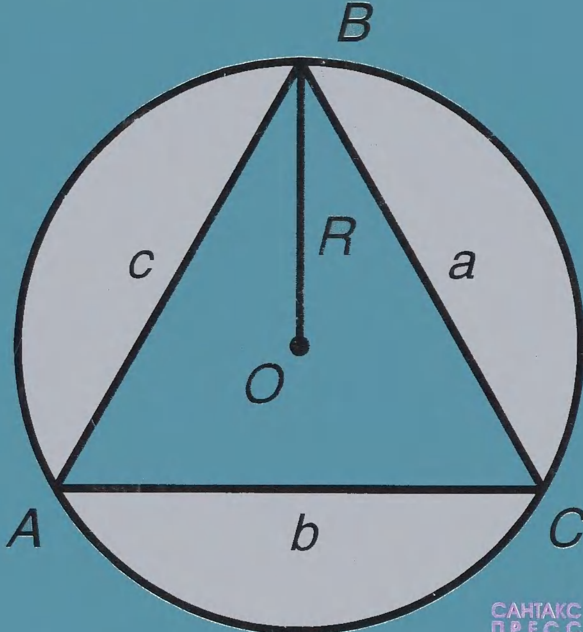
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Атанасян Л. С.
Денисова Н. С.
Силаев Е. В.

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ I



САНТАКС ПРЕСС

ПЛАНИМЕТРИЯ

Атанасян Л. С.
Денисова Н. С.
Силаев Е. В.

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ I

Учебное пособие для студентов педагогических университетов и институтов и для учащихся классов с углубленным изучением математики

Москва
«Сантакс-Пресс»
1997

Предлагаемое учебное пособие является первой частью курса элементарной геометрии авторов Л. С. Атанасяна, Н. С. Денисовой, Е. В. Силаева. Оно предназначено для студентов математических и физико-математических факультетов педагогических университетов и институтов при изучении ими курса элементарной математики и прохождения практикума по решению задач. Оно может быть использовано также учителями и учащимися школ и классов с углубленным изучением математики. Изложение теории сопровождается большим числом задач, которые соответствуют теоретическому содержанию каждой главы.

ISBN 5–88970–051–0
© Издательство «Сантакс-Пресс», 1996

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга представляет собой курс элементарной геометрии, предназначенной для студентов физико-математических факультетов педагогических университетов и институтов. Книга может быть использована также учителями математики средней школы и учениками школ (классов) с углубленным изучением математики.

Основная цель настоящего пособия — помочь читателю привести в определенную систему свои знания школьного курса геометрии и пополнить эти знания новыми интересными геометрическими фактами, которые могут быть использованы в преподавании геометрии в средней школе, как в обычных классах, так и в классах с углубленным изучением математики. Книгу можно использовать в techинститутах для чтения геометрической части курса элементарной математики (в тех педагогических институтах, где читаются такие курсы), а также на практикуме по решению задач. Дополнительные вопросы, которые выходят за рамки обычного школьного курса геометрии, могут быть использованы для чтения специальных и факультативных курсов, а также в курсовых работах и на специальных семинарах.

От школьного курса геометрии настоящая книга отличается как своим содержанием, так и большей строгостью изложения. Изложение построено так, что почти все разделы школьного курса геометрии, не входящие в курс геометрии для студентов, находят свое место в книге. Следует, однако, отметить, что многие вопросы школьного курса геометрии изложены здесь в общей форме и значительно строже, чем в школьных учебниках. В связи с этим в ряде случаев знакомые читателю теоремы и утверждения доказываются иначе, чем в школьных учебниках. Книга содержит также новый, по сравнению со школьным учебником, материал.

Настоящая книга является первой частью курса и содержит планиметрию, вторая часть посвящена стереометрии. Учебное пособие состоит из десяти глав, которые охватывают все основные разделы планиметрии.

Стремясь избежать параллелизма с курсом геометрии для студентов пединститутов, авторы здесь совершенно не касаются вопросов векторной алгебры, аналитических методов в геометрии, геометрических построений, а также элементарных вопросов проективной геометрии. В противоположность этому более подробно излагаются начальные геометрические сведения (глава I), движения, симметрия треугольников и четырехугольников, подобие фигур, теория окружностей, т. е. те темы, которые слабо отражаются в школьных курсах геометрии.

Учебное пособие снабжено большим числом задач для самостоятельного решения. В первой части пособия имеется свыше 440 задач по планиметрии. Все задачи распределены по главам и помещены после каждой главы в точном соответствии с теоретическим материалом соответствующей главы. Большинство задач являются задачами на доказательство. Имеются задачи с интересным геометрическим содержанием, многие из которых обычно не входят в учебные пособия для учащихся средней школы. Некоторые наиболее важные задачи включены в текст и даны с решениями. Все задачи снабжены ответами и указаниями.

Задачи, помещенные в эту книгу, могут быть использованы учителями математики средней школы, особенно теми, которые работают в классах с углубленным изучением предмета. Многие задачи отдельных глав, например, главы VIII «Подобие фигур» или главы IX «Окружность», могут послужить основой при разработке тематики математических кружков, а также при написании студентами курсовых работ по геометрии.

В работе авторского коллектива по подбору и составлению задач по планиметрии принимала участие Г. М. Силаева.

Терминология и обозначения, используемые в данном пособии, согласованы с теми, которые в настоящее время приняты в средней школе. Следует, однако, учесть, что в ряде случаев в разных учебных пособиях по геометрии для средней школы даются разные определения одних и тех же понятий (например, понятия равенства фигур, подобия фигур, особенно треугольников, и др.). Здесь в каждом отдельном случае указывается на эти различия и показывается, что для каждого понятия разные определения, встречающиеся в учебных пособиях, по существу, эквивалентны.

При изложении материала авторы пользуются аксиоматическим методом. В основу положена определенная система аксиом, на которой основаны школьные учебники геометрии авторов Атанасяна Л. С. и др. (см. [4],[6], приложения)[1]. Эта система аксиом является избыточной, и поэтому она позволяет избежать утомительных формальных рассуждений при обосновании ряда наглядно очевидных положений. Значительно большая строгость изложения, по сравнению со школьным учебником, достигается в настоящей книге стремлением авторов строго обосновать, пользуясь введенной системой аксиом, основные положения, не доводя, однако, эту строгость до педантизма и не превращая курс в книгу по основаниям геометрии.

Во всех случаях, где при изложении материала упоминаются имена отдельных математиков, даны краткие сведения о них.

---

[1] Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещенному на странице 302.

Глава I

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ТОЧКИ И ПРЯМЫЕ

1. Основные понятия и аксиомы

Настоящий курс элементарной геометрии посвящен систематическому изучению свойств геометрических фигур на плоскости и в пространстве. Основным методом изучения, как и в школьном курсе геометрии, является *аксиоматический* метод, суть которого состоит в следующем.

Некоторые простейшие геометрические понятия, знакомые нам по опыту, принимаются за *основные понятия.* В нашем курсе при изучении геометрии на плоскости основными считаются понятия точки, прямой (*основные объекты),* а также понятия «точка лежит на прямой», «точка лежит между двумя точками», «наложение» *(основные отношения).* Определения основных понятий не даются. Все другие понятия, которые мы будем рассматривать в этом курсе, мы будем точно определять, исходя из основных понятий. К таким понятиям относятся понятия отрезка, луча, полуплоскости, угла, треугольника, многоугольника и другие.

Свойства основных понятий выражаются в предложениях, которые называются *аксиомами.* Аксиомы — это те основные положения геометрии, которые принимаются без доказательства в качестве исходных. Все остальные предложения геометрии мы должны вывести из аксиом с помощью строгих логических рассуждений, т. е. с помощью доказательств.

Итак, суть аксиоматического метода заключается в том, что, используя основные понятия и аксиомы, мы определяем новые понятия, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

2. Взаимное расположение точек и прямых

Мы уже отметили, что в геометрии на плоскости основными объектами являются точки и прямые. Точки обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., а прямые — малыми буквами латинского алфавита: a, b, c... Точка и прямая могут находиться в определенном отношении: точка может лежать на прямой, может не лежать на ней. Вместо того, чтобы сказать «точка лежит на прямой», говорят также «прямая проходит через точку».

Сформулируем первые три аксиомы планиметрии, которые называются *аксиомами принадлежности*. Они характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки[1].

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Прямая, проходящая через две точки A и B, обозначается через AB или BA.

Из аксиомы I_3 следует, что две прямые на плоскости либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют только одну общую точку. В последнем случае говорят, что прямые *пересекаются*.

§ 2. ОТРЕЗОК, ЛУЧ, ПОЛУПЛОСКОСТЬ

1. Отрезок и луч

Уточним теперь определения простейших геометрических фигур, известных нам из школьного курса геометрии. Начнем с понятий отрезка, луча и полуплоскости. Для этого воспользуемся основным отношением «лежать между».

Каждая точка прямой может находиться в известном отношении к любым двум точкам той же прямой: она может лежать между этими точками, может и не лежать между ними. Если точка B лежит между точ-

---

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три прямые», будем считать, что рассматриваемые точки, прямые различны.

кой A и точкой C, то пишут: $A - B - C$. Свойства этого понятия характеризуются *аксиомами порядка*, которые сформулированы ниже.

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком* и обозначается через AB или BA. Точки A и B называются *концами* отрезка, а любая точка, лежащая между ними — *внутренней* точкой отрезка AB или *точкой, лежащей на отрезке* AB. Об отрезке с концами A и B говорят, что он *соединяет* точки A и B.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом*, исходящим из точки O. Лучи будем обозначать буквами h, k, l, ... или двумя буквами, например, OM (O — точка, из которой исходит луч, а M — произвольная точка луча).

Два луча одной прямой, исходящие из точки O, называются *дополнительными лучами*. На рисунке 1 h и k дополнительные лучи прямой a, исходящие из точки O. Точка O не принадлежит ни одному из этих лучей и называется *началом* каждого из них. Говорят также, что луч k является *продолжением* луча h и луч h является продолжением луча k.

Из аксиомы II_3 непосредственно следует: если точка O лежит между точками A и B прямой a, то точки A и B принадлежат различным дополнительным лучам прямой a, исходящим из точки O, если же точка O не лежит между точками A и B прямой a, то обе точки

Рис. 1

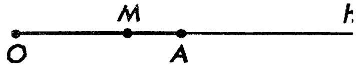


Рис. 2

A и B принадлежат одному и тому же лучу с началом O.

Говорят, что отрезок OA *отложен* на луче h от его начала O, если A — точка луча h (рис. 2). Нетрудно доказать утверждение: *если отрезок OA отложен на луче h от его начала O, то любая точка, лежащая на отрезке OA, принадлежит лучу h.*

В самом деле, пусть M — произвольная точка, лежащая на отрезке OA, тогда $O - M - A$. По аксиоме II_1 M — точка прямой OA. Но точка O не лежит между точками M и A (аксиома II_2), поэтому точки A и M принадлежат одному лучу, исходящему из точки O. Так как $A \in h$, то $M \in h$.

2. Полуплоскость

Если две точки отрезка AB лежат на прямой a, то, очевидно, прямые a и AB совпадают, поэтому любая точка отрезка AB лежит на прямой a (рис. 3а). Отсюда следует, что если отрезок AB не лежит на прямой a, то возможны три случая взаимного расположения прямой a и отрезка AB: а) прямая a пересекает отрезок AB, т. е. на прямой лежит только одна внутренняя точка отрезка AB (рис. 3б); б) прямая a проходит через один из концов отрезка AB (рис. 3в); в) прямая a не имеет ни одной общей точки с отрезком AB (рис. 3г). В случае б) говорят, что точки A и B лежат *по разные стороны* от прямой a, и пишут так: $A, B \div a$, а в случае г) — точки A и B *лежат по одну сторону* от прямой a, и пишут так: $A, B \doteq a$.

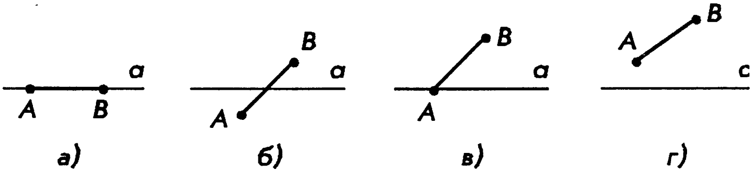


Рис. 3

Сформулируем последнюю аксиому группы II, которая позволяет ввести понятие полуплоскости.

II_4. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в аксиоме II_4, называется *полуплоскостью*. Прямая a называется *границей* каждой полуплоскости. Полуплоскости будем обозначать буквами λ, μ, ν.

Из аксиомы II_4 следует, что если $A, B \div a$, то точки A и B принадлежат разным полуплоскостям с общей границей a, а если $A, B \doteq a$, то обе точки A и B принадлежат одной и той же полуплоскости с границей a.

Докажем, что *каждой полуплоскости λ принадлежит хотя бы одна точка*. Пусть AB — граница полуплоскости λ, а C — точка, не лежащая на прямой AB (аксиома I_2). Если $C \in \lambda$, то утверждение доказано, поэтому предположим, что $C \in \lambda'$, где λ' — другая полуплоскость с той же границей AB. Согласно аксиоме II_3 на продолжении луча AC существует хотя бы одна точка D. Так как точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB, то $D \in \lambda$.

§ 3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ ГРУПП I И II

1. Теорема о делении отрезка

Из введенных до сих пор аксиом вытекает ряд утверждений о взаимном расположении простейших геометрических фигур. В этом параграфе мы сформулируем основные из этих утверждений. Все они наглядно очевидны, поэтому их истинность не вызывает сомнений. Однако формальные доказательства некоторых из них, основанные на аксиомах, не так просты, в чем читатель убедится на примере доказательства следующей теоремы о делении отрезка.

Теорема 1. *Любая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка.*

Рис. 4

○ Точный смысл этой теоремы заключается в следующем: если точка C лежит на отрезке AB, то а) отрезки AC и BC, кроме точки C, не имеют других общих точек; б) любая точка отрезка AC или отрезка BC принадлежит отрезку AB; в) любая точка отрезка AB, отличная от точки C, лежит либо на отрезке AC, либо на отрезке BC.

а) Обозначим через h луч CA, а через k — дополнительный луч CB (рис. 4). Отрезок CA отложен на луче h, а отрезок CB — на луче k. Так как лучи h и k не имеют общих точек, то и отрезки CA и CB не имеют общих точек, за исключением точки C.

б) Пусть M — точка, лежащая на отрезке AC (рис. 4). Тогда $M \in h$. Но $B \in k$, поэтому $B - C - M$. Отсюда следует, что точка M не лежит между точками B и C (аксиома II_2), поэтому точка B лежит на луче MC. Так как лучи MA и MC дополнительные, то $A - M - B$, поэтому M — точка, лежащая на отрезке AB. Аналогично доказывается, что любая точка, лежащая на отрезке BC, лежит на отрезке AB.

в) Возьмем точку X отрезка AB, отличную от точек A, B и C, и докажем, что она лежит на одном из отрезков AC или CB. Точка A не лежит между точками X и C, поэтому по аксиоме II_3 либо $A - X - C$, либо $A - C - X$. В первом случае точка X лежит на отрезке AC. Во втором случае $X \in k$, поэтому точка C не лежит между точками X и B. Но точка B не лежит между точками C и X, следовательно, $B - X - C$, т. е. точка X лежит на отрезке BC. ●

2. Дальнейшие следствия

Теорема 2. *Если прямая a пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.*

○ По условию теоремы $A, B \div a$, поэтому точки A и B принадлежат разным полуплоскостям λ_1 и λ_2 с общей границей a. Пусть, например, $A \in \lambda_1$, $B \in \lambda_2$ (рис. 5).

Точка C принадлежит либо полуплоскости λ_1, либо полуплоскости λ_2. В случае $C \in \lambda_1$, по аксиоме II_4 пря-

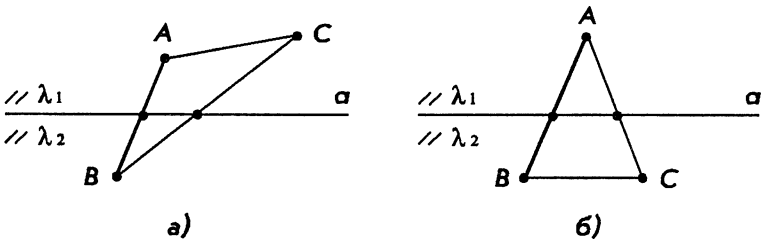


Рис. 5

мая a пересекает отрезок BC и не имеет общих точек с отрезком AC (рис. 5а). В случае $C \in \lambda_2$ прямая a пересекает отрезок AC и не имеет общих точек с отрезком BC (рис. 5б). ●

Пользуясь этой теоремой можно доказать ряд утверждений о свойствах отрезков, лучей и полуплоскостей.

1^0. *На любом отрезке существует по крайней мере одна точка.*

○ Пусть AB — отрезок, а C — точка, не лежащая на прямой AB (аксиома I_2). На продолжении луча CA возьмем точку D, а на продолжении луча BD — точку E (аксиома II_4) (рис. 6). Тогда $A - C - D$ и $D - B - E$, поэтому прямая CE пересекает отрезок AD и не имеет общих точек с отрезком BD. По теореме 2 прямая CE пересекает отрезок AB в некоторой точке M. Таким образом, на отрезке AB существует по крайней мере одна точка. ●

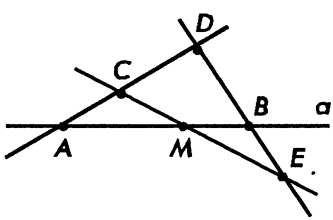


Рис. 6

2^0. *Если начало луча лежит на границе полуплоскости, а некоторая точка луча принадлежит полуплоскости, то данный луч принадлежит полуплоскости.*

○ Пусть начало луча h лежит на границе a полуплоскости λ, а некоторая точка M луча h принадлежит полуплоскости λ. Докажем, что луч h принадлежит полуплоскости λ, т. е. любая точка луча h принадлежит полуплоскости λ.

Возьмем произвольную точку X луча h и докажем, что $X \in \lambda$. Так как $M \in h$ и $X \in h$, то начало O луча h не лежит между точками X и M. Отсюда следует, что прямая a не имеет общих точек с отрезком XM, т. е. $X, M \doteq a$. Таким образом, обе точки X и M принадлежат одной полуплоскости с границей a, т. е. $X \in \lambda$. ●

Предлагаем читателю, пользуясь предыдущими свойствами, самостоятельно доказать утверждение.

3^0. *Отрезок, луч, прямая, полуплоскость являются выпуклыми фигурами, содержащими бесконечное множество точек.*

§ 4. УГОЛ

1. Понятие угла

Углом называется геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Точка называется *вершиной* угла, а лучи — его *сторонами*. Под точками угла мы понимаем его вершину и все точки его сторон. Угол, образованный двумя лучами h и k, будем обозначать так: $\angle hk$ или $\angle kh$. Угол, образованный лучами OA и OB, обозначается так: $\angle AOB$ или $\angle BOA$. Если задан только один угол с вершиной O, то иногда его обозначают так: $\angle O$.

Угол называется *развернутым*, если его стороны являются дополнительными лучами.

С каждым неразвернутым углом AOB связаны две полуплоскости: полуплоскость с границей OA, которой принадлежит сторона OB и полуплоскость с границей OB, которой принадлежит сторона OA. Пересечение этих полуплоскостей называется *внутренней* областью этого угла.

Нетрудно доказать, что если две точки A и B принадлежат разным сторонам неразвернутого угла, то любая точка, лежащая на отрезке AB, принадлежит внутренней области этого угла. Отсюда, учитывая, что отрезок — бесконечное множество точек, а полуплоскость — выпуклая фигура, приходим к выводу, что *внутренняя область неразвернутого угла является бесконечным выпуклым множеством точек.* Точки, принадлежащие внутренней области угла, называют *внутренними относительно угла* или точками, лежащими внутри угла. Точки плоскости, не принадлежащие внутренней области угла и не являющиеся точками угла, называются *внешними* относительно угла.

2. Внутренний луч угла

Луч, который исходит из вершины неразвернутого угла и целиком состоит из внутренних точек относительно угла, называется *внутренним лучом угла.*

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Если точка M лежит внутри угла AOB, то OM — внутренний луч этого угла.*

○ Пусть λ_1 полуплоскость с границей OA, содержащая луч OB, а λ_2 — полуплоскость с границей OB, содержащая луч OA. Так как точка M лежит внутри угла AOB, то $M \in \lambda_1$ и $M \in \lambda_2$, поэтому весь луч OM принадлежит как полуплоскости λ_1, так и полуплоскости λ_2 (§ 3, п. 2), т. е. OM — внутренний луч угла. ●

Докажем теорему о внутреннем луче угла.

Теорема 1. *Внутренний луч неразвернутого угла пересекает любой отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.*

○ Пусть hk данный угол с вершиной O, $A \in h$, $B \in k$, а l — внутренний луч этого угла (рис. 7). Докажем, что луч l пересекает отрезок AB. Возьмем на

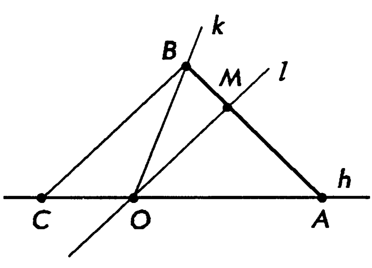


Рис. 7

продолжении луча h точку C. Прямая $\overline{l}$, содержащая луч l, пересекает отрезок AC (см. рис. 7), поэтому по теореме 2 § 3 она пересекает один из отрезков BC или AB. Докажем, что прямая $\overline{l}$ не пересекает отрезок BC. В самом деле, луч l и отрезок BC не имеют общих точек, так как все точки луча l принадлежат полуплоскости с границей OB, содержащей луч OA, а все точки отрезка BC, за исключением точки B — другой полуплоскости с той же границей OB. Аналогично доказывается, что продолжение луча l и отрезок BC не имеют общих точек. Таким образом, прямая $\overline{l}$ пересекает отрезок AB в некоторой точке M.

Читатель легко убедится самостоятельно в том, что точка M не может принадлежать продолжению луча l, поэтому M — точка луча l. ●

Предлагаем читателю, пользуясь этой теоремой и теоремой о делении отрезка (теорема 1 § 3), доказать самостоятельно следующую теорему о делении угла.

Теорема 2. *Любой внутренний луч неразвернутого угла делит этот угол на два угла.*

Точный смысл этой теоремы заключается в следующем: если l — внутренний луч неразвернутого угла hk, то: а) внутренние области углов hl и lk не имеют общих точек; б) любая точка, лежащая внутри угла hl или угла lk лежит внутри угла hk; в) любая точка, лежащая внутри угла hk и не лежащая на луче l, лежит либо внутри угла hl, либо внутри угла lk (рис. 8).

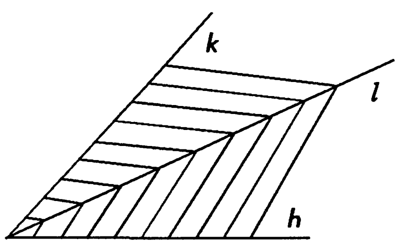


Рис. 8

§ 5. АКСИОМЫ ГРУППЫ III. РАВЕНСТВО ФИГУР

1. Равенство фигур

Понятие равенства фигур вводится с помощью наложения, которое в нашем курсе является основным отношением. Предполагается, что могут существовать отображения плоскости в себя, которые называются *наложениями*. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III, состоящей из семи аксиом. Для упрощения формулировок этих аксиом введем понятие равенства фигур. Фигура Φ называется *равной* фигуре Φ', если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ', т. е. каждая точка фигуры Φ переходит в некоторую точку фигуры Φ', и каждая точка фигуры Φ' имеет прообраз, принадлежащий фигуре Φ. Запись $\Phi = \Phi'$ обозначает, что фигура Φ равна фигуре Φ'.

III_1. Каждая фигура равна самой себе.

III_2. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III_3. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III_4. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

Рассмотрим некоторые свойства наложений, которые вытекают из сформулированных аксиом.

1^0. *При наложении различные точки переходят в различные точки.*

○ Допустим, что утверждение неверно, т. е. при некотором наложении какие-то две точки A и B переходят в одну и ту же точку C. Тогда фигура $\{A, B\}$, состоящая из двух точек, равна фигуре $\{C\}$, состоящей из одной точки. По аксиоме III_2 $\{ C \} = \{ A, B \}$. Это означает, что существует наложение, при котором точка C переходит в две точки A и B. Но это невозможно, т. к. наложение — отображение плоскости. ●

2^0. *При наложении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, также не лежащие на одной прямой.*

○ Пусть точки A, B и C не лежат на одной прямой,

A', B' и C' — образы этих точек при данном наложении. По свойству 1^0 A', B' и C' — попарно различные точки. Допустим, что они лежат на одной прямой. Тогда одна из них, например B', лежит между точками A' и C'. По аксиоме III_4 отрезок AC отображается на отрезок $A'C'$, поэтому какая-то точка M отрезка AC отображается в точку B'. Но точка B также отображается в точку B'. Мы пришли в противоречие со свойством 1^0. ●

2. Равенство отрезков

Из свойства 1^0 и аксиомы III_4 следует, что при наложении отрезок отображается на отрезок, причем концы отрезка отображаются в концы отрезка. Поэтому фигура, равная отрезку, является отрезком.

III_5. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Пользуясь этой аксиомой, докажем следующее важное свойство наложений.

3^0. *Если при наложении две точки A и B переходят соответственно в точки A'* и *B', то луч AB переходит в луч $A'B'$.*

○ Докажем сначала, что любая точка луча AB переходит в некоторую точку луча $A'B'$. Возьмем точку M луча AB, отличную от точки B, и рассмотрим ее образ M'. Возможны два случая: $A - M - B$ и $A - B - M$. В первом случае по аксиоме III_4 точка M отображается в точку отрезка $A'B'$, т. е. в точку луча $A'B'$. Во втором случае по аксиоме III_4 точка B отрезка AM отображается в точку B' отрезка $A'M'$. Отсюда следует, что M' — точка луча $A'B'$.

Докажем теперь, что любая точка M' луча $A'B'$ имеет прообраз на луче AB. Для этого отложим на луче AB отрезок AM, равный отрезку $A'M'$, и обозначим через M'' — образ точки M. По доказанному M'' — точка луча $A'B'$. Так как $AM = A'M'$ и $AM = A'M''$, то по аксиоме III_5 точки M' и M'' совпадают, т. е. точка M' имеет прообраз на луче AB. ●

4^0. *При наложении прямая отображается на прямую.*

○ Пусть AB — данная прямая, а A' и B' — образы точек A и B. На продолжении луча AB возьмем точку C и рассмотрим образ C' этой точки. Так как точка A

лежит на отрезке BC, то точка A' лежит на отрезке $B'C'$, т. е. C' — точка, лежащая на продолжении луча $A'B'$. По свойству 3^0 луч AB отображается на луч $A'B'$, а луч AC — на луч $A'C'$. Поэтому, учитывая, что точка A отображается в точку A', мы приходим к выводу, что прямая AB отображается на прямую $A'B'$. ●

5^0. *Если при наложении луч OA переходит в себя, то каждая точка прямой OA переходит в себя.*

○ Пусть X — произвольная точка луча OA, а X' — ее образ при данном наложении g. Так как $O = g(O)$, $X' = g(X)$, то $OX = OX'$. По свойству 3^0 точки X и X' лежат на луче OA, следовательно, по аксиоме III_5 они совпадают. Аналогично доказывается, что любая точка Y, лежащая на продолжении луча OA, переходит в себя.●

6^0. *При наложении неразвернутый угол переходит в неразвернутый угол, и внутренний луч неразвернутого угла переходит во внутренний луч неразвернутого угла.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение, используя свойства 2^0, 3^0, теорему 1 § 4 и аксиому III_4.

В заключение докажем следующую теорему.

Теорема. *Любое наложение является преобразованием плоскости.*

○ В силу свойства 1^0 достаточно доказать, что каждая точка плоскости является образом некоторой точки при данном наложении.

Возьмем три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и рассмотрим их образы A', B' и C'. По свойству 2^0 точки A', B' и C' не лежат на одной прямой. По свойству 4^0 прямые AB, BC и CA отображаются соответственно на прямые $A'B'$, $B'C'$ и $C'A'$. Пусть M' — произвольная точка плоскости. Проведем через эту точку прямую так, чтобы она пересекала какие-нибудь две из прямых $A'B'$, $B'C'$ или $C'A'$ в различных точках, например, прямую $A'B'$ в точке P', а прямую $B'C'$ — в точке Q'. Точка P' является образом некоторой точки P прямой AB, а точка Q' — образом некоторой точки Q прямой BC. Поэтому прямая $P'Q'$ является образом прямой PQ. Отсюда следует, что M' — образ некоторой точки M прямой PQ. ●

3. Равенство углов

Из свойства 3^0 следует, что при наложении луч переходит в луч, а начало луча — в начало луча. Отсюда, учитывая свойства 2^0 и 3^0, мы приходим к выводу, что при наложении неразвернутый угол переходит в неразвернутый угол, а развернутый — в развернутый. Поэтому фигура, равная неразвернутому (развернутому) углу, является неразвернутым (развернутым) углом.

III_6. Если hk — неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k'.

Так как $h'k'$ и $k'h'$ — один и тот же угол, то из аксиомы III_6 следует, что если $\angle hk = \angle h'k'$, то существуют два наложения: при одном из них луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k', а при другом — луч h переходит в луч k', а луч k — в луч h'.

Будем говорить, что угол hk *отложен от луча* h в *полуплоскость* λ, если луч h принадлежит границе полуплоскости λ, а луч k — самой полуплоскости.

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

§ 6. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

1. Сравнение отрезков

Пусть AB и CD — данные отрезки. Если на отрезке CD существует такая точка M, что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB *меньше* отрезка CD или отрезок CD *больше* отрезка AB и пишут так: $AB < CD$ или $CD > AB$.

Рассмотрим основные свойства сравнения отрезков.

1^0. *Если $AB < CD$, $CD = EF$ то $AB < EF$.*

○ Так как $AB < CD$, то на отрезке CD существует точка M такая, что $AB = CM$ (рис. 9). Рассмотрим луч CK, не принадлежащий прямой CD, и от луча EF в одну из полуплоскостей с границей EF отложим угол FEG, равный углу DCK. По аксиоме III_6 существует наложение такое, что луч CD переходит в луч EF, а луч CK — в луч EG. Так как $CD = EF$, то точка D пе-

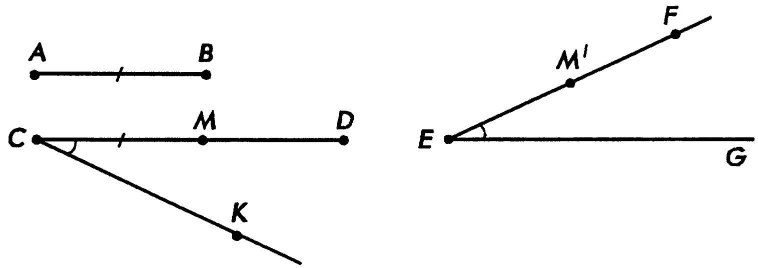


Рис. 9

реходит в точку F (аксиома III_5), а точка M — в точку M', лежащую на отрезке EF. Поэтому $CM = EM'$. Но $AB = CM$, следовательно, $AB = EM'$. По определению $AB < EF$. ●

Точно так же можно доказать следующее утверждение.

2^0. *Если* $AB = CD$, $CD < EF$, *то* $AB < EF$.

Докажем теперь следующее утверждение.

3^0. *Если* $AB < CD$, $CD < EF$, *то* $AB < EF$.

○ Так как $CD < EF$, то на отрезке EF существует точка M такая, что $CD = EM$. Таким образом, $AB < CD$, $CD = EM$, поэтому по свойству 1^0 $AB < EM$, т. е. на отрезке EM существует точка N такая, что $AB = EN$. По теореме о делении отрезка, N — точка отрезка EF, следовательно, $AB < EF$. ●

В заключение докажем теорему о сравнении отрезков.

Теорема 1. *Для любых двух отрезков AB и CD всегда выполняется одно и только одно из соотношений:*

$$AB = CD, AB < CD, AB > CD. \qquad (1)$$

○ На луче AB отложим отрезок AM, равный отрезку CD. Если точки M и B совпадают, то $AB = CD$, а если они не совпадают, то либо $A - M - B$, либо $A - B - M$. В первом случае $CD < AB$ или $AB > CD$, во втором случае $AB < AM$. Но $AM = CD$, поэтому по свойству 1^0 $AB < CD$.

Таким образом, для любых отрезков AB и CD выполняется хотя бы одно из соотношений (1). Нетрудно видеть, что никакие два из соотношений (1) не могут быть выполнены одновременно. В самом деле, если, например, $AB = CD$ и $AB < CD$, то по аксиоме III_2 $CD = AB$, поэтому по свойству 2^0 имеем: $CD < CD$.

Это неравенство противоречит аксиоме III_5. ●

2. Сравнение углов

Сравнение углов проводится аналогично сравнению отрезков. Пусть hk и lm данные неразвернутые углы. Если существует внутренний луч s угла lm такой, что $\angle hk = \angle ls$, то говорят, что угол hk *меньше* угла lm или угол lm *больше* угла hk и пишут так: $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm > \angle hk$. Если один из углов hk или lm развернутый, то будем считать, что неразвернутый угол меньше развернутого угла.

Сформулируем свойства, аналогичные свойствам 1^0, 2^0, 3^0 сравнения отрезков.

4^0. *Если* $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm = \angle pq$, *то* $\angle hk < \angle pq$.

5^0. *Если* $\angle hk = \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, *то* $\angle hk < \angle pq$.

6^0. *Если* $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, *то* $\angle hk < \angle pq$.

○ Докажем, например, свойство 4^0. Остальные свойства предлагаем читателю доказать самостоятельно.

Если pq — развернутый угол, то свойство очевидно, так как в этом случае $\angle lm$ — также развернутый, а $\angle hk$ — неразвернутый. Допустим, что угол pq, а следовательно, и углы lm и hk — неразвернутые.

Неравенство $\angle hk < \angle lm$ означает, что существует внутренний луч s угла lm такой, что $\angle hk = \angle ls$ (рис. 10). По условию $\angle lm = \angle pq$, поэтому по аксиоме III_6 существует наложение такое, что луч l перехо-

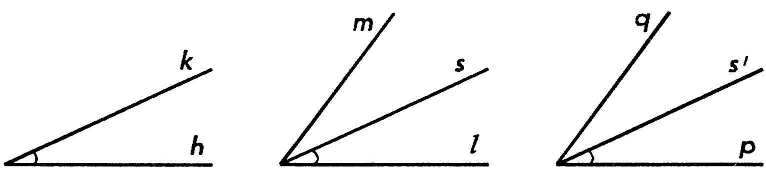


Рис. 10

дит в луч p, а луч m — в луч q. При этом луч s переходит в некоторый внутренний луч s' угла pq (свойство 6^0, § 5). Так как $\angle hk = \angle ls$, $\angle ls = \angle ps'$, то по аксиоме III_3 $\angle hk = \angle ps'$. Отсюда следует, что $\angle hk < \angle pq$. ●

3. Теорема о сравнении углов

Докажем лемму о двух лучах полуплоскости, которая часто используется при изучении свойств углов.

Лемма. *Если углы hk_1 и hk_2 с общей вершиной O отложены от луча h в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из этих лучей является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом.*

○ Возьмем на лучах h и k_1 соответственно точки A и B, а на продолжении луча h точку C (рис. 11). Прямая $\bar{k}_2$, содержащая луч k_2, пересекает отрезок AC, поэтому она пересекает один из отрезков AB или BC в некоторой точке M (теорема 2 § 3).

Ясно, что точка M лежит в той же полуплоскости с границей ОА, что и луч k_2, поэтому она принадлежит лучу k_2, а не продолжению этого луча.

Если точка M лежит на отрезке AB (рис. 11а), то M — точка внутренней области угла hk_1, поэтому k_2 — внутренний луч этого угла. Луч k_1 не является внутренним лучом угла hk_2, т. к. этот луч не пересекает отрезка AM (точка B не лежит на отрезке AM).

Если точка M лежит на отрезке BC (рис. 11б), то

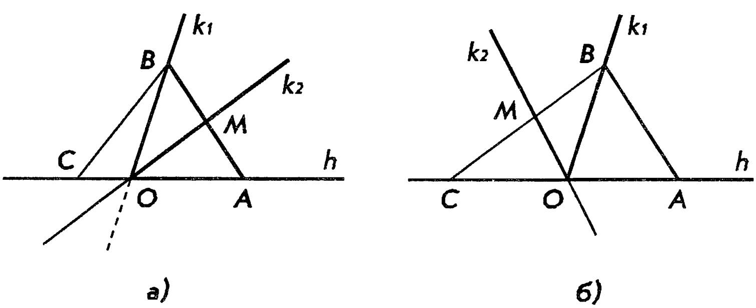


Рис. 11

лучи OC и k_1 принадлежат разным полуплоскостям с границей $\bar{k}_2$, поэтому лучи h и k_1 принадлежат одной и той же полуплоскости с границей $\bar{k}_2$. С другой стороны, по условию леммы, лучи k_1 и k_2 принадлежат одной и той же полуплоскости с границей OA. Следовательно, k_1 — внутренний луч угла hk_2. Луч k_2 не является внутренним лучом угла hk_1, т. к. этот луч не пересекает отрезок AB. ●

Пользуясь этой леммой, докажем теорему о сравнении углов.

Теорема 2. *Для любых углов hk и lm всегда выполняется одно и только одно из соотношений:* $\angle hk = \angle lm$, $\angle hk < \angle lm$, $\angle hk > \angle lm$.

○ Если хотя бы один из углов hk и lm развернутый, то утверждение теоремы очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда эти углы неразвернутые.

От луча h в полуплоскость, содержащую луч k, отложим угол hs, равный углу lm. Если лучи s и k совпадают, то $\angle hk = \angle lm$, а если они не совпадают, то по предыдущей лемме либо s — внутренний луч угла hk, либо k — внутренний луч угла hs. В первом случае $\angle lm < \angle hk$ или $\angle hk > \angle lm$, а во втором случае $\angle hk < \angle hs$. Но $\angle hs = \angle lm$, поэтому по свойству 4^0 $\angle hk < \angle lm$.

Вторую часть утверждения теоремы представляем читателю доказать самостоятельно.●

§ 7. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ. ПРЯМОЙ УГОЛ

1. Смежные и вертикальные углы

Напомним определения смежных и вертикальных углов, известные читателю из школьного курса геометрии. Два неразвернутых угла называются *смежными,* если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Два неразвернутых угла называются *вертикальными,* если стороны одного угла являются соответственно дополнительными лучами сторон другого угла.

Докажем теоремы о смежных и вертикальных углах.

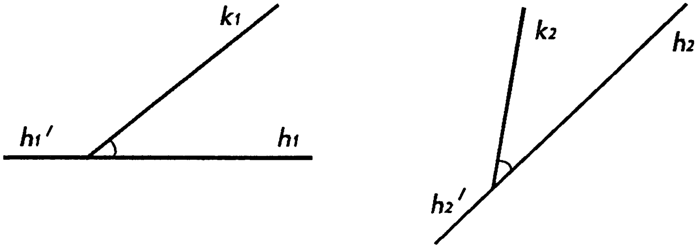


Рис. 12

Теорема 1. *Если неразвернутые углы равны, то углы соответственно смежные с ними также равны.*

○ Пусть $\angle h_1k_1 = \angle h_2k_2$, а $\angle h'_1k_1$ и $\angle h'_2k_2$ — углы соответственно смежные с углами h_1k_1 и h_2k_2 (рис. 12). Докажем, что $\angle h'_1k_1 = \angle h'_2k_2$.

По аксиоме III_6 существует наложение f такое, что $h_2 = f(h_1)$, $k_2 = f(k_1)$. Тогда по свойству 4^0 § 5 $h'_2 = f(h'_1)$, поэтому $\angle h_1'k_1 = \angle h_2'k_2$. ●

Теорема 2. *Вертикальные углы равны.*

○ Рассмотрим вертикальные углы hk и $h'k'$ (рис. 13). Угол hk' является смежным как с углом hk, так и с углом $h'k'$. По аксиоме III_1, $\angle hk' = \angle hk'$, поэтому по теореме 1 $\angle hk = \angle h'k'$. ●

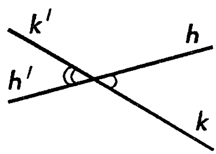


Рис. 13

2. Прямой угол

Каждый неразвернутый угол имеет два смежных с ним угла. На рисунке 13 смежными с углом hk являются углы hk' и kh'. Эти углы вертикальные, поэтому они равны друг другу.

Угол называется *прямым*, если он равен каждому из углов, смежных с ним. Докажем, что *угол, равный прямому, также является прямым углом*. В самом деле, пусть $\angle 1$ — прямой и $\angle 2 = \angle 1$. Докажем, что $\angle 2$ прямой. Обозначим через $\angle 3$ и $\angle 4$ углы, смежные соответственно с углами 1 и 2 (рис. 14). По теореме 1 $\angle 3 = \angle 4$, а по определению прямого угла $\angle 1 = \angle 3$, поэтому $\angle 4 = \angle 1$. По условию $\angle 2 = \angle 1$, следовательно, $\angle 2 = \angle 4$, т. е. $\angle 2$ — прямой угол.

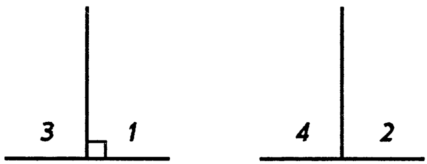


Рис. 14

Докажем теперь теорему о прямых углах.

Теорема 3. *Любые два прямых угла равны друг другу.*

○ Возьмем произвольные прямые углы hk и h_1k_1 и докажем, что они равны. Для этого от луча h в полуплоскость, содержащую луч k, отложим угол hs, равный углу h_1k_1 (рис. 15). Докажем, что луч s совпадает с лучом k. Допустим, что это не так, т. е. k и s различные лучи. Учитывая лемму § 6, не нарушая общности, можно предположить, что s — внутренний луч угла hk.

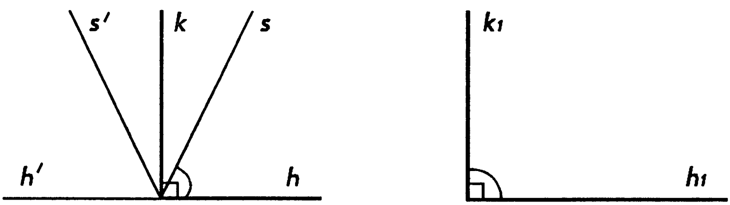


Рис. 15

Так как $\angle hk$ — прямой, то $\angle hk = \angle h'k$ где h' — продолжение луча h. По аксиоме III_6 существует наложение f такое, что $h' = f(h)$, $k = f(k)$. Луч s — внутренний луч угла hk, следовательно, луч $s' = f(s)$ — внутренний луч угла kh'. Отсюда, учитывая, что смежные углы hk и $h'k$ не имеют общих внутренних точек, следует, что s и s' различные лучи. Так как $h' = f(h)$, $s' = f(s)$, то $\angle hs = \angle h's'$.

С другой стороны, угол hs равен прямому углу h_1k_1, поэтому он прямой, т. е. $\angle hs = \angle h's$. Мы пришли в противоречие с аксиомой III_7: от луча h' в одну и ту же полуплоскость отложены два угла $h's'$ и $h's$, равные углу hs. Таким образом, лучи s и k совпадают, т. е. $\angle hk = \angle h_1k_1$. ●

§ 8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

1. Теорема о перпендикулярных прямых

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвернутых угла (рис. 16, углы 1, 2, 3 и 4). Если один из этих углов прямой, то, очевидно, остальные три угла также прямые. В этом случае говорят, что данные прямые взаимно перпендикулярны. Итак, две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными* (или *взаимно перпендикулярными*), если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Перпендикулярность прямых a и b обозначается так: $a \perp b$.

Докажем следующую важную теорему о перпендикулярных прямых.

Теорема. *Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.*

○ Пусть a — данная прямая. Сначала докажем, что через любую точку A, не лежащую на прямой a, проходит прямая, перпендикулярная к прямой a. Возьмем на прямой a две точки M и N и отложим от луча MN в полуплоскость, не содержащую точку A, угол NMP, равный углу AMN (рис. 17). По аксиоме III_6 существует такое наложение f, при котором луч MA переходит в луч MP, а луч MN — в себя, поэтому точка

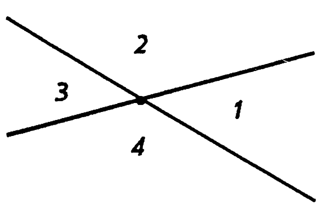


Рис. 16

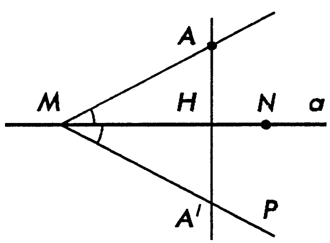


Рис. 17

A переходит в точку A' луча MP. Прямая a пересекает отрезок AA' в некоторой точке H (см. рис. 17). Пусть H и N — различные точки. При наложении f все точки прямой a переходят в себя (свойство 5^0 § 5), поэтому $H = f(H)$. Далее, луч HA переходит в луч HA', следовательно, $\angle AHN = \angle A'HN$. Так как эти углы смежные, то они прямые. Итак, $AH \perp a$.

Докажем, что AH — единственная прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой a. Допустим, что это не так, т. е. существует еще одна прямая AH', перпендикулярная к прямой a (рис. 18). Так как $H' = f(H')$, $H = f(H)$, $A' = f(A)$, то при наложении f луч $H'A$ переходит в луч $H'A'$, а луч $H'H$ — в себя, поэтому $\angle AH'H = \angle A'H'H$. С другой стороны, $\angle AH'H$ — прямой, поэтому он равен своему смежному углу $HH'A_1$ (см. рис. 18). Мы пришли в противоречие с аксиомой III_7: от луча $H'H$ в одну и ту же полуплоскость отложены два угла, равные углу $AH'H$.

Докажем теперь, что через любую точку B прямой a также проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к прямой a. Пусть B и N разные точки прямой a. От луча BN отложим угол CBN, равный углу AHN. Так как $\angle AHN$ прямой, то и угол CBN прямой, т. е. $CB \perp a$. Если предположить, что через точку B проходит другая прямая BC', перпендикулярная к прямой a (см. рис. 19), то мы приходим в противоречие с аксиомой III_7: от луча BN в одну и ту же полуплоскость отложены два угла CBN и $C'BN$, равные углу AHN. ●

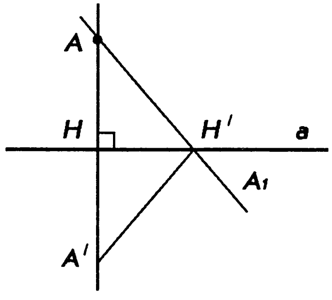


Рис. 18

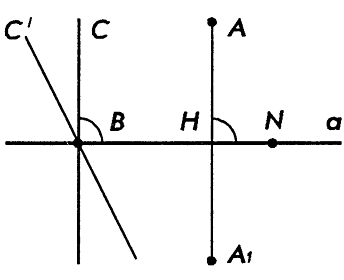


Рис. 19

Следствие. *Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются.*

Из доказанной теоремы следует, что существует бесконечное множество прямых углов. Очевидно, все они равны друг другу. Угол, меньший прямого угла, называется *острым*. Неразвернутый угол, больший прямого угла, называется *тупым*.

