показывает, что при одних и тех же численных значениях входящих в них параметров коэффициенты при  $D_{\Delta n_x}$  и  $D_{\Delta V_{Dx}}$  больше в формуле (7.285), а коэффициенты при  $D_{\Delta m_y}$  одинаковы в обоих этих случаях. Таким образом, приближенные значения дисперсий ошибок  $\delta x$  от инструментальных погрешностей ньютонометров и доплеровского измерителя скорости в случае варианта коррекции инерциальной системы, соответствующего уравнениям ошибок (7.261), больше, чем в случае, соответствующем уравнениям (7.260), а от погрешностей гироскопов — одинаковы в случаях уравнений ошибок (7.261) и (7.262).

Вычислим дисперсию  $D_{\delta x_2}$  полной ошибки  $\delta x_2$  определения местоположения, получающуюся в силу уравнений (7.261). Имеем

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\Delta n_x} + D_{\delta x_2}^{\Delta V_{Dx}} + D_{\delta x_2}^{\Delta m_y}. \quad (7.286)$$

Здесь

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta n_x} &= D_{\delta x}^{\Delta n_x}, \\ D_{\delta x_2}^{\Delta V_{Dx}} &= D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}}, \end{aligned} \quad (7.287)$$

причем  $D_{\delta x}^{\Delta n_x}$  и  $D_{\delta x}^{\Delta V_{Dx}}$  заданы первым и третьим равенствами (7.244), а

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} &= \frac{r^2 \beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k_1 j\omega + \omega_0^2(1 + k_2)|^2 d\omega}{|[(j\omega)^2 + k_1 j\omega + \omega_0^2(1 + k_2)](j\omega + k)|^2 (\beta^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (7.288)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся снова четвертой формулой (7.224). Как и ранее, значения коэффициентов  $a_i$



определены в рассматриваемом случае первыми четырьмя равенствами (7.271), коэффициенты же  $b_i$  равны

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -k_1^2, \\ b_3 &= \omega_0^4(1 + k_2)^2. \end{aligned} \quad (7.289)$$

В соответствии с этим получаем

$$\begin{aligned} D_{\delta x_2}^{\Delta m_y} &= \frac{r^2 D_{\Delta m_y}}{k_1 k (k + \beta)} \times \\ &\times \{k_1 \omega_0^4(1 + k_2)^2 + \omega_0^2(1 + k_2)(k + \beta) \times \\ &\times [k\beta + k_1(k_1 + k + \beta)] + k_1^2 k \beta (k_1 + k + \beta)\} \times \\ &\times \{\omega_0^4(1 + k_2)^2 + \omega_0^2(1 + k_2)[k^2 + \beta^2 + k_1(k + \beta)] + \\ &+ k\beta[k\beta + k_1(k_1 + k + \beta)]\}^{-1}. \end{aligned}$$

Формулы (7.286), (7.290) вместе с первой и третьей формулами (7.244) определяют  $D_{\delta x_2}$  в случае уравнений (7.262) для произвольных значений коэффициентов коррекции  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$ . Из них, в частности, получается такая аналогичная (7.279) упрощенная формула:

$$D_{\delta x_2} = D_{\Delta n_x} \frac{k_2 \omega_0^2 + k_1^2}{\omega_0^4 k_1 \alpha} + D_{\Delta m_y} \frac{r^2 (\omega_0^2 k_2 + k_1^2)}{k_1 k^2 \beta} + D_{\Delta v_{Dx}} \frac{k_1}{\omega_0^4}.$$

Сравнение этой формулы с формулой (7.279) показывает, что инструментальные погрешности ньютонометров и гироскопов могут дать большие дисперсии ошибки  $\delta x_2$  в случае уравнений (7.261), а погрешности доплеровского измерителя скорости, наоборот, могут привести к большим дисперсиям ошибок в случае уравнений (7.260).

Чтобы закончить решение поставленной в начале настоящего раздела задачи, осталось рассмотреть уравнения ошибок (7.262).

Заметим прежде всего, что третье уравнение (7.262) аналогично третьим уравнениям (7.260), (7.261), и здесь справедливы полученные ранее соотношения.

Следовательно, надо рассмотреть лишь совокупность первого, второго, четвертого и шестого уравнений (7.262). Из них надо найти дисперсию  $D_{\theta_{1y}}$  ошибки  $\theta_{1y}$  ориентации платформы инерциальной системы и дисперсию  $D_{\delta x_2}$  ошибки  $\delta x_2$  определения местоположения объекта. Мы будем предполагать, что коэффициенты  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$  выбраны такими, что характеристический определитель системы (7.262) имеет корни с отрицательными вещественными частями, и для вычисления дисперсий  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$  воспользуемся поэтому формулой (7.48).

Вычислим сначала дисперсию  $D_{\theta_{1y}}$ . Ее можно представить в виде суммы:

$$D_{\theta_{1y}} = D_{\theta_{1y}}^{\Delta n_x} + D_{\theta_{1y}}^{\Delta V_{Dx}} + D_{\theta_{1y}}^{\Delta m_y}. \quad (7.292)$$

Входящие в эту сумму слагаемые определяются в соответствии с первым, вторым и четвертым уравнениями (7.262) следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} D_{\theta_{1y}}^{\Delta n_x} &= \frac{\alpha D_{\Delta n_x}}{\pi r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(1+k_2)j\omega + k}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \\ D_{\theta_{1y}}^{\Delta V_{Dx}} &= \frac{\gamma D_{\Delta V_{Dx}}}{\pi r^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{-k_2(j\omega)^2 + k_1j\omega + k_1k}{\Delta(j\omega)} \right| \frac{d\omega}{\gamma^2 + \omega^2}, \\ D_{\theta_{1y}}^{\Delta m_y} &= \frac{\beta D_{\Delta m_y}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(j\omega)^2 + k_1j\omega}{\Delta(j\omega)} \right|^2 \frac{d\omega}{\beta^2 + \omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.293)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(j\omega) &= (j\omega)^3 + (k_1 + k)(j\omega)^2 + \\ &+ [\omega_0^2(1+k_2) + k_1k]j\omega + k_1\omega_0^2. \end{aligned} \quad (7.294)$$

Интегралы (7.293) вычисляются с помощью представления (7.222) и последнего равенства (7.224). Так, для первого

из этих интегралов получаем значение:

$$D_{\theta_{1y}}^{\Delta n_x} = \frac{\alpha D_{\Delta n_x}}{r^2} \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{a_0(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)}, \quad (7.295)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= k_1 + k + \alpha, \\ a_2 &= \alpha(k_1 + k) + k_1 k + \omega_0^2(1 + k_2), \\ a_3 &= \alpha k_1 k + \omega_0^2[\alpha(1 + k_2) + k], \\ a_4 &= \alpha k \omega_0^2, \\ b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ b_2 &= -(1 + k_2)^2, & b_3 &= k^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.296)$$

Для вычисления второго интеграла (7.293) надо в правой части равенства (7.295) заменить  $\alpha D_{\Delta n_x}$  на  $\gamma D_{\Delta v_{Dx}}$ , в коэффициентах  $a_i$ , определенных первыми четырьмя равенствами (7.296), заменить  $\alpha$  на  $\gamma$ , а в качестве коэффициентов  $b_i$  взять величины

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= 0, & b_1 &= k_2^2, & b_2 &= -k_1(k_1 + 2k), \\ & & b_3 &= k_1^2 k^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.297)$$

Наконец, для вычисления третьего интеграла (7.279) надо в правой части соотношения (7.295) вместо величины  $\frac{\alpha D_{\Delta n_x}}{r^2}$  взять величину  $\beta D_{\Delta m_y}$ , в коэффициентах  $a_i$  величину  $\alpha$  заменить на  $\beta$ , а вместо коэффициентов  $b_i$  подставить следующие их значения:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -k_1^2, \quad b_3 = 0. \quad (7.298)$$

Отыскание дисперсии  $D_{\delta x_2}$  можно провести совершенно аналогично отысканию дисперсии  $D_{\theta_{1y}}$ . Ее также можно представить в виде суммы:

$$D_{\delta x_2} = D_{\delta x_2}^{\Delta n x} + D_{\delta x_2}^{\Delta V D x} + D_{\delta x_2}^{\Delta m y}. \quad (7.299)$$

Для вычисления каждого из слагаемых этой суммы можно снова воспользоваться формулой (7.295). Для вычисления первого слагаемого  $D_{\delta x_2}^{\Delta n x}$  следует опустить в правой части равенства (7.295) величину  $r^2$ , а в качестве коэффициентов  $a_i$  взять их значения из (7.296). Коэффициенты  $b_i$  надо заменить следующими значениями:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -1, \quad b_3 = k^2. \quad (7.300)$$

При вычислении второго слагаемого формулы (7.299) величина  $r^2$  в правой части равенства (7.295) также опускается (полагается равной единице), а вместо величины  $\alpha D_{\Delta n x}$  берется величина  $\gamma D_{\Delta V D x}$ . В коэффициентах  $a_i$  также  $\alpha$  заменяется на  $\gamma$ , а коэффициенты  $b_i$  задаются следующим образом:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -k_1^2, \quad b_3 = (\omega_0^2 k_2 + k_1 k_2)^2. \quad (7.301)$$

Наконец, при вычислении третьего слагаемого формулы (7.299) вместо величины  $\frac{\alpha D_{\Delta n x}}{r^2}$  в формулу (7.295) подставляется величина  $D_{\Delta m y} r^2 \beta$ ,  $\alpha$  в коэффициентах  $a_i$  заменяется на  $\beta$ , а в качестве коэффициентов  $b_i$  берутся величины

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \omega_0^4. \quad (7.302)$$

Представляет интерес сравнение величин дисперсий  $D_{\theta_{1y}}$  и  $D_{\delta x_2}$ , определяемых для случая уравнений (7.262) соотношениями (7.292), (7.299), с величинами дисперсий  $D_{\theta_{1y}}$ ,  $D_{\delta x_2}$  в случае уравнений (7.260) и (7.261), точнее, сравнение зависимостей величин дисперсий ошибок от величин коэффициентов коррекции  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$ . Однако прежде чем сравни-

вать величины ошибок, надо сначала условиться о точке зрения, с которой это сравнение проводить. В самом деле, когда мы выше сравнивали между собой величины дисперсий ошибок в случае уравнений (7.260) и (7.261), то смысл этого сравнения был вполне однозначным, ибо однородные уравнения (7.260) и (7.261) полностью совпадают, и сравнение проводилось вследствие этого при одинаковых значениях коэффициентов коррекции. Однородные же уравнения (7.262) отличаются от однородных уравнений (7.260), (7.261), поэтому здесь нельзя ограничиться лишь сравнением установившихся значений дисперсий ошибок, но необходимо учитывать одновременно изменение динамических свойств однородной системы в зависимости от выбора величин коэффициентов коррекции.

Можно поступить, например, следующим образом. Обозначим коэффициенты коррекции  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k$  в случае уравнений (7.262) через  $k'_1$ ,  $k'_2$ ,  $k'$ , чтобы отличать их от соответствующих коэффициентов уравнений (7.260), (7.261). Характеристическое уравнение (6.171) системы (7.262) запишется тогда следующим образом:

$$p^3 + (k'_1 + k') p^2 + [\omega_0^2(1 + k'_2) + k'_1 k] p + \omega_0^2 k' = 0.$$

Обозначим его корни через  $p'_1$ ,  $p'_2$ ,  $p'_3$ .

Характеристическое уравнение системы (7.260) или (7.261) распадается на два уравнения:

$$p^2 + k_1 p + \omega_0^2(1 + k_2) = 0, \quad p + k = 0.$$

Корни этих уравнений суть:

$$p_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \pm j \sqrt{\omega_0^2(1 + k_2) - \frac{k_1^2}{4}},$$

$$p_3 = -k.$$

Выберем теперь коэффициенты коррекции  $k'$ ,  $k'_1$ ,  $k'_2$  в случае, соответствующем уравнениям ошибок (7.262), так, чтобы корни характеристического уравнения (7.289) имели бы значения:

$$p'_{1,2} = p_{1,2}, \quad p'_3 = -\frac{k_1}{2}.$$

Этого можно достичь, если взять

$$\begin{aligned}k' &= \frac{k_1}{2}(1 + k_2), \\k_1' &= k_1 \left(1 - \frac{k_2}{2}\right), \\k_2' &= k_2 \left[1 + \frac{k_1^2}{4\omega_0^2}(k_2 - 1)\right].\end{aligned}$$

При таком выборе коэффициентов  $k'$ ,  $k_1'$ ,  $k_2'$  наименьшее затухание в системах (7.260) — (7.262) будет одинаковым, и с точки зрения демпфирования их можно считать до некоторой степени равносильными\*). Поэтому сравнение величин дисперсий ошибок становится теперь вполне правомерным.

#### § 7.4. Динамика фазовой схемы астрокоррекции при воздействии случайных помех

В § 6.4 была рассмотрена работа фазовой схемы астрокоррекции вблизи положения равновесия. Задача была сведена к исследованию системы линейных уравнений (6.139) с переменными коэффициентами, которые при условиях (6.142) заменой переменных (6.141) приводятся к системе (6.145) линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Условия устойчивости этой системы уравнений получены в виде неравенств (6.148).

В уравнениях (6.145) через  $f_2$  обозначен сигнал помехи. Помехи могут быть как детерминированными (например, рассеянная атмосферой солнечная радиация), так и случайными функциями времени. Ввиду слабости световых потоков звезд, попадающих на фоточувствительные элементы схем астрокоррекции при малом диаметре объектива телескопа, эти схемы работают при высоком уровне случайных помех, значительно превышающем уровень полезного сигнала. При этом основную долю помех составляют шумы фоточувствительного

---

\*) Разумеется, считать схемы вполне равносильными нельзя, хотя бы из-за различия третьих корней характеристических уравнений.

элемента. Указанное обстоятельство весьма существенно, и параметры схемы астрокоррекции нельзя выбрать без его учета.

Рассмотрим уравнения (6.145), описывающие работу схемы астрокоррекции, оставив из правых частей лишь функцию помех  $f_2(t)$ . Будем считать, что это стационарная центрированная случайная функция времени, характеризующая дельта-коррелированный процесс (белый шум). Пусть ее корреляционная функция имеет вид:

$$K_{f_2}(\tau, \tau') = 2\pi s^0(\tau - \tau'), \quad (7.303)$$

где  $s^0$  — постоянная спектральная плотность.

В целях упрощения дальнейшего рассмотрения возьмем

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \nu = \omega. \quad (7.304)$$

Тогда система уравнений (6.145) запишется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \mu E_1 (a + f_2), \\ \left( \frac{D^2}{\omega^2} + 2\zeta \frac{D}{\omega} + 1 \right) V &= u, \\ \dot{a} - \omega b &= 0, \\ \dot{b} + \omega a - kV &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.305)$$

Характеристический определитель (6.146) системы при выполнении равенств (7.304) примет вид:

$$\Delta(p) = p^4 + 2\zeta\omega p^3 + 2\omega^2 p^2 + 2\zeta\omega^3 p + \omega^3(\omega - 2n), \quad (7.306)$$

где

$$n = \frac{\mu E_1 k}{2}, \quad (7.307)$$

а условия устойчивости (6.148) сведутся к неравенствам

$$\zeta\omega > 0, \quad \omega - 2n > 0. \quad (7.308)$$

Вычислим установившиеся значения дисперсий  $D_a$  и  $D_b$  переменных  $a$  и  $b$ . В соответствии с формулой (7.48),

уравнениями (7.305) и равенством  $S_{f_2}(\omega) = s^0$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} D_a &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2ns^0\omega^3}{|\Delta(j\Omega)|^2} d\Omega, \\ D_b &= \int_{-\infty}^{\infty} 2ns^0\omega^2 \left| \frac{j\Omega}{\Delta(j\Omega)} \right|^2 d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (7.309)$$

где  $\Delta(j\Omega)$  — значение характеристического определителя (7.306) при  $p = j\Omega$ .

Для вычисления интегралов (7.309) представим их в форме (7.222), после чего применим четвертую формулу (7.224). Для первого интеграла (7.309)

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 2\xi\omega, & a_2 &= 2\omega^2, & a_3 &= 2\xi\omega^3, \\ a_4 &= \omega^3(\omega - 2n), \\ b_0 &= 0, & b_1 &= 0, & b_2 &= 0, & b_3 &= 2ns^0\omega^3, \end{aligned} \right\} \quad (7.310)$$

для второго интеграла коэффициенты  $a_i$  сохраняют, очевидно, те же значения, а коэффициенты  $b_i$  равны:

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -4n^2s^0\omega^4, \quad b_3 = 0. \quad (7.311)$$

В соответствии с этими значениями коэффициентов, для установившихся значений дисперсий  $D_a$  и  $D_b$  получаются следующие выражения:

$$D_a = \frac{\pi s^0 \omega n}{(\omega - 2n)\xi}, \quad D_b = \frac{\pi s^0 n}{\xi}. \quad (7.312)$$

Переменными исходной системы уравнений (6.139), из которой получены рассматриваемые уравнения (7.305), были не  $a$  и  $b$ , а  $\theta_x$  и  $\theta_y$ . Однако нас интересует прежде всего величина  $\rho$  расстояния от центра поля зрения телескопа до изображения звезды. Именно величина  $\rho$  характеризует угловую ошибку коррекции. Так как

$$\rho^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2 = a^2 + b^2, \quad (7.313)$$

то дисперсии (7.312) вполне определяют среднеквадратичную погрешность  $\rho$ .

Выражения (7.312) для дисперсий  $D_a$  и  $D_b$  отклонений  $a$  и  $b$  при  $t = \infty$  легко истолковать.



Величина  $D_b$  не зависит от  $\omega$  совсем, величина  $D_a$  зависит слабо, а при малых  $n$  практически не зависит. Это обстоятельство объясняется тем, что спектральная плотность  $s^0$  функции  $f_2(t)$  постоянна. Далее, при  $n=0$  дисперсии  $D_a=D_b=0$ . В этом случае схема становится разомкнутой и функция помехи  $f_2$  не приводит к отклонениям по координатам  $a$  и  $b$ . При  $\xi=0$  или  $\omega=2n$  нарушаются условия устойчивости (7.308) и дисперсии отклонений  $a$  и  $b$  возрастают со временем беспредельно. Увеличение  $\xi$  ведет к уменьшению дисперсий. Это также легко понять, если принять во внимание, что величина  $1/\xi$  характеризует эффективную полосу пропускания резонансного фильтра. Уменьшение полосы пропускания в случае белого шума ведет, естественно, к уменьшению  $D_a$  и  $D_b$ .

Из выражений (7.312) вытекает, что для уменьшения влияния случайных помех надо увеличивать  $\xi$  и уменьшать  $n$ . Однако минимизация влияния случайных помех — не единственное требование к системе коррекции. Вторым важным требованием является увеличение скорости приведения изображения звезды в центр поля зрения телескопа из некоторого начального положения  $a^0$ ,  $b^0$  и увеличение скорости затухания переходного процесса в системе, а значит, в конечном счете выбор величин корней характеристического уравнения.

Обратимся к характеристическому уравнению  $\Delta(p)=0$ . Это уравнение четвертого порядка. Как известно, корни уравнения четвертого порядка

$$p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0 \quad (7.314)$$

совпадают с корнями двух квадратных уравнений

$$x^2 + \frac{A_{1,2} + a_1}{2} x + y + \frac{a_1 y - a_3}{A_{1,2}} = 0, \quad (7.315)$$

где

$$A_{1,2} = \pm \sqrt{8y + a_1^2 - 4a_2}, \quad (7.316)$$

а  $y$  — какой-либо действительный корень кубического уравнения

$$8y^3 - 4a_2 y^2 + (2a_1 a_3 - 8a_4) y + a_4 (4a_2 - a_1^2) = 0. \quad (7.317)$$

В рассматриваемом случае удастся найти достаточно точное и простое приближенное выражение для действительного корня уравнения (7.317), а затем найти и корни уравнений

(7.315) для интересующих нас диапазонов изменения коэффициентов характеристического уравнения (7.314).

Подставив в уравнение (7.317) значения коэффициентов в соответствии с равенствами (7.306), (7.307), получаем вспомогательное кубическое уравнение в виде

$$y^3 - \omega^2 y^2 + \omega^4 \left[ \xi^2 - 1 + \frac{2n}{\omega} \right] y + \\ + \omega^6 \left[ 1 - \xi^2 - \frac{n}{\omega} (2 - \xi^2) \right] = 0. \quad (7.318)$$

Найдем его решение при значениях  $n/\omega$  и  $\xi$ , малых по сравнению с единицей. Для этого заметим, что при  $\xi = n = 0$  левая часть уравнения (7.318) раскладывается на множители, и уравнение принимает вид:

$$(y - \omega^2)^2 (y + \omega^2) = 0. \quad (7.319)$$

Возьмем в качестве первого приближения решения уравнения (7.318) корень

$$y = -\omega^2 \quad (7.320)$$

уравнения (7.319). Заметим, что хотя корни  $y_{2,3} = \omega^2$  также действительны, брать их в качестве первого приближения невыгодно, так как здесь придется иметь дело с кратным корнем, что, как известно, резко усложняет применение приближенных методов дальнейшего уточнения корней. Взяв же в качестве первого приближения корень (7.320) и применив метод Ньютона, сразу находим следующее приближение в виде

$$y = -\omega^2 + \omega n. \quad (7.321)$$

Теперь из соотношения (7.316) получаем

$$A_{1,2} = \pm j(4\omega - n), \quad (7.322)$$

и решение квадратных уравнений (7.315) дает следующие четыре корня характеристического уравнения (7.314) системы (7.305):

$$p_{1,2,3,4} = -\frac{\xi\omega}{2} \pm j\left(\omega - \frac{n}{4} \pm \sqrt{\frac{\omega n}{2}}\right). \quad (7.323)$$

Эти выражения для корней дают, как нетрудно убедиться, удовлетворительную точность по крайней мере при  $n < \omega/4$ ,  $\xi < 0,1 \div 0,5$ .

