ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Б. И. АРГУНОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО КУРСУ ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва—1961

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом пособии изложены лекции по основаниям геометрии, читанные студентам-математикам Смоленского педагогического института.

Несмотря на наличие хороших курсов оснований геометрии Н. В. Ефимова, В. И. Костина и других, студент-заочник нуждается в пособии, вполне отвечающем требованиям программы и отражающем особенности преподавания оснований геометрии в педагогическом институте (сравнительно с университетским преподаванием). Этим целям и должна служить данная книга.

Автор стремился, во-первых, к максимальной краткости и доступности изложения. Сравнительно с существующими учебниками больше внимания уделено вопросам методологии. Наконец, предприняты некоторые шаги к тому, чтобы связать курс оснований геометрии с непосредственными запросами школьного учителя математики.

В конце большинства глав приводятся материалы для семинарских и самостоятельных занятий студентов. Самостоятельное изучение этих материалов студентом-заочником позволит изучающему глубже вникнуть в область фактов, методов и идей, затронутых в основном курсе, сделает для него изучение курса оснований геометрии более живым и интересным. По этим материалам можно провести спецсеминар, можно предложить студентам курсовые работы.

При составлении этих лекций автор не ограничивал себя соображениями оригинальности и широко пользовался литературой, список которой приведен в конце книги, в первую очередь работами В. Ф. Кагана, Н. В. Ефимова, В. И. Костина и другими.

В соответствии с требованиями программы за основу изложения принята гильбертова система аксиом. Ради простоты аксиома непрерывности дается в форме Дедекинда. Аксиома параллельности сделана заключительной, чтобы отчетливее определить до этого содержание абсолютной геометрии. Сравнительно с системой Гильберта видоизменены определения отрезка и угла, допущены некоторые отступления от традиционного изложения при введении понятия площади многоугольника.

Устранению недочетов данной книги способствовали советы и замечания П. К. Рашевского, Н. Н. Шоластера, М. Я. Выгодского, преподавателей кафедры алгебры и геометрии Смоленского педагогического института, и некоторых других товарищей, которым автор выражает искреннюю благодарность.

Автор просит студентов и преподавателей — читателей этой книги — направлять свои замечания и пожелания по адресу: Смоленск, Педагогический институт, Б. И. Аргунову.

ВВЕДЕНИЕ

Придя в педагогический институт со знанием школьного курса геометрии, будущий учитель пополняет полученные в школе сведения по элементарной геометрии. Кроме того, его знакомят с основами «высшей» геометрии, связанной с привлечением разнообразных специальных методов геометрического исследования: метода координат в аналитической геометрии, метода бесконечно малых в дифференциальной геометрии, метода проекций в проективной и начертательной геометрии.

Изучая упомянутые геометрические дисциплины, студент педагогического института накапливает значительный запас фактических сведений по геометрии и разнообразных методов решения геометрических вопросов. В области некоторых специальных разделов геометрии студент педагогического института вплотную подходит к исследованиям нового времени (когда знакомится, например, с теоретико-групповыми принципами геометрии или со специальными вопросами теории поверхностей).

Курс оснований геометрии имеет целью завершить подготовку учителя в области э л е м е н т а р н о й геометрии. Здесь основные предложения элементарной геометрии пересматриваются в свете идей современной математической науки.

Современная геометрия — результат длительного исторического развития. На базе классической геометрии древних более двух тысяч лет продолжалась подготовка к коренной перестройке геометрических воззрений, которая завершилась в XIX—XX веках и которая связана в первую очередь с именем нашего великого соотечественника Н. И. Лобачевского, талантливого венгерского исследователя Я. Бояи и с именами Б. Римана, Д. Гильберта и других. Поэтому понять геометрию в ее современном виде можно только в связи с изучением истории ее развития.

Истоки геометрии относятся к глубокой древности, когда она была вызвана к жизни практическими потребностями в измерении площадей участков земли и объемов тел. Письменные памятники доказывают, что еще вавилоняне, а затем египтяне, китайцы, индусы располагали содержательными геометрическими сведениями за много тысячелетий до нашего времени. Сведения эти сводились, правда, к отдельным правилам, зачастую не объединенным общей идеей, господствовала индукция, геометрия переживала стадию «живого созерцания».

В VII веке до нашей эры геометрические знания проникают в Грецию. В условиях интенсивного развития экономики и культуры геометрические сведения, накопленные восточными народами, здесь чрезвычайно обогащаются. Появляется потребность в систематизации и обобщении геометрического материала. Обнаруживается сила логического метода, который часто приводит в геометрии к результату с бо́льшим успехом, нежели прямое наблюдение. В трудах многих поколений на основе постоянно накапливаемого опытного материала складываются постепенно основы дедуктивного построения геометрии. Основные, исходные положения геометрии постепенно кристаллизуются в форме определений и аксиом.

К VI веку до нашей эры складывается понятие о доказательстве теорем. К этому времени относятся работы Фалеса Милетского (625?—546), Анаксимандра (610?—546), Пифагора Самосского (580?—500).

К IV веку до нашей эры относится расцвет афинской «Академии» Платона (429?—348), к которой принадлежали Теэтет, Евдокс и Менехм.

К III веку до нашей эры человечество располагало уже систематическим изложением накопленных к этому времени геометрических сведений. Среди основоположников геометрической науки наиболее известно имя александрийского ученого Евклида. Его знаменитое сочинение «Начала» пережило десятки веков.

С дальнейшим ростом фактического содержания геометрии и совершенствованием методов геометрических исследований усиливался интерес к повышению уровня строгости геометрической науки, к изучению логических ее оснований. Начиная с XVII века все крупнейшие математики — Декарт, Лейбниц, Лагранж, Гаусс, Коши и другие — вносили свой вклад в эту область геометрических исследований.

В XIX веке длительный период развития геометрии с древнейших времен завершился великим открытием Н. И. Лобачевского, впервые установившего существование еще одной геометрии, во многом отличной от геометрии Евклида.

Первая основная задача изучения курса оснований геометрии состоит в том, чтобы познакомиться с эволюцией основных геометрических идей с древнейших времен до настоящего времени. Этим вопросам посвящена первая глава книги — «Исторический обзор».

История формирования основных геометрических понятий и методов исследования представляет извилистый путь, на котором постоянно чередуются и взаимодействуют эмпирическое и логическое начала. Процесс формирования геометрической науки отразил в себе противоречия различных общественных систем и философских учений.

Наиболее общие геометрические результаты, формулируемые в наше время в высокоабстрактной форме, сложились в результате постепенного, все более широкого обобщения и видоизменения представлений о свойствах протяженности физического пространства. На всех исторических этапах развития геометрии основным фактором были проблемы, выдвигаемые механикой, физикой и другими разделами естествознания, более непосредственно (чем математика) отражающими потребности практики. Поэтому рост фактического содержания геометрии часто опережал разработку логических ее проблем.

Но расширение геометрической науки не могло осуществляться вне зависимости от углубления в ее логические основы и от совершенствования методов исследования. В XIX веке наступила эпоха коренного пересмотра логических основ геометрии и методов геометрических умозаключений. После гениального открытия Лобачевского эта наука, незыблемая со времен Евклида, предстала в новом свете. Логические проблемы геометрии приобрели особую остроту.

Еще в трудах геометров древности зародилась наука об основаниях геометрии, но своим развитием она обязана главным образом новому времени, и в особенности двум последним векам.

В наше время основания геометрии развились в обширную науку, связанную не только непосредственно с вопросами геометрии, но также с вопросами логики и философии.

В процессе изучения элементарной геометрии в школе и в педагогическом институте будущий учитель уделяет максимум внимания фактическому материалу, редко задумываясь по-настоящему над вопросами логической структуры этой науки. В школе геометрия изучается как наука о свойствах протяженности тел, приближенно воспроизводящая материальный мир и во многом основанная на непосредственном наблюдении. При всей важности и ценности этой стороны дела геометрические знания не могут быть устойчивыми и полноценными, если геометрия воспринимается только как коллекция отдельных предложений. Даже от школьника необходимо требовать постепенного осмысливания связей между отдельными предложениями геометрии. Тем более важна такая работа сознания для преподавателя математики.

Творчески работающему учителю надо знать не только теоремы геометрии и их доказательства, но также отчетливо представлять их логические связи. Учителю часто бывает нужно взвесить, какие изменения в преподавании придется сделать, если опустить то или иное предложение или произвести ту или иную перестановку материала сравнительно с учебником. Очень важно для учителя также ориентироваться в степени строгости того или иного рассуждения, владеть самому строгими доказательствами даже в тех случаях, когда их по методическим соображениям нельзя изложить учащимся.

Что сказать любознательному ученику, если он спросит, как узнать, лежит ли данная точка внутри или вне данного многоугольника, или заинтересуется, можно ли доказать, что диагонали параллелограмма пересекаются? Такого рода вопросы могут часто вставать перед учителем. Уверенно ориентироваться в них можно только при глубокой теоретической подготовке.

Вторая основная задача курса оснований геометрии состоит в том, чтобы осмыслить элементарную геометрию в ее современном понимании, изучить логическую базу геометрии и логическую ее структуру глубже, чем это делается в школьном курсе или в институтском курсе элементарной геометрии.

Главными объектами изучения в курсе оснований геометрии являются аксиомы, важнейшие понятия и логическая структура элементарной геометрии. «Под основаниями геометрии разумеют дисциплину, имеющую своей целью установление тех посылок, из которых все предложения геометрии могут быть выведены чисто логическим путем, а также — выяснение тех путей, методов и средств, при помощи которых действительно может быть выполнено такое логическое построение геометрии» (В. Ф. Каган, [13]*).

Аксиомы евклидовой геометрии изложены в главе II. Некоторые общие вопросы аксиоматики рассматриваются в главе IV. Глава III посвящена аксиоматическому изложению теории измерения геометрических величин.

В курсе оснований геометрии изучаются некоторые геометрические системы, возникшие в новое время и отличные в своей основе от классической, «евклидовой» геометрии. Изучение таких «неевклидовых» геометрий имеет большую познавательную ценность, подготавливает более широкий взгляд на предмет и методы геометрии. В наши дни нельзя представить себе учителя математики, незнакомого с основами неевклидовой геометрии, так же как учителя физики, не имеющего представления, например, о теории относительности.

Изучение элементов неевклидовой геометрии составляет третью основную задачу курса оснований геометрии. Основы геометрии Лобачевского изложены в главе V. В заключении дается общее представление о развитии неевклидовой геометрии после Лобачевского и о месте неевклидовой геометрии в современном естествознании.

Учение об основаниях геометрии содержит много идей общематематического, логического и философского характера и поэтому особенно способствует математическому развитию и расширению умственного кругозора. В процессе изучения оснований геометрии вырабатывается критическое отношение к математическим суждениям, приобретается самостоятельность и совершенствуется логичность мышления.

---

* Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках означают ссылку на книгу из списка литературы, помещенного на стр. 188, 189.

ГЛАВА I

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

§ 1. «Начала» Евклида

Евклид (питомец школы Платона), живший в Александрии примерно между 330 и 275 гг. до нашей эры, подвел итог многовековым математическим исследованиям предшественников и изложил основы современной математики в знаменитой работе, известной под названием «Начала».

С этим замечательным сочинением [22] следует познакомиться каждому, кто избрал своей специальностью математику, а тем более преподавателю математики.

Ради первой ориентации можно заметить, что основное содержание и характер геометрических глав этого сочинения соответствуют хорошо знакомым нам школьным учебникам геометрии, которые представляют более или менее переработанное в методических целях изложение евклидовых «Начал».

«Начала» состоят из тринадцати книг. Первые шесть книг посвящены вопросам планиметрии. Особенно замечательной является пятая книга, где излагается геометрическая теория пропорций, на основе которой Евклид развивает в шестой книге учение о подобных фигурах без употребления неизвестных в то время иррациональных чисел.

Книги седьмая—девятая содержат основы учения о целом числе, которые излагаются также в своеобразной геометрической форме: алгорифм отыскания наибольшего общего делителя, теорему о бесконечности множества простых чисел, теорию непрерывных пропорций и другие важные предложения. В десятой книге излагается теория иррациональных величин, дается геометрическое истолкование употребительных квадраторадикальных выражений. Последние три книги охватывают основные предложения стереометрии.

Обращает на себя внимание одна особенность содержания «Начал» Евклида: отсутствие каких-либо сведений о возможности практических приложений излагаемой теории. Даже при изучении длин, площадей и объемов Евклид ограничивается только теоремами об отношениях этих величин, но не входит в рассмотрение значений этих величин.

Для наших целей наибольший интерес представляет оценка логической структуры сочинения Евклида, к чему мы и перейдем.

Основная идея «Начал» состоит в том, чтобы изложить геометрию в дедуктивной форме, т. е. в виде цепи последовательных логических умозаключений, исходящих из небольшого числа наперед принятых предложений. Эти основные недоказуемые предложения Евклид излагает в форме определений, аксиом и постулатов (требований), которые он предпосылает основному тексту своего сочинения*.

Определениями называются, как известно, предложения, в которых устанавливается смысл того или иного термина или понятия.

Большинство приводимых Евклидом определений знакомо нам по школьному курсу геометрии. Таковы определения прямого угла и перпендикуляра, тупого и острого угла, окружности, параллельных прямых и др. Но многие из определений Евклида звучат для нас очень своеобразно, так как в современном преподавании они не приняты. Таковы, например, определения:

1. Точка есть то, часть чего есть ничто.

2. Линия есть длина без ширины.

3. Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.

4. Граница есть то, что является окончечностью чего-либо.

Основные простейшие утверждения, которые принимаются без доказательства и служат отправным пунктом для дальнейших заключений, Евклид называет аксиомами или постулатами.

В «Началах» приводится девять аксиом, преимущественно общематематического характера:

1. Равные одному и тому же равны между собой.

2. Если к равным прибавляются равные, то и суммы будут равны.

Другие аксиомы такого же рода.

Геометрический характер носят только две аксиомы:

7. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.

9. Две прямые не содержат пространства**.

Сверх девяти аксиом Евклид приводит еще пять постулатов (требований), имеющих чисто геометрическое содержание и особенно важных для наших целей. Постулаты эти следующие:

1. *От всякой точки до всякой другой точки можно провести прямую линию.*

---

* Помимо 23 важнейших определений, которыми Евклид начинает свое сочинение, он вводит в дальнейшем еще некоторые определения.

** Т. е. две прямые не могут встретиться дважды и, таким образом, ограничить некоторую часть плоскости.

2. *Отрезок прямой можно неограниченно продолжить.*

3. *Из всякого центра можно описать окружность любым радиусом.*

4. *Все прямые углы равны между собой.*

5. *Если при пересечении двух прямых, лежащих в одной плоскости, третьей сумма двух внутренних односторонних углов не равна удвоенному прямому углу* ($\alpha + \beta \neq 2d$), *то данные две прямые пересекаются* (рис. 1)*.

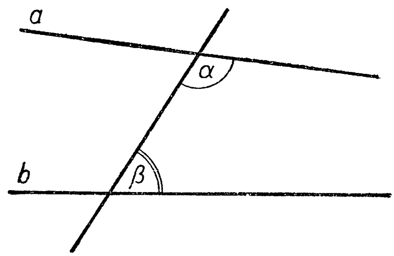


Рис. 1.

Евклиду не удалось в полной мере осуществить замысел строго дедуктивного изложения геометрии. С первых же шагов и много раз впоследствии он, помимо аксиом и их логических следствий, использует также интуицию, т. е. соображения наглядности. Такой характер изложения является, по-видимому, единственно возможным в условиях школьного преподавания и находит широкое распространение в преподавании по настоящее время. Но такое изложение нельзя, конечно, назвать дедуктивным. Чтобы иллюстрировать эту особенность евклидовых «Начал», обратимся, например, к первому предложению, непосредственно следующему у Евклида за аксиомами; оно должно опираться только на определения и аксиомы, никаких предшествующих предложений нет, так что логическая структура этого рассуждения особенно прозрачна. Требуется построить на данном отрезке AB равносторонний треугольник ABC. Приводится следующее решение этой задачи (рис. 2):

1. Провести окружность O_1 (A, AB)**.
2. Провести окружность O_2 (B, BA).
3. Точку C пересечения окружностей O_1 и O_2 соединить с точками A и B. Треугольник ABC— искомый.

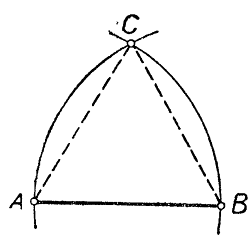


Рис. 2.

Точно так же поступают обычно в практике школьного преподавания и в настоящее время. Насколько строгим является это рассуждение? Построения 1) и 2) обеспечиваются третьим постулатом. Но существование точки C ниоткуда не вытекает и принимается, таким

* Ради ясности мы отказались от подлинного перевода Евклида. Кроме того, мы опустили обычно приводимую вторую часть заключения 5-го постулата («и именно с той стороны, где эта сумма меньше $2d$»), так как она является прямым следствием первой теоремы о внешнем угле (см. § 2).

** Т. е. окружность с центром A и радиусом AB.

образом, «на веру», из соображений наглядности. Уверенность в существовании этой точки связана с уверенностью в непрерывном строении окружности: если представить себе, что окружность имеет прерывистое, «пунктирное» строение, то существование точки C перестанет быть несомненным фактом даже с точки зрения непосредственной наглядности, перестанет быть «очевидным». С логической же стороны существование точки C аксиомами и постулатами Евклида не подготовлено: среди его аксиом и постулатов ничего не говорится не только о непрерывности окружности, но и вообще о понятии непрерывности*.

Приведенный пример показывает, что евклидова система аксиом недостаточна для строго логического обоснования даже некоторых простейших предложений геометрии. В частности, она не дает возможности ответить на вопросы, связанные с таким важным свойством фигур, как непрерывность.

Учение о равенстве фигур основано у Евклида на понятии движения: равенство треугольников доказывается у него путем «наложения» (как это делается часто и в современном школьном курсе геометрии). Но понятие движения не определяется, свойства его не раскрываются в аксиомах. Евклид молчаливо переносит это понятие в геометрию из механики. Не говоря уже о том, что геометрическое понятие движения существенно отличается от механического (как и от философского), такой подход к вопросу нарушает принцип дедуктивного построения геометрии.

В системе аксиом, принятой Евклидом, нетрудно обнаружить также многие другие пробелы. Например, у него нет аксиом, характеризующих такие отношения, как «между», «по одну сторону», «внутри» и т. п., которые играют в геометрии большую роль и для логического ее изложения требуют точного определения. Без этого чертеж, наглядность приобретают решающее значение, логика уступает место интуиции каждый раз, когда рассматриваются вопросы, связанные с порядком расположения точек на прямой, с разделением плоскости прямою, с определением внутренней или внешней области угла или многоугольника и т. п.**.

Недостаточность аксиом, принятых Евклидом для логического обоснования геометрии, представляет основной недостаток его сочинения с точки зрения дедуктивного метода. И не случайно, что другой великий математик и инженер древности Архимед (287—212 гг. до н. э.) в своем известном сочинении «О шаре и цилиндре» дополняет аксиомы Евклида еще пятью аксиомами. Из аксиом Архимеда для нас наиболее важны первая и пятая:

1. *Прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками.*

---

* Аксиоматическое определение непрерывности было найдено только в XIX веке.

** Аксиомы порядка были разработаны только в последней четверти XIX века, точную их формулировку впервые приводит М. Паш в своих «Лекциях по новой геометрии» (1882).

5. *Из двух неравных отрезков меньший при достаточном повторении превзойдет больший.*

Помимо неполноты системы аксиом, можно указать и на другие существенные логические недочеты сочинения Евклида.

Одним из самых слабых мест «Начал» являются определения. Определения, данные Евклидом, часто неэффективны: многими из них (см., например, приведенные выше определения 1, 2, 4) нельзя воспользоваться для дальнейших умозаключений, так как смысл их недостаточно ясен. В иных случаях (например, определение 4) мы усматриваем только подмену одного термина (граница) другим (оконечность). Это пригодно в качестве разъяснения, и такого рода определения имеют, быть может, некоторую познавательную или методическую ценность, но в логическом смысле они бессодержательны.

Слабость системы определений Евклида связана еще с одним обстоятельством. Определить понятие — значит выразить его через другие, ранее уже установленные понятия. Но такой процесс — процесс сведения одних понятий к другим — не может быть ни замкнутым, ни бесконечным. Поэтому при построении любой научной системы необходимо появляются некоторые неопределяемые, первичные, основные понятия. В логической научной системе такие понятия надо отчетливо установить, перечислить. Однако в «Началах» этого не сделано.

Четвертый постулат Евклида оказался теоремой и был впоследствии доказан (Д. Гильбертом в 1898 г.).

Таким образом, хотя Евклид и рассматривал геометрию как чисто логическое учение, ему не удалось изложить ее логически безупречно. С другой стороны, как уже упоминалось, Евклид оставил без внимания ряд важных для практики геометрических задач, как например задачи измерения длины окружности и площади круга, поверхности и объема шара. Эти пробелы были в значительной степени восполнены Архимедом.

Несмотря на недостатки, сочинение Евклида представляло для своего времени труд исключительной глубины и ясности. На этом сочинении учились и вырастали десятки поколений. «Начала» Евклида пережили много веков бурной человеческой истории. До сих пор эта книга не утратила своего интереса и для исследователя, и для педагога. Все современные учебники геометрии носят явные следы влияния этого удивительного произведения научной мысли. «Начала» изданы в настоящее время почти на всех языках мира и выдержали (с 1428 г.) более 500 изданий.

На протяжении столетий «Начала» Евклида рассматривались как непревзойденный и единственный образец научного изложения геометрии. Еще в 1849 году английский геометр де Морган писал: «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида, и до тех пор, пока я не увижу это собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать». Но в это время уже сделал свое великое открытие Н. И. Лобачевский!

§ 2. «Абсолютные» и «евклидовы» предложения

История дальнейшего развития геометрии оказалась надолго тесно связанной с пятым постулатом Евклида (который именуется иногда одиннадцатой аксиомой).

Этот постулат занимает в системе исходных предложений Евклида особое место, чем и объясняется то внимание, которое он к себе привлек. Сравнительно с другими аксиомами и постулатами он значительно сложнее как по форме, так и по содержанию. В то время как остальные постулаты представляют простейшие предложения, воспринимаемые сознанием как очевидные и легко поддающиеся наглядному подтверждению, пятый постулат этими качествами не обладает. Поэтому возникла и в дальнейшем надолго утвердилась мысль, что это предложение ошибочно помещено Евклидом в число постулатов, что следует считать его теоремой и найти соответствующее доказательство.

Попытки доказать пятый постулат Евклида продолжались свыше 2000 лет: этого рода исследования появились одновременно с «Началами» и завершились только к середине XIX века, причем они привели к очень важным открытиям*.

В процессе исследования вопроса о доказательстве пятого постулата Евклида было очень существенно разграничить такие предложения геометрии, справедливость которых устанавливается без ссылки на пятый постулат Евклида, от предложений, доказательство которых прямо или косвенно опирается на этот постулат. Предложения первого рода получили название «абсолютных», предложения второго рода стали называть «евклидовыми».

Без привлечения пятого постулата можно установить справедливость следующих теорем: признаков равенства треугольников, о двух треугольниках с двумя соответственно равными сторонами и неравными углами между ними, свойств равнобедренного треугольника, первой теоремы о внешнем угле треугольника (внешний угол треугольника больше каждого не смежного с ним внутреннего), соотношений между сторонами и углами треугольника (не тригонометрических, конечно), свойств перпендикуляра и наклонных, существования параллельных прямых, а также некоторых других теорем. Эти предложения составляют содержание так называемой «абсолютной» геометрии. В евклидовых «Началах» и в школьных учебниках геометрии изложение начинается с этих предложений и лишь после них рассматриваются «евклидовы» предложения, основанные на пятом постулате.

* Задачу о доказательстве пятого постулата Евклида называют иногда «проблемой параллельных линий».

В том, что первая теорема о внешнем угле треугольника принадлежит к числу предложений абсолютной геометрии, легко убедиться, заглянув в школьный учебник геометрии, а еще лучше — в «Начала», где пятый постулат впервые используется для доказательства предложения 29, в то время как данная теорема изложена в предложении 16.

Из первой теоремы о внешнем угле треугольника непосредственно следует, что сумма двух углов треугольника всегда меньше $2d$. В самом деле, $\gamma+\beta=2d$, но $\alpha<\gamma$, и поэтому $\alpha+\beta<2d$ (рис. 3).

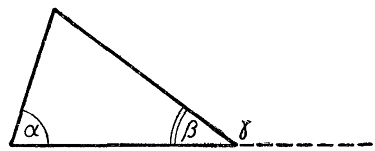


Рис. 3.

Отсюда в свою очередь вытекает, что две прямые, пересеченные третьей, не могут пересекаться по ту сторону секущей, где сумма внутренних односторонних углов α и β больше или равна $2d$: при этом образовался бы треугольник ABC (рис. 4), сумма двух углов которого (A и B) больше или равна $2d$.

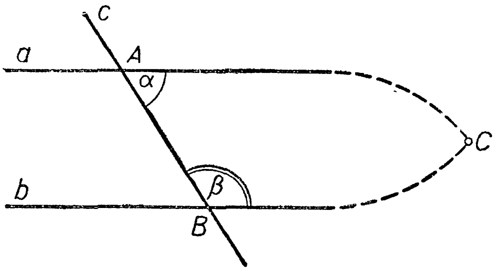


Рис. 4.

Из той же первой теоремы о внешнем угле треугольника легко вывести, что через внешнюю точку A всегда можно провести прямую, параллельную данной прямой a. Для этого достаточно провести через A какую-либо секущую AM, а затем провести через A такую прямую p, чтобы секущая AM образовала с пря-

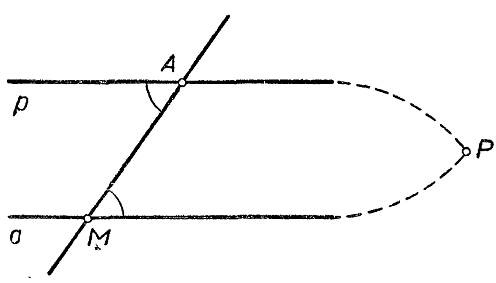


Рис. 5.

мыми a и p равные внутренние накрест лежащие углы (рис. 5). Если бы прямые a и p пересеклись в некоторой точке P, то образовался бы треугольник AMP, внешний угол которого равен несмежному внутреннему. Наконец, из первой теоремы о внешнем угле треугольника следует, что два перпендикуляра к одной прямой (в некоторой плоскости) параллельны.

Значительная часть предложений, изучаемых обычно в курсе элементарной геометрии, опирается на теорию параллельных линий и в конечном счете на пятый постулат Евклида. Такого рода предложения, как было уже отмечено, называются евклидовыми. Евклидовой является, в частности, теория подобия, а также теория измерения площадей и объемов.

§ 3. Обзор некоторых работ, посвященных доказательству пятого постулата Евклида

Как уже отмечалось, длительный период истории геометрии (с III века до н. э. по XIX век) характеризуется интенсивными поисками доказательства пятого постулата Евклида. Известны исследования, посвященные доказательству пятого постулата, относящиеся как к глубокой древности, так и к новым временам. Авторы всех этих исследований впадают в одну и ту же ошибку: в более или менее явной форме они допускают какое-либо новое недоказуемое предложение. Этого допущения, вследствие его наглядной очевидности, автор не замечал, как не замечали его часто длительное время ни читатели, ни комментаторы. Пятый постулат Евклида подменялся, таким образом, некоторым другим постулатом.

Несмотря на исключительную настойчивость попыток доказать пятый постулат и проявленную при этом поистине неисчерпаемую изобретательность, поставленная задача не получила положительного разрешения. Она продолжала волновать умы вплоть до середины прошлого века, когда исключительные по глубине и смелости исследования Н. И. Лобачевского привели к выводу о неразрешимости этой задачи.

Попытки доказать пятый постулат сыграли тем не менее положительную роль в истории развития геометрии, и изучение их до сих пор представляет известный интерес. Работы, посвященные этой проблеме и связанным с нею вопросам, помогли глубже выяснить логическую структуру геометрии, связи между отдельными ее предложениями, достоинства и недостатки системы аксиом. Эти работы подготовили почву для окончательного решения вопроса о недоказуемости пятого постулата и возможности новой, «неевклидовой» геометрии, где этот постулат не имеет места. Они составили также основу для пересмотра оснований геометрии, предпринятого во второй половине XIX века.

Чтобы составить себе представление о характере исследований этого рода, рассмотрим некоторые примеры*.

1. Доказательство, предложенное Посидонием (Гемин Родосский) в I веке до н. э. Основной частью рассуждения Посидония является доказательство следующего предложения: *прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и ко второй из них.*

Предложение это доказывалось следующим образом. Допустим, что $a \parallel b$ и $AB \perp b$ (рис. 6). Докажем, что $AB \perp a$. Пусть C и D — точки прямой b, расположенные по разные стороны от точки B на одинаковых от нее расстояниях, т. е. $BC = BD$. Пусть CC' и DD' перпендикулярны к прямой b. Тогда $CC' = DD'$, так как параллельные прямые a и b не могут ни удаляться одна от другой, ни сближаться. Если перегнуть чертеж по прямой AB, то точка D упадет в точку C, точка D' — в точку C', а точки A и B останутся неподвижными. Поэтому $\measuredangle BAD' = \measuredangle BAC'$, что и нужно было доказать.

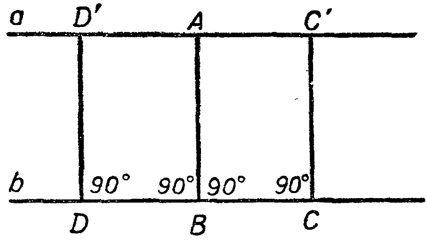


Рис. 6.

После этого легко доказывается, что при пересечении двух параллельных прямых a и b (рис. 7) любой третьей прямой c образуются равные внутренние накрест лежащие углы α и β. В самом деле, пусть O — середина отрезка AB секущей, заключенного между параллельными прямыми. Пусть OC — перпендикуляр к прямой a и OD — перпендикуляр к b. Тогда по предыдущему эти перпендикуляры лежат на одной прямой. Прямоугольные треугольники AOC и BOD — равные, так как их гипотенузы AO и BO равны по построению, а острые углы AOC и BOD равны, как противоположные. Из равенства этих треугольников следует, что $\measuredangle OAC = \measuredangle OBD$, что и требовалось доказать.

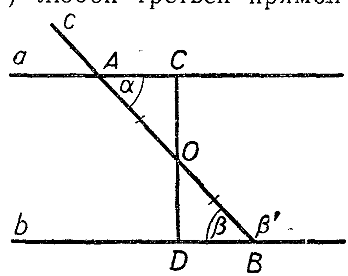


Рис. 7.

Далее непосредственно заключаем, что сумма внутренних односторонних углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, равна $2d$; именно имеем $\beta + \beta' = 2d$ (см. рис. 7), но $\alpha = \beta$, так что $\alpha + \beta' = 2d$.

* При этом мы не будем стремиться сохранить подлинную редакцию соответственных рассуждений, а сохраняем лишь их логическую структуру.

Согласно последнему предложению, если сумма внутренних односторонних углов, образуемых при пересечении двух прямых третьей, отлична от $2d$, то данные две прямые не могут быть параллельны, т. е. если они расположены на одной плоскости, то непременно пересекутся. Но в этом и состоит пятый постулат Евклида.

Нетрудно заметить, в чем коренится дефект рассуждения Посидония: он воспользовался допущением о том, что параллельные прямые одинаково отстоят одна от другой на всем их протяжении. Ввиду привычности этого факта ссылка на него проходит незаметно, но этого предложения нет в числе аксиом, а доказать его с помощью других аксиом без привлечения пятого постулата невозможно, это — евклидова теорема.

2. Рассуждение Птолемея. Птолемей в первой половине II века предложил следующее рассуждение, ведущее, по его мысли, к доказательству пятого постулата Евклида.

Логически возможно сделать три допущения относительно суммы внутренних односторонних углов при параллельных: 1) сумма внутренних односторонних углов при параллельных больше $2d$; 2) эта сумма меньше $2d$; 3) эта сумма равна $2d$. Первое из этих допущений приводит к абсурду и поэтому должно быть отброшено. В самом деле, пусть параллельные прямые a и b пересечены прямой c и пусть по одну сторону этой прямой образуются внутренние односторонние углы α и β, а по другую — соответственно α' и β' (рис. 8). Если сделать первое допущение, то $\alpha+\beta>2d$ и в то же время $\alpha'+\beta'>2d$, откуда следует, что $\alpha+\beta+\alpha'+\beta'>4d$. Но $\alpha+\alpha'=2d$, $\beta+\beta'=2d$, так что возникает абсурдное соотношение:

$$4d>4d.$$

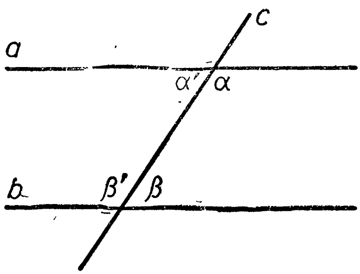


Рис. 8.

Совершенно таким же образом опровергается возможность второго допущения.

Остается принять третье допущение. А из него непосредственно вытекает справедливость пятого постулата Евклида.

Несмотря на кажущуюся прозрачность и убедительность, рассуждение Птолемея также несостоятельно: он сделал не все возможные предположения, а поэтому, опровергнув первое и второе допущения, нет еще основания делать вывод о справедливости именно третьего из этих допущений. Можно было предположить еще, что сумма внутренних односторонних углов, образуемых секущей с параллельными, бывает по одну сторону секущей больше $2d$, а по другую — меньше $2d$. Опровергнуть теми же средствами такое допущение уже не удалось бы.

Известно доказательство, предложенное в V веке Проклом и основанное на допущении, что расстояние между параллельными прямыми* остается ограниченным на всем их протяжении.

Это допущение слабее, чем допущение Посидония о постоянстве расстояния между параллельными, но это предложение также не содержится в числе аксиом и постулатов Евклида и не может быть выведено без привлечения пятого постулата.

Попытки доказать пятый постулат Евклида продолжались до нового времени. Естественно, доказательства этого рода становились все изящнее, логический дефект становился все тоньше, но суть дела не менялась: происходила только подмена доказываемого предложения каким-либо другим.

Приведем некоторые примеры таких исследований более позднего времени**.

3. Доказательство, предложенное английским ученым Дж. Валлисом (1616—1703). Пусть прямая p пересекает прямые a и b соответственно в точках A и B, образуя с этими прямыми такие внутренние односторонние углы α и β, что $\alpha+\beta<2d$ (рис. 9). Надо доказать, что прямые a и b непременно пересекутся.

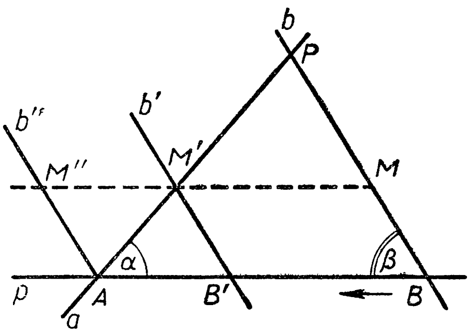


Рис. 9.

Пусть M — какая-либо точка прямой b, лежащая внутри угла α. Если двигать прямую p по себе вместе с прямой b так, чтобы точка B двигалась по направлению к точке A, то в некотором положении подвижной прямой b точка M попадет в точку M', расположенную на прямой a (так как заведомо существует такое положение b'' подвижной прямой b, при котором точка M оказывается по другую сторону прямой a сравнительно с первоначальным своим положением).

Представим себе теперь, что на отрезке AB, как на основании, построен треугольник APB, подобный треугольнику $AM'B'$.

* Точнее — расстояние от точек одной из двух параллельных прямых до другой прямой.

** Еще один интересный пример этого рода будет изложен в следующем параграфе.

Тогда прямая a совпадет со стороной AP, а прямая b — со стороной BP, откуда ясно, что прямые a и b пересекаются (в точке P), что и требовалось доказать.

Доказательство Валлиса опирается на допущение о существовании треугольника, подобного данному. Валлис отчетливо понимал это, но считал такое допущение «вытекающим из существа пространственных отношений». «Ясно,— писал он,— что каждую фигуру можно неограниченно уменьшать или увеличивать, сохраняя ее форму». Можно, быть может, согласиться с Валлисом, что его допущение ближе к опыту и интуиции, нежели пятый постулат Евклида, но от этого его рассуждение не становится доказательным в том смысле, как ставилась эта задача.

4. Доказательство, предложенное швейцарским математиком Луи Бертраном (1731—1812). Заметим прежде всего, что если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой p образуются внутренние односторонние углы α и β, сумма которых равна $2d$, то часть плоскости, которую ограничивают непересекающиеся прямые a и b, может быть уложена на плоскости неограниченно много раз. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе (рис. 10), что отрезок AB секущей прямой p откладывается на этой прямой столько раз, сколько нужно, и через каждую из полученных таким образом точек проводятся прямые c, d,... так, чтобы сумма внутренних односторонних углов, образуемых прямой p с каждыми двумя соседними прямыми, оставалась равной $2d$.

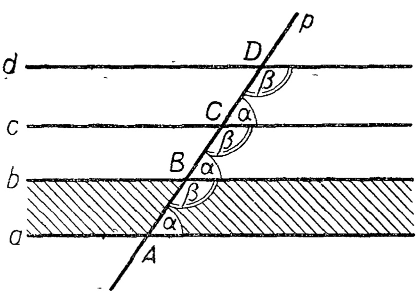


Рис. 10.

Перейдем теперь к доказательству пятого постулата Евклида. Пусть прямая p пересекает прямые a и b так, что образует с ними соответственно внутренние односторонние углы α и β, причем $\alpha+\beta<2d$ (рис. 11). Через точку O пересечения прямых p и b проведем прямую b' так, чтобы сумма внутренних односторонних углов, образуемых прямой p с прямыми a и b', была равна $2d$.

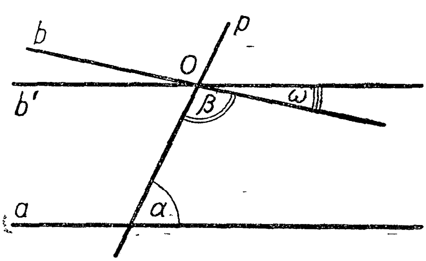


Рис. 11.

Если бы прямая b не пересекала прямую a, то угол ω, образуемый прямыми b и b', целиком помещался бы внутри полосы между непересекающимися прямыми a и b'. Но угол ω «содержится во всей плоскости $\frac{2\pi}{\omega}$ раз», в то время как вмещающая его полоса может быть уложена на плоскости сколько угодно раз. Это — противоречиво!

Рассуждение Бертрана — пример свойственного его времени увлечения операциями над бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Слабость его в том, что ни плоскость, ни ее бесконечную часть нельзя рассматривать как численно сравнимые величины, нельзя применять к ним обычные арифметические отношения.

§ 4. Исследование вопроса о сумме углов треугольника

В связи с поисками доказательства пятого постулата Евклида были исследованы разнообразные логические связи между важнейшими предложениями геометрии. В частности, выяснилась тесная связь проблемы пятого постулата Евклида с вопросом о сумме углов треугольника.

В евклидовой геометрии, как известно, сумма углов любого треугольника равна 180°. Что же можно утверждать о сумме углов треугольника, если не пользоваться пятым постулатом, т. е. с точки зрения «абсолютной» геометрии? Этот вопрос особенно внимательно исследовали итальянец Джероламо Саккери (1667—1733) и известный французский математик Адриан Мари Лежандр (1752—1833).

Изложим здесь некоторые важнейшие их выводы.

Теорема I. *Сумма углов треугольника не превышает* 180°.

Воспользуемся методом доказательства от противного. Допустим, что в некотором треугольнике ABC

$$\angle A+\angle B+\angle C>180^\circ.$$

Представим себе, что (рис. 12) на луче AC откладываются последовательно равные отрезки:

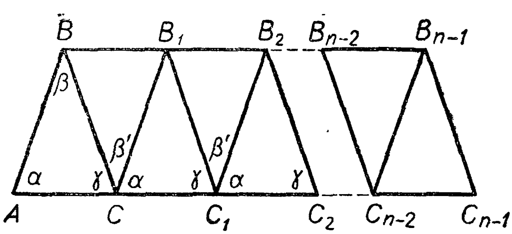


Рис. 12.

$$AC=CC_1=C_1C_2=\ldots=C_{n-2}C_{n-1}$$

и на каждом из этих отрезков строится, как на основании, треугольник, равный треугольнику ABC:

$$\triangle ABC = \triangle CB_1C_1 = \triangle C_1B_2C_2 = \ldots = \triangle C_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}.$$

Ради удобства записей обозначим углы треугольника ABC следующим образом:

$$\sphericalangle A = \alpha, \quad \sphericalangle B = \beta, \quad \sphericalangle C = \gamma.$$

Согласно допущению, $\alpha + \beta + \gamma > 180°$. Обозначая угол BCB_1 через β', заметим, что $\alpha + \beta' + \gamma = 180°$. Из двух последних соотношений следует, что $\beta' < \beta$.

Две стороны треугольника ABC соответственно равны сторонам треугольника B_1CB ($AB = B_1C$ по построению, BC — общая сторона), но $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BCB_1$. Следовательно (см., например, [14], ч. 1, п. 52), $AC > BB_1$.

Заметим еще, что $\triangle BCB_1 = \triangle B_1C_1B_2 = \ldots = \triangle B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$, так как $BC = B_1C_1 = \ldots = B_{n-1}C_{n-1}$, $B_1C = B_2C_1 = \ldots = B_{n-1}C_{n-2}$ по построению, $\sphericalangle BCB_1 = \sphericalangle B_1C_1B_2 = \ldots = \sphericalangle B_{n-2}C_{n-2}B_{n-1}$, как дополнения до 180° к сумме углов α и γ.

Согласно 1-й аксиоме Архимеда (см. § 1):

$$AC + CC_1 + C_1C_2 + \ldots + C_{n-2}C_{n-1} <$$
$$< AB + BB_1 + B_1B_2 + \ldots + B_{n-2}B_{n-1} + B_{n-1}C_{n-1}.$$

Это неравенство легко приводится к виду:

$$n \cdot AC < AB + (n-1)\, BB_1 + BC.$$

Отсюда следует:

$$n\,(AC - BB_1) < AB + BC - BB_1.$$

Так как по предыдущему $AC > BB_1$, то разность $AC - BB_1$ действительно существует. Обозначим ее через l. Существует также отрезок $AB + BC - BB_1$, так как $AB + BC > AC > BB_1$. Обозначая его через l', приходим к выводу, что при любом n справедливо соотношение: $nl < l'$. Но это противоречит 5-й аксиоме Архимеда (§ 1).

Итак, допущение о существовании треугольника, сумма углов которого больше 180°, приводит к противоречию с принятыми аксиомами.

Следствие 1. *Сумма углов четырехугольника не превышает* 360°.

Следствие 2. *Каждый треугольник обладает по крайней мере двумя острыми углами.*

Теорема II. *Если в каком-либо треугольнике сумма углов равна* 180°, *то и во всяком треугольнике сумма углов равна* 180°.

Допустим, что существует такой треугольник ABC, что сумма его углов равна 180°. При этом условии докажем последовательно следующие предложения.

1. *Существует прямоугольный треугольник, сумма углов которого равна* 180°.

Пусть A и C — острые углы данного треугольника ABC (см. следствие 2 из теоремы I). Тогда высота BD этого треугольника проходит внутри треугольника ABC и делит его на два треугольника: ABD и CBD (рис. 13). Легко заметить, что сумма сумм углов этих треугольников равна 360°. Поэтому сумма углов каждого из них равна 180°: по теореме I она не превышает 180°, но если бы сумма углов хотя бы одного из этих треугольников была меньше 180°, то сумма сумм их углов была бы меньше 360°.

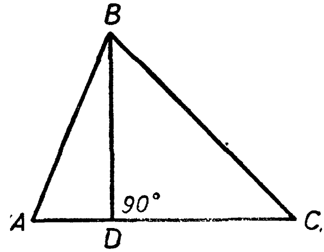


Рис. 13.

Итак, построен прямоугольный треугольник (и даже два), сумма углов которого равна 180°.

2. *Существует прямоугольный треугольник, сумма углов которого равна* 180° *и катеты как угодно велики.*

Обратимся вновь к построенному нами треугольнику ABD, где $\measuredangle ADB = 90°$ и $\measuredangle DAB + \measuredangle ABD = 90°$. Приложим к нему равный ему треугольник $A'B'D'$ так, чтобы совместились их гипотенузы и совпали вершины дополнительных острых углов (рис. 14). При этом образуется прямоугольник $ADBD'$.

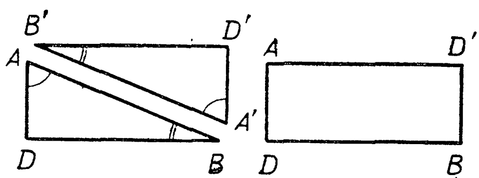


Рис. 14.

Прикладывая к этому прямоугольнику последовательно равные ему фигуры, можно получить прямоугольник $ADB_{n-1}D_{n-1}$ (рис. 15), где $B_{n-1}D_{n-1} = BD'$, а сторона DB_{n-1} может быть сделана (при достаточно большом n) больше любого наперед заданного отрезка.

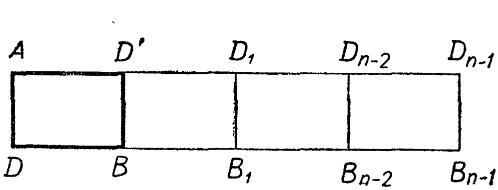


Рис. 15.

«Повторяя» затем нужное число раз прямоугольник $ADB_{n-1}D_{n-1}$ (рис. 16), можно получить прямоугольник

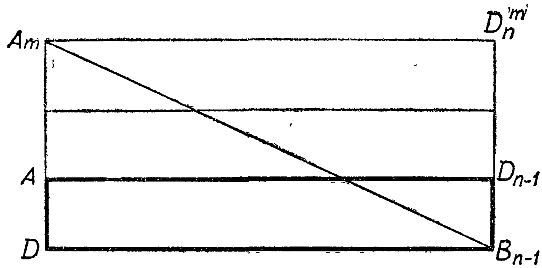


Рис. 16.

$DB_{n-1}D_n^m\ A_m$, стороны которого произвольно велики, причем $DA_m=B_{n-1}D_n^m$, $DB_{n-1}=A_mD_n^m$. Диагональ A_mB_{n-1} делит этот прямоугольник на два равных (по трем сторонам) прямоугольных треугольника A_mDB_{n-1} и $B_{n-1}D_n^mA_m$, из которых каждый удовлетворяет поставленному условию.

3. *Сумма углов всякого прямоугольного треугольника равна* 180°.

Пусть ABC (рис. 17) — произвольный прямоугольный треугольник, $\measuredangle C=90°$. Пусть далее $A'B'C'$ — такой прямоугольный треугольник, что $\measuredangle C'=90°$, $\measuredangle A'+\measuredangle B'=90°$, $B'C'>BC$, $A'C'>AC$ (такой треугольник, согласно п. 2, существует). Наложим треугольник ABC на треугольник $A'B'C'$ так, чтобы точка C попала в точку C' и катет CA направился по $C'A'$, а катет CB направился по $C'B'$. Тогда точка A расположится между C и A', а точка B — между C и B' (рис. 17).

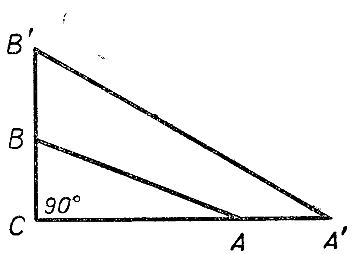


Рис. 17.

Как известно, $\measuredangle B+\measuredangle A\leqslant 90°$. Но если бы эта сумма была меньше 90°, то сумма соответственно смежных углов ABB' и BAA' была бы больше 270°, а сумма углов четырехугольника $ABB'A'$ — больше 360°, что невозможно (следствие 1 из теоремы I). Итак, $\measuredangle B+\measuredangle A=90°$, так что сумма углов треугольника ABC равна 180°.

4. *Сумма углов всякого треугольника равна* 180°.

Пусть ABC (рис. 13) — произвольный треугольник, A и C — острые его углы (см. следствие 2 из теоремы I). Высота BD из вершины B этого треугольника разбивает его на два прямоугольных треугольника ABD и DBC. Ясно, что между суммами углов треугольников ABC, ABD и BCD существует следующее соотношение

$$\sigma_{ABC}=\sigma_{ABD}+\sigma_{BCD}-180^\circ.$$

А так как, согласно п. 3, $\sigma_{ABD}=180^\circ$ и $\sigma_{BCD}=180^\circ$, то $\sigma_{ABC}=$ $=180^\circ$, что и требовалось доказать.

Теорема III. *Если существует треугольник, сумма углов которого равна* 180°, *то справедлив пятый постулат Евклида.*

Пусть a — произвольная прямая и A — не принадлежащая ей точка (рис. 18). В плоскости, определяемой прямой a и точкой A, можно провести через точку A сколько угодно прямых. Докажем, что все они, кроме одной, пересекают прямую a.

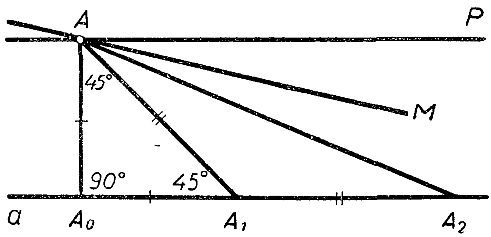


Рис. 18.

Если $AA_0 \perp a$ и $AP \perp AA_0$, то прямая AP не может пересечься с прямой a (см. § 2, следствие из первой теоремы о внешнем угле), т. е. $AP \| a$. Пусть AM — любая другая прямая, проходящая через точку A, причем $\measuredangle A_0AM$ — острый. Докажем, что прямая AM пересечет прямую a.

Вспомним, что по теореме II в нашем предположении сумма углов каждого треугольника равна 180°. Отсюда сразу следует, что внешний угол каждого треугольника равен сумме не смежных с ним внутренних углов треугольника (так как в сумме со смежным он также дает 180°).

Если $A_0A_1=AA_0$, то $\measuredangle AA_1A_0=\measuredangle A_0AA_1=\frac{d}{2}$.

Если $A_1A_2=AA_1$, то $\measuredangle A_1A_2A=\measuredangle A_1AA_2$, причем сумма этих углов равна $\frac{d}{2}$, так что каждый из них равен $\frac{d}{2^2}$. Повторяя такое построение, получим:

$$\measuredangle A_0A_nA=\frac{d}{2^n}.$$

Этот угол бесконечно мал, т. е. при достаточно большом n он становится меньше любого наперед заданного как угодно малого угла. В частности, при некотором n $\measuredangle A_0A_nA<\measuredangle PAM$. С другой стороны, так как по допущению $\measuredangle A_0AA_n+\measuredangle A_0A_nA=90^\circ$, а по построению $\measuredangle A_0AA_n+\measuredangle A_nAP=90^\circ$, то $\measuredangle A_0A_nA=\measuredangle A_nAP$.

Следовательно, при достаточно большом n

$$\measuredangle A_n AP < \measuredangle MAP,$$

т. е. AM проходит внутри угла A_0AA_n треугольника A_0AA_n через вершину этого треугольника (рис. 19) и поэтому непременно пересечет противоположную сторону треугольника, т. е. отрезок A_0A_n, а следовательно, и прямую a, что и требовалось доказать.

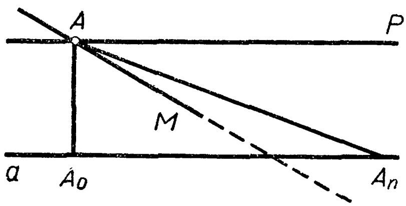


Рис. 19.

Теперь уже легко доказать справедливость пятого постулата Евклида. Пусть две прямые a и b (рис. 11) пересечены прямой p так, что сумма внутренних односторонних углов $\alpha+\beta \neq 2d$. Через точку O пересечения прямых b и p проведем прямую b' так, чтобы сумма внутренних односторонних углов α и β', образуемых прямыми a и b' с секущей p, была равна $2d$. Тогда прямые b' и a не могут пересечься (см. § 2), т. е. $b' \parallel a$. Согласно предыдущему, отсюда вытекает, что прямая b не параллельна прямой a, т. е. прямые a и b пересекаются, что и требовалось доказать.

Итак, если существует хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна 180°, то справедливость пятого постулата Евклида доказывается.

В связи с изложенными соображениями уместно остановиться на попытке Лежандра доказать пятый постулат исходя из свойств суммы углов треугольника. Лежандр рассуждал следующим образом.

Уже установлено, что (в условиях абсолютной геометрии) сумма углов треугольника не может превышать 180° (теорема I). Установлено также, что если сумма углов треугольника равна 180°, то пятый постулат имеет место (теорема III). Поэтому остается установить, что сумма углов треугольника не может быть меньше 180°.

Допустим, что сумма углов некоторого треугольника ABC меньше 180°:

$$\sigma_{ABC} = \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C < 180°.$$

Обозначим $180° - \sigma_{ABC}$ через ε_{ABC}. По допущению, $\varepsilon > 0$. Предполагаемую разность между 180° и суммой углов треугольника будем называть *дефектом* этого треугольника.

Заметим, что при нашем допущении сумма углов каждого треугольника должна считаться меньшей 180° (см. теоремы I и II).

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник $A'B'C'$ так, как указано на рисунке 20 (т. е. прикладываем сторону BC к равной ей стороне $B'C'$ второго треугольника так, чтобы совмещались вершины несоответственных углов и чтобы третьи вершины A и A' треугольников располагались по разные стороны от общей стороны BC).

Легко заметить, что точка A' расположится внутри угла BAC (так как каждый из углов ABA' и ACA' равен сумме двух углов данного треугольника и поэтому меньше 180°). Представим себе, что через точку A' проведена некоторая прямая, пересекающая стороны угла BAC соответственно в точках B_1 и C_1. Рассмотрим сумму углов треугольника AB_1C_1:

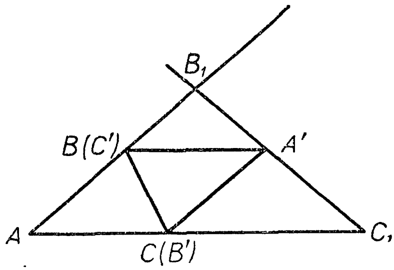


Рис. 20.

$$\sigma_{AB_1C_1}=\sigma_{ABC}+\sigma_{A'BC}+\sigma_{A'BB_1}+\sigma_{A'CC_1}=(180^\circ-\varepsilon)+(180^\circ-\varepsilon)+$$
$$+(180^\circ-\varepsilon')+(180^\circ-\varepsilon'')=180^\circ-(2\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''),$$

где ε' и ε'' — соответственно дефекты треугольников $A'BB_1$ и $A'CC_1$.

Таким образом, располагая треугольником ABC, дефект которого ε, мы образовали новый треугольник AB_1C_1, дефект которого $\varepsilon_1>2\varepsilon$.

Применяя к треугольнику AB_1C_1 такое же построение, которое было применено к треугольнику ABC, образуем треугольник AB_2C_2, дефект которого ε_2 будет больше, чем $2(2\varepsilon)=2^2\varepsilon$. Повторяя такое построение последовательно n раз, построим треугольник AB_nC_n, дефект которого $\varepsilon_n>2^n\varepsilon$, так что

$$\sigma_{AB_nC_n}<\pi-2^n\varepsilon.$$

При $n\geqslant\log_2\frac{\pi}{\varepsilon}$ приходим к абсурдному результату:

$$\sigma_{AB_nC_n}<0.$$

Таким образом, допущение о существовании треугольника, сумма углов которого меньше 180°, приводит к абсурду, а отсюда, по мысли Лежандра, с необходимостью следует справедливость пятого постулата Евклида.

Лежандр не избежал того же, что и все его предшественники: введения нового допущения по ходу рассуждения. Лежандр допускает без доказательства, что через точку, расположенную внутри угла, всегда можно провести по крайней мере одну прямую, пересекающую обе стороны этого угла. После этого постулат Евклида действительно доказывается. Но Лежандр лишь подменил постулат Евклида новым постулатом. Постулат Евклида становится теоремой, если принять постулат Лежандра. И, наоборот, принимая пятый постулат Евклида, можно доказать справедливость допущения, сделанного Лежандром.

§ 5. Обзор предложений, равносильных пятому постулату Евклида

Как уже отмечалось, поиски доказательства пятого постулата Евклида помогли глубоко исследовать логические связи между важнейшими геометрическими предложениями. В частности, в ходе этих исследований было найдено много предложений, равносильных пятому постулату Евклида.

Два предложения $П_1$ и $П_2$ называются р а в н о с и л ь н ы м и относительно некоторой системы аксиом Σ, если из Σ и $П_1$ следует $П_2$ и одновременно из Σ и $П_2$ следует $П_1$.

Рассмотрим некоторые предложения, равносильные пятому постулату Евклида относительно аксиом абсолютной геометрии.

1. *Сумма внутренних односторонних углов, образуемых секущей с двумя параллельными прямыми, равна* 180° (или, что то же, сумма внешних односторонних углов равна 180°, соответственные углы равны, внутренние накрест лежащие углы равны, внешние накрест лежащие углы равны).

Пятый постулат Евклида утверждает, что данные две прямые пересекаются, т. е. не могут быть параллельными, если указанная сумма отлична от 180°. Таким образом, из пятого постулата следует предложение 1.

В предложении 1 утверждается, что если прямые параллельны, то указанная сумма равна 180°. Значит, в случае если она не равна 180°, то прямые не параллельны, т. е. пересекаются, а в этом и состоит пятый постулат Евклида.

2. *Если в некоторой плоскости заданы прямая a и не принадлежащая ей точка A, то в данной плоскости через точку A проходит не более одной прямой, не пересекающей прямую a.*

К этому предложению следует отнестись с особым вниманием, так как в современных школьных учебниках геометрии им обычно заменяют вышедший теперь из употребления пятый постулат Евклида. Предложение 2 называют обычно а к с и о м о й п а р а л л е л ь н о с т и, а иногда также п о с т у л а т о м П л е й ф е р а (по имени английского ученого Дж. Плейфера, предложившего это утверждение в качестве аксиомы в 1795 г.).