2. Перпендикуляр, проведенный из точки к прямой

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней. Отрезок, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром*, проведенным из точки A к прямой a, если прямые AH и a перпендикулярны (рис. 20). В этом случае точка H называется *основанием перпендикуляра*.

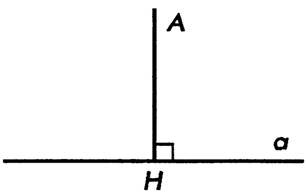


Рис. 20

Из теоремы о перпендикулярных прямых непосредственно следует утверждение: *из точки, не лежащий на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.*

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Найти число точек пересечения n прямых при $n = 4$ и $n = 5$, если каждая из данных прямых пересекает все остальные прямые и в одной точке пересекаются только две прямые.

2. Сколько углов образуется тремя прямыми, проходящими через одну точку?

3. Известно, что прямая AB пересекает отрезок CD, а прямая CD пересекает отрезок AB. Доказать, что отрезки AB и CD пересекаются.

4. Доказать, что любые две точки, лежащие на отрезке, делят его на три отрезка.

5. Три точки C, D и E лежат на отрезке AB. Точка C лежит на отрезке BD, а точка D — на отрезке CE. Воспользовавшись теоремой о делении отрезка, доказать, что точка E лежит на отрезке DA.

6. Даны четыре точки A, B, C, D и прямая a, пере-

секающая отрезок AB и не проходящая через точки C и D. Доказать, что прямая a пересекает либо все три отрезка BC, CD и DA, либо один и только один из этих отрезков.

7. Доказать, что ломаная, соединяющая две точки, лежащие в разных полуплоскостях с общей границей l, имеет хотя бы одну общую точку с прямой l.

8. Точка M является внешней точкой относительно угла AOB. Доказать, что луч OM целиком состоит из точек, внешних относительно угла AOB.

9. Луч l является внутренним лучом угла hk. Доказать, что луч l', дополнительный к лучу l, целиком состоит из точек, внешних относительно угла hk.

10. Дан неразвернутый угол AOB. Доказать, что все точки прямой AB, не принадлежащие отрезку AB, являются внешними относительно угла AOB.

11. Доказать, что фигура, состоящая из точек, внешних относительно данного неразвернутого угла: а) содержит бесконечное множество точек; б) не является выпуклой фигурой.

12. Доказать, что отрезок, соединяющий две точки, одна из которых является внутренней, а другая внешней относительно данного неразвернутого угла, имеет хотя бы одну общую точку с данным углом.

13. Доказать, что ломаная, соединяющая две точки, одна из которых является внутренней, а другая — внешней относительно данного неразвернутого угла, имеет хотя бы одну общую точку с данным углом.

14. Доказать, что любой внутренний луч неразвернутого угла делит его на два угла.

15. Доказать, что при наложении отрезок отображается на отрезок, причем концы отрезка отображаются в концы его образа.

16. Доказать, что при наложении полуплоскость с границей a переходит в одну из полуплоскостей с границей a', где a' — образ прямой a.

17. Доказать, что любые два развернутых угла равны.

18. Доказать следующие утверждения: а) если при наложении каждая из двух точек A и B переходит в себя, то любая точка прямой AB переходит в себя; б) если при наложении каждая из трех точек A, B и C,

не лежащих на одной прямой, переходит в себя, то любая точка плоскости переходит в себя.

19. Доказать свойство 6^0 § 5.

20. Отрезок EF называется суммой отрезков AB и CD (обозначается: $AB + CD$), если на отрезке EF существует точка M такая, что один из отрезков EM и MF равен отрезку AB, а другой — отрезку CD. Доказать, что: а) для любых двух отрезков AB и CD существует их сумма; б) если $EF = AB + CD$, $E'F' = AB + CD$, то $EF = E'F'$; в) если $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$, то $AB + CD = A_1B_1 + C_1D_1$; г) если $AB = A_1B_1$, $AB + CD = A_1B_1 + C_1D_1$, то $CD = C_1D_1$.

21. Даны смежные углы hk и $h'k$. Доказать, что если l — внутренний луч угла hk, то а) лучи h и k принадлежат различным полуплоскостям с границей $\bar{l}$; б) k — внутренний луч угла $h'l$.

22. Неразвернутый угол mn называется суммой углов hk и lf (обозначается через $\angle hk + \angle lk$), если существует внутренний луч s угла mn такой, что один из углов ms и sn равен углу hk, а другой — lf. Доказать, что сумма двух углов существует тогда и только тогда, когда один из этих углов меньше угла, смежного с другим углом.

23. Доказать следующие свойства суммы двух углов (см. задачу 22):

а) Если $\angle hk = \angle h'k'$, $\angle lf = l'f'$, то
$$\angle hk + \angle lf = \angle h'k' + \angle l'f';$$
б) Если $\angle mn = \angle hk + \angle lf$ и $\angle pq = \angle hk + \angle lf$, то $\angle mn = \angle pq$;

в) Если $\angle hk = \angle h'k'$ и $\angle hk + \angle lf = \angle h'k' + \angle l'f'$, то $\angle lf = \angle l'f'$.

24. Равные углы h_1k_1 и h_2k_2 расположены так, что стороны h_1 и h_2 являются дополнительными лучами некоторой прямой a, а стороны k_1 и k_2 — лучами различных полуплоскостей с общей границей a. Доказать, что h_1k_1 и h_2k_2 — вертикальные углы.

25. Прямые углы AOB и A_1OB_1 расположены так, что сторона OA_1 является внутренним лучом AOB, а сторона OB — внутренним лучом угла A_1OB_1. Доказать, что $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$.

26. Доказать утверждения: а) угол, равный острому углу, является острым; б) угол, равный тупому уг-

лу, является тупым; в) угол, меньший острого угла, острый; г) неразвернутый угол, больший тупого угла, тупой.

27. Доказать, что если один из смежных углов тупой, то другой — острый, и обратно, если один из смежных углов острый, то другой — тупой.

28. Луч l является внутренним лучом угла hk. Доказать, что по крайней мере один из углов hl или lk является острым углом.

29. Из точек A и B, лежащих по разные стороны от прямой a, проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к прямой a, которые не лежат на одной прямой. Доказать, что отрезки AB и A_1B_1 пересекаются.

Глава II

ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 9. ПЕРВЫЙ И ВТОРОЙ ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Понятие треугольника

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех отрезков, попарно соединяющих три точки, не лежащие на одной прямой. Указанные три точки называются *вершинами*, а отрезки — *сторонами* треугольника. Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC, CA обозначается так: $\triangle ABC$ или $\triangle BAC$ и т. д. (рис. 21).

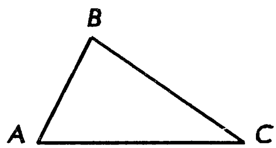
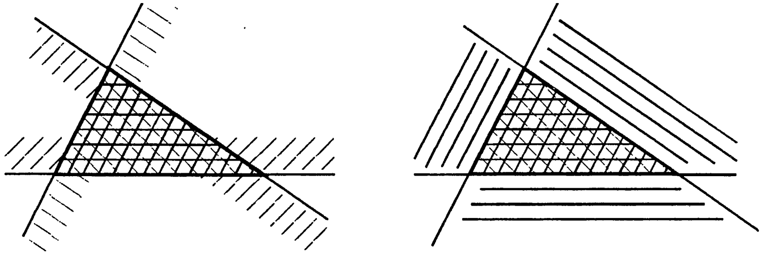


Рис. 21

Три угла $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ называются *углами треугольника ABC*. Часто их обозначают так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. В треугольнике любая сторона и вершина, не принадлежащая ей, называются *противоположными* (например, в треугольнике ABC вершина A и сторона BC). С каждым треугольником связаны три полуплоскости. На границе каждой полуплоскости лежат две вершины треугольника, а в самой полуплоскости — третья вершина. Пересечение этих полуплоскостей называется *внутренней областью* треугольника (рис. 22а). Следующие наглядно очевидные утверждения могут быть строго доказаны на основании аксиом групп I и II и теорем, вытекающих из этих аксиом (глава 1, § 1—4).

1^0. *Внутренняя область треугольника есть пересечение внутренних областей трех углов треугольника* (рис. 22б).

2^0. *Любая точка, лежащая на отрезке с концами на разных сторонах треугольника, принадлежит внутренней области треугольника.*



а) б)

Рис. 22

3^0. *Внутренняя область треугольника есть бесконечное выпуклое множество точек.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти утверждения.

Точки внутренней области треугольника называются *внутренними* по отношению к треугольнику или точками, лежащими внутри треугольника. Точки плоскости, не являющиеся внутренними и не принадлежащие сторонам треугольника, называются *внешними* по отношению к треугольнику. Из теоремы 2 § 3 следует предложение Паша[1] для треугольников: *прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересекает одну и только одну из двух других сторон.*

По общему определению равенств фигур треугольники ABC и $A'B'C'$ называются равными, если существует наложение f, при котором $\triangle ABC$ отображается на $\triangle A'B'C'$.

При этом, очевидно, каждая сторона треугольника ABC отображается на какую-нибудь сторону треугольника $A'B'C'$, поэтому каждая вершина первого треугольника переходит в какую-нибудь вершину второго. Запись $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ означает, что треугольники ABC и $A'B'C'$ равны и $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$.

---

[1] Паш Мориц (1843—1930) — немецкий математик, с 1873 г. профессор университета в Гиссене. Основные труды посвящены геометрии. В этих трудах М. Паш исследовал аксиоматические основы геометрии.

2. Первый и второй признаки равенства треугольников

Докажем теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

Теорема 1. *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

○ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Так как $\angle A = \angle A'$, то по аксиоме III_6 существует наложение f, при котором $A' = f(A)$, луч AB переходит в луч $A'B'$, а луч AC — в луч $A'C'$. Так как $AB = A'B'$, то по аксиоме III_5 $B' = f(B)$. Аналогично, из равенства $AC = A'C'$ следует, что $C' = f(C)$. Из соотношений $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ на основании аксиомы III_4 мы заключаем, что отрезки AB, BC и CA отображаются соответственно на отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Таким образом, треугольник ABC отображается на треугольник $A'B'C'$, т. е. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. ●

Докажем теперь теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.

Теорема 2. *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

○ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых $AB = A'B'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Для этого, учитывая теорему 1, достаточно доказать, что $AC = A'C'$. Отложим на луче $A'C'$ отрезок $A'C''$, равный отрезку AC (рис. 23). По те-

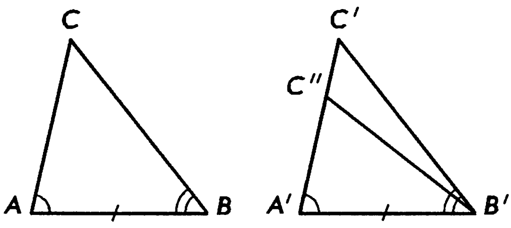


Рис. 23

2–6508

ореме 1 $\triangle ABC = \triangle A'B'C''$, поэтому $\angle B = \angle A'B'C''$. С другой стороны, по условию теоремы $\angle B = \angle A'B'C'$. Так как углы $A'B'C''$ и $A'B'C'$ отложены в одну и ту же полуплоскость с границей $A'B'$, то по аксиоме III_7 эти углы совпадают, т. е. совпадают лучи $B'C'$ и $B'C''$. Отсюда следует, что точки C' и C'' совпадают, и поэтому $AC = A'C'$. ●

§ 10. ТЕОРЕМА О ВНЕШНЕМ УГЛЕ ТРЕУГОЛЬНИКА. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Теорема о внешнем угле треугольника

Прямая называется *секущей* по отношению к двум прямым, если она пересекает их в различных точках. На рис. 24 прямая AC — секущая по отношению к прямым AB и CD. Если $B, D \div AC$, то углы BAC и DCA называются *накрест лежащими углами* (см. рис. 24).

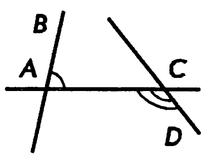


Рис. 24

Лемма 1. *Если при пересечении двух данных прямых секущей накрест лежащие углы равны, то данные прямые не пересекаются.*

○ Пусть при пересечении прямых AB и CD секущей AC накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 25а). Докажем, что прямые AB и CD не пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. что прямые AB и CD имеют общую точку O (рис. 25б).

Предположим, что O — точка луча AB. На луче CD отложим отрезок $CO' = AO$ и рассмотрим треугольники AOC и $CO'A$. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle 3 = \angle CAO'$. С другой стороны, так как $\angle 1 = \angle 2$, то по теореме 1 § 7 $\angle 3 = \angle CAB'$, где B' — точка на продолжении луча AB. Мы пришли в противоречие с аксиомой III_6: от луча AC в одну и ту же полуплоскость отложены два угла CAO' и CAB', равные углу 3. Следовательно, наше предположение неверно, т. е. прямые AB и CD не пересекаются. ●

Угол, смежный с углом треугольника, называется

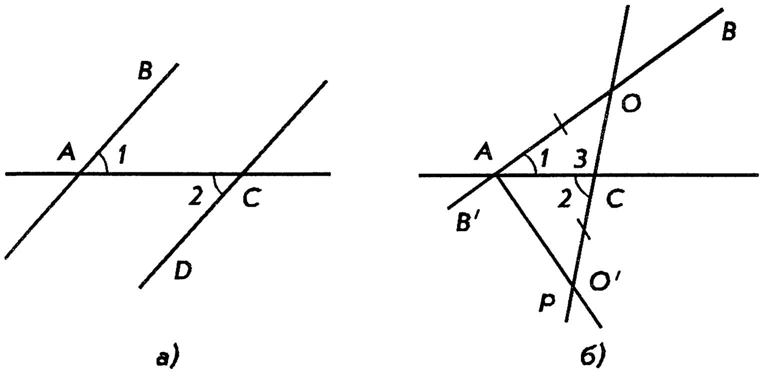


Рис. 25

внешним углом треугольника. Докажем теорему о внешнем угле треугольника.

Теорема 1. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.*

○ Рассмотрим внешний угол BAD треугольника ABC и докажем, например, что $\angle BAD > \angle B$ (рис. 26а).

Углы B и BAD являются накрест лежащими углами при пересечении прямых AC и BC секущей AB. Так как прямые AD и BC пересекаются, то из предыдущей леммы следует, что $\angle B \neq \angle BAD$. Таким образом, либо $\angle BAD < \angle B$, либо $\angle BAD > \angle B$. Докажем, что первый случай невозможен.

В самом деле, если предположить, что $\angle BAD < \angle B$, то тогда существует внутренний луч BM угла B такой, что $\angle ABM = \angle BAD$ (рис. 26б). Этот луч пересекает отрезок AC в некоторой точке N. Мы снова приходим в противоречие с предыдущей леммой: пересекающиеся прямые BN и AD образуют с секущей AB равные накрест лежащие углы ABM и BAD. Таким образом, $\angle BAD > \angle B$. ●

Используя эту теорему докажем лемму о перпендикуляре, проведенном из точки, лежащей на стороне угла. Эта лемма часто используется в дальнейшем изложении.

Лемма 2. *Пусть AOB — данный угол, AH — перпендикуляр, проведенный из точки A стороны OA к пря-*

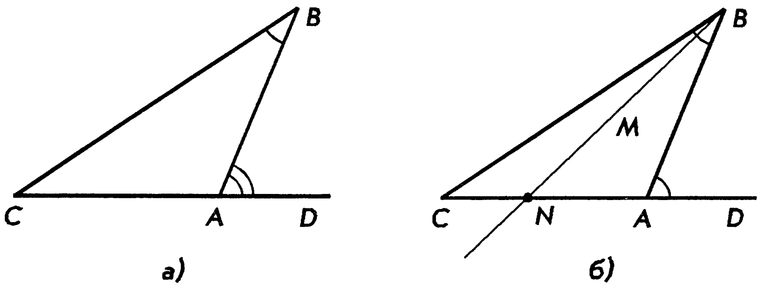


Рис. 26

мой OB. Тогда если угол AOB острый, то точка H лежит на луче OB, а если этот угол тупой, то точка H лежит на продолжении луча OB.

○ Рассмотрим сначала случай, когда угол AOB острый (рис. 27а). Тогда, очевидно, точка H не совпадает с точкой O. Если предположить, что точка H лежит на продолжении луча OB, то получаем треугольник AOH, у которого $\angle H$ прямой, и внешний угол при вершине O — острый. Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Следовательно, H точка луча OB.

Рассмотрим теперь случай, когда $\angle AOB$ — тупой (рис. 27б). Тогда, очевидно, точка H не совпадает с точкой O. Если предположить, что H — точка луча OB, то получаем треугольник AOH, у которого $\angle H$ прямой, поэтому внешний угол при вершине H также прямой,

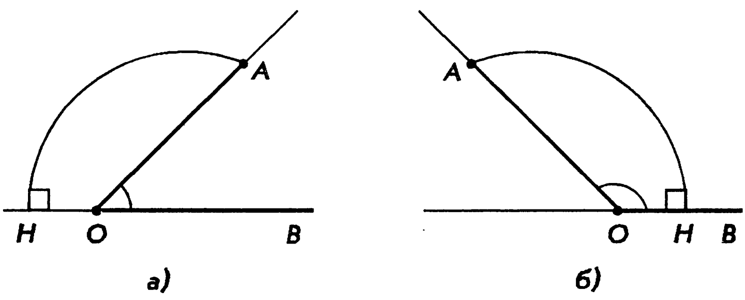


Рис. 27

а $\angle O$ — тупой, что невозможно. Следовательно, H — точка, лежавшая на продолжении луча OB. ●

Пользуясь теоремой о внешнем угле треугольника, легко решить следующую задачу.

Задача. Точка M является внутренней точкой треугольника ABC. Доказать, что $\angle AMB > \angle ACB$.

Для решения задачи следует провести луч CM и воспользоваться теоремой 1 для треугольников ACM и BCM.

2. Виды треугольников

Из теоремы о внешнем угле треугольника следует, что *если один из углов треугольника прямой или тупой, то два других угла острые.* В самом деле, пусть в треугольнике ABC угол C — прямой. Тогда внешний угол при вершине C также прямой, поэтому углы A и B треугольника — острые. Пусть теперь в треугольнике ABC угол C тупой. Докажем, например, что $\angle A$ острый. Проведем внутренний луч CM угла ABC так, чтобы $\angle ACM$ был прямым (рис. 28). Этот луч пересекает отрезок AB в некоторой точке N. Так как треугольник ACN прямоугольный, то $\angle A$ — острый.

Из доказанного утверждения следует, что в любом треугольнике либо все три угла острые, либо один угол прямой, а два угла острые, либо один угол тупой, а два острые.

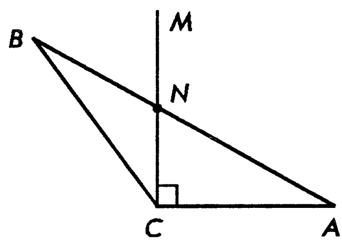


Рис. 28

Если все углы треугольника острые, то треугольник называется *остроугольным;* если один угол треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным;* если один угол треугольника тупой — *тупоугольным.* В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла, называется *гипотенузой,* а две другие стороны — *катетами.*

Нетрудно доказать, что все три вида треугольников существуют. В самом деле, пусть угол AOB — прямой или тупой, тогда, очевидно, треугольник AOB прямоугольный или тупоугольный. Докажем теперь,

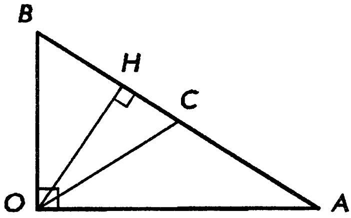


Рис. 29

что существует остроугольный треугольник. Рассмотрим прямоугольный треугольник AOB, в котором угол O — прямой. Проведем перпендикуляр OH к прямой AB (рис. 29). Так как углы OAB и OBA острые, то из леммы о перпендикуляре, проведенном из точки, лежащей на стороне угла, получаем, что точка H лежит на отрезке AB. Возьмем произвольную точку C отрезка AH и рассмотрим треугольник BOC (см. рис. 29).

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что этот треугольник остроугольный.

Мы разделили все треугольники на три класса в зависимости от их углов. Можно разделить треугольники на классы в зависимости от их сторон. Если стороны треугольника попарно не равны, то треугольник называется *разносторонним*. Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Треугольник, все стороны которого равны, называется *равносторонним*.

Треугольники указанных трех видов также существуют. Существование равнобедренных треугольников очевидно, а существование разносторонних и равносторонних треугольников будет доказано ниже.

3. Теорема о равнобедренном треугольнике

В равнобедренном треугольнике равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника.

Докажем теорему о равнобедренном треугольнике.

Теорема 2. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Обратно, если в треугольнике два угла равны, то стороны, противолежащие этим углам, равны, т. е. треугольник равнобедренный.*

○ Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC. Докажем, что $\angle B = \angle C$. Рассмотрим треугольники BAC и CAB. По условию $BA = CA$, $AC = AB$, а по аксиоме III_1 $\angle BAC = \angle CAB$. Следовательно, по теореме 1 § 9 $\triangle BAC = \triangle CAB$. Отсюда и следует, что $\angle B = \angle C$.

Докажем теперь обратное утверждение. Допустим, что в треугольнике ABC $\angle B = \angle C$, и докажем, что $AB = AC$. Рассмотрим треугольники BAC и CAB. По условию теоремы $\angle B = \angle C$, $\angle C = \angle B$, а по аксиоме III_1 $BC = CB$. Следовательно, по теореме 2 § 9 $\triangle BAC = \triangle CAB$. Отсюда следует, что $AB = AC$. ●

Следствие. *Углы при основании равнобедренного треугольника острые.*

○ В самом деле, в любом треугольнике только один угол может быть прямым или тупым, поэтому равные друг другу углы при основании равнобедренного треугольника острые. ●

Теперь легко доказать, что существуют разносторонние треугольники. В самом деле, рассмотрим треугольник ABC, у которого угол A прямой или тупой и $AB \neq AC$. Воспользовавшись следствием из предыдущей теоремы, читатель без труда докажет, что ABC — разносторонний треугольник.

§ 11. СЕРЕДИНА ОТРЕЗКА И БИССЕКТРИСА УГЛА

1. Четвертый признак равенства треугольников

Докажем еще один признак равенства треугольников, который обычно не изучается в школьном курсе геометрии.

Теорема 1. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого и сторона первого треугольника, противолежащая одному из этих углов, равна соответствующей стороне второго треугольника, то такие треугольники равны.*

○ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AC = A'C'$, и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (рис. 30). Для этого, учитывая теорему 1 § 9, достаточно сказать, что $AB = A'B'$.

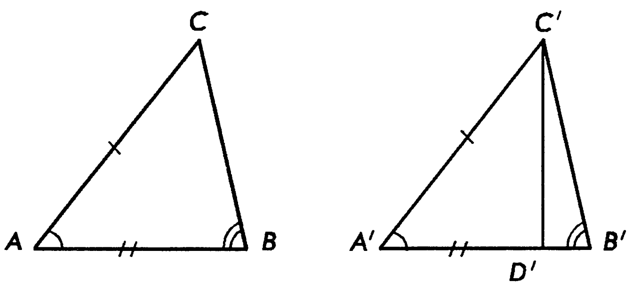


Рис. 30

Доказательство этого равенства проведем методом от противного, т. е. допустим, что эти отрезки не равны. Пусть, например, $AB < A'B'$. Тогда на отрезке $A'B'$ существует такая точка D', что $A'D' = AB$ (см. рис. 30). По теореме 1 § 9 $\triangle ABC = \triangle A'D'C'$, поэтому $\angle B = \angle A'D'C'$. По условию теоремы $\angle B = \angle A'B'C'$, следовательно, $\angle A'D'C' = \angle A'B'C'$. Мы пришли к выводу, что в треугольнике $B'C'D'$ внешний угол при вершине D' равен углу B'. Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Итак, $AB = A'B'$. ●

2. Середина отрезка

Серединой отрезка AB называется такая точка C прямой AB, что $AC = CB$.

Теорема 2. *Каждый отрезок имеет одну и только одну середину. Середина отрезка лежит на самом отрезке.*

○ Докажем сначала, что данный отрезок AB имеет середину. Для этого через его концы проведем прямые, перпендикулярные к прямой AB и на этих прямых отложим равные отрезки AA_1 и BB_1 так, что $A_1, B_1 \div AB$ (рис. 31а). Тогда прямая AB пересекает отрезок A_1B_1 в некоторой точке C. Докажем, что C — середина отрезка AB.

Сначала докажем, что $A - C - B$. Предположим, что это не так. Тогда одна из точек A или B, например B, лежит между точкой A и точкой $C: A - B - C$. Рассмотрим $\triangle AA_1C$ и прямую BB_1 (рис. 31б). Так как $A - B - C$, то прямая BB_1 пересекает сторону AC этого треугольника. Прямая BB_1 не пересекает сторону AA_1 (так как $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$, следствие теоремы § 8) и

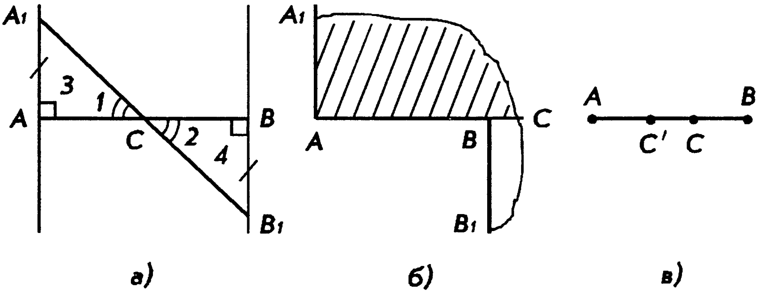


Рис. 31

не пересекает сторону A_1C (так как точка B_1 не лежит между точками A_1 и C). Мы пришли в противоречие с предложением Паша. Отсюда следует, что $A - C - B$ (рис. 31а).

Треугольники AA_1C и BB_1C равны по четвертому признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AA_1 = BB_1$), следовательно, $AC = CB$.

Докажем теперь, что C — единственная середина отрезка AB. Допустим, что C' — другая середина этого отрезка. Возможны три случая: а) $A - C' - B$; б) $C' - A - B$; в) $C' - B - A$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) По теореме о делении отрезка точка C' принадлежит либо отрезку AC, либо отрезку CB. В первом случае $AC' < AC$ и $BC' > BC$ (рис. 31в) (так как $C' - C - B$). Но $AC = BC$, следовательно, $AC' < BC'$ и поэтому $AC' \neq BC'$. Во втором случае аналогично доказывается, что $AC' > BC'$, поэтому $AC' \neq BC'$.

б) Так как $C' - A - B$, то $C'A < C'B$, следовательно, $C'A \neq C'B$.

в) Так как $C' - B - A$, то $C'B < C'A$, следовательно, $C'A \neq C'B$.

Итак, мы доказали, что отрезок AB имеет единственную середину C. ●

3. Биссектриса угла

Биссектрисой неразвернутого угла hk называется такой внутренний луч l этого угла, что $\angle hl = \angle lk$.

Теорема 3. *Каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну биссектрису.*

○ Пусть hk — данный неразвернутый угол. На сторонах этого угла от вершины O отложим равные отрезки OA и OB (рис. 32).

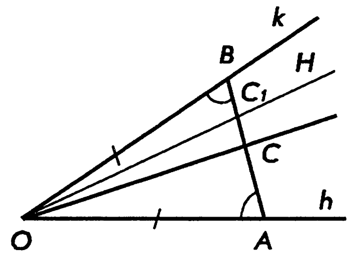


Рис. 32

Пусть C — середина отрезка AB. Тогда C — внутренняя точка угла hk, поэтому луч OC — внутренний луч этого угла. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle A = \angle B$. Но тогда $\triangle AOC = \triangle BOC$, поэтому $\angle AOC = \angle BOC$, т. е. луч OC — биссектриса угла AOB.

Докажем теперь, что OC — единственная биссектриса угла hk. Пусть, например, луч OH — какая-то биссектриса угла hk. Этот луч — внутренний луч угла AOB, поэтому он пересекает отрезок AB в некоторой точке C_1.

$\triangle AOC_1 = \triangle BOC_1$ ($OA = OB$, OC_1 — общая сторона, $\angle AOC_1 = \angle BOC_1$), следовательно, $AC_1 = C_1B$. Отсюда следует, что точка C_1 — середина отрезка AB. Так как отрезок имеет единственную середину, то точки C и C_1 совпадают, следовательно, луч OH совпадает с лучом OC. ●

§ 12. МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Медиана, биссектриса и высота треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой треугольника* (рис. 33а).

Каждый треугольник имеет три медианы. Все точ-

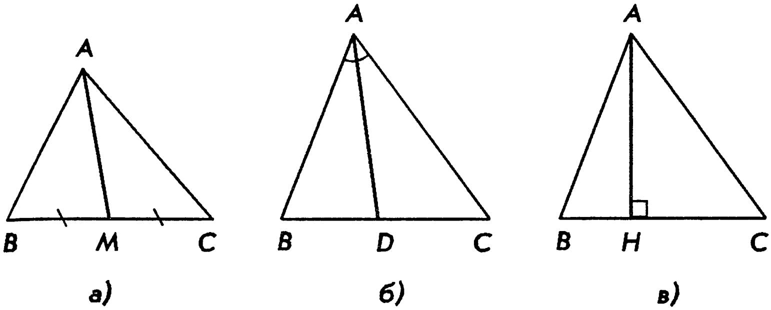


Рис. 33

ки, лежащие на медиане треугольника, принадлежат внутренней области треугольника.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой треугольника* (рис. 33б).

Каждый треугольник имеет три биссектрисы. Все точки, лежащие на биссектрисе треугольника, принадлежат внутренней области треугольника.

Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется *высотой треугольника* (рис. 33в).

Каждый треугольник имеет три высоты. Из леммы о перпендикуляре, проведенном из точки, лежащей на стороне угла, следует, что все точки, лежащие на высоте остроугольного треугольника, принадлежат внутренней области треугольника (рис. 33в).

В прямоугольном треугольнике две высоты совпадают с его катетами, а точки, лежащие на высоте, проведенной из вершины прямого угла, принадлежат внутренней области треугольника (рис. 34а). Отметим, наконец, что в тупоугольном треугольнике точки, лежащие на высоте, проведенной из вершины тупого угла, принадлежат внутренней области треугольника, а на двух других высотах нет ни одной точки внутренней области треугольника (рис. 34б).

Ниже мы докажем следующие замечательные свойства медиан, биссектрис и высот треугольника: три медианы треугольника пересекаются в одной точке

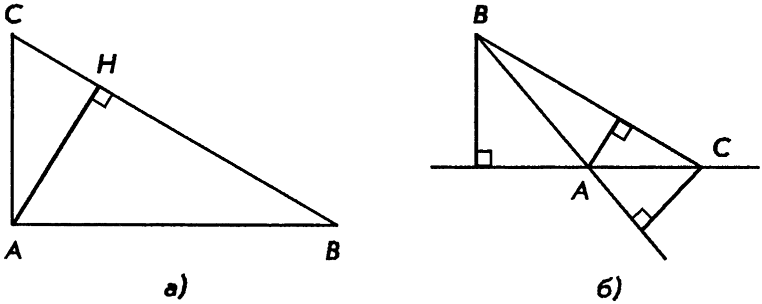


Рис. 34

(рис. 35а); три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 35б); высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке (рис. 35в), а высоты прямоугольного треугольника имеют общий конец (рис. 34а). В тупоугольном треугольнике высоты не имеют общих точек, но прямые, содержащие эти высоты, пересекаются в одной точке (рис. 35г).

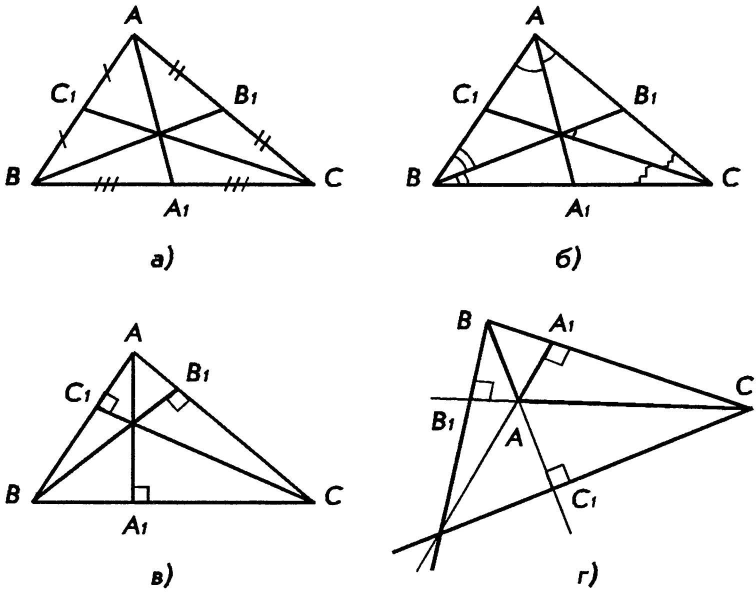


Рис. 35

2. Биссектрисы, медианы и высоты равнобедренного треугольника

Докажем теорему о биссектрисе, медиане и высоте равнобедренного треугольника, проведенных к основанию.

Теорема 1. *Биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают.*

○ Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором AD, AM и AH — соответственно биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию (на рис. 36а изображена только биссектриса AD треугольника). Докажем, что отрезки AD, AM и AH совпадают.

Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$, $AB = AC$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что D — сере-

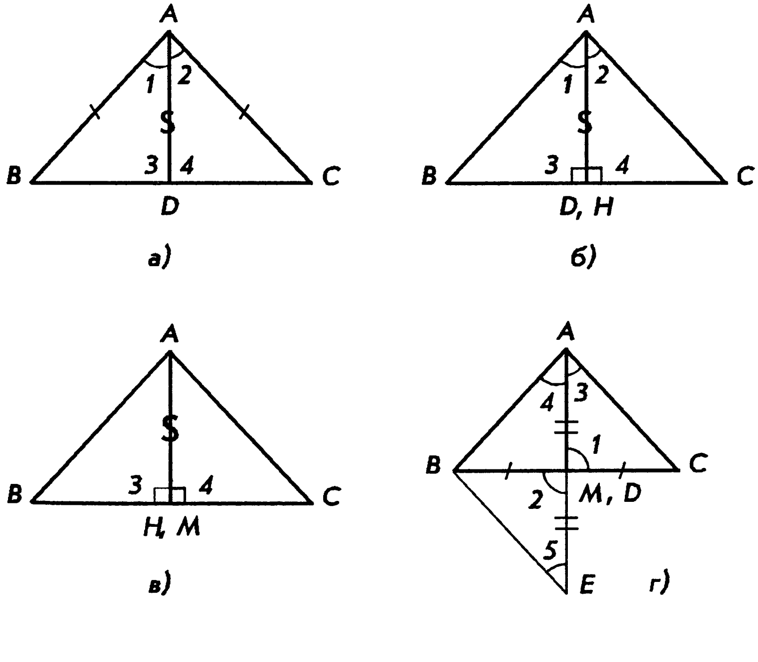


Рис. 36

дина отрезка BC, т. е. точки D и M совпадают, следовательно, и отрезки AD и AM совпадают. Равенство $\angle 3 = \angle 4$ означает, что углы 3 и 4 прямые, т. е. AD — высота треугольника ABC, следовательно, отрезки AD и AH также совпадают. ●

Докажем теорему, которая в какой-то степени является обратной теореме 1.

Теорема 2. *Пусть AD, AM и AH — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC. Если какие-нибудь два из трех отрезков AD, AM и AH совпадают, то все эти отрезки совпадают и $AC = AB$, т. е. треугольник ABC — равнобедренный.*

○ Предположим, что отрезки AD и AH совпадают (рис. 36б), тогда $\triangle ABD = \triangle ACD$ по второму признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, AD — общая сторона). Поэтому $AB = AC$. Из теоремы 1 следует, что отрезок AM совпадает с отрезками AD и AH.

Предположим теперь, что отрезки AM и AH совпадают (рис. 36в). Тогда $\triangle ABM = \triangle ACM$ по первому признаку равенства треугольников ($BM = CM$, AM — общая сторона, $\angle 3 = \angle 4$). Поэтому $AB = AC$. Из теоремы 1 следует, что отрезок AD совпадает с отрезками AM и AH.

Рассмотрим, наконец, случай, когда отрезки AD и AM совпадают. На продолжении луча MA возьмем точку E такую, что $AM = ME$ (рис. 36г) и соединим ее отрезком с точкой B. Треугольники AMC и EMB равны по первому признаку равенства треугольников ($MC=MB$, $AM=EM$, $\angle 1=\angle 2$), поэтому $AC = BE$, $\angle 3=\angle 5$. Но $\angle 3 = \angle 4$, следовательно, $\angle 4 = \angle 5$. Отсюда следует, что треугольник ABE равнобедренный, т. е. $AB = BE$. Так как $BE = AC$, то $AB = AC$. Из теоремы 1 следует, что отрезок AH совпадает с отрезками AD и AM. ●

Имеют место следующие свойства медиан и биссектрис равнобедренного треугольника.

1°. *В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.*

2°. *В равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведенные к боковым сторонам, равны.*

Предлагаем читателю, используя первый и второй признаки равенства треугольников, доказать эти утверждения самостоятельно.

§ 13. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Третий признак равенства треугольников

Теорема 1. *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

○ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (рис. 37). От луча $A'B'$ в полуплоскость, содержащую точку C', отложим угол $B'A'M'$, равный углу BAC (аксиома III_7). На стороне $A'M'$ этого угла отложим отрезок $A'C''$, равный отрезку AC, и докажем, что точки C' и C'' совпадают. Допустим, что это не так. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C''$, поэтому $CB = C''B'$. Учитывая условия теоремы, получаем: $A'C' = A'C''$ и $B'C' = B'C''$.

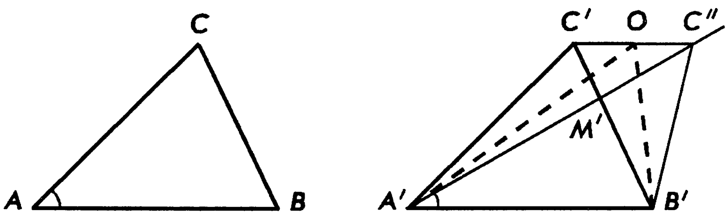


Рис. 37

Так как, по предположению, точки C' и C'' не совпадают, то из первого равенства следует, что лучи $A'C'$ и $A'C''$ не совпадают, поэтому точки A', C', C'' не лежат на одной прямой, т. е. $A'C'C''$ — равнобедренный треугольник с основанием $C'C''$. Аналогично убеждаемся в том, что $B'C'C''$ равнобедренный треугольник с основанием $C'C''$.

Пусть O — середина отрезка $C'C''$. Тогда отрезки $A'O$ и $B'O$ являются медианами треугольников $A'C'C''$ и $B'C'C''$, поэтому эти же отрезки являются высотами этих треугольников, т. е. $A'O \perp C'C''$ и $B'O \perp C'C''$. Это противоречит теореме о перпендикулярных прямых (§ 8), т. к. OA' и OB' — различные прямые. Следовательно, точки C' и C'' совпадают, поэтому $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. ●

2. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Рассмотренные нами четыре признака равенства треугольников могут быть применены и к прямоугольным треугольникам. В этом случае соответствующие признаки несколько упрощаются, так как угол, образованный катетами прямоугольного треугольника — прямой, а любые два прямых угла равны.

Из первого и второго признаков равенства треугольников следуют утверждения:

1°. *Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то треугольники равны.*

2°. *Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то треугольники равны.*

Из четвертого признака равенства треугольников следуют утверждения:

3°. *Если катет и противолежащий угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого, то треугольники равны.*

4°. *Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то треугольники равны.*

Рассмотрим еще один признак равенства прямоугольных треугольников.

5°. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.*

○ Рассмотрим треугольники ABC и $A'B'C'$, у которых углы A и A' — прямые, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$ и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (рис. 38). Для этого, учитывая признак 1° равенства прямоугольных треугольников, достаточно доказать, что $AB = A'B'$.

Доказательство проведем методом от противного,

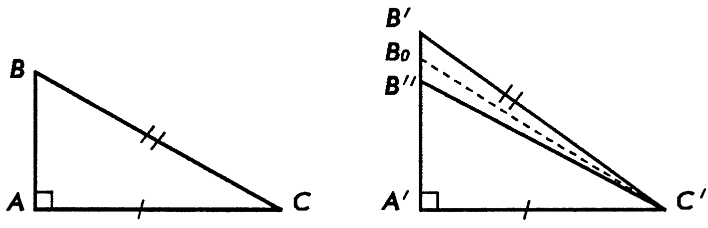


Рис. 38

т. е. предположим, что отрезки AB и $A'B'$ не равны, например $AB < A'B'$. Тогда на отрезке $A'B'$ существует точка B'' такая, что $AB = A'B''$ (см. рис. 38). Треугольники ABC и $A'B''C'$ равны по двум катетам, поэтому $BC = B''C'$. По условию $BC = B'C'$, поэтому $B''C' = B'C'$. Следовательно, треугольник $C'B''B'$ — равнобедренный, и поэтому медиана $C'B_0$ этого треугольника является также высотой. Мы пришли к выводу, что через точку C' проходят две прямые $C'A'$ и $C'B_0$, перпендикулярные к прямой $A'B'$, что противоречит теореме о перпендикулярных прямых. Таким образом $AB = A'B'$. ●

Используя признаки равенства прямоугольных треугольников, докажем теорему.

Теорема 2. *Треугольник ABC является равнобедренным с основанием AB тогда и только тогда, когда его высоты AA_1 и BB_1 равны.*

○ Предположим, что в треугольнике ABC $AC = BC$. По следствию из теоремы о равнобедренном треугольнике углы A и B острые, поэтому точка A_1 лежит на луче BC, а точка B_1 — на луче AC. По признаку 4^0 равенства прямоугольных треугольников $\triangle ABA_1 =$ $= \triangle BAB_1$, поэтому $AA_1 = BB_1$.

Обратно, пусть $AA_1 = BB_1$. Докажем, что $AC = BC$. Это утверждение очевидно, когда $\angle C$ — прямой, поэтому предположим, что $\angle C$ не прямой. Тогда точки A_1 и B_1 лежат либо на лучах CB и CA, если $\angle C$ — острый, либо на продолжениях этих лучей, если $\angle C$ — тупой. И в том и в другом случаях по признаку 3^0 равенства прямоугольных треугольников $\triangle AA_1C = \triangle BB_1C$, поэтому $AC = BC$. ●

3. Другие признаки равенства треугольников

Признаки равенства треугольников, в частности прямоугольных треугольников, рассмотренные выше, основаны на равенстве основных элементов — сторон и углов треугольника. Однако можно сформулировать и другие признаки равенства треугольников, основанные на равенстве других элементов треугольников, отличных от сторон и углов. В следующей задаче сформулированы несколько таких признаков, доказательство которых предоставляем читателю.

Задача. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$; CH и C_1H_1 — высоты этих треугольников, а CM и C_1M_1 — их медианы. Доказать, что в каждом из следующих случаев треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны:

а) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $CH = C_1H_1$;

б) $AB = A_1B_1$, $CM = C_1M_1$, $CH = C_1H_1$;

в) $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$, $CM = C_1M_1$;

г) $CM = C_1M_1$, $\angle ACM = \angle A_1C_1M_1$, $\angle MCB = \angle M_1C_1B_1$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

30. Доказать, что фигура, образованная из всех точек треугольника и всех точек его внутренней области, является выпуклой фигурой, а фигура, образованная из всех внешних точек относительно треугольника, не является выпуклой.

31. Доказать, что прямая, проходящая через точку, лежащую внутри треугольника, пересекает треугольник в двух точках.

32. Доказать, что ломаная, соединяющая две точки, одна из которых лежит внутри треугольника, а другая является внешней по отношению к треугольнику, имеет хотя бы одну общую точку с данным треугольником.

33. Доказать, что при наложении треугольник отображается на треугольник, причем вершины и стороны треугольника отображаются соответственно в вершины и на стороны его образа.

34. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$.

35. Могут ли два треугольника быть неравными,

если а) две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого; б) сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого треугольника? Ответы обосновать.

36. В треугольнике ABC с неравными сторонами AB и AC проведен отрезок AM, где M — произвольная точка, лежащая на стороне BC. Доказать, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

37. Отрезки AM и A_1M_1 являются медианами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны в каждом из следующих случаев:
а) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AM = A_1M_1$;
б) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$.

38. Могут ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с высотами AM и A_1M_1 быть неравными, если:
а) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$;
б) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AM = A_1M_1$?

39. Доказать, что треугольник является равнобедренным, если существует наложение, отличное от тождественного преобразования, которое переводит этот треугольник в себя.

40. Точки A, B и C лежат на одной прямой, не проходящей через точку D. Доказать, что какие-то два из отрезков DA, DB и DC не равны друг другу.

41. Доказать равенство равнобедренных треугольников: а) по основанию и углу при основании; б) по углу, противолежащему основанию и медиане, проведенной к основанию; в) по углу при основании и высоте, проведенной к боковой стороне; г) по боковой стороне и медиане, проведенной к ней; д) по боковой стороне и углу при основании; е) по основанию и противолежащему углу.

42. Доказать, что теорема о внешнем угле треугольника равносильна утверждению: для любых двух углов треугольника существует угол, равный их сумме.

43. Доказать, что треугольник ABC прямоугольный, если сторона AB в два раза больше стороны BC, а угол B в два раза больше угла A.

44. В прямоугольном треугольнике один из острых углов вдвое больше другого острого угла. Доказать, что один из катетов треугольника равен половине гипотенузы.

45. Доказать, что при наложении: а) середина отрезка переходит в середину его образа; б) биссектриса угла переходит в биссектрису его образа.

46. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Доказать, что если треугольники ABE_1 и ABE_2 равны и прямая AB содержит биссектрису угла E_1AE_2, то треугольники CDE_1 и CDE_2 равны.

47. Доказать, что биссектриса угла составляет острые углы со сторонами угла.

48. Доказать, что биссектрисы двух разных углов, имеющих одну общую сторону, не совпадают и не являются дополнительными лучами одной прямой, причем биссектрисы двух смежных углов образуют прямой угол.

49. На одной стороне угла A взяты точки B и C, на другой стороне — точки B_1 и C_1 так, что $A - B - C$, $A - B_1 - C_1$. Доказать, что: а) отрезки BC_1 и B_1C пересекаются в некоторой точке O; б) если $AC = AC_1$ и $AB = AB_1$ или $AC = AC_1$ и $\angle CBC_1 = \angle C_1B_1C$, то точка O лежит на биссектрисе угла A.

50. Даны четыре луча OA, OB, OC и OD с общим началом. Биссектриса угла COD является продолжением биссектрисы угла AOB, а биссектриса угла BOC — продолжением биссектрисы угла AOD. Доказать, что лучи OA и OC, а так же лучи OB и OD являются дополнительными лучами.

51. Доказать, что две высоты треугольника пересекаются тогда и только тогда, когда треугольник остроугольный.

52. В треугольнике одна из медиан перпендикулярна к некоторой биссектрисе. Доказать, что одна из сторон треугольника в два раза больше некоторой другой стороны.

53. Точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ABC. Доказать, что если $AM = MB$, то $\angle ACM = \angle BCM$, а если $AM < MB$, то $\angle ACM < \angle BCM$.

54. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Доказать, что если отрезки OA_1 и OB_1 равны, то треугольник ABC — равнобедренный.

55. В треугольнике ABC, где $\angle C$ — острый или тупой, прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Доказать, что точка O лежит на пря-

мой, содержащей биссектрису угла C тогда и только тогда, когда ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB.

56. Равные друг другу треугольники ABC и AB_1C_1 расположены так, что $\angle BAB_1 = \angle CAC_1$. Доказать, что если прямая AC проходит через середину отрезка BB_1, то прямая AB_1 проходит через середину отрезка CC_1.

57. Отрезки AB и CD пересекаются, $CA = CB$ и $DA = DB$. Доказать, что прямые AB и CD перпендикулярны.

58. Доказать, что высота, проведенная из вершины прямого или тупого угла треугольника, не равна двум другим высотам.

59. Доказать, что основание H высоты AH треугольника ABC лежит на стороне BC тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий: а) угол A — тупой или прямой; б) треугольник ABC — остроугольный.

60. Доказать, что основания высот остроугольного или тупоугольного треугольника не лежат на одной прямой. При этом если треугольник остроугольный, то все три основания высот лежат на сторонах треугольника, а если треугольник тупоугольный, то основание одной высоты лежит на стороне, а основания двух других высот на продолжениях двух других сторон.

61. Из точек A и B, лежащих по разные стороны от данной прямой, проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к ней. Пусть M — точка пересечения отрезков A_1B_1 и AB (см. задачу 29). Доказать, что: а) если $AA_1 = BB_1$, то $A_1M = MB_1$, т. е. M — середина отрезка A_1B_1, и $\angle A_1AM = \angle B_1BA$; б) если $AA_1 < BB_1$, то $A_1M < B_1M$.

62. Из точек A и B, лежащих по одну сторону от данной прямой, проведем равные друг другу перпендикуляры AA_1 и BB_1 к ней. Доказать утверждения:
а) $\angle A_1AB = \angle B_1BA$;
б) отрезки AB_1 и BA_1 равны, пересекаются в некоторой точке O и $OA = OB$, $OA_1 = OB_1$;
в) прямая, проходящая через середину отрезка A_1B_1 и перпендикулярная к нему, проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему.

63. Прямая l проходит через середины сторон AC и BC треугольника ABC. Доказать, что: а) перпендикуляры, проведенные из вершин A и B к прямой l, рав-

ны; б) прямая, проходящая через середину стороны AB и перпендикулярная к ней, перпендикулярна к прямой l.

64. Отрезки AH и A_1H_1 являются высотами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы при основаниях BC и B_1C_1 острые. Доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AH = A_1H_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

65. Прямая проходит через середину M стороны BC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке S и продолжение стороны AC в точке T. Доказать, что
а) $MS \neq MT$ и $BS \neq SA$; б) $BS < SA$, если $A - C - T$, и $BS > SA$, если $C - A - T$.

66. Из точек A и B, лежащих по одну сторону от данной прямой, проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к ней. Доказать утверждения:
а) если $AA_1 < BB_1$, то $\angle A_1AB > \angle ABB_1$;
б) если $\angle A_1AB = \angle ABB_1$, то $AA_1 = BB_1$;
в) если $\angle A_1AB > \angle ABB_1$, то $AA_1 < BB_1$.

67. В треугольнике ABC, где $AC < CB$, проведены медиана CM, биссектриса CD и высота CH. Доказать, что:
а) $\angle ACM > \angle MCB$;
б) $\angle ADC < \angle CDB$;
в) $\angle ACH < \angle HCB$.

68. В треугольнике ABC, где $AC < CB$, проведены медиана CM, биссектриса CD и высота CH. Доказать, что CM, CD и CH — попарно различные отрезки и CD — внутренний луч угла HCM, CM — внутренний луч угла DCB.

69. Через концы M и N отрезка MN с серединой O проведены прямые a и b, перпендикулярные к прямой MN. На прямой a взята произвольная точка A, а на другой прямой b — точка B так, что $\angle AOB$ — прямой, OH — высота треугольника AOB. Доказать, что при любом другом выборе точки A' на прямой a, высота OH' соответствующего треугольника $A'OB'$ равна отрезку OH.

Глава III

ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 14. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

1. Понятие длины отрезка

В этом параграфе мы введем важное понятие геометрии — длину отрезка. Напомним, что с помощью наложений мы ввели понятие равных отрезков и установили для отрезков отношения «больше» и «меньше» без введения понятия длины отрезка, т. е., по существу, без использования понятия числа.

Сформулируем задачу измерения отрезков.

Пусть каждому отрезку соответствует определенное положительное число так, что:

$Д_1$. Равным отрезкам соответствует одно и то же число.

$Д_2$. Если B — точка, лежащая на отрезке AC, и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a + b$.

$Д_3$. Некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число, равное единице.

Тогда число, указанным образом соответствующее каждому отрезку, называется *длиной* этого отрезка. Отрезок PQ называется *единицей измерения* или *единичным отрезком.*

Возникает вопрос: существует ли соответствие между отрезками и вещественными числами, удовлетворяющие условиям $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$? Оказывается, что только с помощью аксиом групп I, II и III невозможно дать положительный ответ на этот вопрос. Мы примем в качестве аксиомы еще одно предложение, которое назовем *аксиомой существования длины отрезка.*

IV_1. При произвольно выбранном единичном отрезке каждый отрезок имеет определенную длину.

Другими словами, аксиома утверждает, что измерение отрезков возможно, т. е. при произвольно выбранном единичном отрезке каждому отрезку соответствует определенное число так, что удовлетворяются условия $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$.

2. Некоторые свойства длин отрезков

Условимся длину отрезка AB при выбранной единице измерения обозначать через $\rho(AB)$.

1^0. *Если* $AB < CD$, *то* $\rho(AB) < \rho(CD)$. *Обратно, если* $\rho(AB) < \rho(CD)$, *то* $AB < CD$.

○ Пусть $AB < CD$. Тогда на отрезке CD существует такая точка M, что $CM = AB$. Согласно условиям $Д_1$ и $Д_2$ $\rho(CM) = \rho(AB)$, $\rho(CD) = \rho(CM) + \rho(MD)$ или $\rho(CD) = \rho(AB) + \rho(MD)$, следовательно, $\rho(AB) < \rho(CD)$.

Обратно, пусть $\rho(AB) < \rho(CD)$. По теореме 1 § 6 возможны три случая: $AB = CD$, $AB > CD$, $AB < CD$. Первый и второй случаи не могут иметь места, т. к. в первом случае по свойству $Д_1$ $\rho(AB) = \rho(CD)$, а во втором случае по доказанному $\rho(AB) > \rho(CD)$. Таким образом, $AB < CD$.●

Будем говорить, что отрезок EF *укладывается* в отрезке AB n раз, где n — натуральное число, если на отрезке AB существуют попарно различные точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} такие, что они следуют друг за другом и $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}B = EF$ (рис. 39). Нетрудно доказать, что при $i < j < n-1$ имеем: $A - A_i - A_j$.

Рис. 39

2^0. *Если отрезок* EF *укладывается в отрезке* AB n *раз, то* $\rho(AB) = n\rho(EF)$.

○ По условию на отрезке AB существуют попарно различные точки A_1, A_2,........, A_{n-1} такие, что они следуют друг за другом и $AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}B = EF$. Так как $A - A_1 - A_2$, то по условиям $Д_1$ и $Д_2$ измерения отрезков $\rho(AA_1) + \rho(A_1A_2) = \rho(AA_2)$ или $\rho(AA_2) = 2\rho(EF)$.

Далее, из соотношения $A - A_2 - A_3$ имеем: $\rho(AA_2) + \rho(A_2A_3) = \rho(AA_3)$ или $\rho(AA_3) = 3\rho(EF)$. Аналогично, $\rho(AA_4) = 4\rho(EF)$, ... $\rho(AA_{n-1}) = (n-1)\rho(EF)$, $\rho(AB) = n\rho(EF)$. ●

3. Теорема единственности длины отрезка

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. (предложение Архимеда[1]).

Если AB и CD — произвольные отрезки, то на луче AB существует конечное множество точек A_1, A_2, ... A_n, таких, что A, A_1, ..., A_n следуют друг за другом, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = CD$ и $A - B - A_n$.

○ Пользуясь аксиомой IV_1, введем измерение отрезков, приняв за единицу измерения отрезок CD. Возьмем натуральное число n так, чтобы $n > \rho(AB)$, где $\rho(AB)$ — длина отрезка AB. Отложим на луче AB последовательно отрезки AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, равные отрезку CD. Тогда, по свойству 2^0 $\rho(AA_n) = n\rho(CD) = n$. Таким образом, $\rho(AA_n) > \rho(AB)$, поэтому по свойству 1^0 $AA_n > AB$, т. е. $A - B - A_n$. ●

Замечание. Пользуясь аксиомами групп I, II, III и аксиомой IV_1, мы доказали предложение Архимеда. Можно показать, что из аксиом групп I, II, III и предложения Архимеда следует утверждение аксиомы IV_1. Таким образом, вместо аксиомы IV_1 можно было принять предложение Архимеда.

Докажем теперь, что условия $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ измерения отрезков единственным образом определяют длину каждого отрезка.

Теорема 2. *Если выбран единичный отрезок EF, то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором удовлетворяются условия $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ измерения отрезков.*

○ Допустим, что утверждение теоремы неверно, т. е. при выбранной единице измерения EF существует по крайней мере два соответствия, каждое из которых удовлетворяет условиям $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$. Тогда существует отрезок MN такой, что его длина $\rho(MN)$ при пер-

---

[1] Архимед (ок. 287—212 до н. э.) — древнегреческий ученый. Родился в Сиракузах (о. Сицилия). Центральной темой математических работ Архимеда являются задачи на нахождение площадей поверхностей и объемов тел.

вом соответствии не равна его длине $\rho'(MN)$ при втором соответствии. Пусть $\rho(MN) = a$, $\rho'(MN) = b$ и допустим, для определенности, что $b > a$.

Возьмем натуральное число k такое, что $k > \frac{1}{b-a}$. Рассмотрим отрезок AB, в котором отрезок MN укладывается k раз. По свойству 2^0 $\rho(AB) = k\rho(MN) = ka$, $\rho'(AB) = \rho'(MN) = kb$. Так как $\rho'(AB) = kb > 1$, $\rho'(EF) = 1$, то по свойству 1^0 $AB > EF$.

Пользуясь предложением Архимеда, на луче AB отложим последовательно отрезки $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$, равные отрезку EF, так, чтобы точка A_{n-1} принадлежала отрезку AB и $A - B - A_n$. По свойству 2^0

$$\rho(AA_{n-1}) = \rho'(AA_{n-1}) = n - 1, \rho(AA_n) = \rho'(AA_n) = n. \quad (1)$$

Из первого равенства следует, что точки A_{n-1} и B не совпадают, поэтому $A_{n-1} - B - A_n$, т. е. $AA_{n-1} < AB < AA_n$. Отсюда, по свойству 1^0, имеем $\rho(AA_{n-1}) < \rho(AB) < \rho(AA_n)$ и $\rho'(AA_{n-1}) < \rho'(AA_n)$. Учитывая равенства (1), получаем: $n - 1 < \rho(AB) < n$, $n - 1 < \rho'(AB) < n$ или $n - 1 < ka < n$, $n - 1 < kb < n$.

Таким образом, $k(b - a) < 1$. Мы пришли в противоречие с неравенством $k > \frac{1}{b-a}$. Итак, наше предположение о том, что существуют по крайней мере два соответствия, удовлетворяющие условиям $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$, неверно. ●

Отметим, что длина отрезка зависит от выбора единицы измерения.

4. Аксиома существования отрезков данной длины. Единицы измерений

Возникает вопрос: для любого ли вещественного положительного числа a существует отрезок, длина которого при выбранной единице измерения равна a? Оказывается, что для положительного ответа на этот вопрос нужна еще одна аксиома, которую назовем *аксиомой существования отрезка данной длины.*

IV_2. Для любого вещественного положительного числа a существует отрезок, длина которого, при выбранном единичном отрезке, равна a.

Эта аксиома часто используется в геометрии для доказательства важных теорем. здесь мы рассмотрим две теоремы.

Теорема 3. *При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число, равное длине старой единицы измерения при новой единице измерения.*

○ Пусть x — длина произвольного отрезка AB при единице измерения PQ, а x' — длина того же отрезка при единице измерения $P'Q'$. Тогда x' является функцией x, т. е. $x' = f(x)$. Согласно аксиоме IV_2 эта функция определена при всех положительных значениях x и принимает только положительные значения.

Пусть x и y — произвольные вещественные числа. Возьмем на некоторой прямой точки A, B и C так, чтобы $A - B - C$ и длины отрезков AB и BC при единице измерения PQ были равны соответственно x и y. Тогда согласно условию $Д_2$ длина отрезка AC при той же единице измерения равна $x + y$. При единице измерения $P'Q'$ длины отрезков AB, BC и AC равны $f(x)$, $f(y)$, $f(x + y)$, поэтому в силу условия $Д_2$

$$f(x) + f(y) = f(x + y). \tag{2}$$

В курсе математического анализа доказывается, что функция f, определенная при всех положительных значениях x, принимающая только положительные значения и обладающая свойством (2), имеет вид: $f(x) = ax$, где $a = const$. (См., например, [18], § 46, теорема 103.)

Чтобы установить геометрический смысл коэффициента a, заметим, что длина отрезка PQ при единице измерения PQ равна 1, поэтому длина этого же отрезка при единице измерения $P'Q'$ равна $f(1) = a$. ●

Предлагаем читателю, используя эту теорему решить следующую задачу.

Задача. Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Доказать, что $a \cdot b = 1$.

Теорема 4. *На каждом отрезке AB существуют точки, которые делят его на n равных частей, где n — натуральное число, $n > 1$.*

○ Выберем единицу измерения и, пользуясь аксиомой IV_2, рассмотрим отрезок MN, длина которого равна $\frac{1}{n}\rho(AB)$. На луче AB рассмотрим последовательность следующих друг за другом точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$, таких, что $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = MN$. Так как отрезок MN укладывается в отрезке AA_n n раз, то по свойству 2^0 $\rho(AA_n) = n\rho(MN) = n \cdot \frac{1}{n}\rho(AB) = \rho(AB)$. Отсюда следует, что $AA_n = AB$, поэтому точки A_n и B совпадают. Следовательно, точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ делят отрезок AB на n равных частей. ●

Для измерения отрезков на практике используются различные единицы измерений. Стандартной международной единицей измерения отрезков является метр — отрезок, приближенно равный 1:40.000 000 части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруса хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

§ 15. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

1. Понятие меры угла

Аналогично длине отрезка определяется мера угла.

Пусть каждому неразвернутому углу соответствует определенное положительное число так, что выполняются следующие основные условия:

1. Равным углам соответствует одно и то же число.
2. Если l — внутренний луч угла hk и углам hl и lk соответствуют числа α и β, то углу hk соответствует число $\alpha + \beta$.
3. Некоторому углу p_0q_0 соответствует число, равное единице.

Тогда число, указанным образом соответствующее каждому углу, называется *мерой* этого угла. Угол p_0q_0 называется *единицей измерения углов.*

Пользуясь аксиомами групп I, II, III и IV, можно доказать существование и однозначную определенность меры угла. (См. [4] §§ 27, 28 и 29.) Доказательства этих теорем выходит за рамки настоящего учебного пособия.

Меру угла hk при выбранной единице измерения углов будем обозначать через $\widehat{hk}$.

Имеет место утверждение, аналогичное свойству 1^0 § 14 для отрезков.

Лемма. *Пусть hk и lm — неразвернутые углы. Неравенство $\angle hk < \angle lm$ имеет место тогда и только тогда, когда $\widehat{hk} < \widehat{lm}$, а равенство $\angle hk = \angle lm$ тогда и только тогда, когда $\widehat{hk} = \widehat{lm}$.*

○ Пусть $\angle hk < \angle lm$. Тогда существует внутренний луч s угла lm такой, что $\angle hk = \angle ls$. Согласно основным условиям 1 и 2 $\widehat{hk} = \widehat{ls}$, $\widehat{lm} = \widehat{ls} + \widehat{sm}$ или $\widehat{lm} = \widehat{hk} + \widehat{sm}$. Но $\widehat{sm} > 0$, следовательно, $\widehat{hk} < \widehat{lm}$.

Обратно, пусть $\widehat{hk} < \widehat{lm}$. По теореме 2 § 6 возможны три случая: $\angle hk = \angle lm$, $\angle hk > \angle lm$, $\angle hk < \angle lm$. Первый и второй случаи не могут иметь места, так как в первом случае по основному условию 1 $\widehat{hk} = \widehat{lm}$, а во втором случае по доказанному $\widehat{hk} > \widehat{lm}$. Таким образом, $\angle hk < \angle lm$.

Второе утверждение леммы очевидно. ●

2. Теорема о мерах смежных углов

Теорема 1. *Если при некотором выборе единицы измерения углов прямой угол имеет меру ω, то сумма мер любых двух смежных углов равна 2ω.*

○ Пусть hk и kl данные смежные углы с общей вершиной O. Рассмотрим луч k_0, исходящий из точки O, перпендикулярный к прямой, содержащей лучи h и l, и расположенный по ту же сторону от этой прямой, что и луч k.

Если лучи k и k_0 совпадают, то углы hk и lk прямые, поэтому $\widehat{hk} = \omega$, $\widehat{lk} = \omega$ и $\widehat{hk} + \widehat{lk} = 2\omega$.

Рассмотрим случай, когда лучи k и k_0 не совпадают. Возможны два случая: а) k_0 — внутренний луч угла hk

(рис. 40а); б) k_0 — внутрений луч угла kl (рис. 40б). В случае а) k — внутренний луч угла lk_0, поэтому $\widehat{lk_0} = \widehat{lk} + \widehat{kk_0}$, $\widehat{hk} = \widehat{hk_0} + \widehat{k_0k}$ или $\omega = \widehat{lk} + \widehat{kk_0}$, $\widehat{hk} = \omega + \widehat{k_0k}$. Из этих двух равенств получаем: $\widehat{hk} + \widehat{lk} = 2\omega$. В случае б) k — внутренний луч угла hk_0, поэтому $\widehat{lk_0} + \widehat{k_0k} = \widehat{lk}$, $\widehat{hk} + \widehat{kk_0} = \widehat{hk_0}$ или $\omega + \widehat{k_0k} = \widehat{lk}$, $\widehat{hk} + \widehat{kk_0} = \omega$. Из этих двух равенств получаем: $\widehat{hk} + \widehat{lk} = 2\omega$. ●

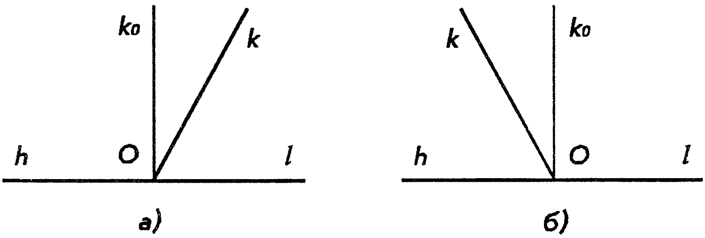


Рис. 40

Следствие. *Если при выбранной единице измерения углов прямой угол имеет меру ω, то мера α любого неразвернутого угла заключается в пределах* $0 < \alpha < 2\omega$.

Доказанная теорема дает основание ввести следующее определение: если при выбранной единице измерения углов мера прямого угла равна ω, то будем считать, что мера любого развернутого угла равна 2ω.

При этом соглашении, как нетрудно видеть, будут выполняться основные условия 1, 2 и 3 мер углов, если считать, что любой луч, исходящий из вершины развернутого угла и не совпадающий со сторонами угла, является внутренним лучом этого угла. Будет выполняться также утверждение леммы настоящего параграфа, независимо от того, являются ли углы hk и lm развернутыми или неразвернутыми.

3. Теорема существования угла данной меры

Сформулируем теорему существования угла данной меры. Эта теорема может быть доказана на основе аксиом групп I—IV.

Теорема 2. *Пусть при некотором выборе единицы измерения углов мера прямого угла равна ω. Тогда каково бы ни было число α такое, что $0 < \alpha \leqslant 2\omega$, существует угол, мера которого равна α.*

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [4], § 29.

Из леммы настоящего параграфа и из теоремы 2 следует, что если при некотором выборе единицы измерения углов прямой угол имеет меру ω, то любой острый угол имеет меру, меньшую ω, а любой тупой угол меру, большую ω. Обратно, каково бы ни было число α такое, что $0 < \alpha < \omega$, существует острый угол с мерой α, и каково бы ни было число β такое, что $\omega < \beta < 2\omega$, существует тупой угол с мерой β.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Доказать, что биссектриса неразвернутого угла составляет со сторонами угла острые углы.

○ Пусть l — биссектриса неразвернутого угла hk. Так как l — внутренний луч этого угла и $\angle hl = \angle lk$, то по основным свойствам 1 и 2 измерения углов $\widehat{hl} = \widehat{lk}$ и $\widehat{hl} + \widehat{lk} = \widehat{hk}$. Так как hk — неразвернутый угол, то $\widehat{hk} < 2\omega$, следовательно, $\widehat{hl} = \widehat{lk} < \omega$. Таким образом, углы hl и hk — острые. ●

Задача 2. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов образуют прямой угол.

○ Пусть AOC и BOC — смежные углы, OM — биссектриса угла AOC, а ON — биссектриса угла BOC. Докажем, что угол MON — прямой.

Пусть $\alpha = \widehat{AOC}$, $\beta = \widehat{BOC}$. По теореме 1 $\alpha + \beta = 2\omega$, где ω — мера прямого угла.

Так как $A, B \div OC$, то $M, N \div OC$ и $M, N \doteq AB$. Отсюда следует, что OC — внутренний луч угла MON. Следовательно, $\widehat{MOC} + \widehat{NOC} = \widehat{MON}$. Но $\widehat{MOC} = \frac{\alpha}{2}$,

$\widehat{NOC} = \frac{\beta}{2}$, поэтому $\widehat{MON} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \omega$. Отсюда следует, что $\angle MON$ — прямой. ●

В следующей задаче, которую предлагаем читателю решить самостоятельно, сформулировано обратное утверждение.

Задача 3. Доказать, что если биссектрисы углов AOC и BOC образуют прямой угол, то угол AOB — развернутый.

4. Градусная мера угла

Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 4 § 14.

Теорема 3. *Для любого неразвернутого угла AOB существуют внутренние лучи, которые делят этот угол на n равных частей, где n — натуральное число, $n > 1$.*

Доказательство этой теоремы, основанное на теореме 2, по существу ничем не отличается от доказательства теоремы 4 § 14, поэтому мы предлагаем читателю провести его самостоятельно.

В геометрии пользуются различными единицами измерения углов, однако наиболее распространенной является градусная мера угла.

Для того чтобы ее ввести, возьмем какой-нибудь прямой угол AOB и, пользуясь теоремой 3, рассмотрим внутренние лучи OM_1, OM_2, ..., OM_{89} этого угла, которые делят угол на 90 равных частей. Установим измерение углов, приняв угол AOM_1 за единицу измерения углов. Тогда каждый угол hk будет иметь определенную меру $\widehat{hk} = \alpha$, которую называют *градусной мерой угла* и обозначают через $\alpha°$. При этом, очевидно, $\widehat{AOM_1} = 1°$, а $\widehat{AOB} = 90°$. Так как все прямые углы равны друг другу, то градусная мера любого прямого угла равна $90°$, поэтому градусная мера развернутого угла равна $180°$.

Отметим, наконец, что согласно следствию теоремы 1 числовое значение α градусной меры любого угла заключено в пределах: $0 < \alpha \leqslant 180$.

Из леммы настоящего параграфа следует, что угол является острым тогда и только тогда, когда его градусная мера меньше 90°, и угол является тупым тогда и только тогда, когда его градусная мера больше 90°, но меньше 180°.

§ 16. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема 1. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол; обратно, против большего угла лежит большая сторона.*

○ Пусть в треугольнике ABC $AB > AC$. Докажем, что $\angle C > \angle B$ (рис. 41). Так как $AB > AC$, то на отрезке AB существует точка D такая, что $AD = AC$. Отсюда следует, что CD — внутренний луч угла ACB, поэтому $\angle 1 < \angle ACB$ (см. рис. 41).

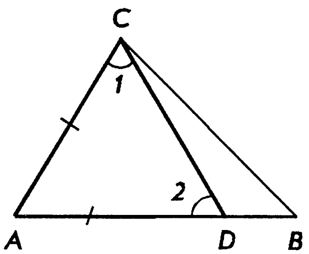


Рис. 41

Треугольник ACD равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Но $\angle 2 > \angle B$ как внешний угол треугольника CBD. Таким образом, $\angle ACB > \angle 1 = \angle 2 > \angle B$, следовательно, $\angle ACB > \angle B$.

Обратно, пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$. По теореме 1 § 6 возможны три случая: $AB = AC$, $AB < AC$, $AB > AC$. Первые два случая не могут иметь места, т. к. если $AB = AC$, то $\angle B = \angle C$, а если $AB < AC$, то по доказанному $\angle C < \angle B$. Таким образом, $AB > AC$. ●

Следствие. *В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого катета.*

3−6508

2. Неравенство треугольника

Условимся суммой двух отрезков называть отрезок, длина которого равна сумме длин данных отрезков. Аналогично можно определить сумму трех, четырех и т. д. отрезков. Ясно, что если MN и $M'N'$ — суммы данных отрезков AB и CD, то $MN = M'N'$.

Теорема 2. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

○ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, например, что $AB < AC + BC$. Отложим на продолжении луча CA отрезок $CD = BC$ (рис. 42). Треугольник BCD — равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle ABD > \angle 1$, то $\angle ABD > \angle 2$. По теореме 1 в треугольнике ABD $AD > AB$. Но $AD = AC + CD = AC + BC$, поэтому $AB < AC + BC$. Аналогично доказывается, что $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$. ●

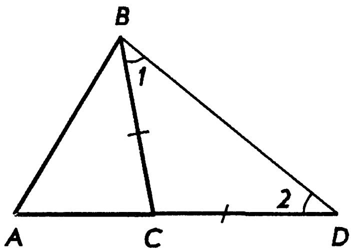


Рис. 42

Следствие. *В треугольнике длина каждой стороны больше разности длин двух других сторон.*

○ В самом деле, для треугольника ABC из неравенств $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$ следует: $AB > AC - BC$, $AB > BC - AC$ Аналогично доказываются неравенства: $AC > AB - BC$, $AC > BC - AB$, и $BC > AC - AB$, $BC > AB - AC$. ●

Замечание. Ниже будет доказано утверждение, обратное утверждению теоремы 2: если длины a, b и c трех данных отрезков удовлетворяют неравенствам $a + b - c > 0$, $b + c - a >\ > 0$, $c + a - b > 0$, то существует треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам (см. гл. VI § 30).

3. Расстояние от точки до прямой

Пусть A — точка, не лежащая на прямой a, а AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a. Если M — произвольная точка прямой a, отличная от точки H, то отрезок AM называется *наклонной, проведенной из точки A к прямой a*. В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM, поэтому перпендикуляр, проведенный из данной точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.

Длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется *расстоянием от этой точки до прямой*. Таким образом, расстояние от данной точки до прямой является наименьшим из расстояний между данной точкой и любой точкой прямой.

§ 17. ТЕОРЕМЫ О БИССЕКТРИСЕ УГЛА И СЕРЕДИННОМ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЕ К ОТРЕЗКУ

1. Теорема о биссектрисе угла

Теорема 1. *Биссектриса угла есть множество всех внутренних точек угла, каждая из которых равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.*

○ Пусть AOB — данный угол. Докажем сначала, что любая точка M биссектрисы OD этого угла равноудалена от прямых OA и OB. Рассмотрим перпендикуляры MH и MK, проведенные из точки M соответственно к прямым OA и OB. Так как $\angle AOD$ и $\angle BOD$ острые углы, то по лемме о перпендикуляре, проведенном из точки, лежащей на стороне угла (§ 10), точка H лежит на луче OA, а точка K — на луче OB (рис. 43). Прямоугольные треугольники OKM и OHM равны по гипотенузе и острому углу, следовательно $MH = MK$.

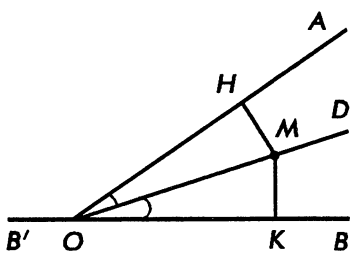


Рис. 43

Докажем теперь, что любая внутренняя точка

M угла AOB, равноудаленная от прямых OA и OB, лежит на биссектрисе OD этого угла. Пусть MH и MK — перпендикуляры, проведенные из точки M к прямым OA и OB. По условию $MH = MK$.

Так как $\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = \widehat{AOB} < 180^\circ$, то хотя бы один из углов AOM или MOB острый. Пусть, например, $\angle AOM$ острый. Тогда H — точка луча OA. Точка K не совпадает с точкой O, так как $MK = MH < MO$, поэтому K либо точка луча OB, либо точка продолжения OB' этого луча, $\triangle OMH = \triangle OMK$ по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle MOH = \angle MOK$. Отсюда следует, что $\angle MOK$ острый. Следовательно, K — точка луча OB и поэтому $\angle MOA = \angle MOB$. Таким образом, M — точка, лежащая на биссектрисе OD угла AOB. ●

Пользуясь этой теоремой, решим следующую задачу:

З а д а ч а 1. Перпендикуляры, проведенные из данной точки M к прямым, содержащим стороны неразвернутого угла O, равны, и основания перпендикуляров лежат на сторонах угла. Доказать, что точка M лежит на биссектрисе угла O.

○ Учитывая теорему о биссектрисе угла (теорема 1), достаточно доказать, что точка M лежит внутри угла O.

Пусть MH_1 и MH_2 перпендикуляры, проведенные из точки M к прямым, содержащим стороны угла O. Докажем, что $M, H_1 \doteq OH_2$. Допустим, что это не так, т. е. отрезок MH_1 пересекается с прямой OH_2 в некоторой точке N. Тогда, очевидно, $MH_2 \leqslant MN < MH_1$, т. е. $MH_2 < MH_1$. Мы пришли в противоречие с условием задачи. Таким образом, $M, H_1 \doteq OH_2$. Аналогично доказываем, что $M, H_2 \doteq OH_1$. Отсюда следует, что точка M и луч OH_1 расположены в одной полуплоскости с границей OH_2 и точка M и луч OH_2 расположены в одной полуплоскости с границей OH_1. Таким образом, точка M лежит внутри угла O. ●

Докажем теорему о пересечении биссектрис треугольника.

Т е о р е м а 2. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

○ Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника

ABC. По теореме 1 § 4 луч BB_1 пересекает отрезок AA_1 в некоторой точке M. Эта же точка является точкой пересечения луча AA_1 и отрезка BB_1, поэтому M — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1.

Рассмотрим перпендикуляры MH_1, MH_2, MH_3, проведенные соответственно к прямым BC, CA и AB. По теореме 1 $MH_2 = MH_3$ и $MH_3 = MH_1$, поэтому $MH_1 = MH_2$. Так как M — точка, лежащая на отрезке AA_1, то M — внутренняя точка угла ACB. Следовательно, по теореме 1 точка M лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Так как луч AA_1 пересекает отрезок CC_1, то M — точка отрезка CC_1. Итак, три биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника пересекаются в точке M. ●

2. Теорема о серединном перпендикуляре к отрезку

Прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему, называется *серединным перпендикуляром* к отрезку.

Теорема 3. *Серединный перпендикуляр к данному отрезку есть множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от концов данного отрезка.*

○ Пусть O середина данного отрезка AB, а l — серединный перпендикуляр к этому отрезку. Докажем, что если точка M лежит на прямой l, то $MA = MB$. Это утверждение очевидно, если точка M совпадает с точкой O. Если же M — точка, отличная от O, то $\triangle AOM = \triangle BOM$, поэтому $MA = MB$.

Обратно, предположим, что $AM = MB$ и докажем, что $M \in l$. Это утверждение очевидно, если M — точка прямой AB, поэтому предположим, что точка M не лежит на прямой AB. Так как $\triangle AMB$ равнобедренный, то его медиана OM является высотой, следовательно, $OM \perp AB$. По теореме о перпендикулярных прямых (§ 8) прямые OM и l совпадают, т. е. M — точка прямой l. ●

В заключение этой главы рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Доказать, что серединные перпендикуляры к двум различным отрезкам с одним общим концом не совпадают.

○ Пусть AB и BC — данные отрезки. Так как эти отрезки различны и имеют общий конец B, то их середины M_1 и M_2 не совпадают. Рассмотрим серединные перпендикуляры l_1 и l_2 соответственно к этим отрезкам. Ясно, что $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$.

Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то $l_1 \perp AB$, $l_2 \perp AB$, поэтому по следствию теоремы о перпендикулярных прямых (§ 8) l_1 и l_2 — различные прямые. Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то l_1 и l_2 также различные прямые, т. к. в противном случае прямая l_1 проходит через точки M_1 и M_2 и перпендикулярна к прямым BA и BC. Это противоречит теореме о перпендикулярных прямых. ●

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

70. В треугольнике ABC, где $AB > AC$, через середину M стороны BC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, которая пересекает луч AB в точке D, а луч AC — в точке E. Доказать, что:

а) $A - D - B$, $A - C - E$;

б) $AD = AE = \frac{1}{2}(AB + AC)$, $BD = CE = \frac{1}{2}(AB - AC)$.

71. Отрезок длиной 1 см покрыт некоторым количеством отрезков так, что любая его точка покрыта не менее чем одним, но не более чем двумя отрезками. Доказать, что из этих отрезков можно выбрать несколько отрезков, не имеющих общих точек, так, чтобы сумма их длин была не менее 0,5 см.

72. На отрезке AB, длина которого равна a, даны k точек. Доказать, что сумма расстояний от одного из концов отрезка AB до этих точек не меньше $\frac{ka}{2}$.

73. Даны три луча h, k и l, исходящие из одной точки. Доказать, что $\sigma = \widehat{hk} + \widehat{kl} + \widehat{lh} \leqslant 360°$, причем если $\sigma < 360°$, то один и только один из лучей h, k и l является внутренним лучом угла, образованного двумя другими, а если $\sigma = 360°$, то ни один из данных лучей не является внутренним лучом угла, образованного двумя другими.

74. На стороне BC треугольника ABC, где $AB \geqslant AC$, взята точка M. Доказать, что $AM < AB$.

75. Дан треугольник ABC, где $AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$.

Доказать, что любой отрезок, не совпадающий со сторонами треугольника ABC, концы которого принадлежат сторонам этого треугольника или его внутренней области, меньше AB.

76. Точка M лежит на стороне AB треугольника ABC. Доказать, что $AC + BC < AB + 2CM$.

77. Стороны AB и AC треугольника ABC соответственно равны сторонам A_1B_1 и A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать утверждения:
а) если $\angle A > \angle A_1$, то $BC > B_1C_1$;
б) если $BC > B_1C_1$, то $\angle A > \angle A_1$.

78. Доказать, что третий признак равенства треугольников является непосредственным следствием утверждения а) задачи 77 и первого признака равенства треугольников.

79. Даны три точки A, B и M. Доказать, что $A - M - B$ тогда и только тогда, когда $AM + MB = AB$.

80. Даны n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, где $n \geqslant 3$. Доказать, что $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n$, причем если данные точки не лежат на одной прямой, то $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n > A_1A_n$.

81. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Доказать, что а) $AM + MB < AC + CB$, б) $AC < BC$, если $CM = AC$.

82. Точка M не совпадает с вершинами треугольника ABC, периметр которого равен p. Доказать, что:
а) $AM + BM + CM > \frac{1}{2}p$; б) если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $AM + BM + CM < p$.

83. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC а) медиана CM удовлетворяет неравенствам: $AC + BC - AB < 2CM < AC + BC$; б) сумма трех медиан треугольника меньше его периметра и больше полупериметра.

84. Пусть $\angle hk$ — меньший из двух смежных углов hk и hl. Доказать, что $\widehat{hk} = 90° - \frac{1}{2}(\widehat{hl} - \widehat{hk})$, а $\widehat{hl} = 90° + \frac{1}{2}(\widehat{hl} - \widehat{hk})$.

85. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ с периметрами p и p', причем точки A', B' и C' принадлежат сто-

ронам треугольника ABC или лежат внутри этого треугольника. Доказать, что $p' < p$.

86. Пусть ABC равнобедренный треугольник с основанием BC. Доказать, что для любой точки X, лежащей на отрезке BC, $AX < AB$, а для любой точки Y прямой BC, не принадлежащей отрезку BC, $AY > AB$.

87. Отрезок CD является биссектрисой треугольника ABC. Доказать утверждения: а) $AC > AD$ и $BC > BD$; б) $AD < DB$ тогда и только тогда, когда $CA < CB$.

88. В треугольнике ABC, у которого угол A — прямой или тупой, проведены $n - 1$ внутренних лучей угла C, которые делят этот угол на n равных частей и пересекают отрезок AB в точках $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$, причем точки $A, B_1, B_2, ..., B_{n-1}, B$ следуют друг за другом. Доказать, что: а) $CA < CB_1 < ... < CB_{n-1} < CB$; б) $AB_1 < B_1B_2 < ... < B_{n-1}B$.

89. Доказать, что сумма высот треугольника меньше его периметра.

90. Даны два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$ с прямыми углами C и C'. Доказать утверждения: а) если $CA < C'A'$ и $CB \leqslant C'B'$, то $AB < A'B'$; б) если гипотенузы AB и $A'B'$ данных треугольников равны, то неравенство $AC < A'C'$ имеет место тогда и только тогда, когда $\angle A > \angle A'$; в) если $\angle A = \angle A'$, то неравенство $AB < A'B'$ имеет место тогда и только тогда, когда $BC < B'C'$.

91. Доказать, что в треугольнике ABC, где $AC < CB$, биссектриса CD меньше медианы CM.

92. Четыре точки A, B, C, D лежат на одной прямой. Точка B лежит между точками A и C, $BC = 3$, $BD = 8$, $CD = 5$. Доказать, что точка C лежит между A и D.

93. Отрезки AA_1 и BB_1 являются высотами треугольника ABC. Доказать, что если $AA_1 = BB_1$, то $CA = CB$, а если $AA_1 < BB_1$, то $CA < CB$.

94. Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Доказать утверждения: а) существуют положительные числа m, n и p такие, что $a = n + p$, $b = m + p$, $c = m + n$; б) если $a^2 + b^2 > 5c^2$, то $c < b$ и $c < a$.

95. Доказать следующий признак равенства треугольников: если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол первого треугольника, лежащий против большей из этих сторон, равен соответствующему углу второго, то треугольники равны.

96. Верно ли утверждение: если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол первого треугольника, лежащий против меньшей из этих сторон, равен соответствующему углу второго, то треугольники равны?

97. На биссектрисе одного из внешних углов при вершине C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $MA + MB > CA + CB$.

98. В треугольнике ABC биссектриса BD перпендикулярна к медиане CM. Доказать, что серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону AC в некоторой точке E, и найти длину стороны AC, если периметр треугольника BEC равен p, а $AB = b$.

99. Существует ли точка на сторонах данного угла AOB, равноудаленная от точек A и B? Сколько может существовать таких точек? Рассмотреть возможные случаи.

100. Дан угол AOB. Существует ли на плоскости такая точка P, что каждая из точек A и B равноудалена от точек O и P? Сколько может существовать таких точек?

101. Дан неразвернутый угол AOB и отрезок CD. Существует ли на стороне OB данного угла такая точка X, что $OX + AX = CD$? Сколько может существовать таких точек? Рассмотреть возможные случаи.

102. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая p, перпендикулярная к биссектрисе AE этого треугольника, а из точки B проведен перпендикуляр BH к этой прямой. Доказать, что периметр треугольника BHC больше периметра треугольника ABC.

Глава IV

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

§ 18. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

1. Параллельные прямые

Как было отмечено в § 1, две прямые на плоскости либо не имеют ни одной общей точки, либо имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются. Две прямые на плоскости, не имеющие ни одной общей точки, называются *параллельными.*

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$.

Отрезки или лучи, принадлежащие параллельным прямым, также называются параллельными (рис. 44а). Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 44б), луча и прямой (рис. 44в).

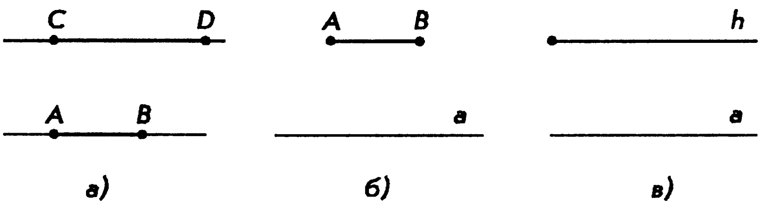


Рис. 44

Теорема 1. *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, ей параллельная.*

○ Рассмотрим произвольную прямую a и точку A, не лежащую на ней (рис. 45). Пусть c — прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой a; b — прямая, проходящая через точку A перпендикулярная к прямой c. Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то по следствию теоремы о перпендикулярных прямых (§ 8) они параллельны. ●

Из этой теоремы следует, что параллельные прямые существуют.

Докажем следующее утверждение: *при наложении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.*

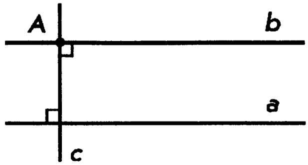


Рис. 45

○ Рассмотрим параллельные прямые a и b и их образы a' и b'. Если предположить, что прямые a' и b' имеют хотя бы одну общую точку M', то прообраз M этой точки лежит как на прямой a, так и на прямой b. Таким образом, прямые a и b имеют общую точку M, что противоречит определению параллельных прямых. ●

2. Признаки параллельности прямых

Пусть AC — секущая по отношению к прямым AB и CD. Напомним, что если $B, D \div AC$, то углы BAC и DCA называются *накрест лежащими* (рис. 46а). Если $B, D \doteqdot AC$, то углы BAC и DCA называются *односторонними* (рис. 46б), а углы BAC' и DCA, а также углы BAC и DCA' — *соответственными углами.* Здесь A' — точка на продолжении луча CA, а C' — точка на продолжении луча AC.

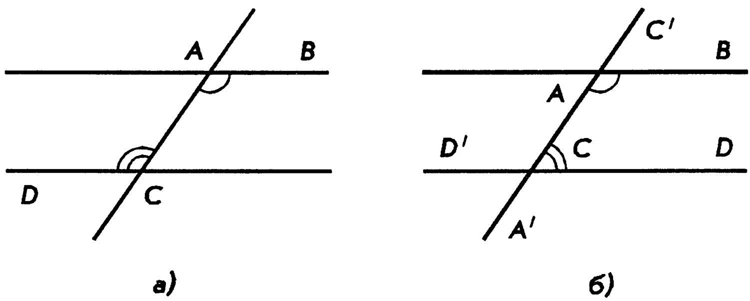


Рис. 46

Таким образом, при пересечении двух прямых a и b секущей c образуются две пары накрест лежащих углов, две пары односторонних углов и четыре пары соответственных углов. На рис. 47 имеем:

— накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$

— односторонние углы: $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$

— соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$.

Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема 2. *Две прямые параллельны, если при пересечении их секущей выполняется хотя бы одно из условий: а) накрест лежащие углы равны; б) соответственные углы равны; в) сумма односторонних углов равна* 180°.

○ Утверждение а) непосредственно следует из леммы о равенстве накрест лежащих углов (лемма 1 § 10), поэтому докажем только утверждения б) и в).

б) Пусть соответственные углы BAC и DCA' равны (рис. 48).

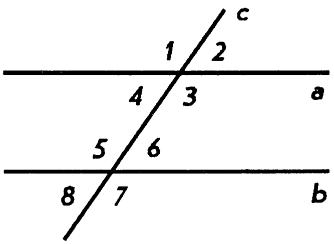


Рис. 47

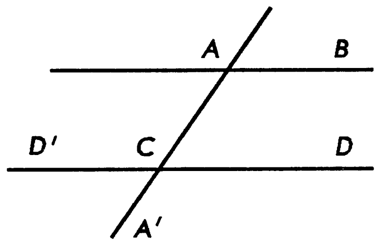


Рис. 48

Рассмотрим точку D' на продолжении луча CD. Углы DCA' и ACD' — вертикальные, поэтому они равны: $\angle ACD' = \angle DCA'$. Таким образом, $\angle BAC = \angle DCA'$, $\angle DCA' = \angle ACD'$, следовательно, $\angle BAC = ACD'$. Углы BAC и ACD' накрест лежащие, следовательно, в силу утверждения а) $AB \| CD$.

в) Пусть сумма односторонних BAC и DCA равна 180°: $\widehat{BAC} + \widehat{DCA} = 180^\circ$ (см. рис. 48). Так как углы ACD и ACD' смежные, то $\widehat{ACD} + \widehat{ACD'} = 180^\circ$. Таким образом, $\angle BAC = \angle ACD'$, поэтому в силу утверждения а) $AB \| CD$. ●

3. Аксиома параллельных прямых

Мы доказали, что через данную точку A, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной. Возникает вопрос: сколько прямых, параллельных данной, можно провести через точку A? Для ответа на этот вопрос нам понадобится новая аксиома, которая называется *аксиомой параллельных прямых.*

V. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит не более одной прямой, параллельной данной.

Рассмотрим два следствия из этой аксиомы.

1^0. *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

○ Предположим, что прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую b в точке M. Если бы прямая c не пересекала прямую a, то через точку M проходили бы две прямые (b и c), параллельные прямой a. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и поэтому прямая c пересекает прямую a. ●

2^0. *Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*

○ Пусть прямые b и c параллельны прямой a (рис. 49а).

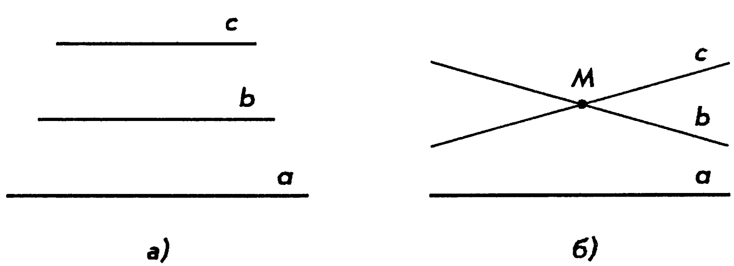


Рис. 49

Допустим, что прямые b и c не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 49б). Тогда через точку M проходят две прямые (b и c), параллельные прямой a. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, поэтому $a \| b$. ●

§ 19. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

1. Свойства параллельных прямых

В § 18 была доказана теорема 2, выражающая признаки параллельности двух прямых. Справедлива и обратная теорема.

Теорема 1. *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то а) накрест лежащие углы равны; б) соответственные углы равны; в) сумма односторонних углов равна* 180°.

○ а) Предположим, что параллельные прямые a и b пересечены секущей MN (рис. 50). Докажем, например, что накрест лежащие углы 1 и 2 равны (рис. 50а). Допустим, что это не так, т. е. $\angle 1 \neq \angle 2$. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. Так как $\angle 1 \neq \angle 2$, то прямые a и MP не совпадают. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \| b$. Таким образом, через точку M проходят две прямые (a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$.