Вещественные части всех корней (7.323) отрицательны и равны  $-\xi\omega/2$ . Величина  $-\xi\omega/2$  вещественных частей корней определяет в конечном счете время приведения звезды в центр поля зрения телескопа. Сопоставление выражений (7.323) для корней с выражениями (7.312) для дисперсий  $D_a$  и  $D_b$  показывает, что увеличение  $\xi$  одновременно уменьшает и ошибки от случайных помех и время приведения изображения звезды к центру поля зрения. Однако эта одновременность имеет место лишь при малых  $\xi$ .

При произвольных  $\xi$  и ограниченных  $n$  кубическое уравнение (7.318) имеет корень

$$y = -\omega^2 \left[ 1 + \frac{\xi^2 (n - 2\omega) - 4n}{(4 + \xi^2)\omega + 2n} \right]. \quad (7.324)$$

Этот корень при малых  $n$  и  $\xi$  переходит, как легко видеть, в значение (7.321).

Подстановка значения (7.324) корня вспомогательного кубического уравнения в формулу (7.316) дает следующие выражения для  $A_{1,2}$ :

$$A_{1,2} = \pm \frac{2}{4 + \xi^2} \sqrt{\omega^2 (\xi^6 + 8\xi^4 - 64) - 2n\omega (\xi^4 + 4\xi^2 - 16)}. \quad (7.325)$$

Для достаточно больших  $\xi$  отсюда получается

$$A_{1,2} = \pm \left( 2\omega\xi - \frac{2n}{\xi} \right), \quad (7.326)$$

после чего вспомогательные квадратные уравнения принимают такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + 2\xi\omega x + \omega^2 - 2n\omega &= 0, \\ x^2 + \frac{n}{\xi} x + \omega^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.327)$$

Решив их, найдем следующие значения корней характеристического уравнения рассматриваемой системы:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{\omega - 2n}{2\xi}, & p_2 &= -2\xi\omega, \\ p_{3,4} &= -\frac{n}{2\xi} \pm j\omega. \end{aligned} \right\} \quad (7.328)$$

При больших  $\xi$  выражения (7.328) для корней сохраняют точность при значениях  $n$ , вплоть до имеющих тот же порядок величины, что и  $\omega$ .

При возрастании  $\zeta$  корень  $p_2$ , оставаясь отрицательным, становится по величине сколь угодно большим. Это говорит о возможности понижения порядка системы, что соответствует замене резонансного фильтра апериодическим.

Как видно из равенств (7.328), при больших  $\zeta$  вещественные части корней  $p_{1,3,4}$  убывают по величине с ростом  $\zeta$ . Увеличение же  $n$ , увеличивая модули вещественных корней  $p_{3,4}$ , ведет к уменьшению модуля вещественной части корня  $p_1$ . При  $\omega = 2n$  этот корень обращается в нуль. В этом случае нарушается второе условие устойчивости (7.308). К тому же увеличение  $n$  ведет к увеличению ошибок от случайных помех.

Таким образом, если при малых значениях  $\zeta$  увеличение  $\zeta$  вело к одновременному уменьшению влияния помех и времени приведения системы к положению равновесия, то, начиная с некоторого значения, дальнейшее увеличение  $\zeta$ , уменьшая ошибки от случайных помех, увеличивает время приведения.

Компромиссное разрешение указанного противоречия и отыскание здесь надлежащего оптимума составляет одну из основных задач анализа динамики схемы астрокоррекции. Следует отметить, что такого же рода задача возникает и в случае любой другой схемы углового сопровождения, например радиолокационной.

## **Рассеянная атмосферой солнечная радиация как пример детерминированных помех в фазовой схеме астрокоррекции \*)**

Наряду с полезным световым потоком звезды обтюратор фазовой схемы индикации пропускает на фоточувствительный элемент поток фона, мощность которого может во много раз превышать мощность светового потока звезды. Если бы в пределах телесного угла поля зрения телескопа поток фона был равномерен, то сигнал от него был бы задержан резонансным фильтром (см. блок-схему, приведенную на рис. 6.7). Однако поток фона, как правило, неравномерен, неравномерность его модулируется обтюратором и пропускается фильтром. Если величина сигнала модуляции фона сравнима с величиной полезного сигнала, то это может исказить работу системы или даже сделать систему неработоспособной.

Модуляция фона — одна из наиболее существенных особенностей работы систем индикации, так как именно она является одной из основных причин, ограничивающих величину поля зрения системы, т. е. величину  $|\theta|$ , при которой возможна астрокоррекция.

Наряду с уменьшением поля зрения величина сигнала модуляции фона может быть снижена необходимым усложнением рисунка обтюратора. Развитием полудискового обтюратора, описанного в § 6.4, могут быть, например \*\*): щелевой обтюратор (рис. П. 1, а), равномерная решетка (рис. П. 1, б), полудиск-решетка (рис. П. 1, в), решетка с «двойным шагом», т. е. решетка, состоящая из половин двух равномерных решеток с разным шагом (рис. П. 1, г).

Однако усложнение решетки приводит к ослаблению полезного сигнала, к необходимости работы с несколькими гармониками частоты вращения обтюратора, т. е. к услож-

---

\*) Андреев В. Д., Прохождение полезного сигнала и сигнала фона через радиально-щелевые обтюраторы систем индикации светящихся объектов. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1963. К определению оптимальных параметров систем индикации светящихся объектов, там же, № 4, 1963.

\*\*) Aroyan G. F., Technical Spatial Filtering, Proceedings of the IRE, No 9, 1959.

нению канала обработки сигнала, снимаемого с фоточувствительного элемента, а в некоторых случаях (например, в случае равномерной решетки) ведет к необходимости сканирования. Поэтому теоретический анализ зависимости величин амплитуды полезного сигнала и сигнала модуляции фона на рабочих частотах системы индикации от параметров решетки и величины поля зрения представляется необходимым, тем более, что прямые эксперименты в этой области достаточно тонки и сложны, а результаты их обработки не всегда достоверны.

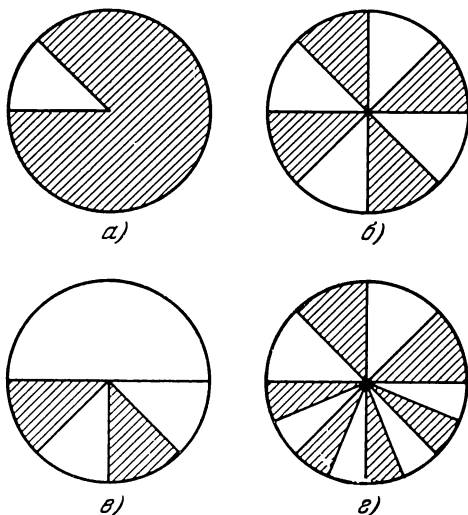


Рис. П.1.

В качестве примера детерминированного фона ниже будет рассмотрена рассеянная атмосферой солнечная радиация. Эта радиация является существенной помехой для фазовой системы при наблюдении звезды днем в пределах земной атмосферы. В то же время этот пример достаточно характерен. Способ его рассмотрения и ряд результатов могут быть без труда перенесены на случай других детерминированных помех, в том числе и тех, которые являются следствием неидеальности оптики телескопа. Остановимся прежде всего на описании прохождения полезного сигнала и сигнала фона через радиально-щелевые обтюраторы фазовых систем индикации.

Полный световой поток, как уже говорилось, складывается из потока от индицируемой звезды и потока фона. Если предполагать звезду точечным источником, а оптику телескопа идеальной, то полезный световой поток  $P_0$ , проходящий на фоточувствительный элемент через вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  обтюратор типа изображенных на рис. П. 1, является периодической функцией времени с периодом  $T \leq \frac{2\pi}{\omega}$ .

На интервале времени  $0 < t \leq \frac{2\pi}{\omega}$  он может быть представлен в виде

$$P_0 = p \sum_{j=0}^{n-1} \left[ 1 \left( \frac{\tau_j}{\omega} \right) - 1 \left( \frac{\tau_{j+1}}{\omega} \right) \right]. \quad (I. 1)$$

Здесь  $p$  — коэффициент пропорциональности, определяемый яркостью звезды,  $n$  — число прозрачных клиньев щелевого обтюратора,  $\tau_j$  и  $\tau_{j+1}$  — углы, соответствующие началу и концу  $j$ -го светлого клина, а функция  $1(\tau_j/\omega)$  равна:

$$1 \left( \frac{\tau_j}{\omega} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{\tau_j}{\omega}, \\ 1 & \text{при } t \geq \frac{\tau_j}{\omega}. \end{cases} \quad (I. 2)$$

Для определения рабочих частот следует разложить функцию  $P_0(t)$  в ряд Фурье.

Перейдем к потоку фона. Пусть яркость фона

$$B = B(r, \tau), \quad (I. 3)$$

где  $r$  и  $\tau$  — полярные координаты произвольного направления в телесном угле поля зрения, причем  $r$  отсчитывается от оси поля зрения телескопа, а начало отсчета угла  $\tau$  может быть выбрано с учетом вида функции  $B$ .

Тогда поток фона через обтюратор равен:

$$P_1 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\omega t + \tau_j}^{\omega t + \tau_{j+1}} \int_0^{r_0} B(r, \tau) r dr d\tau. \quad (I. 4)$$

В пределах поля зрения яркость фона  $B$  является периодической по  $\tau$  функцией с периодом  $2\pi$ . Следовательно, периодической функцией по  $t$  с периодом, равным или мень-

шим  $2\pi/\omega$ , является и функция  $P_1(t)$ . Поэтому определение величин амплитуд сигнала модуляции фона сводится при заданном  $B(r, \tau)$  к вычислению коэффициентов разложения функции  $P_1(t)$  в ряд Фурье в интервале  $(0, \frac{2\pi}{\omega})$ , соответствующих рабочим частотам, т. е. частотам разложения в ряд Фурье полезного сигнала  $P_0(t)$ . Выражение соответствующих коэффициентов Фурье функции  $P_1(t)$  через параметры обтюлятора и величину угла поля зрения даст как раз интересные нас зависимости.

Следует отметить, что в большинстве случаев функция  $B$  непосредственно в переменных  $r, \tau$  не задана.

Наиболее интересен случай, когда яркость фона  $B$  определена как функция углов  $z$  и  $\phi$ , образованных направлением визирования с двумя фиксированными направлениями. При наблюдении звезды, когда фоном является рассеянная атмосферой солнечная радиация,  $z$  и  $\phi$  — углы между направлением на звезду и направлениями в зенит и на Солнце.

Определим ряды Фурье

$$P_0(t) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos k\omega t + b_k^0 \sin k\omega t) \quad (I. 5)$$

полезного сигнала, пропускаемого различными обтюраторами. Для вычисления коэффициентов рядов (I. 5) воспользуемся формулами (6.111), в которые подставим вместо  $p_*$  функцию  $P_0$ , заданную равенствами (I. 1) и (I. 2).

Для щелевого обтюлятора сразу получаем:

$$a_0^0 = \frac{p\tau_0}{\pi}, \quad a_k^0 = \frac{p}{\pi k} \sin k\tau_0, \quad b_k^0 = \frac{p}{\pi k} (1 - \cos k\tau_0), \quad (I. 6)$$

где  $\tau_0$  — угловой размер щели.

Для полудиска  $\tau_0 = \pi$ , и поэтому

$$a_0^0 = p, \quad a_k^0 = 0, \quad b_{2q}^0 = 0, \quad b_{2q+1}^0 = \frac{2p}{(2q+1)\pi}. \quad (I. 7)$$

Для равномерной решетки с четным  $n$

$$\tau_j = \frac{\pi}{n\omega} 2j, \quad \tau_{j+1} = \frac{\pi}{n\omega} (2j+1), \quad (I. 8)$$



и вследствие этого

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= p, \\ a_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}, \\ b_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 9})$$

Ввиду четности  $n$  имеют место равенства:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} &= \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin \left[ k\pi + (4j+1) \frac{k\pi}{2n} \right] \sin \frac{k\pi}{2n}, \\ \sum_{j=0}^{n-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} &= \\ &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos \left[ k\pi + (4j+1) \frac{k\pi}{2n} \right] \sin \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 10})$$

Поэтому при четном  $k = 2q$ :

$$\left. \begin{aligned} a_{2q}^0 &= \frac{2p}{q\pi} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}, \\ b_{2q}^0 &= \frac{2p}{q\pi} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 11})$$

При нечетном  $k = 2q + 1$ :

$$a_{2q+1} = b_{2q+1} = 0. \quad (\text{I. 12})$$

Аналогичным образом для полудиска-решетки получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= \frac{p}{2}, \\ a_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}, \\ b_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 13})$$

И, наконец, для решетки с двойным шагом  $\left(\frac{\pi}{n} \text{ и } \frac{\pi}{m}\right)$  имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_0^0 &= p, \\ a_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \cos \left[ k\pi + (4j+1) \frac{k\pi}{2m} \right] \sin \frac{k\pi}{2m} \right\}, \\ b_k^0 &= \frac{2p}{k\pi} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \sin \left[ k\pi + (4j+1) \frac{k\pi}{2m} \right] \sin \frac{k\pi}{2m} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 14})$$

Дальнейшие упрощения основываются на соотношениях \*)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} &= \frac{\sin^2 \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{2n}}{2 \cos \frac{k\pi}{2n}}, \\ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{k\pi}{2n} &= \\ &= \frac{1}{2} \left( \sin^2 \frac{k\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin k\pi \sin \frac{k\pi}{2n}}{\cos \frac{k\pi}{2n}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (I. 15)$$

При нечетном  $k = 2q + 1$  отсюда следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{(2q+1)\pi}{2n} \sin \frac{(2q+1)\pi}{2n} &= \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{(2q+1)\pi}{2n}, \\ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{(2q+1)\pi}{2n} \sin \frac{(2q+1)\pi}{2n} &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (I. 16)$$

При четном  $k = 2q$  выражения (I. 15) обращаются в нуль при всех  $q$ , кроме тех, которые имеют вид:

$$q = \frac{n}{2} (2s + 1). \quad (I. 17)$$

При этих же значениях  $q$  выражения (I. 15) обращаются в неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ , раскрытие которых дает

---

\*) Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.

СООТНОШЕНИЯ

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos(4j+1) \frac{n(2s+1)\pi}{2n} \sin \frac{n(2s+1)\pi}{2n} &= 0, \\ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin(4j+1) \frac{n(2s+1)\pi}{2n} \sin \frac{n(2s+1)\pi}{2n} &= \frac{n}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 18})$$

На основании равенств (I. 16) и (I. 18) из соотношений (I. 9) — (I. 11), (I. 13), (I. 14) получаем соответственно:

$$\left. \begin{aligned} a_{2q+1}^0 &= b_{2q+1}^0 = a_{2q}^0 = 0, \\ b_{n(2s+1)}^0 &= \frac{2p}{\pi(2s+1)}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 19})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{2q+1}^0 &= \frac{p}{\pi(2q+1)} \operatorname{tg} \frac{\pi(2q+1)}{2n}, \\ b_{2q+1}^0 &= \frac{p}{\pi(2q+1)}, \\ a_{2q}^0 &= 0, \quad b_{n(2s+1)}^0 = \frac{p}{\pi(2s+1)}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 20})$$

$$\left. \begin{aligned} a_{2q+1}^0 &= \frac{p}{\pi(2q+1)} \left[ \operatorname{tg} \frac{\pi(2q+1)}{2n} - \operatorname{tg} \frac{\pi(2q+1)}{2m} \right], \\ b_{2q+1}^0 &= a_{2q}^0 = 0, \\ b_{n(2s+1)}^0 &= \frac{p}{\pi(2s+1)}, \\ b_{m(2s+1)}^0 &= \frac{p}{\pi(2s+1)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 21})$$

Выпишем теперь разложения в ряды Фурье функций  $P_0$ : для щелевого обтюратора

$$P_0^{(1)} = \frac{p\tau_0}{2\pi} + \frac{p}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\sin k\tau_0}{k} \cos k\omega t + \frac{1 - \cos k\tau_0}{k} \sin k\omega t \right); \quad (\text{I. 22})$$

для полудиска

$$P_0^{(2)} = \frac{p}{2} + \frac{2p}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \sin(2q+1)\omega t; \quad (\text{I. 23})$$

для равномерной решетки

$$P_0^{(3)} = \frac{p}{2} + \frac{2p}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \sin n(2q+1)\omega t; \quad (\text{I. 24})$$

для полудиска-решетки

$$P_0^{(4)} = \frac{p}{4} + \frac{p}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \left[ \operatorname{tg} \frac{(2q+1)\pi}{2n} \cos(2q+1)\omega t + \right. \\ \left. + \sin(2q+1)\omega t + \sin n(2q+1)\omega t \right]; \quad (\text{I. 25})$$

наконец, для двойной решетки

$$P_0^{(5)} = \frac{p}{2} + \frac{p}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \left\{ \left[ \operatorname{tg} \frac{(2q+1)\pi}{2n} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{tg} \frac{(2q+1)\pi}{2m} \right] \cos(2q+1)\omega t + \sin n(2q+1)\omega t + \right. \\ \left. + \sin m(2q+1)\omega t \right\}. \quad (\text{I. 26})$$

Рабочими частотами могут быть все частоты, содержащиеся в спектре пропускаемого обтюратором полезного сигнала.

Предпочтительнее, естественно, обрабатывать те из них, которые, во-первых, несут относительно большую часть общей энергии полезного сигнала, воспринимаемого фоточувствительным элементом, и, во-вторых, относительно велики по сравнению с амплитудами сигналов модуляции фона на этих частотах.

Найдем амплитуды сигналов модуляции фона на рабочих частотах. Как уже было отмечено выше, они определяются соответствующими коэффициентами разложения функции  $P_1(t)$  в ряд Фурье на отрезке  $(0, \frac{2\pi}{\omega})$ .