Полезно заметить, что существование параллельной здесь не утверждается, утверждается только единственность. Существование параллельной представляет одну из простейших теорем абсолютной геометрии (см. об этом § 2).

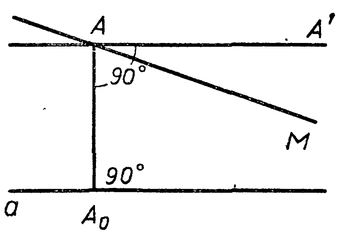


Рис. 21.

Примем сначала пятый постулат Евклида и докажем предложение 2.

Пусть $AA_0 \perp a$, $AA' \perp AA_0$. AA' (рис. 21)—единственный перпендикуляр к прямой AA_0 в точке A. Поэтому всякая другая прямая AM, проходящая через точку A, образует с AA_0 угол, отличный от прямого, так что сумма внутренних односторонних углов, образуемых секущей AA_0 с прямыми AM и a, отлична от 180°, и, согласно постулату, прямая AM пересекает прямую a.

Так же просто доказывается пятый постулат Евклида, если принять предложение 2. Соответствующее рассуждение уже проведено нами в § 4.

3. *Прямая, проходящая в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересекает и другую.*

Пусть $a \parallel b$ и c пересекает a в точке A (рис. 22). Если принять постулат Евклида, то справедливо предложение 2. Но a проходит через A и не пересекает b. Поэтому прямая c, отличная от a и проходящая через ту же точку A, пересечет b.

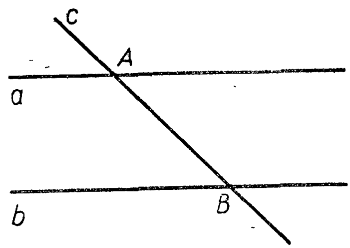


Рис. 22.

Обратно, пусть принято предложение 3 и надо доказать, что прямые a и b, образующие с секущей c соответственно в точках A и B внутренние накрест лежащие углы α и β, сумма которых отлична от 180°, пересекаются. Проведем через A прямую a' под таким углом α' к прямой c (рис. 23), чтобы $\beta + \alpha' = 180°$. Прямые a' и b не пересекаются (см. § 2). Следовательно, по допущению, a пересекает b.

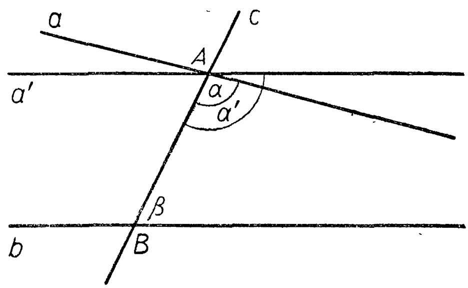


Рис. 23.

4. *Параллельные прямые во всех их точках одинаково отстоят одна от другой.*

Напомним вывод этого предложения из аксиомы параллельности (равносильной постулату Евклида), знакомый каждому по школьному курсу геометрии.

Пусть $a \| b$ (рис. 24). Изберем на прямой a произвольно две точки A_1 и A_2 и опустим из них перпендикуляры A_1B_1 и A_2B_2 на прямую b.

$\measuredangle A_2B_1B_2 = \measuredangle A_1A_2B_1$ по п. 1 этого параграфа, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (см. § 2, следствия из теоремы о внешнем угле треугольника). Поэтому, согласно п. 1, $\measuredangle A_1B_1A_2 = \measuredangle B_1A_2B_2$.

Следовательно, $\triangle A_1B_1A_2 = \triangle B_2A_2B_1$, и поэтому $A_1B_1 = A_2B_2$, что и требовалось доказать.

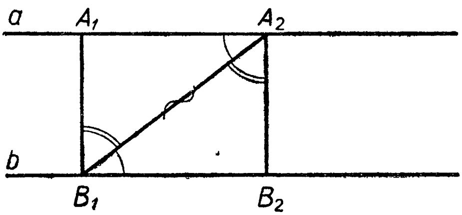


Рис. 24.

Вывод пятого постулата Евклида из предложения 4 изложен в п. 1 § 3.

5. *Расстояние от точек некоторой прямой до параллельной ей прямой остается ограниченным.*

В п. 4 показано, что из аксиом евклидовой геометрии следует, что это расстояние остается постоянным, а следовательно, и ограниченным.

Изложим идею обратного рассуждения: вывода пятого постулата Евклида из предложения 5.

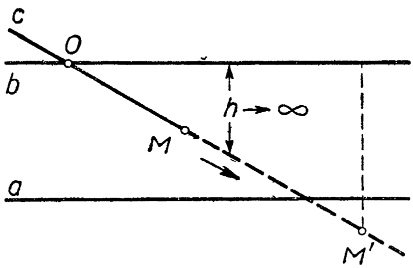


Рис. 25.

Пусть в плоскости проведены две параллельные прямые a и b и прямая c, пересекающая прямую b в точке O (рис. 25). Представим себе, что точка M движется по прямой c из точки O по тому из лучей прямой c, который идет внутри полосы, ограниченной прямыми a и b. Тогда расстояние h точки M от прямой b будет неограниченно возрастать по мере удаления точки M от точки O и поэтому превзойдет в некоторой точке M' расстояние между прямыми a и b. Точки M' и O окажутся расположенными по разные стороны прямой a. Следовательно, прямая c пересечет прямую a.

Итак, отправляясь от предложения 5, мы пришли к предложению 3, которое, как нам известно, равносильно пятому постулату Евклида.

6. *Если через точку A прямой a проведен перпендикуляр p к прямой a, а через точку B прямой a — прямая n, наклонная к прямой a, то прямые p и n пересекаются* (рис. 26).

Предложение 6 непосредственно следует из пятого постулата Евклида, так как $\measuredangle A + \measuredangle B \neq 180°$.

Чтобы вывести пятый постулат Евклида из предложения 6, будем рассуждать следующим образом. Пусть a — прямая и A — не принадлежащая ей точка (рис. 27). Пусть $AA' \perp a$. Из предложения 6 следует, что каждая прямая q, проходящая через точку A и отличная от прямой p, перпендикулярной к AA', пересекает прямую a. Иначе говоря, из предложения 6 вытекает аксиома параллельности, равносильная, как нам известно, пятому постулату Евклида.

7. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

Рассуждение «от предложения 7 к пятому постулату Евклида» проведено в п. 3 § 4.

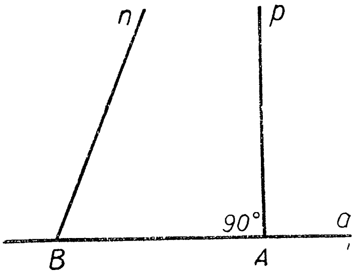


Рис. 26.

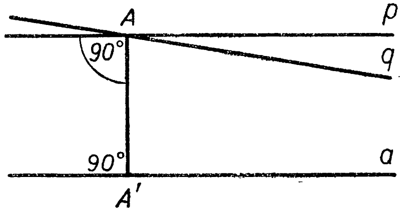


Рис. 27.

Обратно: из пятого постулата Евклида следует равенство внутренних накрест лежащих и соответственных углов при параллельных прямых, а отсюда следует, что сумма углов всякого треугольника равна 180° (см., например, [[14]], п. 81).

8. *Для всякого треугольника можно построить подобный ему треугольник с наперед заданной стороной.*

В п. 4 § 3 приведено рассуждение Валлиса, показывающее, как из предложения 8 выводится пятый постулат Евклида.

Обратно: если принять постулат Евклида, то, как было отмечено здесь в п. 1, каждая секущая образует с двумя параллельными прямыми равные соответственные углы. Поэтому если ABC — произвольный треугольник, то прямая $A'C'$, проведенная через произвольную точку A' его стороны AB или ее продолжения параллельно стороне AC (рис. 28), образует с прямыми AB и BC треугольник $A'BC'$, углы которого соответственно равны углам данного треугольника ABC, т. е. треугольник, подобный данному треугольнику ABC.

9. *Если A, B и C — три точки, не лежащие на одной прямой, то существует окружность, проходящая через каждую из этих точек.*

Это предложение было выдвинуто венгерским математиком Фаркашем Бóяи в 1832 году в качестве заменителя пятого постулата Евклида.

а) Примем пятый постулат Евклида и докажем предложение 9.

Пусть A, B и C (рис. 29) — три

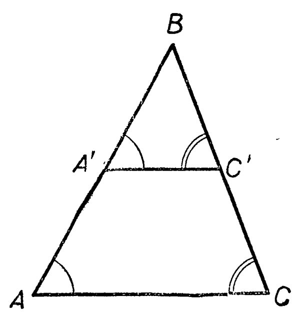


Рис. 28

точки, не лежащие на одной прямой. Пусть s_1—симметраль отрезка AB (т. е. прямая, проведенная через середину отрезка AB и перпендикулярная к прямой AB), s_2—симметраль отрезка BC. Если O—точка пересечения прямых s_1 и s_2, то, как легко видеть, $OA=OB=OC$, так что окружность с центром O и радиусом OA искомая. Следовательно, остается доказать, что прямые s_1 и s_2 непременно пересекаются. Прямая s_2 не может быть перпендикулярна к прямой AB; это означало бы, что из точки B проведено к прямой s_2 два различных перпендикуляра (BC и BA). Если $s_2 \parallel AB$, то прямая s_1, пересекающая AB, пересечет и параллельную ей прямую s_2. Если s_2 наклонна к AB, то s_2 и s_1 пересекаются, как наклонная и перпендикуляр к одной прямой (см. п. 6).

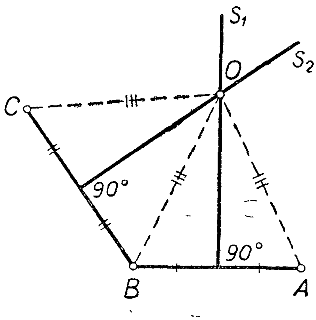


Рис. 29

б) Примем предложение 9 и докажем пятый постулат Евклида. С этой целью докажем, что из предложения 9 вытекает предложение 5.

Пусть p—перпендикуляр и n—наклонная к прямой a, P и N—соответственно их основания (рис. 30). Пусть A—какая-либо точка прямой a, лежащая между P и N, A'—точка, симметричная с точкой A относительно прямой p, A''—точка, симметричная с точкой A относительно прямой n. Точки A, A' и A'' не лежат на одной прямой, следовательно, через них можно провести окружность. Центр этой окружности должен лежать как на прямой p, так и на прямой n, так что эти прямые имеют общую точку.

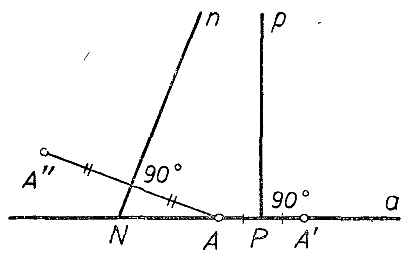


Рис. 30

10. *Известная теорема Пифагора также является эквивалентом пятого постулата Евклида.*

Элементарное доказательство этого факта приведено в заметке С. А. Дахия, напечатанной в № 1 журнала «Математика в школе» за 1951 год.

§ 6. Открытие неевклидовой геометрии

Длительные неудачи разнообразных попыток вывести пятый постулат Евклида из остальных аксиом и постулатов евклидовой геометрии подготовили почву для принципиально иной постановки вопроса о проблеме параллельных линий. Происходило постепенное перерастание задачи доказательства пятого постулата в противоположную задачу: установления его логической недоказуемости. Сама природа вопроса наталкивала исследователей на поиски решения на других путях, иногда помимо их намерений или даже наперекор им.

Идея недоказуемости пятого постулата Евклида с начала XVIII века проявляется во все более отчетливой форме и во все более содержательном виде, пока не приводит к окончательному утверждению логической возможности новой геометрии, где пятый постулат Евклида не имеет места. К началу XIX века «проблема пятого постулата» Евклида настолько назрела, что была решена почти одновременно и независимо друг от друга несколькими различными лицами.

Характерными для периода зарождения идеи недоказуемости пятого постулата являются работы итальянского ученого монаха Джероламо Саккери (1667—1733), выпущенные им в свет в 1733 году под названием «Евклид, очищенный от всяких пятен». Само название сочинения указывает на замысел Саккери: довести евклидову геометрию до логического совершенства, причем, конечно, имелось в виду в первую очередь устранить сомнения, связанные с пятым постулатом, путем его доказательства. С этой целью Саккери применяет метод доказательства от противного. В основе его рассуждений лежит изучение свойств четырехугольника $ABCD$ (рис. 31), где $\measuredangle A = \measuredangle D = 90°$ и $AB = CD$. Эта фигура получила название «четырехугольника Саккери» (хотя О. Хайам рассматривал эту фигуру еще в XII веке). Рассматривая прямую MN, проведенную перпендикулярно к прямой AD через середину отрезка AD, путем перегибания чертежа по прямой MN легко убедиться, что эта прямая служит осью симметрии фигуры, так что

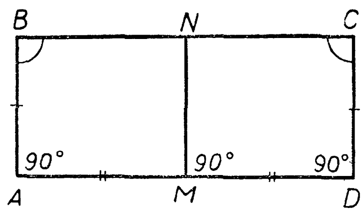


Рис. 31

$$\measuredangle ABC = \measuredangle DCB \text{ и } BN = CN.$$

Относительно равных углов ABC и DCB Саккери рассматривает три логически возможных допущения:

1) $\measuredangle ABC = \measuredangle DCB > 90°$ (гипотеза тупого угла),
2) $\measuredangle ABC = \measuredangle DCB = 90°$ (гипотеза прямого угла),
3) $\measuredangle ABC = \measuredangle DCB < 90°$ (гипотеза острого угла).

Из «гипотезы тупого угла» Саккери выводит, что сумма углов треугольника равна 180° и, следовательно, сумма углов четырехугольника равна 360°, так что эта гипотеза противоречива (по его словам, «сама себя убивает») и должна быть отброшена.

Саккери устанавливает далее, что гипотеза прямого угла влечет пятый постулат Евклида. Поэтому для доказательства пятого постулата остается только опровергнуть гипотезу острого угла. С этой целью Саккери далеко развивает систему следствий из этой гипотезы, стремясь прийти к противоречию. Несмотря на непривычность получаемых результатов, ожидаемое противоречие не возникает... В конце концов Саккери изменяет чувство строгости, характерное для его сочинения, он пускается в туманные заключения о бесконечно удаленных точках и без достаточного основания делает вывод, что «гипотеза острого угла противоречит природе прямой линии». Объективно Саккери пришел к результату, противоречащему поставленной им цели: развивая следствия из гипотезы острого угла, он получил, не отдавая себе в этом отчета, ряд предложений новой геометрии.

В ходе дальнейших исследований идеи новой, неевклидовой геометрии все более определенно заявляют о праве на существование, их логическая правомерность выделяется все рельефнее.

Швейцарский ученый Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) рассматривал четырехугольник, три угла которого прямые. Относительно четвертого угла он, подобно Саккери, рассматривает три логически возможных предположения (гипотезы).

Ламберт заметил, что гипотеза тупого угла реализуется на сфере, если рассматривать на ней дуги больших окружностей в качестве прямых.

В отличие от Саккери Ламберт отчетливо понимал, что гипотезу острого угла ему опровергнуть не удалось. По этому поводу он замечает: «Должна же существовать причина, почему она не поддается опровержению... Гипотеза острого угла влечет существование абсолютной меры длины. В этом есть нечто восхитительное, что вызывает даже желание, чтобы третья гипотеза была справедлива... Я готов предположить, что она имеет место на какой-то мнимой сфере». Это предположение Ламберта в дальнейшем оправдалось самым замечательным образом.

Швейкарт (1780—1859, профессор права в Харьковском университете с 1812 по 1817 г.) и Тауринус (1794—1874) уже прямо рассматривают геометрию, где сумма углов треугольника не равна 180°. Швейкарт называет свою геометрию «астральной» (звездной), желая этим, по-видимому, подчеркнуть, что он не считает ее реально осуществимой в земных условиях. Тауринус строит свою «логарифмо-сферическую» геометрию на сфере мнимого радиуса.

Были и другие авторы, исследовавшие ту или иную сторону новых геометрических предположений, но их работы не составляли решительного шага в области оснований геометрии, не знаменовали сколь-нибудь значительного перелома в воззрениях на геометрию. Чтобы широко раскрыть систему новой геометрии, чтобы показать возможность существования какой-либо иной геометрии, помимо веками складывавшейся и утверждавшейся в общественном сознании евклидовой геометрии, нужно было достигнуть в новой геометрии такой же стройности и законченности.

Среди работ, посвященных новой геометрии, выделяется работа, известная под названием «Аппендикс», написанная венгерским математиком Яношем Бояи в 1832 году*. Отец Яноша, Фаркаш Бояи, всю жизнь занимался доказательством пятого постулата Евклида, но, конечно, не достиг цели. Будучи разочарован в этой проблеме, он убедительно и страстно отговаривал сына от занятий теорией параллельных. «Молю тебя, не делай и ты попыток одолеть теорию параллельных. Ты затратишь на это все свое время... Я изучил все пути до конца. Я не встретил ни одной идеи, которая бы не была разработана мною. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякий светоч, всякую радость жизни я в ней похоронил. Ради бога, молю тебя, оставь эту тему, страшись ее. Этот беспросветный мрак... никогда не прояснится на земле...» — писал он сыну ([11], стр. 168). Но молодой Бояи пошел другим путем: он строил геометрию, «излагающую абсолютно верное учение о пространстве, независимое от правильности или ложности пятого постулата Евклида». И уже в 1828 году, в возрасте 21 года, он писал отцу: «Я получил... замечательные результаты... из ничего я создал целый мир». И действительно, небольшое сочинение Я. Бояи, увидевшее свет только в 1832 году, содержит довольно развитое и систематическое изложение основ новой геометрии. Но это сочинение осталось в свое время незамеченным, не было понято современниками Бояи.

Необходимы были огромное гражданское мужество, убежденность и самоотверженная настойчивость в пропаганде идей новой геометрии, чтобы преодолеть косность современников и вековые традиции геометрии.

Характерна в истории открытия неевклидовой геометрии роль одного из крупнейших математиков того времени К. Ф. Гаусса (1777—1855). Он много лет занимался теорией параллельных и еще в 1824 году писал Тауринусу: «Допущение, что сумма углов треугольника меньше 180°, приводит к своеобразной геометрии; эта геометрия совершенно последовательна, и я развил ее для себя вполне удовлетворительно». Однако за всю свою жизнь Гаусс среди множества своих научных работ не решился опубликовать ни одного исследования по неевклидовой геометрии. «Я боюсь крика беотийцев, который поднимется, когда я выскажу свои воззрения»,— писал он Бесселю, намекая на ограниченность современных математических кругов. Осторожность Гаусса в отношении к вопросам неевклидовой геометрии не только не позволила ему выступить от своего имени, но помешала даже поддержать своим авторитетом других новаторов геометрии: он

* Эта работа выпущена на русском языке в 1950 году.

умалчивал об их открытиях и расхолаживал обращавшихся к нему авторов в их намерениях. «Осы, гнездо которых Вы разрушаете, подымутся над Вашей головой»,— писал он Герлингу, приславшему ему свою работу о параллельных. Восторженно отзываясь в одном из частных писем об «Аппендиксе» и называя молодого Бояи «гением первой величины», Гаусс тем не менее не оказал ему необходимой моральной поддержки и в отзыве, направленном его отцу, выражался очень сдержанно и подчеркивал, что открытия Яноша для него лично не являются новыми.

Подлинным творцом неевклидовой геометрии, ее систематизатором и первым пропагандистом был наш великий соотечественник Николай Иванович Лобачевский.

§ 7. Николай Иванович Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский редким образом соединил в себе талант и дерзание ученого-исследователя, энергию и способности организатора и педагога, убежденность и принципиальность в своих научных взглядах и гражданских воззрениях, неутомимость в работе и мужество в преодолении препятствий. Это был один из величайших ученых всех времен и народов.

О жизни и деятельности Н. И. Лобачевского имеется обширная литература. Поэтому мы ограничимся здесь лишь самыми краткими справками.

Н. И. Лобачевский родился в декабре 1792 года в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький). Благодаря редким способностям к 19 годам он уже окончил гимназию и университет в Казани.

Еще в студенческие годы Лобачевский начал вести научную работу под руководством Г. И. Карташевского, М. Ф. Бартельса, К. Ф. Реннера, И. А. Литтрова. По окончании университета он остался на преподавательской работе и уже через пять лет получил звание профессора.

Педагогическая деятельность Н. И. Лобачевского была чрезвычайно многообразной: помимо различных математических курсов, он читал также физику и астрономию. При этом читаемые им курсы были всегда оригинальными и стояли на уровне последних данных науки.

Незаурядные организаторские способности Лобачевского привели к тому, что он быстро занял ведущее положение в университете. С 1820 года он декан физико-математического факультета, а с 1827 по 1846 год — бессменный ректор Казанского университета.

Будучи ректором, Н. И. Лобачевский добился образцовой для того времени постановки учебной работы в Казанском университете. Лобачевский был инициатором издания «Ученых записок» университета, осуществил большие строительные работы, организовал астрономическую обсерваторию.

При всем напряжении, которого требовала большая педагогическая и административная работа, Лобачевский никогда не оставлял научных занятий. Вот перечень важнейших его научных работ:

«О началах геометрии» — 1829 г.,
«Алгебра или вычисление конечных» — 1834 г.,
«Воображаемая геометрия» — 1835 г.,
«Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значениям функций» — 1835 г.,
«Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» — 1836 г.,
«Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» — 1838 г.,
«Геометрические исследования по теории параллельных линий» — 1840 г.,
«Пангеометрия» — 1855 г.*.

Лобачевский первый выступил с публичным сообщением о неевклидовой геометрии, которая была открыта им совершенно самостоятельно и развита в дальнейшем в настолько строгую и полную научную систему, что нельзя перестать удивляться, что все это сделано одним человеком. «Днем рождения» неевклидовой геометрии по справедливости считают день 11 (23) февраля 1826 года, когда Н. И. Лобачевский выступил перед физико-математическим факультетом Казанского университета с сообщением на тему «Рассуждения о принципах геометрии». Отказавшись от пятого постулата Евклида, Лобачевский развернул новую, логически безукоризненную геометрическую систему, которая не допускала каких-либо логических или математических возражений, но и не могла быть воспринята его слушателями по причине явного ее несоответствия с искони привычными представлениями о геометрии.

Отказ от пятого постулата Евклида приводил к выводу, что через точку вне прямой можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данную прямую, что сумма углов треугольника меньше 180°, что подобных фигур не существует, и к другим подобного рода выводам. Конечно, нелегко было признать достоверность таких предложений, и сам автор новой геометрии предпочел вначале называть ее «воображаемой» в отличие от «употребительной».

В дальнейшем, однако, Лобачевский все ближе подходит к выяснению отношения его геометрической системы к реальным свойствам протяженности пространства. Ему не суждено было довести до конца решение вопроса о логической непротиворечивости и осуществимости его геометрии, но он отчетливо ставил эти проблемы и предуказывал пути их решения.

---

* Последние три из этих работ вышли в 1956 году под названием «Н. И. Лобачевский. Три сочинения по геометрии».

Непонимание и недоброжелательное отношение современников к новой геометрии преследовало Н. И. Лобачевского до конца его жизни. Отзывы о «Воображаемой геометрии» могли расхолодить любого другого исследователя, настолько они были неблагоприятны, а нередко и оскорбительны. Но Лобачевский не сдавался. Свою жизнь он посвятил не только разработке, но и пропаганде своей великой научной идеи, развитию и доказательству логической непротиворечивости новой геометрической системы, исследованиям ее отношения к опыту.

В своей борьбе за разработку и признание нового, прогрессивного взгляда на геометрию Лобачевский руководствовался материалистическими воззрениями на отношение мышления к бытию. Под влиянием традиций, заложенных М. В. Ломоносовым, под влиянием сочинений французских материалистов XVIII века Лобачевский видел в геометрии прежде всего науку о реальном пространстве и убежденно считал, что основные понятия и аксиомы заимствуются геометрией из внешнего мира через посредство чувственных восприятий. Эти взгляды побудили Лобачевского стать горячим пропагандистом новой геометрии среди самых консервативных ее противников.

Жизненный подвиг Лобачевского дал свои плоды. Его величественные идеи все увереннее пробивали себе дорогу, все яснее становилась их роль в истории развития математики и естествознания. Но лишь после смерти Лобачевского пришла к нему слава и имя его зазвучало во всем мире наряду с именами крупнейших корифеев науки*.

В 1854 году Бернгард Риман выступил с лекцией «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Эта лекция была оценена по достоинству лишь после того, как в 1868 году она вышла из печати. Риман пришел к выводу о возможности построения геометрической системы, отличной и от евклидовой, и от «Воображаемой» геометрии Лобачевского. В этой геометрии Римана через данную точку нельзя провести к прямой ни одной параллельной, а сумма углов треугольника больше 180°. Выступление Римана прозвучало как первая публичная поддержка новаторских идей Н. И. Лобачевского хотя бы в косвенной форме.

Недоверие к геометрии Лобачевского было особенно поколеблено после издания в конце 60-х годов писем Гаусса, из которых стало ясно, что Гаусс пришел к важным выводам того же рода и придавал работам Лобачевского очень большое значение.

Можно указать также на ряд других научных результатов, подготовивших признание и понимание идей Н. И. Лобачевского. Открытие, например, принципа двойственности проективной геометрии наводило на мысль о возможности различного истолко-

* Нам хотелось бы обратить внимание студентов на два сочинения художественно-литературного характера, освещающих историю открытия неевклидовой геометрии. Это: 1) И. Заботин, Лобачевский, Таткнигоиздат, Казань, 1954; 2) Ливанова, Три судьбы.

вания понятий об элементах пространства Традиционное представление о неизменности суммы углов треугольника было серьезно поколеблено, когда Гаусс доказал, что на поверхности постоянной полной кривизны K сумма углов треугольника, образуемого геодезическими линиями, равна π при $K=0$, больше π при $K>0$ и меньше π при $K<0$.

В 1868 году появилась статья итальянского математика Бельтрами под названием «Опыт истолкования неевклидовой геометрии». Бельтрами показал, что геометрия Лобачевского осуществляется в евклидовом пространстве на поверхности так называемой «псевдосферы», если рассматривать геодезические линии на этой поверхности в качестве прямых. Этим не только был окончательно сломлен лед недоверия, но был одновременно сделан еще один важный шаг: по существу установлено, что геометрия Лобачевского непротиворечива в такой же мере, как и геометрия Евклида.

Дальнейшее развитие естествознания все более подтверждало огромное познавательное значение геометрии Лобачевского. Выяснялись все более глубокие связи этой научной системы с изучением свойств реального физического пространства.

В настоящее время Лобачевский во всем мире признан как величайший новатор в науке. Выделяя имена Евклида и Лобачевского, их стали сопоставлять с Птолемеем и Коперником.

§ 8. Формирование нового взгляда на проблемы обоснования геометрии

Хотя основы дедуктивной геометрии и были заложены уже в античную эпоху, но переход от стадии «живого созерцания» к абстрактной дедукции совершался крайне медленно. Аксиомы Евклида имели целью лишь выразить в наиболее отчетливой форме те простейшие и основные свойства протяженности физического пространства, которые существенны для геометрии.

Развитие геометрии до XVII века характеризовалось исследованиями, направленными на улучшение и дополнение знаменитых евклидовых «Начал». Эти работы лишь в незначительной степени изменяли геометрические воззрения, сложившиеся уже в древности.

XVI — XVIII века характерны бурным ростом новых математических теорий: к этому времени относится открытие основ анализа бесконечно малых, разработка идей и методов аналитической геометрии, развитие дифференциальной геометрии, появление в геометрии проективных методов и другие принципиально новые направления и результаты.

Освоение новых геометрических идей уже в то время привело к необходимости нового освещения многих основных вопросов геометрии и к постановке ряда важных геометрических проблем.

В этих условиях все яснее ощущается необходимость более широкого взгляда на предмет геометрии: становится, в частности, невозможным понимать геометрическое пространство и далее только как непосредственную абстракцию физического пространства, да и в это его понимание все необходимее становится внести значительно большую ясность.

Все острее становится необходимость пересмотра системы аксиом геометрии. Все яснее ощущается неполноценность существующей аксиоматики, построенной еще в античные времена. В связи с проникновением в математику понятий о бесконечных процессах и бесконечных множествах все отчетливее проявляется несостоятельность деления математических предложений на очевидные и неочевидные. Возникают серьезные сомнения по поводу того, насколько справедливо рассматривать аксиомы как предложения, связанные с очевидностью, появляются аксиомы все более сложного содержания, и, с другой стороны, повышается уровень строгости математических рассуждений, и все чаще строятся доказательства сравнительно простых предложений.

В XIX веке вопросам обоснования математики уделяется особое внимание. В частности, этот век знаменуется коренной ломкой взглядов на понятие геометрического пространства и методы его исследования. Особенно серьезным толчком к пересмотру оснований геометрии послужило открытие Н. И. Лобачевского. После Лобачевского и Римана уже никак нельзя было рассматривать геометрию в рамках прежнего ее наивно-эмпирического понимания: стало ясно, что геометрия Евклида изучает лишь какой-то отдельный участок тех вопросов, которые подлежат геометрическому исследованию. С распространением идей неевклидовой геометрии развивается стремление исследовать также и другие возможные геометрические системы с точки зрения их логической структуры и отношения их к свойствам реального пространства.

Дальнейшая популяризация неевклидовой геометрии была связана с выяснением вопроса о ее логической безупречности, т. е. непротиворечивости. Решение этого вопроса было намечено Лобачевским; оно получило новое освещение в работах Бельтрами и окончательно оформилось только к концу XIX века в работах А. Пуанкаре и Ф. Клейна. Естественно, что в связи с исследованиями логических оснований неевклидовой геометрии возник затем и вопрос о доказательстве логической непротиворечивости также классической, евклидовой геометрии. Этот вопрос не возникал ранее потому, что положения евклидовой геометрии выросли из опыта и веками проверялись опытом. Но, как оказалось, неевклидовы геометрии также не получали прямого опровержения (или подтверждения) на опыте. С другой стороны, «неправильная теория, не натолкнувшаяся на противоречие, не становится от этого менее неправильной» (Брауер, 1928), так что полное решение вопроса о правомерности той или иной математической теории вообще не могло быть достигнуто исключительно экспериментальным путем и необходимо требовало теоретического к нему подхода.

Работами по основаниям геометрии особенно богата вторая половина XIX века. К этому времени относятся «Лекции по новой геометрии» венгерского геометра Паша (1882), работы итальянского исследователя Пеано (1889) и его школы, «Основания геометрии» Веронезе (1891), сочинения нашего соотечественника В. Ф. Кагана (1869—1953) и др. Особую популярность получила книга Д. Гильберта, вышедшая в 1899 году под названием «Основания геометрии» и в 1903 году удостоенная международной премии имени Н. И. Лобачевского.

В геометрических аксиомах и определениях надо было выразить только те свойства и отношения, которые допускают математическое исследование и могут быть использованы для логических умозаключений. С другой стороны, нельзя было от различных геометрических систем (Евклида, Лобачевского, Римана и других) апеллировать к одним и тем же наглядным представлениям о пространстве. Оставалась только возможность чисто логического и вполне абстрактного построения новых геометрических теорий, возникла необходимость пересмотра сложившихся геометрических систем в этом же направлении*.

В следующей главе мы рассмотрим основные вопросы знакомой нам со школьной скамьи евклидовой геометрии в свете современного абстрактно-логического метода.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО МАТЕРИАЛУ ГЛАВЫ I

Геометрия как наука зародилась еще в эпоху расцвета древневосточных культур. Возникла она из практических потребностей измерений и расчетов и долгое время носила характер эмпирический, индуктивный.

«Начала» Евклида (примерно 330—275 гг. до н. э.) представляют один из древнейших и наиболее удачных опытов систематизации на дедуктивной основе математических знаний, накопленных человечеством с древнейших времен.

В основу геометрической теории Евклид кладет, помимо определений, небольшое число (14) недоказуемых предложений, которые он называет аксиомами и постулатами.

Евклидова система аксиом и постулатов (даже дополненная

---

* Интересно отметить, что необходимость абстракции в геометрии, к которой пришли еще в древности, была взята определенной группой математиков под сомнение в наше время: Хиельмслев (1916), Мания, Динглер и некоторые другие пытались развить так называемую «естественную» геометрию, исходя из того, что «обыкновенная геометрия не является описанием реальности, потому что ее точки, прямые и плоскости не существуют в природе». Эго направление не получило, однако, существенного развития.

Архимедом) недостаточна для строго логического развития геометрии, и потому в «Началах» значительная роль принадлежит геометрической интуиции.

Несмотря на этот и некоторые другие недостатки, гениальное для своего времени сочинение Евклида сыграло огромную роль в деле распространения математических знаний и в истории развития геометрии.

Особую роль в истории дальнейших геометрических исследований сыграл так называемый пятый постулат Евклида, изучаемый в настоящее время обычно в форме аксиомы параллельности. В силу некоторых особенностей этого постулата и соответствующих исторических условий усилия многочисленных исследователей в течение более 20 веков оказались сконцентрированными на поисках доказательства этого предложения. Доказательство найдено не было. Но исследования, связанные с поисками этого доказательства, сыграли большую роль в углублении геометрической теории, позволили глубже изучить логическую структуру геометрии, подготовили открытие новой геометрии, в которой пятый постулат Евклида вовсе не имеет места.

Основоположником новой, неевклидовой геометрии является великий русский ученый Н. И. Лобачевский (1792—1856). Жизнь Н. И. Лобачевского являет собой пример патриотического служения родине и самоотверженной борьбы за прогрессивные идеи в науке.

После открытия Лобачевского были найдены различные другие логически мыслимые геометрические системы. Открытие неевклидовых геометрий послужило толчком к пересмотру логических оснований математической теории, в частности аксиоматической базы геометрии и взглядов на смысл основных геометрических понятий и их отношение к опыту.

К началу XX века геометрическая наука достигает высокой степени абстракции. Абстрактный логический подход к геометрии обеспечил строгость геометрических рассуждений, которой нельзя было достичь, оставаясь на позициях античных геометров.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Исторические сведения о математике обычно воспринимаются учащимися с большим интересом. Поэтому учителю следует как можно чаще вводить их в преподавание как через посредство внеклассных форм занятий, так и непосредственно на уроках.

Знакомясь с историей геометрии, хотя бы и на отдельных примерах, учащиеся усвоят ту важную мысль, что математическая наука есть результат длительного и упорного труда многих поколений. История геометрии убедительно показывает, что в основе этой науки (как и всякой другой) лежит стремление человека к познанию реальной действительности, которое начиналось с непосредственных наблюдений человека над природой, а затем постепенно кристаллизовалось в те отточенные и абстрактные формы, в которых мы теперь изучаем идеальные свойства протяженности.

С историей пятого постулата Евклида учащихся можно познакомить одновременно с изучением теории параллельных. Следует рассказать, что аксиома параллельности была найдена (в иной форме) уже в глубокой древности, что многие поколения ученых пытались найти доказательство этого замечательного предложения, но их исследования лишь подтвердили окончательно, что это предложение следует рассматривать как аксиому.

С идеями неевклидовой геометрии учащихся VI—VIII классов знакомить преждевременно; это нужно делать в IX—XI классах. Но все преподавание геометрии, начиная с младших классов, должно готовить учащихся к восприятию в дальнейшем этих и других вопросов и идей современной геометрии. И в этой подготовке решающую роль должен сыграть именно исторический подход к великим открытиям в геометрии XIX века.

Хорошо, если учитель найдет время и место для изучения некоторых попыток доказать пятый постулат Евклида. Но эти вопросы не должны быть самоцелью: этот материал позволяет провести большую работу по развитию логического мышления учащихся, преодолеть недочеты в их представлениях о методе доказательства от противного, помочь учащимся разобраться в понятиях о необходимых и достаточных условиях, так важных для математики, и т. п. Конечно, работа над аксиомой параллельности в полной мере оправдает себя и действительно послужит подготовкой к восприятию в дальнейшем основ неевклидовой геометрии, если учитель в процессе работы будет неоднократно привлекать внимание учащихся к уяснению зависимости или независимости тех или иных предложений школьного курса геометрии от этой аксиомы, т. е. будет систематически приучать учащихся делать различие между абсолютными и евклидовыми предложениями геометрии. Особенно внимательно нужно отнестись при этом к изучению прямых и обратных предложений о параллельных линиях, к вопросу о расстоянии между параллельными прямыми, к вопросу о сумме углов треугольника и другим основным предложениям, примыкающим к аксиоме параллельности. Различия между евклидовыми и абсолютными предложениями полезно делать также при решении геометрических задач на построение.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Рассмотреть 1, 2 и 4-е предложения евклидовых «Начал». Проанализировать, все ли умозаключения, которые делаются Евклидом по ходу доказательств, имеют достаточное логическое основание. Где допущены заключения по интуиции?

2. Рассмотреть «доказательство» пятого постулата Евклида по ТИБО (например, по [2], гл. VI).

3. Вывести постулат Лежандра (§ 4) из аксиом евклидовой геометрии.

4. Рассмотреть доказательство равносильности пятого постулата Евклида с теоремой Пифагора [7].

5. Доказать равносильность пятого постулата Евклида с предложением, что сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности ([19], стр. 28).

6. Подготовить рефераты на следующие темы:

1) Жизнь и научная деятельность Яноша Бояи ([10], гл. 4 и 5).

2) Философские взгляды Н. И. Лобачевского ([16], стр. 22—36; [32]).

3) Педагогическая деятельность и взгляды Н. И. Лобачевского ([11], гл. V, VII, XVI, XX, XXIII, XXIV; «Математика в школе», 1948; № 6, ст. В. М. Ногаевой).

4) Критический обзор определений Евклида ([22], начало книг I—VI и комментарии).

7. Является ли абсолютным или евклидовым предложение:

1) теорема о равенстве углов с соответственно перпендикулярными сторонами,

2) теорема об измерении угла, вписанного в окружность,

3) формула площади треугольника?

ГЛАВА II

АКСИОМЫ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 9. Аксиоматический метод геометрии

Аксиоматический, или абстрактно-логический, *метод геометрии характеризуется прежде всего дедуктивным ее построением:* каждая теорема представляется как логическое следствие только из принятых аксиом и предыдущих предложений.

«Элементы пространства» (точки, прямые, плоскости) и отношения (принадлежности, порядка, равенства), в которые они вступают, рассматриваются как первичные понятия. Все необходимые для математики сведения об этих понятиях излагаются в аксиомах. В первых строках упомянутых уже «Оснований геометрии» Д. Гильберта говорится: «Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем точками...; вещи второй системы — прямыми; вещи третьей системы — плоскостями... Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежать», «между», «конгруентный», «параллельный»... Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается аксиомами геометрии».

Элементам пространства и отношениям между ними не приписывается, таким образом, наперед никаких свойств, помимо того, что сказано в аксиомах. В отличие от того, как это делается у Евклида, здесь не дается никакого описания первичных понятий геометрии, с ними не связываются наперед конкретные о них представления, они не мыслятся как данные в ощущении и требующие лишь точного математического выражения. *Неиспользование конкретных представлений об элементах пространства и отношениях между ними* — вторая особенность современного аксиоматического метода.

Аксиомы не описывают свойства, сами по себе присущие элементам пространства, но *рассматриваются как единственный источник сведений об элементах пространства и отношениях между ними.* В этом — третья особенность аксиоматического метода.

Отказом от какой бы то ни было наглядности исключается возможность обращения к интуиции, очевидности и обеспечивается полная строгость дедукции.

Главное же, что дает аксиоматический метод,— это огромная общность геометрических предложений: доказанную теорему можно применять к любым вещам, для которых удовлетворяются все принятые аксиомы. Основные понятия и аксиомы геометрии, а с ними и все ее предложения становятся «абстрактными формами с переменным содержанием». Наконец, чрезвычайно возрастают возможности развития геометрической науки благодаря тому, что сама система аксиом, рассматриваемая как исходный пункт, может быть построена различным образом.

Всякую конкретную систему вещей, подчиненную при соответствующем определении первичных понятий аксиомам данной геометрии, называют моделью или интерпретацией (истолкованием) этой геометрии.

Идея интерпретации отвлеченной геометрии не была чужда и классической геометрии древних, которые при надобности толковали, например, прямую то как натянутую нить, то как луч света, то как траекторию. Но в XIX—XX веках идея интерпретации получает значительно большее развитие и вполне отчетливую форму.

Чтобы построить модель геометрии, заданной посредством системы аксиом, надо: 1) указать конкретный смысл понятий «точка», «прямая», «плоскость»; 2) установить конкретный смысл отношений принадлежности («лежит на», «проходит через»), конгруентности (равенства) и порядка («лежит между»); 3) доказать, что при данном истолковании понятий все принятые аксиомы действительно выполняются.

Упомянем о некоторых из возможных моделей евклидовой геометрии.

1. Классическая модель, данная в непосредственном опыте и не допускающая описания в математических терминах. Здесь, как мы привыкли со школьных лет, точка мыслится как исчезающе малая частица, прямая — как натянутая, предельно тонкая и неограниченно длинная нить, плоскость — как поверхность спокойной жидкости. Когда говорится, что «прямая проходит через точку», то частица — точка — мыслится нанизанной на нить — прямую. Когда говорится, что «точка лежит на плоскости», то это мыслится как физическое соприкосновение. Равенство фигур рассматривается как возможность физического совмещения. Порядок точек на прямой понимается также физически: «Точка B лежит между точками A и C», если при передвижении по прямой AB из A в C материальная точка проходит через B.

Так представляли себе смысл первичных понятий геометрии с древнейших времен. И именно математическая неопределенность основных понятий и в то же время конкретность представлений о них делали для классического изложения геометрии элемент наглядности необходимым. Определения и аксиомы Евклида были слишком слабы для строгого, логического, дедуктивного развития геометрии. Но, несмотря на логические недочеты геометрии в ее классическом изложении, в такой форме она пережила многовековую историю и сыграла огромную роль в практической деятельности человечества.

Исходя из «классической» модели, считая ее данной нашему сознанию, можно образовать ряд других моделей евклидовой геометрии.

2. Геометрия вещей. Будем называть «точкой» евклидову сферу диаметра 1, «прямою» — евклидову круглую цилиндрическую поверхность диаметра 1, «плоскостью» — пару параллельных евклидовых плоскостей, отстоящих одна от другой на расстояние 1 (рис. 32).

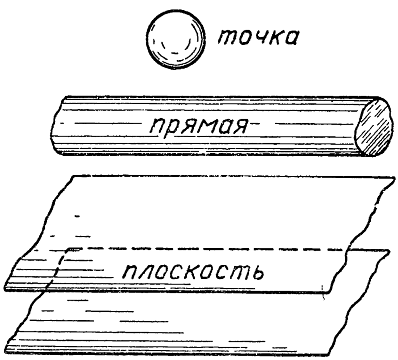


Рис. 32.

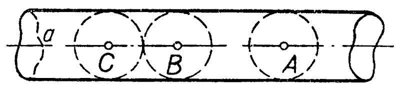


Рис. 33.

Слова «прямая a проходит через точку A» означают, что сфера A вписана в цилиндр a (рис. 33). В таком же роде толкуются слова «прямая a лежит на плоскости α» (рис. 34) или

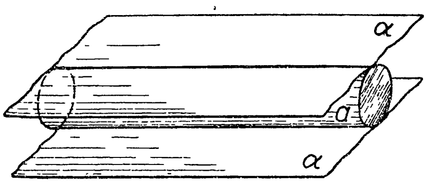


Рис. 34.

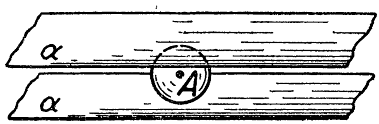


Рис. 35.

слова «точка A лежит на плоскости α» (рис. 35). Порядок точек на прямой понимают в соответствии с порядком центров сфер на оси описанного цилиндра; так, на рисунке 33 «точка B лежит между точками A и C».

Равенство фигур можно понимать как обычно, т. е. в смысле возможности совмещения.

Читателю рекомендуется уяснить себе, какой смысл получают в этой интерпретации некоторые простейшие предложения евклидовой геометрии, как например: «Через две точки можно всегда провести прямую, и притом только одну», «На прямой всегда можно указать точку, лежащую между двумя данными точками» и т. п.

3. Интерпретация Пуанкаре. Идею этой модели мы ради простоты поясним только для планиметрии; в пространстве она строится вполне аналогично.

Рассмотрим некоторую евклидову плоскость α вместе с ее элементами, т. е. точками A и прямыми a. Подвергнем эту плоскость преобразованию инверсии с некоторым центром S. Образ каждого элемента плоскости в этой инверсии будем рассматривать как элемент того же названия «плоскости Пуанкаре».

Вспомним, что каждая точка A плоскости α, отличная от точки S, преобразуется в некоторую точку A', причем никакая точка не преобразуется в S. Поэтому «точкой» в смысле Пуанкаре будем называть каждую точку плоскости α, кроме точки S (т. е. плоскость Пуанкаре—обычная плоскость с «выколотой» точкой S). Прямая, проходящая через S, преобразуется, как известно, в себя. Прямая же, не проходящая через S, преобразуется в окружность, проходящую через S. Отсюда: прямые Пуанкаре — это евклидовы прямые и евклидовы окружности, проходящие через точку S (см. рис. 36), причем из них выброшена точка S.

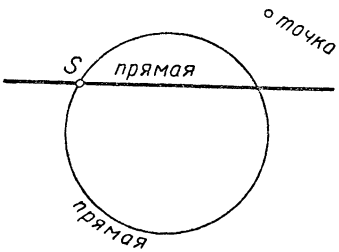


Рис. 36.

Чтобы несколько вникнуть в смысл модели Пуанкаре, рекомендуется уяснить себе, что означают «в переводе на язык этой интерпретации» такие, например, предложения евклидовой геометрии: «Две различные прямые имеют не более одной общей точки», «Через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную прямую, не имеющую с данной прямой общих точек».

Наибольший интерес для теории представляет следующая интерпретация.

4. Аналитическая модель евклидовой геометрии. Обратимся к декартовой аналитической геометрии и отвлечемся от ее конкретного геометрического содержания, принимая во внимание только аналитический ее аппарат вместе с соответствующими геометрическими наименованиями. Тогда мы найдем, что точка (на плоскости) есть упорядоченная пара действительных чисел x, y; прямая (на плоскости) — класс упорядо-

ченных троек действительных чисел λa; λb; λc (где a и b не равны нулю одновременно, λ — произвольно); «точка x, y лежит на прямой $a:d:c$», если $ax+by+c=0$ и т. д., в точности так, как это имеет место в аналитической геометрии. Впоследствии мы более подробно рассмотрим эту модель.

* *
*

Надо внимательно отнестись к вопросу о новом значении, которое приобретают аксиомы при абстрактно-логическом построении геометрии. Если в классической геометрии понятия об элементах пространства вытекали из конкретных представлений и аксиомы выражали свойства, присущие объектам, воспринятым сознанием из внешнего мира, то при аксиоматическом обосновании геометрии дело представляется так, будто бы аксиомы сами по себе служат единственным источником наших знаний об элементах пространства. Формально аксиомы выглядят как произвольное произведение разума, связанное лишь с некоторыми логическими условиями, вроде непротиворечивости, независимыми от действительных свойств пространства, от практики, от общественного опыта. Такое истолкование аксиом действительно выдвигалось неоднократно философами-идеалистами. В подобную ошибку не раз впадали также математики, стоявшие на идеалистической платформе в философии и не владевшие передовыми принципами диалектического материализма. Спекулируя на абстрактном характере современной математики, так называемые неоформалисты выдвинули в наше время утверждение, что произвольными могут быть не только аксиомы, но и самые правила математических рассуждений.

На деле, однако, аксиоматический метод представляет лишь средство логического обоснования и дальнейшего развития геометрии, уже сложившейся как результат многовековой практической деятельности человечества. Аксиомы не могли возникнуть как продукт человеческого разума без того, чтобы геометрия пережила длительную эпоху перехода «от живого созерцания к абстрактному мышлению». «Практическая деятельность человека миллиарды раз должна была приводить сознание человека к повторению разных логических фигур, дабы эти фигуры могли получить значение аксиом»*.

С другой стороны, аксиомы не могут сами по себе служить источником дальнейшего развития геометрии, если мыслить себе понятия геометрии только как описанные в аксиомах. Убеждения в возможности выведения геометрии из произвольно формулированной непротиворечивой системы аксиом несостоятельны: дело

---

*В. И. Ленин, Философские тетради, 1947, стр. 164.

не в том, что при этом нельзя получить противоречие, а в том, что из такого рода системы, рассматриваемой изолированно, вообще нельзя получить что-либо существенное в геометрии.

В процессе развития геометрии наглядные представления являются первоисточником дальнейших заключений, а логика завершает, оформляет результаты познания: «созерцание намечает, логика проверяет; созерцание предуказывает, логика устанавливает; созерцание открывает, логика доказывает» (В. Ф. Каган). Опыт, индукция, наглядность играют первостепенную роль и при выборе геометрических аксиом и понятий, и при нахождении путей логических доказательств.

«Принципы — не исходный пункт исследования, а его заключительный результат»*.

Критикуя Дюринга, Энгельс приводит соображения, которые могут служить ключом для правильного понимания роли аксиом геометрии: «Дюринг воображает, что из математических аксиом... можно без всякой примеси опыта вывести всю... математику... ...Математические аксиомы представляют собой выражения крайне скудного умственного содержания... Чтобы продвинуться дальше, мы должны привлечь реальные отношения и пространственные формы, отвлеченные от действительных тел... Нельзя из какой бы то ни было аксиомы вывести треугольник или шар или же теорему Пифагора. Для того и другого нужны реальные предпосылки...»**

Исследование работ Н. И. Лобачевского отчетливо показывает, что этот величайший новатор предвидел роль аксиоматики и толковал ее место в геометрии с материалистических позиций. «Все математические начала,— пишет Лобачевский в обозрении преподавания за 1825—1826 гг.,— которые думают произвести из самого разума, независимо от вещей мира, останутся бесполезными для математики... Первые данные будут, без сомнения, всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств... Ум может и должен приводить их к самому меньшему числу, чтобы они служили потом твердым основанием науки».

Аксиомы представляют результат длительного, систематизированного общественного опыта. Лишь будучи рассматриваемы на базе и в связи с опытом, приобретаемым человеком в процессе познания природы, они могут служить для дальнейшего развития геометрии. Нельзя развивать геометрию в аксиоматическом методе, не связывая ее с какой-либо областью реальной действительности. Современная аксиоматика — венец тысячелетних геометрических исследований, и лишь поэтому она может быть положена в основу дедуктивной системы геометрии, после чего служит средством для широких обобщений и для углубленного изу-

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1945, стр. 34.

** Там же, стр. 37, 38, 319.

чения свойств протяженности действительного мира. Геометрия, как и всякая истинная наука, развивалась «от живого созерцания к абстракции, а от нее — к опыту».

Перейдем к изложению основ евклидовой геометрии в аксиоматическом методе. Наша цель — показать, как из небольшого числа аксиом строго дедуктивно могут быть развиты важнейшие предложения евклидовой геометрии.

Смотря по тому, о каком именно соотношении между элементами пространства говорится в той или иной аксиоме, аксиомы евклидовой геометрии разбиваются на пять групп: I — аксиомы принадлежности, II — аксиомы порядка, III — аксиомы конгруентности, IV — аксиомы непрерывности, V — аксиомы параллельности. Первые четыре из этих групп составляют аксиоматику так называемой абсолютной геометрии.

§ 10. Первая группа аксиом: аксиомы принадлежности

В первую группу входят аксиомы, где говорится об отношении принадлежности или инцидентности (от лат. incido — падать на).

Предполагается, что элементы пространства могут вступать во взаимное отношение принадлежности, выражаемое словами: «лежит на», «проходит через», «соединяет» и др. и подчиненное следующим аксиомам.

I. 1. *Существует прямая, проходящая через каждую из двух данных точек.*

I. 2. *Существует не более одной прямой, проходящей через каждую из двух данных точек.*

Об этой прямой говорят, что она «соединяет» данные точки или что она «определяется» ими.

Здесь уместно заметить, что введение новых аксиом все более «определяет» геометрию: чем больше аксиом, тем меньше произвол в истолковании данной геометрии. Если принята аксиома I.1, то легко подобрать много различных вещей, которые можно назвать точками и соответственно прямыми, причем эта аксиома будет иметь силу. Например, можно понимать под точками любые физические тела, а под прямой, соединяющей две точки,— общий вес этих двух тел. Можно также понимать точку в обычном классическом смысле, прямую — как обычную окружность и отношение принадлежности — как обычное и т. п. Но при наличии также аксиомы I. 2 вторая из этих моделей уже не подходит: через две точки можно провести бесчисленное множество окружностей; две «точки» такой модели неоднозначно определяют «прямую».

I. 3. *На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.*

В дальнейшем будет доказано, что прямая содержит бесчисленное множество точек. Но этот факт представляет уже теорему. В аксиоме I. 3 содержится минимальное недоказуемое требование.

I. 4. *Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

I. 5. *Если три точки не лежат на одной прямой, то существует плоскость, проходящая через каждую из этих точек.*

I. 6. *Если три точки не лежат на одной прямой, то существует не более одной плоскости, проходящей через каждую из этих точек.*

Из аксиом I. 5 и I. 6 следует, что если три точки A, B и C не лежат на одной прямой, то существует единственная плоскость, в которой лежат все эти точки. Эту плоскость обозначают ABC.

I. 7. *На каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

I. 8. *Если две точки прямой лежат на некоторой плоскости, то всякая точка этой прямой лежит на этой плоскости.*

В этом случае говорят, что *прямая лежит в плоскости.*

Если точка P принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, то говорят, что эти плоскости имеют *общую точку* P.

I. 9. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют по крайней мере еще одну общую точку.*

I. 10. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

§ 11. Следствия из аксиом принадлежности

Из перечисленных аксиом принадлежности почти непосредственно следует несколько важных теорем.

Теорема 1. *Существует не более одной точки, лежащей на каждой из двух различных прямых.*

Действительно, если каждая из двух точек A и B принадлежит как прямой a, так и прямой b, то, согласно аксиоме I. 2, эти прямые не могут быть различными.

Точка, принадлежащая как прямой a, так и прямой b, называется о б щ е й т о ч к о й этих прямых. Если существует общая точка двух различных прямых, то прямые эти называются п е р е с е к а ю щ и м и с я. Если две прямые принадлежат одной плоскости и не имеют общей точки, то они называются п а р а л л е л ь н ы м и. Если общей точки двух прямых не существует и не существует плоскости, в которой лежали бы обе эти прямые, то прямые называются с к р е щ и в а ю щ и м и с я.

Теорема 2. *Любые две точки прямой определяют именно эту прямую.*

Эта теорема опять вытекает из аксиомы I. 2, так как по этой аксиоме две различные точки нельзя соединить более чем одной прямой.

Теорема 3. *Для любых трех точек существует плоскость, проходящая через каждую из них.*

Для трех точек, не лежащих на одной прямой, это предложение справедливо в силу аксиомы I. 5. Пусть теперь A, B и C — три точки одной прямой a. По аксиоме I. 4, существует точка D, не принадлежащая a. Тогда, по аксиоме I. 5, существует плоскость α, проходящая через точки A, B и D, а, по аксиоме I. 8, точка C также лежит в этой плоскости.

Теорема 4. *Если существует точка A, принадлежащая каждой из двух плоскостей α и β, то существует и прямая a, принадлежащая каждой из этих плоскостей.*

По аксиоме I. 9, помимо A, существует еще общая точка данных плоскостей, пусть точка B. По аксиоме I. 1, точки A и B определяют некоторую прямую a. Согласно аксиоме I. 8, прямая a лежит в каждой из данных плоскостей.

Из аксиомы I. 8 вытекает теорема.

Теорема 5. *Плоскость и не лежащая на ней прямая имеют не более одной общей точки.*

Если такая точка существует, то ее называют т о ч к о й п е р е с е ч е н и я прямой и плоскости. Если прямая и плоскость не имеют общей точки, то говорят, что они п а р а л л е л ь н ы.

Из аксиом I. 3, I. 5 и I. 6 следует теорема.

Теорема 6. *Если точка не принадлежит прямой, то существует единственная плоскость, проходящая через эту точку и эту прямую.*

Доказательство следующей теоремы несколько сложнее. Поэтому мы позволим себе фиксировать ход ее доказательства на рисунке. Надо помнить, однако, что рисунок рассматривается не как средство доказательства, а лишь как иллюстрация или как памятная запись. Рисунками мы будем пользоваться иногда и в дальнейшем, но лишь при таком, строго ограниченном, понимании их роли в ходе рассуждения.

Теорема 7. *На каждой плоскости лежат по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

Пусть α (рис. 37) — произвольная плоскость. По аксиоме I. 7, существует точка A, принадлежащая плоскости α. По аксиоме I.10, существует точка B, не принадлежащая α. По аксиоме I. 1, существует прямая AB, а по аксиоме I.4, существует точка C, не лежащая на прямой AB. По аксиоме I. 5, точки A, B и C определяют некоторую плоскость β.

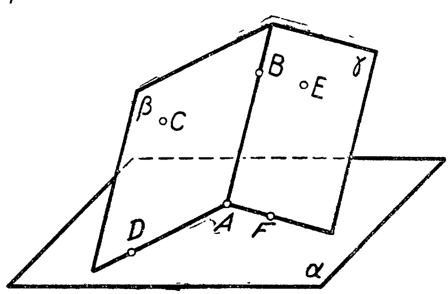


Рис. 37.

По аксиоме I. 9, существует отличная от A точка D, принадлежащая как плоскости α, так и плоскости β. По аксиоме I. 10, существует точка E, не лежащая в плоскости β, а следовательно, не лежащая на прямой AB.

Точки A, B и E определяют некоторую плоскость γ, отличную от α и β (аксиома I.5). По аксиоме I.9, существует отличная от A точка F, принадлежащая α и γ. Точка F не лежит на AB, так как при этом, по аксиоме I.8, все точки этой прямой, следовательно и точка B, лежали бы на плоскости α, что противоречит условию относительно точки B. Точка F не лежит на прямой AD, так как при этом, по аксиоме I.6, плоскости β и γ не могли бы быть различными и, в частности, точка E лежала бы в плоскости β, что противоречит условию относительно этой точки. Итак, в плоскости α существуют точки A, D и F, не лежащие на одной прямой.