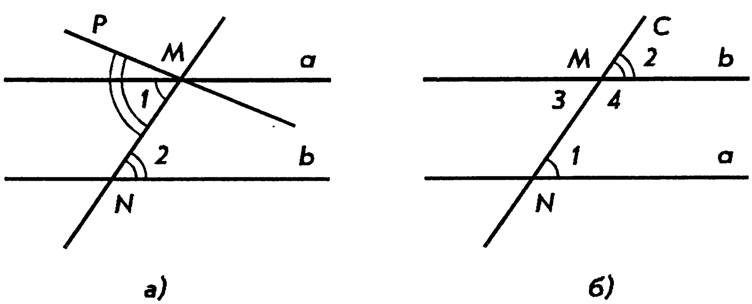


Рис. 50

б) Докажем, например, что соответственные углы 1 и 2 равны (рис. 50б). Так как $a \| b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Таким образом, $\angle 1 = \angle 2$.

в) Докажем, например, что $\widehat{1} + \widehat{4} = 180°$ (рис. 50б).

Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\widehat{2} + \widehat{4} = 180^\circ$, откуда следует, что $\widehat{1} + \widehat{4} = 180^\circ$. ●

Следствие. *Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.*

○ Пусть прямые a и b параллельны, прямая c перепендикулярна к прямой a (рис. 51). Тогда прямая c пересекает прямую a и $\widehat{1} = 90^\circ$. Отсюда следует, что прямая c пересекает и прямую b (свойство 1^0 § 18). По теореме 1 накрест лежащие углы 1 и 2 равны, поэтому $\widehat{2} = 90^\circ$. Таким образом, прямая c перпендикулярна к прямой b. ●

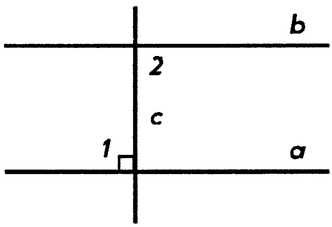


Рис. 51

2. Задачи на признаки параллельности и признаки пересечения прямых

Сформулируем две задачи, которые читатель легко решит самостоятельно, используя признаки параллельности и свойства параллельных прямых. Утверждения, сформулированные в этих задачах, часто используются при решении других задач на параллельность прямых.

Задача 1. Доказать, что две прямые a и b параллельны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) две точки прямой a равноудалены от прямой b; б) любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b; в) прямая a содержит основание равнобедренного треугольника, а прямая b — биссектрису внешнего угла при вершине, противолежащей основанию; г) прямые a и b содержат биссектрисы накрест лежащих углов или биссектрисы соответственных углов при пересечении двух параллельных прямых секущей.

Задача 2. Доказать, что две прямые a и b пересекаются, если выполняется хотя бы одно из условий: а) прямая a перпендикулярна к некоторой прямой, а прямая b не перпендикулярна к ней; б) прямые a и b перпендикулярны к сторонам неразвернутого угла.

3. Расстояние между параллельными прямыми

Теорема 2. *Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными прямыми, равны между собой.*

○ Пусть AB и CD отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными прямыми a и b, точки A и C лежат на прямой a, а точки B и D — на прямой b (рис. 52).

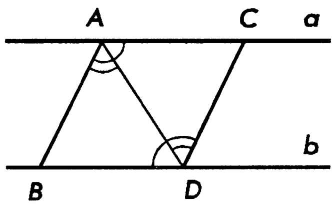


Рис. 52

Нетрудно доказать, что $B, C \div AD$. Отсюда следует, что $\angle ADC$ и $\angle DAB$ — накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD. Следовательно, $\angle ADC = \angle DAB$. Аналогично, $\angle DAC = \angle ADB$. Таким образом, треугольники ABD и DCA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $AB = CD$. ●

Доказанная теорема позволяет установить одно из важнейших свойств параллельных прямых: *все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.*

В самом деле, пусть $a \| b$, и AB — перпендикуляр, проведенный из точки A прямой a к прямой b (рис. 53). Тогда, если X — произвольная точка прямой

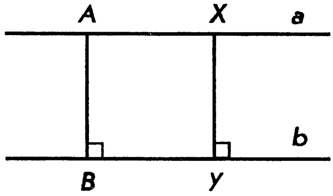


Рис. 53

a, а XY — перпендикуляр, проведенный из точки X к прямой b, то $AB \| XY$, поэтому $AB = XY$.

Так как $XY \perp a$ и $XY \perp b$, то расстояние от любой точки каждой из двух параллельных прямых a и b до другой прямой равно AB, т. е. эти расстояния равны.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется *расстоянием между этими прямыми.*

Докажем еще одну теорему, которая часто применяется при решении задач, в частности, при решении задач на построение.

Теорема 3. *Множество всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от данной прямой и равноудаленных от этой прямой, есть прямая, параллельная данной.*

○ Пусть a — данная прямая, λ — полуплоскость с границей a, а m — данное положительное число. Проведем луч h с началом в точке A прямой a, перпендикулярный к прямой a и расположенный в полуплоскости λ (рис. 54). На луче h от точки A отложим отрезок AB, длина которого равна m, и проведем через точку B прямую b, параллельную прямой a. Тогда по

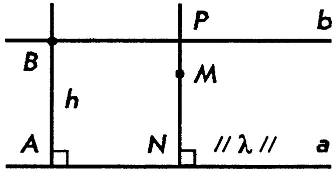


Рис. 54

доказанному все точки прямой b удалены от прямой a на расстояние m.

Рассмотрим теперь точку M полуплоскости λ, не лежащую на прямой b, и докажем, что расстояние от этой точки до прямой a не равно m. В самом деле, пусть MN — перпендикуляр, проведенный из точки M к прямой a, а P — точка пересечения прямых MN и b (см. рис. 54). Так как $PN = m$, то $MN \neq m$. Итак множество всех точек полуплоскости λ, равноудаленных от прямой a, есть прямая b. ●

§ 20. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Теорема о сумме углов треугольника

Теорема. *Сумма углов треугольника равна* 180°.

○ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Проведем через точку B прямую MN, параллельную прямой AC. Будем считать, что точки M и N выбраны так, что $M - B - N$ и $A, M \doteq BC$. Тогда, очевидно, $A, N \div BC$ (рис. 55).

Так как лучи BM и BA принадлежат одной полуплоскости с границей BC и луч BM не является внутренним лучом угла ABC (так как луч BM не может пересечь отрезок AC), то BA — внутренний луч угла MBC. Отсюда следует, что $\widehat{MBC} = \widehat{MBA} + \widehat{ABC} = \widehat{MBA} + \widehat{B}$. Углы MBC и CBN смежные, поэтому $\widehat{MBC} + \widehat{CBN} = 180°$. Подставив сюда значение $\widehat{MBC}$ из предыдущего равенства, получаем:

$$\widehat{MBA} + \widehat{B} + \widehat{CBN} = 180°. \qquad (1)$$

Так как $A, N \div BC$, то углы CBN и C — являются накрест лежащими при пересечении параллельных прямых MN и AC секущей BC, следовательно, $\widehat{CBN} = \widehat{C}$.

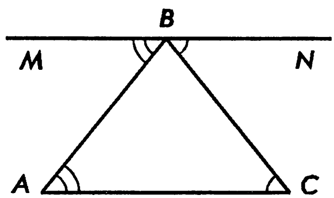


Рис. 55

Аналогично, $\widehat{MBA} = \widehat{A}$. Отсюда, учитывая равенство (1), приходим к искомому равенству: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. ●

Следствие 1. *Углы равностороннего треугольника равны* 60°.

Теперь мы можем уточнить результат, сформулированный в теореме о внешнем угле треугольника.

Следствие 2. *Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.*

○ Пусть $\angle BCD$ — внешний угол треугольника ABC, смежный с углом 3 (рис. 56). Тогда $\widehat{3} + \widehat{BCD} = 180^\circ$, $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 180^\circ$, поэтому $\widehat{BCD} = \widehat{1} + \widehat{2}$. ●

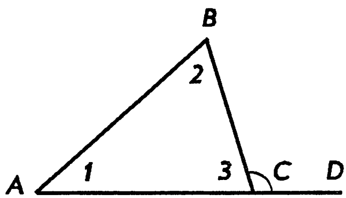


Рис. 56

2. Некоторые свойства и признаки прямоугольных треугольников

Из теоремы о сумме углов треугольника следует:

1°. *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна* 90°.

2^0. *Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.*

○ Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой BC. Проведем отрезок AD так, чтобы точка D лежала на гипотенузе BC и $\angle ABC = \angle BAD$ (рис. 57). В треугольнике ABD $\angle B = \angle 1$, поэтому он равнобедренный, значит $AD = BD$. Далее, $\widehat{1} + \widehat{2} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{1}$, следовательно, $\widehat{2} = \widehat{C}$. Отсюда следует, что и треугольник ADC равнобедренный, значит, $AD = CD$. Из равенств $AD = BD$, $AD = CD$ следует, что $BD = CD$, т. е. D — середина отрезка BC и AD — медиана треугольника. Таким образом, $AD = BD = \frac{1}{2}BC$. ●

3^0. *Катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы тогда и только тогда, когда угол, лежащий против этого катета, равен* $30°$.

○ Пусть ABC прямоугольный треугольник с прямым углом A, а AD — его медиана (рис. 58).

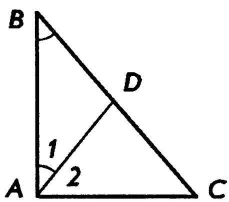


Рис. 57

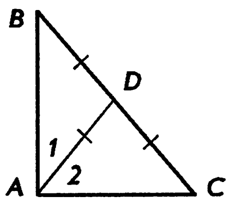


Рис. 58

Допустим, что $AC = \frac{1}{2}BC$, и докажем, что $\widehat{B} = 30°$. Так как D — середина отрезка BC, то $AC = CD$. По свойству 2^0 $AD = CD$. Отсюда следует, что треугольник ADC равносторонний, поэтому $\widehat{C} = 60°$. По свойству 1^0 $\widehat{B} = 90° - \widehat{C} = 30°$.

Допустим теперь, что $\widehat{B} = 30°$, и докажем, что

$AC = \frac{1}{2}BC$. По свойству 2⁰ $AD = BD$, поэтому $\hat{1} = 30^\circ$, $\hat{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} = 60^\circ$. В треугольнике ACD $\hat{2} = \hat{C} = 60^\circ$, поэтому $\widehat{ADC} = 60^\circ$. Отсюда следует, что треугольник ACD равносторонний, следовательно, $AC = CD = \frac{1}{2}BC$. ●

Докажем еще одно утверждение, в котором выражены признаки прямоугольного треугольника.

4^0. *Треугольник является прямоугольным, если выполнено хотя бы одно из условий: а) один из его углов равен сумме двух других углов; б) медиана, проведенная к одной стороне, равна половине этой стороны.*

○ а) Пусть ABC — данный треугольник, в котором $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$. Так как $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, то $2\hat{A} = 180^\circ$, $\hat{A} = 90^\circ$, т. е. угол A треугольника ABC прямой.

б) Пусть AM — медиана данного треугольника ABC и $AM = \frac{1}{2}BC$. Тогда ABM и АСМ — равнобедренные треугольники, поэтому $\hat{B} = \widehat{BAM}$, $\hat{C} = \widehat{MAC}$, поэтому $\hat{B} + \hat{C} = \widehat{BAM} + \widehat{MAC} = \hat{A}$. Согласно предложению а) $\angle A$ — прямой. ●

Из свойств 2^0 и 4^0 б следует, что в треугольнике ABC угол A прямой тогда и только тогда, когда медиана AM равна $\frac{1}{2}BC$. Таким образом, если $AM \neq \frac{1}{2}BC$, то угол A либо острый, либо тупой. Докажем, что если $AM > \frac{1}{2}BC$, то угол A — острый, а если $AM < \frac{1}{2}BC$, то угол A — тупой. В самом деле, если $AM > \frac{1}{2}BC$, т. е. $AM > MC$ и $AM > MB$, то в треугольниках ABM и ACM $\angle B > \angle BAM$ и $\angle C > \angle MAC$, поэтому $\hat{B} + \hat{C} > \hat{A}$. Но $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, следовательно, $\hat{A} < 90^\circ$, т. е. $\angle A$ — острый. Аналогично доказывается второе утверждение.

§ 21. УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ

1. Углы с соответственно параллельными сторонами

Теорема 1. *Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого, то такие углы либо равны, либо их сумма равна* 180°.

○ Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ данные углы и $OA \| O_1A_1$, $OB \| O_1B_1$ (рис. 59). Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1, поэтому пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M.

Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секу-

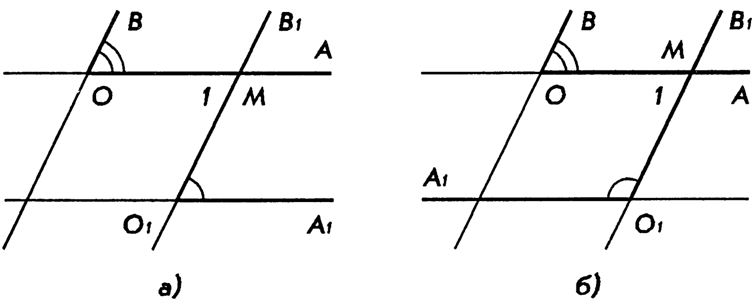


Рис. 59

щей OM, поэтому один из углов при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рис. 59а,б) равен углу AOB (как накрест лежащие углы). Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (если углы 1 и $A_1O_1B_1$ накрест лежащие, рис. 59а), либо $\widehat{1} + \widehat{A_1O_1B_1} = 180^\circ$ (если эти углы односторонние, рис. 59б). Из последних двух равенств и равенства $\angle 1 = \angle AOB$ следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 59а), либо $\widehat{AOB} + \widehat{A_1O_1B_1} = 180^\circ$ (рис. 59б). ●

Отметим, что *биссектрисы двух углов с соответственно параллельными сторонами, не лежащие на одной прямой, либо параллельны, либо перпендикулярны.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение.

2. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

Теорема 2. *Если прямые, содержащие стороны одного угла, соответственно перпендикулярны к прямым, содержащим стороны другого угла, то такие углы либо равны, либо их сумма равна* 180°.

○ Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ — данные углы, $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$ (рис. 60). Возьмем на биссектрисе угла AOB точку O', не принадлежащую сторонам угла $A_1O_1B_1$, и проведем перпендикуляры $O'A'$ и $O'B'$ к прямым OA и OB. Так как $O'A' = O'B'$ (теорема 1 § 17), то прямоугольные треугольники $OO'A'$ и $OO'B'$ равны по гипотенузе и катету, следовательно, $\angle 3 = \angle 4$. Но $\widehat{1} + \widehat{3} = 90^\circ$, $\widehat{2} + \widehat{4} = 90^\circ$, $\widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{2} + \widehat{4} = 180^\circ$ или $\widehat{AOB} + \widehat{A'O'B'} = 180^\circ$. Стороны угла $A_1O_1B_1$ соответственно параллельны сторонам угла $A'O'B'$, следовательно, по теореме 1 либо $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A'O'B'}$, либо $\widehat{A_1O_1B_1} + \widehat{A'O'B'} = 180^\circ$. В первом случае $\widehat{AOB} + \widehat{A_1O_1B_1} = 180^\circ$, а во втором случае $\widehat{AOB} = \widehat{A_1O_1B_1}$. ●

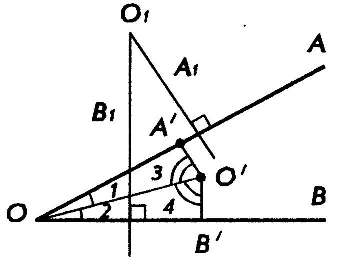


Рис. 60

§ 22. АБСОЛЮТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ПРЕДЛОЖЕНИЯ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ АКСИОМЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

1. Абсолютная геометрия

Геометрия, построенная на аксиомах групп I—IV, называется *абсолютной геометрией.* В абсолютной геометрии имеют место теоремы, при доказательстве которых не используется аксиома параллельных прямых. Все утверждения и теоремы, сформулированные до п. 3 § 18, относятся к абсолютной геометрии. В частности, теория измерения отрезков, а также теория измерения углов относятся к абсолютной геометрии.

В дополнение к этому заметим, что, пользуясь только аксиомами групп I—IV (без аксиомы параллельных прямых), можно доказать, например, следующее утверждение: сумма углов любого треугольника не больше 180° (см. [5], часть II § 69). В силу сказанного это утверждение принадлежит абсолютной геометрии.

2. Постулат Евклида

Евклид — древнегреческий математик, жил примерно от 330 до 275 г. до н. э. в Египте. Он автор первого из дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Его основная работа «Начала» содержит систематическое изложение планиметрии и стереометрии. В «Началах» содержится также изложение ряда вопросов теории чисел.

«Начала» Евклида состоят из 13 книг. Каждая книга начинается с определения всех тех понятий, которые в ней встречаются. Затем приводятся предложения, принимаемые без доказательств — постулаты и аксиомы. На основе этого Евклид излагает теоремы геометрии, располагая их в такой последовательности, чтобы каждую теорему можно было доказать, используя только предыдущие предложения, постулаты и аксиомы.

Некоторые из аксиом и постулатов Евклида и сейчас используются в курсе геометрии в современной формулировке. Сама геометрия, изложенная в «Началах», называется *евклидовой геометрией.*

Среди постулатов и аксиом пятый постулат Евклида играет существенную роль, так как на нем основана теория параллельных прямых и все связанные с ней разделы. Этот постулат формулируется так:

Если прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.

На рис. 61 поясняется эта аксиома: при пересечении прямой a с прямыми b и c образованы внутренние односторонние углы α и β, причем $\alpha + \beta < 180^\circ$. Тогда прямые b и c пересекаются в некоторой точке M, лежащей по ту же сторону от прямой a, что и углы α и β.

Можно доказать, что *пятый постулат Евклида эквивалентен*[1] *аксиоме параллельных прямых* (см. [5], часть II § 69).

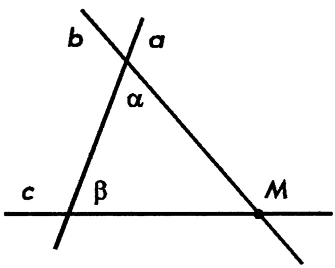


Рис. 61

Учитывая это утверждение, при изложении евклидовой геометрии обычно вместо пятого постулата Евклида пользуются аксиомой параллельных прямых.

3. Предложения, эквивалентные аксиоме параллельных прямых

Существует много других предложений, эквивалентных аксиоме параллельных прямых или пятому постулату Евклида. Сформулируем некоторые из них.

а) Сумма углов любого треугольника равна 180°.

---

[1] Говорят, что предложение A, сформулированное в терминах абсолютной геометрии, эквивалентно (равносильно) аксиоме параллельных прямых, если предложение A является логическим следствием из системы аксиом групп I—V и аксиома параллельных прямых является логическим следствием из системы аксиом групп I—IV абсолютной геометрии и утверждения A.

б) Существует по крайней мере один треугольник, сумма углов которого равна 180°.

в) Если отрезки AC и BD равны и перпендикулярны к прямой AB, а точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, то $CD = AB$ (рис. 62).

Это утверждение мы назовем аксиомой параллельных отрезков академика А. Д. Александрова[1] (см. [2], § 8).

г) Множество всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от данной прямой и равноудаленных от этой прямой, есть прямая, параллельная данной.

д) Если три точки, лежащие по одну сторону от данной прямой, равноудалены от этой прямой, то эти точки лежат на прямой.

е) Если две прямые не перпендикулярны, то любая прямая, перпендикулярная к одной из них, пересекает другую прямую.

Докажем, для примера, что утверждения в), г) и е) эквивалентны аксиоме параллельных прямых.

Рассмотрим сначала утверждение в). Если имеет место аксиома параллельных прямых, то в силу того, что $AC = BD$ и $\angle 1 = \angle 3$ (так как $AC \| BD$, рис. 63), $\triangle ACB = \triangle DBC$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $AB = CD$, т. е. имеет место утверждение в).

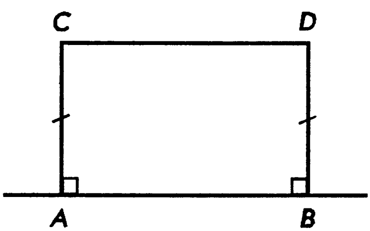


Рис. 62

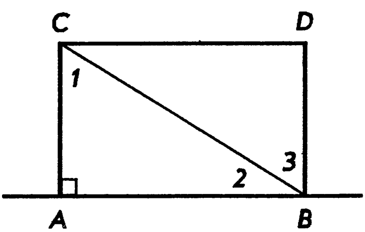


Рис. 63

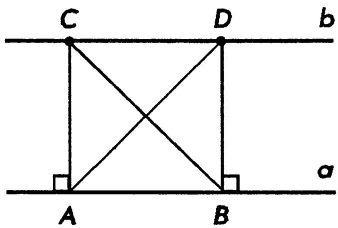
[1] Александров А. Д. (1912) — русский математик, академик РАН. Его основные труды относятся к геометрии, где он открыл методы изучения метрических свойств фигур. Эти методы существенно расширили область геометрических исследований и привели к решению ряда классических проблем теории поверхностей.

Допустим теперь, что имеют место аксиомы групп I—IV и утверждение в), и докажем, что имеет место утверждение б), а следовательно, аксиома параллельных прямых. Треугольники ACB и DBC равны по трем сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 3$ (рис. 63). Но $\widehat{2} + \widehat{3} = 90^\circ$, следовательно, сумма углов треугольника ABC равна 180°. Таким образом, имеет место утверждение б).

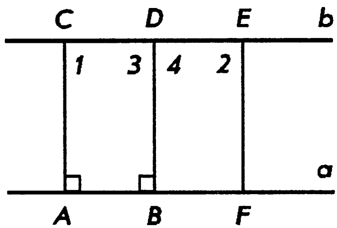
Докажем теперь, что утверждение г) эквивалентно аксиоме параллельных прямых. Если имеет место аксиома параллельных прямых, то по теореме 3 § 19 имеет место утверждение г).

Допустим, что имеют место аксиомы групп I—IV и утверждение г), и докажем, что имеет место утверждение в), а следовательно, и аксиома параллельных прямых.

Пусть a — данная прямая, а b — прямая, которая является множеством всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от прямой a и равноудаленных от этой прямой. Возьмем две произвольные точки C и D прямой b и проведем перпендикуляры CA и DB к прямой a. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle DCB$ (рис. 64а).



а)



б)

Рис. 64

В самом деле, $\triangle ABC = \triangle BAD$ по двум катетам, поэтому $BC = AD$. Но тогда треугольники ACD и BDC равны по трем сторонам, следовательно, $\angle ACD = \angle BDC$.

Возьмем теперь на прямой b точку E так, чтобы $C - D - E$, и проведем перпендикуляр EF к прямой a (рис. 64б). Так как $CA = DB = EF$, то по доказанному $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

Так как эти углы смежные, то они прямые. Но тогда прямоугольные треугольники CAB и BDC равны по гипотенузе и катету (см. рис. 64а), следовательно, $CD = AB$.

Докажем, наконец, что утверждение е) эквивалентно аксиоме параллельных прямых. Если выполняются аксиомы групп I—V, то утверждение е) следует из свойства 1^0 § 18, в случае, когда данные прямые параллельны, и из пятого постулата Евклида, когда данные прямые пересекаются.

Допустим, что имеют место аксиомы групп I—IV и утверждение е), и докажем, что выполняется аксиома параллельных прямых.

Возьмем прямую a и точку M, не лежащую на ней. Пусть MH — перпендикуляр, проведенный к прямой a, а b — прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой MH.

Ясно, что прямые a и b не пересекаются. Проведем через точку M произвольную прямую c, отличную от прямых MH и b, и докажем, что c пересекает прямую a. В самом деле, так как прямые c и MH не перпендикулярны, то прямая a, перпендикулярная к прямой MH, пересекает прямую c. Таким образом, через точку M проходит только одна прямая (прямая b), не пересекающая прямую a.

4. Н. И. Лобачевский и его геометрия

Многие математики, начиная с древних времен и до конца первой четверти XIX столетия, делали неоднократные попытки доказать пятый постулат Евклида (или предложения, ему равносильные). Все эти попытки оказались, однако, неудачными.

И только в начале XIX века были получены результаты, которые привели к решению этой проблемы. Основная заслуга в этом принадлежит знаменитому русскому ученому Н. И. Лобачевскому.

Николай Иванович Лобачевский родился 2 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде. Он окончил гимназию при Казанском университете, а затем и Казанский университет, после чего был оставлен там преподавателем. С 1816 г. Н. И. Лобачевский — профессор того же университета, с 1827 по 1846 г.— ректор университета. Н. И. Лобачевский скончался 24 февраля 1856 г.

В течение первых лет преподавательской деятельности в Казанском университете Н. И. Лобачевский настойчиво пытался доказать V постулат. Неудачи этих попыток и попыток его предшественников привели его к выводу, что V постулат не может быть выведен из остальных постулатов геометрии. Чтобы это доказать, Н. И. Лобачевский построил логическую систему, в которой, сохраняя основные посылки Евклида, он отверг V постулат Евклида и заменил его противоположным допущением. Он пришел к выводу, что эта логическая схема представляет собой новую геометрию, которая может быть развита так же успешно, как и геометрия Евклида.

7 февраля 1826 г. Н. И. Лобачевский представил физико-математическому факультету Казанского университета доклад по теории параллельных под названием «Рассуждения о принципах геометрии». В 1829 г. в Ученых записках Казанского университета он поместил статью «О началах геометрии».

Лобачевский развивает свою геометрию на плоскости и в пространстве до тех же пределов, до каких была развита евклидова геометрия, включая и формулы тригонометрии. Эту геометрию он назвал «воображаемой» (впоследствии ее стали называть геометрией Лобачевского или гиперболической геометрией).

Позднее, в конце XIX века, благодаря работам Ф. Клейна[1], Б. Римана[2] и других математиков, проблема пятого постулата была решена полностью: пятый постулат Евклида не зависит от остальных аксиом абсолютной геометрии.

Примерно в одно время с Лобачевским теорией параллельных прямых занимались великий немецкий

---

[1] Клейн Кристиан Феликс (1849—1925) — немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1895). Труды по геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических групп и др. Свои геометрические идеи Клейн изложил в работе «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» (1872), известной под названием Эрлангенской программы.

[2] Риман Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) — немецкий математик. Труды по алгебраическим функциям, аналитической теории дифференциальных уравнений, распределению простых чисел, теории интеграла. Ввел так называемые римановы пространства и развил их теорию (риманову геометрию).

математик К. Ф. Гаусс (1777—1855) и венгерский математик Я. Бояи (1802—1860). Но Гаусс не опубликовал ничего по теории параллельных, боясь, что его не поймут. После смерти Гаусса в его бумагах были найдены наброски отдельных наиболее простых теорем гиперболической геометрии. Я. Бояи опубликовал в 1832 г. (через три года после публикации Лобачевского и не зная о последней) на латинском языке произведение «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве, независимое от правильности или ложности XI аксиомы[1] Евклида...». В этой работе Янош Бояи изложил ту же теорию, что и Лобачевский, но в значительно менее развитой форме.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

103. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AB в точке M, а сторону AC — в точке N. Доказать, что $MN = MB + CN$.

104. Лучи AD и AC являются биссектрисами смежных углов MAB и NAB. Прямая CD параллельна прямой MN. Доказать, что середина отрезка CD лежит на луче AB.

105. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Прямая, проходящая через точку D и параллельная прямой AC, пересекает сторону AB в точке E, а прямая, проходящая через точку E и параллельная прямой BC, пересекает сторону AC в точке F. Доказать, что $EA = FC$.

106. Точка B лежит между точками A и C. Через точки A и C проведены параллельные прямые AD и CE, причем точки D и E лежат по одну сторону от прямой AC и $AD = AB$, $CE = CB$. Найти угол DBE.

107. Лучи BB_1 и CC_1 являются лучами одной полуплоскости с границей BC. Доказать, что эти лу-

[1] В некоторых изданиях «Начал» Евклида V постулат включен в число аксиом и называется XI аксиомой.

чи пересекаются тогда и только тогда, когда $\widehat{B_1BC} + \widehat{C_1CB} < 180^\circ$.

108. Доказать, что две прямые a и b пересекаются, если выполняется хотя бы одно из условий: а) существует прямая, которая перпендикулярна к одной из них и не перпендикулярна к другой; б) прямые содержат две высоты некоторого треугольника; в) прямая a содержит биссектрису угла некоторого треугольника, а прямая b — биссектрису внешнего угла этого треугольника.

109. Углы DBC и ECB являются внешними углами треугольника ABC, причем $D - B - A$ и $E - C - A$. Доказать, что биссектрисы углов BAC, DBC и ECB пересекаются в одной точке.

110. Доказать, что прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O, и найти угол BOC, если угол A равен α.

111. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана такая точка M, что $\angle ABM = \angle ACM$, $\angle BCM = \angle BAM$, $\angle CAM = \angle CBM$. Доказать, что высоты треугольника ABC пересекаются в точке M.

112. Биссектрисы равнобедренного треугольника пересекаются в точке, из которой боковая сторона видна под углом, равным одному из углов треугольника. Найти углы треугольника.

113. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает высоту BB_1 в точке P, а прямую, перпендикулярную к AB и проведенную через точку B, в точке M. Доказать, что $BP = BM$.

114. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника с этой вершиной. Отрезки этих прямых, вместе со сторонами треугольника, образуют три треугольника. Доказать, что эти три треугольника имеют соответственно равные углы.

115. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CD, а в треугольнике ACD — биссектриса CE. Доказать, что $CB = BE$.

116. В треугольнике ABC $\widehat{B} = 15°$, $\widehat{C} = 30°$. На стороне BC взята точка D так, что угол BAD — прямой. Доказать, что $BD = 2AC$.

117. Доказать, что прямая, проходящая через точку, лежащую на стороне равнобедренного треугольника, и параллельная другой стороне, отсекает от треугольника равнобедренный треугольник.

118. Доказать, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до прямых, содержащих боковые стороны, постоянна и равна высоте, проведенной к боковой стороне. Как изменится это утверждение, если взять точку на продолжении основания?

119. Доказать, что сумма расстояний от любой внутренней точки равностороннего треугольника до трех прямых, содержащих его стороны, постоянна и равна высоте треугольника.

120. В треугольнике ABC $AB > AC$. Доказать, что $\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{A} > 90°$.

121. Найти острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза в четыре раза больше проведенной к ней высоты.

122. Даны параллельные прямые a и b. Через точку A прямой a проведены к прямой b перпендикуляр AC и наклонная AB. Точка D на прямой a выбрана так, что прямая BD пересекает отрезок AC в точке E и $ED = 2AB$. Доказать, что угол DBC в три раза меньше угла ABC.

123. Найти углы треугольника, если его биссектриса разбивает треугольник на два равнобедренных треугольника.

124. В треугольнике ABC $AB > AC$, на прямой AB взята точка D так, что $B - A - D$ и $AD = AC$. Доказать, что угол BCD — тупой.

125. Через точку P основания BC равнобедренного треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к прямой BC и пересекающая прямые AC и AB соответственно в точках M и N. Доказать, что сумма от-

резков MP и NP не зависит от выбора точки P на отрезке BC.

126. Доказать, что биссектриса неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины.

127. Медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три равных угла. Доказать, что треугольник прямоугольный.

128. Доказать, что треугольник равнобедренный, если выполняется хотя бы одно из условий: а) биссектриса внешнего угла треугольника параллельна одной из его сторон; б) один из внешних углов треугольника в два раза больше угла треугольника, не смежного с ним; в) две биссектрисы треугольника равны.

129. В треугольнике ABC угол B — острый и в два раза больше угла C, AD — высота. На продолжении луча BA взята точка E так, что $BE = BD$. Прямая ED пересекает прямую AC в точке F. Доказать, что:
а) $FD = FC = FA$;
б) углы треугольника AEF соответственно равны углам треугольника ABC;
в) $AB = CD - BD$.

130. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведены биссектриса CD и высота AH. Отрезок DE — перпендикуляр, проведенный из точки D к прямой BC. На прямой BC взята точка F так, что угол FDC — прямой. Доказать, что $HE = \frac{1}{4}CF$.

131. Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка M. Найти угол AMC, если:

а) $\widehat{A} = 80^\circ$, $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 10^\circ$; б) $\widehat{A} = 100^\circ$, $\widehat{MBA} =$ $= 10^\circ$, $\widehat{MAB} = 20^\circ$.

132. На катетах AC и BC вне прямоугольного треугольника ABC построены квадраты $ACFN$ и $BCDE$ и

проведена медиана CM. Доказать, что: а) $CM \perp DF$; б) $CM = \frac{1}{2}DF$.

133. Доказать, что каждое из следующих утверждений эквивалентно аксиоме параллельных прямых:
а) серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются;
б) если даны произвольный отрезок и произвольный острый угол, то существует прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен данному отрезку, а прилежащий к нему острый угол — данному углу;
в) медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы;
г) если прямая проходит через внутреннюю точку неразвернутого угла, то она пересекает по крайней мере одну из сторон угла или проходит через вершину угла.

Глава V

МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 23. ПОНЯТИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Многоугольник

Система отрезков A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, где $n \geqslant 2$, называется *ломаной*, соединяющей точки A_1 и A_n, и обозначается так: $A_1A_2 \ldots A_n$ (рис. 65).

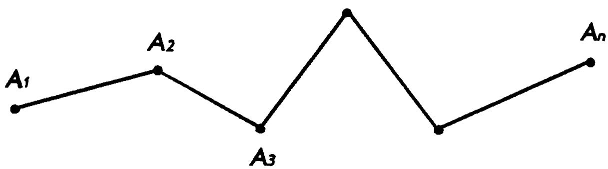


Рис. 65

Отрезки A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ называются *звеньями* (или сторонами) ломаной, а точки A_1, A_2, ..., A_n *вершинами* ломаной, причем точки A_1 и A_n называются *концами* ломаной. Звенья A_1A_2 и A_2A_3, A_2A_3 и A_3A_4, ..., $A_{n-2}A_{n-1}$ и $A_{n-1}A_n$ называются *смежными*. Ломаная $A_1A_2 \ldots A_n$ называется *замкнутой*, если ее концы A_1 и A_n совпадают. В этом случае звенья $A_{n-1}A_n$ и A_1A_2 также называются смежными.

Замкнутая ломаная называется *простым многоугольником*, если ее смежные звенья не лежат на одной прямой, а несмежные звенья не имеют общих точек. Вершины и стороны ломаной называются *вершинами* и *сторонами* многоугольника. Сумма сторон многоугольника называется его *периметром*. Многоугольник, имеющий n вершин, а значит, и n сторон, называется n-угольником. В частности, при $n = 3$ получаем треугольник, при $n = 4$ — четырехугольник.

На рис. 66а изображен простой шестиугольник. Замкнутая ломаная $A_1A_2 \dots A_5$, изображенная на рис. 66б, не является простым многоугольником, так как несмежные звенья A_2A_3 и A_4A_5 пересекаются.

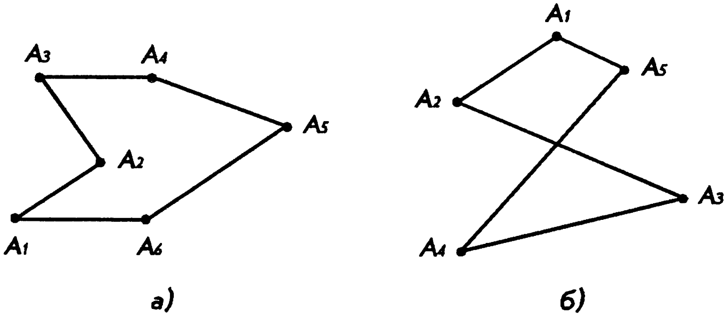


Рис. 66

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются *соседними* вершинами. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю* многоугольника. Из каждой вершины n-угольника при $n > 3$ выходят $n - 3$ диагонали, поэтому общее число диагоналей n-угольника равно $\frac{1}{2}n\,(n - 3)$. Так, четырехугольник имеет две диагонали, пятиугольник — 5, шестиугольник — 9 и т. д.

В дальнейшем мы будем рассматривать только простые многоугольники, поэтому для простоты изложения будем их называть просто *многоугольниками.*

Многоугольник разбивает множество всех точек плоскости, не принадлежащих многоугольнику, на два подмножества, одно из которых называется *внутренней,* а другое *внешней областью* многоугольника[1].

[1] Это утверждение называется теоремой Жордана. Оно может быть доказано на основе аксиом групп I—II, однако доказательство очень сложное и мы его не приводим. Жордан Мари Энмон Камиль (1838—1922) — французский математик, член Парижской Академии наук, иностранный член-корр. Петербургской Академии наук. Его основные труды относятся к алгебре, теории функций, а также к топологии и кристаллографии.

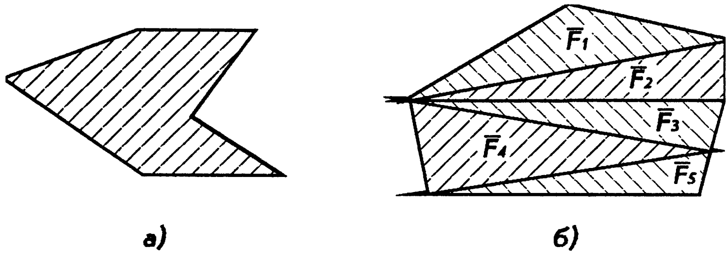


Рис. 67

На рис. 67а внутренняя область многоугольника заштрихована. Точки внутренней области многоугольника называются *внутренними* точками многоугольника.

Фигура, являющаяся объединением многоугольника F и его внутренней области, также называется многоугольником. Ее мы будем обозначать через $\overline{F}$.

Будем говорить, что *многоугольник* $\overline{F}$ *разложен на многоугольники* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_k$, если никакие два из многоугольников $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ..., $\overline{F}_k$ не имеют общих внутренних точек и $\overline{F} = \overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 \cup \ldots \cup \overline{F}_k$. На рис. 67б многоугольник $\overline{F}$ разложен на треугольники $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$.

2. Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется *выпуклым*, если каждая прямая, проходящая через две его соседние вершины, является границей полуплоскости, в которой лежат остальные вершины многоугольника. На рис. 67б многоугольник выпуклый, а на рис. 67а — невыпуклый.

Из определения выпуклого многоугольника, учитывая, что полуплоскость является выпуклой фигурой, и используя признак луча полуплоскости, легко прийти к выводу, что если AB — произвольная сторона выпуклого многоугольника, то все точки этого многоугольника, не принадлежащие стороне AB, принадлежат полуплоскости с границей AB, содержащей остальные вершины.

Таким образом, с каждым выпуклым n-угольником связано n полуплоскостей, на границе каждой из которых лежат две соседние вершины, т. е. некоторая сторона многоугольника, а сама полуплоскость содержит остальные вершины. Эти полуплоскости будем называть *полуплоскостями выпуклого многоугольника*.

Можно доказать, что внутренняя область выпуклого многоугольника является пересечением всех n полуплоскостей этого многоугольника.

Если $A_1A_2 \dots A_n$ — выпуклый многоугольник, то углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются *углами этого многоугольника*[1]. Их обычно обозначают одной буквой: $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$ и т. д.

Докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма. *Если ABC — произвольный угол выпуклого n-угольника F, где $n > 3$, то все вершины этого многоугольника, отличные от A, B и C, лежат во внутренней области угла ABC.*

○ Пусть λ_{AB} и λ_{BC} — полуплоскости многоугольника F с границами соответственно AB и BC. Ясно, что все вершины многоугольника, отличные от A, B и C, принадлежат как полуплоскости λ_{AB}, так и полуплоскости λ_{BC}, поэтому они принадлежат множеству $\lambda_{AB} \cap \lambda_{BC}$. Так как сторона BC угла ABC принадлежит полуплоскости λ_{AB}, а сторона AB — полуплоскости λ_{BC}, то $\lambda_{AB} \cap \lambda_{BC}$ — внутренняя область угла ABC. Таким образом, все вершины многоугольника F, отличные от A, B и C, лежат во внутренней области угла ABC. ●

Из этой леммы следует, что все точки многоугольника F, не принадлежащие сторонам BA и BC, лежат во внутренней области угла ABC.

3. Четырехугольник

Каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали. Две стороны четырехугольника, не являющиеся смежными, называются *противоположными*. Две вершины, не являющиеся соседними, также называются *противоположными*.

Теорема 1. *Четырехугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются.*

○ 1) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Докажем, что его диагонали AC и BD пересекаются.

---

[1] Отметим, что для невыпуклого многоугольника мы не вводим понятие угла многоугольника.

По предыдущей лемме вершина D лежит во внутренней области угла ABC, поэтому BD — внутренний луч этого угла, следовательно, этот луч пересекает отрезок AC. Таким образом, лучи BD и AC пересекаются в некоторой точке M и эта точка лежит на отрезке AC. Аналогично доказывается, что точка M лежит на отрезке BD, поэтому отрезки AC и BD имеют общую точку, т. е. они пересекаются.

2) Пусть диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ выпуклый, т. е. любые две соседние вершины лежат в одной полуплоскости, граница которой проходит через две другие вершины. Покажем, например, что точки C и D лежат в одной полуплоскости с границей AB.

Так как точка M лежит между точками A и C, то точки M и C лежат в одной полуплоскости с границей AB. Аналогично, точка M лежит между точками B и D, поэтому точки M и D лежат в одной полуплоскости с границей AB. Отсюда следует, что вершины C и D лежат в одной полуплоскости с границей AB. ●

Следствие. *Диагонали невыпуклого четырехугольника не имеют общих точек.*

Теорема 2. *В любом четырехугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Если он выпуклый, то из теоремы 1 следует, что точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD.

Рассмотрим случай, когда $ABCD$ — невыпуклый четырехугольник. Тогда какие-то две вершины, например C и D, лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины, т. е. от прямой AB. Пусть M — точка пересечения отрезка CD с прямой AB. Так как отрезки AB и CD не пересекаются, то возможны два случая.

а) Точка A лежит на отрезке BM (рис. 68а). Тогда точки B и M лежат по разные стороны от прямой AC. Но M и D лежат по одну сторону от этой прямой, поэтому точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC.

б) Точка B лежит на отрезке AM (рис. 68б). Анало-

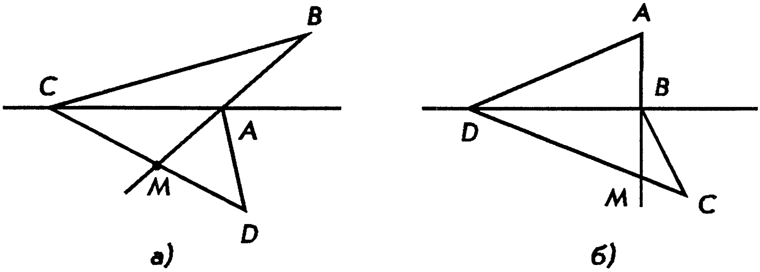


Рис. 68

гично случаю а) доказывается, что точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD. ●

Следствие. *Прямые, содержащие диагонали любого четырехугольника, пересекаются.*

Из теоремы 1 следует, что каждая диагональ выпуклого четырехугольника разлагает его на два треугольника. Учитывая теорему 2, мы приходим к следующему выводу: в любом четырехугольнике какая-либо диагональ разлагает его на два треугольника.

Докажем еще одну теорему, которая является обобщением для четырехугольника теоремы 2 § 16.

Теорема 3. *Каждая сторона четырехугольника меньше суммы трех других сторон.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. Докажем, например, что $AB < BC + CD + DA$. Для этого проведем диагональ BD и воспользуемся неравенством треугольника для треугольников ABD и BCD: $AB < AD + DB$, $DB < BC + CD$, поэтому $AB < AD + BC + CD$. ●

§ 24. СУММА УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Теорема о разложении выпуклого многоугольника диагональю

Легко видеть, что все точки, лежащие на каждой диагонали выпуклого многоугольника, являются внутренними точками этого многоугольника. В самом деле, если точка M лежит на какой-нибудь диагонали, то она принадлежит каждой полуплоскости многоугольника, поэтому она принадлежит пересечению всех его полуплоскостей, т. е. внутренней области многоугольника.

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Каждая диагональ выпуклого n-угольника, где $n > 3$, разлагает его на два выпуклых многоугольника.*

○ Пусть $\bar{F} = \overline{A_1A_2 \dots A_n}$ — данный выпуклый многоугольник, а A_1A_i — его диагональ, где $2 < i < n$. Докажем сначала, что $\bar{F}_1 = \overline{A_1A_2 \dots A_i}$ и $\bar{F}_2 = \overline{A_iA_{i+1} \dots A_nA_1}$ — выпуклые многоугольники. Очевидно представляет интерес случай, когда $i > 3$ или $i < n - 1$.

Так как A_i — внутренняя точка угла $A_2A_1A_n$, то A_1A_i — внутренний луч этого угла, поэтому он делит угол на два угла $A_2A_1A_i$ и $A_iA_1A_n$ (теорема 2 § 4). Пусть λ и μ — полуплоскости с общей границей A_1A_i, содержащие соответственно точки A_2 и A_n. Докажем, что точки $A_3, A_4, \dots, A_{i-1}$ при $i > 3$ принадлежат полуплоскости λ, а точки $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{n-1}$ при $i < n - 1$ — полуплоскости μ. В самом деле, так как $A_2 \in \lambda$ и отрезок A_2A_3 не имеет общих точек с прямой A_1A_i, то $A_3 \in \lambda$. Аналогично получаем, что $A_4 \in \lambda, \dots, A_i-1 \in \lambda$. Точно так же доказывается, что $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{n-1} \in \mu$. Учитывая, что $\overline{A_1A_2 \dots A_n}$ — выпуклый многоугольник, мы приходим к выводу, что $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ — выпуклые многоугольники.

Докажем теперь, что многоугольник $\bar{F}$ разложен на многоугольники $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$. Внутренняя область многоугольника $\bar{F}_1$ принадлежит внутренней области угла $A_2A_1A_i$, а внутренняя область многоугольника $\bar{F}_2$ — внутренней области угла $A_iA_1A_n$. По теореме 2 § 4 эти углы не имеют ни одной общей внутренней точки, поэтому многоугольники $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ не имеют общих внутренних точек. С другой стороны, $\bar{F} = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2$. Для доказательства этого достаточно установить, что любая внутренняя точка многоугольника $\bar{F}$ является внутренней точкой либо многоугольника $\bar{F}_1$, либо многоугольника $\bar{F}_2$, либо отрезка A_1A_i. Пусть M — внутренняя точка многоугольника $\bar{F}$. Тогда она принадлежит всем полуплоскостям этого многоугольника, а также одной из полуплоскостей λ или μ или отрезку A_1A_i (так как M — внутренняя точка угла $A_2A_1A_n$, то если M не лежит на отрезке A_1A_i, то она является внутренней точкой одного из углов — $A_2A_1A_i$ или $A_nA_1A_i$). Отсюда и следует, что точка M принадлежит либо всем полуплоскостям многоугольника $\overline{F}_1$, либо всем полуплоскостям многоугольника $\overline{F}_2$, либо лежит на отрезке A_1A_i. Таким образом, многоугольник $\overline{F}$ разложен на многоугольники $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. ●

Предлагаем читателю, воспользовавшись этой теоремой и теоремой 2 § 16, применив метод математической индукции, самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 1. Доказать, что каждая сторона выпуклого n-угольника меньше суммы остальных $n-1$ сторон.