Вычисление этих коэффициентов удобно провести, представив функцию яркости  $B(r, \tau)$ , периодическую по  $\tau$  с периодом  $2\pi$ , рядом Фурье:

$$B = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\tau + b_k \sin k\tau). \quad (\text{I. 27})$$

Из соотношений (I. 4) и (I. 27) имеем:

$$P_1(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{\omega t + \tau_j}^{\omega t + \tau_{j+1}} \left[ \frac{\bar{a}_0 r_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{a}_k \cos k\tau + \bar{b}_k \sin k\tau) \right] d\tau, \quad (\text{I. 28})$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_k(r_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} B(r, \tau) r \cos k\tau dr d\tau, \\ \bar{b}_k(r_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} B(r, \tau) \sin k\tau dr d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 29})$$

Произведя в правых частях равенств (I. 29) интегрирование по  $\tau$ , получаем для щелевого обтюратора:

$$P_1^{(1)} = \frac{\bar{a}_0 \tau_0 r_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} [\bar{a}_k (\cos k\tau_0 - 1) + \bar{b}_k \sin k\tau_0] \sin k\omega t + \right. \\ \left. + \frac{1}{k} [\bar{a}_k \sin k\tau_0 - \bar{b}_k (\cos k\tau_0 - 1)] \cos k\omega t \right\}. \quad (\text{I. 30})$$

Отсюда при  $\tau_0 = \pi$  (т. е. для полудискового обтюратора) следует, что

$$P_1^{(2)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{q=1}^{\infty} \left[ -\frac{2\bar{a}_{2q+1}}{2q+1} \sin(2q+1)\omega t + \right. \\ \left. + \frac{2\bar{b}_{2q+1}}{2q+1} \cos(2q+1)\omega t \right]. \quad (\text{I. 31})$$

Для равномерной и полудисковой решеток соответственно

$$P_1^{(3)} = \frac{a_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{k} \left[ \bar{a}_k \sum_{j=0}^{n-1} \cos k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) + \right. \\ \left. + \bar{b}_k \sum_{j=0}^{n-1} \sin k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) \right], \quad (I. 32)$$

$$P_1^{(4)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{k} \left[ \bar{a}_k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) + \right. \\ \left. + \bar{b}_k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) \right]. \quad (I. 33)$$

Аналогично для двойной решетки

$$P_1^{(5)} = \frac{a_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{k} \left[ \bar{a}_k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{b}_k \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin k \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) \right] + \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2m}}{k} \times \right. \\ \left. \times \left[ \bar{a}_k \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \cos k \left( \pi + \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{m} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{b}_k \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} \sin k \left( \pi + \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{m} \right) \right] \right\}. \quad (I. 34)$$

С помощью равенств (I. 10) — (I. 12) выражение (I. 32) для  $P_1^{(3)}$  может быть представлено также следующим образом:

$$P_1^{(3)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{q\pi}{n}}{q} \left[ \bar{a}_{2q} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos 2q \times \right. \\ \left. \times \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) + \bar{b}_{2q} \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin 2q \left( \omega t + \frac{4j+1}{2} \frac{\pi}{n} \right) \right]. \quad (\text{I. 35})$$

Формулы (I. 33) — (I. 35), используя соотношения (I. 15), (I. 16), (I. 18), легко преобразовать к такому виду:

$$P_1^{(3)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{2}{2q+1} \left[ \bar{b}_n (2q+1) \cos n (2q+1) \omega t - \right. \\ \left. - \bar{a}_n (2q+1) \sin n (2q+1) \omega t \right], \quad (\text{I. 36})$$

$$P_1^{(4)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{8} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \left\{ \left[ \bar{a}_{2q+1} \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2n} + \bar{b}_{2q+1} \right] \times \right. \\ \times \cos (2q+1) \omega t + \left[ \bar{b}_{2q+1} \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2n} - a_{2q+1} \right] \times \\ \times \sin (2q+1) \omega t + \bar{b}_n (2q+1) \cos n (2q+1) \omega t - \\ \left. - a_n (2q+1) \sin n (2q+1) \omega t \right\}, \quad (\text{I. 37})$$

$$P_1^{(5)} = \frac{\bar{a}_0 \pi r_0^2}{4} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2q+1} \left\{ a_{2q+1} \left[ \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2n} - \right. \right. \\ \left. - \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2m} \right] \cos (2q+1) \omega t + \bar{b}_{2q+1} \left[ \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2n} - \right. \\ \left. - \operatorname{tg} \frac{(2q+1) \pi}{2m} \right] \sin (2q+1) \omega t + \bar{b}_n (2q+1) \cos n (2q+1) \omega t + \\ + \bar{b}_m (2q+1) \cos m (2q+1) \omega t - \bar{a}_n (2q+1) \sin n (2q+1) \omega t - \\ \left. - \bar{a}_m (2q+1) \sin m (2q+1) \omega t \right\}. \quad (\text{I. 38})$$

Выше определены для нескольких характерных радиально-щелевых обтюраторов разложения в ряд Фурье полезного



сигнала

$$P_0^{(i)}(t) = \frac{a_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^0 \cos k\omega t + b_k^0 \sin k\omega t)$$

и сигнала модуляции фона

$$P_1^{(i)}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (I. 39)$$

Найдем теперь отношение амплитуд полезного сигнала и фона на рабочих частотах, т. е. отношение

$$\lambda_k = \frac{\sqrt{(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2}}{\sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}}. \quad (I. 40)$$

Из выражений (I. 22) — (I. 26) и (I. 30) — (I. 38) можно усмотреть, что для рассмотренных выше радиально-щелевых обтюраторов

$$\lambda_k = \frac{p}{\pi \sqrt{\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2}} = \frac{p}{\pi A_k}, \quad (I. 41)$$

где  $p$  — яркость индицируемой звезды, а  $\bar{a}_k$  и  $\bar{b}_k$  связаны с коэффициентами  $a_k$ ,  $b_k$  разложения яркости фона  $B(r, \tau)$  в ряд Фурье следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_k(r_0) &= \int_0^{r_0} a_k(r) r dr, \\ \bar{b}_k(r_0) &= \int_0^{r_0} b_k(r) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (I. 42)$$

Докажем теперь, что соотношение (I. 41) справедливо для произвольного радиально-щелевого обтюратора.

Из формул (I. 1) и (I. 2) следует, что

$$\left. \begin{aligned} a_k^0 &= \frac{p}{\pi k} \sum_{j=0}^{n-1} (\sin k\tau_{j+1} - \sin k\tau_j), \\ b_k^0 &= -\frac{p}{\pi k} \sum_{j=0}^{n-1} (\cos k\tau_{j+1} - \cos k\tau_j), \end{aligned} \right\} \quad (I. 43)$$

а из формулы (I.28) получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{\bar{a}_k}{k} \sum_{j=0}^{n-1} (\sin k\tau_{j+1} - \sin k\tau_j) - \\ &\quad - \frac{\bar{b}_k}{k} \sum_{j=0}^{n-1} (\cos k\tau_{j+1} - \cos k\tau_j), \\ b_k &= \frac{\bar{a}_k}{k} \sum_{j=0}^{n-1} (\cos k\tau_{j+1} - \cos k\tau_j) + \\ &\quad + \frac{\bar{b}_k}{k} \sum_{j=0}^{n-1} (\sin k\tau_{j+1} - \sin k\tau_j). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 44})$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} a_k^2 + b_k^2 &= \frac{\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k^2}{k^2} \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\sin k\tau_{j+1} - \sin k\tau_j) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\cos k\tau_{j+1} - \cos k\tau_j) \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I. 45})$$

Из соотношений (I.43) и (I.45) теперь немедленно следует справедливость равенства (I.41) для любого радиально-щелевого обтюлятора рассматриваемого класса.

Легко убедиться, что высказанное утверждение несправедливо для щелевых обтюраторов, в которых линиями раздела прозрачных и непрозрачных участков являются не прямые, а произвольные кривые, соединяющие центр диска обтюлятора с его границей, т. е. когда

$$\tau_j = \tau_j(r) \quad (\text{I. 46})$$

(во всяком случае, при произвольном характере фона и произвольном отстоянии светящегося объекта от центра), ибо

для таких обтюраторов

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{r_0} [\sin k\tau_{j+1}(r) - \sin k\tau_j(r)] a_k(r) r dr - \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{r_0} [\cos k\tau_{j+1}(r) - \cos k\tau_j(r)] b_k(r) r dr, \\ b_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{r_0} [\cos k\tau_{j+1}(r) - \cos k\tau_j(r)] a_k(r) r dr + \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{r_0} [\sin k\tau_{j+1}(r) - \sin k\tau_j(r)] b_k(r) r dr. \end{aligned} \right\} \quad (I. 47)$$

В частности, для произвольного «скрученного» обтюра-  
тора, когда

$$\tau_j(r) = \tau_j + \alpha(r), \quad (I. 48)$$

где  $\tau_j$  — угол «нескрученной» радиально-щелевой решетки,  
имеем:

$$\begin{aligned} k^2 [(a_k)^2 + (b_k)^2] &= \left\{ \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\sin k\tau_{j+1} - \sin k\tau_j) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \sum_{j=0}^{n-1} (\cos k\tau_{j+1} - \cos k\tau_j) \right]^2 \right\} \left\{ \left[ \int_0^{r_0} (a_k \cos k\alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_k \sin k\alpha) r dr \right]^2 + \left[ \int_0^{r_0} (b_k \cos k\alpha - a_k \sin k\alpha) r dr \right]^2 \right\}. \quad (I. 49) \end{aligned}$$

Но так как, согласно неравенству Буняковского,

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^{r_0} (a_k \cos k\alpha + b_k \sin k\alpha) r dr \right]^2 &+ \left[ \int_0^{r_0} (b_k \cos k\alpha - \right. \\ &\quad \left. - a_k \sin k\alpha) r dr \right]^2 \leq \int_0^{r_0} r^2 dr \int_0^{r_0} (a_k^2 + b_k^2) dr, \quad (I. 50) \end{aligned}$$

то в этом случае

$$\lambda_k \geq \frac{p}{\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{3} \int_0^{r_0} (a_k^2 + b_k^2) dr}}. \quad (I. 51)$$

Следует отметить, что в обтюраторах с пограничными линиями  $\tau_j = \tau_j(r)$  координаты  $\tau$  и  $r$  индицируемого объекта не будут разделяться так просто, как в радиально-щелевых обтюраторах, где координата  $\tau$  определяется без определения  $r$ .

Рассмотрим случай, когда фоном является рассеянная атмосферой солнечная радиация.

Тогда яркость фона \*)

$$B = B(z, \varphi) = A y_1(z) y_2(\varphi), \quad (I. 51a)$$

где  $A$  — некоторая постоянная,  $z$  — угол между направлениями на звезду и в зенит,  $\varphi$  — угол между направлениями на звезду и на Солнце.

Функция  $y_1(z)$  определяет влияние массы столба атмосферы в направлении визирования,  $y_2(\varphi)$  — директриса рассеяния, характеризующая рассеяние солнечной радиации элементарной массой атмосферы.

Для получения использованного в предыдущих параграфах разложения функции  $B$  в ряд Фурье по  $\tau$  необходимо определить эту функцию в координатах  $r$  и  $\tau$ .

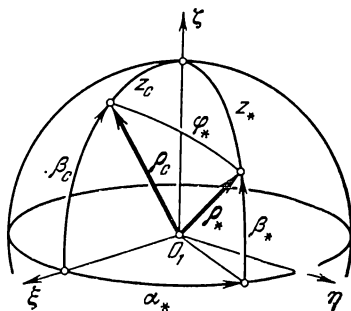


Рис. П.2.

Введем систему координат  $O_1 \xi \eta \zeta$  (рис. П. 2), поместив начало ее в центр Земли и направив ось  $\zeta$  в зенит, т. е. по направлению, соединяющему центр Земли  $O_1$  с точкой текущего местоположения объекта.

Произвольное направление  $\rho$  определим в этой системе координат долготой  $\alpha$ , отсчитываемой в плоскости  $\xi O_1 \eta$  от

\*) См., Кондратьев К. Я., Лучистая энергия Солнца, Гидрометеиздат, 1951.

направления  $O_1\xi$ , и широтой  $\beta$ , отсчитываемой от плоскости  $\xi O_1\eta$ .

Направления на звезду и Солнце определим соответственно векторами  $\rho_*(\alpha_*, \beta_*)$  и  $\rho_c(\beta_c)$  (угол  $\alpha_c$ , не ограничивая общности, можно положить равным нулю).

Входящие в равенства (I.51a) переменные  $z$  и  $\varphi$  будут, очевидно, заданы соотношениями

$$\cos z = \rho \cdot \xi, \quad \cos \varphi = \rho \cdot \rho_c. \quad (\text{I. 52})$$

Введем также с центром в точке  $O_1$  правую ортогональную систему координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  (рис. П.3), направив ось  $\zeta_1$  вдоль вектора  $\rho_*$ , а ось  $\eta_1$  — вдоль вектора  $\xi \times \rho_*$  (рис. П.2).

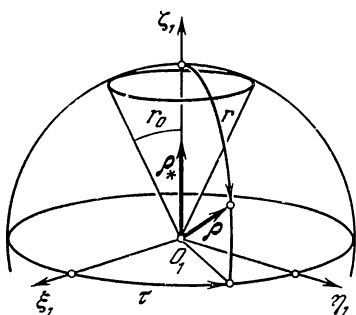


Рис. П.3.

Произвольное направление  $\rho$  определим в системе координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  долготой  $\tau$ , отсчитываемой в плоскости  $\xi_1 O_1 \eta_1$  от направления  $O_1\xi_1$ , и дополнением  $r$  до широты, отсчитываемым от оси  $O_1\zeta_1$ .

Поле зрения системы индикации представляется в этом случае внутренней областью конуса с углом при вершине  $2r_0$ , осью которого является направление  $\rho_*$ .

Взаимное расположение осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$  характеризуется следующей таблицей направляющих косинусов:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	
$\xi_1$	$\sin \beta_* \cos \alpha_*$	$\sin \beta_* \sin \alpha_*$	$-\cos \beta_*$	(I. 53)
$\eta_1$	$-\sin \alpha_*$	$\cos \alpha_*$	0	
$\zeta_1$	$\cos \beta_* \cos \alpha_*$	$\cos \beta_* \sin \alpha_*$	$\sin \beta_*$	

В системе координат  $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  вектор  $\rho$  определяется соотношением

$$\rho = \xi_1 \sin r \cos \tau + \eta_1 \sin r \sin \tau + \zeta_1 \cos r, \quad (\text{I. 54})$$

где  $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ,  $\zeta_1$  — орты соответствующих осей.

Из равенств (I.52), (I.54) и таблицы (I. 53) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= -\sin z_* \sin r \cos \tau + \cos z_* \cos r, \\ \cos \varphi &= -\frac{(\cos z_C - \cos z_* \cos \varphi_*) \sin r \cos \tau}{\sin z_*} - \\ &\quad - \sin \alpha_* \sin z_C \sin r \sin \tau + \cos \varphi_* \cos r, \\ \cos \alpha_* &= \frac{\cos \varphi_* - \cos z_* \cos z_C}{\sin z_* \sin z_C}. \end{aligned} \right\} \quad (I. 55)$$

Или

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= -\sin z_* \sin r \cos \tau + \cos z_* \cos r, \\ \cos \varphi &= -\sin \varphi_* \sin r \cos (\tau + \varepsilon) + \cos \varphi_* \cos r, \\ \varepsilon &= \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha_* \sin z_C \sin z_*}{\cos z_C - \cos z_* \cos \varphi_*}. \end{aligned} \right\} \quad (I. 56)$$

Если положить

$$\varphi = \varphi_* + \delta\varphi, \quad z = z_* + \delta z \quad (I. 57)$$

и считать  $\delta\varphi$ ,  $\delta z$  и  $r$  малыми величинами в пределах поля зрения, то легко получить из соотношений (I. 55), что

$$\left. \begin{aligned} \delta z &= r \cos \tau, \\ \delta \varphi &= r \cos (\tau + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (I. 58)$$

Формулы (I. 56) или (I. 57), (I. 58) и осуществляют перевод переменных  $\varphi$  и  $z$  в переменные  $r$  и  $\tau$ .

Разложим функцию  $B(r, \tau)$  в ряд Фурье по  $\tau$ . Полагая величину  $z$  достаточно удаленной от значения  $z = \frac{\pi}{2}$ , чтобы считать

$$y_1 = \frac{1}{\cos z}, \quad (I. 59)$$

и взяв для начала в качестве функции  $y_2(\varphi)$  индикатрису рассеяния Релея \*)

$$y_2 = 1 + \cos^2 \varphi, \quad (I. 60)$$

будем иметь для функции  $B(z, \varphi)$  следующее выражение:

$$B = \frac{A}{\cos z} (1 + \cos^2 \varphi). \quad (I. 61)$$

---

\*) См. книгу, указанную в сноске на стр. 595.

Вспомнив теперь равенства (I. 56) и положив (вследствие малости  $r$ )  $\operatorname{tg} r = \sin r = r$ ,  $\cos r = 1$ , разложим функцию  $y_1$  в ряд по степеням  $r \operatorname{tg} z_*$ .

После необходимых группировок получим:

$$\begin{aligned}
 B = & \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 r \cos \tau + \tilde{a}_3 r \sin \tau + \tilde{a}_4 r^2 \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \cos^{2q+2} \tau - \\
 & - \tilde{a}_4 r^2 \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q+1} \cos^{2q+3} \tau - \\
 & - \tilde{a}_5 r^2 \sin \tau \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \cos^{2q+1} \tau + \\
 & + \tilde{a}_5 r \sin \tau \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q+1} \cos^{2q+2} \tau, \quad (\text{I. 62})
 \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{a}_1 &= \frac{A}{\cos z_*} (1 + \cos^2 \varphi_*), \\
 \tilde{a}_2 &= \frac{A}{\cos z_*} [\sin 2\varphi_* \cos \varepsilon + \operatorname{tg} z_* (1 + \cos^2 \varphi_*)], \\
 \tilde{a}_3 &= \frac{A}{\cos z_*} \sin 2\varphi_* \sin \varepsilon, \\
 \tilde{a}_4 &= \frac{A}{\cos z_*} [(1 + \cos^2 \varphi_*) \operatorname{tg}^2 z_* + \sin^2 \varphi_* \cos 2\varepsilon + \\
 & \quad + \sin 2\varphi_* \cos \varepsilon \operatorname{tg} z_*], \\
 \tilde{a}_5 &= \frac{A}{\cos z_*} (\sin^2 \varphi_* \sin 2\varepsilon + \sin 2\varphi_* \sin \varepsilon \operatorname{tg} z_*).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 63})$$

Таким образом, определение коэффициентов разложения функции  $B(r, \tau)$  в ряд Фурье сводится к вычислению интегралов вида

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \sin k\tau \, d\tau, & \int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \cos k\tau \, d\tau, \\
 & \int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \sin \tau \sin k\tau \, d\tau, & \int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \sin \tau \cos k\tau \, d\tau.
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 64})$$

Так как функция  $\cos^\mu \tau$  четная, а функция  $\cos^\mu \tau \sin \tau$  нечетная, то

$$\int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \sin k\tau d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \sin \tau \cos k\tau d\tau = 0. \quad (I. 65)$$

Оставшиеся два интеграла легко вычисляются. Например, вычислим

$$\int_0^{2\pi} \cos^\mu \tau \cos k\tau d\tau = 2 \int_0^{\pi} \cos^\mu \tau \cos k\tau d\tau. \quad (I. 66)$$

Если  $\mu = 2m + 1$ , то при четном  $k = 2n$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \tau \cos 2n\tau d\tau = 0, \quad (I. 67)$$

а при нечетном  $k = 2n + 1$ , вследствие того, что

$$\cos^{2\mu+1}(\tau + \pi) = -\cos^{2\mu+1} \tau, \quad (I. 68)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau &= \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau. \end{aligned} \quad (I. 69)$$

Воспользуемся теперь известным соотношением \*)

$$\frac{1}{F(x, y)} = \frac{2^{x+y-1} (x+y-1)}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\tau \cos^{x+y-2} \tau d\tau, \quad (I. 70)$$

где  $F(x, y)$  — эйлеров интеграл первого рода (бета-функция), равный:

$$F(x, y) = \int_0^1 u^{x-1} (1-u)^{y-1} du. \quad (I. 71)$$

---

\*) См. Уиттекер Э. Г., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, 1963.



Из соотношения (I. 70), полагая

$$x = m + n + 2, \quad y = m - n + 1, \quad (\text{I. 72})$$

немедленно получаем:

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau &= \\ &= \frac{4\pi}{2^{2m+2} (2m+2) F(m+n+2, m-n+1)}. \end{aligned} \quad (\text{I. 73})$$

Замечая, что при целых положительных  $a$  и  $b$

$$\frac{1}{F(a, b)} = \frac{a(a+b-1)!}{(b-1)!a!}, \quad (\text{I. 74})$$

получаем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau &= \\ &= \frac{\pi}{2^{2m}} \frac{(2m+1)!}{(m-n)! (m+n+1)!} \\ &\quad (m \geq n, n \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 75})$$

Аналогично имеем:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau = 0, \quad (\text{I. 76})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \tau \cos 2n\tau d\tau &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \tau \cos(2n-1)\tau d\tau + \\ &+ 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1} \tau \cos(2n+1)\tau d\tau, \end{aligned} \quad (\text{I. 77})$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \tau \cos 2n\tau d\tau &= \frac{\pi}{2^{2m-1}} \frac{(2m)!}{(m-n)! (m+n)!} \\ &\quad (m \geq n, n \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 78})$$

Замечая теперь, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^m \tau \sin \tau \sin k\tau \, d\tau &= \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^m \tau [\cos(k-1)\tau - \cos(k+1)\tau] \, d\tau, \end{aligned} \quad (\text{I. 79})$$

находим также:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \tau \sin \tau \sin 2n\tau \, d\tau &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \tau \sin \tau \sin (2n+1)\tau \, d\tau &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 80})$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m+1} \tau \sin \tau \sin 2n\tau \, d\tau &= \\ &= \frac{\pi}{2^{2m+1}} \frac{(2m+1)! 2n}{(m-n+1)! (m+n+1)!} \\ &\quad (m \geq n-1, \, n \geq 1); \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 81})$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \tau \sin \tau \sin (2n+1)\tau \, d\tau &= \frac{\pi}{2^{2m}} \frac{(2m)! (2n+1)}{(m-n)! (m+n+1)!} \\ &\quad (m \geq n, \, n \geq 0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 82})$$

Обращаясь теперь к соотношению (I. 62), находим коэффициенты разложения  $B(r, \tau)$  в ряд Фурье:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2\tilde{a}_1, \\ a_1 &= -\tilde{a}_2 r, \\ b_1 &= \tilde{a}_3 r. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 83})$$

При  $n \geq 1$  из соотношений (I. 75), (I. 78), (I. 81), (I. 82) получаем далее:

$$\left. \begin{aligned} a_{2n} &= \tilde{a}_4 r^2 \sum_{q=n-1}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \frac{1}{2^{2q+1}} \frac{(2q+2)!}{(q-n+1)! (q+n+1)!}, \\ b_{2n} &= -\tilde{a}_5 r^2 \sum_{q=n-1}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \frac{1}{2^{2q+1}} \frac{(2q+1)! 2n}{(q-n+1)! (q+n+1)!}, \\ a_{2n+1} &= \\ &= -\tilde{a}_4 r^2 \sum_{q=n-1}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q+1} \frac{1}{2^{2q+2}} \frac{(2q+3)!}{(q-n+1)! (q+n+2)!}, \\ b_{2n+1} &= \\ &= \tilde{a}_5 r^2 \sum_{q=n-1}^{\infty} (r \operatorname{tg} z'_*)^{2q+1} \frac{1}{2^{2q+2}} \frac{(2q+2)! (2n+1)}{(q-n+1)! (q+n+2)!}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 84})$$

Выражения (I. 84) можно переписать в более удобной форме, произведя переиндексацию  $q = i + n - 1$ . Тогда:

$$\left. \begin{aligned} a_{2n} &= \frac{\tilde{a}_4 r^2}{2} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2(n-1)} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i)!}{i! (2n+i)!}, \\ b_{2n} &= -\frac{\tilde{a}_5 r^2}{2} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2(n-1)} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i-1)! 2n}{i! (2n+i)!}, \\ a_{2n+1} &= -\frac{\tilde{a}_4 r^2}{2} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i+1)!}{i! (2n+i+1)!}, \\ b_{2n+1} &= \frac{\tilde{a}_5 r^2}{2} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i)! (2n+1)}{i! (2n+i+1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 85})$$

Ряды (I. 85) при малых  $r$  сходятся, как это легко видеть, весьма быстро. Уже сохранение только их первых членов может дать удовлетворительную точность.