Доказанными здесь теоремами по существу исчерпывается то содержание геометрии, которое вытекает только из аксиом соединения. Чрезвычайная ограниченность следствий из аксиом первой группы может быть доказана методом интерпретаций.

Представим себе четыре горошины A, B, C и D (рис. 38) и шесть вязальных спиц AB, AC, AD, BC, BD, CD, каждая из которых прокалывает две горошины. Представим себе далее, что полученный таким образом каркас оклеен четырьмя бумажными пластинками: ABC, ABD, ACD, BCD. Назовем горошины «точками», спицы — «прямыми», пластинки—«плоскостями». Будем понимать принадлежность в обыденном физическом смысле: «прямая проходит через точку», если спица прокалывает горошину; «плоскость проходит через точку», если пластинка наклеена на горошину.

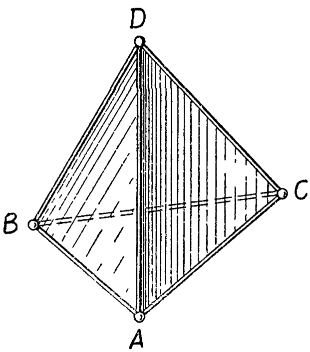


Рис. 38.

Таким путем образовано «пространство», состоящее из четырех «точек», шести «прямых» и четырех «плоскостей». Нетрудно непосредственно проверить, что «точки», «прямые» и «плоскости» этого «пространства» подчинены всем аксиомам первой группы.

На каждой «прямой» лежат только две «точки», на каждой «плоскости» — только три «точки». И так как все аксиомы первой группы при этом удовлетворяются, то ясно, что из этих аксиом не следует, что пространство более богато элементами, чем построенная модель. Следовательно, исходя только из аксиом первой группы, невозможно доказать, например, что на прямой — более двух точек или что на плоскости — более трех точек.

Для обогащения пространства новыми элементами, а в связи с этим и новыми свойствами, нужны новые аксиомы.

§ 12. Вторая группа аксиом: аксиомы порядка

Предполагается, что точки прямой находятся в отношениях порядка. Эти отношения описываются посредством слова «между».

Если точка B лежит между точками A и C, то пишут: $A\dot{B}C$.

Отношения порядка точек на прямой подчиняются следующим аксиомам:

II. 1. *Если $A\dot{B}C$, то A, B, C суть три различные точки одной прямой.*

II. 2. *Если $A\dot{B}C$, то также $C\dot{B}A$.*

II. 3. *Для любых двух точек A и B существует такая точка C, что $A\dot{B}C$.*

II. 4. *Среди трех точек прямой не более как одна лежит между двумя другими.*

Определения. Множество точек прямой a, состоящее из двух ее точек A и B и всех точек, лежащих между A и B, называется отрезком прямой a и обозначается символом AB или BA. Точки, лежащие между A и B, называются внутренними точками отрезка AB. Точки A и B называются концами отрезка AB. Точки прямой a, не лежащие между A и B и отличные от точек A и B, называются внешними к отрезку AB точками данной прямой.

В связи с этими определениями полезно вспомнить употребительное в школе определение: «Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется отрезком этой прямой». Это определение выражает наглядное представление об отрезке. Но с логической точки зрения оно неудовлетворительно, так как содержит не определенные до этого понятия «ограниченная» и «сторона».

Приведенные здесь четыре аксиомы являются линейными: в них говорится только о точках, лежащих на одной прямой. Следующая аксиома, известная под названием аксиомы Паша, определяет некоторые отношения порядка среди неколлинеарных точек. Это — одна из важнейших аксиом геометрии.

II. 5 (аксиома Паша). ***Пусть A, B, C — три точки, лежащие в некоторой плоскости, и a — прямая в той же плоскости, не проходящая ни через одну из этих точек. Если при этом прямая a проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка AC или через внутреннюю точку отрезка BC.***

Если прямая проходит через внутреннюю точку отрезка, то говорят также, что она пересекает этот отрезок.

§ 13. Основные теоремы о порядке точек

Теорема 8. *Для любых двух точек A и C существует по крайней мере одна точка B, лежащая между ними* (рис. 39).

Пусть A и C — две данные точки. Существует точка D, не лежащая на прямой AC (аксиома I. 4). Существует такая точка E, что $A\dot{D}E$ (аксиома II. 3). Существует точка F такая, что $E\dot{C}F$ (аксиома II. 3).

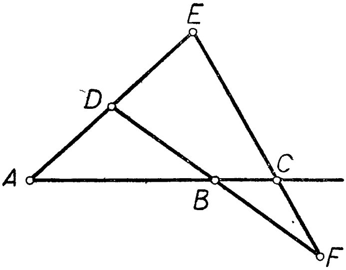


Рис. 39.

Прямая DF пересекает отрезок AE. Но она не может пересекать отрезок CE, так как проходит через точку F, внешнюю к этому отрезку, и отлична от прямой CE (ибо, допуская, что прямые DF и CE совпадают, придем к выводу, что совпадают прямые CE и AE, так что точка D — на прямой AC, что противоречит условию).

Применяя аксиому II. 5 к точкам A, C и E и к прямой DF, заключаем, что прямая DF проходит через некоторую внутреннюю точку B отрезка AC, так что существует такая точка B, что $A\dot{B}C$.

Теорема 9. *Среди трех точек прямой по крайней мере одна лежит между двумя другими.*

Пусть A, B и C — три точки одной прямой. Если $B\dot{A}C$ или $A\dot{C}B$, то теорема справедлива. Будем предполагать поэтому, что ни одно из этих соотношений не имеет места, и докажем, что $A\dot{B}C$.

Пусть точка D не лежит на прямой AC (рис. 40) (существование такой точки D обеспечивается аксиомой I. 4). По аксиоме II.3, существует такая точка E, что $B\dot{D}E$. Применяя аксиому II. 5 к точкам B, C, E и прямой AD и учитывая, что A не между B и C, заключим, что прямая AD проходит через некоторую точку F отрезка CE, так что $E\dot{F}C$.

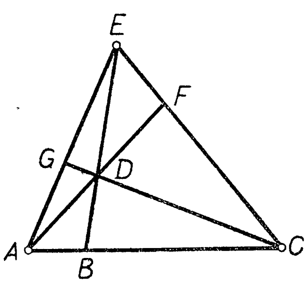


Рис. 40.

Далее, если учесть, что, по условию, C не есть точка отрезка AB, то из рассмотрения точек A, B и E и прямой CD, по той же аксиоме II. 5, следует, что прямая CD проходит через некоторую точку G отрезка AE, так что $A\dot{G}E$ и C, D, G — точки одной прямой. Рассмотрим далее точки A, F, E и прямую CG. По аксиоме II. 5, прямая CG должна проходить через некоторую точку отрезка AF. Но прямые CG и AF имеют общую точку D, которая, следовательно, и есть точка отрезка $AF : ADF$. Наконец, применяя аксиому II. 5 к точкам $A, \dot{F}, C$ и прямой DE, таким же путем придем к выводу, что $A\dot{B}C$, что и требовалось доказать.

Из аксиомы II. 4 и теоремы 9 непосредственно следует: *из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

Теорема 10 (первое дополнение к аксиоме Паша). *Если прямая a проходит через точку отрезка AB и через точку отрезка AC, то прямая a не может проходить также и через точку отрезка BC.*

Теорема доказывается от противного. Допустим, что прямая a проходит через точку P отрезка AB, через точку Q отрезка AC и через точку R отрезка BC (рис. 41).

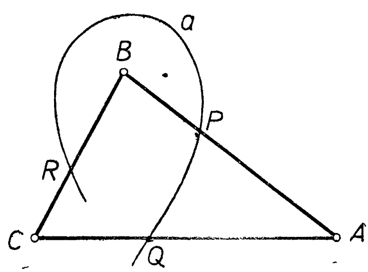


Рис. 41.

Согласно предыдущему следствию, одна из точек P, Q, R лежит между двумя другими. Пусть ради определенности $Q\dot{P}R$.

Заметим еще, что точка A — внешняя к отрезку CQ, а точка B — внешняя к отрезку CR, так как, по условию, $A\dot{Q}C$ и $B\dot{R}C$ и, следовательно, по аксиоме II. 4, не $C\dot{B}R$ и не $C\dot{A}Q$.

Применяя аксиому II. 5 к точкам C, R, Q и прямой AB, мы придем к противоречию. Прямая AB проходит через точку P отрезка RQ. Но она не может пересечь ни отрезок CR, ни отрезок CQ, так как проходит через точку B, внешнюю к отрезку CR, и через точку A, внешнюю к отрезку CQ.

Теорема 11. *Если $A\dot{B}C$ и $A\dot{C}D$, то $B\dot{C}D$ и $A\dot{B}D$.*

Такого рода предложения в условиях школьного курса считаются очевидными, так как говорить о доказательстве их можно, конечно, лишь при наличии точного перечня аксиом, чего в школьном курсе нет. Интересно отметить также, что для доказательства этой важной теоремы оказывается необходимым выйти за пределы рассматриваемой прямой: из линейных аксиом порядка она не может быть выведена и требует применения аксиомы Паша.

1) Докажем, что из отношений $A\dot{B}C$ и $A\dot{C}D$ следует отношение $B\dot{C}D$.

Из аксиом II.1 и II.2 следует, что все точки A, B, C и D лежат на одной прямой a. Пусть E — какая либо точка, не лежащая на этой прямой. Пусть F — такая точка, что $B\dot{E}F$

(рис. 42) (см. аксиому II.3). Заметим прежде всего, что прямая CF не может проходить через точку отрезка BE, так как имеет с прямой BE общую точку F, внешнюю к отрезку BE; совпасть же прямые BE и CF не могут, так как это влекло бы совпадение точек B и C, которые различны по условию (см. аксиому II. 1).

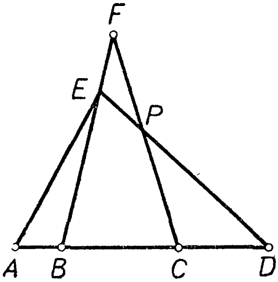


Рис. 42

Из аксиомы Паша в применении к точкам A, E, D и прямой CF следует, что прямая CF (как проходящая через точку C отрезка AD) проходит либо через точку отрезка AE, либо через точку отрезка DE. Но прямая CF не может пересекать отрезок AE: при этом, согласно аксиоме II. 5, она должна была бы пересечь отрезок AB (так как не пересекает отрезок BE), но, по условию, C — точка, внешняя к этому отрезку. Итак, прямая CF пересекает отрезок DE в некоторой точке P.

Применяя аксиому II.5 к точкам B, D, E и прямой CF, легко установить теперь, что C — точка отрезка BD, что и требовалось доказать.

2) Итак, из условий теоремы следует, что $B\dot{C}D$.

Исходя из $A\dot{B}C$ и $B\dot{C}D$ и проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно доказать также, что в условиях теоремы имеет место соотношение $A\dot{B}D$ (см. рис. 43).

Следствие. *Если $A\dot{B}C$ и $B\dot{C}D$, то $A\dot{B}D$ и $A\dot{C}D$.*

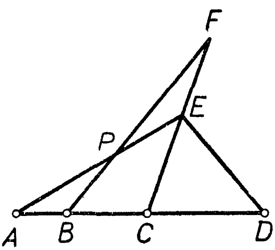


Рис. 43

Действительно, в п. 2 теоремы 11 уже отмечено, что соотношение $A\dot{B}D$ вытекает из данных соотношений. Остается вывести соотношение $A\dot{C}D$.

Для этого воспользуемся теоремой 11, но изменим принятые там обозначения следующим образом: вместо A напишем D, вместо B — C, вместо C — B и вместо D — A, т. е. примем обратный порядок обозначений. Тогда автоматически получим: если $D\dot{C}B$ и $D\dot{B}A$, то $C\dot{B}A$ и $D\dot{C}A$. Но соотношение $D\dot{C}B$ равносильно соотношению $B\dot{C}D$ (см. аксиому II.2), данному в условии, а соотношение $A\dot{B}D$ (равносильное $D\dot{B}A$) уже выведено.

Теорема 12. *Если C и D — точки отрезка AB, то каждая точка отрезка CD есть также точка отрезка AB.*

По условию, $A\dot{C}B$ и $A\dot{D}B$. Пусть M — какая-либо точка отрезка CD, т. е. $C\dot{M}D$.

Если бы имело место соотношение $C\dot{A}D$, то из $C\dot{A}D$ и $A\dot{D}B$, по предыдущему следствию, вытекало бы, что $C\dot{A}B$, а это противоречит условию. Следовательно, $A\dot{C}D$ или $A\dot{D}C$.

Если $A\dot{C}D$, то из $A\dot{C}D$ и $C\dot{M}D$ по п. 1 теоремы 11 следует, что $A\dot{M}D$, а из $A\dot{M}D$ и $A\dot{D}B$ по той же теореме следует, что $A\dot{M}B$, что и требовалось доказать.

Предположение $A\dot{D}C$ через аналогичные рассуждения приводит к тому же.

Теорема 13. *Каждому отрезку принадлежит по крайней мере счетное число внутренних точек.*

Рассмотрим произвольный отрезок AB. Согласно теореме 8, существует точка C, лежащая между A и B, т. е. C — внутренняя точка отрезка AB. По той же теореме, существует точка D между C и B. Из соотношений $B\dot{D}C$ и $B\dot{C}A$ по теореме 11 следует, что $B\dot{D}A$, т. е. что точка D также внутренняя точка отрезка AB.

Таким же образом можно установить, что точка E, выбранная между D и B, тоже есть внутренняя точка отрезка AB, и т. д.

Аксиомы порядка не позволяют доказать несчетность множества внутренних точек отрезка. Чтобы убедиться в том, что такое доказательство невозможно, достаточно представить себе, что из плоскости берутся только те точки, координаты которых рациональны, и только те прямые, параметры которых рациональны. Тогда нетрудно будет проверить, что все аксиомы I и II групп останутся в силе. Но ясно также, что в такой геометрии даже на каждой прямой будет только счетное множество точек, ибо множество всех рациональных чисел счетно.

Определение. Если $A\dot{O}B$, то говорят, что точки A и B расположены по разные стороны от точки O или, короче, что они противорасположены относительно точки O. Это обстоятельство мы будем иногда записывать так: Aп/р$B(O)$. Если же $A\dot{B}O$ или $B\dot{A}O$, то говорят, что точки A и B расположены по одну сторону от точки O или что точки A и B сорасположены относительно точки O. Это мы иногда будем записывать так: Aс/р$B(O)$.

Теорема 14. *Две точки A и B прямой a, каждая из которых сорасположена с третьей точкой C этой прямой относительно некоторой точки O этой прямой, сорасположены относительно точки O.*

Пусть дано, что Aс/р$C(O)$, Bс/р$C(O)$. Требуется доказать, что Aс/р$B(O)$.

Доказательство поведем от противного: допустим, что при данных условиях $A\dot{O}B$.

Условие Aс/р$C(O)$ означает, что $A\dot{C}O$ или $C\dot{A}O$. В первом предположении из $A\dot{C}O$ и $A\dot{O}B$ по теореме 11 следует, что $C\dot{O}B$, а это противоречит второму из данных по условию соотношений. К такому же противоречию придем, используя следствие из теоремы 11, если предположим, что $C\dot{A}O$.

Теорема 15. *Если из двух точек A и B прямой a одна сорасположена, а другая противорасположена с третьей точкой C относительно некоторой точки O той же прямой, то данные две точки A и B противорасположены относительно точки O.*

По условию, Aс/р$C(O)$, Bп/р$C(O)$. Если бы было Aс/р$B(O)$, то вместе с первой частью условия это привело бы по теореме 14 к соотношению Cс/р$B(O)$, которое противоречит второй части условия.

Теорема 16. *Если две точки прямой противорасположены с третьей относительно некоторой четвертой точки той же прямой, то они сорасположены между собой относительно этой четвертой точки.*

Пусть дано, что Aп/р$C(O)$ и Bп/р$C(O)$. Относительно трех точек A, B и C возможны три допущения: $A\dot{B}C$, $B\dot{A}C$ или $B\dot{C}A$. В первом предположении из $C\dot{O}B$ и $C\dot{B}A$ по теореме 11 следует $O\dot{B}A$, что и требовалось доказать. Остальные два предположения приводят к результату подобным же образом.

Теорема 17. *Точка, избранная на прямой, разделяет остальные точки этой прямой на два таких класса, что каждые две точки одного класса сорасположены, а каждые две точки из разных классов противорасположены относительно данной точки. Классы эти определяются данной точкой однозначно.*

Пусть a — данная прямая, O — избранная на ней точка.

Пусть P — какая-либо точка прямой a, отличная от O. Отнесем эту точку к классу K. Если точка A сорасположена с точкой P относительно O, то отнесем точку A к тому же классу, что и P, т. е. к классу K, как это требует условие теоремы. А если Bп/р$P(O)$, то отнесем точку B к другому классу $\overline{K}$. Этого также требует условие теоремы.

Из теорем 14—16 легко заключить, что при таком разделении на классы эти классы действительно будут обладать свойствами, которые указаны в условии теоремы.

Остается доказать единственность разделения, а для этого надо доказать только, что классы эти не зависят от выбора точки P.

Представим себе, что, сохраняя метод разделения точек на классы, мы заменили точку P некоторой другой точкой P'. Пусть для определенности Pс/р$P'(O)$. Тогда из теорем 14 и 15 ясно, что две точки, отнесенные первоначально в один класс, будут опять попадать в один класс, и, напротив, если они попадали в разные классы, т. е. одна из них была сорасположена, а другая противорасположена с P относительно O, то они будут находиться в таких же отношениях и с точкой P', т. е. опять попадут в разные классы. То же можно установить и в предположении, что Pп/р$P'(O)$.

Классы, на которые точка O прямой a делит остальные точки этой прямой так, как указано в теореме 17, называются полупрямыми или л у ч а м и прямой a. Каждый из двух лучей прямой называют д о п о л н и т е л ь н ы м к другому. Если один из лучей данной прямой a обозначается через $\bar{a}$, то дополнительный луч обозначают через $\bar{\bar{a}}$.

Когда говорят, что на некотором множестве точек определено некоторое его подмножество, то подразумевают, что относительно каждой точки множества известно, принадлежит ли она данному подмножеству или нет. Если на прямой a дана точка O, то, как это следует из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 17, каждый луч прямой a определяется любым его «представителем», т. е. любой его точкой P. Об этом луче говорят, что он исходит из точки O и проведен через точку P.

Такой луч мы будем иногда обозначать символом $\overline{OP}$.

Теорема 18. *Множество точек прямой можно упорядочить, т. е. можно ввести для точек прямой транзитивное отношение предшествования* (и соответственно *следования*).

Чтобы этого достигнуть, выберем на прямой какие-либо две точки O и P. Чтобы «упорядочить точки в направлении от O к P», условимся считать, что:

1) на луче $\overline{OP}$ точка M предшествует точке N (или, что то же, точка N следует за точкой M), если $O\dot{M}N$;

2) на дополнительном луче точка M предшествует точке N, если $O\dot{N}M$;

3) всякая точка луча $\overline{OP}$ следует за каждой точкой дополнительного луча и за точкой O;

4) всякая точка дополнительного луча предшествует точке O.

Выведем теперь свойство транзитивности таким образом упорядоченного множества точек прямой: если A предшествует B и B предшествует C, то A предшествует C.

Рассмотрим сначала тот случай, когда все точки A, B, C принадлежат лучу $\overline{OP}$. Согласно принятому определению (пункт 1), «A предш. B» означает, что $O\dot{A}B$, «B предш. C» означает, что $O\dot{B}C$. Из этих соотношений, по теореме 11, следует $O\dot{A}C$, а это, по определению, означает, что A предшествует C.

Аналогично ведется доказательство в случае, когда все точки A, B, C принадлежат дополнительному лучу (см. пункт 2 определения).

Кроме этих, можно сделать еще лишь следующие предположения:

a) B и C принадлежат лучу $\overline{OP}$, A совпадает с O;

b) B и C принадлежат лучу $\overline{OP}$, A — дополнительному лучу;

c) C принадлежит $\overline{OP}$, $B \equiv A$, C принадлежит дополнительному лучу;

d) C принадлежит $\overline{OP}$, A и B принадлежат дополнительному лучу;

e) $C \equiv O$, A и B принадлежат дополнительному лучу.

В каждом из этих предположений соотношение «A предш. C» легко выводится из определений.

§ 14. Некоторые плоские фигуры

В этом параграфе будут рассмотрены понятия полуплоскости, угла и многоугольника.

Пусть p — прямая, лежащая в некоторой плоскости α. Пусть A и B — две точки плоскости α, не лежащие на прямой p. Если прямая p проходит через внутреннюю точку отрезка AB, то говорят, что точки A и B расположены по разные стороны от прямой p или, короче, что точки A и B противорасположены относительно прямой p. Если же общей точки прямой p и отрезка AB не существует, то говорят, что точки A и B расположены по одну сторону от прямой p или что они **сорасположены** относительно прямой p.

Для отношений сорасположенности и противорасположенности точек относительно прямой справедливы следующие теоремы.

Теорема 19. *Две точки плоскости, сорасположенные с третьей точкой относительно некоторой прямой, сорасположены между собой относительно этой прямой.*

Пусть дано: $A\text{с/р}C(p)$, $B\text{с/р}C(p)$. Требуется доказать: $A\text{с/р}B(p)$. Рассмотрим сначала случай, когда точки A, B, C лежат на одной прямой q. Если прямые p и q параллельны, то справедливость заключения теоремы 19 самоочевидна. Пусть поэтому прямые p и q пересекаются в точке O (рис. 44.) Тогда, по условию, точка O не является ни точкой отрезка AC, ни точкой отрезка BC и, следовательно, точки A, B и C находятся на прямой q в условиях теоремы 14, § 13. Согласно этой теореме, $A\text{с/р}B(O)$.

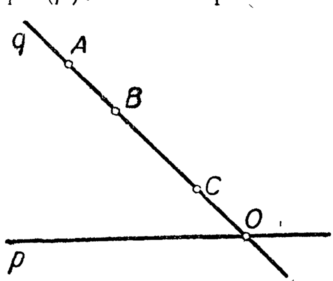


Рис. 44.

Следовательно, точка O не принадлежит отрезку AB. Но прямая p не может проходить через какую-либо другую точку отрезка AB, так как прямые p и q — различны и имеют общую точку O. Итак, для случая, когда точки A, B и C коллинеарны, теорема 19 доказана.

Положим теперь, что точки A, B и C не лежат на одной прямой. В этом случае справедливость теоремы 19 вытекает непосредственно из аксиомы Паша: если бы прямая p прошла через точку отрезка AB, то она прошла бы либо через точку отрезка AC, либо через точку отрезка BC. Но эти предположения противоречат условию теоремы.

Теорема 20. *Две точки плоскости, противорасположенные с третьей точкой относительно некоторой прямой, сорасположены относительно этой прямой.*

Дано: Aп/р$C(p)$, Bп/р$C(p)$. Требуется доказать: Aс/р$B(p)$.

1-й случай. Точки A, B и C лежат на одной прямой q. По условию, прямая p пересекает прямую q в некоторой точке O. В этом случае остается применить теорему 16 (§ 13).

2-й случай. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. В этом случае справедливость теоремы 20 следует непосредственно из теоремы 10 (§ 13).

Теорема 21. *Если из двух точек A и B плоскости одна сорасположена, а другая противорасположена с третьей точкой C относительно прямой p, то точки A и B противорасположены относительно прямой p.*

Дано: Aс/р$C(p)$, Bп/р$C(p)$. Требуется доказать: Aп/р$B(p)$. Доказательство легко проводится от противного: допуская, что Aс/р$B(p)$ и принимая во внимание первое из условий, т. е. Aс/р$C(p)$, мы заключили бы по теореме 19, что Bс/р$C(p)$, а это противоречит второму условию.

Теорема 22. *Прямая, выбранная на плоскости, разделяет точки этой плоскости, не принадлежащие выбранной прямой, на два таких класса, что каждые две точки одного класса сорасположены, а каждые две точки из разных классов противорасположены относительно выбранной прямой. Классы эти определяются выбором прямой однозначно.*

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как доказательство теоремы 17 (§ 13).

Классы, на которые прямая p плоскости α делит точки плоскости α, не лежащие на прямой p, называются полуплоскостями плоскости α. Каждая полуплоскость определяется любой ее точкою P. Полуплоскость, определяемую прямой p и точкой P, будем обозначать символом п/пл (p, P). Если выделена одна из полуплоскостей относительно данной прямой, то вторая полуплоскость называется дополнительной к ней.

Вполне аналогично предыдущему можно ввести понятие о сорасположенности и противорасположенности точек пространства относительно данной плоскости и установить разделение точек пространства плоскостью на два полупространства.

Определение. Пусть $\overline{h}$ и $\overline{k}$ — два луча, исходящие из одной точки O и не принадлежащие одной прямой.

Фигура, состоящая из точки O, лучей $\overline{h}$ и $\overline{k}$ и из всех точек, которые лежат по ту же сторону прямой h, что и луч $\overline{k}$, и по ту же сторону прямой k, что и луч $\overline{h}$, называется у г л о м.

Лучи $\overline{h}$ и $\overline{k}$, определяющие данный угол, называются с т о р о н а м и этого угла, точка O, из которой они исходят, называется в е р ш и н о й угла.

Общая часть (пересечение) полуплоскостей $(h, \overline{k})$ и $(k, \overline{h})$ называется в н у т р е н н е й о б л а с т ь ю у г л а (рис. 45).

Для обозначения угла употребляется символ $\sphericalangle(\overline{h}, \overline{k})$.

Ясно, что угол определяется вершиной O и какими-либо двумя точками A и B его сторон. Такой угол обозначают символом $\sphericalangle AOB$ или $\sphericalangle BOA$.

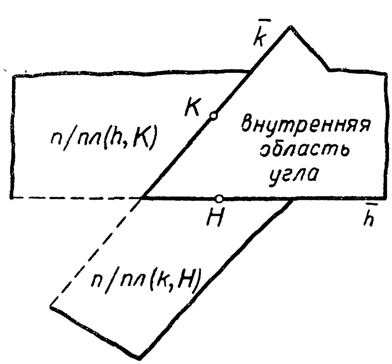


Рис. 45.

Теорема 23. *Если точки A и B лежат соответственно на сторонах угла $(\overline{h}, \overline{k})$, то каждая внутренняя точка M отрезка AB лежит во внутренней области угла $(\overline{h}, \overline{k})$* (рис. 46).

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из определений: внутренней точки отрезка, внутренней области угла и сорасположенности точек относительно прямой.

Теорема 24. *Если A и B — две внутренние точки угла $(\overline{h}, \overline{k})$, то каждая внутренняя точка M отрезка AB лежит внутри этого угла.*

По определению, точки A и B принадлежат одной полуплоскости относительно прямой h. Докажем, что M принадлежит той же полуплоскости. Точка M не может принадлежать прямой h, так как это означало бы противорасположенность точек A и B относительно этой прямой. Нельзя допустить также, что прямая h проходит через некоторую точку P отрезка AM, так как из $A\dot{M}B$ и $A\dot{P}M$ следовало бы, по теореме 11 (§ 13), что $A\dot{P}B$, а это противоречит условию. Итак, точки A, B и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой h.

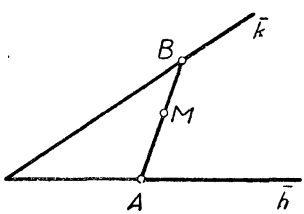


Рис. 46.

Таким же образом можно доказать, что точка M принадлежит вместе с A и B одной полуплоскости относительно прямой k.

Свойство внутренней области угла, установленное теоремой 24, называется свойством выпуклости.

Теорема 25. *Каждый луч, проведенный из вершины угла в какую-либо точку внутренней области угла, целиком лежит во внутренней области этого угла.*

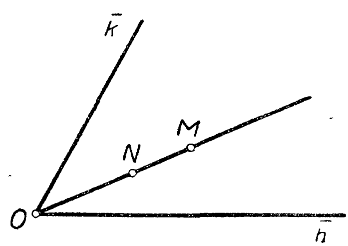


Рис. 47.

Пусть O — вершина угла $(\bar{h}, \bar{k})$, M — точка внутренней области этого угла, N — произвольная точка луча $\overline{OM}$. Из определений непосредственно следует, что N — также внутренняя точка угла $(\bar{h}, \bar{k})$ (рис. 47).

Теорема 26. *Если A и B точки, лежащие соответственно на сторонах угла $(\bar{h}, \bar{k})$, то каждый луч $\bar{l}$, проходящий через вершину угла $(\bar{h}, \bar{k})$ и лежащий во внутренней области этого угла, проходит через внутреннюю точку отрезка AB.*

Пусть C — какая-либо точка прямой h, противорасположенная A относительно O (рис. 48). Применяя аксиому Паша к точкам A, B, C и прямой l, найдем, что прямая l, проходя через точку отрезка AC, должна пройти через точку отрезка BC или точку отрезка AB. Такая точка не может принадлежать лучу $\bar{\bar{l}}$, так как он расположен с отрезками AB и BC по разные стороны прямой h. Но луч $\bar{l}$ не может пройти через точку отрезка BC, так как расположен с этим отрезком по разные стороны прямой k.

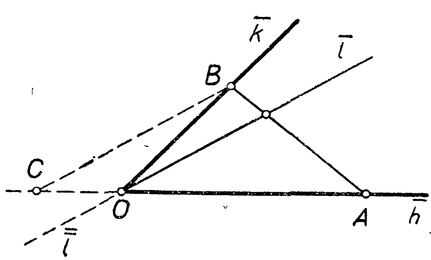


Рис. 48.

Остается допустить, что луч $\bar{l}$ проходит через точку отрезка AB, что и требовалось доказать.

Теорему 26 можно рассматривать как второе дополнение к аксиоме Паша: эта теорема показывает, как распространяется аксиома Паша на случай, когда прямая a, о которой говорится в аксиоме, проходит через одну из данных по условию аксиомы точек A, B, C.

Определение. Система отрезков A_0A_1, $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n (n \geqslant 2)$ называется ломаной линией и обозначается символом $A_0A_1 \dots A_n$.

Определение. Если $n > 2$ и точка A_0 совпадает с точкой A_n, то ломаная $A_0A_1 \dots A_n$ называется замкнутой ломаной линией или многоугольником (n-угольником). Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **вершинами**, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — **сторонами** многоугольника.

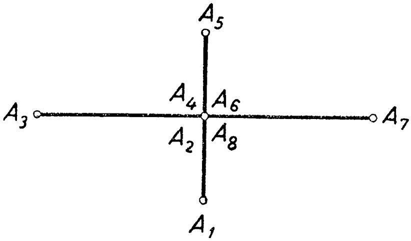


Рис. 49.

Многоугольник называется **плоским**, если все его вершины принадлежат одной плоскости.

Понятие многоугольника в его общей форме охватывает значительно более широкий класс фигур, нежели тот, который подразумевается под этим понятием в школьном курсе геометрии. Это ясно из рассмотрения, например, фигуры, изображенной на рисунке 49, которая подходит под определение восьмиугольника, или фигуры, изображенной на рисунке 50, которая подходит под определение пятиугольника.

Наиболее важным классом многоугольников является класс простых многоугольников.

Определение. Многоугольник называется **простым**, если: 1) все его вершины различны, 2) стороны его не пересекаются, 3) ни одна из вершин не является внутренней точкой какой-либо стороны.

Восьмиугольник, изображенный на рисунке 49, не простой, так как не удовлетворяет условию 1.

Пятиугольник, изображенный на рисунке 50, не простой, так как не удовлетворяет условию 2.

Пятиугольник, изображенный на рисунке 51, также не простой: его вершина A_3 лежит на стороне A_5A_1, так что нарушено условие 3.

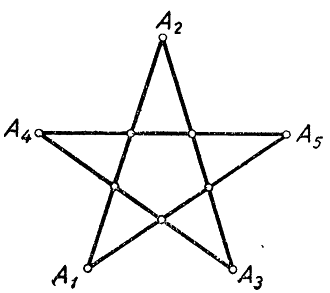


Рис. 50

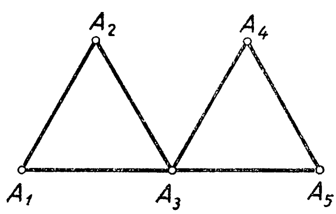


Рис. 51

Свойство «простоты» многоугольника не всегда отвечает обыденным представлениям о простоте. Так, например, многоугольник, изображенный на рисунке 52, по определению простой.

Остановимся вкратце на понятиях внутренней и внешней области простого плоского многоугольника. В простейших случаях, которые встречаются в школьном курсе геометрии, вопрос о принадлежности той или иной точки плоскости внутренней или внешней области многоугольника решается обычно на основе наглядных соображений. Надо установить отчетливо выраженное правило для решения этого вопроса. Без этого нелегко ответить на вопрос о том, например, является ли точка N внешней или внутренней относительно простого многоугольника, изображенного на рисунке 52.

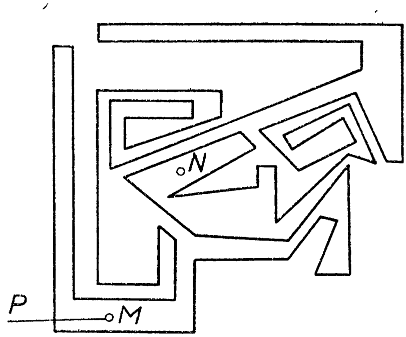


Рис. 52

Условимся говорить, что луч $\bar{l}$ проходит через многоугольник каждый раз, когда: 1) он проходит через точку, лежащую на стороне многоугольника (точки M и N на рисунке 53); 2) он проходит через вершину многоугольника, причем стороны, исходящие из этой вершины, лежат от этого луча по разные стороны (точка A_4 на рисунке 53); 3) он проходит через две соседние вершины многоугольника (так что содержит сторону многоугольника), а две прилежащие стороны многоугольника лежат по разные стороны от данного луча (вершины A_7 и A_8 на рисунке 53).

На рисунке 53 изображен луч $\bar{l}$, четыре раза «проходящий через» многоугольник $A_1A_2A_3...A_{15}$.

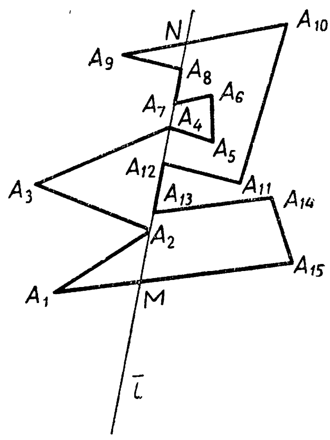


Рис. 53

Теорема 27. *Каждая точка плоскости, не принадлежащая данному простому плоскому многоугольнику, обладает либо тем свойством, что все исходящие из нее лучи проходят через этот многоугольник четное число раз, либо тем свойством, что все они проходят через него нечетное число раз.*

Для доказательства рассмотрим многоугольник $A_1A_2...A_n$, любую точку P, лежащую в его плоскости, не являющуюся вершиной этого многоугольника или точкой его стороны, и два произвольных луча $\overline{h}$ и $\overline{k}$, исходящих в той же плоскости из точки P.

Будем «обходить» данный многоугольник, т. е. последовательно называть его вершины $A_1, A_2, \dots, A_n$ и стороны $A_1A_2, A_2A_3, \dots$ $\dots, A_nA_1$. Каждый раз, когда луч $\overline{h}$ или луч $\overline{k}$ проходит через данный многоугольник, мы будем при этом переходить из внутренней области угла $(\overline{h}, \overline{k})$ в его внешнюю область или наоборот. Заметим, что и обратно: переход из одной области в другую будет происходить только в тех случаях, когда какая-либо из сторон угла $(\overline{h}, \overline{k})$ проходит через многоугольник. Начав с данной области, мы вернемся в ту же область угла $(\overline{h}, \overline{k})$, т. е. совершим всего четное число таких переходов. Следовательно, общее число прохождений лучей $\overline{h}$ и $\overline{k}$ через данный многоугольник четно, а поэтому либо оба числа прохождений каждого луча через многоугольник четны, либо оба нечетны.

Определение. Точка данной плоскости, не принадлежащая простому многоугольнику, называется в н у т р е н н е й относительно этого многоугольника, если каждый выходящий из нее луч проходит через этот многоугольник нечетное число раз. Остальные не принадлежащие многоугольнику точки плоскости называются в н е ш н и м и относительно многоугольника.

Согласно предыдущей теореме, каждая не принадлежащая простому плоскому многоугольнику точка (его плоскости) есть либо внешняя, либо внутренняя к нему точка. Чтобы определить, к какому именно классу относится данная точка, достаточно подсчитать число прохождений через многоугольник какого-либо одного луча, проведенного из этой точки. Например, точка M (рис. 52) — внутренняя, так как луч $\overline{MP}$ проходит через данный многоугольник только один раз; точка N — внешняя.

Упомянем еще об одной теореме относительно внутренней и внешней областей простого многоугольника.

Теорема 28. *Всякая ломаная, соединяющая внешнюю и внутреннюю точки простого многоугольника, имеет по крайней мере одну общую точку с данным многоугольником. Напротив: две внутренние или две внешние точки всегда можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с данным многоугольником. Существуют прямые, целиком лежащие во внешней области простого многоугольника. Никакая прямая не может лежать целиком внутри простого многоугольника.*

Эта теорема для простых замкнутых кривых была впервые сформулирована К. Жорданом (1838—1922) в его курсе анализа. В последнее время найдены элементарные способы ее доказательства для многоугольников (см., например [6], примечание 15 — доказательство Винтерница.

Мы не будем приводить доказательство этой теоремы.

§ 15. Третья группа аксиом: аксиомы конгруентности

Предполагается, что отрезки могут находиться в отношении **конгруентности** (равенства), которое обозначается символом $\equiv$ и подчиняется следующим аксиомам.

Аксиома III. 1. *Если A и B — две точки прямой a и A' — точка той же или другой прямой a', то на каждом из лучей, определяемых точкой A' на прямой a', существует такая точка B', что $AB \equiv A'B'$.*

Замечание. Соотношения $AB \equiv A'B'$, $BA \equiv B'A'$, $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv A'B'$ имеют один и тот же смысл, так как в понятии отрезка не содержится никакого указания относительно порядка наименования его концов.

Аксиома III. 2. *Если $A'B' \equiv AB$, $A''B'' \equiv AB$,* то *$A'B' \equiv A''B''$.*

Аксиома III. 3. *Пусть AB и BC — два отрезка прямой, причем ABC. Пусть $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка той же или другой прямой, причем $A'B'C'$. Если при этом $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AC \equiv A'C'$.*

Мы полагаем также, что углы могут находиться в отношении конгруентности (равенства), которое обозначается символом $\equiv$ и подчиняется следующим аксиомам.

Аксиома III. 4. *Пусть даны* (рис. 54): *угол $(\overline{h}, \overline{k})$ в плоскости α и прямая h' в той же или другой плоскости α', а также определенная полуплоскость плоскости α' относительно прямой h'. Пусть $\overline{h'}$ — луч прямой h', исходящий из точки O'. Тогда в плоскости α' существует один и только один луч $\overline{k'}$, исходящий из точки O' и такой, что $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'})$, причем все внутренние точки угла $(\overline{h'}, \overline{k'})$ находятся в данной полуплоскости плоскости α'.*

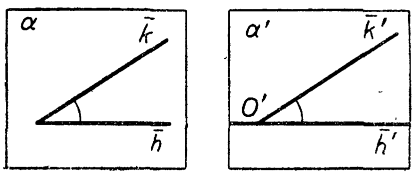


Рис. 54

Аксиома III. 5. *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место соотношения $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$* и *$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$, то имеет место также соотношение: $\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$.*

Не следует смущаться тем обстоятельством, что в школьном курсе геометрии это последнее предположение вводится как теорема (вспомните первый признак равенства треугольников): там для этой цели привлекается понятие движения (в форме „наложения“ треугольников), которое понимается в его физическом смысле. Мы же не располагаем таким понятием. В дальнейшем (см. § 39) будет доказано, что остальные принятые нами аксиомы не позволяют доказать предложение III. 5, т. е. его нельзя рассматривать как теорему.

Аксиома III. 6. *Всегда* $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k}) \equiv \measuredangle(\overline{h}, \overline{k})$.

Замечание. Мы не делаем разницы между символами $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k})$ и $\measuredangle(k, h)$.

§ 16. Некоторые следствия из аксиом конгруентности

Отметим несколько основных теорем, непосредственно следующих из аксиом третьей группы.

Теорема 29 (свойство рефлексивности). *Всегда* $AB \equiv AB$, *т. е. всякий отрезок конгруентен себе.*

Действительно, пусть на прямой a дан некоторый отрезок AB. Рассмотрим на этой или на другой прямой a' произвольную точку A'. Тогда, по аксиоме III. 1, на каждом луче прямой a' существует такая точка B', что $AB \equiv A'B'$. Запишем это соотношение дважды: $AB \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$. Применяя теперь аксиому III. 2, получим: $AB \equiv AB$, что и требовалось доказать.

Теорема 30 (свойство взаимности конгруентных отрезков). *Если* $AB \equiv A'B'$, *то также* $A'B' \equiv AB$.

В самом деле, $A'B' \equiv A'B'$ по теореме 29, $AB \equiv A'B'$ по условию. И опять из аксиомы III. 2 можно заключить: $A'B' \equiv AB$, что и требовалось доказать.

Теорема 31 (свойство транзитивности конгруентных отрезков). *Если* $AB \equiv A'B'$ и $A'B' \equiv A''B''$, *то* $AB \equiv A''B''$.

Действительно, из $A'B' \equiv A''B''$, в силу взаимности, следует: $A''B'' \equiv A'B'$, а из $AB \equiv A'B'$ и $A''B'' \equiv A'B'$, по аксиоме III. 2, вытекает теперь: $AB \equiv A''B''$, что и требовалось доказать.

Теорема 32. *В условиях аксиомы* III. 5 *всегда также* $\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$.

Для доказательства поменяем местами в условии и заключении аксиомы III. 5 буквы B и C, а также буквы B' и C'. Тогда аксиома III. 5 будет читаться так: если для двух треугольников ACB и $A'C'B'$ имеют место соотношения $AC \equiv A'C'$, $AB \equiv A'B'$, $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B'$, то имеет место также соотношение $\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'$. Нетрудно видеть, что условия аксиомы сохранили свой первоначальный вид, а в заключении получено соотношение, которое требовалось доказать.

Теорема 33. *На каждом луче прямой a' существует не более одной такой точки B', о какой говорится в аксиоме* III. 1.

Проведем доказательство от противного. Допустим, что на луче $\overline{a'}$ существует две такие различные точки B' и B'', что $AB \equiv A'B'$ и $AB \equiv A'B''$ (рис. 55). Пусть C' — какая-либо точка, не принадлежащая прямой a' (существование такой точки обеспечивается аксиомой I. 4).

Замечая, что $A'B' \equiv A'B'$ по теореме 29, $A'B'$ $A'B''$ по аксиоме III. 2 и свойству взаимности, $\sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C'$ го аксиоме III.6, и применяя аксиому III.5 к треугольникам $A'B'C'$ и $A'B''C'$, найдем, что $\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B''$. Но так как, по аксиоме III. 6, $\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B'$, то мы пришли к противоречию с аксиомой III.4, где утверждается единственность угла, построенного при данном луче в данной полуплоскости и конгруентного данному углу.

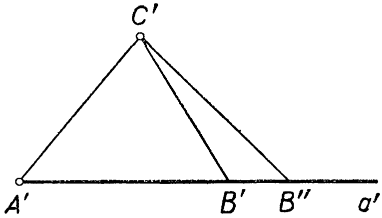


Рис. 55.

Теорема 34. *Если в треугольнике ABC сторона AB конгруентна стороне BC* (т. е. если треугольник ABC равнобедренный), *то* $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$.

Справедливость этого предложения следует непосредственно из аксиомы III. 5, если применить ее к треугольникам ABC и CBA.

Заметим, что в условиях этой теоремы также $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle BAC$, т. е. конгруентность углов A и C взаимна, так как взаимна конгруентность отрезков AB и BC. В дальнейшем (§ 17) будет доказана взаимность конгруентности углов вообще, но пока еще мы не располагаем таким свойством углов.

§ 17. Конгруентность треугольников и некоторые свойства конгруентных углов

Определение. Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то система трех отрезков AB, BC и CA называется *треугольником* и обозначается символом $\triangle ABC$. Точки A, B и C называются *вершинами* треугольника ABC, отрезки AB, AC и BC — *сторонами* его. Углы $(\overline{AB}, \overline{AC})$, $(\overline{BA}, \overline{BC})$ и $(\overline{CA}, \overline{CB})$ называются *углами треугольника* ABC и обозначаются иногда соответственно через $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$.

Определение. Соотношение $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ означает, что все элементы треугольника ABC соответственно конгруентны элементам треугольника $A'B'C'$, т. е. что имеют место соотношения:

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

По поводу этого определения следует сделать некоторые замечания.

1) Так как мы еще не располагаем взаимностью конгруентных углов, то и соотношение конгруентности треугольников нельзя пока рассматривать как взаимное, так что, в частности, мы пока еще не имеем права говорить «треугольники конгруентны», а лишь «треугольник такой-то конгруентен треугольнику такому-то».

2) Мы не могли сохранить определение равных треугольников, принимаемое обычно в школе, так как там используется операция движения, которая сама не определена в геометрическом смысле.

3) Приведенное здесь определение конгруентности треугольников можно перенести и на многоугольники.

Теорема 35 (первый признак равенства треугольников). *Если* $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ и $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Из шести соотношений, означающих по совокупности конгруентность треугольников, три заданы по условию.

Из аксиомы III. 5 и теоремы 32 вытекают еще два соотношения:

$$\measuredangle B \equiv \measuredangle B' \text{ и } \measuredangle C \equiv \measuredangle C'.$$

Остается доказать, что $BC \equiv B'C'$.

Пусть B'' — такая точка луча $\overline{C'B'}$, что $CB \equiv C'B''$ (рис. 56) (см. аксиому III. 1). Тогда треугольники ABC и $A'B''C'$ находятся в условиях аксиомы III. 5, и поэтому $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B''$.

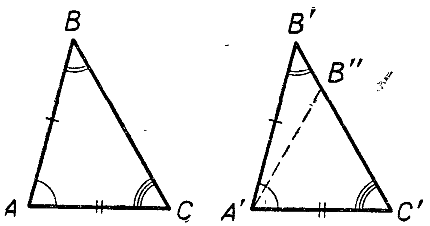


Рис. 56.

Но, по условию теоремы, $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B'$. Поэтому, согласно аксиоме III. 4, луч $\overline{A'B''}$ должен совпасть с лучом $\overline{A'B'}$. Значит, точка B'' лежит и на луче $\overline{C'B'}$, и на луче $\overline{A'B'}$. Но эти лучи имеют единственную общую точку B'. Следовательно, точка B'' совпадает с точкой B', и поэтому $CB \equiv C'B'$, что и требовалось доказать.

Теорема 36 (второй признак равенства треугольников). *Если* $AC \equiv A'C'$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$ и $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Доказательство этой теоремы сходно с предыдущим. Поэтому мы его опустим и предоставим читателю в качестве упражнения.

Определение. Два угла, одна сторона которых — общая, а две другие — лучи одной прямой, называются **смежными**.

Лемма 1. *Если $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A'O'B'$, то угол, смежный с углом AOB, конгруентен углу, смежному с углом $A'O'B'$.*

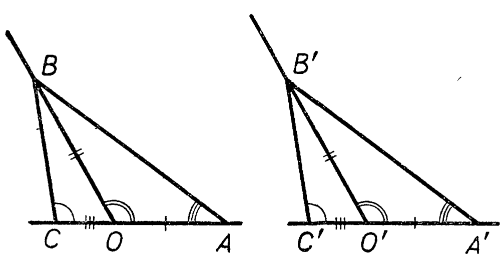


Рис. 57.

Пусть $OA \equiv O'A'$, $OB \equiv O'B'$, $OC \equiv O'C'$ (рис. 57). Треугольники AOB и $A'O'B'$ находятся в условиях первого признака конгруентности, и поэтому $AB \equiv A'B'$ и $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$.

Согласно аксиоме III. 3, $AC \equiv A'C'$, и поэтому в соответствии с первым признаком равенства $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, откуда следует, в частности, что $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$ и $CB \equiv C'B'$. Теперь ясно, что $\triangle COB \equiv \triangle C'O'B'$, и поэтому $\measuredangle COB \equiv \measuredangle C'O'B'$, что и требовалось доказать.

Из этой леммы следует, между прочим, что так называемые противоположные углы, т. е. углы, образованные соответственно дополнительными лучами двух пересекающихся прямых, взаимно конгруентны. На рисунке 58 $\measuredangle AOB \equiv \measuredangle A'OB'$ (и наоборот), так как они смежны с одним и тем же углом AOB' (или $A'OB$).

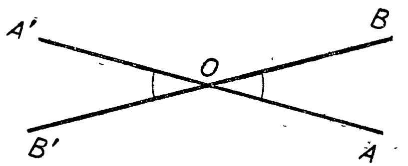


Рис. 58

Лемма. 2. *Пусть $(\bar{h}, \bar{k})$ и $(\bar{h}, \bar{l})$ — два угла в плоскости α, имеющие общую вершину O. Пусть $(\bar{h}', \bar{k}')$ и $(\bar{h}', \bar{l}')$ — два угла в той же или в другой плоскости α', также имеющие общую вершину O'. Пусть, кроме того, пары лучей $\bar{l}$, $\bar{k}$ и $\bar{l}'$, $\bar{k}'$ обе лежат по одну сторону соответственно от прямых h и h' или же обе — по разные стороны от этих прямых. Если при этом $\measuredangle(\bar{h}, \bar{k}) \equiv \measuredangle(\bar{h}', \bar{k}')$ и $\measuredangle(\bar{h}, \bar{l}) \equiv \measuredangle(\bar{h}', \bar{l}')$, то $\measuredangle(\bar{k}, \bar{l}) \equiv \measuredangle(\bar{k}', \bar{l}')$.*

При доказательстве этой леммы мы ограничимся случаем противорасположенности $\bar{k}$ и $\bar{l}$ относительно h.

Рассмотрим произвольную точку K на луче $\bar{k}$, а также произвольную точку L на луче $\bar{l}$ (рис. 59). Отрезок KL пересекает луч $\bar{h}$ или дополнитель-

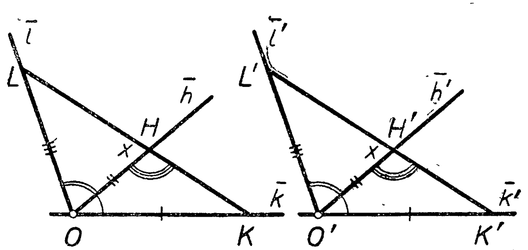


Рис. 59

ный луч $\bar{\bar{h}}$. Ограничимся случаем, когда точка H пересечения лежит на луче $\bar{h}$ (другой случай сводится к этому с помощью леммы 1). При этом $K\dot{H}L$.

Пусть K'—такая точка луча $\bar{k}'$, что $OK \equiv O'K'$, H'—такая точка луча $\bar{h}'$, что $OH \equiv O'H'$, L'— такая точка луча $\bar{l}'$, что $OL \equiv O'L'$. Тогда, по теореме 35, $\triangle OKH \equiv \triangle O'K'H'$, и поэтому $HK \equiv H'K'$. Так же найдем, что $\triangle HLO \equiv \equiv H'L'O'$, и поэтому $HL \equiv H'L'$. При этом также $\measuredangle OHK \equiv \measuredangle O'H'K'$ и $\measuredangle OHL \equiv \measuredangle O'H'L'$. Из леммы 1 и аксиомы III. 4 следует, что углы $O'H'K'$ и $O'H'L'$ — смежные, так что точки K', H' и L' лежат на одной прямой При этом $K'\dot{H}'L'$, так как лучи $\bar{k}'$ и $\bar{l}'$ противорасположены относительно прямой h'. Из аксиомы III. 2 теперь следует, что $KL \equiv K'L'$.

Применяя аксиому III. 5 к треугольникам OKL и $O'K'L'$ и учитывая, что по равенству треугольников OKH и $O'K'H'$ $\sphericalangle K \equiv \sphericalangle K'$, найдем, что $\sphericalangle KOL \equiv \sphericalangle K'O'L'$, что и требовалось доказать.

Теорема 37 (третий признак равенства треугольников). *Если* $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$, то $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Пусть B_1 (рис. 60) — точка, сорасположенная с точкой B' относительно прямой $A'C'$и такая, что $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B_1$ (см. аксиому III. 4) и $AB \equiv A'B_1$ (см. аксиому III. 1).

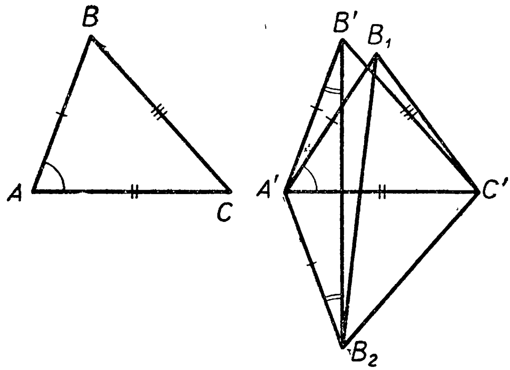


Рис. 60.

Пусть B_2 — точка, противорасположенная с B' относительно $A'C'$ и такая, что $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B_2$ и $AB \equiv A'B_2$; $\triangle ABC \equiv \equiv \triangle A'B_2C'$ по первому признаку, и поэтому $BC \equiv B_2C'$. Следовательно, по транзитивности $B'C' \equiv B_2C'$, т. е. треугольник $C'B_2B'$ — равнобедренный. Отсюда, по теореме 34, заключаем, что

$$\sphericalangle B_2B'C' \equiv \sphericalangle B'B_2C'. \qquad (\alpha)$$

Треугольник $A'B'B_2$ тоже равнобедренный, так что

$$\sphericalangle B_2B'A' \equiv \sphericalangle B'B_2A'. \qquad (\beta)$$

Из соотношений (α) и (β) по лемме 2 этого параграфа следует:

$$\sphericalangle A'B'C' \equiv \sphericalangle A'B_2C'.$$

Треугольники $A'B'C'$ и $A'B_2C'$ оказались теперь в условиях первого признака конгруентности, так что $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B_2C'$, откуда следует, в частности, что

$$\sphericalangle C'A'B_2 \equiv \sphericalangle C'A'B'. \qquad (*)$$

Рассматривая равнобедренные треугольники $C'B_2B'$ и $A'B_2B_1$, совершенно так же можно показать, что

$$\sphericalangle C'A'B_2 \equiv \sphericalangle C'A'B_1. \qquad (**)$$

Из соотношений (*) и (**) в силу аксиомы III. 4 следует, что луч $\overline{A'B_1}$ совпадет с лучом $\overline{A'B'}$, так что $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'A'B'$.

Теперь треугольники ABC и $A'B'C'$ оказались в условиях первого признака конгруентности. Теорема доказана.

В связи с последним доказательством полезно отметить, во-первых, что конгруентность треугольников ABC и $A'B'C'$ является в данном случае взаимной (так как конгруентность отрезков взаимна). Во-вторых, интересно заметить, что приведенное здесь доказательство использует по существу тот же метод «приложения», которым пользуются обычно в школьном курсе геометрии. Осложнение доказательства сравнительно со школьным вызывается тем, что мы не пользуемся взаимностью конгруентности углов. Напротив, это свойство углов устанавливается с помощью доказанной теоремы.

Следствия.

1) *Если* $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'})$ и $\measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'}) \equiv \measuredangle(\overline{h''}, \overline{k''})$, то $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k}) \equiv \measuredangle(\overline{h''}, \overline{k''})$.

Пусть H и K — произвольные точки соответственно лучей $\overline{h}$ и $\overline{k}$ (рис. 61). Выберем точки H', K', H'' и K'' соответственно на лу-

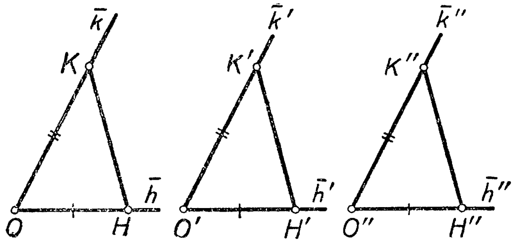


Рис. 61.

чах $\overline{h'}$, $\overline{k'}$, $\overline{h''}$, $\overline{k''}$ так, чтобы на сторонах трех данных углов образовались соответственно конгруентные отрезки:

$$OH \equiv O'H' \equiv O''H'', \quad OK \equiv O'K' \equiv O''K''.$$

Тогда $\triangle OHK \equiv \triangle O'H'K'$ по первому признаку, и поэтому $HK \equiv H'K'$.

Так же $H'K' \equiv H''K''$. Поэтому $HK \equiv H''K''$. Следовательно, $\triangle OHK \equiv \triangle O''H''K''$ по третьему признаку, откуда в свою очередь следует требуемое.

2) *Если* $\measuredangle(\overline{h}, \overline{k}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'})$, *то* $\measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'}) \equiv \measuredangle(\overline{h}, \overline{k})$.

В тех же обозначениях, что в п. 1, заметим, что $\triangle OHK \equiv$ $\equiv \triangle O'H'K'$ по первому признаку. Отсюда $HK \equiv H'K'$. Упомянутые треугольники оказались, таким образом, в условиях третьего признака, по которому они конгруентны взаимно.

3) *В условиях любого из признаков конгруентности конгруентность треугольников взаимна.*

§ 18. Прямой угол

Определение. Угол, конгруентный смежному, называется **п р я м ы м** углом.

Для доказательства существования прямого угла рассмотрим произвольный угол $(\bar h, \bar k)$ с вершиной O (рис. 62). Пусть K — произвольная точка луча $\bar k$. Пусть $\bar k'$ — луч, исходящий из точки O, лежащий в полуплоскости, дополнительной к полуплоскости $(\bar h, \bar k)$, и такой, что $\sphericalangle(\bar h, \bar k) \equiv \sphericalangle(\bar h, \bar k')$ (см. аксиому III. 4).

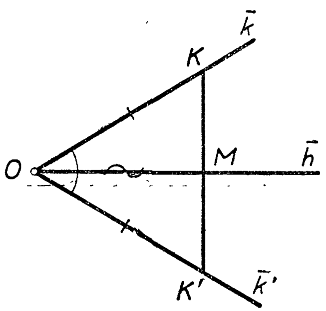
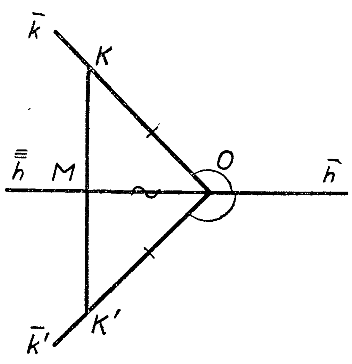


Рис. 62.