Рассмотрим еще одну задачу.

Задача 2. Все вершины выпуклого n-угольника лежат внутри некоторого треугольника. Доказать, что периметр треугольника больше периметра n-угольника.

○ Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — данный многоугольник F. Точки этого многоугольника, за исключением точек стороны A_1A_2, лежат по одну сторону от прямой A_1A_2. Обозначим через P и Q точки пересечения прямой A_1A_2 со сторонами треугольника (рис. 69). Отрезок PQ разлагает треугольник на два многоугольника, внутренняя область одного из которых (многоугольника $\overline{F}_1$) содержит точки $A_3, A_4, \ldots, A_n$. В силу задачи 1, периметр многоугольника $\overline{F}_1$ меньше периметра треугольника

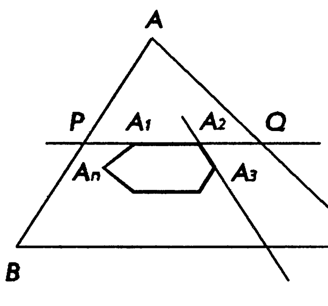


Рис. 69

ABC. Аналогично, прямая A_2A_3 разлагает многоугольник $\overline{F}_1$ на два многоугольника, внутренняя область одного из которых (многоугольника $\overline{F}_2$) содержит точки $A_4, A_5, \ldots, A_n$. В силу задачи 1 периметр многоугольника $\overline{F}_2$ меньше периметра многоугольника $\overline{F}_1$, следовательно, меньше периметра треугольника ABC.

Проводя аналогичные рассуждения с каждой стороной многоугольника F, мы приходим к выводу, что периметр многоугольника F меньше периметра треугольника ABC. ●

2. Сумма углов выпуклого многоугольника

Теорема 2. *Сумма всех углов выпуклого n-угольника равна* $(n - 2)\,180°$.

○ Теорему докажем методом математической индукции. При $n = 3$ она очевидна. Предположим, что теорема верна для k-угольника, где $k < n$, и докажем ее для $(k + 1)$-угольника.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_{k+1}$ — данный многоугольник. Проведем диагональ A_1A_3 этого многоугольника. По теореме 1 многоугольник $\overline{A_1A_2 \ldots A_{k+1}}$ разложен на треугольник $\overline{A_1A_2A_3}$ и выпуклый k-угольник $\overline{A_3A_4 \ldots A_{k+1}A_1}$ (рис. 70). По предположению индукции $\widehat{A_{k+1}A_1A_3} + \widehat{A_1A_3A_4} + \widehat{A_4} + \ldots + \widehat{A_{k+1}} = (k - 2)\,180°$. С другой стороны, $\widehat{A_3A_1A_2} + \widehat{A_2} + \widehat{A_2A_3A_1} = 180°$. Складывая эти равенства и учитывая, что $\widehat{A_2A_1A_3} + \widehat{A_3A_1A_{k+1}} = \widehat{A_2A_1A_{k+1}}$ (A_1A_3 — внутренний луч угла $A_2A_1A_{k+1}$) и $\widehat{A_2A_3A_1} +$

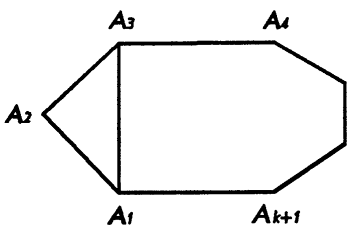


Рис. 70

$+ \widehat{A_1A_3A_4} = \widehat{A_2A_3A_4}$ (A_3A_1— внутренний луч угла $A_2A_3A_4$), получаем: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_{k+1} = (k - 1)\,180^\circ$. При $k = n - 1$ получаем: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_n = (n - 2)\,180^\circ$. ●

Следствие. *Сумма всех углов выпуклого четырехугольника равна* 360°.

§ 25. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

1. Параллелограмм и его свойства

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом* (рис. 71).

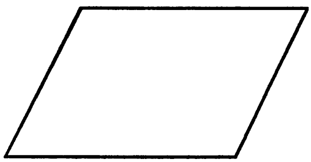


Рис. 71

Из этого определения следует, что любые две соседние вершины параллелограмма лежат в полуплоскости, граница которой содержит две другие вершины. Следовательно, *параллелограмм является выпуклым четырехугольником.*

В следующей теореме выражены основные свойства параллелограмма.

Теорема 1. *В параллелограмме:* 1^0. *Противоположные стороны равны;* 2^0. *Противоположные углы равны;* 3^0. *Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна* 180°; 4^0. *Диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.*

○ Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм (рис. 72).

1^0. По теореме 2 § 19 $BC = AD$, $AB = CD$.

2^0. Проведем диагональ BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 72а). Треугольники ABD и CDB равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому

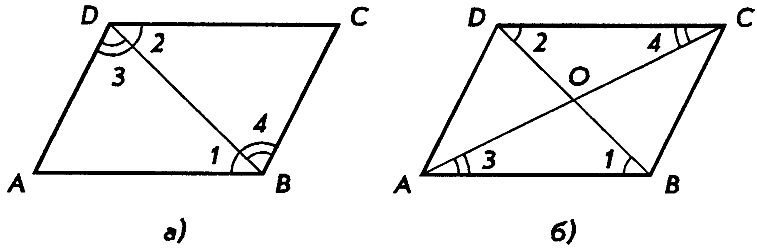


Рис. 72

$\angle A = \angle C$. Аналогично, проведя диагональ AC, доказывается, что $\angle B = \angle D$.

3^0. Углы, прилежащие к одной стороне параллелограмма, являются односторонними углами при пересечении параллельных прямых секущей, поэтому сумма этих углов равна 180°.

4^0. Так как параллелограмм $ABCD$ является выпуклым четырехугольником, то по теореме 1 § 23 его диагонали AC и BD пересекаются в некоторой точке O (рис. 72б). Поэтому точки A и C лежат по разные стороны от прямой BD, а точки B и D — по разные стороны от прямой AC. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей BD, а также AD и BC секущей AC. Отсюда, учитывая, что $AB = CD$, приходим к выводу, что $\triangle ABO = \triangle CDO$ по второму признаку равенства треугольников, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$. ●

2. Признаки параллелограмма

В следующей теореме выражены основные признаки параллелограмма.

Теорема 2. *Четырехугольник является параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из условий:* 1^0. *Две противоположные стороны равны и параллельны;* 2^0. *Противоположные стороны попарно равны;* 3^0. *Диагонали пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. По теореме 2 § 23 какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две данные вершины. Пусть, например, $A, C \div BD$ (рис. 72а). Тогда углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении прямых AB и CD, а также AD и BC секущей BD.

1^0. Предположим, что стороны AB и CD равны и параллельны (рис. 72а). Так как $AB \| CD$, то $\angle 1 = \angle 2$. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CDB$ по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle 3 = \angle 4$. По теореме 2 § 18 $AD \| BC$. Таким образом, $ABCD$ — параллелограмм.

2^0. По условию $AB = CD, AD = BC$, поэтому $\triangle ABD = \triangle CDB$ по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $AB \| CD$. Итак, $AB = CD$, $AB \| CD$, следовательно, по признаку 1^0 $ABCD$ — параллелограмм.

3^0. По условию диагонали AC и BD пересекаются в точке O и $AO = OC, BO = OD$ (рис. 72б). Тогда $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $AB = CD$, аналогично из равенства треугольников AOD и COB следует, что $AD = BC$. По признаку 2^0 $ABCD$ — параллелограмм. ●

Имеются и другие признаки параллелограмма, один из которых сформулирован в следующей задаче.

Задача. В четырехугольнике диагонали пересекаются и отрезок, соединяющей середины противоположных сторон, точкой пересечения диагоналей делится пополам. Доказать, что четырехугольник является параллелограммом.

Предлагаем читателю, воспользовавшись задачей п. 3, § 13 и теоремой $2(3^0)$, самостоятельно решить эту задачу.

3. Равенство параллелограммов

При любом наложении отрезок переходит в отрезок и три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой, поэтому четырехугольник переходит в четырехугольник. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, $A'B'C'D'$ — его образ. Тогда $AB = A'B', CD = C'D'$. Но $AB = CD$, поэтому $A'B' = C'D'$. Аналогично доказывается, что $B'C' = A'D'$. По теореме 2 (2^0) $A'B'C'D'$ — параллелограмм.

Если параллелограмм $ABCD$ равен параллелограмму $A'B'C'D'$, то две смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними второго параллелограмма, например, $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle A = \angle A'$.

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если две смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма, то такие параллелограммы равны.*

○ Пусть в параллелограммах $ABCD$ и $A'B'C'D'$ $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle A = \angle A'$. Докажем, что параллелограммы равны.

Из условий теоремы следует, что $\triangle ABD = \triangle A'B'D'$ по первому признаку равенства треугольников, значит, существует наложение f, при котором точки A, B, D отображаются соответственно в точки A', B', D'. Так как при наложении параллельные прямые отображаются на параллельные (§ 18 п. 1), то прямая BC отображается на прямую $B'C'$, а прямая DC — на прямую $D'C'$. Поэтому $C' = f(C)$. По аксиоме III_4 отрезки AB, BC, CD и DA отображаются соответственно на отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, т. е. параллелограмм $ABCD$ отображается на параллелограмм $A'B'C'D'$. Таким образом, параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны. ●

§ 26. ПРЯМОУГОЛЬНИК, РОМБ, КВАДРАТ

1. Прямоугольник

Параллелограмм, у которого один из углов прямой, называется *прямоугольником.* Из теоремы 1 (2^0, 3^0) § 25 следует, что остальные три угла прямоугольника также прямые, значит, все четыре угла прямоугольника прямые.

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма, а также имеет следующее свойство, которым любой параллелограмм не обладает.

Диагонали прямоугольника равны.

○ Обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD прямоугольника $ABCD$. Так как треугольник ABC прямоугольный, а BO — медиана этого треугольника, то $OB = \frac{1}{2}AC$ (свойство 2°, § 20). Но $BD = 2OB$, поэтому $BD = AC$. ●

Рассмотрим признаки прямоугольника.

Теорема 1. *Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм является прямоугольником.*

○ Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны. Так как $AD = BC$, то $\triangle ABD = \triangle BAC$ по третьему признаку равенства треугольников, поэтому $\angle A = \angle B$. Но $\hat{A} + \hat{B} = 180°$, следовательно, $\hat{A} = 90°$, т. е. $ABCD$ — прямоугольник. ●

Теорема 2. *Если в выпуклом четырехугольнике все углы прямые, то этот четырехугольник является прямоугольником.*

○ Пусть $ABCD$ — данный выпуклый четырехугольник. Так как $\angle A$ и $\angle B$ — прямые, то $AD \perp AB$, $BC \perp AB$, поэтому $AD \| BC$. Аналогично доказывается, что $AB \| CD$, значит, $ABCD$ — параллелограмм. Но $\angle A$ — прямой, поэтому $ABCD$ — прямоугольник. ●

2. Ромб

Параллелограмм, у которого две смежные стороны равны, называется *ромбом*. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то все четыре стороны ромба равны. Следовательно, ромб — это четырехугольник, у которого все стороны равны. Докажем обратное утверждение.

Теорема 3. *Четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, у которого все стороны равны. По теореме 2 (2°) § 25 $ABCD$ — параллелограмм, а так как у него любые две смежные стороны равны, то этот четырехугольник является ромбом. ●

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими свойствами: *диагонали ромба перпендикулярны, и каждая диагональ делит углы ромба пополам.* В самом деле, пусть диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 73). Так как $BO = OD$, то в равнобедренном треугольнике ABD отрезок AO является медианой, поэтому этот отрезок является высотой и биссектрисой, т. е.

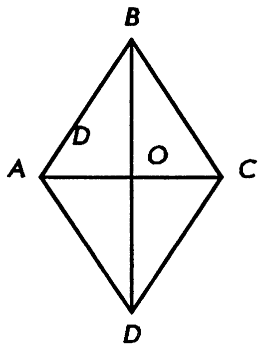


Рис. 73

$AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$. Аналогично доказывается, что углы B, C и D диагоналями делятся пополам.

Рассмотрим признаки ромба.

Теорема 4. *Параллелограмм является ромбом, если его диагонали перпендикулярны, или если диагональ делит один из углов пополам.*

○ Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O (рис. 73). Так как O — середина отрезка AC, то в треугольнике ABC медиана BO является высотой, следовательно, по теореме 2 § 12 $AB = BC$, т. е. $ABCD$ — ромб.

Допустим теперь, что диагональ BD делит угол B пополам. Тогда в треугольнике ABC медиана BO является биссектрисой, следовательно, по теореме 2 § 12 $AB = BC$, т. е. $ABCD$ — ромб. ●

3. Квадрат

Прямоугольник, у которого смежные стороны равны, называется *квадратом.* Из этого определения следует, что квадрат — это ромб, у которого один из углов прямой. Таким образом, квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, прямоугольника и ромба.

4. Равенство прямоугольников, ромбов, квадратов

Так как при наложении параллелограмм переходит в параллелограмм, отрезок переходит в отрезок, а угол — в равный ему угол, то при любом наложении прямоугольник переходит в прямоугольник, ромб — в ромб, квадрат — в квадрат.

Из теоремы 3 § 25 следует:

1^0. *Если две смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны двум смежным сторонам другого прямоугольника, то такие прямоугольники равны.*

2^0. *Если сторона и угол одного ромба соответственно равны стороне и углу другого ромба, то такие ромбы равны.*

3^0. *Если сторона одного квадрата равна стороне другого квадрата, то такие квадраты равны.*

§ 27. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

1. Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Докажем теорему о средней линии треугольника.

Теорема 1. *Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.*

○ Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 74). Докажем, что $MN \| AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$.

Через точку M проведем прямые MP и MQ, параллельные соответственно сторонам BC и AB (P — точка на стороне AB, а Q — на стороне BC, см. рис. 74). Четырехугольник $MQBP$ является параллелограммом, поэтому

$$MP = BQ,\ MQ = PB. \qquad (1)$$

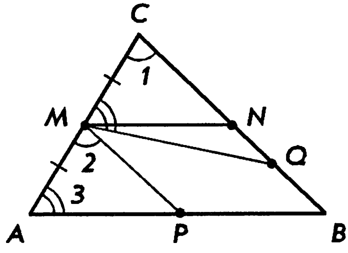


Рис. 74

При пересечении параллельных прямых MP и BC, а также MQ и AB секущей AC образуются односторонние углы 1 и 2, 3 и CMQ, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, $\angle CMQ = \angle 3$. Отсюда следует, что $\triangle CMQ = \triangle MAP$ по второму признаку равенства треугольников, следовательно,

$$MP = CQ, \; MQ = AP. \qquad (2)$$

Из первых равенств (1) и (2) следует, что $BQ = CQ$, т. е. Q — середина отрезка BC и поэтому совпадает с точкой N. Таким образом, $MN \| AB$. Из вторых равенств (1) и (2) следует, что $AP = PB$, т. е. $AP = \frac{1}{2}AB$. Отсюда, учитывая, что $AP = MQ = MN$, имеем: $MN = \frac{1}{2}AB$. ●

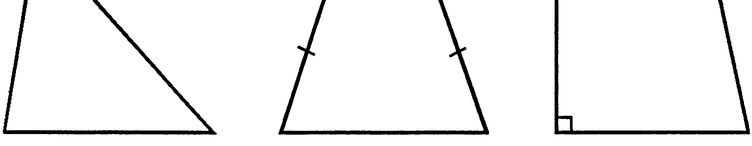
Предлагаем читателю с помощью теоремы о средней линии треугольника, решить следующую задачу.

Задача 1. Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

2. Трапеция. Равнобедренная трапеция

Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется *трапецией* (рис. 75а). Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а непараллельные — *боковыми сторонами*. Учитывая теорему 2 (2^0) § 25 мы заключаем, что основания трапеции не равны друг другу. Если боковые стороны равны, то трапеция называется *равнобедренной* (рис. 75б). Если один из углов трапеции прямой, то трапеция называется *прямоугольной* (рис. 75в).

Рассмотрим свойства равнобедренной трапеции.



а) б) в)

Рис. 75

Теорема 2. *В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны и диагонали равны.*

○ Пусть $ABCD$ — данная равнобедренная трапеция с основаниями AB и CD, где $AB > CD$. Докажем сначала, что углы A и B равны (рис. 76а). Для этого проведем через вершину D прямую, параллельную прямой BC, и обозначим через E точку пересечения этой прямой с прямой AB. Четырехугольник $DEBC$ — параллелограмм, поэтому $DE = CB$ и $CD = EB$. Так как $AB > CD$, то точка E лежит на стороне AB.

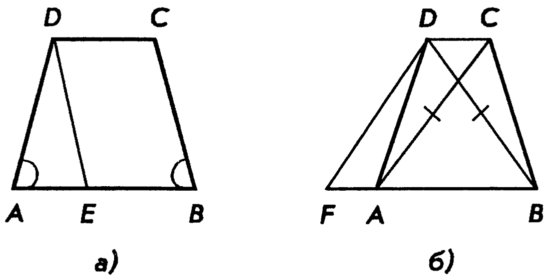


Рис. 76

Треугольник ADE — равнобедренный, следовательно, $\angle A = \angle DEA$, но $\angle DEA = \angle B$ как односторонние углы при пересечении параллельных прямых DE и CB секущей AB. Таким образом, $\angle A = \angle B$.

Так как $AB \| DC$, то $\angle A + \angle D = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$, следовательно, $\angle D = \angle C$.

Докажем теперь, что диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ равны (рис. 76б). Треугольники ACB и BDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AD = BC$, $\angle A = \angle B$, AB — общая сторона), следовательно, $AC = BD$. ●

Докажем теперь теорему, выражающую признаки равнобедренной трапеции.

Теорема 3. *Трапеция является равнобедренной, если выполняется хотя бы одно из условий: а) углы при одном основании равны; б) диагонали равны.*

○ а) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с основаниями AB и CD, где $AB > CD$, в которой $\angle A = \angle B$. Проведем через точку D прямую, параллельную прямой BC, и обозначим через E точку пересечения этой прямой с прямой AB (рис. 76а). Так как $AB > CD$, то точка E лежит на отрезке AB, $\angle B = \angle DEA$ как односторонние углы при пересечении параллельных прямых BC и DE секущей AB. Но $\angle B = \angle A$, поэтому $\angle A = \angle DEA$. Отсюда следует, что треугольник ADE равнобедренный, т. е. $AD = DE$. Отрезки DE и CB равны как противоположные стороны параллелограмма $DEBC$. Таким образом, $AD = BC$, т. е. трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Пусть в данной трапеции диагонали AC и BD равны. Проведем через точку D прямую, параллельную прямой AC и обозначим через F точку пересечения этой прямой с прямой AB (рис. 76б). Отрезки AC и DF равны как противоположные стороны параллелограмма $AFDC$. Отсюда следует, что $DB = DF$, значит, треугольник DFB равнобедренный, поэтому $\angle DFB = \angle DBF$. Но $\angle DFB = \angle CAB$ как односторонние углы при пересечении параллельных прямых DF и AC секущей AF. Таким образом, $\angle CAB = \angle DBA$.

Треугольники CAB и DBA равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $BC = AD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная. ●

3. Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Теорема 4. *Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*

○ Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 77). Докажем, что $MN \| AB$ и $MN = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

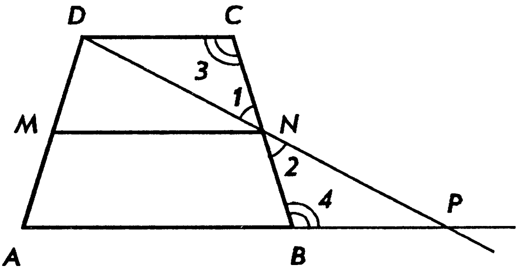


Рис. 77

Проведем прямую DN, которая пересечет прямую AB в некоторой точке P, при этом, очевидно, точка B лежит между A и P.

Треугольники DCN и PBN равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей CB и $CN = NB$), следовательно, $DN = PN$ и $DC = PB$. Так как N — середина отрезка DP, то MN — средняя линия треугольника ADP, и поэтому $MN \| AP$, т. е. $MN \| AB$. Далее, $MN = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}(AB+BP) = \frac{1}{2}(AB+DC)$. ●

Предлагаем читателю самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 2. Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен их полуразности.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ V[1]

134. Доказать, что все точки выпуклого многоугольника принадлежат каждой из замкнутых полуплоскостей многоугольника (см. п. 2, § 23).

135. Доказать, что все точки выпуклого многоугольника, не принадлежащие данной стороне AB, принадлежат полуплоскости многоугольника с границей AB.

136. Доказать, что если прямая имеет по крайней мере три общие точки с выпуклым многоугольником, то она содержит одну из его сторон.

137. Говорят, что точка лежит внутри выпуклого многоугольника, если она принадлежит всем полуплоскостям этого многоугольника. Точка, не лежащая внутри многоугольника и не принадлежащая многоугольнику, называется внешней по отношению к многоугольнику. Доказать, что прямая, проходящая через точку, лежащую внутри выпуклого многоугольника, пересекает многоугольник в двух точках, причем

---

[1] Во всех задачах к главе V, кроме задачи 139, термин «многоугольник» означает замкнутая ломаная (см. п. 1, § 23)

все точки, лежащие между этими точками, лежат внутри многоугольника.

138. Доказать, что фигура, состоящая из всех точек выпуклого многоугольника и всех точек, лежащих внутри многоугольника (см. задачу 137), является выпуклой фигурой.

139. Доказать, что прямая, проходящая через точку, лежащую внутри выпуклого многоугольника $\overline{F}$, разлагает его на два выпуклых многоугольника $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$.

140. Доказать, что ломаная, соединяющая две точки, одна из которых лежит внутри выпуклого многоугольника, а другая является внешней по отношению к нему (см. задачу 137), имеет хотя бы одну общую точку с многоугольником.

141. Доказать, что внутренняя область выпуклого n-угольника (см. задачу 137) совпадает с пересечением внутренних областей его углов.

142. Доказать, что при наложении n-угольник отображается на n-угольник, выпуклый n-угольник отображается на выпуклый n-угольник, причем вершины и стороны n-угольника отображаются соответственно в вершины и на стороны его образа.

143. Доказать, что если O — произвольная точка плоскости, отличная от вершин данного n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$, то $OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n > \frac{1}{2}p$, где p — периметр данного n-угольника.

144. Точка O лежит внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2 \dots A_n$ (см. задачу 137). Доказать, что $OA_1 + OA_2 <$ $< A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$.

145. Найти число диагоналей выпуклого n-угольника и выяснить, при каком значении n это число равно числу сторон многоугольника.

146. Доказать, что у любого четырехугольника существует такая вершина A, что все точки четырехугольника, не лежащие на смежных сторонах AB и AC, лежат внутри угла BAC.

147. Доказать, что выпуклые четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны, если выполняются равенства $\angle A = \angle A'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, $AD = A'D'$.

148. Доказать, что биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в некоторой точке O и $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}(\widehat{C} + \widehat{D})$.

149. Биссектрисы углов B и D выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что точка O лежит внутри четырехугольника и что угол между прямыми BO и DO равен $\frac{1}{2}|\widehat{A} - \widehat{C}|$.

150. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей больше суммы любой пары противоположных сторон.

151. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике: а) диагональ меньше полупериметра; б) сумма диагоналей больше его полупериметра, но меньше периметра.

152. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка O. Доказать, что $p < OA + OB + OC + OD < 3p$, где p — полупериметр данного четырехугольника.

153. Доказать, что если углы A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны, а угол D больше угла C, то $BC > AD$.

154. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B$. Доказать, что если $AD = BC$, то $\angle C = \angle D$, а если $AD < CB$, то $\angle C < \angle D$.

155. Доказать, что сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному внешнему углу при каждой вершине, не зависит от значения n и равна 360°.

156. Какое наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник? Ответ обосновать.

157. Доказать, что выпуклый четырехугольник, углы которого попарно не равны друг другу, имеет хотя бы один тупой угол.

158. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $\triangle ACB = \triangle CAD$; б) диагонали пересекаются, $\angle BAD = \angle BCD$ и $\angle ABC = \angle ADC$.

159. Доказать, что выпуклый четырехугольник яв-

ляется параллелограммом тогда и только тогда, когда противолежащие углы этого четырехугольника равны.

160. Точки M и N — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямые AM и AN пересекают диагональ BD соответственно в точках F и K. Доказать, что $ABCD$ — параллелограмм тогда и только тогда, когда отрезки BF, FK, KD равны.

161. Из вершин A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены перпендикуляры AE и CF к прямой BD. Доказать, что если $AE = CF$ и $\angle BAC = \angle ACD$, то $ABCD$ — параллелограмм.

162. Доказать, что если в четырехугольнике две противоположные стороны не параллельны, то середины диагоналей и середины двух других противоположных сторон являются вершинами параллелограмма.

163. Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M, не лежащая на прямых, которые содержат стороны или диагонали параллелограмма. Доказать, что четыре прямые, проходящие через вершины A, B, C и D и параллельные соответственно прямым MC, MD, MA и MB, проходят через одну точку.

164. Доказать, что параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $AC = A'C'$; б) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $BD = B'D'$; в) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle B = \angle B'$.

165. Доказать, что в любом выпуклом пятиугольнике диагонали, не имеющие общих концов, пересекаются.

166. Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами: а) ромба, если диагонали четырехугольника равны; б) прямоугольника, если прямые, содержащие диагонали, перпендикулярны; в) квадрата, если диагонали равны и прямые, их содержащие, перпендикулярны.

167. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, равны тогда и только тогда, когда его диагонали перпендикулярны.

168. Диагонали четырехугольника равны. Дока-

зать, что прямые, проходящие через середины противоположных сторон, образуют с прямыми, содержащими диагонали четырехугольника, равные углы.

169. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, делит его на два четырехугольника. Доказать, что середины диагоналей этих двух четырехугольников являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.

170. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике середины диагоналей и точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

171. Прямая, содержащая середины двух противоположных непараллельных сторон четырехугольника, не являющегося трапецией, образует равные углы с двумя прямыми, содержащими две другие стороны. Доказать, что последние две стороны равны.

172. Точка M не совпадает ни с одной из середин сторон четырехугольника. Через середину каждой стороны четырехугольника проведена прямая, параллельная отрезку, соединяющему точку M с серединой противолежащей стороны. Доказать, что: а) эти прямые пересекаются в одной точке N; б) точка N лежит на одной прямой с данной точкой M и точкой S пересечения отрезков, соединяющих середины противолежащих сторон четырехугольника; в) точка S делит отрезок MN пополам.

173. Внутри треугольника ABC взята точка M и построены параллелограммы $AMBM_1$, $BMCM_2$, $CMAM_3$. Доказать, что прямые AM_2, BM_3 и CM_1 проходят через одну точку.

174. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что их центры являются вершинами квадрата, центр которого совпадает с центром данного параллелограмма.

175. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла до пересечения с гипотенузой и из этой точки проведены прямые, параллельные катетам. Доказать, что полученный четырехугольник — квадрат.

176. Доказать, что биссектрисы углов параллелог-

рамма, не являющегося ромбом, пересекаясь попарно, образуют вершины некоторого прямоугольника, диагональ которого равна разности смежных сторон параллелограмма.

Каким является этот прямоугольник, если исходный параллелограмм есть прямоугольник, отличный от квадрата?

177. Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Доказать, что этот четырехугольник является ромбом.

178. Отрезок, соединяющий середины M_1 и M_2 двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, пересекает его диагонали в точках P и Q. Доказать, что если $M_1P = M_2Q$, то четырехугольник — трапеция или параллелограмм.

179. Доказать, что если две медианы треугольника равны, то треугольник — равнобедренный.

180. Доказать, что множество середин всех отрезков, концы которых лежат на двух данных параллельных прямых, есть прямая, параллельная данным прямым и равноудаленная от них.

181. Доказать, что биссектрисы двух углов трапеции, проведенные из концов: а) боковой стороны, взаимно перпендикулярны и точка их пересечения лежит на средней линии трапеции; б) одного из оснований, пересекаются в точке, лежащей на другом основании, тогда и только тогда, когда это основание равно сумме боковых сторон.

182. На каждой из сторон параллелограмма лежит одна из вершин другого параллелограмма. Доказать, что центры этих параллелограммов совпадают.

183. Сумма углов при основании AB трапеции $ABCD$ равна 90°. Доказать, что: а) $AB > CD$; б) отрезок, соединяющий середины оснований AB и CD, равен $\frac{1}{2}(AB - CD)$.

184. Доказать, что трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с основаниями AB и $A'B'$ равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $CD = C'D'$, $\angle A = \angle A'$; б) $AB = A'B'$, $CD = C'D'$, $AC = A'C'$, $BD =$

$= B'D'$; в) $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$; г) $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $DA = D'A'$.

185. Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух непараллельных противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник является трапецией.

186. Середины сторон AB и CD, BC и ED выпуклого пятиугольника $ABCDE$ соединены отрезками. Через середины H и K полученных отрезков проведена прямая. Доказать, что прямые HK и AE параллельны и $HK = \frac{1}{4}AE$.

187. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Доказать, что $A_1A_2 - A_4A_5 = A_3A_4 - A_6A_1 = A_5A_6 - A_2A_3$.

Глава VI

ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

§ 28. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Площадь многоугольника

В этом параграфе мы введем понятие площади многоугольника. При этом многоугольником мы будем здесь называть фигуру $\bar{F}$, являющуюся объединением простого многоугольника F и его внутренней области.

Ломаная L называется *простой*, если ее смежные звенья имеют единственную общую точку — вершину, а несмежные звенья не имеют общих точек.

Пусть дан многоугольник $\bar{F} = \overline{A_1A_2 \ldots A_n}$ и две точки M_1 и M_2, принадлежащие F. Допустим, что точка M_1 лежит на стороне A_1A_2, а M_2 — на стороне A_mA_{m+1}, где $2 \leqslant m \leqslant n$ (здесь предполагается, что при $m = n$ точка A_{n+1} совпадает с точкой A_1). Рассмотрим простую ломаную $L = M_1N_1N_2 \ldots N_kM_2$ с концами M_1 и M_2, все точки которой, кроме M_1 и M_2, являются внутренними точками многоугольника $\bar{F}$. Можно доказать, что ломаная L разлагает многоугольник $\bar{F}$ на два многоугольника $\bar{F}_1 = \overline{M_1A_2A_3 \ldots A_mM_2N_kN_{k-1} \ldots N_1}$ и $\bar{F}_2 = \overline{M_1N_1 \ldots N_kM_2A_{m+1}A_{m+2} \ldots A_nA_1}$ (рис. 78).

Сформулируем задачу измерения площадей многоугольников.

Введем на плоскости измерение отрезков, задав некоторый единичный отрезок EF.

Пусть каждому многоугольнику соответствует определенное действительное положительное число так, что:

A_1. Равным многоугольникам соответствует одно и то же число.

A_2. Если простая ломанная L разлагает многоугольник $\bar{F}$ на два многоугольника $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, и многоугольникам $\bar{F}$, $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ соответствуют числа a, b, c, то $a = b + c$.

A_3. Квадрату $\bar{F}_0$, построенному на единичном отрез-

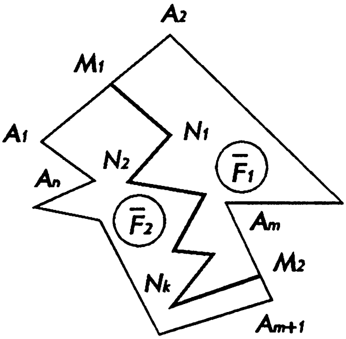


Рис. 78

ке EF как на стороне, соответствует число, равное единице. Число, указанным образом соответствующее каждому простому многоугольнику $\bar{F}$, называется *площадью* многоугольника $\bar{F}$ или F и обозначается так: $S(\bar{F})$ или $S(F)$. Квадрат $\bar{F}_0$ называется *единичным квадратом*.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 1. *Если выбран единичный отрезок EF, то существует одно и только одно соответствие между множеством многоугольников и множеством действительных положительных чисел, для которого выполняются условия A_1, A_2, A_3 измерения площадей.*

Эту теорему мы приводим без доказательства[1].

Перейдем к выводу формул для вычисления площадей треугольников и четырехугольников. Предварительно докажем две леммы, которые используются при выводе этих формул.

Лемма 1. *Каковы бы ни были положительные числа a и b, существует прямоугольник, смежные стороны которого соответственно равны a и b.*

○ Рассмотрим прямой угол A и на его сторонах от точки A отложим отрезки AB и AC, длины которых при выбранной единице измерения равны соответственно a и b (аксиома IV_2). Через точки B и C проведем прямые l_1 и l_2, перпендикулярные соответственно к

---

[1] Доказательство этой теоремы можно найти в курсе геометрии для студентов (см. [5], часть II §§ 88, 89).

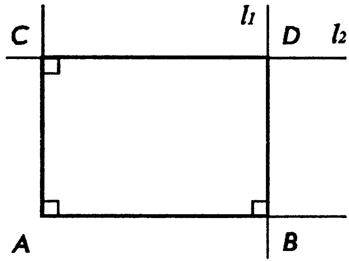


Рис. 79

прямым AB и AC (рис. 79). Прямые AC и l_1 параллельны, так как они перпендикулярны к прямой AB. Отсюда следует, что прямая l_2 пересекает прямую l_1 в некоторой точке D. Четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, так как стороны AC и BD, а также стороны AB и CD параллельны. Но угол A — прямой, поэтому $ABCD$ — прямоугольник. По построению $AB = a$, $AC = b$, следовательно, $ABCD$ — искомый прямоугольник. ●

Лемма 2. *Если через точку, лежащую на стороне прямоугольника, проведена прямая, перпендикулярная к этой стороне, то эта прямая пересекает противоположную сторону прямоугольника и разлагает прямоугольник на два прямоугольника.*

○ Пусть M — точка на стороне AB прямоугольника $ABCD$, а m — прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой AB (рис. 80). Так как $AB \| CD$, то по следствию теоремы 1 § 19 прямая m пер-

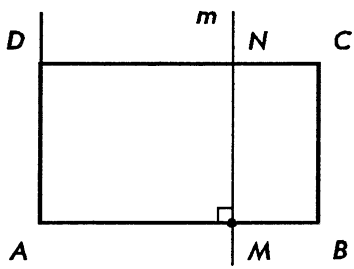


Рис. 80

пендикулярна прямой CD и пересекает ее в некоторой точке N. Прямые AD, BC и m перпендикулярны к прямой AB, поэтому они попарно параллельны. Отсюда следует, что прямая m не пересекает прямые AD и BC, следовательно, точка N лежит на отрезке CD.

Ясно, что $AMND$ и $BMNC$ — прямоугольники. Их внутренние области принадлежат разным полуплоскостям с границей m, поэтому прямоугольник $\overline{ABCD}$ прямой m разложен на два прямоугольника $\overline{AMND}$ и $\overline{BMNC}$. ●

2. Площадь квадрата

Пусть стороны AB и AD квадрата $\overline{ABCD}$ точками P_1, P_2, ..., P_{n-1} и Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} разделены на n равных частей. Проведем через точки P_1, P_2, ..., P_{n-1} прямые, перпендикулярные к прямой AB, тогда, согласно лемме 2, данный квадрат разлагается на n прямоугольников (рис. 81а).

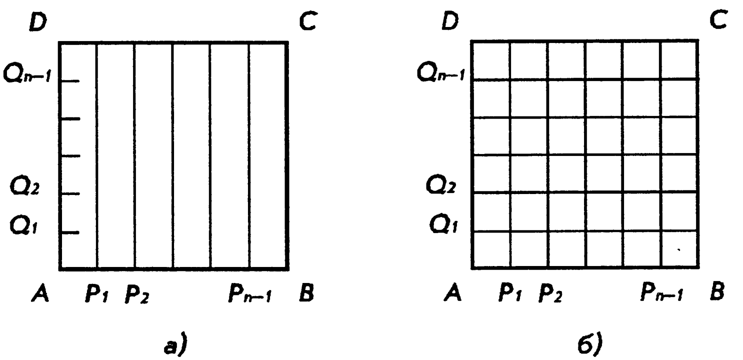


Рис. 81

Далее проведем через точки Q_1, Q_2, ..., Q_{n-1} прямые, перпендикулярные к прямой AD. Тогда каждый из этих прямоугольников разлагается на n квадратов. В результате квадрат $\overline{ABCD}$ разлагается на n^2 равных друг другу квадратов (рис. 81б). Если площадь каждого из этих квадратов равна s, а площадь квадрата $\overline{ABCD}$ равна S, то согласно условию A_2 имеем:

$$S = n^2 s. \qquad (1)$$

Отсюда, в частности, следует, что если сторона квадрата $ABCD$ равна n, где n — натуральное число, $n > 1$, то квадраты, на которые разлагается этот квадрат, построены на единичном отрезке, поэтому $s = 1$ и, следовательно,

$$S = n^2. \qquad (2)$$

Теорема 2. *Площадь квадрата равна квадрату его стороны.*

○ Пусть S — площадь данного квадрата $\bar{F}$, и a — длина его стороны. Докажем, что

$$S = a^2. \qquad (3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда a — рациональное число, т. е. $a = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Если $q = 1$, то утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (2), поэтому предположим, что $q > 1$. Рассмотрим квадрат $\bar{F}_1$, сторона которого равна p, и разобьем его на q^2 равных друг другу квадратов так, как было описано выше. Так как $p = aq$, то сторона каждого из этих маленьких квадратов равна a, поэтому эти квадраты равны квадрату $\bar{F}$. Следовательно, их площадь равна S. По формуле (2) $S(\bar{F}_1) = p^2$, а по формуле (1) $S(\bar{F}_1) = p^2 = q^2S$. Отсюда следует, что

$$S = \frac{p^2}{q^2} = a^2.$$

Рассмотрим теперь случай, когда a — иррациональное число. Допустим, что формула (3) неверна, т. е. $S \neq a^2$ и, следовательно, $\sqrt{S} \neq a$ Пусть для определенности $\sqrt{S} - a = \varepsilon > 0$. Подберем рациональные числа α_1 и α_2 так, что $\alpha_1 < a < \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$. Ясно, что площадь данного квадрата $\bar{F}$ заключена между площадью квадрата со стороной α_1 и площадью квадрата со стороной α_2 (рис. 82).

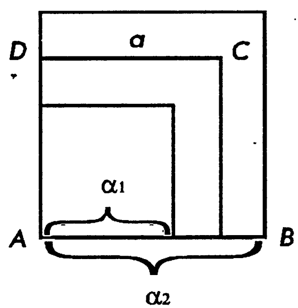


Рис. 82

Согласно доказанному $\alpha_1^2 < S < \alpha_2^2$ или $\alpha_1 < \sqrt{S} < \alpha_2$. Отсюда, учитывая, что $\alpha_1 < a < \alpha_2$, получаем: $\sqrt{S} - a <$

$<\alpha_2-\alpha_1$, т. е. $\varepsilon < \alpha_2 - \alpha_1$. Это неравенство противоречит неравенству $\alpha_2 - \alpha_1 < \varepsilon$, следовательно, наше предположение неверно, т. е. $S = a^2$. ●

§ 29. ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ТРЕУГОЛЬНИКА, ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ТРАПЕЦИИ

1. Площадь прямоугольника

Условимся одну из сторон параллелограмма, в частности, прямоугольника, называть *основанием,* а перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, *высотой параллелограмма.* По теореме 2 § 19 все высоты параллелограмма имеют одну и ту же длину.

Теорема 1. *Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.*

○ Пусть S — площадь прямоугольника $\overline{ABCD}$ (рис. 83а). Примем сторону AB за основание, а AD за высоту и докажем, что $S = ab$, где $a = AB$, $b = AD$.

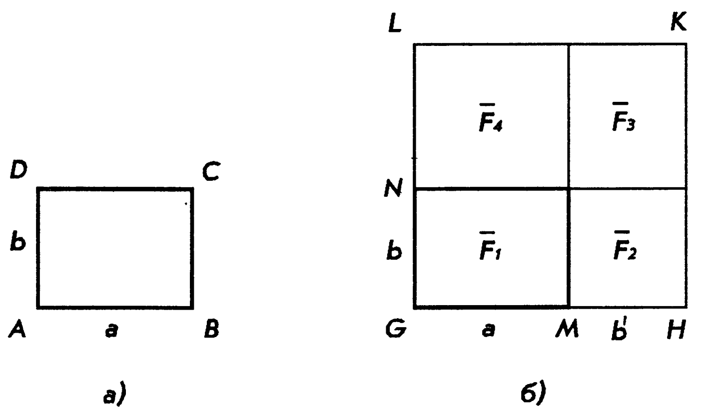


Рис. 83

Рассмотрим квадрат $\overline{GHKL}$ со стороной $a + b$. На стороне GH возьмем точку M так, чтобы $GM = a$, а на стороне GL точку N так, чтобы $GN = b$б и проведем через точки M и N прямые, перпендикулярные соответственно к сторонам GH и GL (рис. 83б). По лемме 2 § 28 эти прямые разлагают квадрат $GHKL$ на четыре прямоугольника, которые на рис. 83б обозначены через F_1, F_2, F_3, F_4. Прямоугольники F_1 и F_3 равны прямоугольнику $ABCD$, поэтому площадь каждого из них равна S. Четырехугольники F_2 и F_4 являются квадратами со сторонами b и a соответственно, поэтому по теореме 2 § 28 их площади равны b^2 и a^2. По той же теореме площадь квадрата $GHKL$ равна $(a + b)^2$. По условию A_2 измерения площадей площадь квадрата $GHKL$ равна сумме площадей прямоугольников F_1, F_2, F_3, F_4. Отсюда получаем: $(a + b)^2 = S + b^2 + S + a^2$, т. е. $S = ab$. ●

Следствие. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.*

○ Пусть S — площадь прямоугольного треугольника с катетами $BC = a$ и $AC = b$ (рис. 84).

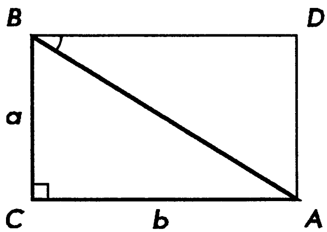


Рис. 84

Проведем через точки A и B прямые, перпендикулярные соответственно к прямым AC и BC. Эти прямые пересекаются в некоторой точке D (см. доказательство леммы 1 § 28). Ясно, что $CADB$ — прямоугольник, поэтому прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по двум катетам. По условию A_2 измерения площадей $S(CADB) = S(ABC) + S(ABD)$. Отсюда, используя условие A_1, получаем: $ab = 2S$, $S = \frac{1}{2}ab$. ●

2. Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют *основанием*. Если основание выбрано, то под «высотой» подразумевают ту из высот треугольника, которая проведена к основанию.

Теорема 2. *Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.*

○ Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 85). Примем сторону AB за основание треугольника и проведем высоту CH. Докажем, что $S = \frac{1}{2}AB \cdot CH$.

Если точка H совпадает с одной из точек A или B (рис. 85а), то утверждение теоремы непосредственно вытекает из следствия теоремы 1, поэтому допустим, что A, B и H — попарно различные точки. Возможны два случая.

а) Точка H лежит на отрезке AB (рис. 85б). В этом случае высота CH разлагает треугольник ABC на два прямоугольных треугольника AHC и BHC, поэтому $S = S(AHC) + S(BHC)$. Используя следствие теоремы 1, получим: $S = \frac{1}{2}AH \cdot CH + \frac{1}{2}HB \cdot CH = \frac{1}{2}(AH + HB) \cdot CH = \frac{1}{2}AB \cdot CH$.

б) Точка H лежит вне отрезка AB. Пусть, например, $B - A - H$ (рис. 85в). В этом случае отрезок AC разлагает треугольник BCH на два треугольника ABC и ACH, поэтому $S(BCH) = S + S(ACH)$. Аналогично предыдущему получаем:

$S = \frac{1}{2}BH \cdot CH - \frac{1}{2}AH \cdot CH = \frac{1}{2}(BH - AH)CH = \frac{1}{2}AB \cdot CH$. ●

Следствие. *Если высоты двух треугольников равны, то отношение площадей этих треугольников равно отношению их оснований.*

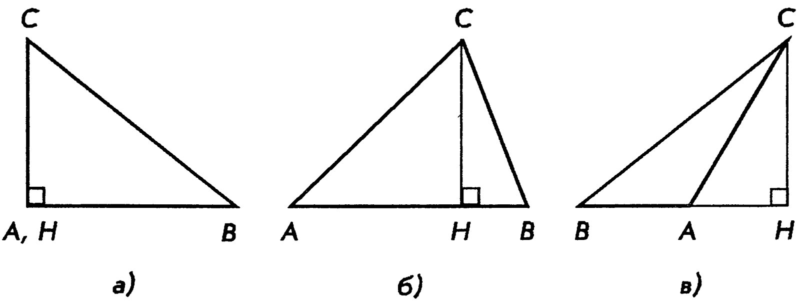


Рис. 85

5-4

Т е о р е м а 3. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.*

○ Пусть S — площадь треугольника ABC, $AB = c$, $AC = b$, $CH = h$, где CH — высота треугольника. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\widehat{A}. \tag{1}$$

Если $\widehat{A} = 90^\circ$, то формула (1) вытекает из следствия теоремы 1, поэтому рассмотрим два случая:

а) угол A — острый (рис. 85б).

В прямоугольном треугольнике ACH $h = b \cdot \sin\widehat{A}$. Поэтому $S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\widehat{A}$.

б) угол A — тупой (рис. 85в). В прямоугольном треугольнике ACH $h = b \cdot \sin\widehat{HAC} = b \cdot \sin(180^\circ - \widehat{A}) = b \cdot \sin\widehat{A}$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\widehat{A}$. ●

С л е д с т в и е. *Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, заключающих равные углы.*

Решим две задачи о свойствах биссектрисы угла и внешнего угла треугольника.

З а д а ч а 1. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Доказать, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

○ Обозначим через S_1 и S_2 площади треугольников ABD и ACD. По следствию из теоремы 2 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BD}{DC}$, а по следствию из теоремы 3 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$. Из этих двух равенств следует искомое равенство. ●

З а д а ч а 2. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине A пересекает прямую BC в точке D. Доказать, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

○ Задача решается точно так же, как и задача 1. Обозначим через S_1 и S_2 площади треугольников ABD

и ACD. По следствию из теоремы 2 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BD}{DC}$. По теореме 3 $S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \widehat{BAD}$, $S_2 = \frac{1}{2}AC \cdot AD \sin \alpha$, где $\alpha = \widehat{CAD}$. Но $\widehat{BAD} = 180° - \alpha$, поэтому $S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \alpha$. Таким образом, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB \cdot AD \sin \alpha}{AC \cdot AD \sin \alpha} = \frac{AB}{AC}$. Итак, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ или $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. ●

Площадь треугольника можно вычислить, зная длины сторон треугольника a, b, c, по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Эта формула называется формулой Герона[1] и будет доказана в следующем параграфе.

3. Площадь параллелограмма

Теорема 4. *Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.*

○ Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$. Примем сторону AB за основание параллелограмма и проведем высоту DH. Докажем, что $S = AB \cdot DH$ (рис. 86).