Если взять индикатрису Фесенкова, то для  $y_2$  вместо формулы (1.60) будем иметь \*) выражение

$$y_2 = 1 + a \cos \varphi + b \cos^2 \varphi + c \cos^3 \varphi. \quad (1.86)$$

Вместо представления (1.62) функции  $B$  получим соответственно:

$$\begin{aligned} B = & \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 r \cos \tau + \tilde{a}_3 r \sin \tau + \tilde{a}_4 r^2 \cos^2 \tau - \tilde{a}_5 r^2 \cos \tau \sin \tau + \\ & + \tilde{a}_6 r^3 \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q+1} \cos^{2q+4} \tau - \tilde{a}_6 r^3 \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \cos^{2q+3} \tau + \\ & + \tilde{a}_7 r^3 \sin \tau \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q} \cos^{2q+2} \tau - \\ & - \tilde{a}_7 r^3 \sin \tau \sum_{q=0}^{\infty} (r \operatorname{tg} z_*)^{2q+1} \cos^{2q+3} \tau. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{A}{\cos z_*} (1 + a \cos \varphi_* + b \cos^2 \varphi_* + c \cos^3 \varphi_*), \\ \tilde{a}_2 &= \frac{A}{\cos z_*} [(1 + a \cos \varphi_* + b \cos^2 \varphi_* + c \cos^3 \varphi_*) \operatorname{tg} z_* + \\ & \quad + \sin \varphi_* \cos \varepsilon (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*)], \\ \tilde{a}_3 &= \frac{A}{\cos z_*} \sin \varphi_* \sin \varepsilon (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*), \\ \tilde{a}_4 &= \frac{A}{\cos z_*} [(1 + a \cos \varphi_* + b \cos^2 \varphi_* + c \cos^3 \varphi_*) \operatorname{tg}^2 z_* + \\ & \quad + \sin \varphi_* \cos \varepsilon \operatorname{tg} z_* (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^2 \varphi_* \cos 2\varepsilon (b + 3c \cos \varphi_*)], \\ \tilde{a}_5 &= \frac{A}{\cos z_*} [\sin \varphi_* \sin \varepsilon \operatorname{tg} z_* (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^2 \varphi_* \sin 2\varepsilon (b + 3c \cos \varphi_*)], \\ \tilde{a}_6 &= \frac{A}{\operatorname{tg} z_*} [(1 + a \cos \varphi_* + b \cos^2 \varphi_* + c \cos^3 \varphi_*) \operatorname{tg}^3 z_* + \\ & \quad + \sin \varphi_* \cos \varepsilon \operatorname{tg}^2 z_* (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^2 \varphi_* \cos 2\varepsilon \operatorname{tg} z_* (b + 3c \cos \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^3 \varphi_* \cos \varepsilon (c \cos^2 \varepsilon - 3c \sin^2 \varepsilon)], \\ \tilde{a}_7 &= \frac{A}{\operatorname{tg} z_*} [\sin \varphi_* \sin \varepsilon \operatorname{tg}^2 z_* (a + 2b \cos \varphi_* + 3c \cos^2 \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^2 \varphi_* \sin 2\varepsilon \operatorname{tg} z_* (b + 3c \cos \varphi_*) + \\ & \quad + \sin^3 \varphi_* \sin \varepsilon (3c \cos^2 \varepsilon - c \sin^2 \varepsilon)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.88)$$

\*) См. книгу, указанную в сноске на стр. 595.

Для коэффициентов разложения в ряд Фурье получим формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 2\tilde{a}_1, \\ a_1 &= -\tilde{a}_2 r, \quad b_1 = \tilde{a}_3 r, \\ a_2 &= \frac{\tilde{a}_4 r^2}{2}, \quad b_2 = -\frac{\tilde{a}_5 r^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.89)$$

и для  $n \geq 1$

$$\left. \begin{aligned} a_{2n+1} &= -\frac{\tilde{a}_6 r^3}{4} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2i} \frac{(2n+2i+1)!}{i! (2n+i+1)!}, \\ b_{2n+1} &= \frac{\tilde{a}_7 r^3}{4} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2n-2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2i} \frac{(2n+2i)! (2n+1)!}{i! (2n+i+1)!}, \\ a_{2n} &= \frac{\tilde{a}_6 r^3}{4} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2n-3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2i} \frac{(2n+2i)!}{i! (2n+i)!}, \\ b_{2n} &= -\frac{\tilde{a}_7 r^3}{4} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2n-3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r \operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{2i} \frac{(2n+2i-1)! 2n}{i! (2n+i)!}. \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

При сохранении в рядах под знаком суммы только первых членов, для амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$  гармоник модуляции фона получаем, вспоминая обозначения (I. 42), следующие выражения:

$$A_1 = \frac{r_0^3}{3} \sqrt{\tilde{a}_2^2 + \tilde{a}_3^2}, \quad A_2 = \frac{r_0^4}{8} \sqrt{\tilde{a}_4^2 + \tilde{a}_5^2}. \quad (1.91)$$

А при  $k \geq 3$  соответственно

$$A_k = \frac{r_0^{k+2}}{4(k+2)} \left(\frac{\operatorname{tg} z_*}{2}\right)^{k-3} \sqrt{\tilde{a}_6^2 + \tilde{a}_7^2}. \quad (1.92)$$

На основании соотношений (I. 41), (I. 88), (I. 91), (I. 92) можно высказать ряд качественных и количественных соображений по выбору параметров радиально-щелевого обтюлятора, когда индицируемым объектом является звезда, а фоном — рассеянная атмосферой солнечная радиация.

Эти соображения позволяют провести некоторые сравнительные оценки.

Если  $m_m^A$  — звездная величина индицируемой звезды,  $E_0$  — блеск звезды нулевой величины, т. е. создаваемая ею освещенность в люксах, а коэффициент  $A$  в формуле (I. 51a) определяет яркость в стильбах, то из соотношения (I. 41) имеем:

$$\lambda_k = \frac{E_0 \cdot 10^{-\frac{m_m^A}{2,5}}}{10^4 \pi A_k}. \quad (\text{I. 93})$$

Задавшись превышением  $\lambda^0$  сигнала от звезды над амплитудой сигнала модуляции фона на рабочей частоте, получим неравенство

$$A_k \leq \frac{E_0 \cdot 10^{-\frac{m_m^A}{2,5}}}{10^4 \pi \lambda^0}. \quad (\text{I. 94})$$

Это неравенство вместе с формулами (I. 91), (I. 92), (I. 88) связывает следующие величины:

$A$  — характеризующую яркость фона в направлении визирования,

$\varphi_*$ ,  $z_*$  — определяющие рабочий диапазон углов системы индикации по отношению к направлениям на Солнце и в зенит,

$m_m^A$  — минимальную величину звезды, по которой еще возможна работа с заданным превышением полезного сигнала над сигналом фона,

$\lambda^0$  — величину превышения,

$r_0$  — радиус поля зрения системы,

$k$  — номер рабочей гармоники (начиная с которой реализуется заданное превышение), определяющий в конечном счете число клиньев решетки обтюратора.

Если задать, например, величины  $A$ ,  $\varphi_*$ ,  $z_*$ ,  $m_m^A$ ,  $\lambda^0$  и  $r_0$ , то можно определить минимальное количество клиньев решетки.

Выбор минимального числа клиньев весьма важен, ибо он, ввиду конечной величины изображения звезды в фокальной плоскости оптической системы, определяет центральную мертвую зону обтюратора, а следовательно, в большой степени статическую и динамическую погрешности системы.

Необходимо также иметь в виду, что обычным режимом работы систем индикации является работа при высоком уровне

случайных помех. Поэтому полоса пропускания фильтров рабочей частоты должна быть минимальной. В то же время изображение звезды в ходе работы перемещается по рисунку обтюлятора, что приводит к изменению рабочей частоты (доплеровский эффект обтюлятора). Если  $v$  — скорость перемещения изображения в направлении, нормальном радиусу обтюлятора, а  $r_*$  — расстояние изображения от центра обтюлятора, то изменение рабочей частоты  $\Delta(n\omega) = nv/r_*$ . Это изменение, пропорциональное числу  $n$  клиньев обтюлятора, приводит к необходимости соответствующего расширения полосы пропускания фильтров.

Из формул (I. 88), (I. 91), (I. 92) видно, что максимальные значения  $A_k$  будут достигаться при минимальном  $\varphi_*$ , максимальном  $z_*$  и при  $\varepsilon = 0$ .

Последнее, как легко видеть из (I. 55), (I. 56), означает, что направления на звезду, Солнце и зенит лежат в одной плоскости.

При  $\varepsilon = 0$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_5 = \tilde{a}_7 = 0 \quad (\text{I. 95})$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{r_0^3 \tilde{a}_2}{3}, \quad A_2 = \frac{r_0^4 \tilde{a}_4}{8}, \\ A_k &= \frac{r_0^{k+2}}{4(k+2)} \left( \frac{\operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{k-3} \tilde{a}_6 \quad (k \geq 3). \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 96})$$

Приведем некоторые численные оценки. Пусть, например,  $\lambda^0 = 10$ ,  $m_m^A = 3$ ,  $E_0 = 2,3 \cdot 10^{-6}$ ,  $r_0 = 0,01$ ,  $z_* \leq 5\pi/12$ ,  $\varphi_* > \pi/9$ ,  $A = 0,05$ ,  $a = 0,05$ ,  $b = 1,1$ ,  $c = 0,7$ . Тогда  $\tilde{a}_2 = 2,1$ ,  $\tilde{a}_4 = 8$ ,  $\tilde{a}_6 = 30$ ,  $\operatorname{tg} z_* = 3,7$ . Подставляя в (I. 96), получаем:

$$A_1 = 7 \cdot 10^{-5}, \quad A_2 = 10^{-8}. \quad (\text{I. 97})$$

При  $k \geq 3$

$$A_k = 0,33 \frac{(0,019)^{k+2}}{k+2}. \quad (\text{I. 98})$$

На графике (рис. П. 4) представлена зависимость —  $\lg A_k(k)$ .

Правая часть неравенства (I. 94) при оговоренных выше численных значениях отдельных параметров равна

$$\frac{E_0 \cdot 10^{-\frac{m_m^A}{2,5}}}{10^4 \pi \lambda^0} = 4,6 \cdot 10^{-13}. \quad (\text{I. 99})$$

Взятый со знаком минус логарифм этой величины также нанесен на графике (рис. П. 4).

Из графика (рис. П. 4) следует, что в рассматриваемом случае рабочими гармониками могут быть пятая и выше.

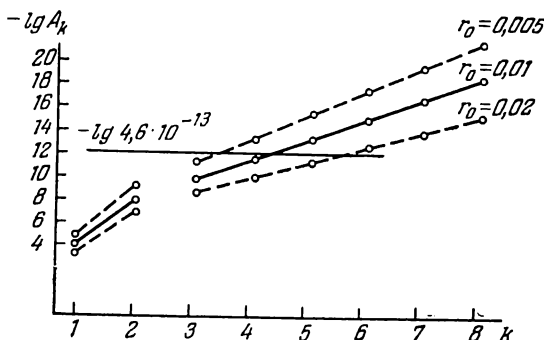


Рис. П.4.

Гармоники по четвертую включительно либо не должны пропускаться обтюратором, либо должны подавляться в схеме обработки сигнала с фоточувствительного элемента.

Рассмотрим еще (также в качестве примера) зависимость минимальной рабочей частоты от изменения угла поля зрения системы.

Из формул (I. 96) следует, что при

$$r'_0 = \mu r_0 \quad (\text{I. 100})$$

величина  $A'_k$  выражается через  $A_k$  и  $\mu$  для всех  $k$  таким образом:

$$A'_k = \mu^{k+2} A_k. \quad (\text{I. 101})$$

Поэтому график  $-\lg A'_k(k)$  сдвигается по оси ординат на величину  $(k+2) \lg \mu$  по отношению к графику  $-\lg A_k(k)$ .



На рис. П. 4 приведены (пунктиром) графики  $-\lg A'_k$  при  $\mu=2$  и  $\mu=1/2$ , т. е. для  $r_0=0,02$  и  $r_0=0,005$ . Из графиков видно, что изменение  $r_0$  в два раза в любую сторону требует соответственного изменения рабочей частоты на единицу.

Отметим, что при изменении  $\lambda^0$  в 10 раз сдвигается на единицу по оси  $-\lg A_k$  линия

$$\lg \frac{E_0 \cdot 10^{-\frac{m_m A}{2,5}}}{10^4 \pi \lambda^0} = \text{const.} \quad (\text{I. 102})$$

Выведем формулы для некоторых энергетических оценок.

Полную энергию  $T$  всех гармоник модулированного сигнала звезды, согласно теореме Парсеваля \*), можно определить следующим соотношением:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2] = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [P_0(t)]^2 dt - \frac{(a_0^0)^2}{2}. \quad (\text{I. 103})$$

Аналогичное соотношение справедливо и для гармоник фона.

Для произвольной радиально-щелевой решетки

$$T = 2p^2 \alpha (1 - \alpha), \quad (\text{I. 104})$$

где  $\alpha$  — отношение прозрачной площади обтюратора к полной, т. е.

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (\tau_{j+1} - \tau_j). \quad (\text{I. 105})$$

Легко видеть, что максимальное значение  $T$  достигается при  $\alpha = 1/2$ .

Для равномерной решетки, полудискового обтюратора и решетки двойного шага, для которых  $\alpha = 1/2$ , полная энергия модулированного сигнала максимальна и равна

$$T = 0,5 p^2. \quad (\text{I. 106})$$

Для полудисково-решетчатого обтюратора  $\alpha = 0,25$ , и поэтому

$$T = 0,375 p^2. \quad (\text{I. 107})$$

---

\*) См. Толстов Г. П., Ряды Фурье, Гостехиздат, 1951.

Для щелевого обтюратора  $\alpha = \tau_0/2\pi$  и

$$T = \frac{p^2 \tau_0}{\pi} \left( 1 - \frac{\tau_0}{2\pi} \right). \quad (\text{I. 108})$$

Если при обработке сигнала используются  $l$  гармоник, начиная с  $m$ -й, то

$$T_1 = \sum_{k=m}^{m+l} [(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2]. \quad (\text{I. 109})$$

Например, при использовании трех гармоник, начиная с пятой, т. е. гармоник  $5\omega$ ,  $6\omega$ ,  $7\omega$ , для щели с  $\tau_0 = \pi/6$  получаем:

$$T_1 = 0,034p^2. \quad (\text{I. 110})$$

Полная энергия для такой щели, согласно (I. 108), получается равной  $\approx 0,15p^2$ .

Для полудиска (при использовании частот  $5\omega$  и  $6\omega$ ) получается

$$T_1 = 0,024p^2. \quad (\text{I. 111})$$

Для полудиска-решетки с шестью клиньями ( $n=6$ ) на частотах  $5\omega$ ,  $6\omega$ ,  $7\omega$  имеем:

$$T_1 = \frac{p^2}{\pi^2} \left[ 1 + \frac{2(n^2+1)}{n^2-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} \right] \approx 0,19p^2. \quad (\text{I. 112})$$

Для двойной решетки при  $n=6$ ,  $m=8$ , т. е. для рабочих частот  $5\omega$ ,  $6\omega$ ,  $7\omega$ ,  $8\omega$ ,  $9\omega$ , получаем:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{p^2}{\pi^2} & \left[ 2 + \frac{1}{(n-1)^2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2m} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{(n+1)(m-1)} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{1}{(m+1)^2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2m} - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2n} \right)^2 \right] \approx 0,39p^2. \quad (\text{I. 113}) \end{aligned}$$

Наконец, для равномерной решетки с шестью клиньями ( $n=6$ ) для одной рабочей частоты  $6\omega$

$$T_1 = \frac{4p^2}{\pi^2} \approx 0,4p^2. \quad (\text{I. 114})$$

Следует отметить, что оценка (I. 114) вообще не зависит от  $n$ , а оценки (I. 112) и (I. 113) при  $n \geq 5$  зависят от  $n$  и  $m$ .

очень мало, так как при достаточно большом  $n$  имеют место такие асимптотические равенства:

вместо (I. 112)

$$T_1 = \frac{p^2}{\pi^2} \left( 1 + \frac{8}{\pi^2} \right) \approx 0,18p^2 \quad (\text{I. 115})$$

и вместо (I. 113)

$$T_1 = \frac{p^2}{\pi^2} \left( 2 + \frac{176}{9\pi^2} \right) \approx 0,395p^2. \quad (\text{I. 116})$$

Практически при  $n \geq 5$  можно считать поэтому оценки (I. 112), (I. 113) или (I. 115), (I. 116) не зависящими от  $n$  и  $m$ .

Приведенные выше численные оценки показывают, что щель и полудиск при работе на гармониках  $k \geq 5$  энергетически совершенно невыгодны.

Ближе всего подходит к полному использованию энергии модулированного сигнала звезды равномерная решетка, даже при использовании только одной гармоники ( $0,4p^2$  при полной энергии  $0,5p^2$ ).

Полудисково-решетчатый обтюратор, как это видно из оценок (I. 112), (I. 115), пропускает на фоточувствительный элемент на гармониках  $(n-1)\omega$ ,  $n\omega$ ,  $(n+1)\omega$  менее чем половину энергии, пропускаемой равномерной решеткой на частоте  $n\omega$ , в то время как вся энергия модулированного сигнала, проходящая через полудиск-решетку, составляет 0,75 энергии полудиска.

Обтюратор с двойной решеткой на частотах  $(n-1)\omega$ ,  $n\omega$ ,  $(m-1)\omega = (n+1)\omega$ ,  $m\omega$ ,  $(m+1)\omega$  пропускает на фоточувствительный элемент, как это видно из сравнения оценок (I. 113), (I. 116) с оценкой (I. 114), энергию, практически равную энергии равномерной решетки на частоте  $n\omega$ .

Следует отметить, что реализация энергетических соотношений, приведенных выше, определяется всей схемой обработки сигнала.

Поэтому окончательные оценки энергетической эффективности того или иного обтюратора можно делать только с учетом особенностей схем обработки сигнала, а также принимая во внимание то обстоятельство, что обычным режимом работы системы индикации является работа ее при высоком уровне случайных помех.

В заключение дадим оценку погрешностей, допускаемых при сохранении в рядах (I. 90) только первых членов разложения.

Рассмотрим входящую в выражение (I. 90) для  $a_{2n+1}$  сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i+1)!}{i!(2n+i+1)!} = \\ = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i+1)!}{i!(2n+i+1)!}. \quad (\text{I. 117}) \end{aligned}$$

Обозначив сумму в левой части через  $y$ , можно усмотреть, что имеет место неравенство

$$y - \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right) My \leq 1, \quad (\text{I. 118})$$

где

$$M = \max \frac{(2n+2j+2)(2n+2j+3)}{(j+1)(2n+j+2)} = 2n+3. \quad (\text{I. 119})$$

Из соотношений (I. 118), (I. 119) сразу же следует, что

$$y \leq \frac{1}{1 - (2n+3) \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^2}. \quad (\text{I. 120})$$

Аналогично для сумм, входящих в выражения для  $b_{2n+1}$ ,  $a_{2n}$ ,  $b_{2n}$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i)! (2n+1)}{i!(2n+i+1)!} &\leq \frac{1}{1 - (2n+1) \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^2}, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i)!}{i!(2n+i)!} &\leq \frac{1}{1 - (2n+2) \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^2}, \\ \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^{2i} \frac{(2n+2i-1)! 2n}{i!(2n+1)!} &\leq \frac{1}{1 - 2n \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 121})$$

При  $n=12$ ,  $r=0,02$ ,  $\operatorname{tg} z_* = 4$  получаем, например:

$$\frac{1}{1 - (2n+3) \left( \frac{r \operatorname{tg} z_*}{2} \right)^2} \approx 1 + 0,04. \quad (\text{I. 122})$$

Аналогичным образом могут быть получены оценки, если брать не один, а два или более членов сумм.

## Об одном способе навигации с помощью гиropolукомпас и доплеровского измерителя скорости\*)

Рассмотрим случай приведения объекта из начальной точки маршрута в конечную, когда в качестве указателя курса используется гиropolукомпас с широтной компенсацией в начальной точке движения. Для обеспечения прибытия в конечную точку гиropolукомпас в момент начала движения отклоняется на некоторый угол от ортодромии, проходящей через начальную и конечную точки. Момент прибытия определяется сравнением результатов интегрирования показаний доплеровского измерителя скорости с расчетной дальностью.