Пусть K' — такая точка луча $\bar k'$, что $OK \equiv OK'$ (аксиома III. 1). Так как точки K и K' расположены по разные стороны прямой h, то эта прямая пересекает отрезок KK' в некоторой точке M.

Если M — точка луча $\bar h$ (рис. 62), то $\triangle OKM \equiv \triangle OK'M$ по двум сторонам и углу. Поэтому $\sphericalangle OMK \equiv \sphericalangle OMK'$, т. е. оба эти угла прямые.

Если M — точка дополнительного луча $\bar{\bar h}$, то (рис. 63) $\sphericalangle MOK \equiv \sphericalangle MOK'$, по лемме 1, § 17, и рассуждение наше остается в силе.



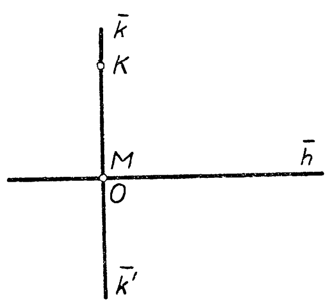


Рис. 63. Рис. 64.

Наконец, если точка M совпадет с точкой O (рис. 64), то $\sphericalangle(\bar h, \bar k)$—прямой по определению.

Если какие-либо (а следовательно, и каждые) два луча двух прямых образуют прямой угол, то эти прямые называются **п е р п е н д и к у л я р н ы м и**. Символ $a \perp b$ означает: прямые a и b — перпендикулярны.

Если a — прямая и A — произвольная точка, то всегда существует прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой a. Докажем это.

Допустим сначала, что A не лежит на a (рис. 65, a). Пусть B — произвольная точка прямой a (см. аксиому I.3). Если $AB \perp a$,

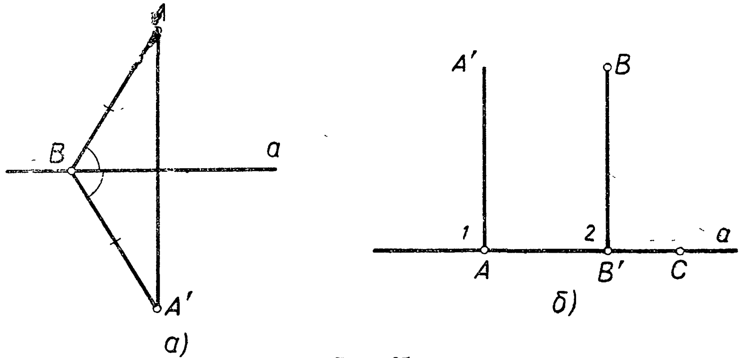


Рис. 65.

то прямая AB — искомая. Если же этого не случилось, то пусть $\sphericalangle(\bar a, \overline{BA'}) \equiv \sphericalangle(\bar a, \overline{BA})$ и пусть $BA \equiv BA'$. Тогда, как и выше, мы докажем, что $AA' \perp a$, т. е. AA' — искомая прямая.

Пусть теперь A — точка прямой a (рис. 65, $б$). Пусть B — какая-либо точка, не лежащая на прямой a, и пусть $BB' \perp a$ (см. предыдущий случай). Пусть еще C — такая точка прямой a, что $A\dot{B'}C$ (аксиома II.3). Пусть $\overline{AA'}$ — луч, лежащий в полуплоскости (a, B) и такой, что $\sphericalangle B'AA' \equiv \sphericalangle CB'B$. Тогда, по лемме 1, § 17, смежные с ними углы также конгруентны, т. е. (см. рис. 65, $б$) $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$. А так как $\sphericalangle CB'B \equiv \sphericalangle 2$, то в силу транзитивности $\sphericalangle B'AA' \equiv \sphericalangle 1$, т. е. угол $B'AA'$ — прямой.

Как было отмечено в § 1, четвертый постулат Евклида гласил: «Все прямые углы равны между собой». В действительности это

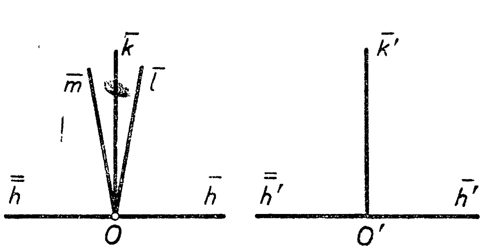


Рис. 66.

предложение оказалось теоремой. Теорема эта была доказана Д. Гильбертом в самом конце XIX века.

Доказательство. Пусть углы $(\bar h, \bar k)$ и $(\bar h', \bar k')$ — прямые, т. е. $\sphericalangle\,\bar h' \equiv \sphericalangle(\bar{\bar h}, \bar k)$ и $\sphericalangle(\bar{\bar h}', \bar k') \equiv \sphericalangle(\bar h', \bar k')$ (рис. 66). Требуется доказать, что
$\sphericalangle(\bar h, \bar k) \equiv \sphericalangle(\bar h', \bar k')$.

Пусть l — луч, лежащий в той же полуплоскости, что и $\overline{k}$, и исходящий из той же точки O, причем

$$\measuredangle(\overline{h}, \overline{l}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'}) \qquad (\alpha)$$

(см. аксиому III. 4). Если луч $\overline{l}$ совпадет с лучом $\overline{k}$, то теорема уже доказана. Допустим, что это не так. Предположим, что луч $\overline{l}$ проходит внутри угла $(\overline{h}, \overline{k})$. Пусть $\overline{m}$—такой луч рассматриваемой полуплоскости, что $\measuredangle(\overline{\overline{h}}, \overline{m}) \equiv \measuredangle(\overline{h}, \overline{l})$. Пусть $\measuredangle(\overline{m}, \overline{k_0}) \equiv \measuredangle(\overline{l}, \overline{k})$ и лучи $\overline{\overline{h}}$ и $\overline{k_0}$ расположены по разные стороны прямой m. Тогда, по лемме 2, § 17, $\measuredangle(\overline{\overline{h}}, \overline{k_0}) \equiv \measuredangle(\overline{h}, \overline{k})$, так что из условия теоремы и из аксиомы III. 4 следует, что $\overline{k_0}$ совпадает с $\overline{k}$. Отсюда следует, что $\overline{m}$ не совпадает с $\overline{l}$: $\overline{m}$ — внутри угла $(\overline{\overline{h}}, \overline{k})$, а $\overline{l}$ — внутри смежного угла $(\overline{h}, \overline{k})$. Но, с другой стороны, $\measuredangle(\overline{\overline{h}}, \overline{m}) \equiv \measuredangle(\overline{h}, \overline{l}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'})$. Отсюда, по лемме 1, § 17, следует: $\measuredangle(\overline{h}, \overline{m}) \equiv \measuredangle(\overline{\overline{h'}}, \overline{k'})$, значит и

$$\measuredangle(\overline{h}, \overline{m}) \equiv \measuredangle(\overline{h'}, \overline{k'}). \qquad (\beta)$$

Соотношения (α) и (β) составляют противоречие с аксиомой III. 4.

Подобным же образом возникает противоречие, если допустить, что луч $\overline{l}$ пойдет внутри угла $(\overline{\overline{h}}, \overline{k})$. Теорема доказана методом от противного.

Из теоремы Гильберта следует, между прочим, единственность перпендикуляра к данной прямой, проходящего через данную на ней точку.

§ 19. Деление отрезка (угла) пополам

Определение. Если $A\dot{O}B$ и $AO \equiv BO$, то точка O называется серединой отрезка AB.

Теорема 38. *На всяком отрезке существует его середина.*

Пусть AB (рис. 67) — произвольный отрезок, C — какая-либо точка, не лежащая на прямой AB. В полуплоскости, дополнительной к полуплоскости (AB, C), существует, по аксиоме III.4, такой луч $\overline{BC'}$, что $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle ABC'$. Пусть при этом $BC' \equiv AC$. Так как Cп/р$C'(AB)$, то отрезок CC' непременно пересечется с прямой AB в некоторой точке O.

Заметим прежде всего, что точка O не может совпадать ни с точкой A, ни с точкой B. Действительно, допустим, что точка O

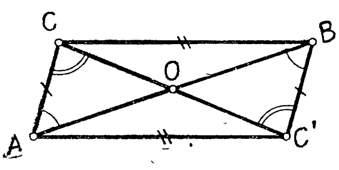


Рис. 67

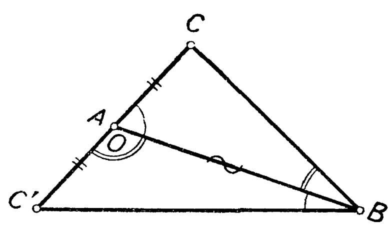


Рис. 68

совпадает, например, с точкой A (рис. 68). Тогда $\triangle ABC \equiv \triangle BAC'$ по первому признаку. Поэтому $\measuredangle CBA \equiv \measuredangle BAC'$, а по построению $\measuredangle CAB \equiv \measuredangle C'BA$. Но углы BAC' и CAB — смежные. Это означает, что углы CBA и $C'BA$ также смежные (лемма 1, § 17, и аксиома III.1), т. е. точки C, B и C' — на одной прямой, точки A и B совпадают. А этого не может быть.

Далее (см. рис. 67) из того, что $\triangle ABC \equiv \triangle BAC'$ следует, в частности, что $BC \equiv AC'$, а отсюда ясно, что $\triangle ACC' \equiv \triangle BC'C$ по первому признаку, и поэтому $\measuredangle ACC' \equiv \measuredangle BC'C$; $\triangle AOC \equiv \triangle BOC'$ по второму признаку, и поэтому $AO \equiv BO$.

Остается показать, что точка O не может оказаться внешней к отрезку AB.

Если бы, например, оказалось, что $A\dot{B}O$, т. е. что Aс/р$B(O)$, то соотношение $OA \equiv OB$ опять означало бы совпадение точек A и B.

Итак, $AO \equiv BO$, причем $A\dot{O}B$, т. е. O — середина отрезка AB.

Следующая лемма понадобится нам для доказательства единственности середины отрезка и для некоторых других целей.

Лемма. *Пусть A, B, C — точки одной прямой a, A', B', C' — точки той же или другой прямой a'. Пусть $A\dot{B}C$ и B'с/р$C'(A')$. Если при этом $AB \equiv A'B'$ и $AC \equiv A'C'$, то $A'\dot{B}'C'$.*

Пусть C'' — такая точка прямой a', что $BC \equiv B'C''$ и $A'\dot{B}'C''$ (рис. 69). Тогда по аксиоме III.3 $AC \equiv A'C''$. А так как C'с/р$B'(A')$ и C''с/р$B'(A')$, то C'с/р$C''(A')$. И поэтому, по теореме 33, § 16, точка C'' совпадает с точкой C'. Следовательно, $A'\dot{B}'C'$, что и требовалось доказать.

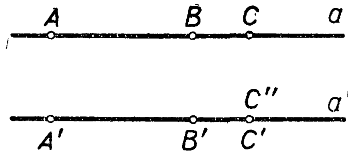


Рис. 69

Теорема 39. *Отрезок обладает не более как одной серединой.*

Эта теорема доказывается от противного. Допустим, что существуют две такие точки O и O', что $AO \equiv BO$, $A\dot{O}B$ и одновременно $AO' \equiv BO'$ и $A\dot{O}'B$. Из наших допущений, согласно теореме 14, следует, что Oс/р$O'(A)$. Поэтому либо $A\dot{O}O'$, либо $A\dot{O}'O$.

Ради определенности будем считать, что $A\dot{O}O'$. Из соотношений $A\dot{O}O'$ и $A\dot{O}'B$, по теореме 11, следует, что

$$O\dot{O}'B. \qquad (1)$$

С другой стороны, по теореме 14, можно заключить также, что Oс/р$O'(B)$. Замечая теперь, что $A\dot{O}O'$, Oс/р$O'(B)$, $AO \equiv BO$, $AO' \equiv BO'$, и применяя предыдущую лемму, приходим к выводу, что

$$B\dot{O}O'. \qquad (2)$$

Но соотношения (1) и (2) противоречивы (см. аксиому II.4).

Следствие. *Если $(\overline{h}, \overline{k})$ — произвольный угол, то существует единственный луч $\overline{l}$, исходящий из вершины этого угла, расположенный во внутренней области угла и такой, что $\measuredangle(\overline{h}, \overline{l}) \equiv \measuredangle(\overline{l}, \overline{k})$.*

Для доказательства этого следствия изберем на луче $\overline{h}$

произвольную точку H, а на луче $\bar{k}$ — такую точку K, чтобы $OK \equiv \equiv OH$, где O — вершина данного угла (рис. 70). Пусть M — середина отрезка HK. Тогда луч $\overline{OM}$ удовлетворяет условиям, так как $\triangle OKM \equiv \triangle OHM$ по третьему признаку и, следовательно, $\sphericalangle(\bar{h}, \bar{l}) \equiv \equiv \sphericalangle(\bar{k}, \bar{l})$. Существование луча $\bar{l}$ доказано.

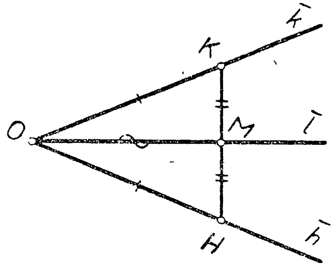


Рис. 70

Для доказательства единственности луча $\bar{l}$ положим, что $\sphericalangle(\bar{h}, \bar{l}) \equiv \equiv \sphericalangle(\bar{k}, \bar{l})$ и луч $\bar{l}$ проходит внутри угла $(\bar{h}, \bar{k})$. Выберем точки H и K так же, как и раньше. Тогда луч $\bar{l}$ непременно пересечет отрезок HK (см. теорему 26, § 14) в некоторой точке M. При этом треугольник OKM будет конгруентен треугольнику OHM по первому признаку. Следовательно, будет иметь место соотношение $KM \equiv HM$, т. е. точка M будет серединой отрезка HK Из единственности середины отрезка вытекает единственность искомого луча $\bar{l}$.

Определение. Луч $\bar{l}$, исходящий из вершины данного угла $(\bar{h}, \bar{k})$, расположенный внутри угла $(\bar{h}, \bar{k})$ и такой, что $\sphericalangle(\bar{h}, \bar{l}) \equiv \sphericalangle(\bar{l}, \bar{k})$, называется б и с с е к т р и с о й угла $(\bar{h}, \bar{k})$.

§ 20. Сравнение отрезков и углов

Определение. Пусть даны два отрезка AB и $A'B'$. Пусть B_1 — такая точка луча $\overline{AB}$, что $AB_1 \equiv A'B'$. Если при этом $A\dot{B}_1B$, то говорят, что отрезок AB больше отрезка $A'B'$ и пишут: $AB > A'B'$. Если $A\dot{B}B_1$, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка $A'B'$ и пишут: $AB < A'B'$. Если же точка B_1 совпадает с точкой B, то — так как $AB \equiv AB_1$ (по рефлексивности) и $A'B' \equiv AB_1$ (по условию) — $AB \equiv A'B'$ (по аксиоме III.2).

Первое основное свойство неравенств. *Если $AB < A'B'$, то $A'B' > AB$.*

По определению, существует такая точка B_1, что $AB_1 \equiv A'B'$, причем $A\dot{B}B_1$ (рис. 71).

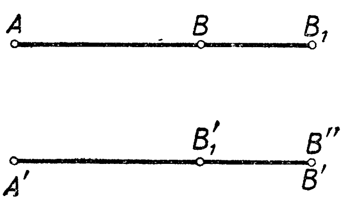


Рис. 71

Пусть B_1' — такая точка, что B'_1с/р$B'(A')$ и $A'B'_1 \equiv AB$. Пусть еще $B_1'B'' \equiv BB_1$, причем $A'\dot{B}_1'B''$. Тогда, по аксиоме III. 3, $A'B'' \equiv \equiv AB_1$, а так как, по условию, $A'B' \equiv AB_1$ и B''с/р$B'(A')$, то из теоремы 33 (§16) следует, что точка B'' совпадает с точкой B'. Итак, при откладывании на $A'B'$

отрезка $A'B_1'$, конгруентного AB, оказывается, что $A'\dot{B}_1'B'$, что и требовалось доказать.

Второе основное свойство неравенств. *Если* $AB<A'B'$ *и* $A'B'<A''B''$, *то* $AB<A''B''$.

Пусть B_1 — такая точка луча $\overline{A'B'}$, что $AB\equiv A'B_1$ (рис. 72). Тогда, по условию, $A'\dot{B}_1B'$. Пусть далее B_2 — такая точка луча $\overline{A''B''}$, что $A'B_1\equiv A''B_2$, и B_1' — такая его точка, что $B_1B'\equiv$ $\equiv B_2B_1'$ и $A''\dot{B}_2B'_1$. Тогда, по аксиоме III. 3, $A'B'\equiv A''B_1'$, и поэтому, согласно условию, $A''\dot{B}'_1B''$. Из $A''\dot{B}_2B'_1$ и $A''\dot{B}'_1B''$, по теореме 11 (§ 13), следует $A''\dot{B}_2B''$. А так как $A''B_2\equiv AB$, то это означает, что $AB<A''B''$.

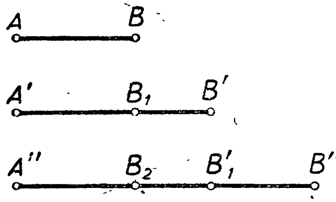


Рис. 72

Соотношения «меньше» и «больше» можно определить также и для углов. Пусть $(\overline{h},\overline{k})$ и $(\overline{h'},\overline{k'})$ — два данных угла соответственно с вершинами O и O'. Пусть $\overline{k_1}$ — такой выходящий из O луч, что $\measuredangle(\overline{h},\overline{k_1})\equiv\measuredangle(\overline{h'},\overline{k'})$, причем этот луч расположен в той же полуплоскости относительно прямой h, что и луч $\overline{k}$. Если луч $\overline{k_1}$ совпадет с лучом $\overline{k}$, то $\measuredangle(\overline{h},\overline{k})\equiv\measuredangle(\overline{h'},\overline{k'})$. Если луч $\overline{k_1}$ пойдет внутри угла $(\overline{h},\overline{k})$, то говорят, что угол $(\overline{h},\overline{k})$ больше угла $(\overline{h'},\overline{k'})$, и пишут: $\measuredangle(\overline{h},\overline{k})>\measuredangle(\overline{h'},\overline{k'})$. Если же луч $\overline{k_1}$ расположится во внешней области угла $(\overline{h},\overline{k})$, то говорят, что угол $(\overline{h},\overline{k})$ меньше угла $(\overline{h'},\overline{k'})$, и пишут: $\measuredangle(\overline{h},\overline{k})<\measuredangle(\overline{h'},\overline{k'})$.

Для неравенств между углами имеют место те же свойства, что и для неравенств между отрезками. На доказательстве этих свойств мы не будем останавливаться.

Определение. Угол $(\overline{\overline{AB}},\overline{AC})$ называется внешним углом треугольника ABC.

Теорема 40. *Внешний угол треугольника больше каждого из не смежных с ним углов треугольника.*

Докажем, например, что угол $(\overline{BC},\overline{\overline{BA}})$ больше угла C данного треугольника ABC. Пусть D — середина стороны BC (см. теорему 38) и пусть $DE\equiv DA$, причем $A\dot{D}E$ (см. аксиому III. 1) (рис. 73). $\triangle CAD\equiv\triangle BED$ по первому признаку, и поэтому $\measuredangle DCA\equiv\measuredangle DBE$. Осталось доказать, что луч BE проходит внутри угла $(\overline{BC},\overline{\overline{BA}})$.

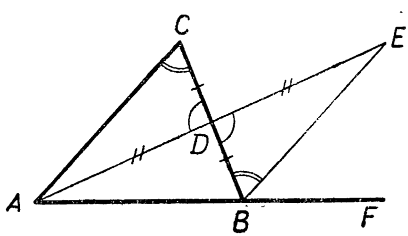


Рис. 73

Так как луч $\overline{AE}$ принадлежит углу BAC (см. определение угла), то точка E — внутренняя точка этого угла (теорема 25, § 14), т. е. она расположена в той же полуплоскости относительно прямой AB (или, что то же, BF), что и точка C луча BC. С другой стороны, Eп/р$A(BC)$, и поэтому точка E сорасположена относительно прямой BC с каждой точкой F луча $\overline{\overline{BA}}$. Следовательно, точка E лежит внутри угла CBF. Отсюда легко заключить, что луч $\overline{BE}$ лежит внутри угла CBF (такое заключение содержится в доказательстве теоремы 25).

Теорема доказана. Эту теорему в дальнейшем будем называть **первой теоремой о внешнем угле треугольника**.

Следствие 1. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.*

Следствие 2. *В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.*

Следствие 3. *Перпендикуляр из точки к прямой меньше каждой наклонной, проведенной из той же точки к той же прямой.*

Следствие. 4. *Через данную внешнюю точку можно провести не более одного перпендикуляра к данной прямой.*

Определение. Пусть AB и CD — два данных отрезка. Пусть E — такая точка прямой AB, что Eп/р$A(B)$ и $BE \equiv CD$. Тогда отрезок AE называется **суммой** отрезков AB и CD. При этом пишут: $AE \equiv AB + CD$. Отрезок AB называется **разностью** отрезков CD и EF, если $AB + EF \equiv CD$. При этом пишут: $AB \equiv CD - EF$.

Из аксиомы III.3 следует, что если $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$, то $AB + BC \equiv A'B' + B'C'$.

Теорема 41. *Если* $AB \equiv A'B'$, $BC > B'C'$, *то*

$$AB + BC > A'B' + B'C'.$$

Пусть C_1 — такая точка луча BC, что $BC_1 \equiv B'C'$ (рис. 74). Тогда, согласно условию, $B\dot{C}_1C$, и поэтому $A\dot{C}_1C$, т. е. $AC > AC_1$. Но, по аксиоме III. 3, $AC_1 \equiv A'C'$ и, значит, $AC > A'C'$, или, что то же, $AB + BC > A'B' + B'C'$.

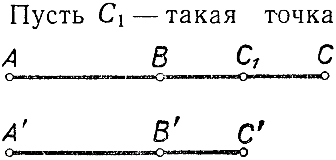


Рис. 74

Теорема 42. *Если* $AB > A'B'$ и $BC > B'C'$, *то*

$$AB + BC > A'B' + B'C'.$$

Пусть A_1 — такая точка луча $\overline{BA}$, что $BA_1 \equiv B'A'$ (рис. 75). Тогда, по предыдущей теореме, $A'C' < A_1C$. Но из $A'B' < AB$ следует $B\dot{A}_1A$, а из $C\dot{B}A$ и $B\dot{A}_1A$ следует $C\dot{A}_1A$, т. е. $A_1C < AC$. Нако-

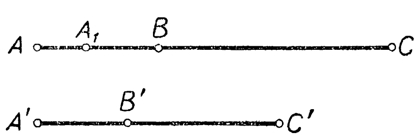


Рис. 75

нец, из $A_1C<AC$ и $A'C'<A_1C$ следует, что $A'C'<AC$, т. е.

$$A'B'+B'C'<AB+BC.$$

Следствие 1. *Если* $AB+BC>A'B'+B'C'$ *и* $AB\equiv A'B'$, *то* $BC>B'C'$.

Следствие 2. *Если* $CD<C'D'<AB$, *то* $AB-CD>AB-C'D'$.

Следствия эти доказываются путем последовательного исключения других возможных допущений.

Доказанные предложения приводят к следующим двум известным свойствам сторон треугольника:

1) *Сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей его стороны.*

2) *Каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.*

Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

§ 21. О конгруентности и движении

На основе понятия и свойств конгруентности можно определить геометрическое понятие движения и найти свойства движения.

Определение. Движением называют в геометрии взаимно однозначное точечное соответствие (преобразование) между двумя множествами точек (фигурами), при котором каждому данному отрезку соответствует конгруентный отрезок.

Таким образом, движение характеризуется тем, что если точке M соответствует точка M', а точке N — точка N', то $MN\equiv M'N'$.

Вместо «точке M соответствует в данном движении точка M'» говорят также, что «точка M преобразуется в точку M'» или что «движение переводит точку M в точку M'». При этом точку M называют прообразом точки M', а точку M' — образом точки M.

Рассмотрим некоторые важнейшие свойства движений.

1. *Существует движение, переводящее каждую точку в себя.*

Действительно, если положить, что каждой точке соответствует эта же точка, то конгруентность соответственных отрезков будет иметь место по свойству рефлексивности (§ 16, теорема 29).

Движение, переводящее каждую точку в себя, называют тождественным движением.

2. *Последовательность двух движений есть движение.*

Пусть движение D_1 преобразует точку M в точку M', а движение D_2 преобразует M' в M''. Символически запишем это так: $D_1(M)=M'$, $D_2(M')=M''$. Рассмотрим соответствие $M\to M''$, и пусть $S(M)=M''$.

Докажем, что соответствие S есть движение. Пусть $D_1(N)=$ $=N'$, $D_2(N')=N''$. Так как D_1 — движение, то $MN=M'N'$. А так как D_2 также есть движение, то $M'N' \equiv M''N''$. Поэтому в силу транзитивного свойства конгруентности $MN \equiv M''N''$ для любых двух точек M и N и их образов M'' и N'' в соответствии S. Из однозначности соответствий D_1 и D_2 следует однозначность соответствия S.

Соответствие S называют произведением движений D_1 и D_2.

3. *Преобразование, обратное движению, есть движение.*

Рассмотрим произвольное движение D. Пусть $D(M) = M'$ для произвольной точки M. В силу взаимной однозначности соответствия D каждая точка M' служит образом одной единственной точки M. Таким образом, возникает однозначное соответствие D', такое, что $D'(M') = M$. Это соответствие называется обратным соответствию D.

Если $D'(M') = M$ и $D'(N') = N$, то $M'N' \equiv MN$, так как, по определению движения, $MN \equiv M'N'$, а конгруентность отрезков — взаимна. Соотношение $M'N' \equiv MN$ выполняется для любых двух точек M' и N', а это и означает, что соответствие D' есть движение.

Движение D' и называют обратным движению D.

Свойства 1, 2 и 3 называют групповыми свойствами движений. Они показывают, что множество движений представляет группу, где групповой операцией служит последовательное осуществление двух данных движений.

4. *Движение переводит точки одной прямой в точки одной и той же прямой.*

Пусть A, B и C — три точки, лежащие на одной прямой a. Положим для определенности, что при этом $A\dot{B}C$. Пусть D — некоторое движение и пусть $D(A) = A'$, $D(B) = B'$, $D(C) = C'$. По определению, отрезок AC есть сумма отрезков AB и BC:

$$AC \equiv AB + BC.$$

Но, по определению движения, $AC \equiv A'C'$, так что $AB + BC \equiv A'C'$. С другой стороны, из аксиомы III.3 непосредственно следует, что суммы соответственно конгруентных отрезков конгруентны, т. е. $AB + BC \equiv A'B' + B'C'$. Таким образом, $A'B' + B'C' \equiv A'C'$, чего не могло бы быть, согласно свойствам сторон треугольника (§ 20), если бы точки A', B' и C' не лежали на одной прямой.

5. *Движение переводит луч в луч.*

Пусть A и B — две точки одного луча $\bar{a}$ прямой a, исходящего из точки O, и пусть $O\dot{A}B$. Согласно свойству 4, образы этих точек — точки O', A' и B' — лежат на одной прямой a. Но если допустить, что точки A' и B' расположены по разные стороны от точки O' (рис. 76), то придем к противоречию. В самом деле,

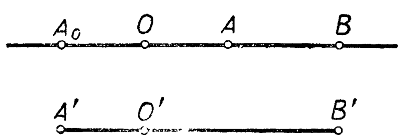


Рис. 76

пусть A_0 — такая точка, что $OA_0 \equiv OA$, причем A_0п/р$A(O)$. Легко установить, что при этом A_0п/р$B(O)$. При нашем предположении из аксиомы III. 3 следует: $A_0B \equiv A'B'$ (так как $A_0O \equiv \equiv AO \equiv A'O'$ и $OB \equiv O'B'$, причем A_0п/р$B(O)$, по построению, и A' п/рB' (O'), по допущению).

С другой стороны, $AB \equiv A'B'$ по определению движения. Соотношения $BA_0 \equiv A'B'$, $BA \equiv A'B'$, A_0с/р$A(B)$ могли бы, согласно теореме 33 (§ 16), выполняться лишь в случае совпадения точек A и A_0, а это невозможно в силу того, что $A_0\dot{O}A$ (см. аксиому II.1).

Итак, точки A, B, C,... луча $\overline{OM}$ преобразуются соответственно в точки A', B', C',... луча $\overline{O'M'}$. Обратно; для каждой точки P' луча $\overline{O'M'}$ найдется ее прообраз P, лежащий на луче OM. Для этого достаточно положить $OP \equiv O'P'$: согласно доказанному, образ точки P лежит на луче $O'M'$, а по теореме 33 он совпадет с P'.

Из доказанного непосредственно следует:

6. *Движение преобразует угол в угол.*

В школьных курсах геометрии принято обычно рассматривать движение как основное понятие, а равенство фигур определять через движения. Такая система изложения вопроса ведет свое начало от Евклида и отвечает геометрии как учению о конкретно мыслимых понятиях. Но, чтобы обосновать и дедуктивно развить геометрию при таком подходе, необходимо формулировать аксиомы движения, как это сделано, например, в [17]. После этого отношение конгруентности отрезков можно определить: $AB \equiv A'B'$, если существует движение, преобразующее точку A в точку A' и точку B в точку B'. Подобным же образом можно определить отношение конгруентности углов. При этом аксиомы конгруентности становятся уже доказуемыми свойствами отрезков или углов.

§ 22. Аксиома IV (аксиома непрерывности) и некоторые ее следствия*

Понятие непрерывности получило четкое математическое определение только в прошлом веке. Дедуктивное построение элементарной геометрии невозможно осуществить без того, чтобы свойства непрерывности прямой и окружности были каким-то образом точно описаны. При абстрактном аксиоматическом методе изложения это достигается путем введения соответствующих аксиом. Такого рода аксиомы предлагаются в различных формах. Мы остановимся на формулировке, предложенной Дедекиндом**.

---

* Д. Гильберт относит эту аксиому к группе V.

** Рихард Дедекинд (1831—1916)—известный немецкий математик, автор теории действительного числа.

Аксиома IV (аксиома непрерывности). *Если внутренние и конечные точки отрезка AB распределены в два класса K_1 и K_2 так, что: 1) $A \in K_1$, $B \in K_2$; 2) для любой точки P_1, принадлежащей классу K_1 и отличной от A, и для любой точки P_2 класса K_2 имеет место соотношение $AP_1 < AP_2$, то среди этих точек существует такая точка S, что при $S\dot{M}B$ точка M принадлежит классу K_2, а при $S\dot{M}A$ точка M принадлежит классу K_1.*

На основании аксиомы IV упомянутая в § 1 5-я аксиома Архимеда может быть строго доказана. Для этого понадобятся следующие предварительные соображения.

Пусть AB — данный отрезок, O — точка прямой a, $\bar{a}$ — избранный луч прямой a (рис. 77). Пусть P_1 — такая точка луча $\bar{a}$, что $OP_1 \equiv AB$, P_2 — такая точка луча $\bar{a}$, что
$O\dot{P}_1P_2$ и $P_1P_2 \equiv AB, \ldots, P_{n-2}P_{n-1} \equiv AB$, $P_{n-2}\dot{P}_{n-1}P_n$ и $P_{n-1}P_n \equiv AB$.

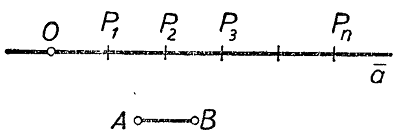


Рис. 77.

Процесс последовательного построения точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ будем называть последовательным откладыванием отрезка AB на данном луче $\bar{a}$. Отрезок OP_n будем при этом обозначать символом $n\,AB$.

Из теоремы 42 следует, что если $A'B' < AB$, то $2A'B' < 2AB$. Далее, из $A'B' < AB$ и $2A'B' < 2AB$, по той же теореме, следует, что $3A'B' < 3AB$, а по индукции можно легко доказать, что вообще $nA_1B_1 > nAB$.

Теорема 43. *Если A_0B_0 и AB — два произвольных отрезка, то на луче A_0B_0 всегда существуют такие точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что*

$$A_{i-1}A_i \equiv AB,\ A_{i-1}\dot{A}_iA_{i+1}\quad (i=1,\ 2, \ldots,\ n-1),\ A_0\dot{B}_0A_n\ .$$

Иными словами, теорема утверждает существование такого числа n, чтобы после n откладываний отрезка AB на луче A_0B_0 образовалась точка A_n, для которой выполняется соотношение $A_0B_0 < A_0A_n$, т. е. выражает в строгой форме содержание 5-й аксиомы Архимеда.

В случае $AB > A_0B_0$ построение точки A_n осуществляется уже при $n=1$, так что в особом доказательстве надобности нет.

В случае $AB \equiv A_0B_0$ достаточно положить $n=2$. При этом точка A_1 совпадает с точкой B_0 и, понятно, $A_0\dot{B}_0A_2$.

Для случая $AB < A_0B_0$ проведем доказательство теоремы 43 методом от противного. Допустим, что при любом (натуральном) n имеет место соотношение $nAB < A_0B_0$, и приведем это допущение к противоречию.

Распределим точки отрезка A_0B_0 в два класса K_1 и K_2 следующим образом. Отнесем к классу K_1 точку A_0 и такие внутренние точки P_1 отрезка A_0B_0, для которых при любом n имеет место соотношение $nA_0P_1 < A_0B_0$. Согласно сделанному допущению, к классу K_1 будет относиться, например, такая точка P_1, что

$A_0P_1 \equiv AB$. К классу K_2 отнесем такие точки P_2, для которых можно указать такое n, что $nA_0P_2 > A_0B_0$. В этот класс попадет, например, точка B_0, так как для этой точки предыдущее неравенство заведомо справедливо уже при $n=2$.

При нашем способе образования классов K_1 и K_2 для любой точки P_1 класса K_1, отличной от A_0, и для любой точки P_2 класса K_2 всегда имеет место соотношение $A_0\dot{P}_1P_2$. В самом деле, по определению классов, существует такое n, что $nA_0P_2 > A_0B_0$, но $nA_0P_1 < A_0B_0$ при всяком n. Следовательно, при данном значении n $nA_0P_1 < nA_0P_2$. Значит, $A_0P_1 < A_0P_2$. А так как P_1 и P_2 — точки одного луча, выходящего из A_0, то это и означает, что $A_0\dot{P}_1P_2$.

Таким образом, классы K_1 и K_2 удовлетворяют условиям аксиомы IV, так что должна существовать точка S, принадлежащая одному из этих классов и такая, что из $A_0\dot{P}S$ следует, что $P \in K_1$, а из $B_0\dot{P}S$ следует, что $P \in K_2$.

Допустим, что $S \in K_1$. При этом S не может совпасть с A_0, так как, по условию, $A_0\dot{A}_1B_0$ и в то же время, по допущению, $A_1 \in K_1$. Пусть M — такая точка луча $\overline{A_0B_0}$, что $A_0M \equiv 2A_0S$. Тогда $A_0M > A_0S$, но $A_0M < A_0B_0$, так как $S \in K_1$. Значит, $S\dot{M}B_0$ и, по аксиоме IV, $M \in K_2$. Но, с другой стороны, $nA_0M \equiv 2nA_0S < A_0B_0$ при любом n, так что $M \in K_1$. Полученное противоречие показывает, что точка S не может принадлежать классу K_1.

Подобным же образом можно установить, что точка S не может принадлежать и классу K_2. Действительно, допустим, что $S \in K_2$ и пусть M — середина отрезка A_0S. Тогда из отношения $A_0\dot{M}S$ вытекает (в силу аксиомы IV), что $M \in K_1$. Но, по определению классов, существует такое n, что $nA_0S > A_0B_0$, т. е. $2nA_0M > A_0B_0$, откуда следует, что $M \in K_2$. Опять противоречие! Теорема доказана.

Теорема 44. *Если лучи $\overline{h}$, $\overline{k}$ и все лучи, проходящие через вершину угла (h, k) внутри этого угла, разбиты на два класса K_1 и K_2 так, что $\overline{h} \in K_1$, $\overline{k} \in K_2$, причем для любого луча $\overline{l}_1$, принадлежащего классу K_1, и для любого луча $\overline{l}_2$, принадлежащего классу K_2, имеет место соотношение $\sphericalangle(h, l_1) < \sphericalangle(h, l_2)$, то среди лучей данного множества существует такой луч $\overline{s}$, что при условии $\sphericalangle(h, l) < \sphericalangle(h, s)$ луч $\overline{l}$ принадлежит классу K_1, а при $\sphericalangle(h, l) > \sphericalangle(\overline{h}, s)$ луч $\overline{l}$ принадлежит классу K_2.*

Теорема эта представляет аналог аксиомы IV для углов.

Для доказательства этой теоремы достаточно избрать на лучах $\overline{h}$ и $\overline{k}$ соответственно произвольные точки A и B, установить взаимно однозначное соответствие между лучами рассматриваемого пучка и точками отрезка AB и воспользоваться аксиомой IV.

Определение. Пусть (O, OE) — данная окружность (O — центр, OE — радиус). Если для данной точки M $OM > OE$, то эта точка называется **внешней** относительно данной окружности. Если же $OM < OE$, то говорят, что точка M — **внутренняя** точка окружности.

Теорема 45. *Прямая, лежащая в плоскости данной окружности и проходящая через внутреннюю ее точку, имеет с этой окружностью две и только две общие точки.*

Пусть O — центр некоторой окружности, r — ее радиус и A — внутренняя точка, так что $OA < r$. Пусть a — прямая, проходящая через точку A.

Если a проходит через O (рис. 78), т. е. является диаметром данной окружности, то справедливость теоремы непосредственно вытекает из аксиомы III. 1 и теоремы 33 (§ 16): на каждом из лучей прямой a, исходящих из O, существует единственная такая точка M, что $OM \equiv r$. Поэтому будем теперь предполагать, что a не проходит через O.

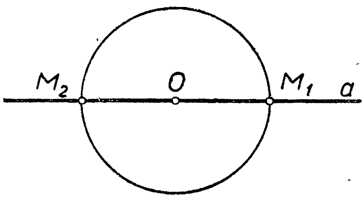


Рис. 78.

Пусть $OP \perp a$ (рис. 79). Тогда, по свойствам перпендикуляра и наклонной, $OP < OA$ или $OP \equiv OA$ и, следовательно, $OP < r$, т. е. P также внутренняя точка окружности. Пусть Q — такая точка луча $\bar{a}$ прямой a, выходящего из P, что $PQ \equiv r$. Тогда $OQ > PQ \equiv r$, так что $OQ > r$ и точка Q внешняя.

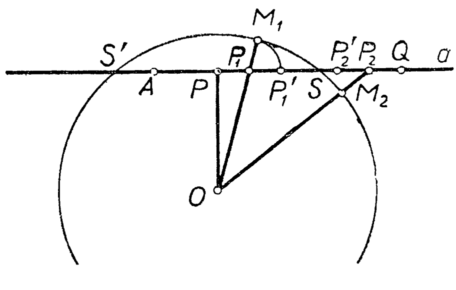


Рис. 79.

Разобьем точки отрезка PQ вместе с P и Q на два класса K_1 и K_2, относя к классу K_1 точку P и такие точки P_1, для которых $OP_1 < r$, а к классу K_2 — такие точки P_2, для которых $OP_2 > r$ или $OP_2 \equiv r$.

По определению, всегда $OP_1 < OP_2$. Из свойств наклонных, проведенных из одной и той же точки к данной прямой, следует, что всегда $PP_1 < PP_2$, т. е. всегда $P\dot{P}_1P_2$.

Полученные классы удовлетворяют, таким образом, условиям аксиомы непрерывности. Поэтому на отрезке PQ должна существовать такая точка S, что из $P\dot{M}S$ следует, что $M \in K_1$, а из $P\dot{S}N$ следует, что $N \in K_2$. Сама точка S должна принадлежать либо классу K_1, либо классу K_2.

Докажем, что точка S не может принадлежать классу K_1. Пусть P_1 — какая-нибудь точка класса K_1 и M_1 — такая точка луча $\overline{OP_1}$, что $OM_1 \equiv r$. Пусть далее P'_1 — такая точка луча $\overline{a}$, что $P\dot{P}_1P'_1$ и $P_1P'_1 \equiv P_1M_1$. Тогда $OP'_1 < OP_1 + P_1P'_1$ (см. § 20). С другой стороны, $OP_1 + P_1P'_1 \equiv OP_1 + P_1M$ (аксиома III.3), т. е. $OP_1 + P_1P'_1 \equiv OM_1 \equiv r$. Следовательно, $OP'_1 < r$ и поэтому $P'_1 \in K_1$. К тому же $PP'_1 < OP'_1 < r \equiv PQ$, так что P'_1 — точка отрезка PQ. Значит, для всякой точки $P_1 \in K_1$ существует такая точка P'_1 того же класса, что $P\dot{P}_1P'_1$. Для точки S это, однако, невозможно по определению: из $P\dot{S}N$ следует, что $N \in K_2$. Поэтому $S \in K_2$. Следовательно, $OS > r$ или $OS \equiv r$. Пусть P_2 — такая точка класса K_2, что $OP_2 > r$. Пусть M_2 — такая точка луча $\overline{OP_2}$, что $OM_2 \equiv r$. Пусть P'_2 — такая точка луча $\overline{P_2P}$, что отрезок P_2P_2' меньше каждого из отрезков P_2P и P_2M_2. Тогда точка P'_2 принадлежит отрезку P_2P, а следовательно, и отрезку PQ. При этом будут выполняться следующие соотношения:

$$OP'_2 > OP_2 - P_2P'_2$$

(свойство 2, § 20),

$$OP_2 - P_2P'_2 > OP_2 - M_2P_2$$

(следствие 2 теоремы 41),

$$OP_2 - M_2P_2 \equiv r.$$

Таким образом, $OP'_2 > r$, т. е. $P'_2 \in K_2$, причем $P_2\dot{P}'_2P$. Следовательно, для такой точки P_2 класса K_2, для которой $OP_2 > r$, всегда можно указать точку P'_2 того же класса, лежащую «левее» P_2. Значит, точка S не может быть такой точкой класса K_2, для которой $OS > r$.

Остается допустить, что $OS \equiv r$. Но это означает, что S — точка данной окружности. Этим доказано существование по крайней мере одной общей точки данной окружности и прямой a.

Пусть S'—такая точка луча $\overline{\overline{a}}$, что $PS' \equiv PS$, причем $S'\dot{P}S$. Тогда из сопоставления треугольников OPS и $OP'S'$ легко заключить, что $OS' \equiv OS$, так что $OS \equiv r$, и поэтому S' также общая точка данной окружности и прямой a.

Осталось доказать, что окружность и прямая не могут иметь более двух общих точек.

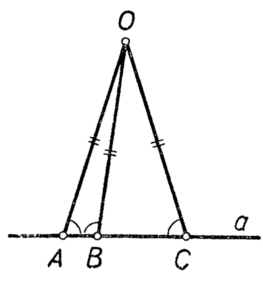


Рис. 80

Допустим, что точки A, B, C лежат одновременно на прямой a и на некоторой окружности $(O,\ r)$ (рис. 80). Тогда $OA \equiv OB \equiv OC$. При этом, по теореме 34 (§ 16), $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA$ и $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OCA$, так что $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OCA$.

Полагая ради определенности, что $A\dot{B}C$, получаем противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника.

* * *

Аксиомы I, II, III, IV и вытекающие из них теоремы составляют содержание «абсолютной геометрии». Следующая аксиома накладывает на геометрию дополнительные ограничения и вместе с аксиомами I, II, III, IV абсолютной геометрии определяет «евклидову геометрию».

§ 23. Аксиома V (аксиома параллельности)* и ее следствия

Согласно аксиоме I.2, две различные прямые одной плоскости либо имеют единственную общую точку (и тогда называются пересекающимися), либо вовсе не имеют общих точек (и тогда называются параллельными).

Здесь мы рассмотрим некоторые важнейшие свойства параллельных прямых.

Уточним прежде всего понятия об углах, образуемых двумя прямыми с третьей, которая каждую из них пересекает. Пусть a и b — две прямые, лежащие в некоторой плоскости α, и c — прямая, пересекающая прямую a в некоторой точке A и прямую b в некоторой точке B (рис. 81).

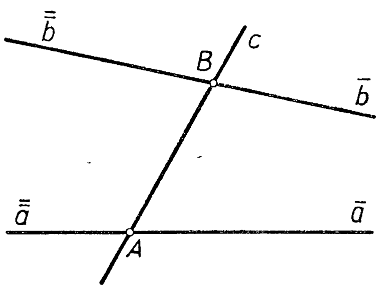


Рис. 81

Обозначим лучи прямых a и b, лежащие по одну сторону прямой c, через $\bar a$ и $\bar b$ и соответственно через $\bar{\bar a}$ и $\bar{\bar b}$. Среди углов, образуемых лучами прямых a, b и c, будем различать углы односторонние и разносторонние относительно прямой c в зависимости от того, лежат ли их внутренние области по одну или по разные стороны прямой c. Так, например, углы $(\bar a, \overline{AB})$ и $(\bar b, \overline{BA})$ — односторонние, а углы $(\bar a, \overline{AB})$ и $(\bar{\bar b}, \overline{BA})$ — разносторонние. Будем, с другой стороны, различать углы внутренние и внешние. Назовем внутренним каждый угол, образованный каким-либо лучом прямой a (или прямой b) и тем лучом прямой c, который направлен из вершины данного угла в точку прямой b (соответственно прямой a). Назовем внешним угол, образуемый каким-либо лучом одной из данных прямых a

* Д. Гильберт относит эту аксиому к группе IV.

или b и тем лучом секущей прямой c, который не пересекает вторую из данных. Внутренним является, угол $(\overline{a}, \overline{AB})$, а внешним — угол $(\overline{a}, \overline{\overline{AB}})$. Легко заметить, что образуется всего четыре угла внешних и четыре угла внутренних.

Два несмежных разносторонних угла, из которых оба внутренние или оба внешние, называются н а к р е с т л е ж а щ и м и. Например, углы $(\overline{a}, \overline{AB})$ и $(\overline{\overline{b}}, \overline{BA})$ — внутренние накрест лежащие.

Два несмежных односторонних угла, из которых один внутренний, а другой внешний, называются с о о т в е т с т в е н н ы м и. Таковы, например, углы $(\overline{a}, \overline{AB})$ и $(\overline{b}, \overline{\overline{BA}})$.

Если прямые a и b пересекаются в некоторой точке P, то образуется треугольник ABP, причем, по первой теореме о внешнем угле треугольника,

$$\sphericalangle(\overline{\overline{a}}, \overline{AB}) > \sphericalangle(\overline{b}, \overline{BA})$$

и $\sphericalangle(\overline{\overline{b}}, \overline{BA}) > \sphericalangle(\overline{a}, \overline{AB})$

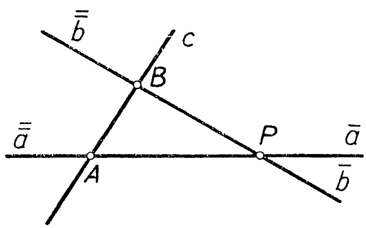


Рис. 82

(рис. 82). Отсюда следует: если при пересечении двух прямых (лежащих в одной плоскости) третьей какие-либо внутренние накрест лежащие углы равны, то две данные прямые не могут иметь общих точек, т. е. они параллельны.

Пользуясь конгруентностью углов, смежных с конгруентными (лемма 1, § 17), можно прийти также к выводу, что конгруентность каких-либо двух внешних накрест лежащих углов или каких-либо двух соответственных углов также является достаточным признаком параллельности двух прямых, лежащих в одной плоскости. Остается пока открытым вопрос о необходимости этих признаков.

Теорема 46. *Если в плоскости α дана прямая a и не лежащая на ней точка A, то существует прямая p, проходящая через точку A и параллельная прямой a.*

Пусть M — любая точка прямой a, разделяющая ее на два луча $\overline{a}$ и $\overline{\overline{a}}$ (рис. 83). По аксиоме I. 1 существует прямая AM. По аксиоме III. 4 существует исходящий из точки A луч $\overline{\overline{p}}$, лежащий в той полуплоскости относительно AM, которая содержит $\overline{\overline{a}}$, и такой, что $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{MA}) \equiv \sphericalangle(\overline{\overline{p}}, \overline{AM})$.

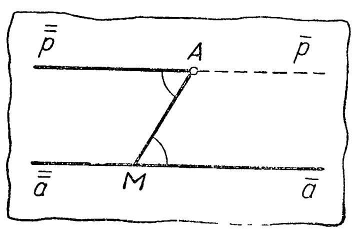


Рис. 83.

Прямые a и p образуют с прямой AM конгруентные внутренние накрест лежащие углы и поэтому параллельны.

Остается пока открытым вопрос о единственности параллельной. Этот вопрос решается в форме новой аксиомы.

Аксиома V. *Если a — произвольная прямая, лежащая в плоскости α, и A — точка плоскости α, не лежащая на прямой a, то в плоскости α существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не имеющей общих точек с прямой a.*

Из этой аксиомы вытекают важные следствия. Остановимся на некоторых из них.

Из единственности параллельной непосредственно следует, во-первых, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых и лежащая в их плоскости, непременно пересекает и другую параллельную.

Теорема 47. *Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то каждые два внутренних накрест лежащих угла, каждые два внешних накрест лежащих угла, каждые два соответственных угла — конгруентны.*

Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает их соответственно в точках A и B (рис. 84). Докажем, что $\measuredangle(\overline{a}, \overline{AB}) \equiv \measuredangle(\overline{\overline{b}}, \overline{BA})$. Остальные равенства следуют из этого.

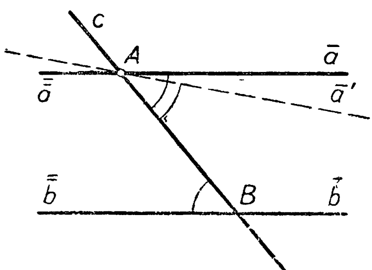


Рис. 84.

Проведем (аксиома III. 4) из точки A луч $\overline{a}'$, лежащий в той же полуплоскости относительно прямой c, где лежит луч $\overline{a}$, и такой, чтобы $\measuredangle(\overline{a}', \overline{AB}) \equiv \measuredangle(\overline{\overline{b}}, \overline{BA})$. Тогда, согласно сказанному выше, прямая a' параллельна прямой b. Поэтому в силу единственности параллельной (аксиома V) прямая a' совпадает с прямой a, откуда и следует, что $\measuredangle(\overline{a}, \overline{AB}) \equiv \measuredangle(\overline{\overline{b}}, \overline{BA})$.

Следствие. *Две прямые, из которых одна перпендикулярна к данной, а другая не перпендикулярна, непременно пересекаются.*

Действительно, пусть $p \perp a$ и q не $\perp a$. Если q пересекает a, то p и q пересекаются потому, что соответственные углы, образуемые ими с прямой a, не конгруентны. Если же $q \parallel a$, то p, пересекая a, должна пересечь и q.

Определение. Угол $(\overline{h}, \overline{k})$ называется суммой двух данных углов $(\overline{h}_1, \overline{k}_1)$ и $(\overline{h}_2, \overline{k}_2)$, если существует луч $\overline{l}$, принадлежащий углу $(\overline{h}, \overline{k})$ и такой, что угол $(\overline{h}, \overline{l})$ конгруентен одному, а угол $(\overline{k}, \overline{l})$ — другому из данных углов.

Теорема 48 (вторая теорема о внешнем угле). *Внешний угол треугольника есть сумма не смежных с ним углов этого треугольника.*

Пусть ABC (рис. 85) — произвольный треугольник, BCD — его внешний угол. В полуплоскости $(\overline{AC}, B)$ проведем такой луч $\overline{CE}$, чтобы $\measuredangle(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \measuredangle(\overline{CE}, \overline{CD})$ (см. аксиому III. 4). Луч $\overline{CE}$ пойдет внутри угла $(\overline{CD}, \overline{CB})$, так как, по первой теореме о внешнем угле треугольника (§ 20), $\measuredangle(\overline{CD}, \overline{CB}) > \measuredangle(\overline{AC}, \overline{AB})$.

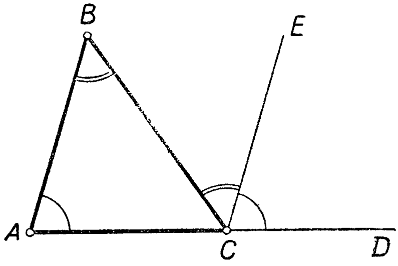


Рис. 85.

$CE \parallel AB$, так как эти прямые образуют с прямой AC конгруентные соответственные углы. Поэтому углы $(\overline{BA}, \overline{BC})$ и $(\overline{CE}, \overline{CB})$ конгруентны, ибо служат внутренними накрест лежащими при параллельных. Справедливость теоремы 48 следует теперь из определения суммы двух углов.

Понятие суммы нетрудно распространить на три (и более) угла. Но для того чтобы доказать известные теоремы о сумме углов треугольника (или многоугольника), необходимо еще расширить понятие об угле, так как принятое нами определение угла не содержит понятия «развернутого» угла или «угла, большего развернутого».

Назовем **развернутым углом** фигуру, образованную двумя дополнительными лучами одной прямой и некоторой определенной полуплоскостью относительно этой прямой. Эту полуплоскость будем рассматривать как внутреннюю область развернутого угла.

После введения понятия развернутого угла легко убедиться в том, что сумма всех углов треугольника есть развернутый угол.

Понятие развернутого угла можно включить и в общее определение угла (§ 14), если исключить из этого определения требование, чтобы лучи $\overline{h}$ и $\overline{k}$ не принадлежали одной прямой. Необходимо заметить, что при этом утратили бы силу теоремы 23 и 26, § 14 (теоремы 24 и 25 остались бы справедливыми).

Возможны и дальнейшие обобщения понятия угла. Интересующиеся могут познакомиться с ними, например, по книге А. В. Погорелова, [25], гл. II, § 6.

Теорема 49. *Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то существует такая точка O, что*

$$OA \equiv OB \equiv OC.$$

Пусть S_1 — середина отрезка AB, S_2 — середина отрезка BC. Пусть p — прямая, проходящая через точку S_1 и перпендикулярная к прямой AB, q — прямая, проходящая через точку S_2 и перпендикулярная к прямой BC. Прямая q не может пересекать прямую AB под прямым углом: соотношение $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 2$ (см. рис. 86) невозможно в силу 1-й теоремы о внешнем угле треугольника. Поэтому прямые p и q непременно пересекутся (см. следствие из теоремы 47). Их общая точка O — искомая.

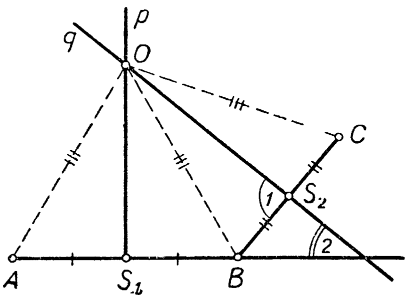


Рис. 86.

Если O — данная точка плоскости и PQ — данный отрезок, то множество всех таких точек M этой плоскости, для которых $OM \equiv PQ$, называется **окружностью**. Точка O называется **центром**, а отрезок PQ — **радиусом** этой окружности.

Последняя теорема утверждает существование окружности, проходящей через каждую из трех произвольно заданных неколлинеарных точек.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО МАТЕРИАЛУ ГЛАВЫ II

Аксиоматический метод в геометрии характеризуется следующими основными чертами: абстрактным пониманием элементов пространства и отношений между ними; определением (а не описанием) элементов пространства и отношений между ними посредством аксиом; строго дедуктивным характером всех суждений.

Аксиоматический метод исключает возможность выводов на основе наглядности, интуиции и обеспечивает логическую строгость системы геометрии.

Аксиоматический метод неразрывно связан с идеей интерпретации отвлеченных геометрических систем посредством тех или иных конкретных моделей. Через интерпретации широко осуществимо применение отвлеченных геометрических систем к изучению свойств протяженности различных объектов материального мира.

Аксиомы — результат длительного общественного опыта и только благодаря этому и в силу этого они способны служить исходным пунктом для логического развития геометрии.

Современная геометрия рассматривает следующие понятия как основные: «точка», «прямая», «плоскость», «лежать на» («проходить через»), «быть конгруентными» («равными»), «лежать между». Точное и для математических целей полное определение этих понятий дается в аксиомах.

Аксиомы евклидовой геометрии объединяются в пять групп в зависимости от отношения между элементами пространства, о котором в них говорится. Эти пять групп аксиом следующие: I — аксиомы принадлежности, II — аксиомы порядка, III — аксиомы конгруентности, IV — аксиома непрерывности, V — аксиома параллельности.

Аксиомы первых четырех групп и их следствия составляют содержание так называемой *абсолютной геометрии.*

Современная система аксиом позволяет построить логически удовлетворительную дедуктивную систему евклидовой геометрии без какого бы то ни было привлечения соображений интуиции, наглядности.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Строго логическое, дедуктивное развитие геометрии имеет, как мы выяснили, большое значение для развития геометрической науки. Абстрактно-логический метод позволяет широко толковать геометрию, не отрывая ее от опыта и, напротив, безгранично расширяя возможности приложения геометрических методов исследования к познанию действительности. Поэтому значение вопроса о современной системе аксиом и об абстрактно-логическом построении геометрии для общего образования учителя неоспоримо.

Но как обстоит дело с научной структурой школьного курса геометрии? Насколько возможно и насколько целесообразно внесение современной аксиоматики и абстрактно-логических суждений в школьное преподавание? Как может использовать учитель в школе свои знания по основаниям геометрии?

Ответ на эти вопросы надо искать прежде всего в школьной программе и в школьном учебнике геометрии. В большей или меньшей степени этот вопрос затрагивается также в курсах методики преподавания математики.

Отметим наиболее существенные указания по этому вопросу, сделанные в объяснительной записке к проекту программы выпуска 1959 года.