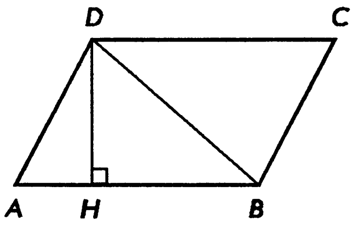


Рис. 86

Диагональ BD разлагает параллелограмм на два равных треугольника ABD и CDB. Эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников,

[1] Герон Александрийский (жил примерно в I веке) — древнегреческий ученый.

т. к. $AB = CD$, $AD = BC$, BD — общая сторона. По условиям A_1 и A_2 измерения площадей (п. 1, § 28) имеем: $S = S(ABD) + S(BCD) = 2S(ABD)$. Отсюда, используя теорему 2, получаем: $S = 2 \cdot \frac{1}{2}AB \cdot DH = AB \cdot DH$. ●

Докажем еще одну теорему о площади параллелограмма, которой часто пользуются при решении задач.

Теорема 5. *Площадь параллелограмма равна: а) произведению смежных сторон на синус угла между ними; б) половине произведения диагоналей на синус угла между ними.*

Пусть S — площадь параллелограмма $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке O.

а) Треугольники ABD и CBD имеют равные основания AB и CD и равные высоты, поэтому их площади равны (рис. 86). Следовательно, $S = S_{ABD} + S_{CBD} = 2S_{ABD}$. По теореме 3 площадь треугольника ABD равна $\frac{1}{2}AB \cdot AD \sin \widehat{BAD}$, следовательно, $S = AB \cdot AD \sin \widehat{BAD}$.

б) Треугольники AOB, AOD, BOC и COD имеют равные площади, так как любые два из этих треугольников, которые имеют общую сторону, имеют равные основания и общую высоту, следовательно, $S = 4S_{AOB}$. По теореме 3 $S_{AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2}\frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} \sin \widehat{AOB}$, поэтому $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin \widehat{AOB}$. ●

4. Площадь трапеции

Условимся высотой трапеции называть перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. По теореме 2 § 19 все высоты трапеции имеют одну и ту же длину.

Теорема 6. *Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.*

○ Пусть S — площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC и высотой BH (рис. 87).

Докажем, что $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH$.

Диагональ BD разлагает трапецию $ABCD$ на два треугольника ABD и BCD. Примем отрезки AD и BC за основания этих треугольников, тогда BH и DH_1 — их

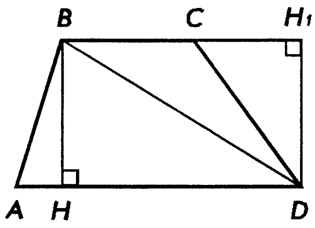


Рис. 87

высоты. Так как отрезки BH и DH_1 являются высотами трапеции $ABCD$, то $BH = DH_1$.

Из условия A_2 измерения площадей и теоремы 2 получаем:

$$S = S(ABD) + S(BCD) = \frac{1}{2}BH \cdot AD + \frac{1}{2}DH_1 \cdot BC =$$
$$= \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH. \bullet$$

5. Площадь произвольного многоугольника

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно разлагают данный многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника. Например, для вычисления площади шестиугольника $ABCDEF$, изображенного на рис. 88а, можно вычислить площади треугольников AFE, AEB, BED, BDC и сложить их.

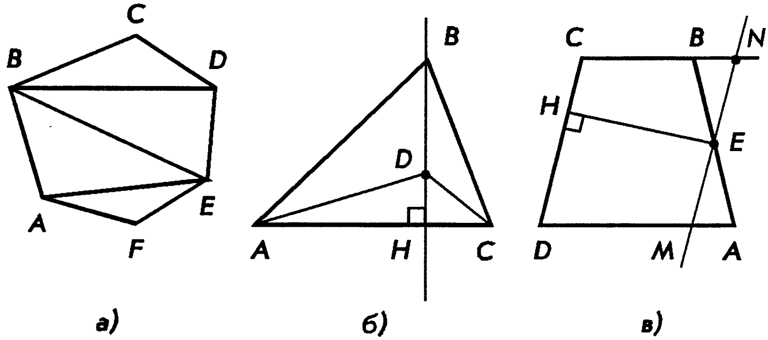


Рис. 88

Используем этот метод для решения следующей задачи.

Задача 3. Доказать, что если прямые, содержащие диагонали четырехугольника, взаимно перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения диагоналей.

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, причем прямые AC и BD перпендикулярны. Согласно теореме 2 § 23 какие-то две противоположные вершины четырехугольника $ABCD$, например, A и C лежат по разные стороны от прямой BD. Тогда отрезок AC пересекает прямую BD в некоторой точке H (рис. 88б). Отрезки AH и CH являются высотами треугольников ABD и BCD, поэтому $S_{ABD} = \frac{1}{2}BD \cdot AH$, $S_{CBD} = \frac{1}{2}BD \cdot CH$.

Отрезок BD разлагает четырехугольник $\overline{ABCD}$ на два треугольника $\overline{ABD}$ и $\overline{CBD}$, поэтому согласно условию A_2 измерения площадей (§ 28), $S = S_{ABD} + S_{CBD}$, где S — площадь данного четырехугольника. Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}BD{\cdot}AH + \frac{1}{2}BD{\cdot}CH = \frac{1}{2}BD(AH + CH) = \frac{1}{2}BD{\cdot}AC. \ \bullet$$

Для вычисления площади данного многоугольника можно применить также другой метод, основанный на понятии равносоставленности двух многоугольников. Два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников. Очевидно, два равносоставленных многоугольника *равновелики*, т. е. имеют равные площади[1]. На этом свойстве основан следующий метод вычисления площади многоугольника: данный многоугольник $\overline{F}$ разлагают на конечное множество многоугольников таких, чтобы из них можно было «сложить» многоугольник $\overline{F}'$, площадь которого известна. Именно таким способом в школьном курсе геометрии находят формулу для вычисления площади параллелограмма. Рассмотрим

[1] Имеет место и обратное утверждение: если два многоугольника равновелики, то они равносоставлены (теорема Бояи-Гервина).

пример использования этого метода для решения следующей задачи.

Задача 4. Доказать, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон и перпендикуляра, проведенного из середины другой боковой стороны на прямую, содержащую первую сторону.

○ Пусть $ABCD$ — данная трапеция, EH— перпендикуляр, проведенный из середины E боковой стороны AB на прямую CD. Докажем, что $S = CD \cdot EH$, где S — площадь данной трапеции (рис. 88в).

Через точку E проведем прямую MN, параллельную прямой CD, где M и N — точки соответственно на прямых AD и BC. Мы получили параллелограмм $MNCD$, который равносоставлен с данной трапецией $ABCD$, так как $\triangle AEM = \triangle BEN$ (см. рис. 88в). По теореме 4 площадь этого параллелограмма равна $CD \cdot EH$ следовательно, $S = CD \cdot EH$. ●

§ 30. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

1. Теорема Пифагора[1]

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, докажем теорему Пифагора, которая является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

○ Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Рассмотрим квадрат $GHKL$ со стороной $a + b$. На сторонах GH, HK, KL, LG возьмем соответственно точки M, N, P, Q так, чтобы $GM = HN = KP = LQ = a$ (рис. 89).

Тогда, очевидно, $MH = NK = PL = QG = b$, поэтому

---

[1] Пифагор Самосский (ок. 570 —500 гг. до н. э.) — древнегреческий мыслитель. Считается, что ему принадлежит построение планиметрии, создание учения о подобии, аксиоматическое введение доказательств в геометрии, в частности, доказательство теоремы о сторонах прямоугольного треугольника, носящей его имя, построение некоторых правильных многоугольников и многогранников. С именем Пифагора связывается также учение о числах.

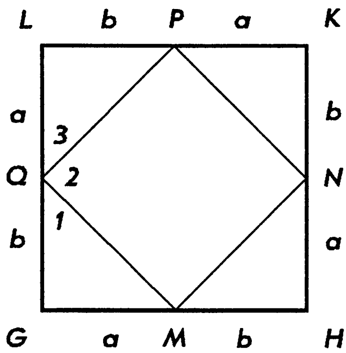


Рис. 89

каждый из прямоугольных треугольников QMG, MNH, NPK, PQL равен данному треугольнику ABC (по двум катетам).

Таким образом, четырехугольник $MNPQ$ — ромб (теорема 3 § 26). Докажем, что этот ромб является квадратом. Для этого достаточно доказать, что $\angle PQM$ — прямой. По теореме о смежных углах $\widehat{1} + \widehat{MQL} = 180°$. Так как $G, L \div QP$, $G, M \doteq QP$ (прямая QP не пересекает отрезок GM), то $M, L \div QP$. Отсюда следует, что луч QP — внутренний луч угла MQL, и поэтому $\widehat{MQL} = \widehat{2} + \widehat{3}$. Итак, $\widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{3} = 180°$, $\widehat{1} + \widehat{3} = 90°$, следовательно, $\widehat{2} = 90°$.

Квадрат $GHKL$ разложен на четыре треугольника (каждый из которых равен треугольнику ABC и на квадрат $MNPQ$, следовательно, $S = 4S_{ABC} + S'$, где S и S' — площади квадратов $GHKL$ и $MNPQ$.

Учитывая, что площадь квадрата равна квадрату его стороны, а площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, получим: $(a + b)^2 = = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$ или $a^2 + b^2 = c^2$. ●

2. Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема 2. *Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.*

○ Пусть в треугольнике ABC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \quad (1)$$

Докажем, что угол C — прямой. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$. По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$. Из этого равенства и равенства (1) следует, что $AB^2 = A_1B_1^2$, т. е $AB = A_1B_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников, поэтому $\angle C = \angle C_1$. Отсюда следует, что $\angle C$ прямой, т. е. треугольник ABC — прямоугольный. ●

3. Треугольник, стороны которого равны данным отрезкам

Воспользуемся теоремой Пифагора для доказательства следующей важной теоремы.

Теорема 3. *Если длины a, b и c данных трех отрезков удовлетворяют неравенствам*

$$a + b > c,\ b + c > a,\ c + a > b,$$

то существует треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам.

○ Не нарушая общности, можно предположить, что обозначения длин данных отрезков выбраны так, что $a \geqslant b \geqslant c$.

Пусть $m = \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$. Так как $a \geqslant c$, то $m > 0$.

Докажем, что $m < b$. По условию теоремы $b + c > a$, поэтому $a - b < c$ или $(a - b)^2 < c^2$. Отсюда получаем:

$$a^2 + b^2 - c^2 < 2ab,\ 2am < 2ab,\ m < b.$$

Обозначим через BC тот из данных отрезков, длина которого равна a. На луче BC от его начала B отложим отрезок BH, длина которого равна m (аксиома IV_2). Так как $m < b \leqslant a$, то H — точка, лежащая на отрезке BC. Через точку H проведем прямую, перпендикулярную к прямой BC, и на ней от точки H отложим отрезок HA, длина которого равна $\sqrt{b^2 - m^2}$. Докажем, что треугольник ABC искомый.

В самом деле, $BC = a$ по построению. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{BH^2 + AH^2} = \sqrt{m^2 + b^2 - m^2} = b,$$

$$AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{b^2 - m^2 + (a - m)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2 + a^2 - 2am}.$$

Подставив сюда значение m, получаем: $AC = c$. ●

Предлагаем читателю, используя доказанную теорему, обосновать следующие утверждения.

1^0. *Существует равносторонний треугольник, стороны которого равны данному отрезку.*

2^0. *Если даны отрезки AB и CD такие, что $AB > CD$, то существует прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна отрезку AB, а один из катетов — отрезку CD.*

3^0. *Если даны отрезки AB и CD такие, что $AB > \frac{1}{2}CD$, то существует равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна AB, а основание — CD.*

§ 31. ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ И КОСИНУСОВ

1. Теорема синусов

Теорема 1. *Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.*

○ Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}. \qquad (1)$$

По теореме 3 § 29 площадь S треугольника ABC можно вычислить по формулам: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \widehat{C}$, $S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \widehat{B}$, $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \widehat{A}$. Из этих равенств следует, что

$$\frac{abc}{2S} = \frac{c}{\sin \hat{C}}, \quad \frac{abc}{2S} = \frac{b}{\sin \hat{B}}, \quad \frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin \hat{A}}.$$

Отсюда получаем равенства (1). ●

2. Теорема косинусов

Теорема 2. *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.*

○ Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{C}. \qquad (2)$$

Если угол C — прямой, то $\cos \widehat{C} = 0$ и указанное соотношение следует из теоремы Пифагора. Докажем справедливость равенства (2) для случая, когда угол C не прямой. Так как в любом треугольнике по крайней мере два угла острые, то один из углов — A или B — острый. Пусть, например, угол B — острый, тогда основание H высоты AH лежит на луче BC, поэтому возможны два случая:

а) Точка H лежит на стороне BC (рис. 90а). По теореме Пифагора для треугольника ABH имеем: $AB^2 = AH^2 + HB^2$. Так как $AH = b \sin \widehat{C}$, $HB = a - CH = a - b \cos \widehat{C}$, $AB = c$, то $c^2 = (b \sin\widehat{C})^2 + (a - b \cos\widehat{C})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\widehat{C}$.

б) Точка H лежит на продолжении луча CB (рис. 90б). Аналогично предыдущему $AB^2 = AH^2 + HB^2$. В этом случае $AH = b \sin (180^\circ - \widehat{C}) = b \sin \widehat{C}$, $HB = a + CH = a + b \cos (180^\circ - \widehat{C}) = a - b \cos \widehat{C}$, $AB = c$. Следовательно,

$c^2 = (b \sin \widehat{C})^2 + (a - b \cos \widehat{C})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$. ●

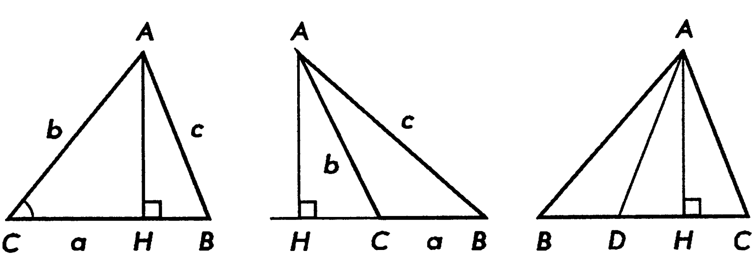


Рис. 90

Следствие. *Если в треугольнике ABC угол C острый, то* $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CB \cdot CH$, *если угол C тупой, то* $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2CB \cdot CH$, *где точка H — основание высоты AH.*

Теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора. В самом деле, если треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C, то формула (2) принимает вид: $c^2 = a^2 + b^2$. Эта теорема, наряду с теоремой Пифагора, является одной из важнейших теорем планиметрии. Она применяется при доказательстве многих теорем и решении задач.

Из следствия теоремы косинусов и теоремы Пифагора следуют утверждения, которые предлагаем читателю самостоятельно обосновать.

1°. *В треугольнике ABC угол C острый тогда и только тогда, когда* $AC^2 + BC^2 > AB^2$.

2°. *В треугольнике ABC угол C тупой тогда и только тогда, когда* $AC^2 + BC^2 < AB^2$.

Используя теорему косинусов, выведем формулу Герона (см. § 29, п. 2).

Теорема 3. *Если стороны треугольника равны a, b, c, то его площадь вычисляется по формуле,*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (3)$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

○ По теореме 3 § 29

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \widehat{C}. \qquad (4)$$

Выразим $\sin \widehat{C}$ через a, b и c. Используя формулу (2), получаем:

$$\sin \widehat{C} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{C}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}.$$

Отсюда получаем:

$$\sin \widehat{C} = \frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{\left[(a+b)^2 - c^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{2ab}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}.$$

Очевидно, $a + b - c = 2p - 2c$, $c + a - b = 2p - 2b$, $c - a + b = 2p - 2a$, поэтому

$$\sin \widehat{C} = \frac{1}{2ab}\sqrt{2p(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)} = \\ = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Отсюда, используя формулу (4), получаем искомую формулу (3). ●

Применив теорему косинусов, докажем следующую теорему Стюарта[1].

Теорема 4. *Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то*

$$AD^2 = AC^2\frac{BD}{BC} + AB^2\frac{CD}{BC} - BD \cdot CD. \qquad (5)$$

○ Пусть AH — высота треугольника ABC (рис. 90в). Если точка D не совпадает с точкой H, то один из углов ADB или ADC острый. Пусть, например, угол ADC острый, тогда угол ADB — тупой. Применяя следствие из теоремы косинусов к треугольникам ACD и ABD, получим: $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD \cdot DH$; $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DH$.

Умножим обе части первого из этих равенств на BD, обе части второго равенства на CD и сложим их почленно:

$$AC^2 \cdot BD + AB^2 \cdot CD = AD^2(BD + CD) + \\ + DC \cdot BD \cdot (BD + CD).$$

Учитывая, что $BD + CD = BC$ (т. к. точка D лежит на отрезке BC), и разделив обе части этого равенства на BC, получим: $AD^2 = AC^2\frac{BD}{BC} + AB^2\frac{CD}{BC} - BD \cdot CD$.

Если точка D совпадает с точкой H, то, применив теорему Пифагора к треугольникам ACH и ABH и проведя аналогичные рассуждения, получим искомое равенство. ●

Следствие. *Если в треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AM = m$, $AN = n$, где AM и AN — медиана и биссектриса треугольника, то*

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, \qquad (6)$$

[1] Стюарт Мэтью (1717—1785) — шотландский астроном и математик.

$$n = \sqrt{bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}}. \tag{7}$$

○ Формула (6) непосредственно следует из равенства (5), если учесть, что $BD = DC$. Предлагаем читателю самостоятельно из равенства (5) вывести формулу (7). При этом следует учесть, что $BD + DC = a$ и $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$ (задача 1, § 29). ●

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VI

188. Квадрат и прямоугольник с неравными смежными сторонами имеют равные периметры. Доказать, что площадь квадрата больше площади прямоугольника.

189. Два неравных прямоугольника, площади которых равны S и S_1, а смежные стороны соответственно a, b и a_1, b_1, имеют равные периметры. Доказать, что если $|a - b| > |a_1 - b_1|$, то $S_1 > S$.

190. Стороны треугольника не больше 1 см. Доказать, что его площадь не больше $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^2.

191. Существует ли треугольник, у которого: а) две высоты больше 1 м, а площадь меньше 0,5 м^2; б) все высоты меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2.

192. В остроугольном треугольнике ABC точки M, N, P — середины высот AA_1, BB_1, CC_1. Доказать, что точки M, N и P не лежат на одной прямой и площадь треугольника MNP составляет четвертую часть площади треугольника $A_1B_1C_1$.

193. Доказать, что площадь S треугольника со сторонами a, b, c удовлетворяет неравенствам:

а) $S < \frac{1}{6}(ab + bc + ca)$;

б) $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$.

194. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \alpha$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \beta$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \gamma$.

Доказать, что $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1 + \alpha\beta\gamma}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} S_{ABC}$.

195. Доказать, что биссектриса треугольника делит

противоположную сторону на отрезки, обратно пропорциональные синусам углов, прилежащих к этой стороне.

196. Выразить площадь треугольника через длины m_1, m_2 и m_3 его медиан.

197. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Выразить площадь треугольника $A_1B_1C_1$ через площадь треугольника ABC, если AA_1, BB_1, CC_1: а) медианы треугольника ABC; б) биссектрисы треугольника ABC; в) высоты треугольника ABC.

198. Прямые, содержащие биссектрисы углов параллелограмма $ABCD$, отличного от ромба, пересекаясь попарно, образуют четырехугольник. Найти его площадь, если $AB = a$, $BC = b$, $\widehat{BAD} = \alpha$.

199. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции, если: а) высота равна h; б) сумма оснований равна $2a$.

200. Доказать, что в равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, высота равна средней линии.

201. Трапеция $ABCD$ с основаниями $AB = a$, $CD = b$ и площадью S диагоналями разложена на четыре треугольника. Площади треугольников, прилегающих к сторонам AB, BC, CD и AD, обозначены соответственно через S_1, S_0, S_2, S_0'. Доказать, что:

а) $S_0 = S_0'$; б) $S_1 = \frac{a}{b}S_0$, $S_2 = \frac{b}{a}S_0$; в) $S_1 + S_2 = \frac{a^2 + b^2}{ab} S_0$;

г) $S = \frac{(a + b)^2}{ab}S_0$; д) $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

202. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ диагоналями разложен на четыре треугольника. Площади треугольников, прилегающих к сторонам AB, BC, CD, DA, обозначены соответственно через S_1, S_2, S_3 и S_4. Доказать утверждения: а) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$; б) $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $S_1 \cdot S_3 = S_2^2$.

203. Точки M и N являются серединами оснований AB и CD трапеции $ABCD$. Отрезки AN и MD пересекаются в точке F, а отрезки BN и CM — в точке K. Выразить площадь четырехугольника $MFNK$ через площадь S трапеции и через $a = AB$ и $b = CD$.

204. Точки K и L лежат на сторонах AD и BC парал-

лелограмма $ABCD$. Отношение площадей четырехугольников $ABLK$ и $KLCD$ равно m. Найти длину отрезка BL, если $AD = a$, $AK = c$.

205. Прямая, параллельная диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$, проходит через середину диагонали BD и пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE разлагает четырехугольник $ABCD$ на две равновеликие фигуры.

206. Стороны выпуклого четырехугольника равны a, b, c, d. Доказать, что площадь четырехугольника удовлетворяет условиям:

а) $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$; б) $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

207. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

208. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника в два раза больше площади четырехугольника с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника.

209. Доказать, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

210. Точки M, N, P, Q — середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $S_{ABCD} \leqslant MP \cdot QN \leqslant \frac{1}{4}(AB + CD)(AD + BC)$.

211. Периметр выпуклого четырехугольника равен 4. Доказать, что его площадь не превосходит 1.

212. Доказать, что площадь S выпуклого четырехугольника со сторонами a, b, c, d и диагоналями d_1 и d_2 удовлетворяет неравенствам:

а) $S \leqslant \frac{d_1^2 + d_2^2}{4}$; б) $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$;

в) $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + d_1^2 + d_2^2}{6}$.

213. В шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE, CF пересекаются в точке O. Доказать, что произведение площадей треугольников AOB, COD, EOF равно произведению площадей треугольников BOC, DOE, FOA.

214. Дан произвольный треугольник ABC. На лучах

AB, BA, BC, CB, CA, AC взяты соответственно точки C_1, C_2, A_1, A_2, B_1, B_2 так, что $AB = BC_1 = AC_2$, $BC = CA_1 = BA_2$, $CA = AB_1 = CB_2$. Доказать, что:
а) $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ — выпуклый шестиугольник и точки A, B и C принадлежат его внутренней области; б) площадь этого шестиугольника равна $13S_{ABC}$.

215. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма кубов катетов меньше куба гипотенузы.

216. Найти стороны прямоугольного треугольника, если они выражаются тремя последовательными целыми числами.

217. Найти катеты прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки, равные $\frac{15}{7}$ м и $\frac{20}{7}$ м.

218. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с катетами $CA = CB = a$ проведена биссектриса AD. Найти длины отрезков CD и BD.

219. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 см и 20 см. Из вершины прямого угла проведены высота и биссектриса. Найти длины отрезков, на которые разделилась гипотенуза.

220. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b высота, проведенная к гипотенузе, равна h. Доказать, что $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

221. В треугольнике ABC, где $AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$, проведена высота CH. Доказать, что треугольник ABC — прямоугольный, если $\frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{CH^2}$.

222. Даны три отрезка, длины которых a, b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 = c^2$. Доказать, что существует прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c.

223. Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Существует ли треугольник, стороны которого равны высотам данного треугольника?

224. Даны три отрезка, длины которых a, b, c удовлетворяют условиям $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, $c^2 + a^2 - b^2 > 0$, $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Доказать, что существует треугольник со сторонами a, b, c, причем этот треугольник является остроугольным.

225. Даны три отрезка, длины a, b и c которых

удовлетворяют условиям $b + c - a > 0$, $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Доказать, что существует треугольник со сторонами a, b и c, причем этот треугольник — тупоугольный.

226. Высоты треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Является ли данный треугольник остроугольным, тупоугольным или прямоугольным?

227. Доказать, что сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

228. В треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $m = AD$, где AD — биссектриса треугольника. Доказать, что:

а) $m = \frac{2}{b+c}\sqrt{bc(p-a)p}$. Здесь $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$;

б) $m = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC}$.

229. Найти площадь треугольника, если известны одна сторона и углы треугольника, прилежащие к этой стороне.

230. Дан треугольник ABC, где $\widehat{A} \geqslant \widehat{B}$. Доказать, что $\frac{BC - AC}{BC + AC} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A} - \hat{B})}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})}$ (теорема тангенсов).

231. Найти косинус угла A треугольника ABC, если известно, что медиана m_a равна среднему пропорциональному двух его сторон $AC = b$, $AB = c$.

232. Доказать, что один из углов параллелограмма $ABCD$ равен 45° тогда и только тогда, когда $AB^4 + AD^4 = AC^2 \cdot BD^2$.

233. Доказать, что площадь S выпуклого четырехугольника $ABCD$ вычисляется по формуле:

$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd\cos^2\frac{\hat{B} + \hat{D}}{2}$,

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника, а p — его полупериметр.

234. Доказать, что если медианы треугольника относятся как $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, то треугольник — прямоугольный.

235. Доказать, что расстояние m между серединами диагоналей четырехугольника со сторонами a, b, c, d и диагоналями d_1 и d_2 вычисляется по формуле:

$m^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - d_1^2 - d_2^2)$ (теорема Эйлера).

236. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и DC

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что

$$d^2 = (a - c)^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B} - 2bc\cos\widehat{C}.$$

237. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доказать, что $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\widehat{B} - 2bc\cos\widehat{C} + 2ac\cos(\widehat{B} + \widehat{C})$ (теорема косинусов для четырехугольников).

238. Доказать, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

239. Найти площадь трапеции, зная диагонали d_1, d_2 и отрезок m, соединяющий середины оснований.

240. Стороны и площадь треугольника выражаются целыми последовательными числами. Найти стороны и определить вид треугольника.

241. Доказать, что площадь треугольника, образованного основаниями биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 данного треугольника ABC, равна $\frac{AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1}{4p}$, где p — полупериметр треугольника ABC (теорема Чезаро).

242. Доказать, что площадь S треугольника со сторонами a, b, c удовлетворяет неравенствам:

а) $S \leqslant \frac{p}{3\sqrt{3}}$, где p — полупериметр треугольника;

б) $S \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$.

Глава VII

ДВИЖЕНИЯ. СИММЕТРИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

§ 32. ДВИЖЕНИЯ

1. Понятие движения

В главе III было введено понятие длины отрезка. Под расстоянием между точками A и B понимают длину отрезка AB.

Говорят, что преобразование плоскости *сохраняет расстояния,* если расстояние между любыми двумя точками A и B плоскости равно расстоянию между их образами A' и B', т. е. $AB = A'B'$.

Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, называется *движением* (перемещением) плоскости.

Наиболее простым примером движения является тождественное преобразование плоскости, т. е. преобразование, при котором каждая точка плоскости переходит в себя. Рассмотрим другие примеры движений.

Пример 1. (Осевая симметрия.) Точки M и M' называются симметричными относительно некоторой прямой a, если эта прямая перпендикулярна к отрезку MM' и проходит через его середину. Каждая точка прямой a симметрична самой себе.

Осевой симметрией с осью a (отражением от прямой a) называется отображение плоскости, при котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно прямой a. Очевидно, осевая симметрия является преобразованием плоскости. Докажем, что она сохраняет расстояния, т. е. является движением.

Пусть M и N — две точки плоскости, а M' и N' — их образы. Докажем, что $MN = M'N'$. Если точки M и N лежат на прямой a, то это утверждение очевидно, поэтому предположим, что хотя бы одна из этих точек не лежит на прямой a. Возможны три случая.

а) Прямая MN параллельна оси a. Тогда, очевидно, и прямая $M'N'$ параллельна оси a и $MM' \parallel NN'$ (рис. 91а), следовательно, $MNN'M'$ — параллелограмм, поэтому $MN = M'N'$.

б) Прямая MN перпендикулярна к оси a. В этом случае точки M' и N' лежат на прямой MN (рис. 91б). $MN = |MS \pm NS|$, $M'N' = |M'S \pm N'S|$, где S — точка пересечения прямых MN и a, причем в обеих формулах берется один и тот же знак. Так как $MS = M'S$, $NS = N'S$, то $MN = M'N'$.

в) Прямая MN не параллельна и не перпендикулярна прямой a. Проведем из точек M и M' перпендикуляры MP и $M'P'$ к прямой NN' (рис. 91в). Точки P и P' симметричны относительно прямой a, поэтому по доказанному $MP = M'P'$, $NP = N'P'$ и, следовательно, прямоугольные треугольники MNP и $M'N'P'$ равны по двум катетам. Отсюда следует, что $MN = M'N'$.

Пример 2. (Центральная симметрия.) Точки M и M' называются *симметричными относительно точки* O, если O — середина отрезка MM'. Точка O симметрична самой себе.

Центральной симметрией относительно точки O (отражением от точки O) называется отображение плоскости, при котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно точки O. Предлагаем читателю, по аналогии с примером 1, доказать самостоятельно, что центральная симметрия является движением.

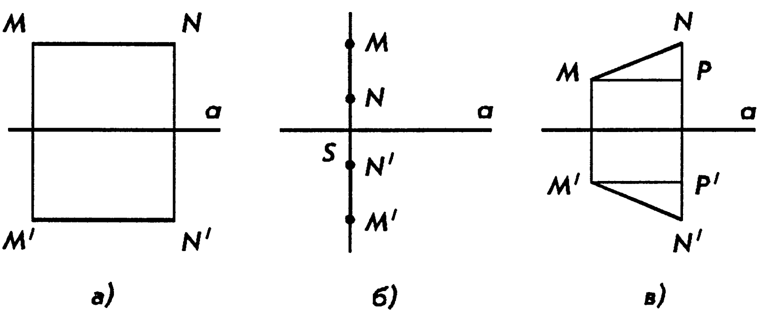


Рис. 91

Пример 3. (Поворот.) Пусть O — данная точка (центр поворота), а α — градусная мера некоторого угла (угол поворота). *Поворотом плоскости вокруг точки O на угол α* называется отображение плоскости, при котором точка O отображается сама в себя, и каждая точка M, отличная от точки O, отображается в точку M', такую, что $OM = OM'$ и градусная мера угла MOM' равна α, причем все точки плоскости, отличные от точки O, поворачиваются вокруг центра поворота в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Докажем, что поворот является движением. Пусть f поворот вокруг точки O на угол α против часовой стрелки (случай поворота по часовой стрелке аналогичен рассматриваемому случаю).

Рассмотрим произвольные точки M и N плоскости и их образы M' и N' при повороте f.

Если точки O, M и N лежат на одной прямой (рис. 92а), то $MN = |OM \pm ON|$, $M'N' = |OM' \pm ON'|$, причем в обеих формулах берется один и тот же знак. Так как $OM = OM'$, $ON = ON'$, то $MN = M'N'$.

Рассмотрим теперь случай, когда точки O, M и N не лежат на одной прямой (рис. 92б). Треугольники OMN и $OM'N'$ равны по двум сторонам и углу между ними ($OM = OM'$, $ON = ON'$ и $\angle MON = \angle M'ON'$ — для случая, изображенного на рис. 92б, градусная мера каждого из этих углов равна разности α и градусной меры угла $M'ON$), поэтому $MN = M'N'$. Таким обра-

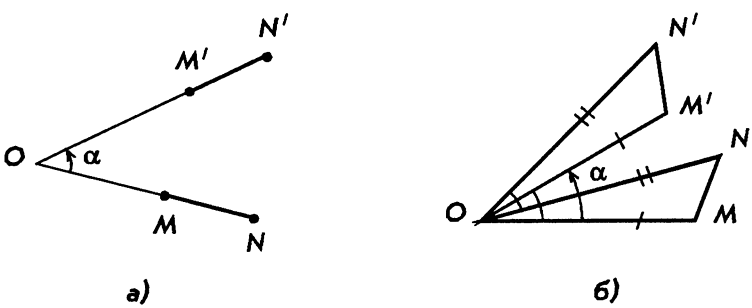


Рис. 92

зом, поворот сохраняет расстояния, т. е. является движением.

2. Параллельный перенос

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие направленного отрезка. Отрезок называется *направленным,* если его граничные точки заданы в определенном порядке. Если A — первая точка, а B — вторая, то точка A называется *началом,* а B — *концом* направленного отрезка $\overline{AB}$. На рисунке направленный отрезок отмечается стрелкой, обращенной к его концу. На рис. 93 изображены направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Длиной направленного отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. В целях общности каждую точку рассматривают как направленный отрезок, у которого начало и конец совпадают. Его называют *нулевым* направленным отрезком. Длина нулевого направленного отрезка считается равной нулю.

Два ненулевых направленных отрезка, лежащие на параллельных прямых, называются одинаково направленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через их начала. Нулевой направленный отрезок считается одинаково направленным с любым направленным отрезком. Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, лежащих на одной прямой, называются одинаково направленными (противоположно направленными), если один из лучей AB и CD содержит другой (ни один из лучей AB и CD не содержит другой). На рис. 94 изображены одинаково

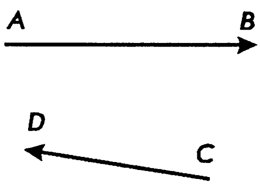


Рис. 93

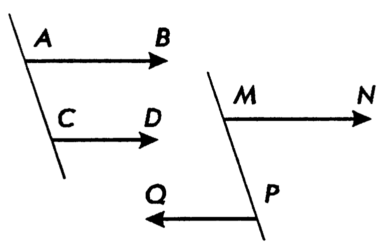


Рис. 94

направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ и противоположно направленные отрезки $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$.

Направленные отрезки называются *равными,* если они одинаково направлены и их длины равны.

Если направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны, то пишут так: $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Лемма. *Направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны тогда и только тогда, когда середины отрезков AD и BC совпадают*[1].

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту лемму.

Пример 4. (Параллельный перенос.) *Параллельным переносом* на данный направленный отрезок $\overline{PQ}$ называется отображение плоскости, при котором каждая точка M отображается в такую точку M', что $\overline{MM'} = \overline{PQ}$ (рис. 95).

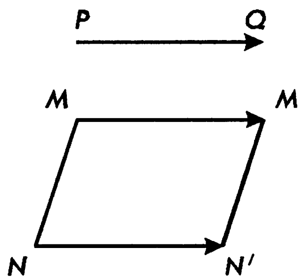


Рис. 95

Докажем, что параллельный перенос является движением. Пусть M и N — какие-либо точки плоскости, а M' и N' соответственно их образы при параллельном переносе на направленный отрезок $\overline{PQ}$ (см. рис. 95). Тогда по определению $\overline{MM'} = \overline{PQ}$ и $\overline{NN'} = \overline{PQ}$, поэтому $\overline{MM'} = \overline{NN'}$. Отсюда по признаку равенства направленных отрезков следует, что середины отрезков MN' и $M'N$ совпадают. Следовательно, по тому же признаку $\overline{MN} = \overline{M'N'}$, т. е. отрезки MN и $M'N'$ равны. Мы видим, что параллельный перенос сохраняет расстояния. А так как параллельный пере-

[1] Отрезки AD и BC могут быть «нулевыми». Серединой «нулевого» отрезка AA считается точка A.

нос является преобразованием плоскости, то он является движением.

Обычно тождественное преобразование рассматривают как частный случай параллельного переноса, а именно, параллельный перенос на нулевой направленный отрезок.

§ 33. ДВИЖЕНИЯ И НАЛОЖЕНИЯ

1. Движения и наложения

Нетрудно доказать, что *любое наложение является движением.* В самом деле, в § 5 было отмечено, что наложение является преобразованием плоскости (теорема § 5), поэтому, для того чтобы доказать, что наложение является движением, достаточно убедиться в том, что оно сохраняет расстояния. Пусть при данном наложении точки A и B отображаются соответственно в точки A' и B'. Тогда отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$ и поэтому $AB = A'B'$. Так как равные отрезки имеют одну и ту же длину, то расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками A' и B'.

Верно и обратное утверждение: любое движение является наложением. Для доказательства этого утверждения необходимо предварительно доказать две леммы.

Лемма 1. *При движении три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.*

○ Пусть при движении точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят соответственно в точки A', B' и C'. По определению движения $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$. Так как $AB + BC > AC$, $AC + CB > AB$, $BC + CA > BA$, то аналогичные неравенства справедливы и для отрезков $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$, поэтому точки A', B' и C' не лежат на одной прямой. ●

Лемма 2. *Каковы бы ни были треугольники ABC и $A'B'C'$, существует не более одного движения, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.*

○ Предположим, что утверждение леммы неверно, т. е. существуют по крайней мере два движения f и g, при которых точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. Тогда на плоскости найдется такая точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при движении f — в другую точку M_2. Так как при отображениях f и g сохраняются расстояния, то $AM = A'M_1$, $AM = A'M_2$, поэтому, $A'M_1 = A'M_2$ т. е. точка A' равноудалена от точек M_1 и M_2. Аналогично доказывается, что точки B' и C' равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A', B' и C' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, т. к. вершины треугольника $A'B'C'$ не лежат на одной прямой. Таким образом, наше предположение неверно, т. е. движения f и g совпадают. ●

Докажем теперь следующую важную теорему.

Теорема 1. *Любое движение является наложением.*

○ Рассмотрим произвольное движение g и докажем, что оно является наложением. Для этого возьмем какой-нибудь треугольник ABC и рассмотрим образы A', B', C' точек A , B, C. По лемме 1 A', B', C' не лежат на одной прямой. Так как $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, то $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Следовательно, существует наложение f, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. Так как f — движение, то по лемме 2 движения f и g совпадают, то есть движение g является наложением. ●

2. Свойства движений

Имеет место следующая теорема, которая часто используется для задания движений и изучения свойств движений.

Теорема 2. *Каковы бы ни были треугольники ABC и $A'B'C'$ такие, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, существует одно и только одно движение, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.*

○ Пусть $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Следовательно, существует наложение f, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. Любое наложение является движением, поэтому существует движение f, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.

В силу леммы 2 существует не более одного движения, обладающего указанным свойством. Следовательно, f — единственное движение, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. ●

Из теоремы 1 следует, что любое свойство наложений является также свойством движений. В частности, при любом движении отрезок отображается на отрезок (п. 2 § 5). Отсюда и из свойства 2^0 § 5 следует, что при любом движении треугольник отображается на равный ему треугольник. Из свойства 4^0 § 5 и п. 1 § 18 следует, что прямая отображается на прямую, параллельные прямые отображаются на параллельные прямые. Далее, при движении сохраняется отношение «лежать между», угол переходит в равный ему угол, взаимно перпендикулярные прямые переходят во взаимно перпендикулярные прямые.

Так как любое движение является наложением, то, учитывая определение равных фигур, данное в § 5, мы заключаем, что *при движении любая фигура переходит в равную ей фигуру.*

Центральная и осевая симметрии являются движениями, поэтому по теореме 1 они являются наложениями. Используя аксиому III_4, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 3. *Если концы отрезка AB симметричны концам отрезка $A'B'$ относительно точки O (прямой a), то эти отрезки равны и симметричны относительно точки O (прямой a).*

3. Произведение движений

Введем понятие произведения двух преобразований плоскости. Пусть g и f — данные преобразования. Каждой точке M плоскости поставим в соответствие точку M' по следующему закону: $M_1 = g(M); M' = f(M_1)$. Тогда определяется новое отображение плоскости, переводящее точку M в точку M' (точка M' есть результат последовательного применения сначала преобразования g, а затем преобразования f). Оно обозначается так: $f \cdot g$ и называется *произведением* преобразований g и f. Ясно, что $f \cdot g$ есть преобразование плоскости. Если g и f — движения, то каждое из этих преобразований сохраняет расстояния. Итак, *произведение двух движений есть движение.*

В качестве примера рассмотрим осевую симметрию g с осью a и центральную симметрию f с центром O, лежащим на прямой a (рис. 96а). Тогда произведение $f \cdot g$, как нетрудно видеть, есть осевая симметрия, ось b которой проходит через точку O перпендикулярно к прямой a. Предлагаем читателю, пользуясь рис. 96а, самостоятельно убедиться в этом.

Рассмотрим другой пример движения, которое ранее еще не встречалось. Пусть g — параллельный перенос на ненулевой направленный отрезок $\overline{AB}$, а f — осевая симметрия с осью AB. Тогда произведение $f \cdot g$ является движением, которое называется *скользящей симметрией.* При этом движении точки прямой AB переходят в точки той же прямой, а точки, не лежащие на этой прямой, — в точки, лежащие по другую сторону от этой прямой (рис. 96б), причем середина отрезка, соединяющего данную точку и ее образ, лежит на прямой AB (точка N_0 на рис. 96б).

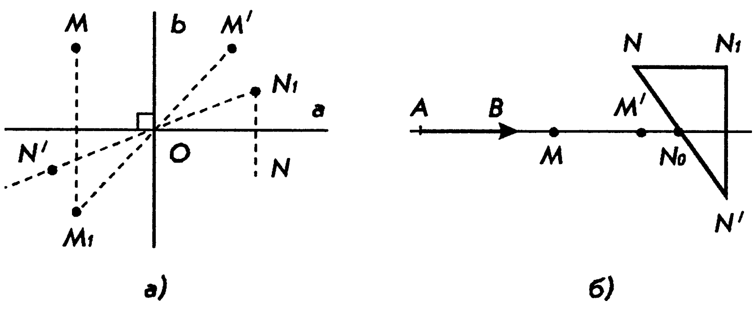


Рис. 96

Рассмотрим следующую задачу, необходимую для дальнейшего изложения.

Задача. Доказать, что любой параллельный перенос является произведением двух осевых симметрий.

○ Пусть f — данный параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{PQ}$. Если $\overline{PQ}$ — нулевой отрезок, т. е. если f — тождественное преобразование, то утверждение леммы очевидно, так как в этом случае $f = g \cdot g$, где g — произвольная осевая симметрия.

Докажем лемму для случая, когда $\overline{PQ}$ — ненулевой направленный отрезок. Возьмем точку A и рассмотрим ее образ $C = f(A)$. Построим теперь какой-нибудь прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и рассмотрим образы точек C и B: $C' = f(C)$, $B' = f(B)$ (рис. 97). Очевидно, $AB \parallel CB'$ и $AC \parallel BB'$. Рассмотрим теперь две осевые симметрии: g_1 с осью p, проходящей через середину отрезка AC и параллельной прямой AB, и осевую симметрию g_2 с осью CB'. Ясно, что $C = g_1(A)$, $A = g_1(C)$, $B' = g_1(B)$, $C' = g_2(A)$, где точка C' симметрична точке A относительно точки C (см. рис. 97).

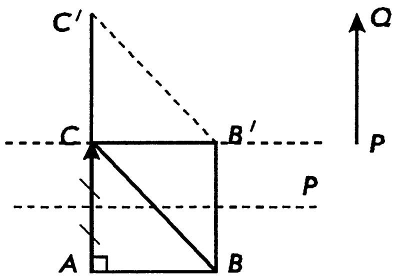


Рис. 97

Тогда $C = g_2(C)$, $B' = g_2(B')$.

Отсюда следует, что при движении g_2g_1 имеем: $A \to C \to C$, $B \to B' \to B'$, $C \to A \to C'$. Таким образом, при движении g_2g_1 вершины треугольника ABC переходят соответственно в вершины треугольника $CB'C'$. По теореме 2 движения f и g_2g_1 совпадают. ●

§ 34. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

1. Неподвижные точки и прямые движения

Точка на плоскости называется *неподвижной точкой* движения, если при этом движении она переходит в себя. Прямая называется *неподвижной прямой* движения, если любая ее точка переходит в точку этой же прямой.

Например, если g — осевая симметрия с осью a, то все точки прямой a являются неподвижными точками движения g. Прямая a и любая прямая, перпендикулярная к ней, являются неподвижными прямыми движения g.

Рассмотрим два свойства о неподвижных точках движений, необходимые для дальнейшего изложения.

1^0. *Если при данном движении каждая из двух точек A и B отображается в себя, то каждая точка прямой AB является неподвижной точкой.*

○ Возьмем произвольную точку M прямой AB, отличную от точек A и B, и обозначим через M' — образ этой точки. Пусть, для определенности, точка M лежит на продолжении луча BA. Тогда $A - B - M$, поэтому $AB + BM = AM$. По определению движения $AM = AM'$, $BM = BM'$, поэтому $AB + BM' = AM'$. Отсюда следует, что $A - B - M'$ (см. задачу 79), следовательно, точка M' лежит на прямой AB и на продолжении луча BA. Так как $BM = BM'$, то точки M и M' совпадают. ●

2^0. *Если при движении точка A переходит в точку B, а точка B — в точку A, то середина отрезка AB является неподвижной точкой.*

○ Пусть точка O — середина отрезка AB. При движении точки A, B и O переходят соответственно в точки B, A и O', причем O' лежит на прямой AB и $AO = BO'$, $OB = O'A$. Отсюда следует, что $AO' = O'B$, т. е. O' — середина отрезка AB. Таким образом, точки O и O' совпадают. ●

Докажем лемму, которая используется при классификации движений.

Лемма. *Любое движение, которое не имеет неподвижных точек, имеет хотя бы одну неподвижную прямую.*

○ Пусть движение g не имеет ни одной неподвижной точки. Докажем, что оно имеет хотя бы одну неподвижную прямую.

Рассмотрим произвольную точку A плоскости, $A_1 = g(A)$, $A_2 = g(A_1)$. По условиям леммы точка A не совпадает с точкой A_1, а точка A_1 — с точкой A_2. Если точки A, A_1, A_2 лежат на одной прямой, то эта прямая является неподвижной, поэтому рассмотрим случай, когда эти точки не лежат на одной прямой.

Рассмотрим середины O_1 и O_2 отрезков AA_1 и A_1A_2 и докажем, что O_1O_2 — неподвижная прямая (рис. 98). Для этого проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам AA_1 и A_1A_2 и обозначим через C их точку пересечения. Очевидно, $O_2 = g(O_1)$, поэтому $l_2 = g(l_1)$. Так как $O_1C = O_2C$, то точка C прямой l_1 переходит либо в ту же точку C прямой l_2, либо в точку C_1, симметричную точке C относительно точки O_2. Первый случай не может иметь места, т. к. g не имеет неподвижных точек, поэтому $C_1 = g(C)$. Так как прямоугольные треугольники CA_1O_2 и $C_1A_2O_2$ равны по двум катетам, то накрест лежащие углы A_1CO_2 и $A_2C_1O_2$ при пересечении прямых A_1C и A_2C_1 секущей CC_1 равны. Таким образом, прямая A_1C переходит в параллельную ей прямую A_2C_1.

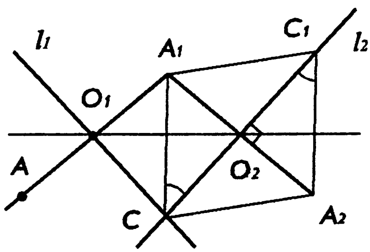


Рис. 98

Пусть m' — образ прямой O_1O_2. Так как $O_1O_2 \perp A_1C$, то $m' \perp A_2C_1$ или $m' \perp A_1C$. Итак, прямая m' проходит через точку O_2 и перпендикулярна к прямой A_1C, поэтому m' совпадает с прямой O_1O_2. ●

2. Классификация движений

Проведем классификацию движений, рассматривая все возможные случаи в зависимости от наличия неподвижных точек.