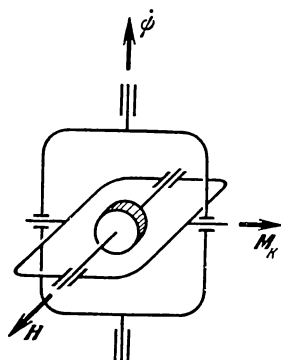


Рис. П.5.

Определим исходные параметры движения и оценим некоторые погрешности такого способа навигации, связанные с возможными неточностями определения исходных параметров.

Будем считать, что объект движется на постоянном расстоянии  $R_0$  от центра Земли, а скорость движения  $v(t)$  является известной функцией времени.

Для составления уравнений движения воспользуемся принципиальной схемой гиropolукомпаса, представляющего собой (рис. П. 5) астратический гироскоп в трехстепенном кардановом подвесе. Ось внешней рамки карданова подвеса вертикальна: с нее снимается курсовой угол. Вектор  $H$  кинетического момента гироскопа лежит в плоскости горизонта. Взаимная перпендикулярность рамок обеспечивается межрамочной коррекцией (на рисунке не показана). Компенсация широтной ошибки полукомпаса обеспечивается моментом  $M_k$ , приложенным по оси внутренней рамки.

\*) Андреев В. Д., Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1963.

Введем правую ортогональную систему координат  $O\xi\eta\zeta$ , связанную с Землей. Начало этой системы координат совместим с центром Земли. Ось  $O\xi$  направим вдоль вектора угловой скорости вращения Земли  $\omega$ , а за ось  $O\xi$  примем линию пересечения экватора плоскостью гринвичского меридиана.

Положение объекта на поверхности сферы  $s$  радиуса  $R_0$ , концентрической с Землей и вращающейся вместе с ней, определим сферическими координатами: долготой  $\lambda$ , отсчитываемой в плоскости экватора от оси  $O\xi$ , и широтой  $\varphi$ , отсчитываемой от плоскости экватора.

Координатами начальной и конечной точек движения будут соответственно  $\lambda_1$ ,  $\varphi_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\varphi_2$ .

Свяжем с текущим местоположением объекта трехгранник Дарбу  $O_1xuz$ , ориентированный по странам света. Начало его поместим в точку  $O_1$  текущего местоположения объекта на сфере  $s$ . Ось  $O_1y$  направим по геоцентрической вертикали вверх, а ось  $O_1x$  — вдоль меридиана на север.

Взаимное расположение осей систем координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $O_1xuz$  определяется следующей таблицей направляющих косинусов:

	$x$	$y$	$z$	
$\xi$	$-\sin\varphi \cos\lambda$	$\cos\varphi \cos\lambda$	$-\sin\lambda$	(II. 1)
$\eta$	$-\sin\varphi \sin\lambda$	$\cos\varphi \sin\lambda$	$\cos\lambda$	
$\zeta$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$0$	

Введем сопровождающий трехгранник  $O_1x_1y_1z_1$ , начало которого также совместим с точкой  $O_1$ . Ось  $O_1y_1$  направим вверх по вертикали, а ось  $O_1x_1$  — вдоль вектора путевой скорости объекта  $v$ . Положение трехгранника  $O_1x_1y_1z_1$  относительно трехгранника  $O_1xuz$  определится такой таблицей:

	$x_1$	$y_1$	$z_1$	
$x$	$\cos\psi$	$0$	$-\sin\psi$	(II. 2)
$y$	$0$	$1$	$0$	
$z$	$\sin\psi$	$0$	$\cos\psi$	

Как видно из таблицы (II. 2), положительный отсчет угла  $\psi$  ведется от направления на север к направлению на восток.

Полагая, что ось внешней рамки гиросполукомпаса совмещена с осью  $O_1y_1$  ( $O_1y$ ), точка пересечения осей его подвеса расположена в точке  $O_1$ , и замечая, что проекция абсолютной угловой скорости трехгранника  $O_1x_1y_1z_1$  на ось  $O_1y_1$

$$\omega_{y_1} = (\omega + \dot{\lambda}) \sin \varphi - \dot{\psi}, \quad (\text{II. 3})$$

можем записать уравнения движения объекта и гиросполукомпас в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  следующим образом:

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{R_0} \cos \psi, \quad \dot{\lambda} = \frac{v \sin \psi}{R_0 \cos \varphi}, \quad \dot{\psi} = (\omega + \dot{\lambda}) \sin \varphi - \frac{M_k}{H}. \quad (\text{II. 4})$$

Начальными условиями системы (II. 4) будут:

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \lambda(0) = \lambda_1, \quad \psi(0) = \psi_0. \quad (\text{II. 5})$$

Если бы широтная компенсация гиросполукомпас производилась непрерывно, то

$$\frac{M_k}{H} = \omega \sin \varphi, \quad (\text{II. 6})$$

и вместо уравнений (II. 4) для движения по ортодромии имели бы место уравнения

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{R_0} \cos \psi, \quad \dot{\lambda} = \frac{v \sin \psi}{R_0 \cos \varphi}, \quad \dot{\psi} = \dot{\lambda} \sin \varphi. \quad (\text{II. 7})$$

В этом случае начальным значением  $\psi(0)$  был бы угол  $\psi_0$  ортодромии, проходящей через начальную  $(\varphi_1, \lambda_1)$  и конечную  $(\varphi_2, \lambda_2)$  точки движения, с осью  $O_1x$  в точке  $(\varphi_1, \lambda_1)$ , так что

$$\left. \begin{aligned} \sin \psi_0 &= \frac{\cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin S_0}, \\ \cos \psi_0 &= \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos S_0}{\cos \varphi_1 \sin S_0}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 8})$$

где  $S_0$  — величина угла в плоскости ортодромии между направлениями в точки  $(\varphi_1, \lambda_1)$  и  $(\varphi_2, \lambda_2)$ , определяемая из соотношения

$$\cos S_0 = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2. \quad (\text{II. 9})$$

В рассматриваемом случае широтная компенсация производится только в начальной точке движения, т. е.

$$\frac{M_k}{H} = \omega \sin \varphi_1. \quad (\text{II. 10})$$

Поэтому уравнения движения из (II. 4) получаются такими:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{v}{R_0} \cos \psi, \quad \dot{\lambda} = \frac{v \sin \psi}{R_0 \cos \varphi}, \\ \dot{\psi} &= (\omega + \dot{\lambda}) \sin \varphi - \omega \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 11})$$

Начальными условиями уравнений (II. 11) являются:

$$\varphi(0) = \varphi_1, \quad \lambda(0) = \lambda_1, \quad \psi(0) = \psi_0 + \Delta\psi_0. \quad (\text{II. 12})$$

В соотношениях (II. 12) величина  $\psi_0$  задана посредством равенств (II. 8), а величина  $\Delta\psi_0$  должна быть определена из условия прохождения траектории через конечную точку движения, например из условия

$$\lambda(\varphi_2) = \lambda_2. \quad (\text{II. 13})$$

Если  $t_1$  — момент времени, в который условие (II. 13) будет выполняться, то очевидно, что угловая дальность  $S_1$  между начальной и конечной точками вдоль траектории движения определится интегралом

$$S_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi} dt = \int_0^{t_1} \frac{v}{R_0} dt. \quad (\text{II. 14})$$

Угловое расстояние  $S_1$ , естественно, может отличаться от расстояния  $S_0$ , определенного равенством (II. 9).

Прежде чем приступить к решению системы (II. 11) и определению исходных параметров движения, вернемся к тем упрощающим предположениям, которые были сделаны при выводе уравнений (II. 11).

Движение объекта полагалось происходящим по поверхности сферы  $s$  радиуса  $R_0$ , концентрической с Землей и вращающейся вместе с ней. Считалось также, что ось внешней рамки гирополукомпаса направлена по оси  $O_1y_1$  ( $O_1y$ ), т. е. по нормали к поверхности сферы  $s$ , тогда как в случае, когда положение внешней оси связано с направлением гировертикали, имеющей маятниковую коррекцию, она будет отклонена на малый угол от направления оси  $O_1y_1$ .

При выводе уравнений (II. 11) было введено предположение о том, что направление скорости  $v$  объекта совпадает с его продольной осью и определено в системе координат  $O_1xyz$  углом  $\psi$ , снимаемым с гирополукомпаса. На самом



деле продольная ось объекта  $O_1x'_1$  может быть отклонена от направления  $O_1x_1$  на угол сноса

$$\beta = \frac{v'_{z_1}}{v'_{x_1}}. \quad (\text{II. 15})$$

Причиной возникновения сноса могут являться, например, боковой ветер, действие кориолисовой силы, неидеальность геометрии объекта. Так как угол сноса  $\beta$  может быть измерен доплеровским измерителем скорости и объект может быть развернут на этот угол системой управления, чтобы парировать снос, то при действительном движении в уравнениях (II. 11)

$$v(t) = v_{x_1}(t) \cos \beta. \quad (\text{II. 16})$$

Из дальнейшего легко усмотреть, что при определении  $\psi_0$  и  $\Delta\psi_0$  перечисленные выше упрощения при определенном ограничении угловой дальности  $S_0$  не приводят к ощутимым погрешностям.

При вычислении  $\psi_0$  и  $\Delta\psi_0$  можно считать  $\cos \beta$  равным единице, а  $R_0$  принять равным, например, максимальному значению радиуса кривизны земного сфероиды. Однако при определении дальности  $S_1$  следует учитывать несферичность Земли, так как доплеровский измеритель скорости измеряет проекцию скорости объекта относительно Земли на плоскость, касательную к земному сфероиду \*).

Естественно, что при существенных величинах  $\beta$  соотношение (II. 16) должно быть учтено при интегрировании показаний продольного канала доплеровского измерителя скорости. Вернемся к системе уравнений (II. 11). Эта система при постоянном  $v = v_0$  может быть, вообще говоря, проинтегрирована по крайней мере в квадратурах.

В самом деле, подставив  $\dot{\lambda}$  из второго уравнения (II. 11) в третье и разделив после этого третье уравнение на первое, можно получить следующее соотношение, связывающее  $\psi$  и  $\varphi$ :

$$\frac{d(\sin \psi)}{d\varphi} - \sin \psi \operatorname{tg} \varphi = \frac{R_0 \omega}{v_0} (\sin \varphi - \sin \varphi_1). \quad (\text{II. 17})$$

Это линейное относительно  $\sin \psi$  уравнение.

---

\*) См. § 5.2 (стр. 313).

Его решение:

$$\sin \psi = -\frac{\omega R_0}{v_0 \cos \varphi} \left( \frac{\cos 2\varphi}{4} + \sin \varphi \sin \varphi_1 \right) + C_1. \quad (\text{II. 18})$$

Для определения  $\varphi(t)$  имеем теперь равенство

$$\frac{v_0}{R_0} t + C_2 = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \psi}}, \quad (\text{II. 19})$$

где  $\sin \psi$  определен равенством (II. 18).

Далее, зная  $\varphi(t)$ , из соотношения (II. 18) находим  $\psi(t)$ , а из второго уравнения (II. 11) —

$$\lambda(t) = \frac{v_0}{R_0} \int_0^t \frac{\sin \psi}{\cos \varphi} dt + \lambda_1. \quad (\text{II. 20})$$

Использование квадратур (II. 19), (II. 20) для определения исходных параметров движения затруднено, однако, двумя обстоятельствами: во-первых, они получаются трудно обозримыми из-за сложности подынтегральных выражений и, во-вторых, не очевиден способ их распространения на случай, когда  $v$  перемененно.

Поэтому построим приближенное решение системы (II. 11), для чего воспользуемся близостью решений системы (II. 11) к решениям системы (II. 7) и рассмотрим уравнения (II. 11) в системе координат, связанной с ортодромией, проходящей через точки  $(\varphi_1, \lambda_1)$ ,  $(\varphi_2, \lambda_2)$  и являющейся решением системы (II. 7).

Введем ортодромическую систему координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  следующим образом. Ось  $O\xi_1$  направим от центра Земли в начальную точку  $(\varphi_1, \lambda_1)$ , ось  $O\eta_1$  — нормально плоскости ортодромии, ось  $O\xi_1$  расположим в плоскости ортодромии и направим в сторону конечной точки движения. Взаимное расположение систем координат  $O\xi\eta\zeta$  и  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  определим таблицей направляющих косинусов:

$$\begin{array}{cccc} & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \eta & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \zeta & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{array} \quad (\text{II. 21})$$

Очевидно, что

$$\beta_{13} = \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, \quad \beta_{23} = \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, \quad \beta_{33} = \sin \varphi_1. \quad (\text{II. 22})$$

Остальные  $\beta_{ij}$  определяются из соотношений

$$\xi_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1 \cos S_0}{\sin S_0}, \quad \eta_1 = \frac{\rho_1 \times \rho_2}{\sin S_0}, \quad (\text{II. 23})$$

где  $\xi_1, \eta_1$  — орты осей  $O\xi_1, O\eta_1$ , а  $\rho_1, \rho_2$  — единичные векторы направлений из точки  $O$  в начальную и конечную точки движения.

Из равенств (II. 23) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{1}{\sin S_0} (\cos \varphi_2 \cos \lambda_2 - \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos S_0) = \\ &= -\sin \varphi_1 \cos \lambda_1 \cos \psi_0 - \sin \lambda_1 \sin \psi_0, \\ \beta_{21} &= \frac{1}{\sin S_0} (\cos \varphi_2 \sin \lambda_2 - \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos S_0) = \\ &= -\sin \varphi_1 \sin \lambda_1 \cos \psi_0 + \cos \lambda_1 \sin \psi_0, \\ \beta_{31} &= \frac{1}{\sin S_0} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos S_0) = \cos \varphi_1 \cos \psi_0, \\ \beta_{12} &= \frac{1}{\sin S_0} (\cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 \sin \varphi_1) = \\ &= -\sin \varphi_1 \cos \lambda_1 \sin \psi_0 + \cos \psi_0 \sin \lambda_1, \\ \beta_{22} &= \frac{1}{\sin S_0} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \lambda_1) = \\ &= -\sin \varphi_1 \sin \lambda_1 \sin \psi_0 - \cos \lambda_1 \cos \psi_0, \\ \beta_{32} &= \frac{1}{\sin S_0} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) = \cos \varphi_1 \sin \psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 24})$$

Положение объекта в системе координат  $O\xi_1\eta_1\xi_1$  определим угловой дальностью  $S$  вдоль ортодромии и отстоянием  $\mu$  от нее; дальность  $S$  при этом будем отсчитывать от начальной точки движения; направлением положительного отсчета  $\mu$  будем считать направление от ортодромии к оси  $O\eta_1$ .

Если  $\rho$  — единичный вектор направления в точку текущего местоположения объекта на сфере  $s$ , то его направляющие косинусы

$$\cos \mu \sin S, \quad \sin \mu, \quad \cos \mu \cos S \quad (\text{II. 25})$$

в системе координат  $O\xi_1\eta_1\xi_1$  и направляющие косинусы

$$\cos \varphi \cos \lambda, \quad \cos \varphi \sin \lambda, \quad \sin \varphi \quad (\text{II. 26})$$

в системе координат  $O\xi\eta\zeta$  в силу таблицы (II. 21) связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi \cos \lambda &= \beta_{11} \cos \mu \sin S + \beta_{12} \sin \mu + \beta_{13} \cos \mu \cos S, \\ \cos \varphi \sin \lambda &= \beta_{21} \cos \mu \sin S + \beta_{22} \sin \mu + \beta_{23} \cos \mu \cos S, \\ \sin \varphi &= \beta_{31} \cos \mu \sin S + \beta_{32} \sin \mu + \beta_{33} \cos \mu \cos S, \end{aligned} \right\} \text{(II. 27)}$$

которые дают возможность выразить координаты  $\varphi$  и  $\lambda$  через  $S$  и  $\mu$ .

Уравнения движения объекта (II. 11) записываются в системе координат  $O\xi_1\eta_1\zeta_1$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mu} &= a(t) \sin \theta, \\ \dot{S} &= \frac{a(t) \cos \theta}{\cos \mu}, \\ \dot{\theta} &= -\omega (\sin \varphi - \sin \varphi_1), \end{aligned} \right\} \text{(II. 28)}$$

где

$$\dot{\theta} = -\dot{\psi} + \dot{\lambda} \sin \varphi, \quad a(t) = \frac{v(t)}{R_0}. \quad \text{(II. 29)}$$

Подставляя значение  $\sin \varphi$ , из соотношений (II. 27), (II. 24), (II. 22) получаем далее:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= \frac{a(t) \cos \theta}{\cos \mu}, \\ \dot{\mu} &= a(t) \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= -\omega (\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \cos \mu \sin S + \\ &\quad + \cos \varphi_1 \sin \psi_0 \sin \mu + \sin \varphi_1 \cos \mu \cos S - \sin \varphi_1). \end{aligned} \right\} \text{(II. 30)}$$

Начальными условиями системы (II. 30) являются величины

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 0, \quad \mu(0) = 0, \\ \theta(0) &= \theta_0 = \psi_0 - \psi_{(0)} = -\Delta\psi_0. \end{aligned} \right\} \text{(II. 31)}$$

Для обеспечения прохождения через конечную точку ( $\varphi_2$ ,  $\lambda_2$ ) необходимо величину  $\theta_0 = -\Delta\psi_0$  определить из условия

$$40^* \quad \mu(S_0) = 0. \quad \text{(II. 32)}$$

Вследствие малости углов  $\mu$  и  $\theta$  представляется возможным рассмотреть вместо уравнений (II. 30) систему:

$$\left. \begin{aligned} \dot{S} &= a(t), \\ \dot{\theta} &= -\omega (\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \sin S + \sin \varphi_1 \cos S - \sin \varphi_1), \\ \dot{\mu} &= a(t) \theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 33})$$

Уравнения (II. 33), как легко заметить, интегрируются последовательно, одно за другим, при этом получается:

$$\left. \begin{aligned} S &= \int_0^t a(t) dt, \\ \theta &= -\omega \int_0^t (\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \sin S + \sin \varphi_1 \cos S - \sin \varphi_1) dt + \theta_0, \\ \mu &= \int_0^t a(t) \theta dt. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 34})$$

Если положить, что

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \frac{v(t)}{R_0} \quad \text{при } t \leq t_*, \\ a(t) &= \frac{v_0}{R_0} = a_0 = \text{const} \quad \text{при } t > t_*, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 35})$$

то подстановка этих значений в первое соотношение (II. 34) дает:

$$\left. \begin{aligned} S &= \int_0^t a(t) dt \quad (t \leq t_*), \\ S &= \int_0^{t_*} a(t) dt + a_0(t - t_*) \quad (t > t_*). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 36})$$

Из второго равенства (II. 34) при  $t \leq t_*$  имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\omega \sin \varphi_1 \int_0^t \left( \cos \int_0^t a(t) dt \right) dt - \\ &- \omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \int_0^t \left( \sin \int_0^t a(t) dt \right) dt + \omega t \sin \varphi_1 + \theta_0. \end{aligned} \quad (\text{II. 37})$$

При  $t > t_*$  находим:

$$\begin{aligned} \theta = & \omega \sin \varphi_1 \left( \frac{\sin S_*}{a_0} - q_1^* \right) - \omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \left( \frac{\cos S_*}{a_0} + q_2^* \right) - \\ & - \frac{\omega}{a_0} \sin \varphi_1 \sin [S_* + a(t - t_*)] + \\ & + \frac{\omega}{a_0} \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \cos [S_* + a(t - t_0)] + \omega t \sin \varphi_1 + \theta_0, \quad (\text{II. 38}) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_* &= \int_0^{t_*} a(t) dt, \quad q_1^* = \int_0^{t_*} \left( \cos \int_0^t a(t) dt \right) dt, \\ q_2^* &= \int_0^{t_*} \left( \sin \int_0^t a(t) dt \right) dt. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 39})$$

Наконец, из третьего соотношения (II. 34) для  $t \leq t_*$  получаем:

$$\begin{aligned} \mu = & -\omega \sin \varphi_1 \int_0^t \left[ a(t) \int_0^t \left( \cos \int_0^t a(t) dt \right) dt \right] dt - \\ & - \omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \int_0^t \left[ a(t) \int_0^t \left( \sin \int_0^t a(t) dt \right) dt \right] dt + \\ & + \omega \sin \varphi_1 \int_0^t t a(t) dt + \theta_0 \int_0^t a(t) dt. \quad (\text{II. 40}) \end{aligned}$$

И для  $t > t_*$

$$\begin{aligned} \mu = & \omega \sin \varphi_1 \left( p_3^* - p_1^* - \frac{\cos S_*}{a_0} - \frac{a_0 t_*^2}{2} \right) - \\ & - \omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \left( p_2^* + \frac{\sin S_*}{a_0} \right) + a_0 \left[ \omega \sin \varphi_1 \left( \frac{\sin S_*}{a_0} - q_1^* \right) - \right. \\ & - \omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \left( \frac{\cos S_*}{a_0} + q_2^* \right) \left. \right] (t - t_*) + \quad (\text{II. 41}) \\ & + \frac{\omega}{a_0} \sin \varphi_1 \cos [S_* + a_0(t - t_*)] + \\ & + \frac{\omega}{a_0} \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \sin [S_* + a_0(t - t_*)] + a_0 \omega \frac{t_*^2}{2} \sin \varphi_1 + \\ & + \theta_0 [S_* + a_0(t - t_*)]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} p_1^* &= \int_0^{t_*} \left[ a(t) \int_0^t \left( \cos \int_0^t a(t) dt \right) dt \right] dt, \\ p_2^* &= \int_0^{t_*} \left[ a(t) \int_0^t \left( \sin \int_0^t a(t) dt \right) dt \right] dt, \quad p_3^* = \int_0^{t_*} t a(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 42})$$

Вычислим теперь  $\theta_0$ . Будем считать, что для момента  $t_1$  прибытия в конечную точку, когда должно быть выполнено условие

$$\mu(t_1) = 0, \quad (\text{II. 43})$$

справедливо неравенство

$$t > t_*. \quad (\text{II. 44})$$

Так как

$$S(t_1) = S_0, \quad (\text{II. 45})$$

то

$$t_1 - t_* = \frac{S_0 - S_*}{a_0}, \quad t_1 = \frac{S_0 - S_*}{a_0} + t_*. \quad (\text{II. 46})$$

Подставляя теперь  $t = t_1$  в соотношение (II. 41), получаем после некоторых упрощений и группировок:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0}{S_0} \left[ \frac{\sin S_* - \sin S_0}{a_0} + \right. \\ &\quad \left. + \left( q_2^* + \frac{\cos S_*}{a_0} \right) (S_0 - S_*) + p_2^* \right] + \\ &\quad + \frac{\omega \sin \varphi_1}{S_0} \left[ \frac{\cos S_* - \cos S_0}{a_0} + \left( q_1^* - \frac{\sin S_*}{a_0} \right) (S_0 - S_*) + \right. \\ &\quad \left. + t_* (S_* - S_0) - \frac{1}{2a_0} (S_0 - S_*)^2 - p_3^* + p_1^* \right]. \quad (\text{II. 47}) \end{aligned}$$

Оценим погрешности, привносимые заменой системы уравнений (II. 30) системой (II. 33).