«Основу курса геометрии восьмилетней школы должен составлять существенно облегченный, но систематический курс планиметрии». «Моменты логически-обосновательного характера в VI классе должны вводиться с осторожностью и постепенностью по мере того, как учащиеся будут осознавать в них необходимость».

«Преподавание математики на втором этапе среднего образования имеет целью добиться такого уровня математического развития... который необходим (следовало бы сказать достаточен.— *Б. А.*) для подготовки учащихся к практической деятельности... для изучения на достаточно высоком уровне смежных школьных дисциплин и продолжения образования». «Для достижения этих целей курс математики средней школы включает не только изучение отдельных фактов, но также и ознакомление учащихся с некоторыми общими научными идеями и методами математики».

Среди основных задач курса геометрии на втором этапе среднего образования указывается «постановка вопросов более строгого логического обоснования изучаемых положений». «Первая тема курса X класса, «Структура курса геометрии», имеет в виду раскрытие логической структуры геометрии». «Последняя тема XI класса, «Повторение всего курса и решение задач», подводит итог всему пройденному».

Какие же выводы из этих указаний можно сделать по поводу поставленных нами вопросов?

Для того чтобы решить задачи, которые ставит программа курса геометрии средней трудовой политехнической школы, преподаватель должен сам глубоко владеть не только фактическим материалом, но и ясным представлением о логической структуре геометрии, о ее абстрактно-логическом методе, о ее современном состоянии и перспективах развития. Эти знания он приобретает преимущественно в процессе изучения оснований геометрии.

Полноценное логическое развитие учащихся достигается, конечно, лишь объединенными и систематическими усилиями всего коллектива учителей и воспитателей. Но «львиная доля» этой работы падает все же на преподавателей геометрии: в этой науке логические вопросы находятся на переднем плане и определяют весь ее характер. Никакая другая школьная дисциплина не дает столько возможностей логического развития учащихся, как геометрия; геометрия — «логика в действии».

Для того чтобы воспитать у учащихся потребность в доказательстве, учитель должен предварительно развить у себя такую потребность в более высокой степени и приобрести навыки в проведении строгих доказательств, приобрести умение критически отнестись к тому или иному доказательству, изложенному в устной или печатной форме. Этому он учится в процессе работы над основаниями геометрии.

Большую ответственность налагают на учителя те занятия по геометрии в X и XI классах, где он должен раскрыть идею дедуктивного построения курса геометрии, показать роль основных понятий и аксиом и выяснить их происхождение. Для успешного проведения такого обзора учитель должен быть хорошо эрудирован. В курсе оснований геометрии он получит необходимый для этого минимум сведений, который ему, конечно, придется пополнять в процессе его дальнейшей работы.

В своем геометрическом развитии учащийся проходит в короткий срок те же стадии, которые пройдены человечеством: индуктивную стадию «живого созерцания», стадию систематизации и логического осмысливания геометрического материала и, наконец (в ограниченной мере), стадию абстрактно-аксиоматического представления о геометрии. Эти стадии должны постепенно перерастать одна в другую.

Ставить задачу изучения геометрии в школе в ее современной аксиоматической форме не реально и в этом нет надобности*. Школьный курс неизбежно остается в большей или меньшей степени логически-несовершенным: в интересах его простоты и краткости учитель всегда пользуется избыточной системой аксиом, причем многие из используемых аксиом явно и не формулируются, а при доказательствах подразумеваются как нечто совершенно очевидное. Всякое увлечение аксиоматикой, утрата учителем чувства меры становятся вредными, как только такого рода требования и сведения превышают уровень математической и психологической подготовки учащихся к абстрактному восприятию. В строгой аксиоматической форме можно изложить лишь в качестве примера какие-либо отдельные несложные предложения в X или XI классах.

Но было бы ошибкой также сводить изучение геометрии в школе к усвоению разрозненных фактов и приобретению соответствующих практических навыков. Логические вопросы геометрии, постепенно нарастая, должны быть в старших классах приведены в достаточную ясность и преподнесены учащимся с достаточной полнотой. Для этого предназначена первая тема по геометрии в X классе и могут быть частично использованы также заключительные уроки в XI классе.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Интерпретировать аксиому I.1 тремя различными способами. Все ли эти интерпретации согласуются также с аксиомой I.2?

2. Указать интерпретацию для аксиом I.1, I.2 и I.3, не согласующуюся с аксиомой I.4.

3. Указать интерпретацию аксиом I.1 — I.9, не согласующуюся с аксиомой I.10.

4. Проанализировать логическую состоятельность доказательств следующих предложений из учебника геометрии А. А. Киселева [14]:

1) первая теорема о внешнем угле треугольника (п. 44);

2) проведение перпендикуляра к прямой из внешней точки (п. 66);

3) деление отрезка пополам (п. 67);

4) теорема о сумме углов выпуклого многоугольника (п. 82);

5) о взаимном расположении прямой и окружности (п. 112);

---

* С опытом аксиоматического изложения элементарной геометрии можно познакомиться по книге [4].

6) о пересечении медиан треугольника (п. 143). Можно ли исправить доказательства этих предложений и как именно?

5. Осуществить следующие дополнения к тексту данной книги:

1) составить полные доказательства теорем 6, 18, 36,

2) записать полностью доказательство п. 2, теоремы 11,

3) провести доказательство теоремы 12 для случая $A\dot{D}C$,

4) провести доказательство теоремы 14 для случая $C\dot{A}O$,

5) доказать основные свойства неравенств для углов (§ 20),

6) доказать следствия из первой теоремы о внешнем угле (§ 20, теорема 40),

7) доказать следствия 1—3 из теоремы 42.

6. Если в треугольнике $ABC \measuredangle A \equiv \measuredangle C$, то $AB \equiv BC$. Доказать.

7. Построить (в расшифровку примечания к теореме 13, § 13) интерпретацию аксиом групп I и II с помощью «рациональной сетки».

8. Вывести аксиомы конгруентности из аксиом принадлежности, аксиом порядка и аксиом движения (см. [17], гл. II, § 4).

9. Реферировать § 41 (пример интерпретации) из книги [19].

10. Реферировать § 42 (интерпретация Федорова) из той же книги.

11. Решение некоторых задач в интерпретации Е. С. Федорова (по материалам статьи С. А. Касьянюк в журнале «Математика в школе», 1956, № 1, п. 4).

12. Реферат «Изображение атомных структур минералов по методу акад. А. Н. Заварицкого» (та же статья, п. 5).

ГЛАВА III

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

§ 24. Измерение отрезков (и углов)

Установить систему измерения отрезков — значит сопоставить каждому отрезку AB некоторое положительное число (AB), называемое длиной отрезка, так, чтобы выполнялись следующие требования:

1) существует некоторый отрезок, длина которого равна 1,
2) конгруентные отрезки обладают равными длинами,
3) если $A\dot{B}C$, то $(AB)+(BC)=(AC)$.

Нахождение длины отрезка называется измерением отрезка.

Если S — середина отрезка AB, то каждый из отрезков AS и BS называется одной второй частью или половиной отрезка AB. Половина половины отрезка называется одной четвертой частью или четвертью этого отрезка, половина четверти — одной восьмой его частью и т. д.

Для дальнейшего понадобится следующая вспомогательная теорема.

Лемма. *Если каждый из двух отрезков KL и MN есть $\frac{1}{2^n}$-я часть одного и того же отрезка, то $KL \equiv MN$.*

1) Для $n=1$ предложение справедливо по определению.

2) Докажем, что данное предложение справедливо для $n=2$, т. е. что все четвертые части произвольного отрезка конгруентны. Для этого достаточно доказать конгруентность половин конгруентных отрезков.

Пусть дано: $AB \equiv A'B'$, O — середина AB, O' — середина $A'B'$. Требуется доказать, что $AO \equiv A'O'$.

Пусть $AO_1 \equiv A'O'$, O_1с/р$B(A)$ и $O_1B_1 \equiv O'B'$, причем B_1п/р$A(O_1)$ (рис. 87). Тогда, по аксиоме III. 3, $AB_1 \equiv A'B'$, а по теореме 14 B_1с/р$B(A)$.

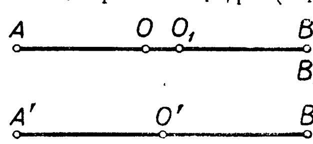


Рис. 87.

Из соотношений $AB_1 \equiv A'B'$, $AB \equiv A'B'$, B_1с/р$B(A)$ по теореме 33, следует, что точки B и B_1 совпадают.

Далее: $AO_1 \equiv A'O' \equiv O'B' \equiv O_1B_1$, так что O_1 — середина отрезка AB_1 или, что то же, отрезка AB, и поэтому (теорема 39) O_1 совпадает с O. Следовательно, $AO \equiv A'O'$, что и требовалось доказать.

3) Справедливость теоремы для любого n вытекает из доказанного по индукции: для перехода от $n-1$ к n надо применить такие же рассуждения, как и в п. 2.

Теорема. 50. *Если избран отрезок, длина которого положена равной единице, то можно установить не более одной системы измерения отрезков.*

Пусть OE — единичный отрезок, т. е. $(OE)=1$. Рассмотрим произвольный отрезок AB. Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n, E_{n+1}$ (рис. 88) — такие точки прямой AB, что $E_{i-1}E_i \equiv OE$, $E_{i-1}\dot{E}_iE_{i+1}$ и E_{n+1} — первая такая из точек E_i, что $A\dot{B}E_{n+1}$ (см. теорему 43).

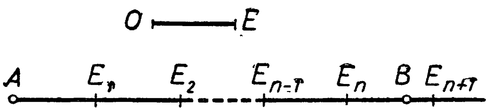


Рис. 88.

Если E_n совпадает с B, то, в силу определения длины (пункт 3), мы обязаны считать, что $(AB)=n$.

Допустим, что E_n не совпадает с B, т. е. что $E_n\dot{B}E_{n+1}$. Пусть E' — середина отрезка E_nE_{n+1}. Обозначая $(E_nE')=x$, найдем, по условию 2, что также $(E'E_{n+1})=x$, а так как $E_nE_{n+1}=1$, то, по условию 3, $x+x=1$, $x=\frac{1}{2}$. Поэтому если E' совпадает с B, то, в силу условия 3, мы обязаны положить $(AB)=n+\frac{1}{2}$. Ради удобства дальнейших рассуждений будем при этом писать: $(AB)=n,1$, понимая знаки после запятой в двоичной системе.

Допустим теперь, что E' не совпадает с B. Тогда либо $E_n\dot{B}E'$, либо $E'\dot{B}E_{n+1}$ (рекомендуется строго доказать это утверждение, опираясь на теорему 11). Пусть, например, $E'\dot{B}E_{n+1}$ (другое предположение развивается вполне аналогично). Пусть E'' — середина отрезка $E'E_{n+1}$. Если B совпадает с E'' (рис. 89), то, по условию 3,

$$(AB)=(AE_n)+(E_nE')+(E'E'')=n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=n,11.$$

Если же B не совпадает с E'' и $E'\dot{B}E''$ (рис. 90), то рассматриваем середину отрезка $E'E''$ и проводим такие же рассуждения, как и выше: $(AB)=n,10\dots$ и надо сопоставить точку B с серединой отрезка $E'E''$.

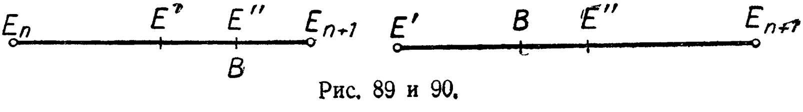


Рис. 89 и 90.

Если процесс такого рассуждения окажется конечным, т. е. если на некотором k-м шаге окажется, что точка B совпадает с E^k, то, по предыдущему, мы будем обязаны считать, что $(AB)= =n, n_1 n_2 \dots n_k$, где $n_k = 0$ или 1, так что единственность числа (AB) будет установлена.

Допустим теперь, что установленный здесь процесс измерения оказался бесконечным. Тогда образуется бесконечная последовательность отрезков $\overset{-k}{E}\overset{+k}{E}$, таких, что $\overset{-k}{E}B\overset{+k}{E}$, причем мера отрезка AB (существование которой мы в условиях данной теоремы предполагаем) должна, в силу требования 3, удовлетворять соотношениям:

$$AB=(A\overset{-k}{E})+(\overset{-k}{E}B)>(A\overset{-k}{E}),\quad (A\overset{+k}{E})=(AB)+(B\overset{+k}{E})>(AB),$$

так что при всяком k

$$(A\overset{-k}{E})<(AB)<(A\overset{+k}{E}).$$

Последовательность $(A\overset{-k}{E})$ при $k \to \infty$ имеет предел d^- так как она — монотонно неубывающая и при любом k

$$(A\overset{-k}{E})<n+1.$$

По таким же соображениям можно заключить, что существует число

$$d^+ = \lim_{k \to \infty}(A\overset{+k}{E}).$$

При этом

$$d^- = d^+ = d,$$

так как $(A\overset{+k}{E}) - (A\overset{-k}{E}) = (\overset{+k}{E}\overset{-k}{E}) = \frac{1}{2^k} \to 0.$

Как известно, величина, заключенная между двумя переменными, имеющими общий предел, равна этому пределу. Поэтому $(AB)=d$, так что и в этом предположении число (AB) определено однозначно. Теорема 50 доказана.

Теорема 51. *Если OE — произвольный отрезок, то существует система измерения отрезков, где $(OE)=1$.*

Согласно теореме 50, существует только один способ измерения отрезков, который может удовлетворять требованиям 1, 2 и 3 и который определился в процессе доказательства теоремы 50. Докажем, что этот способ действительно этим требованиям удовлетворяет.

Положим, по определению, что $(OE)=1$. Тогда условие 1 уже выполняется.

Применим способ измерения, установленный в процессе доказательства теоремы 50.

Докажем, что при этом будет выполняться требование 2, т. е.

докажем, что из $AB \equiv A'B'$ при данном способе измерения вытекает, что $(AB) = (A'B')$.

Будем строить на луче $\overline{AB}$ известные нам точки $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$ и образуем, как и ранее, последовательность (конечную или бесконечную) таких отрезков $\overset{-k}{E}\,\overset{+k}{E}$, что при всяком k $\overset{-k}{E}\dot{B}\overset{+k}{E}$. Перенесем это построение соответственно на луч $\overline{A'B'}$, т. е. построим на нем точки $E_1', E'_2, \ldots, E_n', E_{n+1}$ и будем отмечать середины отрезков соответственно тех же номеров, что и на луче $\overline{AB}$ (не обращая пока внимания на расположение точки B'). Нетрудно понять, что при данном способе измерения всегда

$$(A\overset{-k}{E})=(A\overset{-k'}{E}) \text{ и } (A\overset{+k}{E})=(A\overset{+k'}{E}).$$

С другой стороны, из леммы, приведенной в § 19, и теоремы 11 нетрудно заключить, что для каждого k будет иметь место соотношение $\overset{-k'}{E}\dot{B}'\overset{+k'}{E}$. Следовательно, числа (AB) и $(A'B')$ будут заключены между одними и теми же последовательностями и поэтому они равны* .

Остается доказать, что выполняется условие 3. Для этого докажем предварительно, что при данном способе измерения большему отрезку отвечает бóльшая мера.

Пусть $AB > A'B'$. Пусть B_1 — такая точка луча $\overline{AB}$, что $AB_1 \equiv A'B'$. Тогда, по определению, $A\dot{B}_1B$. Согласно предыдущему рассуждению, можно сравнивать (AB_1) и (AB), так как $(AB_1) = (A'B')$. Будем, как описано выше, производить измерение отрезка AB. Если на каком-либо шаге окажется, что какая-либо точка из точек E^k, появляющихся в процессе измерения, будет между B_1 и B, то, по определению длины, $(AB_1) < (AE^k)$, $(AB) > (AE^k)$, так что искомое соотношение $(AB_1) < (AB)$ будет иметь место. Но не может случиться, чтобы при любом k точки B_1 и B лежали на одной и той же $\frac{1}{2^k}$-й части единичного отрезка: это означало бы, что $\frac{1}{2^k}OE > B_1B$, т. е. что при любом k $2^kB_1B < OE$, а это противоречит теореме Архимеда.

Перейдем к доказательству свойства 3. Пусть $(AB)=a$, $(BC)=b$, $(AC)=c$. Образуем отрезок $\frac{1}{2^n}$ OE и будем откладывать его в обе стороны от точки B, пока не получим, что при некотором k

$$BA_k \leqslant BA < BA_{k+1},$$

а при некотором m

* Чтобы эти рассуждения распространить также на случай конечных последовательностей, достаточно условиться считать, что члены их, начиная с некоторого k, остаются постоянными.

$$BC_m \leqslant BC < BC_{m+1}$$

(рис. 91). Тогда, по предыдущему, $(BA_k) \leqslant a < (BA_{k+1})$, т. е.

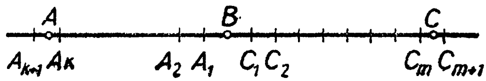


Рис. 91.

$$\frac{k}{2^n} \leqslant a < \frac{k+1}{2^n},$$

а также $(BC_m) \leqslant в < (BC_{m+1})$, т. е.

$$\frac{m}{2^n} \leqslant b < \frac{m+1}{2^n},$$

так что

$$\frac{k+m}{2^n} \leqslant a+b < \frac{k+m+2}{2^n}.$$

С другой стороны, по теореме 42, $A_kC_m \leqslant AC < A_{k+1}C_{m+1}$, так что

$$\frac{k+m}{2^n} \leqslant c < \frac{k+m+2}{2^n}.$$

Следовательно,

$$\left|(a+b) - c\right| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Полагая теперь, что $n \to \infty$, найдем, что постоянная $|(a+b)-c|$ бесконечно мала, т. е. равна нулю, что и требовалось доказать.

Заметим, что таким же путем, как это было сделано для отрезков, можно ввести понятие о системе измерения углов и доказать ее существование и единственность.

По методу от противного из предыдущего можно заключить, что отрезки, имеющие равные меры, конгруентны. Это же относится и к углам.

Геометрические величины, обладающие таким свойством, называются иногда величинами первого рода.

Отметим, что изложенная теория измерения отрезков относится к области абсолютной геометрии.

§ 25. Произведение отрезков

Определение. Будем говорить, что треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$, и писать $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, если

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle A', \ \measuredangle B \equiv \measuredangle B', \ \measuredangle C \equiv \measuredangle C'.$$

В частности, конгруентные треугольники подобны.

Чтобы убедиться в существовании неконгруентных подобных треугольников, рассмотрим произвольный треугольник ABC. Пусть A' — произвольная точка отрезка AB (рис. 92). Пусть

$A'M$ — прямая, параллельная прямой AC. Согласно аксиоме Паша, прямая $A'M$ пройдет через некоторую точку C' отрезка BC.

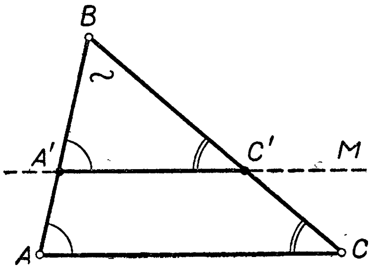


Рис. 92.

Обратившись к аксиоме III. 6 и теореме 47, непосредственно заключим, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Введем понятие о произведении двух отрезков. Пусть даны два отрезка AB и CD, а также отрезок OE такой, что $(OE) = 1$. Пусть $(\bar{h}, \bar{k})$ (рис. 93) — произвольный угол, P — его вершина. Пусть E' и A' — такие точки луча $\bar{h}$, что $PE' \equiv OE$, $PA' \equiv AB$ и B' — такая точка луча $\bar{k}$, что $PB' \equiv CD$. Если $A'M \parallel E'B'$, то прямая $A'M$проходит через точку C' луча $\bar{k}$*. Отрезок PC' будем называть **п р о и з в е д е н и е м** отрезков AB и CD и записывать: $PC' \equiv \equiv AB \cdot CD$.

Ради простоты записей удобно обозначать отрезок одной малой буквой со знаком $\sim$ наверху: $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и т. д. При этом на чертеже ставят букву в конце соответствующего отрезка (см. рис. 94), а меру отрезка $\tilde{a}$ обозначают через a.

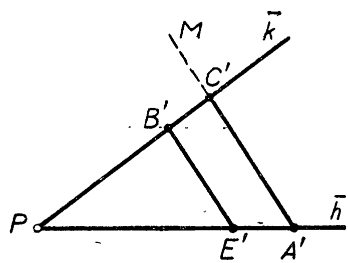


Рис. 93.

Заметим, что можно определить также и деление отрезков как операцию, обратную умножению: на рис. 93 $PC' : PB' \equiv PA'$.

Теорема 52. *Мера произведения двух отрезков равна произведению их мер, т. е.* $(a \cdot b) = a \cdot b$.

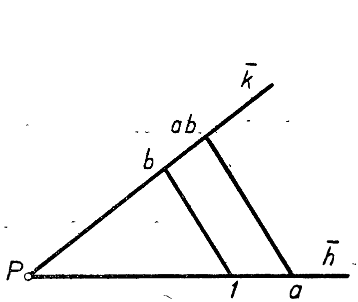


Рис. 94.

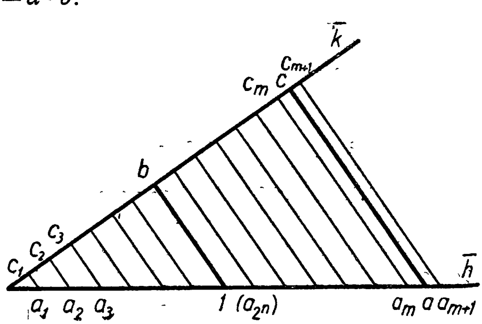


Рис. 95.

* См. следствие из аксиомы V.

Обратимся к рисунку 95, где положим $\tilde{c} \equiv \tilde{a} \cdot \tilde{b}$. Разделим единичный отрезок на 2^n частей и представим себе, что эти части откладываются последовательно на луче $\overline{h}$, образуя точки a_1, $a_2, \ldots, a_m$, a_{m+1} такие, что $\tilde{a}_m \leqslant \tilde{a} < \tilde{a}_{m+1}$. Через точки a_i будем проводить прямые, параллельные прямой, соединяющей точки 1 и b, и будем обозначать точки их пересечения с лучом $\overline{k}$ соответственно через c_i.

Тем же путем, как это делается в школьном курсе, можно убедиться, что все отрезки $c_i c_{i+1}$ конгруентны между собой, так что каждый из них конгруентен некоторому отрезку $\tilde{\varepsilon}$. Заметим еще, что при этом точка c_{2^n} совпадает с точкой b и будут выполняться соотношения: $\tilde{c}_m \leqslant \tilde{c} < \tilde{c}_{m+1}$.

Допустим сначала, что при некотором n точка a_m совпала с точкой a. При этом точка c_m совпадет с точкой c. Тогда получим:

$$(\tilde{a}) = \frac{m}{2^n};\ (\tilde{b}) = 2^n \cdot (\tilde{\varepsilon});\ (\tilde{c}) = m \cdot (\tilde{\varepsilon}).$$

Отсюда непосредственно видно, что $(\tilde{a}) \cdot (\tilde{b}) = (\tilde{c})$, т. е. $ab = c$.

Допустим теперь, что упомянутого совпадения не происходит ни при каком n. Из определений следует, что

$$(\tilde{a}_m) = \frac{m}{2^n},\ (\tilde{b}) = 2^n (\tilde{\varepsilon}).$$

С другой стороны,

$$(\tilde{c}_m) = m \cdot (\tilde{\varepsilon}).$$

Следовательно,

$$(\tilde{c}_m) = (\tilde{a}_m) \cdot (\tilde{b}).$$

Точно так же можно показать, что

$$(\tilde{c}_{m+1}) = (\tilde{a}_{m+1}) \cdot (\tilde{b}).$$

А так как $\tilde{c}_m \leqslant \tilde{c} < \tilde{c}_{m+1}$, то и $(\tilde{c}_m) \leqslant (\tilde{c}) < (\tilde{c}_{m+1})$ или $a_m \cdot b \leqslant$ $\leqslant (\tilde{c}) < a_{m+1} \cdot b$.

Положим, что n неограничено растет. Тогда, по определению меры отрезка,

$$a_m \to a \text{ и } a_{m+1} \to a.$$

Постоянная $(\tilde{c})$, заключенная между двумя переменными, имеющими общий предел, равна этому пределу, т. е. $(\tilde{c}) = ab$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Произведение двух отрезков не зависит от выбора угла (h, k), с помощью которого оно образуется.*

Следствие 2. *Произведение отрезков обладает свойствами переместительности, сочетательности и распределительности.*

Теорема 53. *Если $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, то $(AB) \cdot (B'C') = (A'B') \cdot (BC)$.*

Пусть A_1 (рис. 96) — такая точка луча $\overline{BA}$, что $BA_1 \equiv B'A'$, C_1 — такая точка луча $\overline{BC}$, что $BC_1 \equiv B'C'$. Тогда $\triangle A_1BC_1 \equiv \triangle A'B'C'$, так что $\measuredangle BA_1C_1 \equiv \measuredangle B'A'C' \equiv \measuredangle BAC$, а поэтому $A_1C_1 \parallel AC$. Пусть еще E—такая точка луча $\overline{BA}$, что отрезок BE конгруентен отрезку, принятому за единицу измерения, и пусть $EF \parallel AC$. Теперь $BC_1 \equiv BA_1 \cdot BF$, $BC \equiv BA \cdot BF$, или $B'C' \equiv B'A' \cdot BF$, $BC \equiv BA \cdot BF$. Умножая эти соотношения почленно на AB и соответственно на $A'B'$, получим:

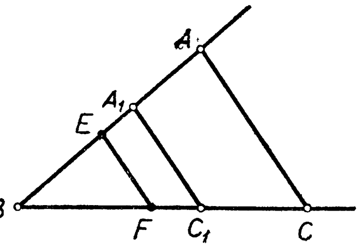


Рис. 96.

$$B'C' \cdot AB \equiv (B'A' \cdot BF) \cdot AB \equiv (AB \cdot A'B') \cdot BF;$$
$$BC \cdot A'B' \equiv (BA \cdot BF) \cdot A'B' \equiv (AB \cdot A'B') \cdot BF,$$

откуда $AB \cdot B'C' \equiv A'B' \cdot BC$, а значит, $(AB \cdot B'C') = (A'B' \cdot BC)$, или по предыдущей теореме, $(AB)(B'C') = (A'B')(BC)$, что и требовалось доказать.

§ 26. Равновеликие и равносоставленные фигуры

Рассмотрим некоторый простой плоский многоугольник

$$M(A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Как было установлено выше, в § 14, такой многоугольник определяет известным образом некоторую внутреннюю его область.

Представим себе (рис. 97), что какие-либо две точки P_1 и P_m данного многоугольника соединены простой ломаной линией $P_1P_2 \dots P_m$, целиком лежащей во внутренней области этого многоугольника. Тогда образуются два простых многоугольника:

$$M_1(P_1P_2 \dots P_mA_{k-1} \dots A_i) \text{ и } M_2(P_1P_2 \dots P_mA_kA_{k+1} \dots A_nA_1 \dots A_{i-2}),$$

причем внутренняя область данного многоугольника есть объединение внутренних областей двух этих многоугольников. При этом говорят, что многоугольник M **разложен** на многоугольники M_1 и M_2, или что M **есть сумма** M_1 и M_2, или что многоугольник M **составлен** из многоугольников M_1 и M_2. Если многоугольник M_2 в свою очередь разложен на многоугольники M_2' и M_2'',

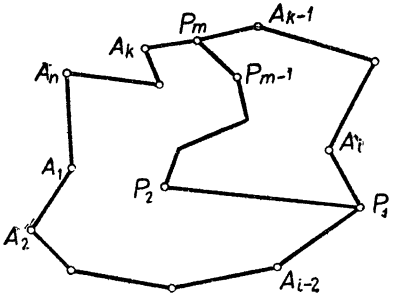


Рис. 97.

то говорят, что многоугольник M разложен на три многоугольника: M_1, M_2' и M_2'' и т. д.

Если установлено какое-либо соглашение, в силу которого каждому простому многоугольнику M сопоставляется некоторое положительное число (M), подчиненное условиям:

1) существует многоугольник, которому сопоставляется число единица,

2) конгруентным многоугольникам сопоставляются равные числа,

3) сумме многоугольников соответствует число, равное сумме чисел, соответствующих слагаемым многоугольникам, то говорят, что установлена система измерения многоугольников. При этом число (M) называется площадью многоугольника M.

В школьном курсе теория площадей строится при таких же условиях, но обычно они явно не формулируются. Главная же особенность школьного изложения этого вопроса та, что существование системы измерения многоугольников принимается без доказательства. Этого допущения можно избежать различными способами (см. об этом, например, [[20]]). Изложим здесь основы соответствующей теории, придерживаясь примерно той схемы, которая была в свое время предложена Шатуновским и Гильбертом.

Будем называть два многоугольника равносоставленными (и обозначать это соотношение между многоугольниками символом р/с), если эти многоугольники можно разложить на соотственно конгруентные треугольники. На рисунке 98 изображены равносоставленные треугольник, прямоугольник и параллелограмм.

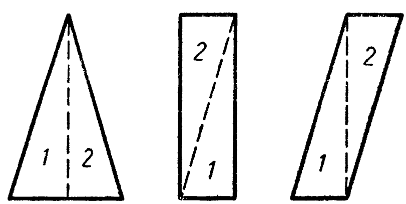


Рис. 98.

Если система измерения установлена, то два многоугольника, площади которых равны, называются равновеликими. Отношения равновеликости мы будем обозначать символом р/в. Ясно, что отношение равновеликости транзитивно: если M_1р/вM_2 и M_2р/вM_3, то M_1р/вM_3. Конгруентные многоугольники, согласно условию 2, равновелики. А согласно условию 3, равносоставленные многоугольники также равновелики. С другой стороны, можно доказать, что конгруентные многоугольники всегда могут быть разложены на соответственно конгруентные треугольники, т. е. конгруентные многоугольники равносоставлены. Итак, конгруентность влечет равносоставленность, равносоставленность влечет равновеликость:

$$\equiv \to р/с \to р/в.$$

Теорема 54. *Два многоугольника, равносоставленные с одним и тем же третьим, равносоставлены.*

Пусть M_1р/сM_3. Это означает, что существует конечная система треугольников $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_k$, на которые (соответственно им конгруентные) разлагаются как многоугольник M_1, так и многоугольник M_3.

Условие M_2р/сM_3 означает, что существует некоторая (вообще говоря, отличная от предыдущей) система треугольников $\triangle'_1, \triangle'_2, \ldots, \triangle'_n$, на которые разлагаются многоугольники M_2 и M_3.

Чтобы доказать существование общей системы треугольников разложения для многоугольников M_1 и M_2, представим себе, что на многоугольник M_3 нанесены обе упомянутые системы разложения. Этим самым (после разложения на треугольники могущих образоваться здесь многоугольников) образуется новая сеть разложения многоугольника M_3 на такие треугольники, из которых можно составить как треугольники первого, так и треугольники второго разложения. Следовательно, из треугольников этого нового разложения можно составить как M_1, так и M_2.

Теорема 55. *Параллелограммы, основания которых конгруентны и высоты конгруентны, равносоставлены.*

Доказательство этой теоремы состоит в непосредственном указании способа разложения данных параллелограммов на соответственно конгруентные треугольники.

Ради простоты будем считать, что конгруентные основания параллелограммов совпадают. Тогда возможны три случая, сущность которых ясна из рисунка 99. Читатель самостоятельно воспроизведет детали необходимых рассуждений*.

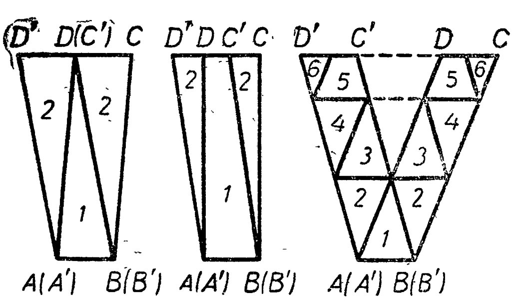


Рис. 99.

---

* Необходимо заметить, что строгое доказательство теоремы 55 требует (для третьего случая) привлечения теоремы Архимеда: именно эта теорема обеспечивает конечность осуществляемого в этом случае разложения.

Теорема 56. *Всякий треугольник равносоставлен с параллелограммом, имеющим конгруентное основание и вдвое меньшую высоту.*

Сущность доказательства ясна из рисунка 100, где MN — средняя линия треугольника ABC.

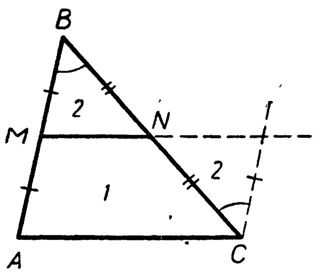


Рис. 100.

Следствие. *Треугольники, у которых конгруентны основания и соответствующие высоты, равносоставлены.*

После этих предварительных соображений перейдем к рассмотрению вопроса об измерении площадей многоугольников. В основу теории площадей удобнее всего положить треугольники, так как всякий многоугольник можно разложить на треугольники.

§ 27. Площадь треугольника

Теорема 57. *При выбранной единице измерения длин и выбранной единице измерения площадей можно установить не более одной системы измерения площадей треугольников.*

Допустим, что каждому треугольнику можно поставить в соответствие положительное число — его площадь — так, что выполняются все условия: 1, 2 и 3, формулированные в предыдущем параграфе. Будем искать это число.

Рассмотрим сначала прямоугольный треугольник ABC с катетами AC и BC. Так как два прямоугольных треугольника, катеты которых конгруентны, по условию 2, равновелики, то площадь треугольника может быть функцией только этих катетов. Если один из катетов, например AC, фиксировать, то число (ABC) будет функцией одной переменной — функцией катета BC. Обозначая площадь треугольника ABC буквой S, а переменную длину катета BC буквой x, напишем:

$$S = S(x).$$

Будем искать вид этой функции.

Допустим, что $(BC) = x = x_1 + x_2$, где $x_1 = (CD)$, $x_2 = (DB)$ (рис. 101). Тогда, по условию 3,

$$(ABC) = (ACD) + (ABD),$$

или: $S(x_1 + x_2) = S(x_1) + (ABD)$. Пусть $(CE) = (BD) = x_2$. Тогда, по предыдущему следствию, $(ADB) = (ACE) = S(x_2)$. Таким образом,

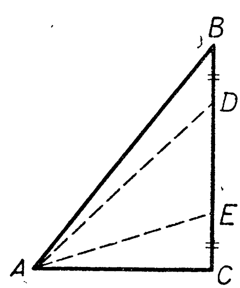


Рис. 101.

$$S(x_1+x_2)=S(x_1)+S(x_2).$$

По индукции легко вывести, что

$$S(x_1+x_2+\dots+x_n)=S(x_1)+S(x_2)+\dots+S(x_n). \quad (*)$$

Полагая здесь $x_1=x_2=\dots=x_n=1$, получим:

$$S(n)=nS(1).$$

Обозначая постоянную S (1) через k, перепишем последнее равенство в виде:

$$S(n)=kn.$$

Таким образом, для целых значений аргумента искомая функция пропорциональна аргументу. При $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{m}$ (m — натуральное) соотношение (*) приводит к равенству:

$$S\left(\frac{n}{m}\right)=n\cdot S\left(\frac{1}{m}\right).$$

Полагая, в частности, $n=m$, получим:

$$S(1)=m\cdot S\left(\frac{1}{m}\right),$$

откуда:

$$S\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}\cdot S(1)=k\cdot\frac{1}{m}.$$

Поэтому,

$$S\left(\frac{n}{m}\right)=n\cdot S\left(\frac{1}{m}\right)=n\cdot k\cdot\frac{1}{m}=k\cdot\frac{n}{m}.$$

Следовательно, в случае произвольного рационального положительного значения аргумента искомая функция $S(x)$ пропорциональна аргументу, причем коэффициент пропорциональности $k=S(1)$.

Осталось рассмотреть значения искомой функции при иррациональных значениях аргумента.

Иррациональное число α можно рассматривать как общий предел двух монотонных последовательностей рациональных чисел: возрастающей последовательности приближений по недостатку $\alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots, \alpha_n^-, \dots$ и убывающей последовательности приближений по избытку $\alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots, \alpha_n^+, \dots$

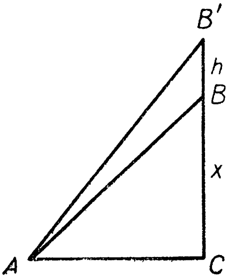


Рис. 102.

При этом

$$\alpha_i^- < \alpha < \alpha_i^+ \text{ и } \lim_{n\to\infty}\alpha_n^- = \lim_{n\to\infty}\alpha_n^+ = \alpha.$$

Из условия 3, § 26, ясно, что $S(x)$ — возрастающая функция. Действительно, пусть $(BC)=x$, $(BB')=h$ (рис. 102). Тогда $S(x+h)=(ACB')=(ABC)+(ABB')=S(x)+(ABB')>S(x)$. Поэтому из $\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+$ следует, что

$$S(\alpha^-_n) < S(\alpha) < S(\alpha^+_n),$$

или, по предыдущему (α_n^- и α_n^+ — рациональные числа):

$$k\cdot\alpha_n^- < S(\alpha) < k\alpha_n^+.$$

А так как последовательности $k\alpha_n^-$ и $k\alpha_n^+$ имеют общий предел $k\cdot\alpha$, то $S(\alpha)=k\alpha$.

Таким образом, если один из катетов AC прямоугольного треугольника ABC фиксирован, а другой BC имеет переменную длину x, то площадь треугольника $(ABC)=kx$, где $k=(ABC)$ при $(BC)=1$.

Пусть теперь оба катета прямоугольного треугольника ABC как угодно изменяются. Обозначим:

$$(AC)=x,\ (BC)=y,\ (ABC)=S\ (x,\ y).$$

Согласно предыдущему, при фиксированном x

$$S(x,\ y)=S_1(y)=k_x\cdot y,$$

где $k_x=S\ (x,\ 1)$, а при фиксированном y

$$S\ (x,\ y)=S_2(x)=k_y\cdot x,$$

где $k_y=S\ (1,\ y)$. Поэтому

$$S\ (x,\ y)=k_x y=S\ (x,\ 1)\cdot y=k_{y=1}\cdot x\cdot y=S\ (1,\ 1)\cdot x\cdot y.$$

Здесь $S\ (1,1)$ — вполне определенное число — площадь прямоугольного треугольника, оба катета которого единичные. Обозначая $S\ (1,1)=\lambda$, получим:

$$S\ (x,\ y)=\lambda xy.$$

Таким образом, площадь прямоугольного треугольника пропорциональна произведению его катетов.

Перейдем к определению площади произвольного треугольника. Если A и C — острые углы треугольника ABC (рис. 103), то высота BD разлагает его на два прямоугольных треугольника ABD и CBD. При этом, согласно условию 2, § 26,

$$(ABC)=(ABD)+(BCD).$$

А по предыдущему,

$$(ABD)=\lambda\cdot(AD)(BD)$$

и

$$(BCD)=\lambda\cdot(CD)\cdot(BD),$$

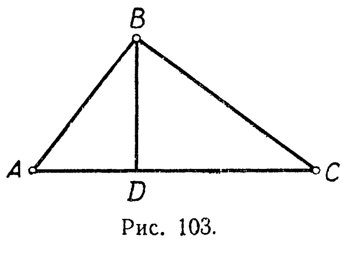


Рис. 103.

так что

$$(ABC)=\lambda\cdot(BD)\cdot[(AD)+(CD)]=\lambda\cdot(BD)\cdot(AC).$$

Таким образом, площадь любого треугольника должна быть пропорциональна произведению некоторой его стороны на соответствующую высоту (причем коэффициент пропорциональности имеет смысл, установленный выше).

Заметим, наконец, что полученная величина площади треугольника не зависит от выбора той или иной стороны его. В самом деле, пусть, помимо высоты BD, высота AE также разлагает треугольник ABC на два треугольника (рис. 104). Тогда

$\triangle ACE \sim \triangle BCD$, и поэтому, согласно теореме 53 (§ 25), $(BC)\cdot(AE)=(AC)\cdot(BD)$, так что и $\lambda(BC)\cdot(AE)=\lambda(AC)\cdot(BD)$.

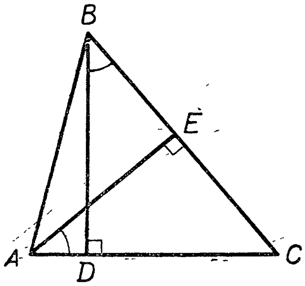


Рис. 104.

Единственность системы измерения площадей треугольников установлена.

Теорема 58. *Система измерения площадей треугольников существует.*

В предыдущей теореме показано, что площадью треугольника может быть только число $\lambda\cdot a\cdot h_a$, где a — длина какой-либо его стороны, h_a — длина соответственной высоты, причем это произведение не зависит от выбора той или иной стороны. Надо доказать, что такое число действительно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к понятию площади (требования 1—3, § 26).

1. **Проверка требования 1.** Требование 1 выполняется даже «с избытком»: любой треугольник можно объявить единичным и тогда положить:

$$\lambda=\frac{1}{a\cdot h_a}.$$

2. **Проверка требования 2.** Конгруентные треугольники имеют равные площади при данном определении, так как их стороны и высоты соответственно конгруентны, а конгруентные отрезки имеют равные длины.

3. **Проверка требования 3.**

а) Случай «трансверсального» разложения треугольника на части. Все треугольники разложения имеют вершину в одной из вершин A данного треугольника, а другие их вершины располагаются на противолежащей стороне BC данного треугольника (рис. 105). При этом

$$(ABC)=\lambda ah=\lambda(a_1+a_2+\ldots+a_n)h=\lambda(a_1h+a_2h+\ldots+a_nh)=\lambda a_1h+\lambda a_2h+\ldots+\lambda a_nh=(BAA_1)+(A_1AA_2)+\ldots+A_{n-1}AC,$$

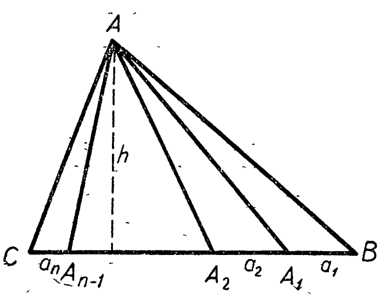


Рис. 105.

так что при данном определении площадь треугольника, разложенного на части трансверсально, действительно равна сумме площадей его частей, требование 3 выполняется.

б) Случай «зигзагообразного» разложения. Все вершины треугольников разложения располагаются на двух сторонах данного треугольника (рис. 106). Этот случай легко сводится к предыдущему:

$$(ABC) = (ABD) + (BCD), \quad (BCD) = (BED) + (CED) \text{ и т. д.}$$

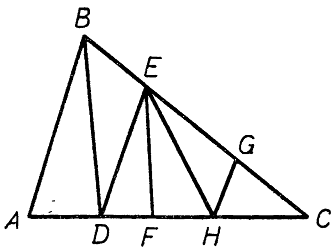


Рис. 106.

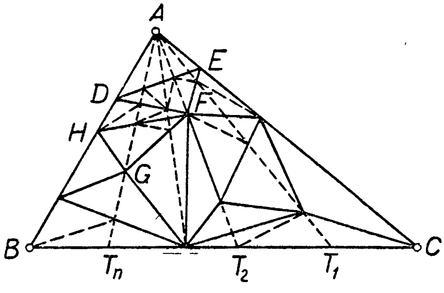


Рис. 107.

в) Общий случай. Пусть треугольник ABC (рис. 107) разложен на треугольники ADE, DEF, FDH, FGH,... (в конечном числе) произвольным образом.

Проведем всевозможные прямые, соединяющие одну из вершин данного треугольника (например, вершину A) со всеми вершинами треугольников разложения, не лежащими на сторонах AB и AC. При этом образуются треугольники CAT_1,T_1AT_2,..., которые мы будем называть «трансверсальными».

Проведенные нами прямые разлагают некоторые из треугольников первоначального разложения на треугольники и четырехугольники. Разложим каждый из таких четырехугольников на треугольники путем проведения их диагоналей. Таким образом, возникает более мелкая сеть разложения на треугольники, которые мы назовем «элементарными».

Как показано выше (см. п. «а»), площадь данного треугольника равна сумме площадей трансверсальных треугольников. Но каждый из трансверсальных треугольников разлагается на элементарные треугольники зигзагообразно, и поэтому (п. «б») площадь каждого трансверсального треугольника будет равна сумме площадей элементарных треугольников, из которых он состоит. Отсюда следует, что площадь данного треугольника равна сумме площадей всех элементарных треугольников:

$$(ABC) = \Sigma\Delta_e. \tag{1}$$

С другой стороны, каждый треугольник разложения (например, треугольник DEF) разлагается на элементарные треугольники либо трансверсально (прямой AF), либо зигзагообразно, так что площадь каждого треугольника разложения равна, согласно п. «а» и «б», сумме площадей элементарных треугольников, на которые он разлагается. Поэтому сумма площадей всех треугольников разложения равна сумме площадей всех элементарных треугольников:

$$\Sigma\Delta_r = \Sigma\Delta_e. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) непосредственно следует:

$$(ABC)=\Sigma\Delta_r,$$

что и требовалось доказать.

§ 28. Площадь простого многоугольника

Всякий простой многоугольник можно разложить на треугольники. Для этого можно, например, разложить его сначала на выпуклые многоугольники посредством прямых, на которых лежат его стороны, а затем каждый выпуклый многоугольник — на треугольники путем проведения диагоналей из какой-либо его вершины.

Согласно требованию 3, § 25, площадь многоугольника должна равняться сумме площадей треугольников разложения. Но площадь каждого треугольника, по предыдущему, может быть определена не более как одним способом. Значит, и площадь простого многоугольника может иметь в условиях 1—3 не более одного значения. Таким образом, единственность системы измерения площадей многоугольников уже установлена: если многоугольник разложен как-либо на треугольники, то площадью этого многоугольника может быть только сумма площадей треугольников разложения. Чтобы установить систему измерения площадей многоугольников, отстается доказать, что при таком определении площадь многоугольника не зависит от способа его разложения на треугольники и что при этом выполняются условия, приведенные в определении системы измерения площадей.

Допустим, что многоугольник M разложен на треугольники двумя различными способами, и представим себе, что на многоугольник нанесены обе сети разложения одновременно. На рисунке 108 изображен многоугольник $ABCDEF$, разложенный на треугольники путем проведения всех его диагоналей, выходящих из вершины A, и путем проведения лучей из некоторой внутренней точки во все вершины многоугольника. Тогда многоугольник M окажется разложенным на некоторые треугольники и многоугольники, образованные линиями обеих сетей разложения. Каждый из таких многоугольников можно разложить на треугольники, после чего многоугольник M разложится на «элементарные» треугольники. На рисунке 108 четырехугольник $EPQS$ разложен на два «элементарных» треугольника EPS и PQS Из таких «элементарных» треугольников складываются как треугольники первого разложения, так и треугольники второго разложения. Поэтому как сумма площадей треуголь-

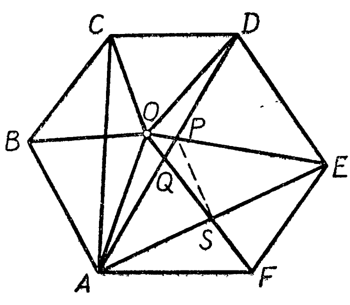


Рис. 108.

ников первого разложения, так и сумма площадей треугольников второго разложения равны одному и тому же числу, а именно сумме площадей всех элементарных треугольников.

Что касается требования 1, то здесь, как и для треугольников, можно объявить любой многоугольник единичным и соответственно подобрать множитель λ. Например, если за многоугольник, площадь которого равна единице, принять квадрат $ABCD$ со стороной 1, то должны иметь место соотношения:

$$1 = (ABCD) = (ABD) + (BCD) = \lambda \cdot 1 \cdot 1 + \lambda \cdot 1 \cdot 1 = 2\lambda,$$

откуда ясно, что следует положить $\lambda = \frac{1}{2}$.

Конгруентные многоугольники имеют равные площади, так как два конгруентных многоугольника всегда можно разложить на соответственно конгруентные треугольники.

Осталось проверить свойство 3. Допустим, что многоугольник M разложен на два (или более) многоугольника M_1 и M_2. Надо доказать, что при этом $(M) = (M_1) + (M_2)$. Пользуясь произволом разложения многоугольника на треугольники для определения его площади, выполним это разложение, разлагая в отдельности многоугольники M_1 и M_2. Тогда справедливость свойства 3 станет очевидной.

Существование системы измерения площадей многоугольников доказано.

Заметим в заключение, что в отличие от отрезков и углов равновеликость многоугольников вообще не влечет их конгруентности. Поэтому многоугольники называют иногда величинами второго рода. Одно «неожиданное» свойство этих величин будет установлено в § 29.

§ 29. Теорема Бояи — Гервина

Почти одновременно венгерский математик Фаркаш Бояи (1832) и немецкий офицер — любитель математики Гервин (1833) установили одно интересное свойство многоугольников, рассмотрению которого и посвящен этот параграф.

Теорема 59. *Равновеликие треугольники равносоставлены.*

Пусть дано, что $\triangle ABC$р/в$\triangle A'B'C'$. Если эти треугольники конгруентны, то справедливость теоремы очевидна. Допустим, что это не так, и положим ради определенности, что $AB > A'B'$. Пусть $B'D'$ — прямая, параллельная $A'C'$. Проведем окружность с центром A' и радиусом AB (рис. 109).

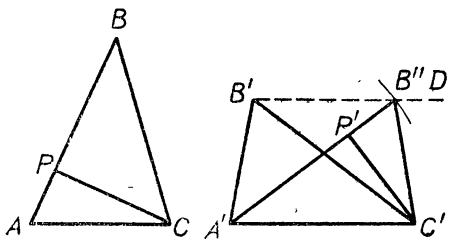


Рис. 109.

Так как B' — внутренняя точка этой окружности, то прямая $B'D'$ пересекает эту окружность в двух точках. Пусть B'' — одна из этих двух точек пересечения. Тогда $\triangle A'B'C'$р/с$\triangle A'B''C'$, по следствию из теоремы 55 (§ 26). Обращаясь к условию, найдем поэтому, что $\triangle ABC$р/с$\triangle A'B''C'$. Проведя высоты этих треугольников CP и $C'P'$, придем к равенству:

$$(AB)\cdot(CP)=(A'B'')\ (C'P').$$

А так как, по построению, $AB\equiv A'B''$, то получим: $(CP)=(C'P')$, так что $CP\equiv C'P'$.

Треугольники ABC и $A'B''C'$ оказались в условиях вышеупомянутого следствия, и поэтому они равносоставлены. Равносоставленность треугольников ABC и $A'B'C'$ вытекает теперь из транзитивного свойства равносоставленных фигур (теорема 54, § 26).

Теорема 60. *Каждый многоугольник равносоставлен с некоторым треугольником.*

Пусть задан некоторый многоугольник M. Разложим его на треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$. Пусть $\tilde a_1, \tilde a_2, \ldots, \tilde a_n$ и соответственно $\tilde h_1, \tilde h_2, \ldots, \tilde h_n$ — основания и высоты этих треугольников. Рассмотрим еще произвольный отрезок $\tilde h$ и образуем отрезки:

$$\tilde b_i\equiv\frac{\tilde a_i\tilde h_i}{\tilde h}\quad (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

Пусть AC — отрезок, равный сумме всех отрезков b_i, D — точка этого отрезка, $DB\perp DC$, $DB\equiv\tilde h$ (рис. 110).

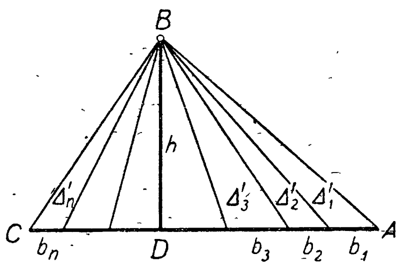


Рис. 110.

Соединим точку B с концами отрезков b_i; тогда треугольник ABC разложится трансверсально на n треугольников $\triangle'_i$. При этом, так как $\tilde a_i\tilde h_i\equiv\equiv\tilde b_i\tilde h$, то $a_ih_i=b_ih$, и поэтому $\triangle_i$р/в$\triangle'_i$. Значит, по предыдущей теореме, $\triangle_i$р/с$\triangle'_i$, откуда ясно, что Mр/сABC*.

Теорема 61. *Равновеликие многоугольники равносоставлены.*

Пусть M_1р/вM_2. Согласно теореме 60, существуют такие треугольники $\triangle_1$ и $\triangle_2$, что M_1р/с$\triangle_1$ и M_2р/с$\triangle_2$. Так как р/с $\rightarrow$ р/в, то $(M_1)=(\triangle_1)$ и $(M_2)=(\triangle_2)$. А так как, по условию, $(M_1)=$ $=(M_2)$, то $(\triangle_1)=(\triangle_2)$. Отсюда, по теореме 59, следует, что $\triangle_1$р/с$\triangle_2$.

Таким образом: M_1р/с$\triangle_1$р/с$\triangle_2$р/сM_2, откуда вытекает, что M_1р/сM_2.

* В [14], п. 254, изложен простой прием, позволяющий превратить выпуклый многоугольник в равновеликий треугольник.

Эта замечательная теорема известна под названием **теоремы Бояи — Гервина**. Смысл ее состоит в том, что два многоугольника, площади которых равны, всегда можно разрезать на соответственно равные части. Именно это обстоятельство позволяет вывести всю теорию площадей для многоугольников исключительно методами разложения и дополнения (см. школьный курс геометрии). Если бы свойство, изложенное в последней теореме, имело место и для других плоских фигур, то метод разложения позволял бы свести, например, вопрос об определении площади, ограниченной окружностью или эллипсом, к непосредственной квадратуре. Но это не так, и именно поэтому при переходе к площади криволинейных фигур метод разложения уже не может, вообще говоря, быть использован. Читателю рекомендуется познакомиться с доказательством невозможности перекраивания круга в многоугольник, например, по книге Н. М. Бескина [2], гл. X, § 3.

§ 30. Понятие о теореме Дена — Кагана

Система измерения объемов многогранников вводится под теми же аксиоматическими условиями, что и система измерения площадей многоугольников. Соответствующая теория тесно связана с отношением равносоставленности, которое определяется аналогично тому, как для многоугольников. В качестве основной фигуры естественно рассматривать тетраэдр, так как произвольный многогранник можно разложить на пирамиды, а пирамида разлагается на тетраэдры.

В теории объемов многогранников не может быть достигнута полная аналогия с теорией площадей многоугольников. Одна из интереснейших особенностей этой теории связана с вопросом о зависимости между соотношениями равновеликости (равенства объемов) и равносоставленности, которые для многоугольников равносильны.

Вопрос о равносильности отношений равновеликости и равносоставленности, который был решен для многоугольников уже в 30-х годах XIX века, оставался открытым в теории многогранников до начала нашего века.

Некоторые объемы (например, объем наклонной призмы) издавна определялись по методу разложения. Но было неясно, можно ли вычислить объем любого многогранника, пользуясь только этим методом. К концу XIX века были найдены (Хиллом) примеры треугольных пирамид, равносоставленных с кубом. Но доказательство равносоставленности любых двух равновеликих многогранников получить не удавалось. В 1900 году, когда происходил 1-й международный математический конгресс, Д. Гильберт предложил эту проблему в качестве одной из 23 важнейших проблем современной математики. Уже через год немецкий математик Ден дал отрицательный ответ на поставленный вопрос, показав, что равновеликие куб и правильный тетраэдр нельзя разложить на соответственно равные части. Вскоре (1903) В. Ф. Каган получил значительно более простое решение данного вопроса. В работах Дена и Кагана были исследованы условия, при которых два многогранника равносоставлены. Было доказано следующее: если два многогранника равносоставлены, то существуют такие натуральные числа n_i и m_j, что $\Sigma n_i \alpha_i - \Sigma m_j \beta_j = 2kd$, где α_i и β_j — двугранные углы данных двух многогранников, d — прямой угол, k — целое.

Из последней теоремы, известной под названием теоремы Дена — Кагана, следует, что две пирамиды с равновеликими основаниями и конгруентными высотами могут и не быть равносоставленными.

Именно этими соображениями (а не недосмотром математиков) объясняется то обстоятельство, что для определения объема пирамиды приходится привлекать теорию пределов: метод разложения здесь «не работает» не случайно.

Работы Дена и Кагана были продолжены в последние годы швейцарскими математиками Хадвигером, Зидлером и Глюром.

Элементарное изложение теории равносоставленных фигур можно найти в книжке В. Ф. Кагана [12], а также в брошюре В. Г. Болтянского [5].

С интересным подходом к определению площади многоугольника полезно познакомиться по брошюре А. М. Лопшица [21].

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. По школьному учебнику геометрии проследить, какие аксиомы используются (в явной или неявной форме) для введения понятия о длине отрезка.

2. Провести полностью рассуждения, необходимые для доказательства теоремы 55.

3. Превратить в равновеликий треугольник:

1) данный прямоугольник, 2) данный параллелограмм, 3) данную трапецию, 4) данный четырехугольник.

4. Реферат «Доказательство несправедливости теоремы Бояи — Гервина для криволинейных фигур» ([2], гл. X, § 3).

5. Выяснить, в каком месте изложенная теория площадей опирается на аксиому параллельности.

6. Доказать, что произведение площади грани тетраэдра на соответствующую высоту не зависит от выбора грани.

7. Изготовить модели для иллюстрации теоремы Бояи — Гервина и примыкающих к ней предложений (§ 26 и 30).

8. Как выразится площадь треугольника, если за единицу измерения площади принять площадь равностороннего треугольника со стороной 1? круга радиуса 1?

9. Реферат «Зависимости длины отрезка от выбора единицы измерения» ([18], гл. IX, § 55).

ГЛАВА IV

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ

§ 31. Три основных свойства системы аксиом абстрактной геометрии

Логическая полноценность абстрактной системы аксиом геометрии выражается в следующих трех к ней требованиях: 1) непротиворечивость; 2) независимость; 3) полнота.

Непротиворечивость означает, что отдельные аксиомы или группы аксиом не должны ни непосредственно противоречить одна другой, ни приводить к противоречивым выводам.

Говоря точнее: система аксиом противоречива, если из нее можно вывести некоторое предложение «*A*» и одновременно предложение «*не A*», а непротиворечивость системы аксиом означает невозможность такого результата. Непротиворечивость — существенно необходимое свойство системы аксиом, противоречивость означает полную непригодность данной аксиоматики.

Независимость аксиом данной системы означает, что никакая из аксиом не есть следствие остальных аксиом.