1) Движение f имеет по крайней мере три неподвижные точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Тогда каждая вершина треугольника ABC при движении f переходит в себя. Так как тождественное преоб-

разование также переводит каждую вершину этого треугольника в себя, то в силу теоремы 2 § 33 движение f является тождественным преобразованием.

2) Движение f имеет по крайней мере две неподвижные точки A и B, но не имеет неподвижных точек, не лежащих на прямой AB.

Рассмотрим какой-нибудь прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A (рис. 99).

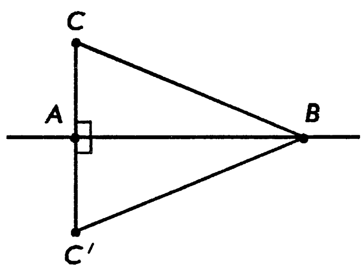


Рис. 99

Образом этого треугольника является равный ему треугольник ABC' с прямым углом A, где $C' = f(C)$. Точка C' не совпадает с точкой C (движение f не имеет неподвижных точек, не лежащих на прямой AB), следовательно, C' — точка, симметричная точке C относительно прямой AB (см. рис. 99). При осевой симметрии с осью AB точки A, B и C переходят соответственно в точки A, B и C', следовательно, по теореме 2 § 33 движение f является осевой симметрией с осью AB.

3) Движение f имеет только одну неподвижную точку. Обозначим ее через O. Пусть A — произвольная точка плоскости, отличная от точки O, $A' = f(A)$, $A'' = f(A')$. По условию точка A не совпадает с точкой A', а точка A' не совпадает с точкой A''. Возможны два случая:

а) Точки O, A и A' лежат на одной прямой (рис. 100а). Так как $OA = OA'$ и точки A и A' не совпадают, то точка O — середина отрезка AA'. Рассмотрим какой-нибудь прямоугольный треугольник AOB с прямым углом O. Образом этого треугольника является равный ему треугольник $A'OB'$ с прямым углом O, где

$B' = f(B)$. Точка B' не совпадает с точкой B (движение f не имеет неподвижных точек кроме точки O), следовательно, B' точка, симметричная точке B относительно точки O (рис. 100а). При центральной симметрии относительно точки O точки A, B и O переходят соответственно в точки A', B' и O. Следовательно, по теореме 2 § 33 движение f является центральной симметрией относительно точки O.

б) Точки O, A и A' не лежат на одной прямой (рис. 100б). Тогда по лемме 1 § 33 точки O, A' и A'' также не лежат на одной прямой. Так как $OA = OA'$, $OA' = OA''$, $AA' = A'A''$, то $\triangle OAA' = \triangle OA'A''$ по трем сторонам, поэтому $\widehat{AOA'} = \widehat{A'OA''} = \alpha$. Заметим, что точки A и A'' лежат по разные стороны от прямой OA', так как в противном случае точки A и A'' совпадают, поэтому середина отрезка AA' является неподвижной точкой движения (см. свойство 2^0), что невозможно. При повороте вокруг точки O против часовой стрелки на угол α, $\alpha \neq 180°$, вершины треугольника OAA' переходят соответственно в точки O, A', A'', следовательно, по теореме 2 § 33 движение f является поворотом вокруг точки O на угол α, не равный 180°.

Очевидно, центральная симметрия относительно точки O является поворотом вокруг точки O на угол 180°. Таким образом, если движение имеет только одну неподвижную точку, то оно является поворотом вокруг этой точки.

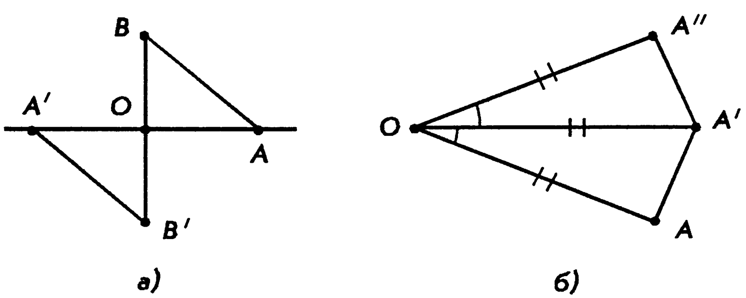
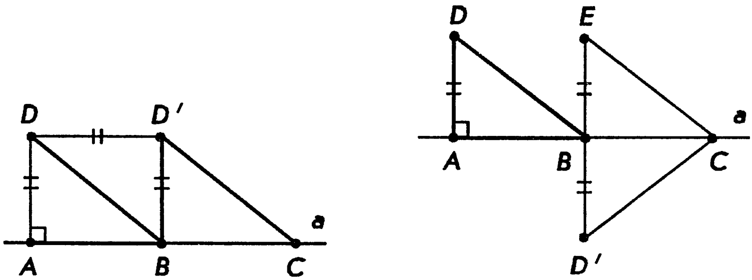


Рис. 100

4) Движение не имеет неподвижных точек. В силу предыдущей леммы движение f имеет хотя бы одну неподвижную прямую a. Пусть A — произвольная точка прямой a; $B = f(A)$, $C = f(B)$. Точки A, B и C попарно различные точки прямой a, т. к. движение f не имеет неподвижных точек. В самом деле, точки A и B, а также B и C различны по условию; если предположить, что точки A и C совпадают, то середина отрезка AB является неподвижной точкой (см. свойство 2°), что невозможно.

Рассмотрим какой-нибудь прямоугольный треугольник ABD с прямым углом A (рис. 101а,б). Образом этого треугольника является равный ему треугольник BCD' с прямым углом B, где $D' = f(D)$.



а) б)

Рис. 101

Возможны два случая.

а) Точки D и D' лежат в одной полуплоскости с границей a (рис. 101а). В этом случае $\overline{AB} = \overline{BC}$ и $\overline{AB} = \overline{DD'}$ (так как $\triangle ABD = \triangle D'DB$), поэтому при параллельном переносе на направленный отрезок $\overline{AB}$ вершины треугольника ABD переходят соответственно в вершины треугольника BCD'. По теореме 2 § 33 движение f является параллельным переносом на направленный отрезок $\overline{AB}$.

б) Точки D и D' лежат в разных полуплоскостях с границей a (рис. 101б). Рассмотрим на прямой BD' точку E, симметричную точке D' относительно прямой a. По доказанному при параллельном переносе g на направленный отрезок $\overline{AB}$ вершины треугольника ABD

переходят соответственно в вершины треугольника BCE. При симметрии s относительно прямой a вершины треугольника BCE переходят соответственно в вершины треугольника BCD'. Произведение $s \cdot g$ указанных движений является движением, при котором вершины треугольника ABD переходят соответственно в вершины треугольника BCD', и, следовательно, по теореме 2 § 33 движение f совпадает с движением $s \cdot g$ и является скользящей симметрией (см. § 33 п. 3).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Любое движение (наложение) плоскости принадлежит к одному из следующих четырех видов:*

1. *Параллельный перенос* (в частности, тождественное преобразование).
2. *Поворот* (в частности, центральная симметрия).
3. *Осевая симметрия.*
4. *Скользящая симметрия.*

3. Теорема о представлении движения как произведения осевых симметрий

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 2. *Любое движение плоскости является либо осевой симметрией, либо представляет собой произведение не более трех осевых симметрий.*

○ Пусть f — данное движение. Возможны два случая в зависимости от наличия неподвижных точек движения f.

а) Движение f имеет хотя бы одну неподвижную точку A. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A и его образ $AB'C'$. Пусть g — осевая симметрия, ось которой проходит через точку A, при которой $B' = g(B)$. Очевидно, такая симметрия существует. Пусть $C_1 = g_1(C)$. Так как $\triangle ABC = \triangle AB'C'$ и $\triangle ABC = \triangle AB'C_1$, то $\triangle AB'C_1 = \triangle AB'C'$, поэтому по теореме 2 § 33 существует движение g_2, при котором точки A, B', C_1 переходят соответственно в точки A, B', C'. По той же теореме $f = g_2g_1$. Движение g_2 имеет по крайней мере две неподвижные точки A и B', поэтому согласно п. 2 g_2 — либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия. Следовательно, $f = g_1g_2$ является произведением двух или трех осевых симметрий (см. решение задачи § 33).

б) Движение f не имеет неподвижных точек. Согласно теореме 1 f — либо параллельный перенос, либо скользящая симметрия. В первом случае по задаче § 33 f является произведением двух осевых симметрий, а во втором случае, учитывая определение скользящей симметрии и задачу § 33, мы заключаем, что f есть произведение трех осевых симметрий. ●

§ 35. ЦЕНТР СИММЕТРИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Центр симметрии многоугольника

Точка O называется *центром симметрии фигуры*, если центральная симметрия плоскости относительно точки O отображает эту фигуру на себя (в этом случае говорят, что фигура симметрична относительно точки O).

Фигура может не иметь центра симметрии, может иметь только один центр симметрии или несколько центров симметрии. Например, луч не имеет центров симметрии, отрезок симметричен только относительно его середины, а любая точка прямой является ее центром симметрии.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые общие свойства, связанные с центрами симметрии многоугольников и более подробно изучим вопрос о центрах симметрии треугольников и четырехугольников.

1^0. *Никакая из вершин многоугольника не может быть центром его симметрии.*

○ Пусть, напротив, вершина A является центром симметрии многоугольника. Если AB и AC смежные стороны с общей вершиной A, и B' — точка, симметричная точке B, то по лемме 3 § 33 отрезок AB' симметричен отрезку AB, поэтому принадлежит многоугольнику, т. е. принадлежит какой-то стороне многоугольника. Так как AB, AC, AB' — попарно различные лучи, то вершина A является концом по крайней мере трех сторон многоугольника. Этот вывод противоречит определению многоугольника. ●

2^0. *Если многоугольник имеет центр симметрии, то каждая вершина многоугольника симметрична некоторой другой его вершине.*

○ Пусть O — центр симметрии многоугольника,

A — некоторая его вершина, а A' — точка, симметричная точке A. Предположим, что A' не является вершиной многоугольника. Тогда точка A' лежит на какой-нибудь его стороне. Рассмотрим некоторый отрезок $P'Q'$, принадлежащий этой стороне, на которой лежит точка A'. Тогда отрезок PQ, симметричный отрезку $P'Q'$, целиком принадлежит многоугольнику и на этом отрезке лежит точка A. Но это невозможно, т. к. A является вершиной многоугольника (смежные стороны AB и AC с общей вершиной A многоугольника не лежат на одной прямой). Таким образом, наше предположение неверно, т. е. A' — вершина многоугольника. ●

Из свойств 1^0 и 2^0 непосредственно следует утверждение.

3^0. *Если n-угольник имеет центр симметрии, то n — четное число.*

Из этого свойства следует, что *треугольник не имеет центра симметрии.*

2. Центр симметрии четырехугольника

Рассмотрим вопрос о центрах симметрии четырехугольника.

Пусть O — центр симметрии четырехугольника $ABCD$. По свойству 2^0 вершина A симметрична некоторой другой вершине этого четырехугольника. Если предположить, что соседние вершины A и B симметричны относительно точки O, то по тому же свойству 2^0 соседние вершины C и D также симметричны относительно точки O. Но это невозможно, т. к. несмежные стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ не имеют общих точек. Точно так же вершины A и D не могут быть симметричны относительно точки O. Таким образом, симметричными являются вершины A и C. По свойству 2^0 вершины B и D также симметричны относительно точки O. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD имеют общую середину O, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Итак, если четырехугольник $ABCD$ имеет центр симметрии, то он является параллелограммом и имеет только один центр симметрии, совпадающий с точкой пересечения диагоналей.

С другой стороны, для любого параллелограмма $ABCD$ точка O пересечения его диагоналей является его центром симметрии. В самом деле, т. к. концы отрезка AB симметричны концам отрезка CD, то по лемме 3 § 33 отрезки AB и CD симметричны относительно точки O. Точно так же отрезки BC и DA симметричны относительно точки O. Отсюда следует, что при центральной симметрии относительно точки O параллелограмм $ABCD$ отображается на себя, т. е. O — центр симметрии параллелограмма. Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Любой параллелограмм имеет единственный центр симметрии, который совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Четырехугольник, отличный от параллелограмма, не имеет центров симметрии.*

§ 36. ОСИ СИММЕТРИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Ось симметрии многоугольника

Прямая a называется *осью симметрии фигуры*, если осевая симметрия с осью a отображает эту фигуру на себя (в этом случае говорят, что фигура симметрична относительно прямой a).

Фигура может не иметь осей симметрии, иметь одну или несколько осей симметрии. Например, любая прямая, перпендикулярная к данной прямой, является ее осью симметрии.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые общие свойства, связанные с осями симметрии многоугольников, более подробно изучим вопрос об осях симметрии треугольника и четырехугольника.

Точно так же, как утверждение 2^0 § 35, доказывается следующее свойство.

1^0. *Если многоугольник имеет ось симметрии, то каждая вершина многоугольника, не лежащая на оси, симметрична некоторой другой его вершине.*

Из этого свойства непосредственно следует:

2^0. *Если многоугольник с нечетным числом вершин имеет ось симметрии, то хотя бы одна вершина многоугольника лежит на этой оси.*

3^0. *Осями симметрии многоугольника могут быть только серединные перпендикуляры к сторонам или к диагоналям многоугольника.*

○ В самом деле, пусть a — ось симметрии многоугольника, а A — вершина, не лежащая на этой оси. По свойству 1^0 вершина A симметрична некоторой другой вершине A', следовательно, прямая a является серединным перпендикуляром к отрезку AA', который может быть либо стороной, либо диагональю многоугольника. ●

2. Оси симметрии треугольника

Докажем сначала, что существуют треугольники, имеющие оси симметрии.

Теорема 1. *Прямая, содержащая высоту равнобедренного треугольника, проведенную к основанию, является его осью симметрии.*

○ Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC, а AH — высота этого треугольника. Так как AH — медиана треугольника, то точки B и C симметричны относительно прямой AH. По лемме 3§ 33 отрезки AB и AC симметричны относительно прямой AH. По той же лемме отрезок BC симметричен самому себе относительно прямой AH. Отсюда следует, что при осевой симметрии относительно прямой AH треугольник ABC отображается на себя, т. е. прямая AH — ось симметрии этого треугольника. ●

Исследуем вопрос о существовании и числе осей симметрии треугольника. По свойству 3^0 треугольник может иметь не более трех осей симметрии. Возможны следующие случаи.

а) Треугольник ABC не имеет ни одной оси симметрии. Тогда точка C не лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB, т. к. в противном случае по теореме 1 этот серединный перпендикуляр являлся бы осью симметрии треугольника. Поэтому $AC \neq BC$. Аналогично доказывается, что $AB \neq BC$, $AB \neq AC$. Таким образом, если треугольник не имеет осей симметрии, то он разносторонний (рис. 102а).

б) Треугольник ABC имеет только одну ось симметрии; обозначим ее через a. Тогда по свойству 3^0 прямая a является серединным перпендикуляром к одной из сторон треугольника, например, к стороне AB. По свойству 2^0 точка C лежит на прямой a, поэтому $AC = BC$, т. е. ABC — равнобедренный треугольник.

Так как треугольник ABC по предположению имеет

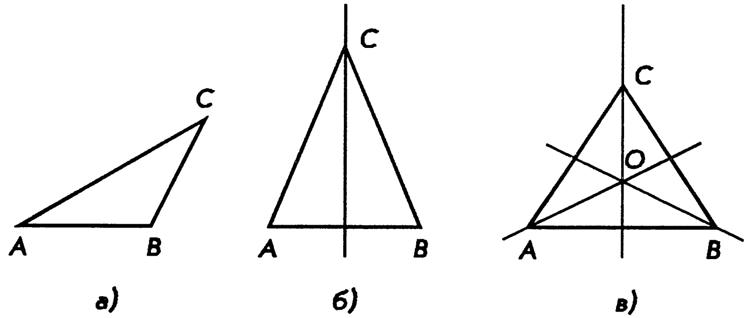


Рис. 102

только одну ось симметрии, то серединный перпендикуляр к стороне BC не является осью симметрии этого треугольника. Отсюда следует, что точка A не лежит на этом серединном перпендикуляре, поэтому $AB \neq AC$. Мы пришли к выводу, что в этом случае треугольник ABC равнобедренный, но не равносторонний (рис. 102б).

в) Треугольник ABC имеет по крайней мере две оси симметрии. Предположим, что ими являются серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Аналогично предыдущему получаем, что $AB = BC = AC$, т. е. треугольник ABC равносторонний (рис. 102в). По предыдущей теореме этот треугольник имеет три оси симметрии. Очевидно, они пересекаются в одной точке — точке пересечения биссектрис треугольника. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. *Разносторонний треугольник не имеет ни одной оси симметрии; равнобедренный, но не равносторонний треугольник имеет только одну ось симметрии, а равносторонний треугольник имеет три оси симметрии* (рис. 101а,б,в).

3. Оси симметрии четырехугольника

Рассмотрим общие свойства, связанные с осями симметрии четырехугольника.

4^0. *Если ось симметрии является серединным перпендикуляром к стороне четырехугольника, то эта же ось является серединным перпендикуляром к противоположной стороне четырехугольника.*

○ Пусть серединный перпендикуляр a к стороне AB является осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Тогда ни одна из вершин C или D не может лежать на прямой a. В самом деле, если одна из точек C или D лежит на прямой a, то по свойству 1^0 и другая вершина лежит на этой прямой (рис. 103).

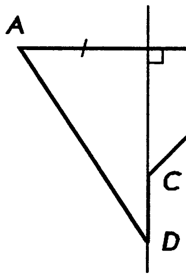


Рис. 103

Но в этом случае прямая a не может быть осью симметрии четырехугольника, т. к. точки C и D не совпадают (см. рис. 103).

Таким образом, по свойству 1^0 точки C и D симметричны относительно прямой a, т. е. прямая a — серединный перпендикуляр к стороне CD. ●

5^0. *Если ось симметрии является серединным перпендикуляром к диагонали четырехугольника, то эта ось содержит другую диагональ.*

○ Пусть серединный перпендикуляр a к диагонали AC четырехугольника $ABCD$ является его осью симметрии. Докажем, что точки B и D лежат на прямой a. Если предположить, что хотя бы одна из этих точек не лежит на прямой a, то по свойству 1^0 и вторая точка не лежит на этой прямой, и точки B и D симметричны относительно прямой a. Но в этом случае $AC \perp a$, $BD \perp a$, т. е. $AC \parallel BD$, что невозможно (см. следствие теоремы 2 § 23). ●

Из свойств 3^0 и 4^0 следует утверждение:

6^0. *Четырехугольник имеет не более чем четыре оси симметрии.*

Замечание. В параграфах 35 и 36 мы рассмотрели два вида движений, при которых многоугольник переходит в себя,— центральную и осевую симметрии. Однако существуют и другие виды движений, при которых многоугольник может перейти в себя. Например, если ABC — равносторонний треугольник и O — точка пересечения его осей симметрии, то при повороте вокруг точки O на 120° треугольник ABC переходит в себя (рис. 102в). Такие движения подробно изучаются в курсе геометрии для студентов пединститута (см. [5], часть 1 § 45).

§ 37. ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ, ИМЕЮЩИЕ ОСИ СИММЕТРИИ

1. Теоремы об осях симметрии четырехугольников

Рассмотрим теперь четырехугольники, которые имеют оси симметрии. Для этого предварительно докажем две теоремы, для формулировки первой из которых условимся четырехугольник называть *обобщенным дельтоидом*, если две его смежные стороны равны и две другие стороны также равны[1] (рис. 104а,б,в). Ромб является частным случаем обобщенного дельтоида (рис. 104в).

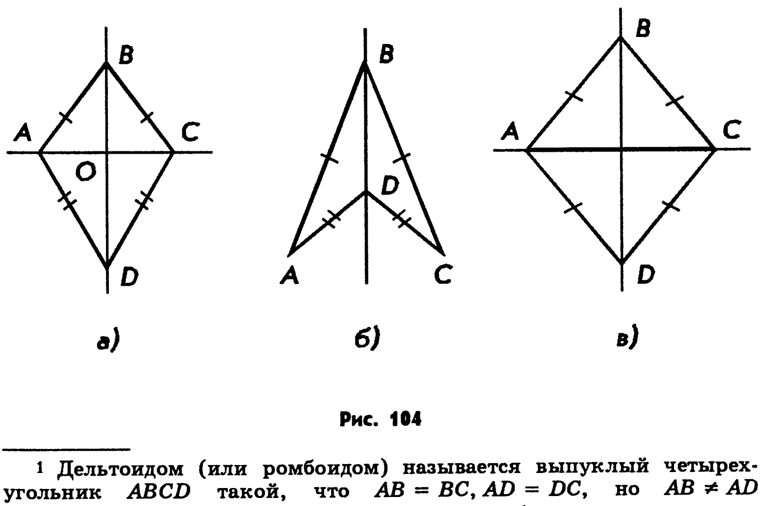


Рис. 104

[1] Дельтоидом (или ромбоидом) называется выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $AB = BC, AD = DC$, но $AB \neq AD$ (рис. 104а). Обобщенный дельтоид может быть как выпуклым (рис. 104а), так и не выпуклым (рис. 104б).

Теорема 1. *Если четырехугольник имеет хотя бы одну ось симметрии, то он является либо равнобедренной трапецией, либо прямоугольником, либо обобщенным дельтоидом.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник. По свойству 3^0 § 36 возможны два случая.

а) Ось симметрии a является серединным перпендикуляром к какой-нибудь стороне четырехугольника, например, к стороне AD. По свойству 4^0 § 36 ось симметрии является серединным перпендикуляром к противоположной стороне BC, поэтому $BC \parallel AD$. Отрезки AB и CD симметричны относительно прямой a, поэтому они равны. Если эти отрезки не параллельны прямой a, то они не параллельны между собой и $ABCD$ — равнобедренная трапеция (рис. 105а). Если же эти отрезки параллельны оси a, то $ABCD$ — прямоугольник (рис. 105б).

б) Ось симметрии является серединным перпендикуляром к диагонали четырехугольника $ABCD$, например, к диагонали AC. По свойству 5^0 § 36 диагональ BD лежит на этой оси, следовательно, $AB = BC$ и $AD = DC$, т. е. четырехугольник $ABCD$ является обобщенным дельтоидом. ●

Следствие. *Если четырехугольник имеет ось симметрии, то две из его сторон равны друг другу.*

Из предыдущей теоремы следует, что оси симметрии могут иметь только равнобедренная трапеция,

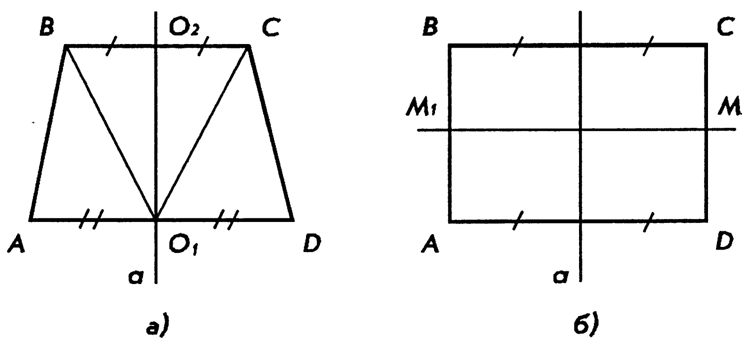


Рис. 105

прямоугольник и обобщенный дельтоид. Например, параллелограмм, отличный от прямоугольника и ромба, не имеет осей симметрии.

Далее, четырехугольник, любые две стороны которого не равны, не может иметь осей симметрии.

Рассмотрим более подробно вопрос о четырехугольниках, которые могут иметь оси симметрии. Сначала докажем теорему.

Теорема 2. *Если прямая проходит через середины противоположных сторон четырехугольника и перпендикулярна к этим сторонам, то она является осью симметрии четырехугольника.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а a — прямая, проходящая через середины противоположных сторон AD и BC и перпендикулярная к ним (рис. 105). Тогда, очевидно, точки A и D, а также точки B и C симметричны относительно прямой a. По лемме 3 § 33 отрезки AB и CD симметричны относительно прямой a. По той же лемме каждый из отрезков AD и BC симметричен самому себе относительно той же прямой a. Отсюда следует, что при осевой симметрии относительно прямой a четырехугольник $ABCD$ отображается на себя, т. е. прямая a — ось симметрии этого четырехугольника. ●

2. Оси симметрии равнобедренной трапеции, прямоугольника и обобщенного дельтоида

Равнобедренная трапеция

Докажем, что *прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, является единственной осью симметрии этой трапеции.*

○ Пусть O_1 и O_2 — середины оснований равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 105а). Докажем сначала, что прямая O_1O_2 — ось симметрии данной трапеции. Треугольники ABO_1 и DCO_1 равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = DC$, $BO_1 = O_1C$, $\angle A = \angle D$ по теореме 2 § 27), поэтому $O_1B = O_1C$, т. е. треугольник BCO_1 равнобедренный. Медиана O_1O_2 этого треугольника является также высотой треугольника, т. е. $O_1O_2 \perp BC$. Отсюда следует, что $O_1O_2 \perp AD$. По теореме 2 O_1O_2 — ось симметрии трапеции $ABCD$ (рис. 105а).

Докажем, что O_1O_2 — единственная ось симметрии трапеции $ABCD$. В самом деле, если a — другая ось симметрии, то по свойству 3° § 36 прямая a является серединным перпендикуляром либо одной из боковых сторон, либо одной из диагоналей. В первом случае по свойству 4° § 36 боковые стороны трапеции должны быть параллельны, что невозможно. Во втором случае, как следует из доказательства теоремы 1, равнобедренная трапеция является обобщенным дельтоидом. Но это также невозможно, т. к. при этом предположении $AB = AD$, $CB = CD$, и в силу равенства $AB = CD$ приходим к выводу, что основания трапеции равны. ●

Прямоугольник, отличный от квадрата

Докажем, что *прямоугольник, отличный от квадрата, имеет две и только две оси симметрии, которые проходят через середины противоположных сторон.*

○ Пусть $ABCD$ — прямоугольник, отличный от квадрата (т. е. $AB \neq BC$), а M_1, M_2 — середины противоположных сторон AB и CD (рис. 105б). Прямая M_1M_2 перпендикулярна к прямым AB и CD (предлагаем читателю по аналогии с доказательством теоремы 1 доказать это утверждение самостоятельно), поэтому по теореме 2 прямая M_1M_2 — ось симметрии четырехугольника $ABCD$. Аналогично доказывается, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон BC и DA, также является осью симметрии прямоугольника $ABCD$.

Других осей симметрии прямоугольник $ABCD$ не имеет, т. к. если предположить, что серединный перпендикуляр к одной из диагоналей является осью симметрии, то, как следует из доказательства теоремы 1, $ABCD$ — обобщенный дельтоид, что противоречит неравенству $AB \neq BC$.

Квадрат

Квадрат помимо двух указанных осей симметрии, проходящих через середины противоположных сторон, имеет еще две оси симметрии, содержащие диагонали квадрата. В самом деле, если $ABCD$ — квадрат, то прямые AC и BD являются его осями симметрии. Докажем, например, что AC — ось симметрии квадрата (рис. 106).

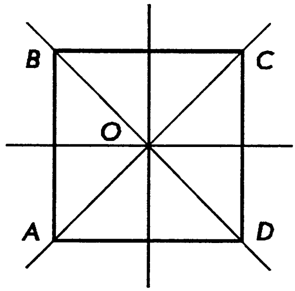


Рис. 106

Пусть O — точка пересечения диагоналей. Так как $BD \perp AC$ и $BO = OD$, то точки B и D симметричны относительно прямой AC. По лемме 3 § 33 отрезки AB и AD, а также CB и CD симметричны относительно прямой AC. Отсюда мы заключаем, что при осевой симметрии с осью AC квадрат $ABCD$ отображается на себя.

Обобщенный дельтоид

Сформулируем еще два утверждения, доказательства которых предоставляем читателю.

Обобщенный дельтоид, отличный от ромба, имеет одну и только одну ось симметрии, содержащую одну из его диагоналей (рис. 104а,б).

Ромб, отличный от квадрата, имеет две и только две взаимно перпендикулярные оси симметрии, содержащие его диагонали (рис. 104в).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VII

243. Существуют ли параллельные переносы, а если существуют, то сколько параллельных переносов, при которых: а) луч AB переходит в параллельный ему луч CD; б) отрезок AB переходит в параллельный и равный ему отрезок CD?

244. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты: первый — вне параллелограмма, а второй — по ту же сторону от CD, что и сам параллелограмм. Доказать, что расстояние между центрами этих квадратов равно BC.

245. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найти длину основания AB трапеции, если $AC = d_1$, $BD = d_2$, $CD = b$, а $\widehat{AOB} = \alpha$.

246. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = 6\sqrt{3}$ см, $CD = 12$ см, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 150^\circ$, $\widehat{CDA} = 90^\circ$. Найти длины сторон BC и AD.

247. Сумма оснований трапеции равна 21 см, а диагонали трапеции равны 13 см и 20 см. Найти площадь трапеции.

248. На сторонах произвольного треугольника вне его построены квадраты. Доказать, что: а) отрезки, соединяющие середину одной стороны с центрами квадратов, построенных на двух других сторонах, равны и перпендикулярны; б) отрезок с концами в центрах двух квадратов равен и перпендикулярен отрезку, соединяющему центр третьего квадрата с вершиной треугольника, не принадлежащей этому квадрату.

249. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны и проходят через одну точку (точка Торичелли).

250. Точка B лежит между точками A и C. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости с границей AC построены правильные треугольники ABE и BCF. Точки M и N — середины отрезков AF и CE. Доказать, что треугольник BMN — правильный.

251. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P. Через вершину A_1 проведена прямая, перпендикулярная к A_2P, через A_2 — к A_3P, через A_3 — к A_4P, через A_4 — к A_1P. Доказать, что четыре построенные прямые пересекаются в одной точке.

252. Даны две пересекающиеся прямые и точка A, не лежащая на них. Доказать, что существует единственный отрезок с концами на данных прямых, серединой которого является точка A.

253. При данном повороте вокруг точки O данный треугольник переходит в себя. Доказать, что треугольник равносторонний и точка O лежит на трех его медианах.

254. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $AC + CB < AM + MB$.

255. Доказать, что из всех равновеликих треугольников с данным основанием наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

256. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие по одну сторону от нее. Доказать, что существует единственная точка M_0 на прямой l такая, что для любой точки M прямой l, отличной от точки M_0, $AM_0 + BM_0 < AM + BM$.

257. Точка M лежит внутри острого угла BAC. Точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно прямых AB и AC. Доказать, что отрезок M_1M_2 пересекает стороны угла BAC.

258. Точка M лежит внутри острого угла. Выяснить, при каком положении точек N и P на сторонах данного угла периметр треугольника MNP является минимальным.

259. Говорят, что квадрат вписан в треугольник, если две соседние вершины квадрата лежат на одной стороне треугольника, а две другие вершины — на двух других его сторонах. Доказать, что если в треугольник вписаны три равных друг другу квадрата, то треугольник — равносторонний.

260. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC $\widehat{BAC} = 80°$. Точка O внутри треугольника выбрана так, чтобы $\widehat{OBC} = 10°$, $\widehat{OCB} = 30°$. Найти величину угла AOB.

261. Вершины квадрата $ABCD$, стороны которого равны a, соединены с серединами противоположных сторон. Найти площадь получившегося при этом восьмиугольника.

262. Доказать, что движение f, которое не имеет неподвижных точек, является параллельным переносом или скользящей симметрией. При этом f — скользящая симметрия тогда и только тогда, когда существуют такие две точки A и B, что прямые AA' и BB' пересекаются, где $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

263. Доказать, что движение f, которое имеет хотя

бы одну неподвижную точку, но не является тождественным преобразованием, есть поворот или осевая симметрия. При этом f является поворотом тогда и только тогда, когда f имеет только одну неподвижную точку.

264. Доказать, что произведение двух центральных симметрий является параллельным переносом.

265. Даны параллельный перенос g и центральная симметрия R. Доказать, что существуют и единственным образом определяются центральные симметрии R_1 и R_2 такие, что $g = RR_1$, $g = R_2R$.

266. Доказать, что произведение параллельных переносов есть параллельный перенос.

267. Доказать, что произведение fg осевой симметрии g с осью a и центральной симметрией f с центром O является: а) скользящей симметрией, если точка O не лежит на прямой a; б) осевой симметрией, если точка O лежит на прямой a, причем $gf = fg$. Осью этой симметрии является прямая OA, перпендикулярная к прямой a.

268. Доказать, что произведение двух осевых симметрий с пересекающимися осями есть поворот вокруг точки их пересечения на угол, вдвое больший угла между осями.

269. Доказать, что произведение двух осевых симметрий с параллельными осями a и b есть параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{PQ}$, где P — точка на оси a, Q — точка, симметричная точке P относительно прямой b.

270. Доказать, что произведение параллельного переноса на ненулевой направленный отрезок $\overline{PQ}$ и осевой симметрии с осью a есть осевая симметрия, если прямые PQ и a перпендикулярны, и скользящая симметрия, если эти прямые не перпендикулярны.

271. Доказать, что произведение трех осевых симметрий есть: а) осевая симметрия, если оси данных симметрий параллельны одной прямой или проходят через одну точку; б) скользящая симметрия, если оси данных симметрий не проходят через одну точку и не параллельны одной прямой.

272. Две прямые b и c симметричны относительно прямой a. Доказать, что отражение от прямой c есть произведение отражений от прямых a, b и a.

273. Доказать, что произведение: а) центральной симметрии и параллельного переноса есть центральная симметрия; б) параллельного переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия.

274. Даны три точки O_1, O_2 и O_3. Произвольная точка A последовательно[1] отражается от точек O_1, O_2, O_3, O_1, O_2, O_3. Доказать, что в результате этих шести отражений получается точка, которая совпадает с точкой A.

275. Произвольная точка M последовательно отражается от вершин A_1, A_2, A_3, A_4 параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$. Доказать, что в результате этих четырех отражений получается точка, которая совпадает с точкой M.

276. Точка M' является образом произвольной точки M при последовательном отражении от середин сторон данного треугольника. Доказать, что одна из вершин треугольника является серединой отрезка MM'.

277. Доказать, что произведение двух скользящих симметрий с одной и той же осью или с параллельными осями есть параллельный перенос.

278. Найти оси симметрии фигуры, которая является: а) лучом; б) отрезком; в) парой пересекающихся прямых; г) парой параллельных прямых; д) неразвернутым углом; е) развернутым углом; ж) точкой и прямой, не проходящей через эту точку.

279. Доказать, что если многоугольник имеет ось симметрии, то каждая вершина многоугольника, не лежащая на оси, симметрична некоторой другой вершине (см. свойство 1^0 § 36).

280. Доказать, что если многоугольник с нечетным числом вершин имеет ось симметрии, то хотя бы одна вершина многоугольника лежит на этой оси (см. свойство 2^0 §36).

281. Доказать, что прямая, содержащая сторону многоугольника, не может быть осью симметрии этого многоугольника.

282. Доказать, что если пятиугольник имеет ось симметрии, то одна и только одна вершина пятиугольника лежит на оси симметрии.

---

[1] Это означает, что точка A отражается от точки O_1, затем полученная точка отражается от точки O_2 и т. д.

283. Доказать, что: а) луч не имеет центров симметрии; б) пара пересекающихся прямых имеет единственный центр симметрии; в) пара параллельных прямых имеет бесконечно много центров симметрии.

284. Две прямые a и b являются осями симметрии данной фигуры. Доказать, что прямая a', симметричная прямой a относительно прямой b, а также прямая b', симметричная прямой b относительно прямой a, также являются осями симметрии данной фигуры.

285. Доказать, что если фигура имеет: а) две и только две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны; б) две перпендикулярные оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

286. Говорят, что фигура является ограниченной, если существует круг, которому принадлежат все точки данной фигуры. Доказать, что не существует движения, не имеющего неподвижных точек, которое ограниченную фигуру переводит в себя.

287. Доказать, что ограниченная фигура: а) имеет не более чем один центр симметрии; б) не имеет параллельных осей симметрии.

288. Доказать, что не существует фигуры, у которой два и только два центра симметрии.

Глава VIII

ПОДОБИЕ ФИГУР

§ 38. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Подобные треугольники

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин при данном выборе единицы измерения; т. е. число $\frac{AB}{CD}$. Покажем, что это число не зависит от выбора единицы измерения. Пусть a_1 и b_1 — длины отрезков AB, CD при единице измерения EF, a_2 и b_2 — длины тех же отрезков при единице измерения PQ. При переходе от единицы измерения EF к единице измерения PQ длины всех отрезков умножаются на некоторое число k (см. теорему 3 § 14), поэтому $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$, откуда следует, что $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$.

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков: отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, где $n > 1$, пропорциональны отрезкам $C_1D_1, C_2D_2, \ldots, C_nD_n$, если $\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \ldots = \frac{A_nB_n}{C_nD_n}$.

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 107) углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,

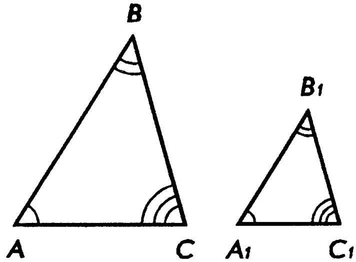


Рис. 107

$\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются сходственными.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого. Другими словами, два треугольника называются подобными, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = C_1, \quad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \quad (2)$$

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Из определения подобия треугольников непосредственно вытекает, что если два треугольника равны, то они подобны; если один треугольник подобен другому, то и второй треугольник подобен первому; если первый треугольник подобен второму, а второй третьему, то первый треугольник подобен третьему треугольнику.

2. Признаки подобия треугольников

Подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В этом пункте мы рассмотрим три признака подобия треугольников.

Первый признак подобия треугольников

Теорема 1. *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.*

○ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 108). По теореме о сумме углов треугольника $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B}$, $\widehat{C_1} = 180^\circ - \widehat{A_1} - \widehat{B_1}$, поэтому $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то по следствию теоремы 3 § 29 $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$.

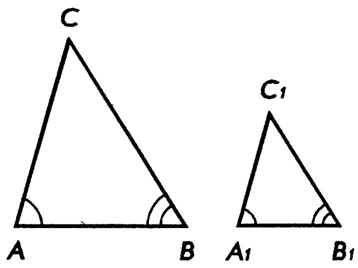


Рис. 108

Из этих равенств получаем: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получим: $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Итак, сходственные стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ●

Следствие. *Равнобедренные треугольники подобны, если у них равны углы при вершинах, противоположных основанию или если равны углы при основаниях. Любые два равносторонних треугольника подобны.*

Второй признак подобия треугольников

Теорема 2. *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.*

○ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 109а). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

От луча AB в полуплоскость, не содержащую точку C, отложим угол 1, равный углу A_1, а от луча BA в ту же полуплоскость отложим угол 2, равный углу B_1. Так как $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} < 180°$, то $\widehat{1} + \widehat{2} < 180°$, поэтому стороны углов 1 и 2, не принадлежащие прямой AB, пересекаются в некоторой точке C_2 (рис. 109б). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$. С другой стороны, по условию теоремы $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем: $AC = AC_2$. Следовательно, треугольники ABC и ABC_2 равны по первому признаку равенства треугольников (AB — общая сторона; $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, т. к. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle A_1 = \angle 1$). Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle 2$, а т. к. $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle ABC = \angle B_1$. ●

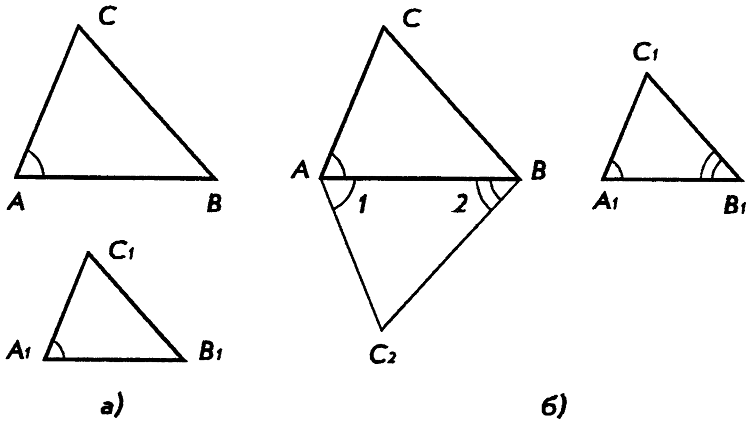


Рис. 109

Третий признак подобия треугольников

Теорема 3. *Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то треугольники подобны.*

○ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, стороны которых пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (3)$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. Аналогично доказательству предыдущей теоремы (рис. 109б) построим треугольник ABC_2 так, чтобы $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$, $C, C_2 \div AB$. Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$. Сравнивая эти равенства с равенствами (3), получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$. Следовательно, треугольники ABC и ABC_2 равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$, а т. к $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников. ●

Рассмотренные три признака подобия треугольников являются основными признаками. Они опираются на равенство некоторых углов этих треугольников и пропорциональность некоторых сторон. Имеются и другие признаки, позволяющие установить подобие треугольников на основе равенства каких-то углов и пропорциональности каких-то отрезков или величин, связанных с треугольниками. Сформулируем некоторые из них, доказательства которых предоставляем читателю.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если выполняется хотя бы одно из условий.

1°. $AB > AC$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle C = \angle C_1$;

2°. $\angle A = \angle A_1$, $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}$;

3°. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников;

4°. $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников.

3. Теорема Фалеса и ее обобщение

Рассмотрим теорему, доказательство которой основано на признаках подобия треугольников.

Теорема 4. *Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые, отсекают на этих прямых пропорциональные отрезки.*

Поясним ее содержание.

Даны две прямые a и b. Прямая a рассечена параллельными прямыми на отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, где $n > 2$, а прямая b — на отрезки B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{n-1}B_n$. Требуется доказать, что

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \dots \frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}. \qquad (4)$$

Эта теорема является обобщением теоремы Фалеса[1], которая формулируется так: параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной из них равные отрезки, отсекают на другой прямой равные отрезки. Ясно, что теорема Фалеса является следствием из сформулированной выше теоремы.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать теорему. При этом следует рассматривать два случая: а) $a \parallel b$ б) $a \nparallel b$. Достаточно доказать одно из равенств (4).

§ 39. ПОДОБИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Признаки подобия прямоугольных треугольников

Так как два прямых угла равны, то из первого и второго признаков подобия треугольников можно получить признаки подобия прямоугольных треугольников:

1^0. *Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны.*

Отсюда непосредственно следует, что равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

2^0. *Если катеты одного прямоугольного треугольника пропорциональны катетам другого, то треугольники подобны.*

Рассмотрим еще один признак подобия прямоугольных треугольников.

3^0. *Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то треугольники подобны.*

○ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника

---

[1] Фалес Милетский (ок. 625—547 гг. до н. э.) — древнегреческий математик, астроном, физик и философ.

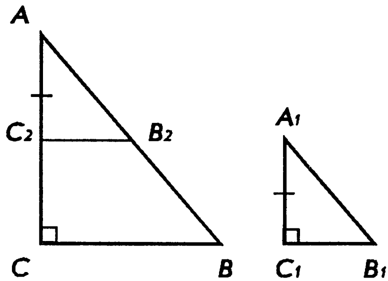


Рис. 110

(рис. 110), у которых углы C и C_1 — прямые и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 1$, то $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Рассмотрим случай, когда $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \neq 1$. Пусть, например, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} > 1$. Для доказательства подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, учитывая признак 1^0 подобия прямоугольных треугольников, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

На луче AC отложим отрезок $AC_2 = A_1C_1$. Так как $AC > A_1C_1$, то C_2 — точка, лежащая на отрезке AC. Проведем через точку C_2 прямую, перпендикулярную к отрезку AC и обозначим через B_2 точку пересечения этой прямой с отрезком AB. Треугольники ABC и AB_2C_2 подобны, поэтому $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$. Сравнивая это равенство с равенством $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ и учитывая, что $AC_2 = A_1C_1$, получим: $A_1B_1 = AB_2$. Таким образом, прямоугольные треугольники AC_2B_2 и $A_1C_1B_1$ равны, поэтому $\angle A = \angle A_1$. ●

2. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Теорема 1. *Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разлагает треугольник на два подобных прямоугольных тре-*

угольника, каждый из которых подобен исходному треугольнику.

○ Пусть ABC — прямоугольный треугольник, а CH — высота, проведенная из вершины прямого угла C к гипотенузе AB (рис. 111). Треугольники ABC и ACH подобны по признаку подобия 1^0, п. 1. Точно так же подобны треугольники ABC и CBH, поэтому $\angle A = \angle BCH$. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники ACH и CBH подобны по признаку подобия 1^0, п. 1. ●

Отрезок XY называется *средним пропорциональным* (или средним геометрическим) между отрезками AB и CD, если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

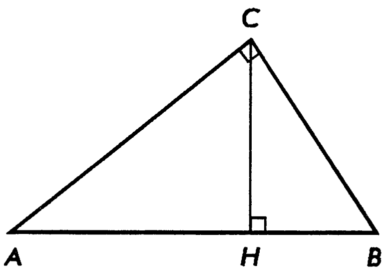


Рис. 111

Теорема 2. *В прямоугольном треугольнике: а) высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые гипотенуза делится высотой; б) катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.*

○ а) По теореме 1 $\triangle AHC \sim \triangle CHB$ (см. рис. 111), поэтому $\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$ и, следовательно, $CH^2 = AH \cdot HB$, $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$.

б) По теореме 1 $\triangle ABC \sim \triangle ACH$ (см. рис. 111), поэтому $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$ и, следовательно, $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$. ●

Предлагаем читателю, пользуясь этой теоремой, решить следующую задачу.

Задача. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC имеет место равенство $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AH}{HC}$, где H — основание высоты, проведенной к гипотенузе AC.

Замечание. Теорема 2 позволяет привести другое доказательство теоремы Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, а CH — высота, проведенная из вершины прямого угла C к гипотенузе AB (рис. 111). Согласно пункту б) теоремы 2 имеем: $AC^2 = AH \cdot AB$ и $BC^2 = BH \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что точка H лежит между точками A и B, получаем: $AC^2 + BC^2 = AH \cdot AB + BH \cdot AB = (AH + BH) \cdot AB = AB^2$.

§ 40. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

1. Преобразование подобия

Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия* (или просто *подобием*), если существует такое число $k > 0$, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B' = k \cdot AB$. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Очевидно, при $k = 1$ подобие сохраняет расстояния, т. е. является движением. Следовательно, движение — частный случай подобия. Докажем, что существуют подобия, отличные от движений.

Рассмотрим произвольную точку O плоскости и действительное число $m \neq 0$. Каждой точке M плоскости, не совпадающей с O, поставим в соответствие точку M' так, чтобы $OM' = |m| \cdot OM$ и точка M' принадлежала лучу OM, если $m > 0$ (рис. 112а), и точка M' принадлежала продолжению луча OM, если $m < 0$ (рис. 112б).

Рис. 112

Будем считать, что точке O соответствует сама точка O. Такое отображение, очевидно, является преобразованием плоскости и называется *гомотетией*. Точка O называется *центром гомотетии*, а число m — *коэффициентом гомотетии*.

Докажем, что *гомотетия с коэффициентом m является подобием с коэффициентом $k = |m|$*. Для этого необходимо доказать, что для любых точек A, B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B' = |m| \cdot AB$.