Для определения разностей  $\Delta S$ ,  $\Delta \theta$  и  $\Delta \mu$  решений систем (II. 30) и (II. 33) вычитанием уравнений (II. 33) из

уравнений (II. 30) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{S} &= a_0 \left( 1 - \frac{\cos \theta}{\cos \mu} \right), \\ \Delta \dot{\theta} &= \omega \Delta S (\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \cos S + \sin \varphi_1 \sin S) - \\ &\quad - \omega (1 - \cos \mu) (\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \sin S - \sin \varphi_1 \cos S) - \\ &\quad \quad - \omega \sin \mu \cos \varphi_1 \sin \psi_0, \\ \Delta \dot{\mu} &= a (\theta - \sin \theta + \Delta \theta). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 48})$$

Учитывая, что

$$\left. \begin{aligned} |\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \cos S + \sin \varphi_1 \sin S| &\leq 1, \\ |\cos \varphi_1 \cos \psi_0 \sin S - \sin \varphi_1 \cos S| &\leq 1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 49})$$

и ограничиваясь в правых частях равенств (II. 48) лишь основными членами, получаем:

$$\left. \begin{aligned} |\Delta S| &< S_0 \max \frac{\theta^2}{2}, \\ |\Delta \theta| &< \frac{\omega S_0}{a_0} \left( S_0 \max \frac{\theta^2}{2} + \max |\mu| \right), \\ |\Delta \mu| &< S_0 \left( \max \frac{|\theta^3|}{6} + |\Delta \theta| \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 50})$$

Для оценки правых частей неравенств (II. 50) возьмем  $S$ ,  $\theta$  и  $\mu$ , полученные из соотношений (II. 34) при постоянном  $a = a_0$ :

$$\left. \begin{aligned} S &= a_0 t, \\ \theta &= \theta_0 - \omega \left( \sin \varphi_1 \frac{\sin a_0 t}{a_0} - \right. \\ &\quad \left. - \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \frac{\cos a_0 t - 1}{a_0} - t \sin \varphi_1 \right), \\ \mu &= a_0 \theta_0 t + \omega \left( \sin \varphi_1 \frac{\cos a_0 t - 1}{a_0} + \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \frac{\sin a_0 t}{a_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_0 t^2}{2} \sin \varphi_1 - t \cos \varphi_1 \cos \psi_0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 51})$$



где

$$\theta_0 = \frac{\omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0}{a_0} \left( 1 - \frac{\sin S_0}{S_0} \right) - \frac{\omega}{a_0} \sin \varphi_1 \left( \frac{S_0}{2} - \frac{\cos S_0 - 1}{S_0} \right). \quad (\text{II. 52})$$

Из формул (II. 51) и (II. 52) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \max |\theta| &\approx |\theta(S_0)| \approx \frac{\omega S_0^2}{3a_0}, \\ \max |\mu| &\approx \left| \mu \left( \frac{S_0}{\sqrt{3}} \right) \right| \approx \frac{\omega S_0^3}{9a_0 \sqrt{3}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 53})$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} |\Delta S| &\leq \frac{\omega^2 S_0^5}{18a_0^2}, \\ |\Delta \theta| &\leq \frac{\omega^2 S_0^4}{9a_0^2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\omega S_0^2}{2a_0} \right), \\ |\Delta \mu| &\leq \frac{\omega^2 S_0^5}{9a_0^2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\omega S_0^2}{2a_0} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 54})$$

Выражение (II. 47) для  $\theta_0$  может быть упрощено. Разложив тригонометрические функции  $\sin S_0$ ,  $\cos S_0$  в ряды по степеням  $S_0$  и сохранив в разложениях третьи степени  $S_0$ , получим:

$$\theta_0 = \frac{\omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0}{6a_0} \left( S_0^2 + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{S_0} \right) - \frac{\omega \sin \varphi_1}{24a_0} \left( S_0^3 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_4}{S_0} \right). \quad (\text{II. 55})$$

Здесь  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  — постоянные величины, характеризующие начальный участок движения. Они выражаются через  $S_*$ ,  $t_*$ ,  $q_1^*$ ,  $q_2^*$ ,  $p_1^*$ ,  $p_2^*$ ,  $p_3^*$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 6(a_0 q_2^* + \cos S_* - 1), \\ \varepsilon_2 &= 6(\sin S_* - S_* \cos S_* - a_0 q_2^* S_* + p_2^*), \\ \varepsilon_3 &= 24(a_0 t_* - a_0 q_1^* + \sin S_* - S_*), \\ \varepsilon_4 &= 24 \left( 1 - \cos S_* - S_* \sin S_* + a_0 q_1^* S_* - \right. \\ &\quad \left. - t_* S_* + \frac{S_*^2}{2} + p_3^* - p_1^* \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 56})$$

Допущенная при замене формулы (II.47) формулой (II.55) погрешность в определении  $\theta_0$  и связанная с ней погрешность  $\Delta\mu(S_0)$  оцениваются неравенствами

$$|\Delta\theta_0| \leq \frac{\omega S_0^4}{5! a_0}, \quad |\Delta\mu(S_0)| \leq \frac{\omega S_0^5}{5! a_0}. \quad (\text{II. 57})$$

Погрешность  $\Delta\mu(S_0)$ , вызванная отличием действительной путевой скорости  $v(t)$  от расчетной, оценивается неравенством

$$|\Delta\mu(S_0)| \leq \frac{|\Delta a| \omega S_0^3}{3a_0^2}, \quad (\text{II. 58})$$

где  $|\Delta a|$  — отклонение действительной величины  $a(t)$  от расчетной.

Некоторому отклонению расчетной скорости от действительной равносильно также допущение о постоянстве  $R_0$ .

Соотношения (II. 8), (II. 9), (II. 55), (II. 39), (II. 42) и последнее равенство (II. 31) дают возможность вычислить  $\psi_0$ ,  $\Delta\psi_0$  и оценить погрешность  $\Delta\mu(S_0)$  в момент прибытия, связанную с неточностью их определения.

Перейдем к определению программной дальности. Так как из первого неравенства (II. 54) следует, что погрешность  $\Delta S$ , вызванная выходом траектории из плоскости ортодромии, мала, то задача определения  $S_1$  сводится лишь к определению с нужной точностью длины дуги эллипса, образованного пересечением земного сфероида и плоскости ортодромии, от начальной точки движения с координатами  $(\varphi_1, \lambda_1)$  до конечной точки с координатами  $(\varphi_2, \lambda_2)$ .

Легко усмотреть, обращаясь к таблице (II. 21), что сечение земного сфероида плоскостью ортодромии есть эллипс, большая полуось которого расположена в плоскости земного экватора и равна радиусу экваториального сечения Земли, т. е. ее большой полуоси  $a$ ; малая же полуось равна

$$b' = a \sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_0)}, \quad (\text{II. 59})$$

где

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad (\text{II. 60})$$

— эксцентриситет земного сфероида.

Квадрат эксцентриситета  $e'$  сечения равен:

$$(e')^2 = e^2 (1 - \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_0). \quad (\text{II. 61})$$

Длина дуги эллипса, образованного сечением земного эллипсоида плоскостью ортодромии, очевидно, равна:

$$l = a \int_a^{S_0 + \alpha} \sqrt{1 - e^2(1 - \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_0) \cos^2 S} dS, \quad (\text{II. 62})$$

где  $\alpha$  — угол в плоскости ортодромии между направлением  $\rho_1$  и линией пересечения плоскости ортодромии с экватором.

Разложение подынтегрального выражения (II. 62) в ряд по степеням  $e^2$  и интегрирование дают:

$$l = aS_0 \left[ 1 - \frac{e^2}{4} (1 - \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_0) \right]. \quad (\text{II. 63})$$

Отброшенные при этом члены оцениваются неравенством

$$|\Delta l| \leq \frac{ae^2}{4} S_0. \quad (\text{II. 64})$$

Таким образом, определение исходных параметров  $\psi_0$ ,  $\Delta\psi_0$  и  $l$  по заданным географическим координатам  $(\varphi'_1, \lambda)$  начальной и  $(\varphi'_2, \lambda_2)$  конечной точек движения сводится к следующим вычислениям.

Определение геоцентрических широт  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  по географическим  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$ :

$$\varphi_{1,2} = \varphi'_{1,2} - \frac{e^2}{2} \sin 2\varphi'_{1,2}. \quad (\text{II. 65})$$

Определение  $\psi_0$  и  $S_0$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos S_0 &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \\ \sin \psi_0 &= \frac{\cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin S_0}, \\ \cos \psi_0 &= \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos S_0}{\cos \varphi_1 \sin S_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 66})$$

Вычисление  $l$ :

$$l = aS_0 \left[ 1 - \frac{e^2}{4} (1 - \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \psi_0) \right]. \quad (\text{II. 67})$$

И, наконец, нахождение  $\Delta\psi_0$  по формуле

$$\Delta\psi_0 = -\frac{\omega \cos \varphi_1 \cos \psi_0}{6a_0} \left( S_0^2 + \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{S_0} \right) + \frac{\omega \sin \varphi_1}{24a_0} \left( S_0^3 + \varepsilon_3 + \frac{\varepsilon_4}{S_0} \right). \quad (\text{II. 68})$$

В соотношениях (II. 65) — (II. 68) входящие в коэффициенты величины  $e^2$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $a_0$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  являются постоянными и значения их известны.

Суммарные максимальные погрешности приведения объекта в конечную точку движения, вносимые неточностью определения исходных параметров движения по приведенным выше формулам, не превышают величин:

$$|\Delta l| \leq \frac{ae^2 S_0}{4} + \frac{\omega^2 S_0^5}{18a_0^2},$$

$$|\Delta \mu| \leq \frac{\omega_0^2 S_0^5}{9a_0^2} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\omega S_0^2}{2a_0} + \frac{3a_0}{40\omega} \right) + \frac{|\Delta a| \omega S_0^3}{3a_0^2}.$$

## Об управлении движением объекта по показаниям ньютонометров \*)

Рассмотрим схему управления движением центра масс объекта непосредственно по показаниям ньютонометров, без определения координат объекта. Выведем и проанализируем уравнения движения объекта вблизи программной траектории.

Пусть программная траектория движения объекта задана в плоскости, проходящей через центр Земли  $O_1$  и занимающей неизменное положение по отношению к Земле. Введем правый ортогональный трехгранник  $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$ , плоскость  $O_1\xi_0\eta_0$  которого совпадает с плоскостью программной траектории. Действительное местоположение центра масс объекта  $O$  в системе координат  $O_1\xi_0\eta_0\zeta_0$  определим расстоянием  $R$  центра масс от центра Земли  $O_1$  и двумя углами  $\Delta z$  и  $S$ . Первый из них — это угол между направлением  $O_1O$  и плоскостью  $O_1\xi_0\eta_0$ . Положительные углы  $\Delta z$  соответствуют отклонению направления  $O_1O$  к оси  $\xi_0$ . Угол  $S$  — это угол между осью  $O_1\eta_0$  и проекцией направления  $O_1O$  на плоскость  $O_1\xi_0\eta_0$ .

Будем считать, что на борту объекта известны из каких-либо источников информации величины  $S$  и  $R$ . Тогда задачу навигации объекта можно рассматривать как задачу управления движением объекта, при котором величина  $\Delta z$  сводится непрерывно к нулю с заданной точностью.

Эту задачу можно, очевидно, решить, если определить точное значение величины  $\Delta z$  (например, при помощи инерциальных систем), а затем использовать это значение для управления движением объекта. Однако знание точного значения  $\Delta z$  не является здесь необходимым. Ниже рассматривается схема управления движением объекта по показаниям надлежащим образом ориентированного ньютонометра, которые являются некоторой линейной комбинацией величины  $\Delta z$  и ее производных.

---

\*) Андреев В. Д., Новожилов И. В., Инженерный журнал, Механика твёрдого тела, № 2, 1966.

Пусть на борту объекта реализовано направление  $\xi_0$ , нормальное плоскости программной траектории, что может быть сделано, например, при помощи гироскопических устройств. Пусть вдоль этого направления установлен ньютонометр, показание которого обозначим через  $a_{\xi_0}$ . Показание ньютонометра, соответствующее  $\Delta z \equiv 0$ , обозначим через  $a_{\xi_0}^0$ . Величина  $a_{\xi_0}$  будет функцией  $S$ ,  $\Delta z$ ,  $R$ , их производных и времени. Величина же  $a_{\xi_0}^0$  зависит лишь от  $S$ ,  $R$  и времени. При известных  $S$  и  $R$  величина  $a_{\xi_0}^0$  может быть сформирована для каждого момента времени. Разность

$$\delta a_{\xi_0} = a_{\xi_0} - a_{\xi_0}^0 \quad (\text{III. 1})$$

может служить мерой отклонения движения от программного и может быть использована для управления движением объекта.

Найдем выражения для  $a_{\xi_0}$ ,  $a_{\xi_0}^0$ ,  $\delta a_{\xi_0}$ . Учтем при этом следующие погрешности: инструментальную погрешность ньютонометра  $\Delta a_{\xi_0}$ , погрешности  $\Delta x$ ,  $\Delta R$  информации о величинах  $S$  и  $R$ , а также инструментальные погрешности ориентации оси чувствительности ньютонометра.

Введем правые ортогональные трехгранники  $O\xi\eta\zeta$ ,  $O\xi^0\eta^0\zeta^0$ ,  $O\xi'\eta'\zeta'$ . Их начала поместим в центр масс объекта. Ось  $\eta$  направим вдоль линии  $O_1O$ , а ось  $\xi$  расположим параллельно плоскости программной траектории. Оси  $\zeta'$ ,  $\zeta^0$  ориентированы так же, как  $\xi_0$ , ось  $\eta'$  составляет с осью  $\eta^0$  угол  $S' = S - \Delta x$ , а ось  $\eta^0$  с осью  $\eta$  образует угол  $S$ .

Трехгранник  $O\xi^0\eta^0\zeta^0$  получается из трехгранника  $O\xi'\eta'\zeta'$  поворотом на малый угол  $\Delta x$  вокруг оси  $\zeta'$ , а трехгранник  $O\xi\eta\zeta$  — из трехгранника  $O\xi^0\eta^0\zeta^0$  поворотом на угол  $\Delta z$  вокруг оси  $\xi^0$ . Таблица направляющих косинусов между осями  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  имеет вид:

	$\xi'$	$\eta'$	$\zeta'$
$\xi$	1	$\Delta x$	0
$\eta$	$-\Delta x$	1	$\Delta z$
$\zeta$	0	$-\Delta z$	1.

(III. 2)

Чтобы получить направляющие косинусы между осями  $\xi^0$ ,  $\eta^0$ ,  $\zeta^0$  и  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$ , надо, очевидно, в таблице (III. 2) положить  $\Delta z = 0$ .

Инструментальную погрешность ориентации оси  $\zeta_*$  чувствительности ньютонометра, т. е. отклонение ее от направления  $\zeta^0$  ( $\zeta'$ ), зададим двумя малыми углами  $\alpha_*$  и  $\beta_*$ , так что направляющие косинусы оси  $\zeta_*$  с осями  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $\zeta'$  будут равны:  $\beta_*$ ,  $-\alpha_*$ , 1. Полагая чувствительную массу ньютонометра единичной, точечной и расположенной в точке  $O$ , для показания ньютонометра получим выражение

$$a_{\zeta_*} = -W_{\zeta_*} + g_{\zeta_*} + \Delta a_{\zeta_*}, \quad (\text{III. 3})$$

где  $W_{\zeta_*}$  — проекция на ось  $\zeta_*$  абсолютного ускорения центра масс объекта,  $g_{\zeta_*}$  — проекция на эту же ось силы притяжения Землей чувствительной массы ньютонометра, а  $\Delta a_{\zeta_*}$  — погрешность показаний ньютонометра.

Проекции  $W_{\xi}$ ,  $W_{\eta}$ ,  $W_{\zeta}$  абсолютного ускорения точки  $O$  на оси трехгранника  $O\xi\eta\zeta$  равны:

$$\left. \begin{aligned} W_{\xi} &= -R(\dot{\omega}_{\zeta} - \omega_{\xi}\omega_{\eta}) - 2\dot{R}\omega_{\zeta}, \\ W_{\eta} &= \ddot{R} - R(\omega_{\xi}^2 + \omega_{\zeta}^2), \\ W_{\zeta} &= R(\dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\eta}\omega_{\zeta}) + 2\dot{R}\omega_{\xi}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 4})$$

где точками обозначено дифференцирование по времени, а через  $\omega_{\xi}$ ,  $\omega_{\eta}$ ,  $\omega_{\zeta}$  обозначены проекции абсолютной угловой скорости трехгранника  $O\xi\eta\zeta$  на его оси.

Если считать поле тяготения Земли центральным, то  $g_{\xi} = g_{\zeta} = 0$ ,  $g_{\eta} = -g$ . Теперь из таблицы (III. 2), соотношений (III. 3), (III. 4) и определения углов  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$  получим, пренебрегая членами второго порядка малости:

$$a_{\zeta_*} = -W_{\xi}\beta_* - (W_{\eta} + g)(\Delta z - \alpha_*) - W_{\zeta} + \Delta a_{\zeta_*}. \quad (\text{III. 5})$$

Чтобы определить  $a_{\zeta_0}^0$  ( $= a_{\zeta_0}$ ), надо положить еще  $\alpha_* = 0$ ,  $\beta_* = 0$ ,  $\Delta z = 0$ . Тогда  $a_{\zeta_0}^0 = -W_{\zeta_0}$ .