Независимость обозначают также иногда термином минимальность: никакая аксиома независимой системы не может быть отброшена без потери каких-либо вытекающих из нее свойств пространства. В учебных целях принцип независимости часто нарушают с целью упрощения изложения: чем больше принято недоказуемых предложений, тем легче вывести остальную теорию. Но с точки зрения научной можно пользоваться только минимальной системой аксиом: предложение, выводимое из аксиом данной системы, есть теорема и не должно включаться в список аксиом.

Полнота означает достаточность данной системы для обоснования геометрии, т. е. *означает, что данная система аксиом однозначно определяет геометрию.*

Большой интерес представляет вопрос о доказательстве указанных трех свойств для данной системы аксиом, и в первую очередь — вопрос о доказательстве ее непротиворечивости. Ясно, что ненаблюдение противоречия само по себе не означает его действительное отсутствие и не означает поэтому непротиворечивость. Равным образом если дана система аксиом:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$$

и не видно, как можно вывести, например, аксиому α_k из остальных аксиом, то это еще не означает, что этого действительно нельзя сделать. Доказательства непротиворечивости или независимости аксиом данной системы должны быть такими же строгими и законченными, как доказательство всякой математической теоремы. Эти доказательства проводятся с помощью метода интерпретаций.

Непротиворечивость данной системы аксиом строго установлена, если обнаружена ее осуществимость, т. е. если указаны объекты, предметы, существующие в действительности и подчиненные всем аксиомам данной системы. Таким образом, для доказательства непротиворечивости данной системы надо указать три системы вещей, называемых соответственно точками, прямыми и плоскостями, между которыми существуют отношения принадлежности, порядка и равенства, подчиненные всем аксиомам данной системы. Ясно, что такая задача является, вообще говоря, нелегкой, но в настоящее время связанные с ней трудности успешно преодолеваются и притом многими различными способами. Главная трудность состоит здесь в том, чтобы избрать такую область действительного мира, свойства объектов которой точно определены и твердо установлены. В настоящее время единственной такой областью является, по-видимому, математика. Однако использование геометрии исключается, так как речь идет о проверке ее состоятельности. Поэтому при построении упомянутых моделей используют арифметику. Следовательно, непротиворечивость той или иной абстрактной геометрии доказывается лишь относительно: предполагается непротиворечивость арифметики и непогрешимость правил и приемов логических умозаключений.

Из сказанного ясно, что никакую непротиворечивую систему аксиом геометрии не следует рассматривать как нечто абсолютное, раз навсегда установленное, непогрешимое. Всякая теория лишь приближенно и относительно отражает действительность. С течением времени, с появлением новых опытных данных, любая логически совершенная теория может прийти в противоречие с данными практики и тогда должна быть соответствующим образом исправлена. Помимо этого, развивается и наука логики, так что самое понятие логической безупречности теории является относительным.

Независимость аксиом данной системы также доказывается с помощью интерпретаций, причем косвенно, именно с использованием доказательства непротиворечивости. Пусть дана система аксиом:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n \qquad (1)$$

и надо доказать независимость аксиомы α_k от остальных аксиом этой системы. С этой целью строится новая система аксиом:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \text{не } a_k, \dots, \alpha_n, \qquad (2)$$

которая образуется из системы (1) заменой предложения α_k его отрицанием «не α_k». Если удастся доказать непротиворечивость системы аксиом (2), то это будет означать, что существуют вещи, подчиненные всем аксиомам α_i при $i \neq k$, но не подчиненные аксиоме a_k. Следовательно, аксиома α_k не вытекает из других аксиом системы (1), т. е. независима от них.

Между доказательствами непротиворечивости и независимости есть существенная разница. В то время как для доказательства непротиворечивости данной системы аксиом строится единственная интерпретация, для доказательства независимости каждой аксиомы приходится строить, вообще говоря, отдельную модель.

Рассмотрим один простейший пример (в дальнейшем мы познакомимся с более содержательными примерами доказательств основных свойств систем аксиом). Построим систему, состоящую из четырех аксиом:

1. Существует одна и только одна прямая, которой принадлежат две данные точки.
2. Каждые две различные прямые имеют единственную общую точку.
3. Каждой прямой принадлежат по крайней мере три точки.
4. Каждой прямой принадлежит не более трех точек.

Образуем конечное множество элементов, которые обозначим порядковыми номерами:

$$1, 2, \dots, n,$$

и будем называть эти элементы «точками». Будем записывать «точки» в прямоугольные таблицы и назовем каждую строку такой таблицы «прямой». Будем считать, что данная «точка» «принадлежит» данной «прямой», если соответствующий номер записан в соответствующую строку таблицы.

Для доказательства непротиворечивости приведенной выше системы аксиом образуем таблицу из семи элементов:

прямая	a:	1	2	4
»	b:	2	3	5
»	c:	3	4	6
»	d:	4	5	7
»	e:	5	6	1
»	f:	6	7	2
»	q:	7	1	3

Мы получили, таким образом, «пространство» из семи «точек» и семи «прямых», в котором, как нетрудно проверить, удовлетворены все принятые аксиомы. Это становится особенно наглядным, если представить это «пространство» в графической форме (рис. 111).

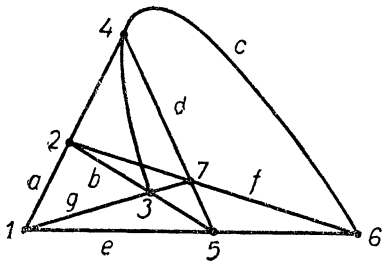


Рис. 111.

Для доказательства независимости аксиомы 3 можно воспользоваться другой моделью—«треугольником», т. е. «пространством», образованным из трех «точек» и трех «прямых» по следующей схеме:

прямая a: 1 2
» b: 2 3
» c: 1 3

Эта модель представлена графически на рисунке 112. В ней выполняются аксиомы 1, 2 и 4, но аксиома 3 не имеет места.

Можно построить модель из тринадцати «точек» и тринадцати «прямых», которая показывает независимость аксиомы 4 от остальных аксиом данной системы. Эта модель имеет следующий вид:

1	2	4	10
2	3	5	11
3	4	6	12
4	5	7	13
.	.	.	.
12	13	2	8
13	1	3	9

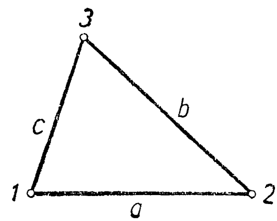


Рис. 112.

Здесь на каждой «прямой» лежит по четыре «точки», так что аксиома 4 не выполняется, в то время как остальные остаются в силе.

Формулируем теперь более строго определение свойства полноты системы аксиом. Как было сказано, полнота по существу означает однозначность соответствующей геометрии. В геометрии, определяемой непротиворечивой и полной системой аксиом, не могут быть осуществимы одновременно предложения «A» и «*не* A», на один и тот же вопрос не может последовать ответ «и да и нет». К полной системе аксиом нельзя присоединить какую-либо новую аксиому, т. е. какое-либо предложение, формулируемое в терминах данной геометрии, не следующее из данных аксиом и не противоречащее им. Каждый факт, имеющий место в одной модели данной геометрии, должен иметь место и в каждой другой ее модели. Точное определение полноты можно дать с помощью понятия изоморфизма моделей. Если между элементами (точками, прямыми, плоскостями) двух моделей данной геометрии можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, чтобы сохранялись (т. е. имели бы или не имели бы место одновременно в обеих моделях) отношения принадлежности, порядка и конгруентности между соответственными элементами, то такие модели называются **изоморфными**. Они математически неразличимы, хотя могут обладать различными конкретными свойствами, их элементы могут быть различной природы.

Система аксиом отвлеченной геометрии называется полной, если все возможные ее интерпретации изоморфны.

Для примера заметим, что система аксиомы группы I Гильберта (§ 10) не является полной. Ей подчиняется и классическая модель (см. § 9), где число точек пространства бесконечно, и четырехточечная модель, описанная в § 11, между элементами которых, конечно, нельзя установить взаимно однозначное соответствие.

Неполной является также система аксиом абсолютной геометрии, так как она допускает решение вопроса о параллельной и в смысле Евклида, и в смысле Лобачевского.

Не следует рассматривать полноту как необходимый атрибут системы аксиом любой математической науки. Неполной является, например, аксиоматика теории групп, которая именно в силу этого отличается чрезвычайной общностью и обширностью приложений, так как неполная система аксиом допускает разнообразные интерпретации.

Наша ближайшая задача состоит в доказательстве непротиворечивости евклидовой геометрии. В дальнейшем мы остановимся вкратце также на вопросах о независимости и о полноте аксиоматики, изложенной в главе II.

§ 32. Понятие аналитической плоскости

Ближайшие параграфы посвящаются доказательству непротиворечивости евклидовой геометрии. Для этого привлекается интерпретация, известная под названием **аналитической**. Установим прежде всего соответствующий «словарь», т. е. условимся о смысле, который приписывается понятиям «точка», «прямая», «плоскость», «лежит на», «лежит между» и «конгруентный». После этого надо будет проверить справедливость всех аксиом евклидовой геометрии в этой модели.

Мы ограничимся доказательством непротиворечивости евклидовой геометрии на плоскости. Этим же методом можно провести соответствующее доказательство и для пространства.

Будем называть «точкой» (кавычки здесь и далее означают, что данное слово употребляется в смысле данной интерпретации) каждую упорядоченную пару действительных чисел $(x;\ y)$.

Под словом «прямая» будем подразумевать упорядоченную тройку действительных чисел, определенных до произвольного коэффициента пропорциональности. Точнее говоря, «прямая» есть класс упорядоченных троек действительных чисел λa, λb, λc, где a, b, c — определенные действительные числа (причем a и b не равны нулю одновременно), λ — произвольное, отличное от нуля действительное число. «Прямую» мы будем обозначать символом $(a:b:c)$.

Будем говорить, что «точка» $(x;\ y)$ «принадлежит прямой» $(a:b:c)$, если имеет место равенство:

$$ax+by+c=0.$$

Относительно трех «точек» $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ и $(x_3;\ y_3)$ будем говорить, что вторая из них «лежит между» первой и третьей, если существует «прямая» $(a:b:c)$, на которой «лежат» все эти три «точки», и если имеют место неравенства $x_1<x_2<x_3$ или $x_1>x_2>x_3$. Если же данные «точки» таковы, что $x_1=x_2=x_3$, то указанный «порядок точек» характеризуется тем, что $y_1<y_2<y_3$ или $y_1>y_2>y_3$.

Для определения отношения конгруентности будем рассматривать специальный класс аффинных преобразований:

$$x'=\alpha x-\beta y+\gamma, \quad y'=\beta x+\alpha y+\delta \tag{1}$$

или

$$x'=\alpha x+\beta y+\gamma, \quad y'=\beta x-\alpha y+\delta, \tag{2}$$

где $\alpha^2+\beta^2=1$.

Преобразования такого вида называются **ортогональными линейными преобразованиями соответственно первого и второго рода**. Данное ортогональное преобразование позволяет сопоставить каждой «точке» аналитической плоскости некоторую, вообще говоря другую, «точку» в качестве ее образа. В силу этого каждой «фигуре» Ф, т. е. каждому множеству «точек», сопоставляется некоторая фигура Ф′. При этом говорят также, что фигура Ф **преобразуется** в фигуру Ф′.

Будем, по определению, считать, что $Ф \equiv Ф'$, если существует ортогональное преобразование, преобразующее фигуру Ф в фигуру Ф′.

§ 33. Проверка аксиом принадлежности в аналитической плоскости

Вспомним содержание плоскостных аксиом первой группы и осуществим последовательно их проверку.

I.1. Пусть даны две различные «точки»: $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Требуется указать такую «прямую» $(a:b:c)$, чтобы выполнялись соотношения:

$$ax_1+by_1+c=0 \quad \text{и} \quad ax_2+by_2+c=0.$$

Положим:

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда:

$$ax + by + c = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Если в этом определителе положить $x = x_1$, $y = y_1$ или $x = x_2$, $y = y_2$, то две его строки окажутся одинаковыми и он действительно обратится в нуль. При этом a и b одновременно не могут обратиться в нуль, так как данные «точки» по условию различны.

I.2. Требуется доказать, что условиями

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \text{и} \quad ax_2 + by_2 + c = 0$$

отношения чисел a, b и c определяются при данных значениях x_1, y_1, x_2, y_2 однозначно. И действительно, исключая из данных условий b, найдем: $a(x_1y_2 - x_2y_1) = c(y_1 - y_2)$. Исключая из тех же равенств a, получим:

$$b(x_1y_2 - x_2y_1) = c(x_2 - x_1).$$

Поэтому:

$$a : b : c = (y_1 - y_2) : (x_2 - x_1) : (x_1y_2 - x_2y_1).$$

I.3. Пусть дана «прямая» $(a : b : c)$. Надо указать две «точки», лежащие на этой «прямой», т. е. две пары чисел x, y, удовлетворяющих уравнению:

$$ax + by + c = 0.$$

Если $b \neq 0$, то можно дать числу x любое значение, а соответствующее значение y определить из равенства:

$$y = -\frac{ax + c}{b}.$$

Если же $b = 0$, то требуется, чтобы $ax + c = 0$. Поэтому надо положить $x = -\frac{c}{a}$ (в данном случае $a \neq 0$); y может иметь любое значение.

I.4. Надо указать какие-либо три «точки», не лежащие на одной «прямой». Для этого изберем «точки» $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ произвольно и определим «прямую» $(a : b : c)$, на которой лежат эти «точки» (см. аксиому I.2).

Если $b \neq 0$, то пусть x_3 — любое число, $\overline{y_3} = -\frac{ax_3 + c}{b}$, $y_3 \neq \overline{y_3}$.

Тогда $ax_3 + b\overline{y_3} + c = 0$, так что $ax_3 + by_3 + c \neq 0$, и поэтому «точки» $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ и $(x_3; y_3)$ не лежат на одной «прямой».

Если же $b = 0$, то достаточно положить $x_3 \neq -\frac{c}{a}$; y_3 можно выбрать произвольно.

Остальные аксиомы принадлежности носят пространственный характер. Поэтому мы не будем их исследовать.

§ 34. Проверка аксиом порядка в аналитической плоскости

Справедливость аксиом II.1, II.2 и II.4 следует непосредственно из определения отношений порядка, приведенного в § 32. Перейдем к проверке аксиом II.3 и II.5.

II.3. Пусть даны две «точки»: $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ и пусть $x_1 \leqslant x_2$. Требуется указать такую третью «точку» $(x_3;\ y_3)$, чтобы эти три пары чисел удовлетворяли одному уравнению:

$$ax+by+c=0$$

и чтобы в случае $x_1<x_2$ было $x_3>x_2$, а в случае $x_1=x_2$ было $x_3=x_2$ и $y_3>y_2>y_1$ (или $y_3<y_2<y_1$). Для этого определим прежде всего «прямую» $(a:b:c)$, на которой лежат данные «точки». Затем, если $x_1<x_2$, то выберем произвольное значение x_3, большее x_2, а значение y_3 вычислим из равенства $ax_3+by_3+c=0$, где $b \neq 0$ (так как это означало бы, что для всех «точек» этой «прямой» x имеет одно и то же значение). Если же $x_1=x_2$, то пусть $x_3=x_1$, а y_3 — любое число, большее y_2 при $y_1<y_2$ и меньшее y_2 при $y_2<y_1$. При этом все три «точки» $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$, $(x_3;\ y_3)$ лежат на одной «прямой» $(1:0:-x_1)$ в требуемом порядке.

II.5. Пусть даны три «точки» $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ и $(x_3;\ y_3)$ и «прямая» $(a_0:b_0:c_0)$, не проходящая ни через одну из этих «точек».

Образуем функцию:

$$F(x,\ y)=a_0x+b_0y+c.$$

Заметим прежде всего, что в данных «точках», по условию, $F(x,\ y) \neq 0$. Это же относится и к другим «точкам», не лежащим на данной «прямой».

Разобьем все «точки», не лежащие на «прямой» $(a_0:b_0:c_0)$, на два класса, относя в один класс такие «точки», в которых значения $F(x,\ y)$ имеют одинаковые знаки. Рассмотрим какие-либо две «точки» $(\xi_1;\ \eta_1)$ и $(\xi_2;\ \eta_2)$, не принадлежащие данной «прямой». Пусть $(a:b:c)$ — соединяющая их «прямая». Тогда для всех «точек» этой «прямой»

$$ax+by+c=0.$$

Положим ради определенности, что $b \neq 0$. Тогда $y=-\dfrac{ax+c}{b}$, и поэтому вдоль этой «прямой»

$$F(x,y)=a_0x-\frac{b_0}{b}(ax+c)+c_0=\left(a_0-\frac{ab_0}{b}\right)x+\left(c_0-\frac{b_0c_0}{b}\right)=\Phi(x).$$

Ясно, что эта функция $\Phi(x)$ непрерывна и монотонна.

Если «точки» $(\xi_1;\ \eta_1)$ и $(\xi_2;\ \eta_2)$ принадлежат различным классам, то функция $\Phi(x)$ имеет на концах «отрезка» $[\xi_1,\ \xi_2]$ противоположные знаки и поэтому в силу непрерывности, обращается в нуль в некоторой «точке» этого «отрезка». В аналитической плоскости это означает, что на «отрезке» между $(\xi_1;\ \eta_1)$ и $(\xi_2;\ \eta_2)$ есть «точка», принадлежащая данной «прямой».

Напротив, если «точки» $(\xi_1; \eta_1)$ и $(\xi_2; \eta_2)$ принадлежат одному классу, то функция $\Phi(x)$ имеет на концах «отрезка» $[\xi_1; \xi_2]$ одинаковые знаки. В силу монотонности этой функции это означает, что она на «отрезке» $[\xi_1; \xi_2]$ не принимает нулевого значения. В аналитической же плоскости это показывает, что между «точками» $(\xi_1; \eta_1)$ и $(\xi_2; \eta_2)$ не существует «точки», лежащей на «прямой» $(a_0 : b_0 : c_0)$.

Итак, «точки» разных классов противорасположены относительно «прямой» $(a_0 : b_0 : c_0)$, а «точки» одного класса сорасположены относительно этой «прямой».

По условию аксиомы II.4, из трех «точек»: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ — две, например первая и вторая, противорасположены относительно данной «прямой» $(a_0 : b_0 : c_0)$. Следовательно, согласно сказанному, числа $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют противоположные знаки. Знак числа $F(x_3, y_3)$ совпадает с одним из этих знаков и противоположен другому. А это и означает, что третья «точка» противорасположена с одной из первых двух относительно данной прямой. Справедливость аксиомы Паша в аналитической плоскости, таким образом, установлена.

§ 35. Параметрическое представление прямой аналитической плоскости

Перед тем как приступить к проверке аксиом конгруентности, нам удобно условиться об одном специальном способе аналитического представления «прямой» и «луча».

Согласно определению, параметры a, b и c, определяющие «прямую», определены лишь в форме отношений. Введем новые параметры m и n с помощью формул:

$$m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad n = \mp \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как формулы эти однородные, нулевой степени, то параметры m и n определены уже однозначно (только выбор знаков остается пока произвольным). При этом

$$m^2+n^2=1.$$

Будем называть числа m и n *нормированными* параметрами «прямой» $(a : b : c)$.

Нетрудно заметить, что если (x_0, y_0) — «точка», лежащая на «прямой» $(a : b : c)$, то для всех «точек» этой «прямой» имеет место равенство:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0,$$

или, что то же, $n(x-x_0)-m(y-y_0)=0$. Таким образом:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Обозначая эти переменные отношения через t, получим так называемое параметрическое представление «прямой».

$$x=mt+x_0, \quad y=nt+y_0.$$

Переменная t может принимать произвольные значения. В частности, при $t=0$ получаем: $x=x_0$, $y=y_0$. Из монотонности функций $x=mt+x_0$ и $y=nt+y_0$ следует, что при изменении t от 0 до $+\infty$ «точки» $(x; y)$ будут «точками» одного «луча», определяемого «точкой» $(x_0; y_0)$ на данной «прямой», а при изменении t от 0 до $-\infty$ — точками дополнительного «луча» той же «прямой». Для дальнейшего удобнее, однако, полагать, что t изменяется только в пределах от 0 до $+\infty$, а два «луча» данной «прямой» возникают при изменении знаков, приписываемых нормированным параметрам m и n, на соответственно противоположные. В соответствии с таким условием будем обозначать два «луча» «прямой» $x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$ соответственно символами $(x_0, y_0; m, n)$ и $(x_0, y_0; -m, -n)$.

§ 36. Свойства ортогональных преобразований

В следующих теоремах будут изложены некоторые свойства ортогональных преобразований:

$$x'=\alpha x \mp \beta y+\gamma, \quad y'=\beta x+\alpha y+\delta, \quad \alpha^2+\beta^2=1,$$

необходимые для исследования отношений конгруентности в аналитической плоскости.

Теорема 62. *Ортогональное преобразование преобразует два дополнительных «луча» какой-либо «прямой» соответственно в два дополнительных «луча» некоторой «прямой».*

Рассмотрим, например, ОП (здесь и иногда в дальнейшем мы допускаем такую сокращенную запись термина «ортогональное преобразование») первого рода:

$$x'=\alpha x-\beta y+\gamma \quad y'=\beta x+\alpha y+\delta, \quad \alpha^2+\beta^2=1.$$

Полагая в соответствии с обозначениями предыдущего параграфа $x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$, получим:

$$x'=\alpha(mt+x_0)-\beta(nt+y_0)+\gamma=(\alpha m-\beta n)\,t+(\alpha x_0-\beta y_0+\gamma).$$

Обозначая теперь $\alpha m-\beta n=m'$, $\alpha x_0-\beta y_0+\gamma=x_0'$, получим:

$$x'=m't+x_0'.$$

Точно так же найдем, что

$$y'=n't+y_0',$$

где $m'=\alpha m-\beta n$, $n'=\beta m+\alpha n$, $y_0'=\beta x_0+\alpha y_0+\delta$.

Для доказательства теоремы 62 осталось заметить, что:

1) $m'^2+n'^2=(\alpha^2+\beta^2)(m^2+n^2)=1;$

2) при перемене знаков обоих параметров m и n параметры m' и n' также меняют знаки.

Итак, «луч» $(x_0, y_0; m, n)$ преобразуется ортогональным преобразованием первого рода в «луч»

$$(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma,\ \beta x_0+\alpha y_0+\delta;\quad \alpha m-\beta n,\ \beta m+\alpha n).$$

Точно так же можно установить, что ОП второго рода преобразует «луч» $(x_0, y_0; m, n)$ в «луч»

$$(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma,\ \beta x_0-\alpha y_0+\delta;\ \alpha m+\beta n,\ \beta m-\alpha n).$$

Теорема 63. *Существует единственное ортогональное преобразование первого рода и единственное ортогональное преобразование второго рода, преобразующие данный «луч» $(x_0, y_0; m, n)$ некоторой «прямой» в данный «луч» $(x'_0, y'_0; m', n')$ той же или другой прямой.*

Для ОП первого рода искомые коэффициенты α и β определяются из системы уравнений:

$$m\alpha-n\beta=m',\ n\alpha+m\beta=n'.$$

Система эта однозначно разрешима, так как

$$\begin{vmatrix} m & -n \\ n & m \end{vmatrix}=m^2+n^2=1.$$

При этом $\alpha=mm'+nn'$, $\beta=mn'-nm'$. После того как α и β найдены, значения γ и δ определяются из соотношений:

$$x'_0=\alpha x_0-\beta y_0+\gamma,\quad y'_0=\beta x_0+\alpha y_0+\delta$$

или

$$\gamma=x'_0-\alpha x_0+\beta y_0,\quad \delta=y'_0-\beta x_0-\alpha y_0.$$

Остается еще заметить, что

$$\alpha^2+\beta^2=(mm'+nn')^2+(mn'-nm')^2=1.$$

Итак, искомое ортогональное преобразование первого рода имеет вид:

$$x'=(mm'+nn')\,x-(mn'-nm')\,y+(x'_0-\alpha x_0+\beta y_0),$$
$$y'=(mn'-nm')\,x+(mm'+nn')\,y+(y'_0-\beta x_0-\alpha y_0).$$

После аналогичных вычислений мы нашли бы, что существует также единственное ОП второго рода, преобразующее «луч» $(x_0, y_0; m, n)$ в «луч» $(x_0', y_0'; m', n')$. Это преобразование имеет вид:

$$x'=(mm'-nn')\,x+(mn'+m'n)\,y+(x'_0-\alpha x_0-\beta y_0),$$
$$y'=(mn'+m'n)\,x-(mm'-nn')\,y+(y'_0-\beta x_0+\alpha y_0).$$

Теорема 64. *Оба ортогональных преобразования, переводящие данный «луч» в тот же или другой данный «луч», переводят каждую «точку» первого «луча» в одну и ту же «точку» второго «луча».*

Пусть $(x;\ y)$ — данная «точка», (x'_1, y'_1) — ее образ в ОП первого рода, преобразующем «луч» $(x_0, y_0;\ m, n)$ в «луч» $(x'_0\ y'_0;\ m', n')$. Тогда:

$$x'_1 = \alpha x - \beta y + \gamma = \alpha x - \beta y + (x'_0 - \alpha x_0 + \beta y_0) =$$
$$= \alpha (x - x_0) - \beta (y - y_0) + x'_0.$$

Но, согласно § 35, $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$, так что

$$y - y_0 = \frac{n}{m}(x - x_0).$$

Поэтому

$$x'_1 = (\alpha - \frac{n}{m}\beta)(x - x_0) + x'_0 = \frac{1}{m}(\alpha m - \beta n)(x - x_0) + x'_0.$$

А так как $\alpha m - \beta n = m'$ (см. теорему 63), то

$$x'_1 = \frac{m'}{m}(x - x_0) + x'_0.$$

Пусть теперь $(x'_2;\ y'_2)$ — образ «точки» $(x;\ y)$ в ОП второго рода, также преобразующем «луч» $(x_0, y_0;\ m, n)$ в «луч» $(x'_0, y'_0;\ m', n')$. Тогда выкладки проходят таким же образом и дают тот же результат.

$$x'_2 = \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + (x'_0 - \alpha x_0 - \beta y_0) =$$
$$= \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + x'_0 = \alpha (x - x_0) + \frac{n\beta}{m}(x - x_0) + x'_0 =$$
$$= \frac{1}{m}(\alpha m + \beta n)(x - x_0) + x'_0 = \frac{m'}{m}(x - x_0) + x'_0.$$

Следовательно, $x'_1 = x'_2$. Точно так же можно доказать, что $y'_1 = y'_2$. Отсюда следует, что образы данной «точки» в двух вышеупомянутых ОП совпадают.

Теорема 65. *Два ортогональных преобразования, преобразующие «луч» данной «прямой» в «луч» той же или другой данной «прямой», преобразуют одну и ту же «полуплоскость» относительно первой «прямой» в две различные «полуплоскости» относительно второй «прямой».*

В § 34 было показано, что отношения сорасположенности или противорасположенности «точек» относительно «прямой» определяются совпадением или соответственно несовпадением в этих «точках» знаков значений функции $F(x, y)$, которая представляет левую часть «уравнения данной прямой».

Так как мы перешли к параметрическому представлению «прямой», то в соответствии с обозначениями § 35 будем полагать:

$$F(x, y) = n(x - x_0) - m(y - y_0).$$

Для «прямой»-образа запишем такую функцию соответственно в виде:

$$F'(x', y') = n'(x' - x'_0) - m'(y' - y'_0).$$

Пусть «точка» $(x; y)$ подвергается ОП первого рода, преобразующему «луч» $(x_0, y_0; m, n)$ в «луч» $(x'_0, y'_0; m', n')$, и пусть $(x'_1, y'_1$,— образ «точки» $(x; y)$ в этом преобразовании. Тогда:

$$F'(x_1'; y_1') = (\alpha n + \beta m)[\alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)] - (\alpha m - \beta n)[\beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0)] = (x - x_0)(\alpha^2 n + \alpha\beta m - \alpha\beta m + \beta^2 n) + (y - y_0) \times (-\alpha\beta n - \beta^2 m - \alpha^2 m + \alpha\beta n) = n(x - x_0) - m(y - y_0) = F(x; y).$$

Если та же «точка» $(x; y)$ преобразуется в «точку» $(x'_2; y'_2)$; ОП второго рода, то таким же путем можно убедиться, что

$$F'(x'_2; y'_2) = -F(x; y).$$

Следовательно,

$$F'(x'_1; y'_1) = -F'(x'_2; y'_2).$$

Как было показано в § 34, это означает, что «точки» $(x'_1; y'_1)$ и $(x'_2; y'_2)$ противорасположены относительно «прямой»-образа, что и требовалось доказать.

Теорема 66. *Ортогональные преобразования аналитической плоскости образуют группу.*

Как известно, группой называется множество элементов

$$M\{a, b, c, \dots\},$$

для которых определена операция группового «умножения», подчиненная следующим требованиям.

1) Произведение двух элементов группы есть элемент группы.

2) Групповое умножение ассоциативно:

$$a(bc) = (ab)\ c.$$

3) В группе существует единица, т. е. такой элемент e, что для всякого элемента a группы выполняются соотношения:

$$ae = ea = a.$$

4) Для каждого элемента a группы существует такой обратный элемент a^{-1}, что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Покажем, что все эти свойства осуществляются во множестве ортогональных преобразований аналитической плоскости, если понимать умножение преобразований как их последовательное осуществление.

Если $\Pi_1(A) = A'$ и $\Pi_2(A') = A''$, то произведением $\Pi_2\Pi_1$ этих преобразований будем называть такое преобразование Π, которое преобразует A в A'':

$$\Pi_2\Pi_1(A) = \Pi_2[\Pi_1(A)] = \Pi_2(A') = A''.$$

1. Докажем, что произведение двух ортогональных преобразований есть опять ортогональное преобразование.

Пусть, например,

$$\Pi_1 \begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + \gamma, \\ y' = \beta x + \alpha y + \delta, \end{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1; \quad \Pi_2 \begin{cases} x'' = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1, \\ y'' = \beta_1 x' - \alpha_1 y' + \delta', \end{cases} \alpha^2_1 + \beta^2_1 = 1.$$

Тогда:

$$x''=\alpha_1(\alpha x-\beta y+\gamma)+\beta_1(\beta x+\alpha y+\delta)+\gamma_1=(\alpha_1\alpha+\beta_1\beta)x+$$
$$+(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)y+(\alpha_1\gamma+\beta_1\delta+\gamma_1),$$
$$y''=\beta_1(\alpha x-\beta y+\gamma)-\alpha_1(\beta x+\alpha y+\delta)+\delta_1=(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta)x-$$
$$-(\beta_1\beta+\alpha_1\alpha)y+(\beta_1\gamma-\alpha_1\delta+\delta_1)$$

или

$$x''=\bar{\alpha}x+\bar{\beta}y+\bar{\gamma},\ y''=\bar{\beta}x-\bar{\alpha}y+\bar{\delta},$$

где

$$\bar{\alpha}=\alpha_1\alpha+\beta_1\beta,\ \bar{\beta}=\alpha\beta_1-\beta\alpha_1.$$

При этом, как легко проверить, $\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2=1$, так что последнее преобразование действительно ортогональное.

Чтобы полностью проверить данное свойство 1, надо таким же образом провести вычисления для остальных возможных случаев. При этом можно будет заметить, что произведение ОП одного рода есть ОП первого рода, в то время как произведение двух ОП различного рода есть ОП второго рода.

2. Произведение геометрических преобразований ассоциативно. Пусть

$$\Pi_1(A)=A',\ \Pi_2(A')=A'',\ \Pi_3(A'')=A'''.$$

Применим к точке A преобразование $\Pi_3(\Pi_2\Pi_1)$. Для этого надо сначала применить к этой точке преобразование $\Pi_2\Pi_1$. По определению, $\Pi_2\Pi_1(A)=\Pi_2(A')=A''$, а $\Pi_3(A'')=A'''$. Поэтому

$$\Pi_3(\Pi_2\Pi_1)\ (A)=A'''.$$

С другой стороны, $\Pi_1(A)=A'$, $\Pi_3\Pi_2\ (A')=\Pi_3(A'')=A'''$. Это и означает, что

$$\Pi_3(\Pi_2\Pi_1)=(\Pi_3\Pi_2)\Pi_1,$$

т. е. ассоциативность геометрических преобразований.

3. Единицей группы ОП служит тождественное преобразование:

$$x'=x,\ y'=y.$$

Это — ОП первого рода, где $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$.

4. Чтобы найти преобразование Π^{-1}, обратное преобразованию

$$\Pi\begin{cases}x'=\alpha x-\beta y+\gamma,\\ y'=\beta x+\alpha y+\delta,\end{cases}\alpha^2+\beta^2=1,$$

надо решить уравнения:

$$\alpha x-\beta y=x'-\gamma,\ \beta x+\alpha y=y'-\delta$$

относительно x и y. При этом получим:

$$x=\begin{vmatrix}x'-\gamma & -\beta\\ y'-\delta & \alpha\end{vmatrix}=\alpha x'+\beta y'+\bar{\gamma},\quad y=\begin{vmatrix}\alpha & x'-\gamma\\ \beta & y'-\delta\end{vmatrix}=-\beta x'+\alpha y'+\bar{\delta}.$$

Обозначая $-\beta=\bar{\beta}$, получим:

$$x=\alpha x'-\bar{\beta}y'+\bar{\gamma},\ y=\bar{\beta}x'+\alpha y'+\bar{\delta}.$$

При этом

$$\overline{\alpha^2+\beta^2}=\alpha^2+\beta^2=1,$$

так что преобразование Π^{-1} действительно ортогональное (притом первого рода).

Для ОП второго рода получим аналогичный результат.

§ 37. Проверка аксиом конгруентности в аналитической плоскости

Согласно определению (§ 32), «отрезок» AB аналитической плоскости «конгруентен» «отрезку» $A'B'$ той же плоскости, если существует ОП, преобразующее «точку» A в «точку» A' и «точку» B в «точку» B'. «Угол» $(\overline{h}, \overline{k})$ называется «конгруентным» «углу» $(\overline{h'}, \overline{k'})$, если существует ОП, преобразующее «луч» $\overline{h}$ в «луч» $\overline{h'}$ и «луч» $\overline{k}$ в «луч» $\overline{k'}$. Наша задача — показать, что все аксиомы третьей группы при таких определениях справедливы.

Справедливость аксиомы III. 1 (§ 15) вытекает непосредственно из теоремы 63. Действительно, если AB — некоторый «отрезок» и $\overline{a'}$ — «луч», выходящий из «точки» A', то, согласно этой теореме, существует два ОП, преобразующих «луч» $\overline{AB}$ в «луч» $\overline{a'}$. При этом «точка» B преобразуется в некоторую (одну и ту же для обоих преобразований) «точку» B' «луча» $\overline{a'}$ и, согласно определению, $AB=A'B'$.

Из теоремы 64 следует единственность «точки» B'.

Перейдем к проверке аксиомы III.2. По условию, $A'B'\equiv AB$. Согласно определению, это означает, что существует ортогональное преобразование Π_1, преобразующее A' в A и B' в B:

$$\Pi_1(A')=A,\ \Pi_1(B')=B.$$

Второе условие ($A''B''\equiv AB$) указывает на существование такого ортогонального преобразования Π_2, что

$$\Pi_2(A'')=A,\ \Pi_2(B'')=B.$$

Надо доказать, что существует ортогональное преобразование Π, преобразующее A' в A'' и B' в B''. Такое преобразование можно составить как последовательность преобразования Π_1 и преобразования Π_2^{-1}, обратного Π_2.

$$\Pi=\Pi_2^{-1}\,\Pi_1.$$

Действительно:

$$\Pi_1(A')=A,\ \Pi_2^{-1}\ (A)=A'',$$

так что

$$\Pi(A')=A''.$$

Так же найдем, что

$$\Pi(B')=B''.$$

Из теоремы 52 следует, что Π — ортогональное преобразование. Справедливость аксиомы III.2 установлена.

По условию аксиомы III.3, A, B и C — точки одной прямой, причем Aп/р$C(B)$. Кроме того, дано, что $A'\dot{B}'C'$, $AB\equiv A'B'$ и

$BC \equiv B'C'$. Надо доказать, что из этих условий в аналитической плоскости вытекает, что $AC \equiv A'C'$.

По условию, существует ортогональное преобразование П, преобразующее A в A' и B в B':

$$\Pi(A) = A', \ \Pi(B) = B'.$$

Ясно, что это преобразование преобразует «луч» $\overline{BA}$ в «луч» $\overline{B'A'}$, а, следовательно (см. теорему 62), «луч» $\overline{BC}$ в «луч» $\overline{B'C'}$.

По условию, существует также такое ортогональное преобразование П′, что

$$\Pi'(B) = B', \ \Pi'(C) = C'.$$

Ясно, что $\Pi'(\overline{BC}) = \overline{B'C'}$. По теореме 64, оба преобразования П и П′ преобразуют «точку» C «луча» $\overline{BC}$ в одну и ту же «точку» «луча» $\overline{B'C'}$, т. е. в «точку» C'. Таким образом, $\Pi(C) = C'$.

Итак,

$$\Pi(A) = A', \ \Pi(C) = C',$$

что и требовалось доказать.

Справедливость аксиомы III.4 в аналитической плоскости следует непосредственно из теорем 62 и 65: если Π_1 и Π_2 — два ОП, преобразующие «луч» $\overline{h}$ в «луч» $\overline{h'}$, то эти же преобразования преобразуют «луч» $\overline{k}$ в два «луча» $\overline{k'}$ и $\overline{k''}$, расположенные по разные стороны от «прямой» h.

По условию аксиомы III.5,

$$AB \equiv A'B', \ AC \equiv A'C' \text{ и } \measuredangle A \equiv \measuredangle A'.$$

Требуется доказать, что $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$, т. е., что существует ОП, преобразующее «луч» $\overline{BA}$ в «луч» $\overline{B'A'}$ и «луч» $\overline{BC}$ в «луч» $\overline{B'C'}$.

По условию, существует ортогональное преобразование П, преобразующее $\measuredangle A$ в $\measuredangle A'$, т. е. «луч» $\overline{AB}$ в «луч» $\overline{A'B'}$, а «луч» $\overline{AC}$ в «луч» $\overline{A'C'}$. А так как существует ортогональное преобразование П′, преобразующее A в A' и B в B', то в силу единственности (теорема 64) также $\Pi(B) = B'$. Точно так же легко установить, что $\Pi(C) = C'$.

Итак, П — искомое ОП: оно преобразует вершины «треугольника» ABC соответственно в вершины треугольника $A'B'C'$. Ясно, что при этом преобразовании «луч» $\overline{BA}$ преобразуется в «луч» $\overline{B'A'}$, а «луч» $\overline{BC}$ в «луч» $\overline{B'C'}$, так что $\measuredangle B$ преобразуется в $\measuredangle B'$, что и требовалось доказать.

Справедливость аксиомы III.6 в аналитической плоскости следует из того, что ортогональное преобразование $x' = x$, $y' = y$ преобразует любой угол в себя.

§ 38. Проверка аксиом четвертой и пятой групп в аналитической плоскости

Пусть даны: «точка» $(x_0;\ y_0)$ и «прямая» $(a_0 : b_0 : c_0)$. Чтобы убедиться в справедливости аксиомы параллельности, надо доказать, что существует не более одной такой «прямой» $(a : b : c)$, которая проходит через данную «точку» $(x_0; y_0)$ и не имеет общих «точек» с «прямой» $(a_0 : b_0 : c_0)$.

Первое из этих требований в аналитической плоскости означает, что имеет место равенство:

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Второе условие аналитически означает, что не существует таких чисел x, y, для которых одновременно имели бы место соотношения:

$$ax_0 + by_0 + c_0 = 0 \text{ и } ax + by + c = 0,$$

т. е., что система уравнений:

$$\begin{cases} ax + by + c \quad = 0 \\ a_0x + b_0y + c_0 = 0, \end{cases}$$

несовместна. Необходимым условием несовместности такой системы служит, как известно, обращение в нуль определителя системы:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_0 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, для искомой «прямой» $(a : b : c)$ должны выполняться условия:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0} \quad \text{и} \quad ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Обозначая $a = ka_0, b = kb_0$, найдем: $c = -ax_0 - by_0 = -k(a_0x_0 + b_0y_0)$, так что

$$a : b : c = a_0 : b_0 : -(a_0x_0 + b_0y_0).$$

Этим единственность искомой «прямой» установлена.

Справедливость в аналитической плоскости аксиомы непрерывности может быть проверена в нескольких словах. Дело в том, что, в силу монотонности функций

$$x = mt + x_0 \text{ и } y = nt + y_0,$$

осуществление отношений порядка среди «точек» некоторой «прямой» равносильно осуществлению порядка в расположении соответствующих значений переменного параметра t во множестве действительных чисел. Полагая известным, что множество действительных чисел непрерывно, мы тем самым придем к выводу о непрерывности множества «точек» аналитической «прямой».

§ 39. О независимости аксиом евклидовой геометрии

Как было отмечено выше (§ 31), для доказательства независимости каждой аксиомы надо строить соответствующую модель. Мы не будем ставить перед собой задачу полного исследования этого вопроса и ограничимся некоторыми наиболее интересными примерами.

Докажем независимость аксиомы III.5 от остальных аксиом евклидовой геометрии. Этот пример особенно интересен для учителя, так как в школьном курсе это предложение (и даже более сильное предложение — признак равенства треугольников по двум сторонам и углу) «доказывается» путем привлечения явно не сформулированных и в то же время избыточных аксиом.

Наша задача состоит в том, чтобы построить такую модель, в которой были бы справедливы все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы III.5. Идея построения такой модели состоит в известном «искажении» отношений в аналитической плоскости — настолько незначительном, чтобы оно повлекло за собой только нарушение справедливости этой аксиомы III.5.

Сохраним все определения, принятые в аналитической плоскости, за исключением определения отношения конгруентности «отрезков». Это последнее определение примем в следующей измененной форме. Пусть $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ — две произвольные «точки». Сопоставим «отрезку» AB положительное число

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1+y_2-y_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

и будем считать, что $AB\equiv A'B'$, если $(AB)=(A'B')$.

Ясно, что в данной модели требуют пересмотра только аксиомы, связанные с конгруентностью отрезков, т. е. только аксиомы III.1, III.2 и III.5.

Проверим аксиому III.1. Задача эта ставится следующим образом. Дан «отрезок» AB и «луч» $(x_0,\ y_0;\ m,\ n)$. Найти такую «точку» $(x;\ y)$ этого «луча», чтобы выполнялось соотношение:

$$\sqrt{(x-x_0+y-y_0)^2+(y-y_0)^2}=(AB). \qquad (*)$$

По определению, на данном «луче» $x=mt+x_0$, $y=nt+y_0$ t изменяется от 0 до ∞ (см. § 35). Поэтому уравнение (*) принимает вид:

$$t\sqrt{(m+n)^2+n^2}=(AB),$$

откуда ясно, что t имеет единственное положительное значение:

$$t=\frac{(AB)}{\sqrt{(m+n)^2+n^2}},$$

которым и определяется искомая точка.

Справедливость аксиомы III.2 с очевидностью следует из транзитивности равенства чисел:

$$A'B'\equiv AB \text{ означает, что } (A'B')=(AB),$$
$$A''B''\equiv AB \text{ означает, что } (A''B'')=(AB).$$

Отсюда следует, что $(A'B')=(A''B'')$, а это в свою очередь означает, что $A'B'\equiv A''B''$.

Перейдем к проверке аксиомы III.3. По условию этой аксиомы, на некоторой «прямой».

$$x=mt+x_0,\quad y=nt+y_0,$$

рассматриваются три «точки»: $A(t_1)$, $B(t_2)$ и $C(t_3)$, причем $A\dot{B}C$. Положим для определенности, что $t_1<t_2<t_3$. Тогда:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1+y_2-y_1)^2+(y_2-y_1)^2}=(t_2-t_1)\sqrt{(m+n)^2+n^2},$$

где за знак радикала вынесено положительное число t_2-t_1. Так же найдем, что

$$(BC)=(t_3-t_2)\sqrt{(m+n)^2+n^2}, \quad (AC)=(t_3-t_1)\sqrt{(m+n)^2+n^2}.$$

Отсюда непосредственно видно, что

$$(AC)=(AB)+(BC).$$

Совершенно так же найдем, что для «точек» A', B' и C' второй «прямой» имеет место соотношение:

$$(A'C')=(A'B')+(B'C').$$

А так как, по условию аксиомы, $AB\equiv A'B'$ и $BC\equiv B'C'$, то $(AB)=(A'B')$ и $(BC)=(B'C')$. Следовательно, $(AC)=(A'C')$, а это означает, по определению, что $AC\equiv A'C'$.

Чтобы установить независимость аксиомы III.5, нам осталось доказать, что она не имеет силы в данной модели. Для этого будем рассуждать следующим образом. Если бы аксиома III.5, как и все остальные аксиомы евклидовой геометрии, оказалась справедливой, то были бы справедливы все теоремы евклидовой геометрии. Докажем, что это не так. Для этого достаточно одного противопримера. Докажем, что не справедлив первый признак конгруентности треугольников. Для этого также достаточно привести хотя бы один пример, когда этот признак не имеет места. Рассмотрим «точки» $A(1;\,0)$, $B(0;\,1)$, $C\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)$ и $O(0;\,0)$ (рисунок 113 помогает следить за ходом рассуждения). При таком выборе точек

$$(AC)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}-0\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{1}{2},$$

$$(BC)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-0+\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{2},$$

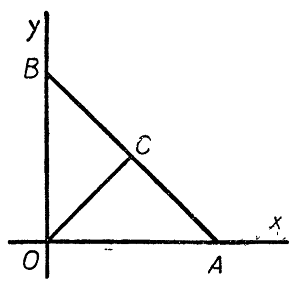


Рис. 113.

так что $AC\equiv BC$. Ясно, что также $OC\equiv OC$. Докажем, что $\sphericalangle ACO\equiv\sphericalangle BCO$. Для этого достаточно указать такое ортогональное преобразование, которое преобразовало бы C в себя, O в себя и A в B. Таким является преобразование

$$x'=y, \quad y'=x.$$

Итак, для «треугольников» AOC и BOC имеют место соотношения:

$$AC\equiv BC, \quad OC\equiv OC, \quad \sphericalangle ACO\equiv\sphericalangle BCO.$$

Если бы имел место первый признак конгруентности треугольников, то из последних соотношений следовало бы, в частности, что $AO\equiv BO$. Но это не так:

$$(AO)=1, \text{ но } (BO)=\sqrt{2}.$$

Независимость аксиомы III.5 доказана.

Очень интересен и поучителен вопрос о независимости аксиомы непрерывности IV. Для доказательства независимости этой аксиомы надо построить модель, на которой выполнялись бы все аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы IV. Если установлено, что в данной модели выполнены все аксиомы I, II, III и V групп, то для доказательства независимости аксиомы IV достаточно убедиться в том, что не имеет места какая-либо из теорем евклидовой геометрии: если бы аксиома IV имела место, то при наличии всех остальных аксиом это означало бы справедливость всех теорем евклидовой геометрии. В качестве такой теоремы надо брать, конечно, теорему, доказательство которой связано с применением аксиомы IV. Именно так и поступил в свое время Д. Гильберт, построив модель так называемой «неархимедовой» геометрии, т. е. модель, на которой не имеет места аксиома Архимеда (см. § 22).

Опишем вкратце идею построения такой модели (более полное описание можно найти в [6] или в [9]).

При внимательном просмотре всех определений и других предложений, связанных с аналитической плоскостью, можно заметить, что вплоть до проверки аксиомы IV в них используются лишь следующие свойства элементов x, y и t, определяющих «точки», и элементов a, b, c, определяющих «прямые»: 1) существование нуля и единицы, 2) выполнимость арифметических действий в этом множестве элементов, 3) свойства переместительности, сочетательности и распределительности, 4) выполнимость операции $\sqrt{a^2+b^2}$, 5) упорядоченность. Таким образом, если не надо обеспечивать непрерывность, то вовсе не обязательно считать элементы x, y, t, a, b, c действительными числами: достаточно потребовать, чтобы множество этих элементов обладало указанными свойствами. Гильберт находит решение вопроса именно на этом пути. Он рассматривает множество $\Omega(t)$, составленное из рациональных алгебраических функций $\omega(t)$ действительного переменного с действительными коэффициентами и функций, получаемых из них путем конечного числа арифметических операций и операций $\sqrt{1+\omega^2(t)}$. Нетрудно установить, что на этом множестве осуществляются свойства 1—3. В частности, нуль и единица этого множества — обыкновенные арифметические, так что на множестве $\Omega(t)$ имеет место и свойство 4. В самом деле,

$$\sqrt{\omega^2{}_1(t)+\omega^2{}_2(t)} = \omega_1(t)\cdot\sqrt{1+\left[\frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)}\right]^2} = \omega_1(t)\cdot\sqrt{1+\omega^2{}_3(t)}.$$

Остается определить порядок элементов множества $\Omega(t)$. Для этого заметим, что всякая рациональная алгебраическая функция $\omega(t)$ имеет лишь конечное число корней, и поэтому при достаточно больших значениях t она сохраняет знак. Будем считать, что $\omega(t)>0$, если значение этой функции положительно, и $\omega(t)<0$, если значение функции $\omega(t)$ отрицательно при достаточно больших значениях t. Условимся считать, что $\omega_1(t)>\omega_2(t)$, если $\omega_1(t)-\omega_2(t)>0$ (при достаточно больших значениях t).

Будем теперь строить «обобщенную аналитическую плоскость» точно так же, как строилась аналитическая плоскость (§ 32). Но элементы x, y, t, a, b, c для построения этой модели будем брать не из множества действительных чисел, а из описанного выше множества $\Omega(t)$.

При этом аксиомы групп I, II, III и V будут выполняться, так как элементы множества $\Omega(t)$ обладают всеми теми свойствами действительных чисел, которые были использованы при проверке этих аксиом.

Докажем, что аксиома Архимеда не имеет места в «обобщенной аналитической плоскости». Обращаясь к параметрическому представлению прямой, будем характеризовать порядок «точек» некоторой «прямой» значениями переменного параметра T, которые берутся из множества $\Omega(t)$. Рассмотрим «точки» $O(0)$, $A(1)$ и $B(t)$ «прямой» $(0, 0; 1, 0)$. Как бы велико ни было натуральное число n, при данных определениях всегда $t > n \cdot 1$. А это означает, что для «отрезков» OA и OB аксиома Архимеда утратила силу.

Особенно важным является вопрос о независимости аксиомы параллельности. Этот вопрос, как мы знаем, служил предметом самых настойчивых исследований в течение более 2000 лет. Но лишь после открытия Лобачевского, на базе глубокого развития аксиоматического метода, удалось получить строгое и исчерпывающее решение этого вопроса. Приведем краткое описание одной интересной модели, построенной А. Пуанкаре.

Пусть p — произвольная прямая евклидовой плоскости, $\bar{\alpha}$—одна из полуплоскостей, определяемых этой прямой. Назовем Π-точками (точки в смысле Пуанкаре) точки полуплоскости $\bar{\alpha}$, Π-прямыми — евклидовы полуокружности, центры которых лежат на прямой p, а также евклидовы полупрямые, лежащие в полуплоскости $\bar{\alpha}$ и перпендикулярные к прямой p (рис. 114). При этом сохраним обычный смысл понятий принадлежности и порядка.

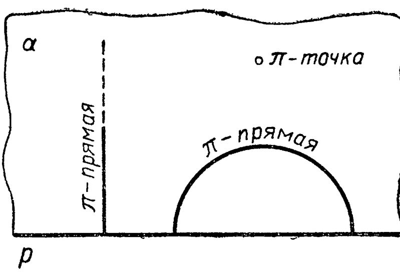


Рис. 114.

Из рисунка 115 ясно, что аксиомы I.1, I.2, I.3 и I.4 осуществляются на этой модели. Легко убедиться также в справедливости аксиом порядка и непрерывности. Но понятие конгруентности требует, естественно, нового определения. Оказывается возможным ввести его так, чтобы обеспечить осуществление требований всех аксиом III группы. Мы не имеем здесь возможности рассмотреть этот вопрос подробнее. Интересующиеся могут полнее ознакомиться с моделью Пуанкаре, например по книге [9], гл. 3, п. 9.

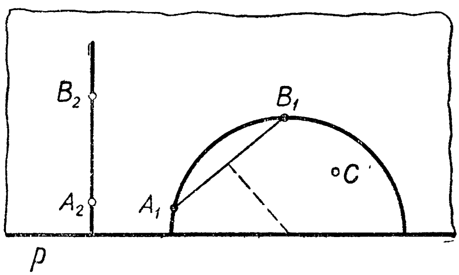


Рис. 115.

Заметим только, что аксиома параллельности V не имеет места на плоскости Пуанкаре: из рисунка 116 ясно, что через

П-точку *A* можно провести неограниченное количество *П*-прямых, не имеющих общих точек с *П*-прямой *a*.

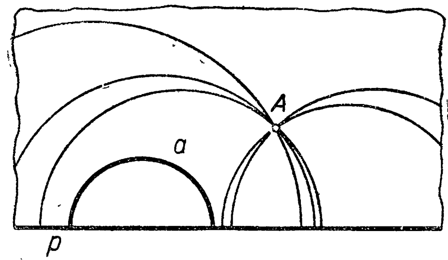


Рис. 116.

§ 40. Введение координат в евклидово пространство. Полнота системы аксиом евклидовой геометрии

Как известно (см. § 24), после выбора некоторого единичного отрезка каждому отрезку AB соответствует некоторое определенное положительное число (AB) в качестве его длины. Докажем, что (как в евклидовой, так и в абсолютной геометрии) справедливо также обратное предложение.

Теорема 67. *Если задан луч $\overline{OL}$ некоторой прямой и единичный отрезок OE, то для всякого положительного числа m существует такая точка M этого луча, что $(OM)=m$.*

Запишем число m в двоичной системе:

$$m = n, n_1 n_2 n_3 \ldots,$$

где n — число целых единиц, n_1 — число половин, n_2 — число четвертей и т. д.

Если запись числа m в двоичной форме конечна, то существование точки M доказывается непосредственно: можно указать конечную последовательность построений, приводящую к образованию такой точки. Пусть $m = n, n_1 n_2 \ldots n_k$, $\overline{OL}$ — данный луч (рис. 117), AB — единичный отрезок. Образуем на луче $\overline{OL}$ отрезок $OP \equiv n \cdot AB$. Далее, если $n_1 = 1$, то образуем на луче $\overline{PL}$ отре-

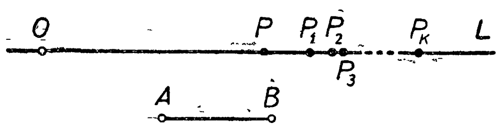


Рис. 117.

зок $PP_1 = \frac{1}{2} AB$, если же $n_1 = 0$, то этот шаг опускаем. Если $n_2 = 1$, то образуем на луче $\overline{P_1L}$ отрезок $P_1P_2 = \frac{1}{2^2} AB$, если же $n_2 = 0$, то этот шаг опускаем, и т. д. Отрезок OP_k — искомый.

Если двоичная запись числа m — бесконечна, то описанный прием неосуществим. Для этого случая проведем доказательство в косвенной форме, применяя метод доказательства от противного.

Допустим, что не существует такой точки M луча $\overline{OL}$, чтобы $(OM)=m$. Пусть M' — такая точка луча $\overline{OL}$, что $(OM')>m$, например $(OM')=n+1$.

Разобьем точки отрезка OM' на два класса K_1 и K_2, относя к первому классу точку O и все такие точки P_1 данного множества, для которых $(OP_1)<m$, а ко второму классу — такие его точки P_2, для которых $(OP_2)>m$.

Принимая во внимание, что из двух отрезков тот больше, длина которого больше, легко заметить, что всегда $O\dot{P}_1P_2$, так что такое разбиение на классы удовлетворяет условию аксиомы непрерывности IV. Поэтому должно существовать сечение S, которое есть либо самая правая точка в первом классе, либо самая левая точка во втором классе.

Но в первом классе нет самой правой точки. Действительно, пусть P_1 — любая точка первого класса, так что $(OP_1)=m_1<m$. Между числами m_1 и m всегда можно вставить число r, имеющее конечное число знаков. Для этого можно поступить, например, следующим образом. Если m_1 и m различаются в целых, то в качестве числа r можно взять целую часть числа m. Если же первые $(k-1)$ знаков чисел m_1 и m — одинаковы, а k-е их знаки различны, то k-й знак числа m_1 есть нуль, а k-й знак числа m есть единица. Тогда за число r можно принять конечную часть числа m, до k-го знака включительно.

Пусть R — такая точка луча $\overline{OM'}$, что $(OR)=r$. Тогда R правее P_1, так как $r>m_1$. Но $R\in K_1$, так как $r<m$. Таким образом, никакая точка P_1 класса K_1 не может быть самой правой в этом классе.

Точно так же можно убедиться, что во втором классе нет самой левой точки. Следовательно, сечение S не может принадлежать ни одному из классов K_1 и K_2. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказанная теорема служит для обоснования аналитической геометрии на прямой.

Пусть O и E (рис. 118) — две точки прямой a. Будем ставить точке O в соответствие число нуль, каждой точке M луча $\overline{OE}$ — длину отрезка OM, считая отрезок OE за единичный, а каждой точке M' луча $\overline{\overline{OE}}$ — число — (OM').

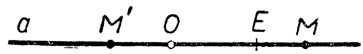


Рис. 118.

Число $x=\pm(OM)$ назовем **координатой** точки M относительно базиса OE; координатой точки O считаем нуль. Из теоремы 67 ясно, что по заданной координате однозначно определяется соответствующая точка. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством всех действительных чисел.

После этого обычным путем можно ввести координаты на плоскости и в пространстве. Рисунки 119 и 120 напоминают, как это делается.

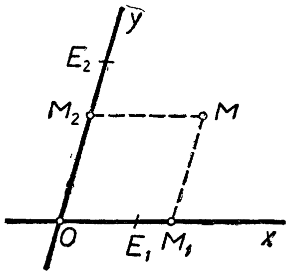


Рис. 119.

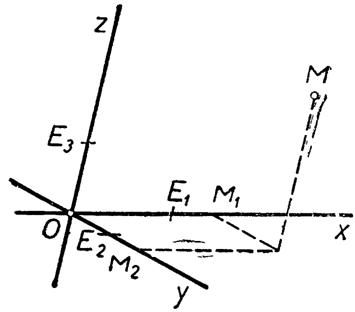


Рис. 120.