Для формирования  $W_{\zeta_0}^0$  необходимо, как это следует из третьей формулы (III. 4), знать  $R$ ,  $\dot{R}$  и проекции  $\omega_{\xi_0}$ ,  $\omega_{\eta_0}$ ,  $\omega_{\zeta_0}$  абсолютной угловой скорости вращения трехгранника  $\xi^0\eta^0\zeta^0$  на его оси. Эти проекции суть функции  $S$ ,  $\dot{S}$  и времени  $t$ . В нашем распоряжении имеются, однако, лишь  $\omega_{\xi'}$ ,  $\omega_{\eta'}$ ,  $\omega_{\zeta'}$ , являющиеся функциями  $S'$ ,  $\dot{S}'$  и  $t$ , а вместо  $R$

и  $\dot{R}$  известны лишь величины  $R + \Delta R$ ,  $\dot{R} + \Delta \dot{R}$ . Поэтому значение  $a_{\xi_0}^0$  может быть сформировано в виде

$$a_{\xi_0}^0 = -W_{\xi_0} = -(R + \Delta R)(\dot{\omega}_{\xi'} + \omega_{\eta}\omega_{\xi'}) - 2\omega_{\xi'}(\dot{R} + \Delta \dot{R}). \quad (\text{III. 6})$$

Теперь из формул (III. 5), (III. 6) и соотношения, аналогичного (III. 1), получим:

$$\delta a_{\xi_*} = -W_{\xi}\beta_* - (W_{\eta} + g)(\Delta z - \alpha_*) - W_{\xi} + \Delta a_{\xi} + W_{\xi_0}. \quad (\text{III. 7})$$

Преобразуем правую часть равенства (III. 7), подставив в него вместо  $\omega_{\xi'}$ ,  $\omega_{\eta'}$ ,  $\omega_{\xi'}$  их выражения через  $\omega_{\xi}$ ,  $\omega_{\eta}$ ,  $\omega_{\xi}$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta \dot{z}$ ,  $\Delta \dot{x}$ . В соответствии с таблицей (III. 2) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\xi'} &= \omega_{\xi} - \omega_{\eta} \Delta x - \Delta \dot{z}, & \omega_{\eta'} &= \omega_{\xi} \Delta x + \omega_{\eta} - \omega_{\xi} \Delta z, \\ \omega_{\xi'} &= \omega_{\eta} \Delta z + \omega_{\xi} - \Delta \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 8})$$

Вводя (III. 8) в (III. 7), заменяя одновременно  $W_{\xi}$ ,  $W_{\eta}$ ,  $W_{\xi}$  согласно формулам (III. 4) и полагая  $x = R \Delta x$ ,  $z = R \Delta z$ , находим:

$$\begin{aligned} \delta a_{\xi_*} &= \ddot{z} - (g/R - \omega_{\xi}^2 - \omega_{\eta}^2)z - x(\dot{\omega}_{\eta} - \omega_{\xi}\omega_{\xi}) - 2\omega_{\eta}\dot{x} + \\ &+ \Delta R(\dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\eta}\omega_{\xi}) + 2\omega_{\xi}\Delta \dot{R} + \alpha_*[g + \ddot{R} - R(\omega_{\xi}^2 + \omega_{\xi}^2)] + \\ &+ \beta_*[R(\dot{\omega}_{\xi} - \omega_{\xi}\omega_{\eta}) + 2\dot{R}\omega_{\eta}] + \Delta a_{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{III. 9})$$

Сигнал ньютонометра  $\delta a_{\xi_*}$  используется, как было указано, для управления движением объекта. Если обеспечена устойчивость процесса управления и если при этом сигнал  $\delta a_{\xi_*}$  подается на управление с достаточно большим коэффициентом усиления, то можно принять, что движение объекта описывается уравнением  $\delta a_{\xi_*} = 0$ , или

$$\ddot{z} + (g/R - \omega_{\xi}^2 - \omega_{\eta}^2)z = f_{\xi}(\Delta R, \Delta \dot{R}, x, \dot{x}, \alpha_*, \beta_*, \Delta a_{\xi}), \quad (\text{III. 10})$$

где  $f_{\xi}$  — однородная функция первой степени своих аргументов.

Пусть пока  $\Delta R$ ,  $\Delta \dot{R}$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\alpha_*$ ,  $\beta_*$ ,  $\Delta a_{\xi}$ , а с ними и функция  $f_{\xi}$  пренебрежимо малы. Тогда из (III. 3)

$$\ddot{z} + (g/R - \omega_{\xi}^2 - \omega_{\eta}^2)z = 0, \quad (\text{III. 11})$$



При  $\omega_\xi^2, \omega_\eta^2 \ll \omega_0^2 = g/R$ , когда влиянием  $\omega_\xi, \omega_\eta$  можно пренебречь, движение объекта по координате  $z$  будет представлять собой периодические колебания шулеровской частоты с амплитудой, определяемой начальными значениями координаты  $z$  объекта и скорости ее изменения.

До сих пор предполагалось, что по продольной координате  $S$  объект не управляется. Величина же  $S$  (с погрешностью  $\Delta x$ ) известна. Можно представить себе схему, в которой и по координате  $S$  объект управляется по сигналу ньютонометра (например, путем управления тягой двигателя).

Если программным значением координаты  $S$  считать величину  $S'$ , то ньютонометр должен быть установлен вдоль оси  $\xi'$ . Для величины  $\delta a_{\xi*}$  аналогично (III. 2) можно получить тогда выражение

$$\begin{aligned} \delta a_{\xi*} = & \ddot{x} + (g/R - \omega_\eta^2 - \omega_\xi^2)x - z(\dot{\omega}_\eta + \omega_\xi\omega_\xi) - \\ & - 2\omega_\eta\dot{z} - 2\omega_\xi\Delta\dot{R} - \Delta R(\dot{\omega}_\xi - \omega_\xi\omega_\eta) - \\ & - \gamma_*[g + \ddot{R} - R(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)] + \delta_*[R(\dot{\omega}_\xi - \omega_\xi\omega_\eta) + 2\dot{R}\omega_\xi] + \Delta a_{\xi*}, \end{aligned}$$

где теперь величина  $x/R$  — отклонение фактического значения координаты  $S$  объекта от ее программного значения  $S'$ , а углы  $\gamma_*$  и  $\delta_*$  — инструментальные погрешности ориентации оси ньютонометра  $a_\xi$ , аналогичные углам  $\alpha_*, \beta_*$ . В этом случае при устойчивом и достаточно жестком управлении движение по координате  $S$  будет описываться уравнением  $\delta a_{\xi*} = 0$ . Вместе с уравнением  $\delta a_{\zeta*} = 0$  это приводит к системе:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + (\omega_0^2 - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2)x - z(\dot{\omega}_\eta + \omega_\xi\omega_\xi) - 2\omega_\eta\dot{z} = \\ = 2\omega_\xi\Delta\dot{R} + \Delta R(\dot{\omega}_\xi - \omega_\xi\omega_\eta) + \\ + \gamma_*[g + \ddot{R} - R(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)] - \\ - \delta_*[R(\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta\omega_\xi) + 2\dot{R}\omega_\xi] + \Delta a_{\xi*}, \\ \ddot{z} + (\omega_0^2 - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2)z + x(\dot{\omega}_\eta - \omega_\xi\omega_\xi) + 2\omega_\eta\dot{x} = \\ = 2\omega_\xi\Delta\dot{R} + \Delta R(\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta\omega_\xi) + \\ + \alpha_*[g + \ddot{R} - R(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2)] + \\ + \beta_*[R(\dot{\omega}_\xi - \omega_\xi\omega_\eta) + 2\dot{R}\omega_\eta] + \Delta a_{\zeta*}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 12})$$

Эта система описывает отклонение движения центра масс объекта от программного. Если ньютонометры  $a_{\xi}$ ,  $a_{\zeta}$  установлены на одной и той же платформе, то  $\beta_* = \delta_*$  и система (III. 12) полностью совпадает с уравнениями ошибок определения координат инерциальной системой с двумя ньютонометрами.

Следует заметить, что можно поставить по оси  $\eta'$  третий ньютонометр и управлять с его помощью движением объекта также и по координате  $R$ . Тогда в тех же предположениях система уравнений  $\delta a_{\xi_*} = 0$ ,  $\delta a_{\zeta_*} = 0$ ,  $\delta a_{\eta_*} = 0$  полностью совпадает с уравнениями ошибок автономной инерциальной системы с тремя ньютонометрами.

Возможен случай, когда по одной из двух координат ( $\Delta z$  или  $S$ ) объект не управляется непосредственно по сигналам ньютонометров, а определение соответствующих координат производится при помощи инерциальной системы. Тогда совместная система уравнений ошибок управления объектом и ошибок инерциальной системы будет иметь вид (III. 12). Аналогичным образом обстоит дело и для трех координат:  $\Delta z$ ,  $S$ ,  $R$ .

Уравнения (III. 12) инвариантны относительно поворота трехгранника  $O\xi\eta\zeta$  вокруг оси  $\eta$ . Из этого следует, что принятое выше ограничивающее предположение о том, что программная траектория лежит в неизменно ориентированной относительно Земли плоскости, не является существенным. Однако для упрощения дальнейшего изложения целесообразно сохранить принятый ранее способ задания программы.

Результаты, изложенные выше, получены в предположении, что осуществлен устойчивый и достаточно эффективный (жесткий) процесс управления объектом по сигналу ньютонометра. Возможность осуществления такого процесса не очевидна. Чтобы убедиться в такого рода возможности, надо рассмотреть движение управляемого объекта. Проведем это рассмотрение на примере летательного аппарата типа самолета.

Составим уравнения движения объекта.

Уравнение сил в проекции на ось  $O\xi^0$  имеет вид:

$$m(W_{\xi^0} - g_{\xi^0}) = F_{\xi^0}^1, \quad (\text{III. 13})$$

где  $m = \text{const}$  — масса объекта,  $W_{\xi^0}$  — проекция абсолютного ускорения центра масс объекта,  $mg_{\xi^0}$  — проекция силы

тяготения,  $F_{\xi_0}^1$  — проекция аэродинамических сил и силы тяги двигателя.

Выражение для разности  $W_{\xi_0} - g_{\xi_0}$  может быть получено из соотношений (III. 5), (III. 4), если в соотношении (III. 5) изменить на противоположный знак правой части и положить  $\alpha_* = \beta_* = \Delta\alpha_{\xi} = 0$ .

Определим  $F_{\xi_0}^1$ . Пусть  $V$  — скорость объекта относительно Земли,  $V^*$  — воздушная скорость объекта,  $v$  — скорость ветра в точке  $O$ . Тогда

$$V^* = V - v, \quad V_{\xi_0} = R \Delta \dot{z}. \quad (\text{III. 14})$$

Обозначим через  $Ox^*y^*z^*$  систему координат, полученную из системы  $O\xi\eta\zeta$  двумя поворотами: на угол  $\psi_0$  вокруг оси  $\eta$  и на угол  $\theta_0$  вокруг оси  $z^*$  до совпадения оси  $x^*$  с вектором  $V^*$ . Полагая  $V_{\xi}^*, V_{\eta}^* \ll V^*$ , имеем:

$$\psi_0 = -V_{\xi}^*/V^*, \quad \theta_0 = V_{\eta}^*/V^*. \quad (\text{III. 15})$$

Введем связанный с объектом правый ортогональный трехгранник  $Oxyz$ , ось  $x$  которого параллельна хорде крыла и ориентирована по направлению полета, ось  $y$  лежит в плоскости симметрии объекта, а ось  $z$  направлена вдоль по размаху правого крыла. Полагая отклонение трехгранника  $Oxyz$  от трехгранника  $Ox^*y^*z^*$  малым, зададим положение первого по отношению ко второму тремя малыми поворотами: на углы  $\gamma_0, \beta$  вокруг осей  $x^*, y^*$  (это положение называется обычно полусвязанной системой координат) и на угол  $\alpha$  вокруг оси  $z^*$ . Углы  $\alpha, \beta$  — суть углы атаки и скольжения.

Аэродинамические силы задаются обычно\*) в осях полусвязанной системы координат проекциями:  $X$  — лобовое сопротивление,  $Y$  — подъемная сила,  $Z$  — боковая сила. Силу тяги двигателя  $P$  будем считать расположенной в плоскости симметрии объекта под некоторым малым углом  $\varphi$  к оси  $x$ .

Теперь с точностью до величины второго порядка малости по  $\psi_0, \theta_0, \alpha, \beta, \gamma_0, \varphi, \Delta z$  имеем:

$$F_{\xi_0}^1 = (P - X)(-\psi_0 - \beta) + Y(\gamma_0 + \Delta z) + Z. \quad (\text{III. 16})$$

Величина  $Z$  представляется в виде

$$Z = m(C_z^{\beta}\beta + C_z^{\delta_x}\delta_x + C_z^{\delta_y}\delta_y) + m\Delta f_z. \quad (\text{III. 17})$$

\*) См., например, Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С., динамика полета, Оборонгиз, 1962.

Здесь  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  — малые углы отклонения элеронов, рулей высоты и рулей направления,  $C_z^\beta$ ,  $C_z^{\delta_x}$ ,  $C_z^{\delta_y}$  — аэродинамические коэффициенты,  $m$  — масса объекта,  $m \Delta f_z$  — некоторая возмущающая сила.

Для маршевого участка полета, когда разность  $P - X$  мала, первым слагаемым правой части (III. 16) можно пренебречь; можно считать также  $R = \text{const}$  и  $Y = mg$ . Уравнение (III. 13) с учетом соотношений (III. 16), (III. 17) принимает вид:

$$W_{\xi_0} - g_{\xi_0} = g(\gamma_0 + \Delta z) + C_z^\beta \beta + C_z^{\delta_x} \delta_x + C_z^{\delta_y} \delta_y + \Delta f_z. \quad (\text{III. 18})$$

Составим уравнения угловых движений объекта около центра масс, необходимые для определения величины  $\beta$ , входящей в уравнение (III. 18). Положение связанного с объектом трехгранника  $Oxyz$  определим по отношению к трехграннику  $O\xi\eta\zeta$  малыми поворотами вокруг осей  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  на углы: рыскания  $\psi$ , тангажа  $\vartheta$  и крена  $\gamma$ . Тогда с точностью до величин второго порядка малости

$$\psi_0 - \psi = -\beta, \quad \gamma_0 = \gamma. \quad (\text{III. 19})$$

Нас интересует главным образом движение центра масс объекта. Так как частоты колебаний, соответствующие этому движению, существенно меньше частот колебаний, характеризующих процесс угловой стабилизации объекта, то при изучении низкочастотных движений центра масс объекта уравнения движения объекта вокруг центра масс можно записать в виде  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$ ,  $M_z = 0$ , где  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  — проекции момента внешних сил на оси трехгранника  $Oxyz$ .

В силу аэродинамической симметрии объекта при малых значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$  моменты  $M_x$ ,  $M_y$  не зависят от  $\alpha$ ,  $\delta_z$ . Поэтому с точностью до величин второго порядка малости из  $M_x = 0$ ,  $M_y = 0$  следует\*):

$$\left. \begin{aligned} M_x^\beta \beta + M_x^{\delta_x} \delta_x + M_x^{\delta_y} \delta_y + \Delta M_x &= 0, \\ M_y^\beta \beta + M_y^{\delta_x} \delta_x + M_y^{\delta_y} \delta_y + \Delta M_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 20})$$

где  $M_x^\beta$ ,  $M_y^\beta$ ,  $M_x^{\delta_x}$ ,  $M_y^{\delta_x}$ ,  $M_x^{\delta_y}$ ,  $M_y^{\delta_y}$  — аэродинамические коэффициенты моментов,  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$  — возмущающие моменты.

\*) См., например, книгу, указанную в сноске на стр. 634.

Чтобы закончить составление уравнений движения объекта, необходимо задать законы формирования отклонений рулей. Их можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= n_0(\gamma + \Delta z - \alpha_*), \quad \delta_y = m_0(\psi - \beta_*) + k_0 u, \\ L(u) &= N(\delta a_{\zeta_*}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 21})$$

Здесь  $n_0, m_0, k_0$  — коэффициенты настройки системы управления. Величины  $\psi - \beta_*, \gamma + \Delta z - \alpha_*$  суть сигналы угловой стабилизации, снимаемые с осей карданова подвеса гироскопической платформы, реализующей трехгранник  $O\xi'\eta'\zeta'$ .

Последнее уравнение (III. 21) описывает работу устройства преобразования показаний ньютонометра. Величина  $u$  — выходной сигнал этого устройства. Через  $L$  и  $N$  обозначены некоторые пока произвольные операторы, удовлетворяющие условию

$$L(0) = N(0), \quad \text{или} \quad u(\delta a_{\zeta_*} = 0) = 0. \quad (\text{III. 22})$$

Подставив в уравнение (III. 18) выражение  $W_{\zeta_0} - g_{\zeta_0}$  из равенств (III. 5), (III. 4) и присоединив к полученному соотношению уравнения (III. 14), (III. 15), (III. 19) — (III. 21), (III. 9), получим систему уравнений, описывающих управляемое движение объекта:

$$\left. \begin{aligned} &[\ddot{R} - R(\omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2) + g]\Delta z + R(\dot{\omega}_\xi + \dot{\omega}_\eta \omega_\zeta) + 2\dot{R}\omega_\xi = \\ &= g(\gamma + \Delta z) + C_z^\beta \beta + C_z^{\delta x} \delta_x + C_z^{\delta y} \delta_y + \Delta f_z, \\ &\delta_x = n_0(\gamma + \Delta z - \alpha_*), \quad \delta_y = m_0(\psi - \beta_*) + k_0 u, \\ &L(u) = N(\delta a_{\zeta_*}), \\ &M_x^\beta \beta + M_x^{\delta x} \delta_x + M_x^{\delta y} \delta_y + \Delta M_x = 0, \\ &M_y^\beta \beta + M_y^{\delta x} \delta_x + M_y^{\delta y} \delta_y + \Delta M_y = 0, \\ &\delta a_{\zeta_*} = -\ddot{z} - (g/R - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2)z - x(\dot{\omega}_\eta - \omega_\xi \omega_\zeta) - \\ &\quad - 2\omega_\eta \dot{x} + \Delta R(\dot{\omega}_\xi + \omega_\eta \omega_\zeta) + 2\Delta \dot{R}\omega_\xi + \\ &\quad + \alpha_*[g + \ddot{R} - R(\omega_\xi^2 + \omega_\zeta^2)] + \\ &\quad + \beta_*[R(\dot{\omega}_\zeta - \omega_\xi \omega_\eta) + 2\dot{R}\omega_\eta] + \Delta a_\zeta, \\ &\psi_0 = -(R\Delta \dot{z} - v_\zeta)/V^*, \quad \psi_0 - \psi = -\beta, \quad z = R\Delta z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 23})$$

Получим из этих уравнений систему уравнений в вариациях, описывающих движение около невозмущенного программного, определяемого условиями:

$$u = \Delta z = z \equiv 0, \quad \Delta R = x = 0, \quad \beta_* = \alpha_* = \Delta a_{\zeta} = 0, \\ \Delta f_z = \Delta M_x = \Delta M_y = v_{\zeta} = 0.$$

Для невозмущенного движения

$$\left. \begin{aligned} R(\dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\eta}\omega_{\zeta}) + 2\dot{R}\omega_{\xi} &= g\gamma + C_z^{\beta}\beta + C_z^{\delta x}\delta_x + C_z^{\delta y}\delta_y, \\ \delta_x &= n_0\gamma, \quad \delta_y = m_0\psi, \quad \psi = \beta, \\ M_x^{\beta}\beta + M_x^{\delta x}\delta_x + M_x^{\delta y}\delta_y &= 0, \\ M_y^{\beta}\beta + M_y^{\delta x}\delta_x + M_y^{\delta y}\delta_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 24})$$

Сохраним за отклонениями (вариациями) переменных  $\gamma$ ,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\beta$ ,  $\psi$  от значений, определяемых системой (III. 24), обозначения самих переменных. Тогда из соотношений (III. 23), (III. 24) получаются следующие уравнения в вариациях:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\zeta} - C_z^{\beta}\beta - C_z^{\delta x}\delta_x - C_z^{\delta y}\delta_y - g(\gamma + \Delta z) &= \Delta f_z, \\ M_x^{\beta}\beta + M_x^{\delta x}\delta_x + M_x^{\delta y}\delta_y &= -\Delta M_x, \\ M_y^{\beta}\beta + M_y^{\delta x}\delta_x + M_y^{\delta y}\delta_y &= -\Delta M_y, \\ \delta_x - n_0(\gamma + \Delta z) &= -n_0\alpha_*, \quad \delta_y - m_0\psi - k_0u = -m_0\beta_*, \\ L(u) - N(\delta a_{\zeta_*}) &= 0, \quad \delta a_{\zeta_*} + \varepsilon_{\zeta} = f_{\zeta}, \\ \varepsilon_{\zeta} - \ddot{z} - (\omega_0^2 - \omega_{\xi}^2 - \omega_{\eta}^2)z &= 0 \quad (\omega_0^2 = g/R), \\ z &= R\Delta z, \\ \psi - \beta + \frac{R\dot{\Delta z}}{V} &= \frac{v_{\zeta}}{V} \quad (V = V^* = \text{const}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 25})$$

Здесь, как и в равенстве (III. 10),

$$f_{\zeta} = -x(\dot{\omega}_{\eta} - \omega_{\xi}\omega_{\zeta}) - 2\omega_{\eta}\dot{x} + \Delta R(\dot{\omega}_{\xi} + \omega_{\eta}\omega_{\zeta}) + \\ + 2\Delta\dot{R}\omega_{\xi} + \alpha_*[g + \ddot{R} - R(\omega_{\xi}^2 + \omega_{\eta}^2)] + \\ + \beta_*[R(\dot{\omega}_{\zeta} - \omega_{\xi}\omega_{\eta}) + 2\dot{R}\omega_{\eta}].$$

Исследуем систему уравнений (III. 25).

Положим вначале, что объект статически устойчив по курсу. Это позволит принять пока  $m_0 = 0$ . Тогда первые семь уравнений (III. 25) решаются независимо от последних трех.

Если считать в первых семи уравнениях (III. 25) правые части равными нулю, что означает отсутствие других возмущений, кроме ветра, то эти уравнения будут удовлетворяться частным решением  $\varepsilon_\zeta = \beta = \delta_x = \delta_y = u = \delta a_{\zeta x} = \gamma + \Delta z = 0$ . С учетом этого три последних уравнения (III. 25) дают:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + (\omega_0^2 - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2) z &= 0, \\ z &= R \Delta z, \\ \psi &= (-R \Delta \dot{z} + v_\zeta)/V. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 26})$$

Первое равенство (III. 26) совпадает с равенством (III. 11), полученным ранее.

Следует отметить, что равенство (III. 11) было получено в предположении достаточно большой жесткости управления. Теперь видно, что этот результат получается (если возмущения отсутствуют) и при произвольной жесткости управления. При этом оказывается, что объект по координате  $z$  не возмущается ветром.

Следует далее подчеркнуть, что эти результаты получены для произвольных операторов  $L$ ,  $N$ , в том числе и нелинейных.

Единственное требование, которому должны удовлетворять эти операторы, — удовлетворение условию (III. 22).

Для дальнейшего удобно, исключив из системы (III. 25) переменные  $\gamma + \Delta z$ ,  $\beta$ ,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\varepsilon_\zeta$ ,  $\delta a_{\zeta x}$ , привести ее к виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} + (\omega_0^2 - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2) z &= -\mu \dot{k}_0 u, \\ L(u) &= N[-\ddot{z} - (\omega_0^2 - \omega_\xi^2 - \omega_\eta^2) z]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 27})$$

При получении уравнений (III. 27) предполагалось, как и ранее, что в системе отсутствуют возмущения, кроме ветра. Коэффициент  $\mu$  в первом уравнении (III. 27) зависит лишь от параметров объекта. Его явное выражение в дальнейшем не понадобится и поэтому здесь не выписывается.

Если операторы  $L$  и  $N$  суть полиномы от оператора  $p$  дифференцирования, а  $\omega_\xi^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\omega_\eta^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\mu k_0 = \text{const}$ , то можно исследовать характер зависимости общего решения уравнений (III. 27) от вида операторов  $L$ ,  $N$ . Тогда, если  $z(p)$  есть изображение решения  $z(t)$  по Карсону — Хевисайду, то

$$z(p) = \frac{L(p)(p^2 z_0 + p \dot{z}_0) - \mu k_0 Q(p, z_0, u_0, \dot{z}_0, \dot{u}_0, \dots)}{(p^2 + \omega_0^2)[L(p) - \mu k_0 N(p)]}, \quad (\text{III. 28})$$

где  $Q$  — линейная однородная функция начальных условий.

Скобка  $(p^2 + \omega_0^2)$  в знаменателе правой части равенства (III. 28) обуславливает присутствие в решении незатухающих колебаний шулеровской частоты. Одной из задач, которую можно пытаться решить подбором вида операторов  $L(p)$  и  $N(p)$ , является устранение этих колебаний. Проще всего это сделать, взяв

$$L(p) = p^2 + \omega_0^2, \quad N(p) = 1. \quad (\text{III. 29})$$

Тогда при  $\mu k_0 = \mu k_{01} \gg \omega_0^2$  получим:

$$z(p) = \frac{p^2 z_0 + p \dot{z}_0}{p^2 + \mu k_{01}} + \frac{\mu k_{01} p(z_0 - u_0) + p(\dot{z}_0 - \dot{u}_0)}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \mu k_{01})}. \quad (\text{III. 30})$$

Если

$$u_0 = z_0, \quad \dot{u}_0 = \dot{z}_0, \quad (\text{III. 31})$$

то

$$z(p) = \frac{p^2 z_0 + p \dot{z}_0}{p^2 + \mu k_{01}}. \quad (\text{III. 32})$$

Условия (III. 29), (III. 31) означают, что величина  $z$  находится по показаниям ньютонометра и начальным условиям точно, т. е. дело здесь сводится к управлению движением объекта обычной инерциальной системой. Заметим, что условие (III. 29) легко расширяется до условия вида

$$L(p) = (p^2 + \omega_0^2) \Lambda(p), \quad N(p) = -\Lambda(p),$$

где  $\Lambda(p)$  — произвольный оператор. При этом, однако, условия, аналогичные (III. 31), будут иметь более сложный вид.

Другой крайний по отношению к условиям (III. 29), (III. 31) случай

$$L(p) = 1, \quad N(p) = -1 \quad (\text{III. 33})$$



приводит к непосредственному управлению по сигналам ньютонометра. Тогда вне зависимости от величины  $k_0 = k_{02}$  из равенства (III. 28) получаем:

$$z(p) = \frac{p^2 z_0 + p \dot{z}_0}{p^2 + \omega_0^2}, \quad (\text{III. 34})$$

т. е.  $z(t)$  имеет тот же вид, что и полученный ранее в предположении бесконечно большого значения  $k_0$ .

Следует сказать, что выбор (III. 33) оставляет в стороне вопрос о фильтрации короткопериодических составляющих показаний ньютонометра. Последнее всегда может быть сделано, причем постоянные времени фильтра будут достаточно малыми, так что при рассмотрении длиннопериодических движений этими постоянными времени можно пренебречь.

Оценим влияние правых частей уравнений (III. 25). Из первых семи уравнений (III. 25) для  $L = 1$ ,  $N = -1$  получим  $(1 + \mu k_{02}) \delta a_{\xi} = \Phi$ , где  $\Phi$  является функцией  $\Delta f_z$ ,  $\Delta M_x$ ,  $\Delta M_y$ ,  $n_0 \alpha_*$ ,  $f_{\xi}$ , т. е. правых частей уравнений (III. 25). При  $\mu k_{02} \gg 1$  влиянием этой функции можно пренебречь.

Из предшествующего рассмотрения вытекало [это видно из соотношений (III. 30), (III. 34)] существование незатухающих колебаний. Можно ввести демпфирование в уравнения движения, если использовать для управления информацию о величине  $\dot{z}$ . Это получается, например, при  $m_0 \neq 0$ , ибо в силу последнего уравнения (III. 25) имеем:  $\psi = (-\dot{z} + v_{\xi})/V$ . Из системы уравнений (III. 25) при  $m_0 \neq 0$ ,  $L = p^2 + \omega_0^2$ ,  $N = -1$ ,  $\omega_{\xi}^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\omega_{\eta}^2 \ll \omega_0^2$ ,  $\mu k_{01} = \text{const}$  (причем  $\mu k_{01} \gg \omega_0^2$ ),  $\Phi = 0$  получим вместо равенства (III. 30):

$$z(p) = \frac{p^2 z_0 + p \dot{z}_0 + p \lambda_1 z_0 + \lambda_1 v_{\xi}}{p^2 + \lambda_1 p + \mu k_{01}} + \frac{\mu k_{01} [p^2 (z_0 - u_0) + p (\dot{z}_0 - \dot{u}_0)]}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \lambda_1 p + \mu k_{01})}. \quad (\text{III. 35})$$

Здесь при  $\mu k_{01} \gg \omega_0^2$  величина  $\lambda_1 = m_0 \mu / V$ .

Первому слагаемому правой части равенства (III. 35) соответствует затухающий переходный процесс. Второе слагаемое при  $z_0 \neq u_0$ ,  $\dot{z}_0 \neq \dot{u}_0$  определяет незатухающую составляющую решения. При  $z_0 = u_0$ ,  $\dot{z}_0 = \dot{u}_0$  эта составляющая решения

пропадает. Если  $v_{\xi} = \text{const}$ , то имеет место статическое отклонение  $z_1 = \lambda_1 v_{\xi} / \mu k_{01}$ .

Для случая  $L = 1$  и  $N = -1$ , полагая опять  $m_0 \neq 0$ ,  $\Phi = 0$ ;  $\omega_{\xi}^2, \omega_{\eta}^2 \ll \omega_0^2$ ;  $\mu k_{02} = \text{const}$  (причем  $\mu k_{02} \gg 1$ ), получаем вместо равенства (III. 30):

$$z(p) = \frac{p^2 z_0 + p \dot{z}_0 + p \lambda_2 z_0 + \lambda_2 v_{\xi}}{p^2 + \lambda_2 p + \omega_0^2}.$$

Здесь при  $\mu k_{02} \gg 1$  величина  $\lambda_2 = m_0 / k_{02} V$ . В этом случае свободные колебания в системе со временем затухают полностью, а статическое отклонение  $z_2 = \lambda_2 v_{\xi} / \omega_0^2$ . Легко видеть, что при  $k_{01} = \omega_0^2 k_0^2$  статические отклонения  $z_1, z_2$  равны друг другу, а  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ .

## Литература

1. Adams D. E., Introduction to Inertial Navigation, Journal Institute of Navigation (London), 9, № 03, 1956.
2. Андреев В. Д., Интегрирование уравнений ошибок системы инерциальной навигации для кеплеровых движений объекта, Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 2, 1965.
3. Андреев В. Д., К определению оптимальных параметров систем индикации светящихся объектов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1963.
4. Андреев В. Д., К решению проблемы Стокса для уровенной поверхности, заданной в форме сфероида, Прикладная математика и механика, т. XXX, вып. 2, 1966.
5. Андреев В. Д., К теории инерциальных систем автономного определения координат движущегося объекта, Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. I, 1964.
6. Андреев В. Д., К теории маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей условиям Шулера, Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 6, 1965.
7. Андреев В. Д., Об общих уравнениях инерциальной навигации, Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 2, 1964.
8. Андреев В. Д., Об одном случае малых колебаний физического маятника с подвижной точкой опоры, Прикладная математика и механика, т. XXII, вып. 6, 1958.
9. Андреев В. Д., Об одном способе навигации с помощью гиropolукомпаса и доплеровского измерителя скорости, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 6, 1963.
10. Андреев В. Д., Об ошибках систем инерциальной навигации, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1964.
11. Андреев В. Д., Об уравнениях невозмущенной работы инерциальной системы, определяющей криволинейные координаты, Прикладная математика и механика, т. XXIX, вып. 5, 1965.
12. Андреев В. Д., Об уравнениях ошибок инерциальной системы, определяющей произвольные криволинейные координаты движущегося объекта, Изв. АН СССР, Механика, № 4, 1965.
13. Андреев В. Д., О второй группе ошибок систем инерциальной навигации, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1964.
14. Андреев В. Д., Прохождение полезного сигнала и сигнала фона через радиально-щелевые обтюраторы систем индикации светящихся объектов, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 3, 1963.

15. Андреев В. Д., Теория инерциальной навигации (автономные системы), изд-во «Наука», 1966.
16. Андреев В. Д., Девянин Е. А., Демьяновский А. П., К теории инерциальных систем, не содержащих гироскопических чувствительных элементов, Инженерный журнал, Механика твердого тела, № 1, 1966.
17. Андреев В. Д., Новожилов И. В., Об управлении движением объекта по показаниям ньютонометров, Инженерный журнал, Механика твердого тела, № 2, 1966.
18. Аппель П., Теоретическая механика, т. 1, 2, Физматгиз, 1960.
19. Агоуан G. F., Technical Spatial Filtering, Proceedings of the IRE, No 9, 1959.
20. Астафьев Г. П., Шебшаевич В. С., Юрков Ю. А., Радионавигационные устройства и системы, изд-во «Сов. радио», 1958.
21. Белецкий В. В., Движение искусственных спутников Земли относительно центра масс, в сб. «Искусственные спутники Земли», № 1, Изд-во АН СССР, 1958.
22. Блажко С. Н., Курс сферической астрономии, Гостехиздат, 1954.
23. Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В., Условия невозмущаемости корректируемого однороторного гиросkompаса, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 5, 1964.
24. Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В., Условия невозмущаемости однороторного гиросkompаса, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 3, 1964.
25. Боднер В. А., Овчаров В. Е., Селезнев В. П., О синтезе инвариантных демпфированных систем с произвольным периодом, ДАН СССР, т. 125, № 3, 1959.
26. Большаков И. А., Прохождение регулярных и случайных сигналов через фазовый детектор коммутационного типа, Вестник МГУ, № 6, 1958.
27. Buell H., Doppler, Inertial and Doppler Inertial Techniques, Journal of the Institute of Navigation (Washington), v. II, 03, 1964.
28. Булгаков Б. В., Колебания, Гостехиздат, 1954.
29. Булгаков Б. В., Прикладная теория гироскопов, Гостехиздат, 1955.
30. Булгаков Б. В., Ройтенберг Я. Н., К теории силовых гироскопических горизонтов, Изв. АН СССР, ОТН, вып. 3, 1948.
31. Buttweiler B., Optimum Modulation Characteristics for Amplitude—Modulated and Frequency—Modulated Infrared Systems, Journal of the Optical Society of America, IX, 51, № 9, 1961.
32. Винницкий А. С., Очерк основ радиолокации при непрерывном излучении радиоволн, изд-во «Сов. радио», 1961.
33. Geckeler I. W., Kreiselkompas und Schiffsmannöver, Ingenieur Archiv, t. IV, Heft 1—2, Berlin, 1933.
34. Geckeler I. W., Kreiselmechanik des Anschütz-Raumkompasses, Ingenieur Archiv, t. VI, Heft 4, Berlin, 1935.
35. Горенштейн И. А., Шульман И. А., Сафарян А. С., Инерциальная навигация, изд-во «Сов. радио», 1962.

36. Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, т. 2, ИЛ, 1952.
37. Граур А. В., Математическая картография, Изд-во ЛГУ им. Жданова, 1956.
38. Грушинский Н. П., Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.
39. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, Гостехиздат, 1933.
40. Данилин В. П., Гироскопические приборы, изд-во «Высшая школа», 1965.
41. Девянин Е. А., Об уравнениях систем автоматического сопровождения, Изд-во АН СССР, Техническая кибернетика, № 1, 1965.
42. Девянин Е. А., Демьяновский А. П., Определение ориентации и угловых скоростей спутника инерциальным методом, Инженерный журнал, Механика твердого тела, № 2, 1966; Девянин Е. А., Дополнение к указанной работе, там же, № 5, 1966.
43. Draper C. S., Wrigley W. and Grohe L. R., The Floating Ontegrating Gyro and its Application to Geometrical Stabilisation Problems in Moving Bases, Aeronautical Engineering Review, 15, № 6: 46, June 1956.
44. Draper C. S., Wrigley W. and Hovorka I., Inertial Guidance, Pergamon Press, New York, 1960.
45. Дубошин Г. Н., Небесная механика, Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
46. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
47. Жбанов Ю. К., К исследованию свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта, Прикладная математика и механика, т. XXIV, вып. 6, 1960.
48. Захарин М. И., К вопросу построения инерциальной системы навигации с платформой, неподвижной в инерциальном пространстве, Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 1, 1961.
49. Звездно-инерциальная система навигации для самолетов, Радиоэлектроника за рубежом, № 35, 1963.
50. Инерциальные системы управления, Сб. под ред. Д. Питмана, Воениздат, 1964.
51. Ишлинский А. Ю., К теории гироскопического компаса, Прикладная математика и механика, т. XX, вып. 4, 1956.
52. Ишлинский А. Ю., К теории гироскопического маятника, Прикладная математика и механика, т. XXI, вып. 1, 1957.
53. Ишлинский А. Ю., К теории сложных систем гироскопической стабилизации, Прикладная математика и механика, т. XXII, вып. 3, 1958.
54. Ишлинский А. Ю., Механика гироскопических систем, Изд-во АН СССР, 1963.
55. Ишлинский А. Ю., Об автономном определении местоположения движущегося объекта посредством пространственного гироскопического компаса, гироскопа, направления и интегрирующего устройства, Прикладная математика и механика, т. XXIII, вып. 1, 1959.

56. Ишлинский А. Ю., Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры, Прикладная математика и механика, т. XX, вып. 3, 1956.
57. Ишлинский А. Ю., Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений, Прикладная математика и механика, т. XXI, вып. 6, 1957.
58. Ишлинский А. Ю., Об уравнениях прецессионной теории гироскопов в форме уравнений движения изображающей точки в картинной плоскости, Прикладная математика и механика, т. XXIII, вып. 5, 1959.
59. Ишлинский А. Ю., Теория двухгироскопической вертикали, Прикладная математика и механика, т. XXI, вып. 2, 1957.
60. Климов Д. М., Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы, Прикладная математика и механика, т. XXVIII, вып. 3, 1964.
61. Кондратьев К. Я., Лучистая энергия Солнца, Гидрометеиздат, 1951.
62. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951.
63. Кошляков В. Н., К теории гироскопов, Прикладная математика и механика, т. XXIII, вып. 5, 1959.
64. Кошляков В. Н., Об устойчивости гироскопического компаса при наличии диссипативных сил, Прикладная математика и механика, т. XXVI, вып. 3, 1962.
65. Кошляков В. Н., О приводимости уравнений движения гироскопического компаса, Прикладная математика и механика, т. XXV, вып. 5, 1961.
66. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.
67. Крылов А. Н., Крутков Ю. Н., Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, Изд-во АН СССР, 1932.
68. Кудревич Б. И., Теория гироскопических приборов, Избранные труды, т. 1, Судпромгиз, 1963.
69. Кузнецов Д. С., Специальные функции, изд-во «Высшая школа», 1962.
70. Куликов К. А., Изменяемость широт и долгот, Физматгиз, 1962.
71. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С., Динамика полета, Оборонгиз, 1962.
72. Litton LN-3 navigation System, Interavia Air Letter, № 4787, 24/VII, 1961.
73. Лурье А. И., Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.
74. Лурье А. И., Свободное падение материальной точки в кабине спутника, Прикладная математика и механика, вып. 1, 1963.
75. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
76. Мак-Клур К. Л., Теория инерциальной навигации, изд-во «Наука», 1964.
77. Мак-Коннел А. Д., Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, перевод с английского под редакцией Г. В. Коренева, Физматгиз, 1963.

78. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948.
79. Меркин Д. Р., Гироскопические системы, Гостехиздат, 1956.
80. Меркин Д. Р., Об устойчивости движения гироскопа, Прикладная математика и механика, т. XXV, вып. 6, 1961.
81. Метелицын И. И., К вопросу о гироскопической стабилизации, ДАН СССР, т. XXXVI, № 1, 1952.
82. Михайлов А. А., Курс гравиметрии и теории фигуры Земли, Редбюро ГУГК при СНК СССР, 1939.
83. Николаи Е. Л., Гироскоп в кардановом подвесе, изд-во «Наука», 1964.
84. O'Donnell C. F., Inertial Navigation, Journal Franklin Institute, 266, № 4, Oktober 1958, 266, № 5, November 1958.
85. Клигер Л. И., Парусников Н. А., Об уравнениях малых колебаний шулеровской вертикали. Инженерный журнал, Механика твердого тела, № 5, 1966.
86. Погорелов Д. А., Теория кеплеровых движений летательных аппаратов, Физматгиз, 1961.
87. Привалов И. И., Аналитическая геометрия, Гостехиздат, 1952.
88. Проблемы инерциальной навигации, Сб. статей под редакцией Н. И. Борисова, ИЛ, 1961.
89. Пугачев В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Гостехиздат, 1957.
90. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, Гостехиздат, 1956.
91. Ривкин С. С., Теория гироскопических устройств, ч. 1, Судпромгиз, 1962; ч. 2, изд-во «Судостроение», 1964.
92. Риглей В., Вудбери Р., Говорка Дж., Инерциальная навигация, перевод с английского под редакцией Г. О. Фридлендера, ИЛ, 1958.
93. Ройтенберг Я. Н., Автоколебания гироскопических стабилизаторов, Прикладная математика и механика, т. XI, вып. 2, 1947.
94. Ройтенберг Я. Н., Гироскопы, изд-во «Наука», 1966.
95. Ройтенберг Я. Н., Многогироскопная вертикаль, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 1, 1946.
96. Ройтенберг Я. Н. Об ускоренном приведении гироскопического компаса в меридиан. Прикладная математика и механика, вып. 5, 1959.
97. Ройтенберг Я. Н., О приведении гироскопического компаса в меридиан во время разгона роторов гироскопов, Прикладная математика и механика, т. XXIV, вып. 1, 1960.
98. Румянцев В. В., Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе, Прикладная математика и механика, т. XXII, вып. 3, 4, 1958.
99. Рыжик И. М., Градштейн И. С., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.
100. Savant C. I., Howard R. C., Solloway C. B. and Savant C. A., Principles of Inertial Navigation, Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1961.
101. Slater I. M. and Duncan D. B., Inertial Navigation, Aeronautical Engineering Review, 15, № 1, January 1956.

102. Сломьянский Г. А. и Прядилов Ю. Н., Поплавковые гироскопы и их применение, Оборонгиз, 1958.
103. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 1, Гостехиздат, 1953.
104. Солодовников В. В., Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Гостехиздат, 1952.
105. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953.
106. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 2, 1937.
107. Суслов Т. К., Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944.
108. Толстов Г. П., Ряды Фурье, Гостехиздат, 1951.
109. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, ч. II, Физматгиз, 1963.
110. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б., Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1961.
111. Фридлендер Г. О., Инерциальные системы навигации, Физматгиз, 1961.
112. Hoch H., Das physikalische Pendel im radialsymmetrischen Erdgewichtskraftfeld, Zeitschrift für ang. Mathematik und Physik, Bd. 24, Heft 5/6, 1944.
113. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1955.
114. Schuler M., Die Störung von Pendel und Kreiselapparaten durch die Beschleunigung des Fahrzeuges, Physikalische Zeitschrift, t. 24, № 16, Leipzig, 1923.



*Виталий Дмитриевич Андреев*

Теория инерциальной навигации.  
Корректируемые системы

М., 1967 г., 648 стр. с илл.

Редактор *Ю. Г. Гуревич*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Н. В. Гераськина,*  
*О. А. Сигал*.

Сдано в набор 1/VII 1967г.

Подписано к печати 6/XI 1967 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>.

Физ. печ. л. 20,25. Условн. печ. л. 34,02. Уч.-изд.

л. 34,21. Тираж 5500 экз. Т-12590. Цена

книги 2 р. 36 к. Заказ № 779.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете Министров СССР,

Измайловский проспект, 29.