С возможностью координатизации непосредственно связано доказательство полноты системы аксиом евклидовой геометрии.

Пусть R_1 и R_2 — какие-либо две модели евклидовой геометрии. Введем в каждой из них координаты. Тогда каждая из этих моделей будет изоморфна построенному над ней аналитическому пространству. А так как аналитическое пространство — одно и то же, независимо от того, над какой моделью оно строится, то обе данные модели оказываются изоморфными одной и той же модели, а следовательно — изоморфными между собой. Изоморфизм же всех возможных моделей и означает, как известно, полноту системы аксиом данной геометрии.

§ 41. Некоторые свойства коллинеаций

Установим здесь некоторые свойства коллинеаций, которые понадобятся нам для дальнейшего. Эти свойства мы изложим в форме следующих четырех теорем.

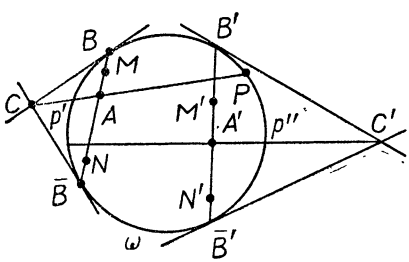


Рис. 121.

1. *Если A и A' — две внутренние точки евклидовой окружности ω, B и B' — две точки этой окружности, то существуют две коллинеации, преобразующие точку A в точку A', B в B', а каждую точку окружности ω в точку этой окружности.*

Пусть $\overline{B}$ (рис. 121) — второй конец хорды AB, $\overline{B'}$ — второй конец хорды $A'B'$. Построим касательные к окружности ω в точках B и $\overline{B}$ и пусть C — точка их пересечения (которая может быть и несобственной). Так же пусть C' — точка пересечения касательных, проведенных к окружности ω в точках B' и $\overline{B'}$.

Пусть далее P — одна из точек пересечения прямой AC с окружностью ω, P' и P'' — точки пересечения с этой окружностью прямой $A'C'$.

Согласно условию, искомая коллинеация должна преобразовать точку B в точку B'. Легко заметить также, что точка $\overline{B}$ должна преобразоваться в точку $\overline{B'}$. Далее, так как коллинеация в силу взаимной однозначности преобразует касательную в касательную, то точка C должна преобразоваться в точку C'. Наконец, точка P должна преобразоваться в P' либо в P'', так как прямая AC преобразуется в прямую $A'C'$, а окружность ω — в себя. Итак, для искомой коллинеации обязательно имеет место либо соответствие

$$\begin{matrix} B, & \overline{B}, & C, & P \\ B', & \overline{B'}, & C', & P', \end{matrix}$$

либо соответствие

$$\begin{matrix} B, & \overline{B}, & C, & P \\ B', & \overline{B'}, & C', & P''. \end{matrix}$$

Так как никакие три из точек B, $\overline{B}$, C и P не коллинеарны, то каждое из этих соответствий четырех точек однозначно определяет коллинеацию (см. об этом, например, в [9], § 126, теорема 25). Следовательно, коллинеаций, удовлетворяющих поставленным условиям, существует не более двух.

Докажем теперь, что каждая из двух коллинеаций, K_1 и K_2, определяемых соответствиями

$$\begin{matrix} B & \overline{B} & C & P \\ B' & \overline{B'} & C' & P' \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} B & \overline{B} & C & P \\ B' & \overline{B'} & C' & P'' \end{matrix},$$

действительно удовлетворяет условиям теоремы.

Каждая коллинеация преобразует окружность ω в некоторую линию второго порядка ω', причем касательная к ω в какой-либо точке этой линии преобразуется в касательную к линии ω' в соответственной точке. Обращаясь к коллинеациям K_1 и K_2, замечаем, что линия ω' проходит через три точки B', $\overline{B'}$ и P' (или P''), причем прямые $B'C'$ и $\overline{B'}C'$ служат касательными к этой линии ω' в точках B' и $\overline{B'}$. Но эти же точки лежат на окружности ω, а прямые $B'C'$ и $\overline{B'}C'$ служат касательными к окружности ω в точках B' и $\overline{B'}$. И так как три точки и касательные в двух из них определяют линию второго порядка однозначно (см. [9], § 164), то линия ω' совпадает с окружностью ω. Таким образом, каждая из коллинеаций K_1 и K_2 действительно преобразует окружность ω в себя.

Так как точка A есть пересечение прямых $B\overline{B}$ и CP, а A' — пересечение соответственных прямых $B'\overline{B}'$ и $C'P'$ (или $C'P''$), то точка A преобразуется в точку A'.

Теорема доказана.

Коллинеации плоскости, преобразующие данную линию в себя, называются **автоморфными** относительно этой линии. В дальнейшем мы изложим некоторые свойства коллинеации K_1 и K_2, автоморфных относительно окружности ω. Иногда мы будем употреблять для коллинеаций K_1 и K_2 сокращенное название **автоморфизмы**.

Заметим прежде всего, что точки, внутренние относительно окружности ω, преобразуются в этих коллинеациях во внутренние же ее точки, а внешние — во внешние. Действительно, точки плоскости можно разделить на внутренние и внешние относительно окружности ω в зависимости от того, можно ли из них провести касательные к данной окружности или нельзя. А это свойство точки и окружности инвариантно относительно коллинеаций, так как касательная преобразуется в касательную.

Из инвариантности отношения разделенности (см. [9], § 125, лемма 2; или [30], § 18, п. 3) следует, что полухорда AB преобразуется автоморфизмами K_1 и K_2 в полухорду $A'B'$, а полухорда $A\overline{B}$ — в полухорду $A'\overline{B}'$, так как из соотношения $A,B \div M,\overline{B}$ следует соотношение $A',B' \div M',\overline{B}'$, а из соотношения $A,B \dot{-} N,\overline{B}$ следует соотношение $A',B' \dot{-} N',\overline{B}'$ (см. рис. 121).

2. *Оба автоморфизма K_1 и K_2 переводят каждую точку хорды $B\overline{B}$ в одну и ту же точку хорды $B'\overline{B}'$.*

Действительно, если на хорде $B\overline{B}$ выбрана точка M, то двойное отношение $(AB\overline{B}M)$ имеет вполне определенное значение λ. Но тогда и $(A'B'\overline{B}'M')=\lambda$, а этим положение точки M' однозначно определяется (см. [30], § 25, п. 4).

3. *Два автоморфизма K_1 и K_2 преобразуют данный сегмент окружности ω относительно хорды $B\overline{B}$ в два различных сегмента относительно соответствующей хорды $B'\overline{B}'$.*

Доказательство этого предложения мы опустим.

4. *Все автоморфные относительно данной окружности коллинеации образуют группу* (подгруппу группы всех коллинеаций плоскости).

Действительно: 1) произведение двух автоморфизмов есть автоморфизм; 2) тождественное преобразование плоскости содержится среди автоморфизмов относительно данной окружности; 3) преобразование, обратное коллинеации, есть коллинеация, и если данная коллинеация автоморфна относительно данной окружности, то и обратная коллинеация также автоморфна относительно этой окружности.

§ 42. Непротиворечивость геометрии Лобачевского

Геометрия Лобачевского отличается от геометрии Евклида только одной аксиомой, а именно: аксиома параллельности V заменяется здесь новой аксиомой V′, которую мы будем называть постулатом Лобачевского:

Если в плоскости α дана прямая a и не принадлежащая ей точка A, то в этой плоскости можно провести через точку A по меньшей мере две прямые, не имеющие общих точек с прямой a.

Это предложение влечет за собой отказ от многих привычных свойств плоскости и пространства, что и вызвало в свое время недоверие к научной системе Н. И. Лобачевского. Попытка обосновать логическую правомерность новой геометрии предпринималась еще самим Лобачевским, но в то время она не могла привести к вполне удовлетворительным результатам: полное решение этого вопроса достигается только на путях развитого аксиоматического метода.

Задача доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского состоит в том, чтобы построить модель, в которой осуществлялись бы аксиомы:

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ \mathrm{III},\ \mathrm{IV}\ \text{и}\ \mathrm{V}',$$

т. е. все аксиомы абсолютной геометрии и постулат Лобачевского. Элементы этой модели мы будем брать из геометрии Евклида. Таким образом, непротиворечивость геометрии Лобачевского будет доказана лишь относительно: в предположении непротиворечивости евклидовой геометрии (которая установлена выше в предположении непротиворечивости арифметики).

Ради простоты ограничимся рассмотрением планиметрии.

Пусть α — евклидова плоскость, ω — окружность в этой плоскости (или какая-либо другая невырожденная линия второго порядка). Назовем *Л*-точками внутренние точки окружности ω, *Л*-прямыми — хорды окружности ω (без их концов, ибо концы хорд окружности ω не суть *Л*-точки).

Отношения принадлежности и порядка будем понимать в обычном смысле, точнее — в смысле той евклидовой геометрии, над которой строится данная модель.

Две фигуры Φ и Φ' будем называть *Л*-конгруентными, если существует автоморфизм плоскости α относительно окружности ω, преобразующий фигуру Φ в фигуру Φ'. Групповые свойства автоморфизмов обеспечивают рефлексивность, симметрию и транзитивность отношений *Л*-конгруентности.

Справедливость в такой модели аксиом принадлежности, порядка и непрерывности не требует особого доказательства, так как они справедливы в евклидовой геометрии, а при построении модели мы сохранили тот же смысл отношений принадлежности и порядка, что и в евклидовой плоскости. Напротив, аксиомы конгруентности требуют специальной проверки, так как отношение конгруентности определено заново.

В справедливости аксиом конгруентности в данной модели можно убедиться в нескольких словах. Действительно, в § 37 доказано, что все аксиомы III группы справедливы в аналитической плоскости. Эти доказательства можно полностью перенести в *Л*-плоскость, для чего придется только во всех рассуждениях заменить слова «ортогональное преобразование» словом «автоморфизм». Сравнивая § 36 и 41, легко убедимся, что автоморфизмы относительно окружности обладают всеми теми же свойствами, что и ортогональные преобразования. А доказательство справедливости аксиом конгруентности в аналитической плоскости опиралось (помимо свойств принадлежности и порядка) только на эти свойства ортогональных преобразований.

Итак, в указанной модели *Л*-плоскости аксиомы I, II, III, IV действительно имеют место.

С другой стороны, непосредственно ясно, что через *Л*-точку *A* (рис. 122) можно провести неограниченно много *Л*-прямых, не имеющих общих *Л*-точек с данной *Л*-прямой *a* (если только эта *Л*-прямая не проходит через данную *Л*-точку).

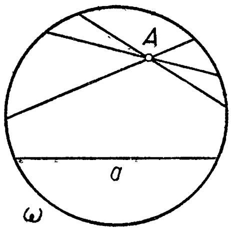


Рис. 122

Непротиворечивость геометрии Лобачевского доказана. Вместе с этим доказана (см. § 3) независимость аксиомы V (следовательно, и постулата Евклида) от аксиом абсолютной геометрии.

Так решается одна из наиболее острых математических проблем древности, многие века волновавшая умы,—проблема параллельных, т. е. проблема доказуемости или недоказуемости пятого постулата Евклида.

Заметим, что непротиворечивость геометрии Лобачевского можно доказать и не апеллируя к евклидовой геометрии, а посредством построения арифметической модели. Конечно, модель эта должна быть построена иначе, чем арифметическая модель евклидовой геометрии, рассмотренная в § 32—38.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПО МАТЕРИАЛАМ ГЛАВЫ IV

Логически полноценная абстрактная система аксиом обладает свойствами: непротиворечивости (или совместности), независимости (или минимальности) и полноты.

Система аксиом называется непротиворечивой, если из нее нельзя получить два логически противоположных предложения. Независимость означает, что никакая из аксиом не есть следствие остальных аксиом. Полнота означает однозначную определенность геометрии через данную систему аксиом, т. е. изоморфизм всех возможных интерпретаций.

Общим средством доказательства этих свойств системы аксиом служит метод интерпретаций. Для доказательства совместности евклидовой геометрии строится так называемое аналитическое пространство, где элементам пространства и отношениям между ними придается такой же смысл, как в обычной аналитической геометрии. Нельзя забывать, что таким путем непротиворечивость евклидовой геометрии устанавливается лишь условно: при условии непротиворечивости арифметики.

Независимость каждой аксиомы можно подтвердить путем построения соответствующей интерпретации.

Полнота современной аксиоматики евклидовой геометрии устанавливается на основе доказательства изоморфизма каждой ее интерпретации с аналитической интерпретацией. Для этого достаточно доказать, что евклидово пространство допускает координатизацию.

Доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского можно осуществить различными путями в образах евклидовой геометрии. Такое доказательство предполагает, конечно, непротиворечивость евклидовой геометрии. Одновременно с установлением непротиворечивости геометрии Лобачевского решается вопрос о недоказуемости пятого постулата Евклида.

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вопрос об общих свойствах аксиом учителю излагать в школе не приходится. Но изучение этого вопроса позволяет учителю свободнее распоряжаться тем запасом аксиом, который сообщается школьникам, и располагать ясным представлением о тех или иных допущенных при этом по необходимости логических пробелах. Подготовленный учитель может в случае нужды так или иначе видоизменить список аксиом, которые явно формулируются в школьном курсе, в то время как без должной теоретической подготовки он был бы вынужден бессознательно копировать тот или иной образец.

В школьном курсе геометрии неизбежно приходится пользоваться избыточным списком аксиом, так как это упрощает изложение и облегчает ученикам усвоение основ геометрии. Ввиду психологических особенностей детей школьного возраста они не в состоянии оценить доказательство многих простых и «очевидных» предложений геометрии. С другой стороны, многочисленные предложения, принимаемые в школьном изложении как сами по себе разумеющиеся, т. е. принимаемые за аксиомы, обычно даже и не формулируются в явной форме. В таком положении учитель должен быть во всеоружии, чтобы не потерять окончательно чувство логической меры, не впасть в крайность в своем стремлении облегчить учащимся усвоение предмета или, напротив, заложить прочные логические его основы.

Не вдаваясь в недоступные для учащихся общие рассуждения, учитель может на отдельных примерах постепенно развивать у учащихся вкус к отчетливому определению круга предложений, используемых в ходе того или иного рассуждения, к определенности ссылок, к изучению взаимосвязей между теми или иными важнейшими предложениями геометрии и т. п. Тем самым он выполнит стоящие перед ним задачи по логическому развитию учащихся и по подготовке их к овладению в будущем идеями современной математической науки. Серьезная постановка школьного курса геометрии должна, в частности, привести учащегося к выводу, что деление геометрических предложений на аксиомы и теоремы является условным и может испытывать те или иные видоизменения в зависимости от обстоятельств и с течением времени.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Эта глава имеет целью ознакомить с основными идеями и некоторыми важнейшими предложениями геометрии Лобачевского.

Естественно, мы будем останавливаться лишь на тех предложениях геометрии Лобачевского, которые специфичны для нее, т. е. отличны от соответствующих предложений евклидовой геометрии. Это вопросы, связанные с понятием параллельности. В то же время не следует забывать, что все вопросы абсолютной геометрии решаются одинаково как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского.

§ 43. Параллельность в смысле Лобачевского

Рассмотрим какую-либо прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой (рис. 123). Пусть P — основание перпендикуляра, проведенного через точку A к прямой a. Пусть M—точка луча $\bar{a}$ прямой a, выходящего из точки P. Представим себе, что отрезок PM монотонно и неограниченно растет, и рассмотрим соответствующее изменение угла $\varphi=\sphericalangle PAM$. Ясно, во-первых, что этот угол монотонно возрастает. С другой стороны, так как в треугольнике APM угол $APM=90°$, то при любом положении точки M угол φ — острый, так как сумма углов треугольника в условиях абсолютной геометрии не превышает 180° (см. § 4). Отсюда следует, что существует предел угла φ при неограниченном уда-

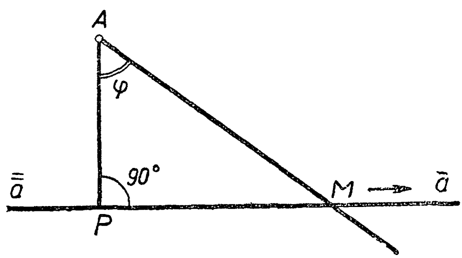


Рис. 123

лении точки M от точки P. При этом, по свойству предела ограниченной переменной, $\lim \varphi \leqslant 90°$.

Если мы допустим, что $\lim \varphi = 90°$, то это будет означать, что при всех возможных положениях точки M на луче $\bar{a}$ угол φ может приобретать любое значение между 0° и 90°, т. е. что любая прямая, проходящая под острым углом к перпендикуляру AP, пересекает прямую a. Но тогда через точку A проходила бы лишь единственная прямая, не имеющая общих точек с прямой a, именно прямая, перпендикулярная к AP, т. е. выполнялась бы аксиома параллельности V, в то время как в геометрии Лобачевского принимается постулат V′ (см. § 42), требующий существования по крайней мере двух таких прямых. Итак,

$$\lim_{PM \to \infty} \varphi = \alpha < 90°.$$

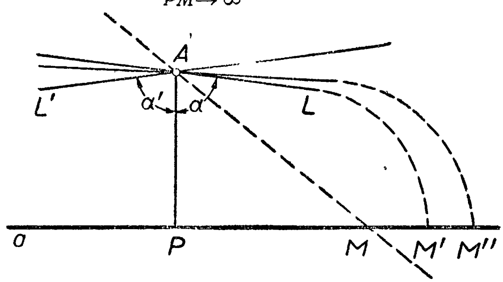


Рис. 124

Пусть AL — предельное положение прямой AM, т. е. $\measuredangle PAL = \alpha$ (рис. 124). Прямая AL не может пересекать прямую a. Действительно, если бы точка M' была точкой пересечения прямых AL и a, то существовала бы точка M'' такая, что $P\dot{M}'M''$, причем угол PAM'' был бы больше предельного значения угла φ, что невозможно, так как угол φ стремится к своему пределу, монотонно возрастая.

Приведенное выше рассуждение можно повторить также и для дополнительного луча $\bar{\bar{a}}$. При этом мы найдем, что существует прямая AL', образующая с AP острый угол α' во второй полуплоскости и также не имеющая общих точек с прямой a. Из соображений симметрии ясно, что $\measuredangle \alpha' \equiv \measuredangle \alpha$.

Каждая прямая, проходящая через точку A внутри угла α или внутри угла α', а также прямая AP, т. е. каждая прямая, проходящая через точку A внутри угла LAL' (и противоположного с ним), согласно определению прямых AL и AL', пересекает прямую a. Напротив, прямые, проходящие внутри углов, смежных с углом LAL', не могут иметь с прямой a общих точек, так как образуют с прямой AP углы, бо́льшие α.

Прямые AL и AL' Лобачевский называет п а р а л л е л ь н ы м и прямой a в точке A. Остальные прямые, проходящие через точку A и не пересекающие прямую a, называются р а с х о д ящимися с прямой a или сверхпараллельными прямой a в точке A. Параллельность мы будем обозначать обычным знаком ||, сверхпараллельность — знаком |||.

Таким образом, через точку A проходят две прямые, параллельные прямой a, о которых принято говорить, что они параллельны прямой a в двух противоположных ее направлениях. Кроме того, через эту же точку проходит еще бесчисленное множество других прямых, не имеющих общих точек с прямой a, — сверхпараллельных прямой a.

Очень полезно ознакомиться с другим способом определения параллельных в смысле Лобачевского, который основан на привлечении аксиомы непрерывности IV и не требует предельного перехода.

Пусть a — прямая и A — не принадлежащая ей точка. Пусть $AP \perp a$ и $AQ \perp AP$ (рис. 125). Рассмотрим множество, состоящее из лучей $\overline{AP}$, $\overline{AQ}$ и всех лучей, выходящих из точки A и проходящих внутри угла PAQ. Среди этих лучей есть такие, которые пересекают прямую a, например луч $\overline{AP}$, и такие, которые не пересекают прямую a, например луч $\overline{AQ}$. Отнесем лучи этого множества, не пересекающие a, к одному классу — классу K_1, а лучи, пересекающие a, к другому классу — классу K_2. Если $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — два луча данного множества, отличные от $\overline{AP}$, то будем считать, что «$\overline{m}$ предшествует $\overline{n}$», если $\measuredangle(\overline{AP}, \overline{m}) < \measuredangle(\overline{AP}, \overline{n})$. При таком определении легко показать, что луч, предшествующий лучу первого класса, сам принадлежит первому классу. Действительно, пусть $\overline{m}$ — луч первого класса, пересекающий прямую a в точке M, и $\overline{l}$ предшествует $\overline{m}$ (рис. 125). Тогда луч $\overline{l}$ проходит внутри угла PAM и в силу теоремы 26 (второе дополнение к аксиоме Паша) пересекает отрезок PM, т. е. попадает в первый класс.

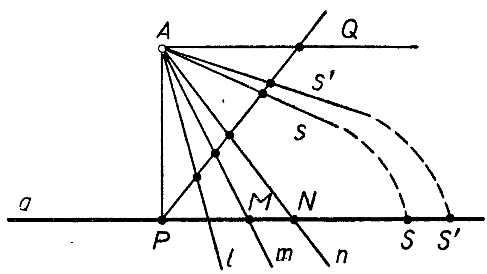


Рис. 125

Таким образом, принятое разбиение лучей на классы удовлетворяет условиям аксиомы непрерывности IV. Для дословного применения этой аксиомы надо только рассечь данный пучок лучей какой-либо прямой и воспользоваться взаимно однозначным соответствием между лучами пучка и точками соответственного отрезка секущей прямой.

Пусть $\overline{s}$ — сечение, т. е. луч, пограничный между лучами первого и второго классов. Если бы луч $\overline{s}$ пересекал прямую a в некоторой точке S, то существовала бы точка S', такая, что PSS', а следовательно, и луч $\overline{s'}$, принадлежащий первому классу, причем луч $\overline{s}$ предшествовал бы лучу $\overline{s'}$. Этого быть не может. Следовательно, луч $\overline{s}$ является лучом второго класса, т. е. «первым» из лучей пучка $\{\overline{AP}, \overline{AQ}\}$, не пересекающих прямую a. Допущение, что луч $\overline{s}$ совпадает с $\overline{AQ}$, привело бы к евклидову постулату. Следовательно, угол между $\overline{AP}$ и $\overline{s}$ — острый.

Такое же рассмотрение можно провести для пучка $\{\overline{AP}, \overline{\overline{AQ}}\}$ и установить существование луча $\overline{s^*}$, симметричного с $\overline{s}$ относительно прямой AP и играющего аналогичную роль. Носители лучей $\overline{s}$ и $\overline{s^*}$ будут прямыми, параллельными прямой a в точке A.

Формулируем теперь определение параллельности: прямая AB называется параллельной прямой CD в точке A в направлении от C к D, если: 1) прямые AB и CD не имеют общей точки, 2) всякая прямая, проходящая через точку A внутри угла CAB, пересекает прямую CD, 3) B и D сорасположены относительно прямой AC (рис. 126).

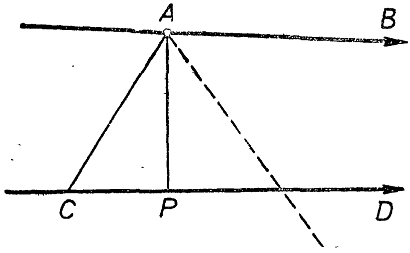


рис. 126

Угол CAB называют иногда опорным углом для прямой AB, параллельной прямой CD в точке A.

Если $AP \perp CD$ и $AB \parallel CD$, то острый угол PAB между параллелью и перпендикуляром называют углом параллельности, а отрезок AP—его стрелкой. Из двух лучей прямой AB один образует с перпендикуляром острый угол. Этим самым после выбора определенного направления на прямой CD (от C к D) определяется также соответствующее направление на прямой AB (от A к B).

Две параллельные прямые AB и CD определяют класс точек, «лежащих между ними». Это точки, принадлежащие как полуплоскости, определяемой прямой AB и точкой C, так и полуплоскости, определяемой прямой CD и точкой A.

В определение параллельности по Лобачевскому существенным образом входит, как мы видели, точка A, через которую проводится параллель к данной прямой. Пусть прямая AB параллельна прямой CD в точке A в направлении от C к D. Естественно, возникает вопрос: сохранится ли отношение параллельности, если заменить точку A какой-либо другой точкой M той же прямой AB? При этом, согласно определению, нам придется выбирать параллель не из пучка $\{A\}$, а из другого пучка $\{M\}$ (рис. 127).

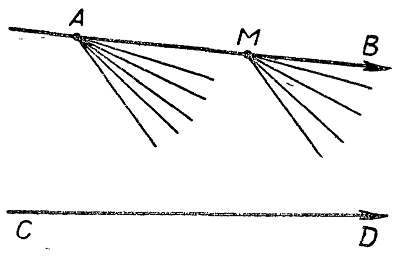


Рис. 127

Где же гарантия того, что при этом мы получим ту же прямую AB? В евклидовой геометрии такой вопрос, конечно, не возникает (почему?). Изучение параллельных очень усложнилось бы, если бы прямая AB, параллельная прямой CD в точке A, утратила бы свойство параллельности при переходе в другую ее точку M. Но определение параллельности по Лобачевскому оказывается настолько удачным и естественным, что такого осложнения не возникает. Действительно, имеет место следующая теорема.

Теорема 68. *Прямая, параллельная данной прямой в одной своей точке, параллельна той же прямой в том же направлении во всякой своей точке.*

Пусть прямая AB параллельна прямой CD в точке A в направлении от C к D и пусть M (рис. 128) — какая-либо точка прямой AB, «лежащая в направлении параллельности от точки A», т. е. сорасположенная с точкой D относительно прямой AC. Докажем, что прямая AB параллельна прямой CD также и в точке M. Для этого надо доказать, что любой луч $\overline{MN}$, проведенный из точки M внутри угла CMB, пересекает прямую CD. С этой целью выберем на этом луче произвольную точку P, лежащую между прямыми AB и CD, и рассмотрим луч $\overline{AP}$. Точка P лежит внутри угла CAB, следовательно, луч $\overline{AP}$ проходит внутри угла CAB. По определению параллельности, отсюда следует, что $\overline{AP}$ пересекает прямую CD в некоторой точке K. При этом точка P лежит между A и K. Применяя аксиому Паша к треугольнику ACK и прямой MN, найдем, что прямая MN проходит через точку отрезка CK, т. е. пересекает прямую CD.

Рассмотрим теперь точку M' прямой AB, лежащую по другую сторону точки A, и докажем, что прямая AB параллельна прямой CD также и в этой своей точке. Пусть $\overline{M'N'}$ (рис. 128) — произвольный луч, проведенный внутри угла $CM'B$, и пусть $\angle BAE \equiv \angle BM'N'$. Так как $\angle BAC > \angle BM'N'$, то луч $\overline{AE}$ пройдет внутри угла BAC и, следовательно, пересечет прямую CD в некоторой точке E. Луч $\overline{M'N'}$ пересечет отрезок $\overline{MC}$ в некоторой точке F, так как проходит через вершину M' треугольника $MM'C$ внутри угла $MM'C$ (теорема 26). Применяя аксиому Паша к прямой $M'N'$ и треугольнику ACE, найдем теперь, что прямая $M'N'$ проходит через точку отрезка CE, т. е. пересекает прямую CD, что и требовалось доказать.

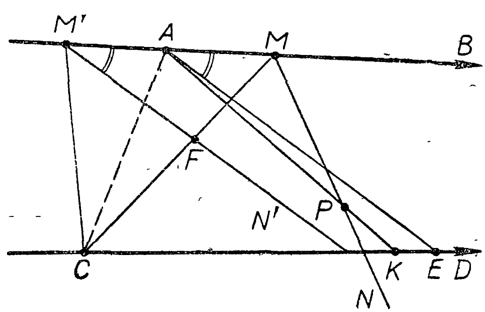


Рис. 128.

После этого ясно, что в дальнейшем нет надобности связывать отношение параллельности с определенной точкой: достаточно указать только направление параллельности.

§ 44. Взаимность и транзитивность параллельных Лобачевского

Вопрос о взаимности параллельных прямых в евклидовой геометрии не возникает, так как свойство двух прямых иметь или не иметь общую точку является, очевидно, равноправным относительно каждой из этих прямых. В геометрии Лобачевского положение иное: определение параллельности вводится неравноправно относительно данной прямой и прямой, ей параллельной. Однако, как мы покажем, взаимность параллельных имеет место также и в этой геометрии. Этим еще раз иллюстрируется естественность определения параллельности по Лобачевскому.

Теорема 69. *Если прямая AB параллельна прямой CD в направлении от C к D, то и прямая CD параллельна прямой AB в направлении от A к B.*

Пусть $CP \perp AB$. Согласно определению, надо доказать, что любая прямая CE, проведенная внутри угла PCD (рис. 129), имеет общую точку с прямой AB.

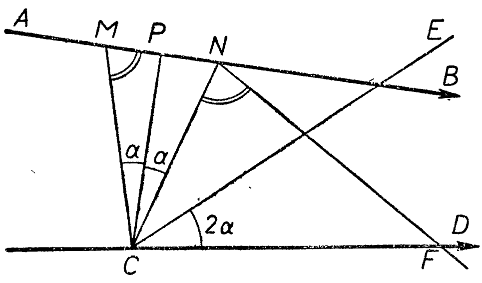


Рис. 129

Обозначим угол, образуемый лучами $\overline{CE}$ и $\overline{CD}$, через 2α и проведем лучи $\overline{CM}$ и $\overline{CN}$ так, чтобы $\measuredangle MCP \equiv \measuredangle NCP = \alpha$.

Рассуждение можно проводить в предположении, что угол α как угодно мал: будучи доказано для малого угла α, наше предположение (о наличии общей точки прямых AB и CE) тем более будет справедливо и для большего угла. Поэтому можно считать, что обе прямые CM и CN пересекут прямую AB соответственно в точках M и N.

Построим $\measuredangle CNF \equiv \measuredangle CMB$ в полуплоскости (CN, B). Так как $\measuredangle CNB > \measuredangle CMB$, то луч $\overline{NF}$ будет проходить внутри угла CNB и поэтому (согласно условию теоремы) пересечет прямую CD в некоторой точке F.

Представим себе теперь поворот треугольника CNF около точки C на угол 2α, после которого луч $\overline{CF}$ пойдет по лучу $\overline{CE}$. При этом, как нетрудно заметить, CN преобразуется в CM, причем точка N — в точку M. Далее, в силу равенства углов CNF и CMB прямая NF преобразуется в прямую MB. Следовательно, образ точки F должен принадлежать как прямой CE, так и прямой MB (или, что то же, прямой AB). Поэтому прямые CE и AB действительно имеют общую точку, что и требовалось доказать.

После доказательства свойства взаимности параллельных мы получили право говорить о двух прямых как о прямых, параллельных «между собой».

Из взаимности параллельности следует также взаимность сверхпараллельности. Действительно, если $a ||| b$, то эти прямые не имеют общей точки. Но если бы имело место соотношение $b \| a$, то это означало бы также, что $a \| b$, что не отвечает условию.

Под транзитивностью параллельных понимают свойство двух прямых, параллельных третьей, быть параллельными между собой. Ясно, что это свойство, всегда имеющее место в евклидовой плоскости, не может быть установлено без каких-то оговорок в плоскости Лобачевского: ведь здесь через каждую точку можно провести такие две прямые, которые параллельны одной и той же третьей.

Теорема 70. *Если прямые AB и $A'B'$ параллельны одной и той же прямой CD в одном и том же направлении (например, от C к D), то они параллельны между собой.*

Допустим сначала, что прямые AB и $A'B'$ (рис. 130) расположены по разные стороны от прямой CD. Тогда они заведомо не имеют общей точки и остается доказать, что любой луч $\overline{p}$, проведенный из точки A внутри угла $A'AB$, имеет общую точку с прямой $A'B'$.

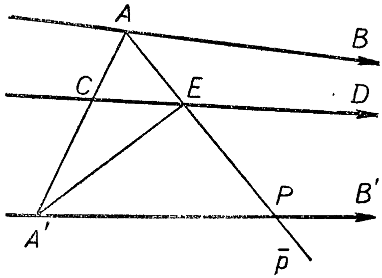


Рис. 130

Пусть C—точка пересечения прямой CD с отрезком AA', E—точка пересечения луча $\overline{p}$ с прямой CD. Существование точки E следует из условия теоремы. При этом луч $\overline{p}$ пойдет внутри угла $A'ED$*. Но, по условию, $A'B' \| CD$, а, следовательно, по предыдущей теореме, $CD \| A'B'$ во всякой своей точке в направлении от A' к B'. А отсюда, по определению параллельности, вытекает наличие общей точки луча $\overline{p}$ и луча $\overline{A'B'}$.

Теперь теорема 70 легко может быть доказана по методу от противного и для случая, когда прямые AB и $A'B'$ располагаются по одну сторону прямой CD (рис. 131).

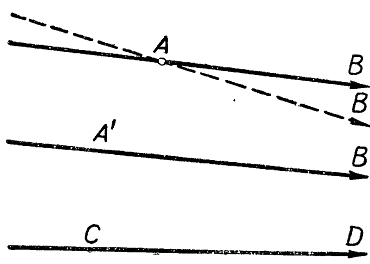


Рис. 131

Допустим, что AB не параллельна $A'B'$, и пусть $AB'' \| A'B'$ в направлении от A' к B'. Тогда прямые AB'' и CD ока-

* Рекомендуется строго доказать справедливость этого утверждения.

зываются по отношению к прямой $A'B'$ в условиях предыдущего случая, так что, по предыдущему, $AB'' \parallel CD$ (в направлении от C к D), что противоречит единственности параллели в данном направлении через данную точку.

§ 45. Угол параллельности

Установим здесь некоторые важнейшие свойства угла параллельности (см. определение в § 43).

Пусть $AB \parallel CD$, $A'B' \parallel C'D'$, $AP \perp CD$, $A'P' \perp C'D'$ (рис. 132), так что $\sphericalangle PAB$ — угол параллельности со стрелкой AP, $\sphericalangle P'A'B'$ — угол параллельности со стрелкой $A'P'$. Пусть при этом $AP \equiv A'P'$.

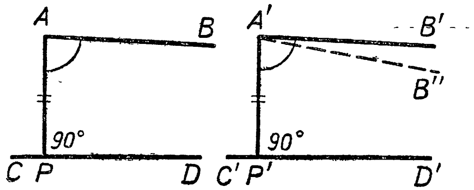


Рис. 132.

Рассмотрим движение, сопоставляющее точке P точку P' и лучу $\overline{PD}$ — луч $\overline{P'D'}$. При этом, как легко заметить, точке A будет сопоставляться точка A', а, следовательно, лучу $\overline{AB}$ — некоторый луч $\overline{A'B''}$. Если бы прямая $\overline{A'B''}$ была отлична от прямой $\overline{A'B'}$, то через точку A' проходили бы две различные прямые ($A'B'$ и $A'B''$), параллельные одной и той же прямой ($C'D'$) в одном и том же направлении, что невозможно. Значит, в этом движении лучу $\overline{AB}$ сопоставляется луч $\overline{A'B'}$. А это означает, что $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle P'A'B'$.

Таким образом, *при равных стрелках углы параллельности также равны между собой*. Следовательно, угол параллельности может зависеть только от стрелки (или вообще постоянен). Угол параллельности, соответствующий стрелке h, будем поэтому в дальнейшем обозначать через $\Pi(h)$.

Лемма 1. *Если две прямые в пересечении с третьей образуют равные внутренние накрест лежащие (или соответственные) углы, то эти две прямые обладают общим перпендикуляром.*

Действительно, пусть $\sphericalangle B'AC \equiv \sphericalangle DCA$ (рис. 133). Пусть O — середина отрезка AC, $OP \perp AB$, $OQ \perp CD$. Тогда $\triangle AOP \equiv \triangle COQ$ по гипотенузе и острому углу, откуда следует, что $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle COQ$, в силу чего точки P, O и Q лежат на одной прямой.

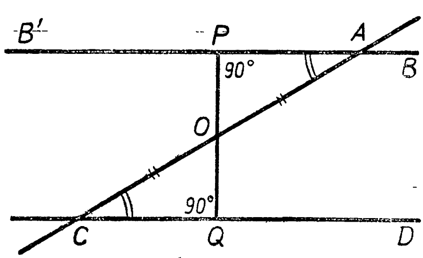


Рис. 133

Следовательно, данные прямые AB и CD имеют общий перпендикуляр PQ.

Лемма 2. *Две прямые, обладающие общим перпендикуляром, сверхпараллельны.*

Пусть PQ (рис. 133) — общий перпендикуляр прямых AB и CD. Тогда прямые AB и CD не могут пересечься (вспомните первую теорему о внешнем угле треугольника). Но они не могут быть также и параллельными, так как при этом прямой угол BPQ был бы углом параллельности.

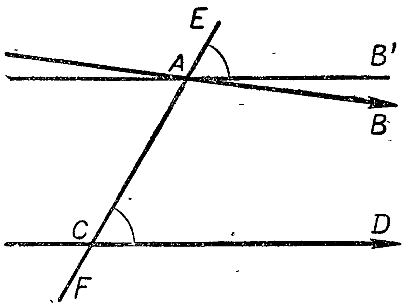


Рис. 134.

Теорема 71. *Сумма внутренних односторонних углов при параллельных в направлении их параллельности всегда меньше развернутого угла.*

Действительно, пусть $AB \| CD$ в направлении от C к D и пусть секущая прямая EF образует с данными прямыми внутренние односторонние углы ACD и CAB (рис. 134).

Пусть $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DCE$. Тогда, по лемме 1, $AB' \| CD$. Но это означает, что луч $\overline{AB}$ проходит внутри угла CAB', так что $\sphericalangle CAB < \sphericalangle CAB'$. А так как $\sphericalangle ACD + \sphericalangle CAB' \equiv \sphericalangle EAB' + \sphericalangle CAB'$, т. е. эти углы составляют в сумме развернутый угол, то сумма углов ACD и CAB меньше развернутого угла.

Теорема 72. *Угол параллельности есть убывающая функция стрелки.*

Пусть $\sphericalangle CAB = \Pi(AC) = \Pi_1$, $\sphericalangle CA'B' = \Pi(A'C) = \Pi_2$, $A'C > AC$ (рис. 135). Обозначим угол $A'AB$ через ω. В силу транзитивности параллельных $A'B' \| AB$ и, следовательно, по предыдущей теореме, $\omega + \Pi_2 < 2d$. Но $\omega + \Pi_1 = 2d$, откуда ясно, что $\Pi_1 > \Pi_2$. Таким образом, большей стрелке отвечает меньший угол параллельности.

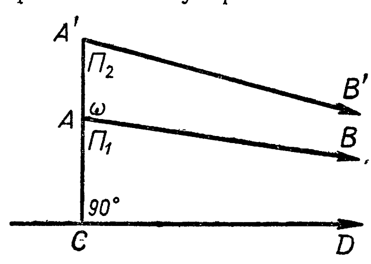


Рис. 135.

Теорема 73. *Для всякого острого угла α существует такой отрезок h, что $\Pi(h) = \alpha$.*

Иначе говоря, всякий острый угол может служить углом параллельности, для него всегда можно подобрать соответствующую стрелку.

Пусть $\sphericalangle AOB = \alpha$ (рис. 136) — произвольный острый угол. Представим себе, что на его стороне $\overline{OA}$ выбираются произвольно точки M, N, K, ... и в каждой из этих точек восставляется перпендикуляр к прямой OA. Ясно, что некоторые из этих перпендикуляров пересекутся с лучом $\overline{OB}$. Чтобы найти перпендикуляр LL', пересекающий луч $\overline{OB}$, можно поступить, например, так: избрать точку L' произвольно на OB и опустить из этой точки перпендикуляр $L'L$ на прямую OA.

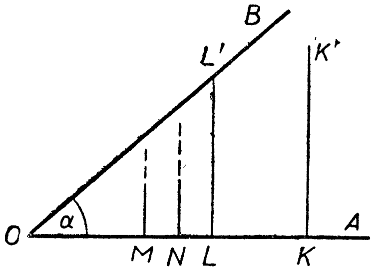


Рис. 136.

Труднее представить себе противоположное обстоятельство, которое тем не менее имеет место на плоскости Лобачевского: не всякая прямая, проведенная через точку луча $\overline{OA}$ перпендикулярно к прямой OA, пересекает прямую OB. Если бы это было не так, то имело бы место сделанное в свое время Лежандром допущение: через каждую внутреннюю точку угла AOB было бы можно провести прямую, пересекающую обе стороны одного угла. Лежандром было показано (см. § 4), что такое допущение ведет к геометрии Евклида.

Итак, среди прямых, проводимых через точки луча $\overline{OA}$ перпендикулярно к прямой OA, есть такие, которые имеют общие точки с прямой OB, и такие, которые общих с нею точек не имеют. Будем называть основания таких перпендикуляров соответственно точками первого и второго классов (луча $\overline{OA}$). Если L — точка первого класса, а K — точка второго класса, то непременно $OL<OK$. Действительно, допустим, что $\dot{O}KL$. Замечая, что прямая KK' не может пересечься с прямой LL' (эти прямые имеют общий перпендикуляр), и применяя аксиому Паша к треугольнику OLL' и прямой KK', мы пришли бы к выводу, что прямая KK' пересекает $\overline{OB}$, а это противоречит допущению, что точка K — точка второго класса.

Таким образом, точки отрезка OK луча $\overline{OA}$ оказываются разбитыми на два класса в соответствии с условиями аксиомы непрерывности: при движении вдоль луча $\overline{OA}$ от O к A сначала будут встречаться только точки первого класса, а затем только точки второго класса. Поэтому должна существовать точка S, производящая сечение во множестве точек отрезка OK, и прямая SS', перпендикулярная к OA и производящая сечение во множестве перпендикуляров к прямой OA (рис. 137).

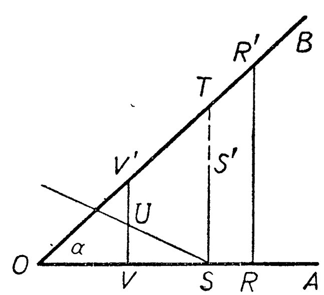


Рис. 137.

Легко установить, что точка S

относится ко второму классу, т. е. пограничная прямая SS' не пересекает луч $\overline{OB}$. Действительно, допустим, что существует точка T пересечения прямых SS' и OB. Пусть $OR' > OT$ и $R'R \perp OA$. Приходим к противоречию: $O\dot{S}R$, но точка R принадлежит к первому классу. Значит, прямые OB и SS' не имеют общих точек.

Пусть SU — любой луч, проходящий внутри угла OSS', и пусть U — какая-либо точка этого луча, лежащая внутри угла AOB. Проведя через точку U прямую UV, перпендикулярную к прямой OA, заметим, что она пересечет луч OB в некоторой точке V', так как точка V принадлежит к первому классу. Применяя теперь аксиому Паша к прямой SU и треугольнику OVV', найдем, что прямая SU проходит через точку отрезка OV', т. е. пересекает прямую OB.

Таким образом, граничная прямая SS' параллельна прямой OB в направлении от O к B. При этом, по определению, угол SOB, равный α, служит углом параллельности: $\measuredangle\, \alpha = \Pi\,(OS)$.

Следствие 1. *При возрастании стрелки от* 0 *до* ∞ *угол параллельности убывает от* 90° *до* 0°, *принимая в этом промежутке все возможные значения.*

Следствие 2. *В достаточно малых областях пространства результаты измерений и вычислений становятся как угодно близкими независимо от того, производятся ли они по правилам геометрии Евклида или по правилам геометрии Лобачевского.*

Действительно, при малых значениях h угол параллельности становится как угодно близким к 90°, а если угол параллельности прямой, то имеет место постулат Евклида.

Н. И. Лобачевским получена замечательная формула, выражающая угол параллельности как функцию стрелки:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\Pi\,(x) = e^{-\frac{x}{R}},$$

где e — неперово число, R — некоторый постоянный отрезок, x — стрелка.

В геометрии Лобачевского существует, таким образом, формула, устанавливающая зависимость между отрезком (x) и углом $(\Pi(x))$. С этой особенностью геометрии Лобачевского связана одна из наиболее увлекательных ее идей: существование некоторой естественной линейной константы, «абсолютной единицы длины». В условиях геометрии Евклида углы и отрезки находятся в неравноправном положении: единицу измерения углов можно определить математически, указав правило ее образования, в то время как единица измерения отрезков может быть задана произвольно, нет возможности описать особые ее свойства. Существует, таким образом, естественная единица угла (радиан или прямой угол), но единицу длины (например, метр) приходится сохранять в виде специального эталона, нельзя дать ее математическое определение, нельзя указать какой-либо математический способ ее восстановления.

В геометрии Лобачевского положение иное: каждому отрезку x отвечает определенный острый угол $\Pi(x)$ и наоборот. И можно условиться считать за «абсолютную» (естественную) единицу длины отрезок, соответствующий естественной единице угла, например одному радиану, после чего абсолютный характер измерения углов переносится также и на отрезки.

Это обстоятельство представляло в свое время одно из препятствий к признанию новой геометрии. В наше время, напротив, этот вывод рассматривается как одно из важнейших достижений неевклидовой геометрии, раскрывающее диалектическую связь и единство объектов реального мира, доступных геометрическому методу исследования.

§ 46. Некоторые свойства треугольника

Поскольку система аксиом геометрии Лобачевского включает все аксиомы абсолютной геометрии, в ней остаются в силе многие из тех привычных свойств треугольников, которые хорошо знакомы нам со школьных лет, а именно: те свойства треугольников, которые не связаны со свойствами параллельных линий: первая теорема о внешнем угле, признаки конгруентности, свойства равнобедренного треугольника, соотношения между сторонами и др. С другой стороны, принятие постулата Лобачевского влечет за собой ряд новых свойств треугольника, не имеющих места в евклидовой геометрии. Рассмотрим некоторые из них.

1. *Сумма углов каждого треугольника меньше суммы двух прямых углов.*

Действительно, как было установлено в § 4, в условиях абсолютной геометрии $\sigma_\Delta \leqslant 2d$. Но допущение, что $\sigma_\Delta = 2d$, влечет постулат Евклида (§ 4, теорема III).

Разность $2d-\sigma$ называется дефектом треугольника. Легко заметить, что дефект треугольника — величина, вообще говоря, переменная.

Пусть ABC (рис. 138) — произвольный треугольник, δ — его дефект. Пусть произвольная прямая BD делит треугольник ABC на два треугольника: ABD и CBD, дефекты которых равны соответственно δ_1 и δ_2. Тогда $\sigma_{ABC}=2d-\delta=\sigma_{ABD}+\sigma_{CBD}-2d=(2d-\delta_1)+(2d-\delta_2)-2d=2d-(\delta_1+\delta_2)$, так что $\delta=\delta_1+\delta_2$, т. е. дефект данного треугольника ABC больше дефекта каждого из треугольников ABD и BCD. Вообще говоря, с уменьшением размеров треугольника дефект его, как оказывается, неограниченно убывает, чего и следовало ожидать (так как в малых областях пространства вычисления по формулам геометрии Лобачевского, как мы знаем, неограниченно сближаются с результатами евклидовой геометрии, где дефект каждого треугольника равен нулю).

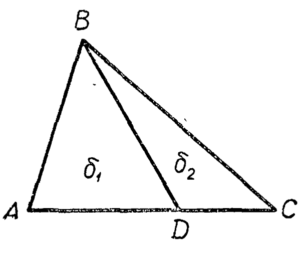


Рис. 138.

Напротив, при неограниченном увеличении линейных размеров треугольника сумма углов его может быть сделана как угодно малой, дефект может принимать значения как угодно близкие к 180°. Мы не будем останавливаться на доказательстве этих предложений.

Сумма углов выпуклого четырехугольника в плоскости Лобачевского всегда меньше 360°, так как такой четырехугольник разбивается диагональю на два треугольника.

2. *Если углы одного треугольника соответственно конгруентны углам другого треугольника, то эти треугольники конгруентны.*

Рассмотрим два треугольника: ABC и $A'B'C'$, где

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle A', \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle B', \quad \measuredangle C \equiv \measuredangle C'.$$

Пусть B_1 — такая точка луча $\overline{AB}$, что $AB_1 \equiv A'B'$, C_1 — такая точка луча $\overline{AC}$, что $AC_1 \equiv A'C'$. Если C_1 совпадает с C и B_1 совпадает с B, то справедливость данного предложения очевидна. Допустим, что это не так.

Предположим, что C_1 совпадает с C, но B_1 не совпадает с B, так что $A\dot{B}_1B$ (рис. 139,*а*) или $A\dot{B}B_1$ (рис. 139,*б*). При этом в треугольнике B_1CB образуется внешний угол, конгруентный несмежному внутреннему, чего быть не может. Аналогично придем к противоречию, если допустим, что B_1 совпадает с B, но C_1 не совпадает с C.

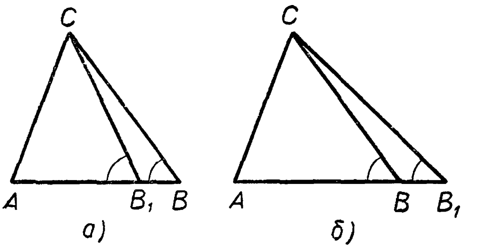


Рис. 139.

Предположение, что B_1 не совпадает с B и в то же время C_1 не совпадает с C, также приводит к противоречию. Допустим, например, что $A\dot{C}_1C$ и $A\dot{B}B_1$ (рис. 140). Если P — точка пересечения сторон BC и B_1C_1, то в треугольнике BPB_1 внешний угол конгруентен внутреннему.

То же самое получится в предположении $A\dot{C}C_1$ и $A\dot{B}_1B$.

Если же допустить, что $A\dot{B}B_1$ и $A\dot{C}C_1$ (рис. 141, *а*) или $A\dot{B}_1B$ и $A\dot{C}_1C$ (рис. 141, *б*), то образуется выпуклый четырехугольник BCC_1B_1, сумма углов которого равна 360°, чего быть не может.

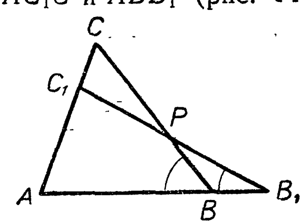


Рис. 140.

Остается только допустить, что B_1 совпадает с B и в то же время C_1 совпадает с C, а это и означает справедливость предложения 2.

Из доказанного следует, что *подобных* (*но не равных*) *треугольников в геометрии Лобачевского не существует.*

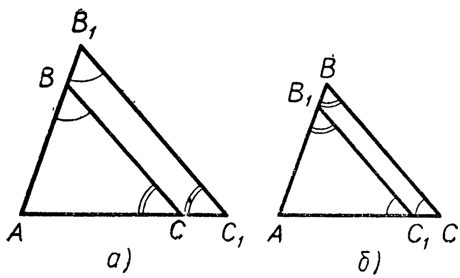


Рис. 141.

3. *Существуют треугольники, около которых нельзя описать окружность.*

Пусть a и b (рис. 142) — две параллельные прямые, C — произвольная точка той же плоскости, A и B — точки, симметричные с точкой C соответственно относительно прямых a и b. Тогда точки A, B и C не лежат на одной прямой, так как такая прямая служила бы общим перпендикуляром к параллельным прямым a и b. Но не существует точки, равноудаленной от A, B и C, так как такая точка лежала бы одновременно на прямой a и на прямой b, а эти прямые не имеют общей точки.

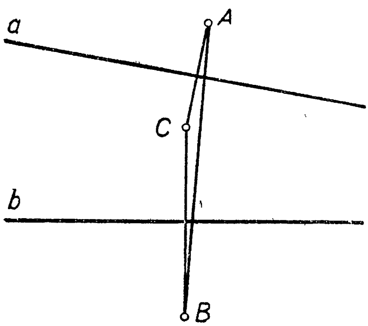


Рис. 142.

4. *Средняя линия треугольника сверхпараллельна основанию этого треугольника.*

Пусть ABC (рис. 143) — произвольный треугольник, MN — его средняя линия, AA_1, BB_1, CC_1 — перпендикуляры, проведенные из вершин треугольника к средней линии. Тогда легко заметить, что $\triangle NCC_1 \equiv \triangle NBB_1$ и $\triangle MBB_1 \equiv \triangle MAA_1$ по гипотенузе и острому углу. Отсюда следует, что $CC_1 \equiv AA_1$ и, значит, AA_1C_1C — четырехугольник Саккери (см. § 6). Известно, что четырехугольник Саккери обла-

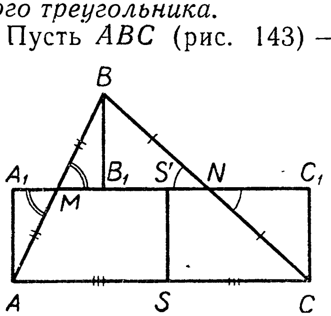


Рис. 143.

дает осью симметрии SS', которая перпендикулярна к каждой из прямых AC и A_1C_1. Следовательно (см. лемму 2, § 45),

$$AC \parallel A_1C_1.$$

§ 47. Эквидистанта и орицикл

В элементарной геометрии Лобачевского играют большую роль некоторые кривые линии, которые вообще не встречаются в евклидовой геометрии. Познакомимся здесь с двумя такими линиями и отметим наиболее интересные их свойства. Предварительно введем некоторые необходимые определения.

Пусть даны две прямые a и b (рис. 144), лежащие в одной плоскости.

Если A — такая точка прямой a и B — такая точка прямой b, что прямая AB образует с прямыми a и b равные внутренние односторонние углы, то прямая AB называется **секущей равного наклона** к прямым a и b, а точки A и B — **соответственными** точками прямых a и b. Например, если две прямые обладают общим перпендикуляром, то этот перпендикуляр служит секущей равного наклона, а его основания являются соответственными точками данных прямых.

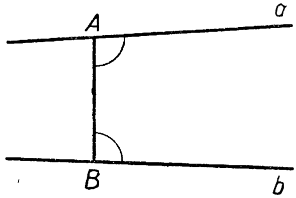


Рис. 144.

Рассмотрим в плоскости некоторые системы прямых, которые принято называть **пучками**. Будем называть: 1) **центральным пучком** совокупность всех прямых, проходящих через данную точку O (рис. 145,*а*), которая называется при этом **центром пучка**; 2) **гиперболическим пучком** — совокупность всех прямых, перпендикулярных к данной прямой p (рис. 145,*б*), которая при этом называется **базой** пучка; 3) **параболическим пучком** — совокупность прямых, параллельных в одном направлении некоторой данной прямой p (рис. 145,*в*), называемой при этом **осью** параболического пучка прямых.

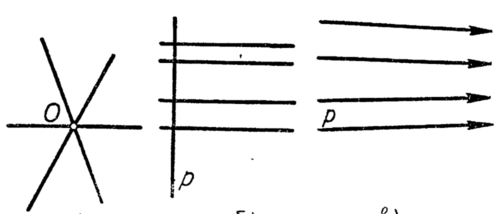


Рис. 145.

Будем называть: 1) лучами центрального пучка — лучи, исходящие из его центра; 2) лучами гиперболического пучка — лучи его прямых, расположенные в некоторой избранной полуплоскости относительно базы; 3) лучами параболического пучка — его прямые, ориентированные по направлению параллельности с осью пучка. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 74. *Если $\overline{a}$ — луч некоторого пучка и A — точка этого луча, то на каждом другом луче $\overline{b}$ данного пучка существует единственная такая точка B, что точки A и B суть соответственные точки прямых a и b.*

Единственность точки B доказывается от противного. Действительно, если допустить, что AB и AB' (рис. 146) — две секущие равного наклона к прямым a и b, то (в предположении, что AB' — внутри угла BAM) возникают противоречивые соотношения:

$$\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ABN, \ \sphericalangle BAM > \sphericalangle B'AM, \ \sphericalangle B'AM \equiv \sphericalangle AB'N,$$
$$\sphericalangle AB'N > \sphericalangle ABN.$$

Существование же точки B приходится доказывать в отдельности для пучка каждого вида.

1. Случай центрального пучка (рис. 147). Чтобы

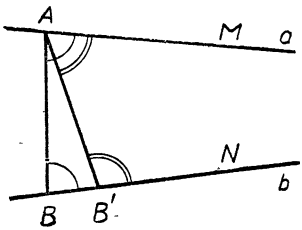


Рис. 146

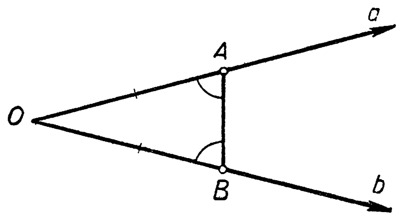


Рис. 147

найти точку B, соответственную данной точке A, достаточно потребовать, чтобы $OB \equiv OA$. Прямая AB будет при этом секущей равного наклона к прямым a и b в силу свойств равнобедренного треугольника OAB.

2. Случай гиперболического пучка (рис. 148). Пусть A_1—начало луча $\overline{a}$, B_1— начало луча $\overline{b}$. A и B— соответственны, если $A_1A \equiv B_1B$. Действительно, при этом A_1ABB_1 — четырехугольник Саккери. Поэтому $\sphericalangle A_1AB \equiv \sphericalangle B_1BA$ (конгруентны также и смежные с ними углы).

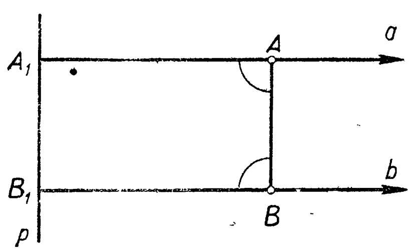


Рис. 148

3. Случай параболического пучка (рис. 149). Для данной точки A луча a построение соответственной точки B луча $\overline{b}$ можно осуществить следующим образом. Пусть $\overline{CD}$ — произвольная секущая, CE и DE — биссектрисы углов $(\overline{CD}, \overline{a})$ и $(\overline{DC}, \overline{b})$, E — точка пересечения этих биссектрис, $EF \perp a$, $EH \perp b$. Тогда пусть $BH \equiv \overline{AF}$, причем точки A и B расположены относительно точек F и H либо обе в направлении избранной ориентации лучей $\overline{a}$ и $\overline{b}$, либо обе в противоположном направлении. Для доказательства соответственности точек A и B остается провести биссектрису s угла FEH и заметить, что фигуры a, F, A и b, H, B — симметричны относительно этой прямой (совпадают при перегибании около s).

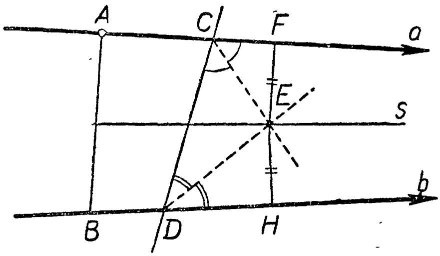


Рис. 149

Теорема 74 доказана.

Рассмотрим теперь геометрические места точек, соответственных данной прямой на лучах пучков различных видов. Таким путем мы и придем к определению новых кривых линий геометрии Лобачевского.

Рассмотрим сначала какой-либо луч $\overline{a}$ центрального пучка O и на нем некоторую точку A (рис. 150). Будем строить на остальных лучах пучка O точки, соответственные выбранной точке A. Из предыдущего ясно, что геометрическое место таких точек есть окружность, центр которой находится в точке O и радиус равен OA (строже говоря, такая окружность без точки A и точки, симметричной с точкой A относительно центра пучка).

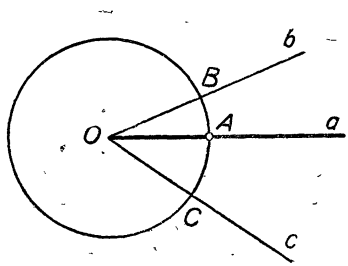


Рис. 150

Пусть теперь p — база гиперболического пучка лучей (рис. 151), $\overline{a}$ — один из лучей пучка, A — точка этого луча. Из предыдущего следует, что геометрическое место точек, соответственных точке A на лучах этого пучка, есть (вместе с точкой A) множество точек, расположенных по одну сторону от базы на одном и том же от нее расстоянии. Это множество точек образует линию, называемую линией равных расстояний или **эквидистантой**.

Отметим наиболее интересные свойства эквидистанты.

1. Эквидистанта — кривая линия. Более того: никакие три точки эквидистанты не лежат на одной прямой.

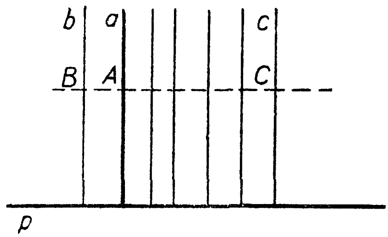


Рис. 151

Действительно, пусть A, B и C (рис. 152)— три произвольные точки эквидистанты, A_1, B_1 и C_1 — основания соответствующих лучей, $C_1\dot{A}_1B_1$. Тогда как A_1ACC_1, так и A_1ABB_1 — четырехугольники Саккери. Следовательно (см. § 6), углы CAA_1 и BAA_1 — острые, так что они не составляют в сумме развернутого угла. Таким образом, эквидистанта – кривая, обращенная к базе вогнутостью.

2. Никакие три точки эквидистанты не лежат на одной окружности. Действительно, центр окружности, проходящей через точки A, B и C (рис. 152) эквидистанты, должен был бы лежать как на оси MN симметрии четырехугольника A_1ABB_1, так и на оси KL симметрии четырехугольника C_1CAA_1. Но прямые MN и KL не имеют общей точки, так как обе перпендикулярны к прямой p.

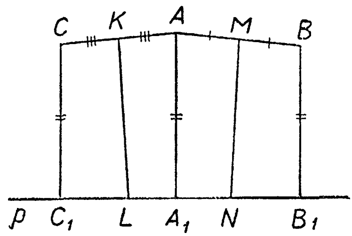


Рис. 152

3. Эквидистанта — бесконечная линия, так как в любой точке прямой p можно восставить к этой прямой перпендикуляр и отложить на нем данный отрезок A_1A.

4. Эквидистанта обладает способностью «скользить по себе»: если представить, что точка A_1 перемещается по прямой p вместе с перпендикуляром A_1A и вместе с эквидистантой, то точка A, а также и каждая другая точка эквидистанты будут перемещаться по этой эквидистанте. Интересно заметить, что в евклидовой геометрии способностью «скользить по себе» обладают только прямая линия и окружность.

Перейдем к ознакомлению с другой замечательной линией геометрии Лобачевского — орициклом. О р и ц и к л о м называется геометрическое место точек, соответственных данной точке A луча $\bar{a}$ параболического пучка на всех других лучах этого пучка (вместе с точкой A). При этом точка A называется в е р ш и н о й, а прямая $\bar{a}$ — о с ь ю орицикла.

Интересно заметить, что орицикл можно представлять также как предельное положение окружности, проходящей через фиксированную точку, когда центр окружности неограниченно удаляется вдоль луча, исходящего из этой точки. Будем рассматривать окружность (O, OA) (рис. 153) как геометрическое место точек, соответственных точке A на лучах центрального пучка O,

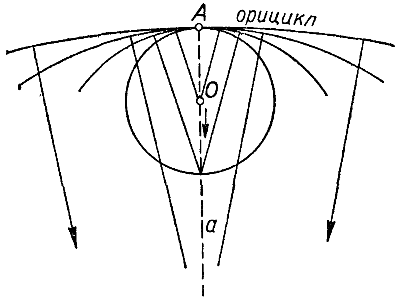


Рис. 153

и представим себе, что точка O неограниченно удаляется вдоль луча $\overline{AO}$, а точка A остается неподвижной. В пределе центральный пучок превратится в параболический, а окружность (O, OA) — в орицикл. Поэтому орицикл часто называют также *предельной линией*.

Теорема 75. *Если A и B — соответственные точки на двух параллельных прямых a и b, то симметраль отрезка AB параллельна каждой из этих прямых.*

Пусть прямая s (рис. 154) есть симметраль отрезка AB, т. е. проходит через середину этого отрезка и перпендикуляра к прямой AB, так что фигура $aABb$ симметрична относительно прямой s. Тогда прямые a и s не могут иметь общей точки, так как через такую точку проходила бы также прямая b, что невозможно ввиду параллельности прямых a и b. Но если бы прямая a расходилась с прямой s (т. е. если бы было $a \parallel\!| s$), то внутри угла SAM (или, что то же, BAM) проходила бы прямая a', параллельная s. Так как эта прямая не пересекала бы s, то она не пересекала бы также и b. Но это означало бы, что $a' \parallel b$ или $a' \parallel\!| b$, а, следовательно, $a \parallel\!| b$, что противоречит условию. Итак, $s \parallel a$, а следовательно, и $s \parallel b$.

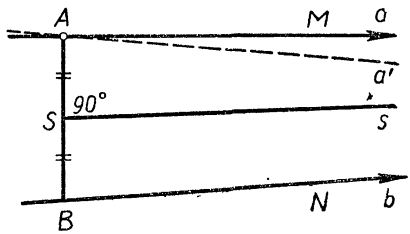


Рис. 154

Следствие 1. *Никакие три точки орицикла не коллинеарны.*

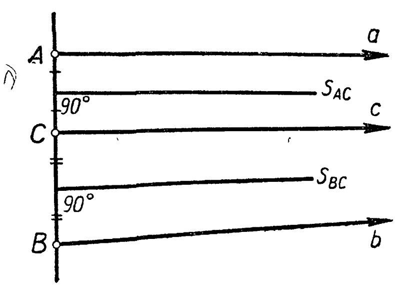


Рис. 155

Действительно, если бы три коллинеарные точки A, B и C (рис. 155) принадлежали одному орициклу, то симметрали s_{AC} и s_{BC}, будучи параллельными одной прямой c

(притом в одном направлении), обладали бы в то же время общим перпендикуляром AB, что невозможно.

Таким образом, предельная линия не прямая, в то время как в евклидовой геометрии это именно так: при неограниченном возрастании радиуса окружность евклидовой геометрии превращается в пределе в прямую.

Следствие 2. *Через три точки орицикла нельзя провести окружность.*

Действительно, центр такой окружности принадлежал бы каждой из двух прямых s_{AC} и s_{BC} (рис. 155), которые, по доказанному, параллельны.

Тем более ясно, что орицикл не есть окружность.

Докажем еще одно интересное свойство орицикла, которое, между прочим, отличает его от эквидистанты.

Теорема 76. *Каждая из прямых, проходящих через вершину орицикла под острым углом к его оси, пересекает орицикл еще в одной точке.*

Пусть A (рис. 156) — вершина орицикла, a — ось, $\measuredangle (\overline{a}, \overline{l}) = \alpha < 90°$. Пусть $\Pi(h) = \alpha$, $AS \equiv BS \equiv h$, s — симметраль отрезка AB, $b \parallel s$ (см. теорему 73). Тогда

$$\measuredangle (\overline{BS}, \overline{b}) = \Pi(BS) = \Pi(AS) = \Pi(h) = \alpha.$$

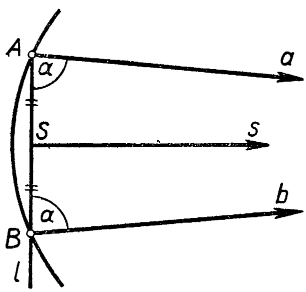


Рис. 156

Кроме того, $s \parallel a$, так как $\alpha = \Pi(SA)$, и $AS \perp s$. Значит, $b \parallel a$ по транзитивности. Таким образом, A и B — соответственные точки на лучах данного параболического пучка, т. е. точка B прямой l принадлежит данному орициклу.

Что же касается эквидистанты, то все прямые, проведенные через какую-либо ее точку внутри угла параллельности, заведомо не имеют других общих точек с эквидистантой, так как они пересекают базу, и поэтому расстояния точек такой прямой от базы монотонно возрастают по мере удаления от точки пересечения с базой (см. об этом в § 48).

§ 48. Исследование вопроса о расстоянии между двумя прямыми в плоскости Лобачевского

Теорема 77. *Если a и b — две прямые, пересекающиеся в точке O, и A — точка прямой a, то расстояние точки A от прямой b монотонно неограниченно и непрерывно возрастает по мере удаления точки A от точки O.*

Строим на прямой a (рис. 157) отрезки $OA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \dots$ Проводим прямые A_1B_1, $A_2B_2, \dots$, перпендикулярные к прямой $\overline{b}$.

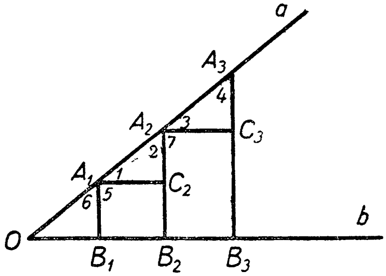


Рис. 157.

Отложим на луче $\overline{B_2A_2}$ отрезок $B_2C_2 \equiv B_1A_1$. Четырехугольник $A_1B_1B_2C_2$ есть четырехугольник Саккери, так что угол $C_2A_1B_1$ — острый. Поэтому луч A_1C_2 проходит внутри тупого угла $A_2A_1B_1$, так что $A_2B_2 > A_1B_1$. Точно так же установим, что $A_3B_3 > A_2B_2$ и т. д., т. е. что расстояние точек прямой a от прямой b по мере удаления от точки O монотонно возрастает.

Для того чтобы убедиться, что это расстояние возрастает неограниченно, докажем, что прирост расстояния на каждом шаге становится все больше, так что, например, $A_3C_3 > A_2C_2$.

Ясно, что $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 + \sphericalangle 3 = 2d$ (рис. 157). С другой стороны, $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 7 + \sphericalangle 3 < 2d$, как сумма двух углов четырехугольника $B_2A_2A_3B_3$, где углы B_2 и B_3—прямые. Следовательно, $\sphericalangle 4 < \sphericalangle 2$. Далее: из рассмотрения треугольника $A_1C_2A_2$ можно заключить, что $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 < d$, так как угол $A_1C_2A_2$ — тупой; $\sphericalangle 7 < d$, как верхний угол четырехугольника Саккери. Значит, $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 < 2d$. С другой стороны, $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 2d$. Сравнивая два последних соотношения, замечаем, что $\sphericalangle 3 > \sphericalangle 1$.

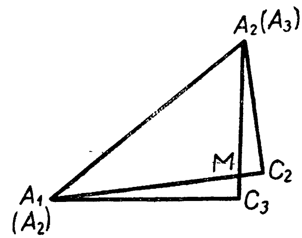


Рис. 158.

Наложим треугольник $A_1A_2C_2$ на треугольник $A_2A_3C_3$ так, чтобы отрезок A_1A_2 совпал с отрезком A_2A_3 (рис. 158). Согласно найденным соотношениям между углами, сторона A_1C_2 пойдет при этом внутри угла $A_2A_1C_3$, а сторона A_2C_2 — вне угла $A_1A_2C_3$.

Пусть M — точка пересечения лучей $\overline{A_2C_3}$ и $\overline{A_1C_2}$. Ясно, что $A_2C_3 > A_2M$. Рассмотрим треугольник A_2MC_2. Угол C_2 этого треугольника — тупой, так как он смежен с углом $A_1C_2B_2$ четырехугольника Саккери $A_1B_1B_2C_2$ (рис. 157). Следовательно, угол A_2MC_2 — острый. Поэтому $\sphericalangle A_2MC_2 < \sphericalangle A_2C_2M$ и, значит, $A_2M > A_2C_2$. Тем более $A_2C_3 > A_2C_2$ или $A_3C_3 > A_2C_2$, что и требовалось доказать.

Доказательство непрерывности изменения расстояния между двумя пересекающимися прямыми мы опустим. Его нетрудно получить, привлекая аксиому непрерывности.

Следствие. *Существует прямоугольный треугольник, имеющий данный катет h и данный противолежащий острый угол α.*

Пусть OM и ON (рис. 159) — стороны данного угла α, ε — эквидистанта с базой OM и высотой h. Эта эквидистанта пересечет прямую ON в некоторой точке A. Если $AB \perp OM$, то треугольник AOB — искомый.

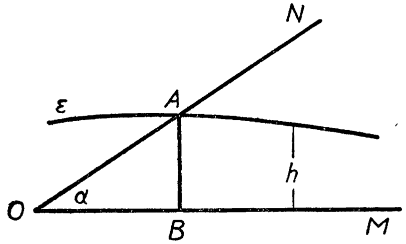


Рис. 159

Лемма. *К двум сверхпараллельным прямым всегда существует общий перпендикуляр и притом только один.*

Пусть $a \parallel\!\mid b$. Выберем точку B на прямой b и проведем $BA \perp a$ (рис. 160). Из двух углов между b и BA всегда можно выбрать прямой или острый. Если окажется, что $\measuredangle(b, BA) = 90°$, то BA будет общим перпендикуляром.

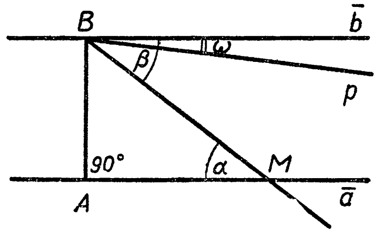


Рис. 160

Пусть $\measuredangle(b, BA)$ — острый. Прямая p, параллельная a, пойдет, однако, внутри этого угла. Обозначим $\measuredangle(p, b)$ через ω. Теперь для произвольной секущей BM $\measuredangle\beta = \measuredangle(b, BM) > \omega$. Но, согласно предыдущему следствию, угол $\alpha = \measuredangle AMB$, уменьшающийся при удалении точки M в сторону параллельности начиная от 90°, можно сделать как угодно малым. Учитывая непрерывность изменения углов α и β и то, что в начальном положении $\alpha > \beta$, заключаем, что в некотором положении секущей будет иметь место равенство $\alpha = \beta$. Следовательно, две сверхпараллельные прямые можно рассечь прямой, образующей с ними равные внутренние накрест лежащие углы.

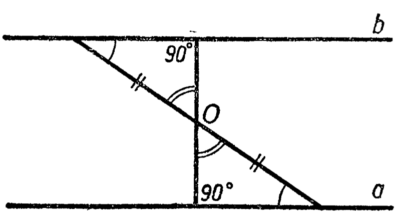


Рис. 161

Для построения общего перпендикуляра достаточно теперь из середины отрезка такой секущей опустить перпендикуляры на данные прямые. Легко показать (см. рис. 161), что эти перпендикуляры составят продолжение один другого и, таким образом, составят общий перпендикуляр к данным прямым.

Единственность общего перпендикуляра непосредственно вытекает из того, что в плоскости Лобачевского не существует прямоугольников.

Теорема 78. *Если a и b — две сверхпараллельные прямые и A — точка прямой a, то расстояние точки A от прямой b монотонно и неограниченно возрастает по мере удаления точки A от общего перпендикуляра.*

Пусть $b \parallel\!| a$, MN — общий перпендикуляр. Пусть B_1, B_2 (рис. 162) — две точки прямой b, причем $M\dot{B}_1B_2$, $B_1A_1 \perp a$, $B_2A_2 \perp a$.

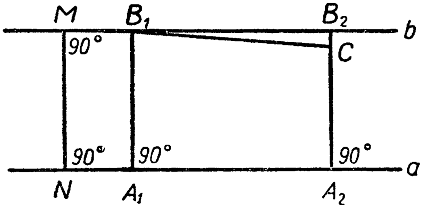


Рис. 162

Угол MB_1A_1 — острый, значит, угол $B_2B_1A_1$ — тупой. Если построить на отрезке A_1A_2 четырехугольник Саккери высотой A_1B_1, то его верхнее основание пойдет внутри угла $A_1B_1B_2$. Поэтому если $A_2C \equiv A_1B_1$, то $A_2\dot{C}B_2$. Следовательно, $A_2B_2 > A_1B_1$. Этим доказано, что исследуемое расстояние монотонно возрастает по мере удаления от точки M.

Чтобы установить неограниченность роста расстояния между сверхпараллельными прямыми, проведем через точку M прямую p параллельно прямой a. Пусть прямые AB и p пересекаются в точке K. Строим $BL \perp p$. Согласно теореме 77, по мере удаления точки B от точки M отрезок BL возрастает неограниченно. А так как $BK > BL$, то и отрезок BK также неограниченно возрастает. Тем более неограниченно растет интересующий нас отрезок BA (рис. 163).

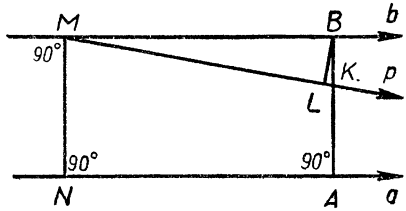


Рис. 163

Теорема 79. *Расстояние от точек прямой до параллельной прямой неограниченно растет в направлении, противоположном направлению параллельности, и неограниченно убывает в направлении их параллельности.*

Пусть $AB \| CD$ (рис. 164) в направлении от C к D, $AC \perp CD$. Угол $B'AC$ — тупой. Поэтому прямая AE, перпендикулярная к AC, пойдет внутри этого угла. Расстояние $MN = MK + KN$ состоит, согласно предыдущему, из двух неограниченно возрастающих слагаемых, значит, растет неограниченно и притом монотонно.

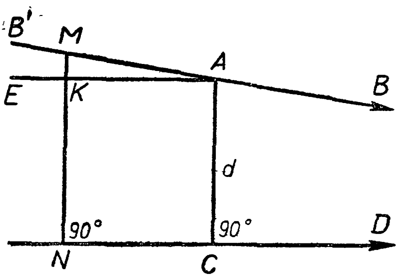


Рис. 164

Из этого уже следует, что интересующее нас расстояние MN монотонно убывает в направлении параллельности. Чтобы доказать, что убывание происходит неограниченно, т. е. до нуля (исключительно), покажем, что расстояние это достигает любого, как угодно малого, значения $h<AC$. Пусть a' (рис. 165)—произвольная прямая, Q'—точка на ней. Строим $Q'P' \perp a'$, $Q'P'=h$. Через точку P' проведем прямую p', параллельную прямой a'. Строим затем эквидистанту ε с осью a' и высотой $d=AC$. Ввиду неограниченного и непрерывного возрастания расстояния между прямыми a' и p' против направления их параллельности эквидистанта ε пересечет прямую p' в некоторой точке A'.

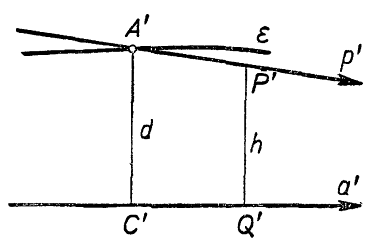


Рис. 165

Пусть $A'C' \perp a'$. Накладывая фигуру рисунка 164 на фигуру рисунка 165 так, чтобы отрезок AC совпал с отрезком $A'C'$, заметим, что прямая CD пойдет по прямой a', а прямая AB (ввиду единственности параллели) — по прямой p'. После этого справедливость высказанного утверждения очевидна.

§ 49. Некоторые сведения из стереометрии Лобачевского

Наше представление о геометрии Лобачевского было бы крайне неполным, если бы мы не познакомились, хотя бы в самых общих чертах, с особенностями его стереометрии.

Хотя в пространстве Лобачевского прямые, проектирующие точки некоторой прямой на некоторую плоскость, и не параллельны между собой, но оказывается, что все они лежат в одной плоскости. Поэтому проекции всех точек прямой на некоторую плоскость лежат на одной прямой, называемой, как и обычно, проекцией данной прямой на данную плоскость.

Прямую называют параллельной плоскости, если она параллельна своей проекции на эту плоскость.

Так как угол параллельности острый, то все возможные прямые, проходящие через данную точку O параллельно данной плоскости α, не располагаются уже в одной плоскости, как это имеет место в евклидовом пространстве, а образуют поверхность некоторого конуса, называемого **к о н у с о м п а-**

раллелей. Образующие конуса параллелей, таким образом, параллельны данной плоскости.

Прямые, проходящие внутри конуса параллелей, пересекают эту плоскость. Остальные прямые, проходящие через вершину конуса параллелей, не имеют общих точек с данной плоскостью, но и не параллельны ей. О таких прямых говорят, что они расходятся с данной плоскостью или сверхпараллельны ей (рис. 166).

Плоскости, касательные к поверхности конуса параллелей, называют параллельными к данной плоскости.

Плоскости, пересекающие поверхность конуса параллелей по двум образующим, пересекают данную плоскость.

Остальные плоскости, проходящие через вершину конуса параллелей, не имеют общих точек с данной плоскостью, но и не параллельны ей; их называют расходящимися с данной плоскостью или сверхпараллельными ей.

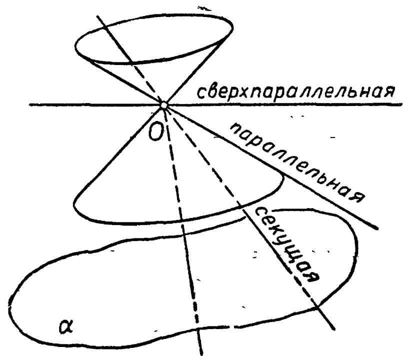


Рис. 166

Ясно, что все абсолютные предложения стереометрии, знакомые нам по школьному курсу геометрии (например, так называемые теоремы о двух и трех перпендикулярах, теоремы о сравнительной величине наклонных, свойства перпендикулярных плоскостей и др.), сохраняют силу в пространстве Лобачевского. Но особенно интересно отметить, что остаются в силе также многие предложения, имеющие место в евклидовой геометрии и связанные с понятием параллельности.

1) Две прямые, параллельные третьей в одном направлении, параллельны между собой (если и не лежат обе в одной плоскости с третьей прямой).

2) Параллельность плоскостей взаимна.

3) Если данная прямая параллельна прямой, лежащей в некоторой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

4) Если две плоскости, пересекаясь с третьей плоскостью по параллельным прямым, образуют с этой третьей плоскостью равные внутренние накрест лежащие углы, то данные две плоскости параллельны.

Этот перечень можно было бы еще продолжить.

Такое проявление евклидовых свойств элементов пространства в стереометрии Лобачевского приводит к некоторым замечательным выводам, о которых будет сказано ниже.

Конечно, все это не означает, что пространство Лобачевского не имеет своих особенностей сравнительно с евклидовым пространством. В частности, в элементарной стереометрии Лобачевского естественным образом возникают и играют большую роль такие поверхности, которых нет в евклидовом пространстве.

Геометрическое место точек, расположенных по одну сторону от некоторой данной плоскости на данном от нее расстоянии, есть уже не плоскость, но кривая поверхность, называемая **эквидистантной** поверхностью или **гиперсферой**. Она рассекается каждой плоскостью, перпендикулярной к данной, по эквидистантной линии. Эту поверхность можно рассматривать также как поверхность вращения эквидистантной линии около какой-либо ее высоты или как геометрическое место точек, соответственных (см. § 48) данной точке на лучах гиперболического пучка прямых в пространстве (т. е. множества прямых, перпендикулярных к данной плоскости).

Интересно отметить, что точки и эквидистанты на гиперсфере образуют двумерную геометрию Лобачевского: каждые две точки на гиперсфере можно соединить единственной эквидистантой; эквидистанта — кратчайшая траектория между двумя точками на гиперсфере; если A — точка гиперсферы и a — не проходящая через нее эквидистанта, то через точку A проходит на гиперсфере бесчисленное множество эквидистантных линий, не имеющих общих точек с эквидистантой a.

Особый интерес представляет другая основная поверхность стереометрии Лобачевского — так называемая предельная поверхность, или поверхность орисферы. Эту поверхность можно определить по-разному: 1) как поверхность вращения орицикла около его оси; 2) как предельное положение сферы при неограниченном удалении ее центра вдоль радиуса; 3) как геометрическое место точек, соответственных данной на лучах параболического пучка. Эта поверхность особенно интересна тем, что на ней, как оказывается, осуществляется евклидова планиметрия. Именно оказывается, что любые две точки орисферы можно соединить единственным орициклом, причем через точку орисферы можно провести единственный орицикл, не имеющий с данным орициклом общих точек. В силу этого сумма углов «орициклического треугольника» оказывается равной 180°, на поверхности орисферы существуют подобные треугольники, вообще осуществляются все предложения евклидовой планиметрии, если под словом «точка» понимать точку орисферы, а под словом «прямая» — орицикл, проведенный на орисфере. Этим обстоятельством Н. И. Лобачевский воспользовался в свое время для развития тригонометрии в условиях отсутствия подобия.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ И СЕМИНАРСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Проверить, что теория измерения отрезков, изложенная в § 26, сохраняет силу также и в геометрии Лобачевского.

2. Выяснить, почему теория площади треугольника (§ 27) не может быть перенесена в том же виде в геометрию Лобачевского.

3. Доказать непрерывность изменения расстояния между двумя пересекающимися прямыми (теорема 77).

4. Реферат «Дефект и площадь треугольника в геометрии Лобачевского» ([19], § 27).

5. Реферат «Площадь круга в геометрии Лобачевского» ([17], гл. VII, § 3).

6. Реферат «Вывод формулы Лобачевского с помощью интерпретации Бельтрами — Клейна» ([19], § 44).

7. Реферат «Интерпретация геометрии Лобачевского по Пуанкаре» ([17], гл. 3, § 4).

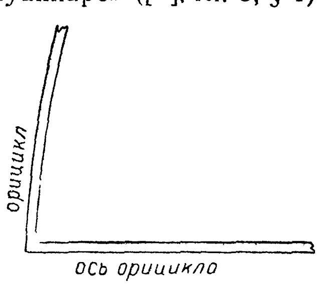


Рис. 167

8. Назовем «орициркулем» инструмент, составленный из дуги орицикла и оси этого орицикла (рис. 167). Как, пользуясь орициркулем, провести через внешнюю точку прямую, параллельную данной?

9. Назовем «гиперциркулем» прибор, изображенный на рисунке 168. Он состоит из двух взаимно перпендикулярных пря-

мых, на одной из которых можно в любой точке расположить пишущее острие.

Пользуясь гиперциркулем, решить следующие задачи на построение в плоскости Лобачевского:

Рис 168

1) располагая острым углом прямоугольного треугольника и зная противолежащий катет, построить этот треугольник;

2) построить треугольник, зная один из его углов и высоты, перпендикулярные к сторонам этого угла.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О РАЗВИТИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОСЛЕ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 50. Понятие об эллиптической геометрии Римана

Как известно, различие геометрий Евклида и Лобачевского проистекает из ответа на вопрос о числе прямых, которые можно провести в плоскости через внешнюю к данной прямой точку — так, чтобы они не пересекали данную прямую. По Евклиду, существует единственная такая прямая, по Лобачевскому,— по меньшей мере две (а следовательно, и произвольно много), как это изображено на рисунке 169.

Б. Риман принял в качестве постулата третью логическую возможность: если в некоторой плоскости заданы прямая a и не принадлежащая ей точка A, то каждая прямая, проведенная в данной плоскости через точку A, пересекает прямую a.

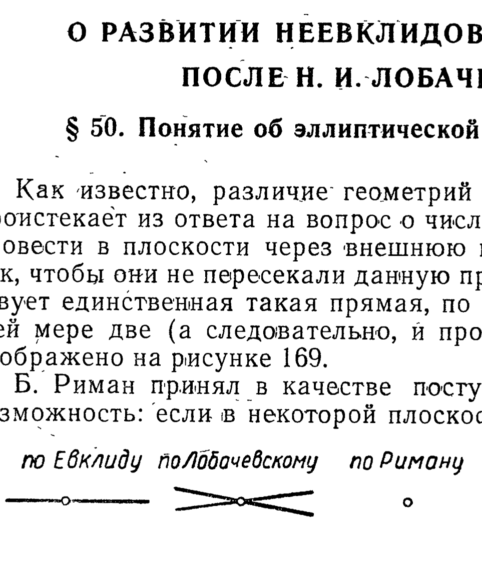


Рис. 169.

В геометрии, развитой Б. Риманом на основе этого постулата и известной под названием эллиптической, любые две прямые на плоскости пересекаются, параллельных прямых не существует.

С таким положением мы встречались, изучая проективную плоскость, которая, как известно, возникает из евклидовой плоскости после присоединения к ней «несобственной» прямой (см. [30], гл. 2, § 16).

Постулат Римана допускает и другие реализации. Укажем на две модели, наглядно реализующие этот постулат в евклидовом пространстве.

1. Пусть S — некоторая точка евклидова пространства. Назовем R-точкой любую евклидову прямую, проходящую через точку S. Назовем далее R-прямой любую евклидову плос-

кость, проходящую через точку S (рис. 170). Отношение «принадлежности» будем понимать в смысле данного евклидова пространства. Тогда каждые две R-прямые (α и β на рисунке 170) будут иметь общую R-точку (SM на рис. 170) в силу аксиомы I. 9, § 10, так что евклидова связка S прямых и плоскостей служит прототипом плоскости Римана.

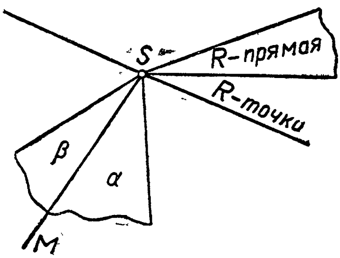


Рис. 170.

2. Рассмотрим некоторую полусферу Ω евклидова пространства, границей которой служит окружность ω (рис. 171). Под словом «R-точка» будем понимать любую точку данной полусферы Ω, причем две диаметрально противоположные точки границы (A и A' на рисунке 171) будем считать за одну R-точку. Под словом «R-прямая» будем понимать дугу большого круга на полусфере Ω. Принадлежность будем представлять в смысле данном евклидовой геометрии. Ясно, что при этом каждые две R-прямые имеют одну общую R-точку.

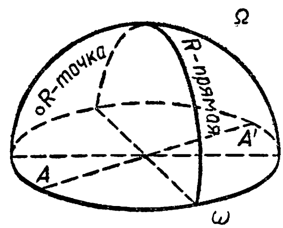


Рис. 171.

Риман составил полную и непротиворечивую аксиоматику эллиптической геометрии. Как мы знаем, существование параллельных прямых является доказуемым фактом «абсолютной» геометрии. Поэтому построение эллиптической геометрии связано, помимо пересмотра аксиомы параллельности, с изменением также и некоторых аксиом абсолютной геометрии, в частности аксиом порядка: в эллиптической геометрии, как и в проективной геометрии, отношения порядка точек на прямой описываются в терминах «разделенности», а не с помощью отношения «между».

Эллиптическая геометрия обладает своими качественными особенностями сравнительно с геометриями Евклида и Лобачевского, которые называются иногда соответственно параболической и гиперболической. Отметим некоторые своеобразные предложения этой геометрии. Не располагая полным списком аксиом, мы не можем, конечно, привести строгие их доказательства и ограничимся некоторыми пояснениями.

1. *Сумма углов каждого треугольника больше* 180°.

Для примера достаточно представить себе треугольник, образуемый некоторой прямой и перпендикулярами к ней в двух различных ее точках (рис. 172). Ввиду отсутствия параллельных прямых эти перпендикуляры непременно пересекутся и образуют с данной прямой треугольник, два угла которого прямые. На евклидовой сфере такой треугольник действительно образуется «экватором» и двумя «меридианами».

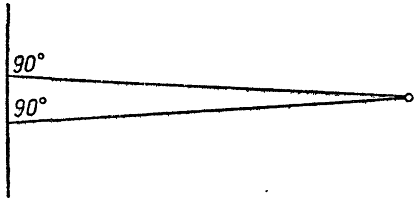


Рис. 172.

2. *Прямая эллиптической плоскости замкнута.*

Смысл и происхождение этого факта можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть a (рис. 173)—произвольная прямая, A—не принадлежащая ей точка Проектируя точки прямой a из центра A, можно установить взаимно однозначное соответствие между точками M прямой a и лучами m плоского пучка A: каждую точку прямой a можно соединить с точкой A прямой m и, наоборот, каждый луч пучка A пересечет прямую a в некоторой точке M. При вращении луча m около центра A соответствующая ему точка M будет двигаться по прямой a. Когда луч m опишет при этом полный угол, точка M пройдет всю прямую, причем бесконечно малый поворот луча m всегда будет вызывать бесконечно малое перемещение точки M.

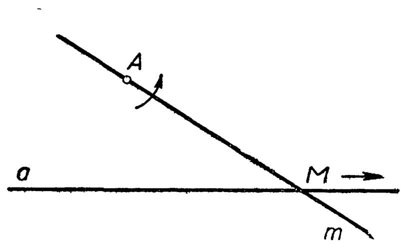


Рис. 173.

3. *Прямая эллиптической плоскости конечна.*

Пусть AA_1 (рис. 174) — некоторый отрезок прямой a эллиптической плоскости. Проведем в точках A и A_1 перпендикуляры AA' и $A_1A'_1$ к прямой a, и пусть O — точка их пересечения, $\measuredangle AOA_1=\varphi$. Если $A_1A_2 \equiv AA_1$, то $\triangle A_1OA_2 \equiv \triangle AOA_1$ по двум сторонам и углу, так что $\measuredangle A_1OA_2=\varphi$, $\measuredangle AOA_2=2\varphi$. Повторяя такое построение, мы получим треугольник AOA_n, в котором $\measuredangle AOA_n=n\varphi$.

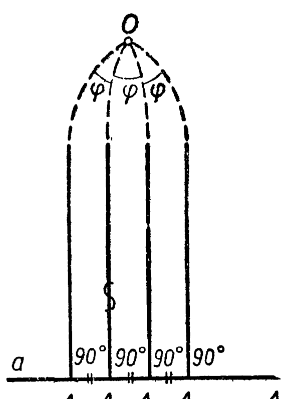


Рис. 174.

При $n \geqslant \frac{2\pi}{\varphi}$ $\angle AOA_n \geqslant 2\pi$, т. е. луч OA_n повернут относительно луча OA по крайней мере на полный угол, так что отрезок AA_1 при n-кратном повторении исчерпывает всю прямую.

§ 51. О других абстрактных геометриях

После того как геометрия на протяжении тысячелетий оставалась в своих основах неизменной и представлялась, казалось бы, в единственно возможной форме, открытие Лобачевского послужило началом нового периода, когда геометрические теории начали бурно развиваться в различных направлениях.

Одним из важнейших результатов в области новой геометрии было открытие Риманом эллиптической геометрии. Риману принадлежат также идеи значительно более крупного плана, изложенные им в его знаменитой лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», прочитанной в Геттингене в 1854 году, и объединяемые обычно под названием «риманова геометрия» или «геометрия Римана в широком смысле». В основе этой геометрической концепции лежат некоторые идеи дифференциально-геометрического характера.

Известно, что на произвольной поверхности евклидова пространства квадрат дифференциала дуги выражается формулой:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где u, v — криволинейные координаты точки, E, F и G — определенные функции этих координат. Зная выражение «линейного элемента» ds, можно определить на поверхности: длину дуги, угол, площадь. Эта же идея в соответствующей форме осуществляется и в пространстве. Риман, обобщая эти соображения, достигает огромной общности толкования геометрии.

По мысли Римана, геометрию можно рассматривать как множество элементов (точек), характеризуемое координатами и формулой линейного элемента. Такое понимание геометрии оставляет большой простор как для выбора «размерности» пространства (числа координат), так и для выбора коэффициентов квадратичной формы ds^2. При этом открываются широкие возможности для построения различных геометрических систем, ограничиваемые только соображениями целесообразности изучения той или иной абстрактной геометрической схемы.

Трехмерная риманова геометрия в общем виде характеризуется формулой:

$$\begin{aligned} ds^2 = E_{11} dx_1^2 + E_{22} dx_2^2 + E_{33} dx_3^2 + 2E_{12} dx_1 dx_2 + \\ + 2E_{13} dx_1 dx_3 + 2E_{23} dx_2 dx_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

где E_{ij} — произвольные, вообще говоря, функции координат x_1, x_2, x_3, принимающие тот или иной определенный вид в зависимости от постановки задачи изучения того или иного объекта.

Если, например, представить себе «точку» как евклидову окружность на плоскости и рассматривать «координаты» x_1, x_2, x_3 соответственно как прямоугольные координаты центра и радиус данной окружности, а ds — как угол между двумя бесконечно близкими окружностями, то формула (*) получит вполне конкретный вид и будет определять риманову геометрию трехмерного пространства окружностей, лежащих в евклидовой плоскости.

Та или иная разновидность римановой геометрии может оказаться, в частности, как евклидовой геометрией, так и геометрией Лобачевского. Если положить, например, что

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{1 + \frac{k}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}, \qquad (**)$$

то при $k=0$ возникает, как нетрудно заметить, евклидова геометрия, а при $k<0$, как показал еще Бельтрами*, эта риманова геометрия совпадает со стереометрией Лобачевского. Величину k из формулы (**) называют **кривизной пространства**. Геометрия Лобачевского оказывается римановой геометрией пространства постоянной отрицательной кривизны.

За столетие, прошедшее со времени выступления Римана, идеи Лобачевского и Римана получили значительное дальнейшее развитие, вызванное новыми запросами естествознания и появлением новых представлений о геометрических свойствах физического пространства.

Прямым продолжением идей Римана являются дифференциально-геометрические исследования Финслера, который установил возможность строить пространства, где линейный элемент определяется не квадратичной формой, а более общей функцией дифференциалов координат.

Другое направление развития и обобщения идей неевклидовой геометрии основано на теоретико-групповых принципах геометрии, обоснованных Ф. Клейном, и развито в работах Вейля, Картана и других видных геометров. С этими идеями студенты пединститутов знакомятся в курсе проективной геометрии. По мысли Клейна, каждая геометрия определяется некоторой группой преобразований («движений»), т. е. каждое пространство характеризуется некоторым определенным способом отображения его точек, так называемым **законом связности**. Изменяя и обобщая закон связности, Картан и его последователи построили систему все более общих геометрических схем, причем Картану удалось доказать, что возможность такого рода обобщений неограниченна: для всякой геометрии,

* «Основания теории пространств с постоянной кривизной», Казань, 1893.

определяемой соответственной группой движений, можно построить новую геометрию, включающую данную как частный случай.

В общей системе геометрий, сложившейся в XX веке, риманова геометрия занимает столь же скромное место, как евклидова геометрия в римановой.

Большой вклад в развитие неевклидовой геометрии внесли советские ученые: П. Л. Широков, П. К. Рашевский, В. Ф. Каган, А. П. Норден, Б. А. Розенфельд и другие.

§ 52. Математическое и философское значение исследований Лобачевского

Открытие Лобачевским неевклидовой геометрии представляет собой блестящее завершение многовековой истории развития классической геометрии. Гениальное решение Лобачевским проблемы пятого постулата Евклида — научный подвиг, равных которому немного во всей истории мировой науки. Это открытие было по существу первым в истории математики доказательством невозможности некоторого вывода.

Еще более важно то влияние, которое оказало открытие Лобачевского на дальнейшее развитие геометрии. Была преодолена традиция неизменности и единственности, которая до этого веками и тысячелетиями царила в геометрии. Открылись поистине безграничные возможности для расширения и углубления геометрической теории.

Геометрия Лобачевского (понимаемая в широком смысле) включила в себя евклидову геометрию как специальный (предельный) случай (см. § 45), что послужило для Лобачевского основанием назвать его систему пангеометрией, т. е. всеобщей геометрией. Дальнейшие исследователи (Риман, Клейн, Картан, Финслер и другие), опираясь на «могучие плечи» Лобачевского, получили возможность строить все более широкие геометрические системы.

Появление неевклидовой геометрии Лобачевского вызвало к жизни исследование самого фундамента геометрической науки и породило новую математическую науку — основания геометрии.

Нельзя не отметить, что еще сам Лобачевский указал на возможность непосредственного применения его теории к решению некоторых математических задач. В частности, он применял свою геометрию к вычислению некоторых дуг, к вычислению поверхностей и объемов некоторых тел. Производя затем эти вычисления интегральным методом, Лобачевский получил более 200 новых формул интегрального исчисления, из которых многие с большим трудом поддаются даже проверке непосредственно аналитически, не говоря уже об их выводе классическими методами.

Начиная с работ А. Пуанкаре (80-е гг. XIX в.), геометрия Лобачевского с успехом применяется для решения некоторых вопросов теории функций комплексного переменного.

Различные виды неевклидовых геометрий нашли себе применение в теории инвариантов дифференциальных квадратичных форм, в теории непрерывных групп, в вариационном исчислении и других вопросах современной математики.

Нельзя, наконец, не отметить, что во второй половине XIX века в работах Миндинга, Бельтрами и других был описан широкий класс поверхностей евклидова пространства, на которых точки и геодезические линии ведут себя (с известными ограничениями), как точки и прямые плоскости Лобачевского.

Мы уже отмечали, что открытие Лобачевского отразилось также и на развитии смежной науки — физики. Это закономерно. Изучение математического наследия Лобачевского показывает, что он занимался теорией параллельных не ради самих аксиоматических вопросов геометрии, а с целью создания геометрической теории, точнее и глубже отражающей свойства протяженности пространства. Лобачевский неоднократно высказывал отчетливо материалистические воззрения на математику, а преодоление им традиционного взгляда на евклидову геометрию как на единственно возможную было крупным шагом вперед на пути перехода математического мышления от метафизических форм к диалектическим.

И, естественно, появление неевклидовой геометрии сыграло свою положительную роль и в истории философии. Известный немецкий философ Эммануил Кант (1724—1804), философия которого имела в свое время довольно широкое распространение, учил, что пространство есть свойство сознания, неизменное, предшествующее всякому опыту и независимое от опыта. Эта точка зрения восходит еще к Платону. Подтверждением этой точки зрения служил в особенности давно сложившийся взгляд на основы геометрии как на извечно свойственные нашему сознанию, а на евклидовы принципы в геометрии — как на единственно мыслимые формы наших пространственных представлений. Этой идеалистической, априористской точке зрения был нанесен решительный удар, когда оказалось, что свойства пространства с равным правом можно мыслить иначе, чем это делалось в течение многих веков предшествующей истории математики. Таким образом, идеи Лобачевского послужили средством преодоления идеалистических представлений в области математики и физики и укрепления материалистических взглядов в области философии.

Н. И. Лобачевский был одним из величайших революционеров в области науки. Его сравнивают иногда с Коперником, «остановившим Солнце, сдвинувшим Землю» (как написано на памятнике Копернику). Один из крупнейших советских геометров В. Ф. Каган заметил однажды по этому поводу, что «легче было, быть может, сдвинуть Землю, нежели уменьшить сумму углов в треугольнике».

Несмотря на непонимание и противодействие со стороны современников, Н. И. Лобачевский страстно и самоотверженно боролся за утверждение в математике новых, более прогрессивных идей — основ науки будущего.

§ 53. Неевклидова геометрия и физическое пространство

В связи с существованием разнообразных абстрактных геометрических схем естественно возникает вопрос: каковы же свойства протяженности реального физического пространства? Какая геометрия является реальной, есть ли смысл изучать, помимо нее, другие логически мыслимые геометрические схемы?

Известно, как интересовало еще Лобачевского соответствие открытой им геометрии опыту. Зная, что отступления от общепринятой евклидовой геометрии могут быть обнаружены лишь при измерениях значительных по величине расстояний, Лобачевский обращался к астрономическим наблюдениям. Ему не удалось, однако, обнаружить какие-либо ощутимые отступления опытных результатов от евклидовой теории.

Впоследствии были предприняты необходимые вычисления с целью обнаружить, при каких допущениях данные непосредственного опыта можно согласовать с теорией Лобачевского. Сущность их состоит в следующем.

Основные формулы геометрии Лобачевского содержат некоторую постоянную $R=\frac{1}{k}$, называемую **радиусом кривизны пространства**. Например, для угла параллельности выводится, что

$$\cos\Pi(h)=\operatorname{th}\frac{h}{R}.$$

Чем больше R, тем ближе выводы геометрии Лобачевского согласуются с евклидовыми: при $R\to\infty\,\Pi(h)\to 90^\circ$ независимо от h. Подсчитаем, при каких значениях R данные астрономических измерений не противоречат формулам Лобачевского, т. е. вычисления по формулам гиперболической геометрии согласуются с эмпирическими астрономическими данными.

Пусть $d=AB$ (рис. 175) — диаметр земной орбиты, S — звезда, наблюдаемая в таком положении, что $\measuredangle SAB=90^\circ$, $BP\perp AB$, $BP'\parallel AS$ (в смысле Лобачевского). Угол $PBS=\varphi$ называют, как известно, параллаксом звезды S. Ясно, что

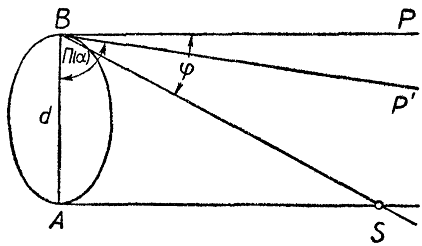


Рис. 175.

$\varphi > \frac{\pi}{2} - \Pi(d)$. По приведенной выше формуле Лобачевского:

$$\cos \Pi(d) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \Pi(d)\right] = \operatorname{th}\frac{d}{R}.$$

Ввиду неуловимой малости аргумента $\frac{\pi}{2} - \Pi(d)$ можно полагать, что $\frac{\pi}{2} - \Pi(d) \approx \frac{d}{R}$, так что, по предыдущему, $\varphi > \frac{d}{R}$, $R > \frac{d}{\varphi}$. Последнее неравенство связывает константу R с величинами, доступными для опытного определения. И полагая, например, в соответствии с астрономическими данными, $\varphi < 0{,}1'' \approx 24 \cdot 10^{-8}$ радиан, найдем, что $R > 41 \cdot 10^5 d$. А так как $d = 158 \cdot 10^{-7}$ световых лет, то из последнего неравенства следует, что $R > 60$ световых лет. При таких значениях R значения геометрических величин, вычисленные по формулам Лобачевского и по обычным евклидовым формулам, будут практически не различимы. Можно показать, например, что при таком допущении дефект равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны диаметру земной орбиты, не превышает $0{,}0000003''$.

Исследования подобного рода подготовили почву для отказа от взгляда на неевклидову геометрию как на только логическую схему, указали на возможность ее «примирения» с опытом. Дальнейшее развитие геометрии и физики вполне оправдало такую точку зрения.

Неевклидовы геометрии оказались особенно важными для развития новых физических идей, связанных с возникновением теории относительности, основы которой были заложены в начале нашего века А. Эйнштейном. Классическая механика удовлетворялась евклидовыми свойствами пространства, так как, согласно учению Ньютона, пространство всегда одинаково, независимо от физических свойств материальных объектов. Развитие новой механики потребовало более общего и более гибкого теоретического аппарата, нежели геометрия Евклида. Та часть теории относительности, которая изучает чисто кинематические явления, называется **специальной теорией относительности**. Эта теория получила свое математическое выражение в форме четырехмерного «пространства-времени», описанного Г. Минковским в 1909 году, где три координаты точки определяют ее положение в пространстве, а четвертая — во времени. Пространство-время представляет специальный вид риманова пространства и характеризуется линейным элементом:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 \cdot dt^2,$$

где t — время, c — скорость света.

Наиболее общие формы римановой геометрии позволили Эйнштейну и его последователям развить более широкую теорию — общую теорию относительности, где кинематические явления рассматриваются в определенных гравитационных условиях и в зависимости от этих условий. Общая теория относительности приписывает пространству переменную кривизну, которая возрастает в тех областях пространства, где больше плотность материи.

Нельзя не отметить, что Лобачевский задолго предвосхитил основную идею современной теории относительности — о взаимосвязи пространства, времени и материи, о связи геометрических свойств пространства с физическими свойствами материи. «...пространство само собой отдельно (от движущейся материи) для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие — другой особой геометрии»,— писал он в защиту реальности своих открытий.

В последние десятилетия идеи неевклидовой геометрии применяются с успехом не только в физике космических пространств, но также и в атомной физике.

Учителю часто приходится отвечать на категорически поставленные учащимися вопросы: «Какая же геометрия на самом деле имеет место?», «Сколько же параллелей к прямой можно провести через данную точку?» Мы считаем поэтому целесообразным привести здесь высказывания по этому вопросу некоторых крупнейших наших ученых.

Академик П. С. Александров [1]: «Основные геометрические понятия — точки, прямые и т. п.— конечно, взяты из опыта, но не непосредственно, а ... путем абстракции. Поэтому бессмысленно спрашивать, можно ли «на самом деле» через данную точку к данной прямой провести одну или две параллельные, так как «на самом деле», т. е. в области непосредственных опытных данных, не обработанных математической абстракцией, не существует точек и прямых в ... идеализированном смысле ... существуют лишь предметы, более или менее напоминающие точки и прямые ... Геометрия «мировых областей» средней величины — евклидова геометрия в том смысле, что евклидова геометрия с вполне достаточной точностью описывает то, что мы в этих областях действительно наблюдаем. Если же выйти за их пределы, то, как обнаруживается в современной физике, могут понадобиться системы гораздо более сложные, чем даже и неевклидова геометрия в том смысле, как ее понимал Лобачевский».

Академик А. Н. Колмогоров [15]: «В противоположность идеальным математическим пространствам свойства реального физического пространства известны нам только приближенно. В соответствии с этим не имеет смысла вопрос о том, какая из различных идеальных геометрий, рассматриваемых чистой математикой, окончательно и с полной точностью отражает свойства реального пространства.

Осмыслен же только вопрос о том, какие из идеальных математических геометрий удовлетворительно отражают наши познания об устройстве реального пространства, имеющиеся в данный момент. Ответ на этот последний вопрос может меняться со временем и никогда не может стать вполне однозначным».

Вопрос об отношении тех или иных абстрактных геометрий к опыту отчетливо освещен также в Большой Советской Энциклопедии. Там (изд. 2, т. I, стр. 615), между прочим, говорится: «...с чисто логической точки зрения мыслима не одна единственная геометрия... Выбор между ними может быть сделан только на основе опыта; в силу же приближенности последнего этот выбор ни на каком этапе увеличения наших знаний не может привести к окончательной, раз навсегда данной, единственной, абсолютно истинной системе геометрии. Таков окончательный взгляд на отношения, существующие между различными системами геометрии, разрабатываемыми в чистой математике, и опытным изучением реального физического пространства, который был введен в науку Лобачевским и получил свое полное философское обоснование в философии диалектического материализма».

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

Геометрия, открытая Н. И. Лобачевским в 1826 году, явилась первой в мире неевклидовой геометрией.

Геометрия Лобачевского основана на аксиомах абсолютной геометрии и на постулате Лобачевского: если в плоскости задана прямая и не принадлежащая ей точка, то через данную точку можно провести в данной плоскости по крайней мере две различные прямые, не имеющие общих точек с данной прямой.

С логической стороны геометрия Лобачевского столь же безупречна, как и геометрия Евклида.

В качественном отношении многие предложения геометрии Лобачевского резко отличаются от соответствующих предложений евклидовой геометрии: сумма углов треугольника меньше 180°, сумма углов треугольника не постоянна, подобных треугольников не существует, через три неколлинеарные точки не всегда можно провести окружность, геометрическое место точек полуплоскости, равноудаленных от данной прямой,— не прямая, а кривая — эквидистанта и т. п. Особенно замечателен факт существования в пространстве Лобачевского «абсолютной», или «естественной», единицы длины.

С другой стороны, общими для геометрии Лобачевского и для геометрии Евклида являются все предложения абсолютной геометрии, а также и некоторые свойства параллельных.

С количественной стороны геометрии Евклида и Лобачевского практически не различимы: отклонение суммы углов треугольника от 180° находится пока за пределами точности самых тщательных измерений.

Геометрию Евклида можно рассматривать как специальный, предельный случай геометрии Лобачевского.

После открытия Лобачевского идеи неевклидовой геометрии получают все нарастающее развитие. В 1854 году появилась «эллиптическая» геометрия Римана, который явился также творцом широкой системы «римановых геометрий», конструируемых на дифференциально-геометрической основе. Работы Вейля, Картана, Финслера и других составили основу многочисленных исследований последних десятилетий в направлении дальнейшего обобщения представлений о неевклидовых геометриях.

Еще Лобачевскому удалось указать на возможность применения его «воображаемой» геометрии к вычислению некоторых интегралов, к вычислению дуг, поверхностей и объемов. Им же были предприняты астрономические наблюдения и вычисления, которые показали, что при определенных допущениях его теория согласуется с данными непосредственного опыта.

Неевклидовы геометрии оказались особенно важными для развития теории относительности.

Современные опытные данные показывают, что как геометрия Евклида, так и геометрия Лобачевского с высокой точностью приближения описывают свойства протяженности физического пространства в широких границах. Конечно, за евклидовой теорией остается преимущество большей простоты в применении к основному кругу вопросов.

Геометрия Лобачевского используется в некоторых вопросах современной математики.

Открытие неевклидовой геометрии вызвало к жизни науку об основаниях геометрии.

Сила теории Лобачевского в том, что он строил ее не ради абстрактных аксиоматических упражнений, а с целью более глубокого проникновения в изучение свойств пространства. Открытие Лобачевского сыграло в свое время известную роль в преодолении устойчивых идеалистических предубеждений в философии.

Открытие неевклидовой геометрии надолго определило пути развития не только геометрии, но и математики в целом и повлияло на эволюцию взглядов в области других наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С., Николай Иванович Лобачевский, М.—Л., 1943.
2. Бескин Н. М., Методика геометрии, Учпедгиз, 1947.
3. Богомолов С. А., Введение в неевклидову геометрию Римана, ОНТИ, ГТТИ, 1934.
4. Богомолов С. А., Геометрия, Учпедгиз, 1949.
5. Болтянский В. Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры. Популярные лекции по математике, вып. 22, Гостехиздат, 1956.
6. Гильберт Д., Основания геометрии, перев. с 7-го нем. изд. под ред. П. К. Рашевского, Гостехиздат, 1948.
7. Дахия С. А., Теорема Пифагора как эквивалент постулата Евклида, «Математика в школе», 1951, № 1.
8. Дубнов Я. С., К истории постулата о параллельности, «Математика в школе», 1950, № 5.
9. Ефимов Н. В., Высшая геометрия, изд. 3, перераб., Гостехиздат, 1953.
10. Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия (общедоступные очерки), Гостехиздат, 1955.
11. Каган В. Ф., Н. И. Лобачевский, изд. АН СССР, М.—Л., 1948.
12. Каган В. Ф., О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933.
13. Каган В. Ф., Основания геометрии, Гостехиздат, ч. I (1949), ч. II (1956).
14. Киселев А. П., Геометрия, ч. I, Учпедгиз, 1952.
15. Колмогоров А. Н., Лобачевский и математическое мышление XIX века. В кн.: «Николай Иванович Лобачевский», М.—Л., 1943.
16. Кольман Э., Великий русский мыслитель Н. И. Лобачевский, Госполитиздат, 1956.
17. Костин В. И., Основания геометрии, Учпедгиз, 1946.
18. Кутузов Б. В., Геометрия, Учпедгиз, 1950.
19. Кутузов Б. В., Геометрия Лобачевского и элементы оснований геометрии, Учпедгиз, 1950.
20. Лебег А., Об измерении величин, Учпедгиз, 1938.
21. Лопшиц А. М., Вычисление площадей ориентированных фигур, Гостехиздат, 1956.
22. «Начала» Евклида, перев. с греч. и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, Гостехиздат, кн. I—VI (1948), кн. VII—X (1949).
23. Норден А. П., Элементарное введение в геометрию Лобачевского, Гостехиздат, 1953.
24. Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, Гостехиздат, ч. I. Геометрия на плоскости (1948), ч. II. Геометрия в пространстве (1949).

25 Погорелов А. В., Лекции по основаниям геометрии, изд. ХГУ, 1959.

26. Рашевский П. К., Геометрия и ее аксиоматика, «Математическое просвещение», вып. 5, Физматгиз, 1960.

27. Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, изд. 4, Гостехиздат, 1956.

28. Смогоржевский А. С., О геометрии Лобачевского. Популярные лекции по математике, вып. 23, Гостехиздат, 1957.

29. Четвертухин Н. Ф. ,О некоторых методологических вопросах геометрии, «Математика в школе», 1955, № 2.

30. Четверухин Н. Ф., Проективная геометрия, Учпедгиз, 1953.

31. Энгельс Ф., Анти-Дюринг.

32. Яновская С. Я., Передовые идеи Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике, изд. АН СССР, М.—Л., 1950.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

ГЛАВА IV

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О РАЗВИТИИ НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОСЛЕ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Борис Иванович Аргунов

Учебное пособие по курсу основания геометрии

Редакторы *А. З. Рывкин* и *Г. С. Уманский*
Художественный редактор *П. В. Любарский*
Технический редактор *В. Л. Коваленко*
Корректор *Г. С. Денисенко*

* * *

Сдано в набор 13/X 1960 г. Подписано к печати 14/IV 1961 г. А04099.
Бумага 60×92[1]/16. Печ. л. 12. Уч.-изд. л. 11,75. Тираж 25 000 экз.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ивановская областная типография, г. Иваново, Типографская, 6.
Заказ № 3739.
Цена 35 коп.