Если одна из точек A или B совпадает с точкой O, то предыдущее равенство очевидно, поэтому предположим, что O, A и B попарно различные точки. Рассмотрим сначала случай, когда точки O, A и B не лежат на одной прямой.

По определению гомотетии $OA' = |m| \cdot OA$, $OB' = |m| \cdot OB$ (рис. 113), поэтому $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$ по второму признаку подобия треугольников (если $m > 0$, то точки B и B' лежат в одной полуплоскости с границей OA (рис. 113а), а если $m < 0$, то в разных полуплоскостях с той же границей (рис. 113б)). Из подобия треугольников OAB и $OA'B'$ следует равенство: $A'B' = |m| \cdot AB$.

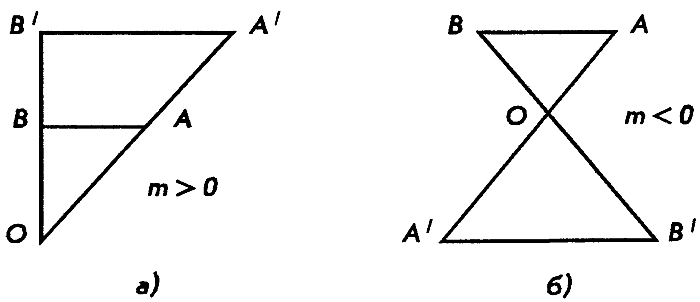


Рис. 113

Пусть теперь точки O, A и B лежат на одной прямой. Возможны два случая:

а) Точки A и B лежат на одном луче, исходящем из точки O. Тогда A' и B' лежат на том же луче (если $m > 0$) или на продолжении этого луча (если $m < 0$). Так как

$$OA' = |m| \cdot OA, \quad OB' = |m| \cdot OB, \tag{1}$$

6*

то $|OA' - OB'| = |m||OA - OB|$, т. е. $A'B' = |m| \cdot AB$

б) Точки A и B лежат на дополнительных лучах с началом O. Тогда точки A' и B' также лежат на дополнительных лучах. Из равенства (1) получаем: $OA' + OB' = |m|(OA + OB)$, т. е. $A'B' = |m| \cdot AB$.

Таким образом, при $|m| = 1$ гомотетия является движением (при $m = 1$ — тождественным преобразованием, а при $m = -1$ — центральной симметрией), а при $|m| \neq 1$ — преобразованием подобия, отличным от движения.

2. Свойства подобия

1^0. *Подобие сохраняет отношение «лежать между».*

○ Пусть при подобии с коэффициентом k точки A, B и M переходят соответственно в точки A', B' и M' и точка M лежит между точками A и B, тогда $AM + MB = AB$. Отсюда получаем: $k \cdot AM + k \cdot MB = k \cdot AB$, или в силу определения подобия $A'M' + M'B' = A'B'$, откуда и следует, что точка M' лежит между точками A' и B'. ●

2^0. *При подобии три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.*

○ Пусть при подобии с коэффициентом k три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переходят соответственно в точки A', B' и C'. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то $AB + BC > AC$, $BC + CA > BA$, $CA + AB > CB$.

Отсюда получаем: $k \cdot AB + k \cdot BC > k \cdot AC$, $k \cdot BC + k \cdot CA > k \cdot BA$, $k \cdot CA + k \cdot AB > k \cdot CB$ или $A'B' + B'C' > A'C'$, $B'C' + C'A' > B'A'$, $C'A' + A'B' > C'B'$.

Отсюда следует, что точки A', B' и C' не лежат на одной прямой. ●

Пользуясь этими свойствами легко доказать утверждение.

3^0. *При подобии отрезок переходит в отрезок, луч — в луч, угол — в угол, прямая — в прямую, а параллельные прямые — в параллельные прямые.*

4^0. *При подобии угол переходит в равный ему угол.*

○ Пусть при данном подобии угол AOB переходит в угол $A'O'B'$, т. е. точки A, O и B переходят соответственно в точки A', O' и B'. По определению подобия с коэффициентом k имеем: $O'A' = k \cdot OA$, $O'B' = k \cdot OB$,

$A'B' = k \cdot AB$. Если угол AOB неразвернутый, то $\triangle A'O'B' \sim \triangle AOB$ по третьему признаку подобия треугольников, следовательно, $\angle A'O'B' = \angle AOB$. Если угол AOB — развернутый, то и угол $A'O'B'$ также развернутый (т. к. $A' - O' - B'$), поэтому они равны. ●

Так как при подобии прямая переходит в прямую и угол в равный ему угол, то имеет место утверждение.

5^0. *При подобии перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые.*

3. Произведение преобразований подобия

Пусть f_1 и f_2 — преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2 соответственно. Докажем, что $f_2 f_1$ — преобразование подобия с коэффициентом $k_1 k_2$. В самом деле, возьмем две произвольные точки A и B плоскости и рассмотрим точки: $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$; $A' = f_2(A_1)$, $B' = f_2(B_1)$. Тогда по определению подобия $A_1B_1 = k_1 \cdot AB$, $A'B' = k_2 \cdot A_1B_1$, поэтому $A'B' = k_1 \cdot k_2 \cdot AB$. Отсюда, учитывая, что $f_2 f_1$ — преобразование, следует, что $f_2 f_1$ — подобие с коэффициентом $k_1 k_2$.

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Произведение преобразований подобия f_1 и f_2 с коэффициентами k_1 и k_2 есть преобразование подобия с коэффициентом $k_1 k_2$.*

Используем эту теорему для доказательства основной теоремы, которая часто используется для задания подобия.

Теорема 2. *Если $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, то существует одно и только одно преобразование подобия f, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.*

○ Докажем сначала, что существует подобие, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. По условию теоремы

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k. \qquad (2)$$

Рассмотрим гомотетию f_1 с центром в некоторой точке O и с коэффициентом k. Пусть $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$, $C_1 = f_1(C)$. Тогда

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = k. \qquad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), мы приходим к выводу, что $A'B' = A_1B_1$, $B'C' = B_1C_1$, $C'A' = C_1A_1$. Отсюда следует, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A'B'C'$. По теореме 2 § 33 существует такое движение g, что $A' = g(A_1)$, $B' = g(B_1)$, $C' = g(C_1)$. Пусть $f = gf_1$. По теореме 1 f — преобразование подобия с коэффициентом k, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B', C'.

Докажем теперь, что f — единственное подобие, удовлетворяющее требованиям теоремы. Предположим, что это не так, т. е. существуют по крайней мере два подобия f и f', при которых точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.

Если k и k' — коэффициенты этих подобий, то $A'B' = kAB$ и $A'B' = k'AB$, поэтому $k' = k$. Подобия f и f' не совпадают, значит, на плоскости найдется такая точка M, которая при подобии f переходит в точку M_1, а при подобии f' в другую точку M_2. Так как $AM = kA'M_1$ и $AM = kA'M_2$, то $A'M_1 = A'M_2$, т. е. точка A' равноудалена от точек M_1 и M_2. Аналогично доказывается, что точки B' и C' равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A', B' и C' лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, т. к. вершины треугольника $A'B'C'$ не лежат на одной прямой. Таким образом, наше предположение неверно, т. е. подобия f и f' совпадают. ●

Следствие. *Любое преобразование подобия можно представить как произведение гомотетии и движения.*

○ Пусть f — данное преобразование подобия. Возьмем какой-нибудь треугольник ABC и рассмотрим точки $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. По свойству 2^0 точки A', B' и C' не лежат на одной прямой, поэтому при подобии f треугольник ABC отображается на треугольник $A'B'C'$. В ходе доказательства теоремы 2 мы показали, что существуют гомотетия f_1 и движение g такие, что $f = g \cdot f_1$. ●

§ 41. ПОДОБИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Подобие фигур

Будем говорить, что фигура F подобна фигуре F', если существует такое преобразование подобия, при котором фигура F переходит в фигуру F'. Если фигура F подобна фигуре F', то пишут так: $F \sim F'$.

Так как тождественное преобразование является подобием, то для любой фигуры F имеем: $F \sim F$. Далее, используя теорему 1 § 40, легко убедиться в том, что если $F \sim F_1$ и $F_1 \sim F_2$, то $F \sim F_2$. Можно также доказать, что если $F \sim F_1$, то $F_1 \sim F$. Таким образом, *отношение подобия фигур является отношением эквивалентности.*

Важно отметить, что данное здесь общее определение подобия фигур применительно к треугольникам, полностью согласуется с определением подобия треугольников, данным в п. 1 § 38.

В самом деле, если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ в смысле определения п. 1, § 38, то по теореме 2 § 40 существует подобие, при котором треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник ABC. Обратно, пусть треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ в соответствии с общим определением подобия фигур. Следовательно, существует подобие, при котором точки A_1, B_1 и C_1 переходят соответственно в точки A, B и C. Тогда по определению подобия и свойству 4^0 § 40 выполняются равенства (1) и (2) § 38, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны в смысле определения п. 1 § 38.

2. Подобие выпуклых многоугольников

Так как при подобии отрезок переходит в отрезок и три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой, то при подобии n-угольник переходит в n-угольник. Далее, при подобии полуплоскость переходит в полуплоскость, поэтому *выпуклый n-угольник переходит в выпуклый n-угольник*. При этом очевидно, что если выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ переходит в многоугольник $A_1'A_2' \ldots A_n'$, то

$$A_1'A_2' = kA_1A_2;\ A_2'A_3' = kA_2A_3,\ \ldots,\ A'_{n-1}A_n' = k \cdot A_{n-1}A_n, \quad (1)$$

$$\angle A_1' = \angle A_1,\ \angle A_2' = \angle A_2,\ \ldots,\ \angle A_n' = \angle A_n, \quad (2)$$

где число k называется коэффициентом подобия (точнее коэффициентом подобия многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ относительно многоугольника $A_1'A_2' \ldots A_n'$).

Теорема 1. *Если стороны и углы выпуклых много-*

угольников $A_1A_2 \ldots A_n$ *и* $A_1'A_2' \ldots A_n'$ *удовлетворяют равенствам* (1) *и* (2), *то эти многоугольники подобны.*

○ Рассмотрим треугольники $A_1'A_2'A_3'$ и $A_1A_2A_3$. Эти треугольники подобны по второму признаку подобия треугольников ($A_1'A_2' = k \cdot A_1A_2$; $A_2'A_3' = k \cdot A_2A_3$; $\angle A_2' = \angle A_2$), поэтому по теореме 2 § 40 существует подобие f с коэффициентом k такое, что $A_1' = f(A_1)$, $A_2' = f(A_2)$, $A_3' = f(A_3)$. Докажем, что при $i > 3$ $A_i' = f(A_i)$, где $i = 4, 5, \ldots, n$. Докажем сначала, что $A_4' = f(A_4)$. Обозначим через λ_{23} полуплоскость многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ с границей A_2A_3, а через λ'_{23} — полуплоскость многоугольника $A_1'A_2' \ldots A_n'$ с границей $A_2'A_3'$ (рис. 114). Так как $\lambda'_{23} = f(\lambda_{23})$, $A_2' = f(A_2)$, $A_3' = f(A_3)$ и $\angle A_3 = \angle A_3'$, то при подобии f луч A_3A_4, принадлежащий полуплоскости λ_{23}, переходит в луч $A_3'A_4'$, принадлежащий полуплоскости λ'_{23}. По условию $A_3'A_4' = k \cdot A_3A_4$, следовательно, $A_4' = f(A_4)$. Аналогично доказывается, что $A_k' = f(A_k)$, где $k = 5, \ldots, n$. ●

З а м е ч а н и е. В некоторых школьных курсах геометрии два выпуклых многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ и $A_1'A_2' \ldots A_n'$ называются подобными, если выполняются условия (1) и (2). Из доказанной теоремы следует, что это определение согласуется с общим определением подобия фигур применительно к выпуклым многоугольникам.

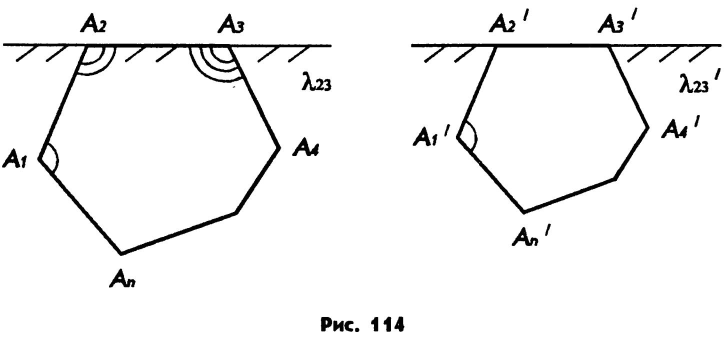


Рис. 114

3. Свойства подобных многоугольников

Т е о р е м а 2. *Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.*

○ Пусть многоугольники $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ подобны, причем коэффициент подобия равен k. Не нарушая общности, можно считать, что существует подобие f такое, что $B_i = f(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. По определению подобия $B_1B_2 = k \cdot A_1A_2$, $B_2B_3 = k \cdot A_2A_3$, ..., $B_nB_1 = k \cdot A_nA_1$. Сложив почленно эти равенства, получаем: $B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_nB_1 = k(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1)$.

Таким образом, отношение периметров данных многоугольников равно коэффициенту подобия. ●

Теорема 3. *Отношение площадей двух выпуклых подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.*

○ Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ — данные подобные выпуклые многоугольники, а k — коэффициент подобия. Докажем теорему методом математической индукции.

Пусть $n = 3$, т. е. $\triangle B_1B_2B_3 \sim \triangle A_1A_2A_3$. Обозначим через S и S' площади этих треугольников (рис. 115). Так как $\angle A_1 = \angle B_1$, то в силу следствия теоремы 3 § 29 $\frac{S'}{S} = \frac{B_1B_2 \cdot B_1B_3}{A_1A_2 \cdot A_1A_3}$, но $B_1B_2 = k \cdot A_1A_2$, $B_1B_3 = k \cdot A_1A_3$, следовательно, $\frac{S'}{S} = k^2$.

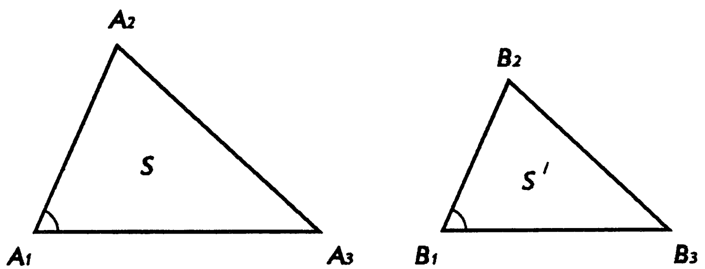


Рис. 115

Предположим теперь, что теорема верна для $n \leqslant m$, и докажем ее для $n = m + 1$. Пусть $A_1A_2 \dots A_{m+1}$ и $B_1B_2 \dots B_{m+1}$ данные подобные многоугольники. Не нарушая общности, можно допустить, что существует подобие f такое, что $B_i = f(A_i)$, где $i = 1, \dots, m + 1$. Проведем диагонали A_1A_3 и B_1B_3 данных многоугольников. По теореме 1 §24 каждый из этих многоугольников разлагается на треугольник и m-угольник. Пусть многоугольник $\overline{A_1A_2 \dots A_{m+1}}$ разлагается на треугольник $\bar{F}_3$ и m-угольник $\bar{F}_m$, а многоугольник $\overline{B_1B_2 \dots B_{m+1}}$ на треугольник $\overline{\Phi}_3$ и m-угольник $\overline{\Phi}_m$. По свойству A_2 § 28

$$S(\overline{A_1A_2 \dots A_{m+1}}) = S(\bar{F}_3) + S(\bar{F}_m),$$

$$S(\overline{B_1B_2 \dots B_{m+1}}) = S(\overline{\Phi}_3) + S(\overline{\Phi}_m). \qquad (3)$$

Так как $\overline{\Phi}_3 = f(\bar{F}_3)$, $\overline{\Phi}_m = f(\bar{F}_m)$, т. е. $\overline{\Phi}_3 \sim \bar{F}_3$, $\overline{\Phi}_m \sim \bar{F}_m$, то по сделанному предположению $S(\overline{\Phi}_3) = k^2S(\bar{F}_3)$, $S(\overline{\Phi}_m) = k^2(\bar{F}_m)$. Подставив эти значения во второе из равенств (3) и учитывая первое равенство, получаем: $S(B_1B_2 \dots B_n) = k^2S(A_1A_2 \dots A_n)$. ●

§ 42. ПРИМЕНЕНИЕ ПОДОБИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Теория подобия многоугольников часто применяется для решения задач и доказательства теорем.

1. Решение задач

Рассмотрим сначала примеры решения задач с использованием признаков подобия треугольников.

З а д а ч а 1. Доказать, что прямая, проходящая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей и точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны (рис. 116а).

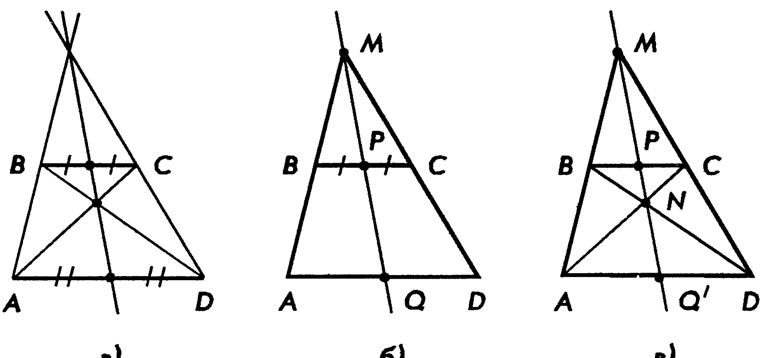


Рис. 116

○ Пусть M — точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$, P — середина основания BC, а Q — точка пересечения прямой PM с основанием AD (рис. 116б). Докажем, что Q — середина отрезка AD, т. е. что точка M лежит на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

Так как $\triangle AQM \sim \triangle BPM$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle AMQ$ — общий, $\angle MAQ = \angle MBP$), то $\frac{AQ}{BP} = \frac{QM}{PM}$. Аналогично, $\triangle DQM \sim \triangle CPM$, поэтому $\frac{DQ}{CP} = \frac{QM}{PM}$. Из этих равенств получаем: $\frac{AQ}{BP} = \frac{DQ}{CP}$. Так как $BP = CP$, то $AQ = DQ$, т. е. Q — середина основания AD.

Обозначим через N — точку пересечения диагоналей BD и AC, а через Q' — точку пересечения прямых PN и AD (рис. 116в). По аналогии с предыдущим, используя подобия $\triangle BNP \sim \triangle DNQ'$ и $\triangle CNP \sim \triangle ANQ'$, доказывается, что Q' — середина основания AD, т. е. точка N лежит на прямой, проходящей через середины оснований трапеции. ●

Задача 2. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

○ Пусть M — точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 треугольника ABC (рис. 117). Так как B_1C_1 — средняя линия этого треугольника, то $B_1C_1 \parallel BC$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\triangle MBC \sim \triangle MB_1C_1$ по первому признаку подобия треугольников. Отсюда, учиты-

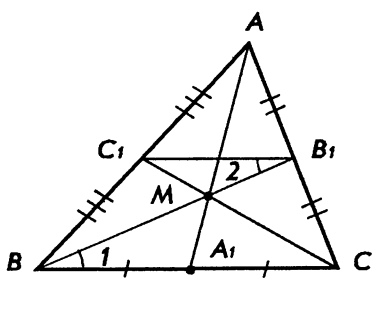


Рис. 117

вая теорему о средней линии треугольника получаем: $\frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{2}{1}$.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан AA_1 и BB_1 треугольника ABC делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины, следовательно, совпадает с точкой M. ●

2. Простое отношение трех точек

Пусть $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ ненулевые направленные отрезки, параллельные некоторой прямой. Обозначим через $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ число $\frac{AB}{CD}$, если $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ одинаково направлены, и число $-\frac{AB}{CD}$, если они противоположно направлены.

Рассмотрим направленный отрезок $\overline{AB}$ и точку M, лежащую на прямой AB, не совпадающую с точкой B. Число $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ называется *простым отношением* точек A, B и M и обозначается так (AB, M). Из этого определения следует, что $(AB, M) > 0$ тогда и только тогда, когда $A - M - B$. Рассмотрим пример. Пусть M_1 — середина отрезка AB, а M_2 — точка, симметричная точке M_1 относительно A. Тогда $(AB, M_1) = 1$, $(AB, M_2) = -\frac{1}{3}$, $(BM_1, A) = -2$.

Докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма. *Если $(AB, M) = (AB, N)$, то точки M и N совпадают.*

○ Из равенства $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$ следует, что либо обе точки M и N лежат на отрезке AB, либо они лежат на продолжении одного из лучей AB или BA. Поэтому из равенства $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}$ следует, что $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$. В первом случае отсюда следует: $\frac{AM + MB}{MB} = \frac{AN + NB}{NB}$, $\frac{AB}{MB} = \frac{AB}{NB}$, $MB = NB$, т. е. точки M и N совпадают. Аналогично, во втором случае приходим к тому же выводу. ●

3. Теорема Менелая и ее приложения

Теорема Менелая[1]. *Точки A_1, B_1 и C_1 лежат со-*

---

[1] Менелай Александрийский (1 в.) — древнегреческий математик и астроном.

ответственно на прямых BC, CA и AB и не совпадают с вершинами треугольника ABC. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1. \tag{1}$$

○ Докажем сначала, что если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой (обозначим ее через a), то выполняется равенство (1).

В соответствии с предложением Паша (см. §9) либо две из точек A_1, B_1 и C_1 лежат на двух сторонах треугольника ABC, а третья точка не лежит на третьей стороне (рис. 118а), либо ни одна из точек A_1, B_1 и C_1 не лежит на сторонах треугольника (рис. 118б). Отсюда следует, что левая часть равенства (1) — отрицательное число. Поэтому для доказательства равенства (1) достаточно убедиться в том, что

$$\left|\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}\right| = 1, \text{ т. е. } \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{2}$$

Из точек A, B и C проведем перпендикуляры AH_1, BH_2 и CH_3 к прямой a (рис. 118а,б). Тогда в силу подобия прямоугольных треугольников: $\triangle AC_1H_1 \sim \triangle BC_1H_2$, $\triangle BA_1H_2 \sim \triangle CA_1H_3$; $\triangle CB_1H_3 \sim \triangle AB_1H_1$ получаем: $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AH_1}{BH_2}$; $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BH_2}{CH_3}$; $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CH_3}{AH_1}$.

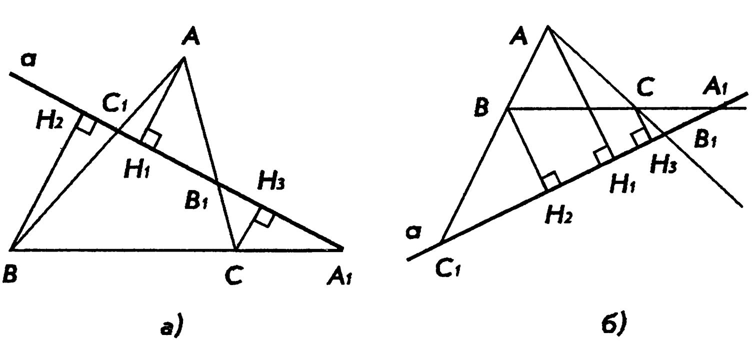


Рис. 118

Произведение левых частей этих равенств равно произведению правых частей, поэтому имеет место равенство (2).

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть выполняется равенство (1) и прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке B' (если $A_1C_1 \parallel AC$, то $A_1B_1 \nparallel AB$ или $B_1C_1 \nparallel BC$, поэтому вместо прямой A_1C_1 можно взять прямую A_1B_1 или прямую B_1C_1). По доказанному $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = -1$. Сравнивая это равенство с равенством (1), получаем: $\frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}$. По предыдущей лемме точки B_1 и B' совпадают, т. е. точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. ●

Теорема Менелая имеет широкое применение при доказательстве теорем и решении задач. В качестве примера приведем сначала другое, более простое, решение задачи 1 с помощью теоремы Менелая. Пусть $ABCD$ данная трапеция с основаниями AD и BC. Применим теорему Менелая к треугольнику ADB и трем точкам Q' (середина основания AD), N (точка пересечения диагоналей AC и BD) и M (точка пересечения прямых AB и CD) (см. рис. 116в). $\frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'D}} = 1$, $\frac{\overline{DN}}{\overline{NB}} = \frac{AD}{BC}$ и $\frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = -\frac{BC}{AD}$, так как $\triangle ADM \sim \triangle BCM$. Отсюда следует, что $\frac{\overline{AQ'}}{\overline{Q'D}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = -1$, поэтому точки Q', N и M лежат на одной прямой. Точно так же доказывается, что середина P отрезка BC лежит на прямой MN.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 3. Биссектрисы внешних углов при вершинах C, B, A треугольника ABC пересекаются прямыми AB, AC и BC соответственно в точках C_2, B_2, A_2. Доказать, что: а) точки C_2, B_2, A_2 лежат на одной прямой; б) точки A_1, B_1, C_2 лежат на одной прямой (AA_1, BB_1 — биссектрисы треугольника).

○ а) Согласно задаче 2 § 29 $\frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} = -\frac{AC}{CB}$, $\frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} = -\frac{BA}{AC}$, $\frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} = -\frac{BC}{AC}$ (рис. 119). Из этих равенств по-

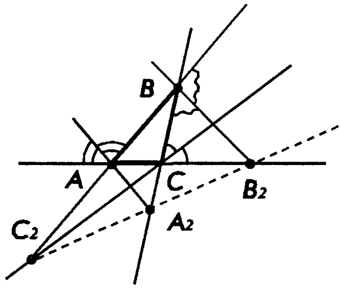


Рис. 119

лучаем: $\frac{\overline{AC_2}}{\overline{C_2B}} \cdot \frac{\overline{BA_2}}{\overline{A_2C}} \cdot \frac{\overline{CB_2}}{\overline{B_2A}} = -1$. По теореме Менелая точки C_2, A_2, B_2 лежат на одной прямой. ●

Предлагаем читателю аналогично решить задачу б) самостоятельно.

С помощью теоремы Менелая можно доказать также следующую теорему.

Теорема Дезарга[1].
Если прямые AA_1, BB_1 и CC_1, проходящие через соответственные вершины треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, пересекаются в некоторой точке O и каждая пара прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекается, то точки их пересечения лежат на одной прямой.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему. Для этого следует применить теорему Менелая к треугольнику ABO и прямой A_1B_1, треугольнику BCO и прямой B_1C_1, треугольнику ACO и прямой A_1C_1.

4. Теорема Чевы и ее приложения

Теорема Чевы[2]. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB и не совпадают с вершинами треугольника ABC, причем две из прямых

---

[1] Дезарг Жерар (1593—1662) — французский математик, архитектор и инженер. Заложил основы проективной и начертательной геометрии.

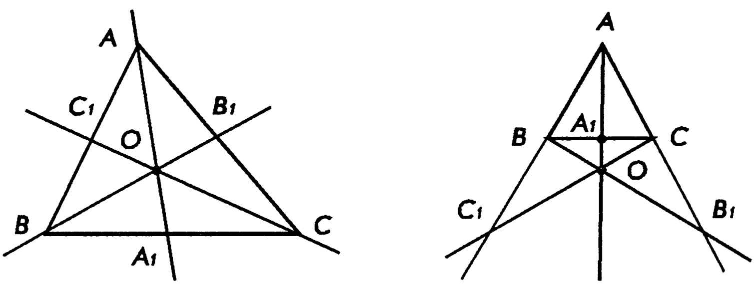
[2] Чева Джованни (1648—1734) — итальянский математик и инженер.

AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1. \qquad (3)$$

○ Докажем сначала, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в некоторой точке O (рис. 120), то выполняется равенство (3). Для этого заметим, что либо все три точки A_1, B_1 и C_1 лежат на соответствующих сторонах треугольника ABC (рис. 120а), либо одна из них лежит на стороне, а две другие лежат на продолжениях двух других сторон (рис. 120б). Отсюда следует, что левая часть равенства (3) — положительное число. Поэтому для доказательства равенства (3) достаточно показать, что выполняется равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (4)$$



а) б)

Рис. 120

Применив теорему Менелая к треугольнику ABA_1 и прямой CC_1, а затем к треугольнику ACA_1 и прямой BB_1, получаем: $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1O}}{\overline{OA}} = -1$; $\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = -1$, откуда следует, что $\left(\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BC}{CA_1} \cdot \frac{A_1O}{OA}\right)\left(\frac{AO}{OA_1} \cdot \frac{A_1B}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}\right) = 1$, т. е. выполняется равенство (4).

Обратно, пусть выполняется равенство (3) и две из прямых, например BB_1 и CC_1, пересекаются в точке O.

Обозначим через A' — точку пересечения прямых AO и BC. По доказанному $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$. Сравнивая это равенство с равенством (3), получаем, что $\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}}$. Отсюда следует, что точки A_1 и A' совпадают, т. е. прямая AA_1 также проходит через точку O. ●

Теорема Чевы, так же как и теорема Менелая, часто применяется при доказательстве теорем и решении задач. В качестве примера рассмотрим другое, более простое доказательство теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке (см. задачу 2). Пусть ABC — данный треугольник, а AA_1, BB_1 и CC_1 его медианы (см. рис. 117). Ясно, что $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1$, $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = 1$, $\frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$, поэтому $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1$. По теореме Чевы прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M. Так как луч AA_1 пересекает отрезок BB_1, то M — точка отрезка BB_1. Точно так же доказывается, что M — точка, лежащая на отрезках AA_1 и CC_1.

Предлагаем читателю, пользуясь теоремой Чевы, самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 4. Доказать, что точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника лежит на прямой, содержащей биссектрису угла треугольника.

Задача 5. (Теорема Ван Обеля). На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O. Доказать, что $\frac{AO}{OA_1} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}$.

○ Пусть прямые CC_1 и BB_1 пересекают прямую, проходящую через точку A и параллельную прямой BC, в точках K и L (рис. 121).

Так как $\triangle AKC_1 \sim \triangle BCC_1$, $\triangle ALB_1 \sim \triangle CBB_1$ по первому признаку подобия треугольников, то $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{KA}{BC}$; $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AL}{BC}$. Сложив эти равенства и учитывая, что $KA + AL = KL$, получаем:

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C}. \qquad (5)$$

Далее, $\triangle OAK \sim \triangle OA_1C$ и $\triangle OKL \sim \triangle OCB$, поэтому

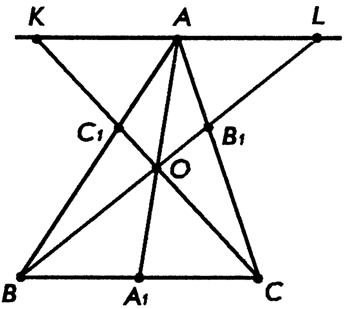


Рис. 121

$\frac{KO}{OC} = \frac{OA}{OA_1}$; $\frac{KL}{BC} = \frac{KO}{OC}$. Отсюда имеем: $\frac{KL}{BC} = \frac{OA}{OA_1}$. Из этого равенства и равенства (5) непосредственно следует искомое равенство. ●

Используя теорему Ван Обеля, легко решить следующую задачу.

Задача 6. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ пересекаются в точке O. Доказать, что $AO : OA_1 = (b + c) : a$, $BO : OB_1 = (a + c) : b$, $CO : OC_1 = (a + b) : c$.

Сформулируем еще одну задачу, которая является обобщением теоремы Чевы, на случай, когда точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 является бесконечно удаленной точкой, т. е. когда эти прямые попарно параллельны.

Задача 7. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB и не совпадают с вершинами треугольника ABC, причем две из прямых AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны. Доказать, что эти прямые попарно параллельны тогда и только тогда, когда выполняется равенство (3).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ VIII

289. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ тогда и только тогда, когда $BC \parallel AD$.

290. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ про-

веден луч, пересекающий диагональ BD в точке M, сторону CD — в точке P, прямую BC — в точке Q. Доказать, что $MA^2 = MP \cdot MQ$.

291. В треугольнике ABC стороны BC и AC соответственно равны a и b, а биссектриса CD равна d. Доказать, что $d < \frac{2ab}{a+b}$.

292. Через точку D пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Доказать, что $MN = \frac{c(a+b)}{a+b+c}$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

293. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC в точке их пересечения делятся в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Доказать, что $AA_1 = BB_1$ и треугольник ABC — равнобедренный, т. е. $CA = CB$.

294. На биссектрисе угла дана точка, через которую проведена произвольная прямая l, отсекающая на сторонах угла отрезки, длины которых равны a и b. Доказать, что сумма $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ не зависит от выбора прямой l.

295. Найти длину отрезка, отсекаемого боковыми сторонами трапеции на прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям, если длины оснований равны a и b.

296. Через точку E, лежащую на стороне AC треугольника ABC, проведена прямая параллельно стороне BC и другая прямая параллельно стороне AB, которые пересекают стороны треугольника в точках D и F. Доказать, что $S_{BDEF} = 2\sqrt{S_{ADE} \cdot S_{EFC}}$.

297. На медиане AA_1 треугольника ABC взята точка M так, что $AM : MA_1 = 1 : 2$. Прямая BM пересекает сторону AC в точке N. Найти площадь треугольника ABN, если площадь треугольника ABC равна $20 см^2$.

298. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Доказать, что: а) треугольники A_1B_1C, B_1C_1A, C_1A_1B подобны треугольнику ABC; б) лучи A_1A, B_1B и C_1C являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

299. Высоты AH_1, BH_2, CH_3 треугольника ABC име-

ют соответственно длины h_a, h_b, h_c. Доказать, что: а) существует треугольник $A'B'C'$, стороны которого равны: $A'B' = \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$, $B'C' = h_b$, $C'A' = h_a$;

б) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

300. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна S, его диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Доказать, что если площади S_1 и S_2 треугольников KAB и KCD удовлетворяют условию $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, то данный четырехугольник есть трапеция или параллелограмм.

301. Найти площадь треугольника, если заданы длины h_a, h_b, h_c его высот.

302. Каждая диагональ квадрата, сторона которого равна a, служит диагональю ромба с площадью, равной половине площади квадрата. Найти площадь общей части двух ромбов.

303. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Найти площадь треугольника BA_1C_1, если $AB = 13$ *см*, $BC = 14$ *см*, $CA = 15$ *см*.

304. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами треугольника ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Расстояния от точек C_1, A_1, B_1 до прямых BC, CA, AB равны соответственно ρ_a, ρ_b, ρ_c, а высоты треугольника, проведенные к тем же прямым, равны h_a, h_b, h_c. Доказать, что: а) $\frac{\rho_a}{h_a} + \frac{\rho_b}{h_b} + \frac{\rho_c}{h_c} \geqslant 3m$; б) $\frac{h_a}{\rho_a} + \frac{h_b}{\rho_b} + \frac{h_c}{\rho_c} \geqslant \frac{3}{m}$, где $m = \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$.

305. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, площадь которого равна S, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые разлагают треугольник на шесть частей, три из которых — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Доказать, что $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

306. Даны две точки A и B и действительное число λ, $\lambda \neq -1$. Доказать, что существует единственная точка M такая, что простое отношение точек A, B, M равно λ (см. п. 2 § 42).

307. Даны две точки A и B и действительное число m, отличное от нуля и единицы. Доказать, что существует единственная гомотетия с коэффициентом m, при которой точка A переходит в точку B.

308. Дана окружность ω с центром O радиуса r. Доказать, что при преобразовании подобия с коэффициентом k окружность ω переходит в окружность ω' с центром O' и радиусом r', где O' — образ точки O, а $r' = kr$.

309. Доказать, что при преобразовании подобия сохраняется простое отношение трех точек.

310. На основании BC треугольника ABC от его вершин B и C отложены равные отрезки, через концы которых проведены прямые l_1 и l_2, параллельные боковым сторонам. Доказать, что эти прямые пересекаются на прямой AM, проходящей через середину M отрезка BC.

311. Доказать, что точки, симметричные произвольной точке M относительно середин сторон четырехугольника $ABCD$, являются вершинами параллелограмма.

312. Из произвольной точки Q, не лежащей на прямых, содержащих стороны треугольника ABC, проведены перпендикуляры QM, QN, QP к прямым AB, BC, CA. Через середины отрезков QM, QN, QP проведены прямые, параллельные соответствующим сторонам треугольника. Доказать, что треугольник, образованный при пересечении этих прямых, равен треугольнику с вершинами в серединах сторон треугольника ABC.

313. Из вершин выпуклого четырехугольника, диагонали которого не перпендикулярны, проведены перпендикуляры к прямым, содержащим диагонали. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются основания этих перпендикуляров, подобен исходному четырехугольнику.

314. Через точку G пересечения медиан треугольника ABC проведены два луча, параллельные сторонам AC и BC и пересекающие сторону AB в точках A_1 и B_1. Доказать, что площадь треугольника A_1B_1G составляет $\frac{1}{9}$ площади данного треугольника.

315. На сторонах AB, BC, CA равностороннего треугольника ABC взяты точки C_1, A_1, B_1 так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Доказать, что этот треугольник — равносторонний и что

точка пересечения его медиан совпадает с точкой пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

316. Даны три прямые a, b и p, проходящие через точку O, и число λ, $\lambda \neq -1$. Найти множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию: прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой p, пересекает прямые a и b соответственно в точках A и B так, что $(AB, M) = \lambda$ (см. п. 2 § 42).

317. Доказать, что если прямая, проходящая через середины противоположных сторон четырехугольника, проходит через точку пересечения прямых, содержащих две другие стороны четырехугольника, то четырехугольник — трапеция[1].

318. Доказать, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, проходит через точку пересечения его диагоналей тогда и только тогда, когда этот четырехугольник является трапецией или параллелограммом.

319. Доказать, что параллелограммы $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $\angle A = \angle A'$, отрезки AB и AD пропорциональны отрезкам $A'B'$ и $A'D'$; б) отрезки AB, AD, AC пропорциональны отрезкам $A'B'$, $A'D'$, $A'C'$; в) отрезки AB, AD, BD пропорциональны отрезкам $A'B'$, $A'D'$, $B'D'$.

320. Доказать, что трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с основаниями AB и $A'B'$ подобны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $\angle A = \angle A'$, отрезки AB, AD, CD пропорциональны отрезкам $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$; б) отрезки AB, BC, CD, DA пропорциональны отрезкам $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$; в) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, отрезки AB и AD пропорциональны отрезкам $A'B'$, $A'D'$.

321. Доказать, что медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

322. В трапеции точка пересечения диагоналей равноудалена от прямых, содержащих боковые стороны. Доказать, что трапеция равнобедренная.

323. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на пря-

---

[1] В этой задаче сформулировано утверждение, обратное утверждению задачи 1 § 42.

мых BC, CA и AB, содержащих стороны треугольника ABC, и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой, и одна из них лежит на соответствующей стороне треугольника ABC, а две другие — на продолжениях соответствующих сторон, при этом, если, например, точка A_1 лежит на стороне BC, то A — внутренняя точка треугольника $A_1B_1C_1$.

324. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на прямых BC, CA и AB, содержащих стороны треугольника ABC, и $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Доказать, что площадь треугольника ABC равна половине площади треугольника $A_1B_1C_1$.

325. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sin A\hat{C}C_1}{\sin B\hat{C}C_1} \cdot \frac{\sin B\hat{A}A_1}{\sin C\hat{A}A_1} \cdot \frac{\sin C\hat{B}B_1}{\sin A\hat{B}B_1} = 1.$$

326. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2, симметричные этим прямым относительно прямых, содержащих биссектрисы соответственно углов A, B и C треугольника, также пересекаются в одной точке.

327. Точка D лежит на медиане AA_1 треугольника ABC. Прямые BD и CD пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1. Доказать, что прямые BC и B_1C_1 параллельны.

328. В треугольнике ABC медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1 пересекаются в одной точке. Доказать, что $AB^2 = BC^2 + AC^2 - \frac{2BC \cdot AC^2}{BC + AC}$.

Глава IX

ОКРУЖНОСТЬ

§ 43. ОКРУЖНОСТЬ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

1. Окружность

Окружностью называется фигура, состоящая из множества всех точек плоскости, каждая из которых находится на данном расстоянии r от некоторой точки O этой плоскости. Точка O называется *центром* окружности, а отрезок, соединяющий точку O с любой точкой окружности,— ее *радиусом* (рис. 122). Все радиусы окружности имеют длину r. Число r также называется радиусом окружности.

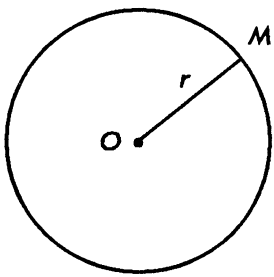


Рис. 122

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* окружности. Центр окружности является серединой любого диаметра.

Окружность разбивает множество всех точек плоскости, не принадлежащих ей, на два подмножества: *внутреннюю* и *внешнюю* области относительно окружности. Внутренней области принадлежат те точки плоскости, расстояние от каждой из которых до центра меньше радиуса (включая и центр), и внешней области — те точки, расстояние от каждой из которых до центра больше радиуса. На рис. 123 внутренняя область окружности заштрихована. Точки внутренней области называются *внутренними*, а точки внешней области — *внешними* относительно окружности.

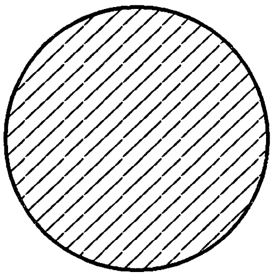


Рис. 123

2. Взаимное расположение прямой и окружности

Докажем, что *прямая и окружность не могут иметь более чем две общие точки*. Допустим, что это не так, т. е. существует некоторая прямая l, которая пересекает окружность с центром O в трех точках A, B и C. Так как точка O равноудалена от точек A, B и C, то она лежит как на серединном перпендикуляре l_1 к отрезку AB, так и на серединном перпендикуляре l_2 к отрезку BC. Прямые l_1 и l_2 не совпадают (см. задачу 2 § 17), проходят через точку O и перпендикулярны к прямой AB. Этот вывод противоречит теореме о перпендикулярных прямых (§ 8).

Будем говорить, что прямая и окружность *пересекаются*, если они имеют две общие точки. Прямая, пересекающая окружность в двух точках, называется *секущей*. Очевидно, любая прямая, проходящая через центр окружности является секущей.

Докажем теорему о взаимном расположении прямой и окружности.

Теорема 1. *Пусть d — расстояние от центра O окружности радиуса r до данной прямой l. Тогда если $d < r$, то прямая и окружность пересекаются, если $d = r$ — прямая имеет с окружностью только одну общую точку, если $d > r$ — ни одной общей точки.*

○ Проведем перпендикуляр OH к прямой l. Тогда, очевидно, $OH = d$.

Докажем сначала, что если $d < r$, то прямая и окружность пересекаются, т. е. имеют две общие точки (рис. 124а). Для этого от точки H на двух дополнительных лучах прямой l отложим отрезки HM_1 и HM_2, равные $\sqrt{r^2 - d^2}$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам OHM_1 и OHM_2, мы приходим к выводу, что $OM_1 = OM_2 = r$. Таким образом, прямая l и окружность имеют две общие точки (точки M_1 и M_2).

Рассмотрим теперь случай, когда $d = OH = r$ (рис. 124б). Тогда точка H прямой l является точкой окружности, и любая другая точка X прямой l не лежит на окружности, так как $OX > OH = r$. В этом случае прямая l и окружность имеют только одну общую точку.

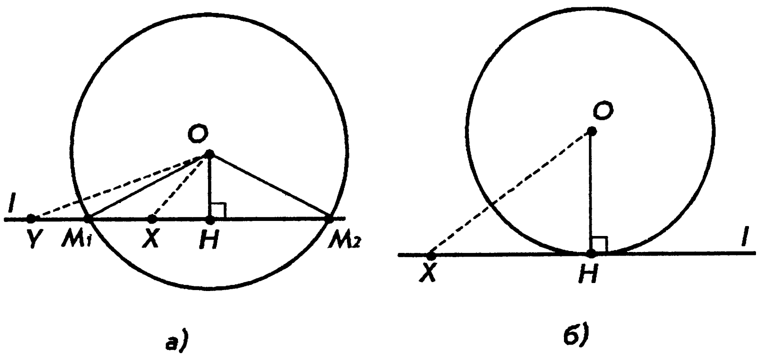


Рис. 124

Рассмотрим, наконец, случай, когда $d = OH > r$. В этом случае для любой точки X прямой l имеем: $OX \geqslant OH > r$, т. е. на прямой l нет ни одной точки окружности. ●

Следствие. *Если прямая проходит через внутреннюю точку относительно окружности, то она является секущей.*

Замечание. Докажем, что если прямая l пересекает окружность с центром O в двух точках M_1 и M_2, то точки прямой l, лежащие между точками M_1 и M_2, и только они, являются внутренними точками относительно окружности.

В самом деле, если прямая l проходит через центр окружности, то отрезок M_1M_2 — диаметр окружности и это утверждение очевидно. Если же прямая l не проходит через точку O (рис. 124а), то для произвольной точки X, лежащей на отрезке M_1M_2, имеем: $OX < OM_1 = r$, а для произвольной точки Y прямой l, не принадлежащей отрезку M_1M_2, имеем: $OY > OM_1 = r$ (см. задачу 86). Таким образом, X — внутренняя точка, а Y — внешняя точка относительно окружности.

3. Теорема о диаметре, перпендикулярном хорде

Теорема 2. *Диаметр окружности перпендикулярен к хорде, не проходящей через центр окружности, тогда и только тогда, когда он проходит через середину хорды.*

○ Пусть диаметр AB окружности перпендикулярен к хорде CD и пересекает ее в точке M (рис. 125). Тогда OM — высота равнобедренного треугольника OCD, поэтому этот же отрезок является и медианой треугольника OCD, т. е. M — середина хорды CD.

Обратно, пусть диаметр AB проходит через середину M хорды CD. Тогда OM — медиана равнобедренного треугольника OCD, поэтому этот же отрезок является высотой треугольника OCD, т. е. $AB \perp CD$. ●

Предлагаем читателю, воспользовавшись этой теоремой и теоремой Пифагора, доказать утверждение: *из всех хорд, проходящих через внутреннюю точку A относительно данной окружности, не совпадающей с цент-*

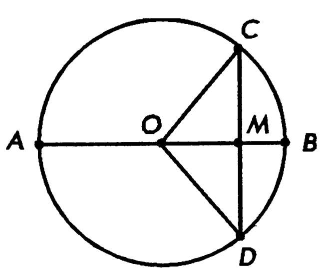


Рис. 125

ром окружности, наименьшей является та хорда, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через точку A.

4. Центр и оси симметрии окружности

Центр окружности является центром симметрии окружности, т. к. эта точка является серединой любого диаметра. Других центров симметрии у окружности нет. В самом деле, предположим, что для окружности с центром O точка O_1, отличная от O, также является центром симметрии. Тогда, если A и B — точки пересечения прямой OO_1 с окружностью, то эти точки должны быть симметричны как относительно точки O, так и относительно точки O_1. Отсюда следует, что отрезок AB имеет две середины O и O_1, что противоречит теореме о середине отрезка.

Рассмотрим теперь вопрос об осях симметрии окружности. Из теоремы 2 следует, что любая прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии окружности. Окружность не имеет других осей симметрии. В самом деле, пусть у окружности с центром O существует ось симметрии l, не проходящая через точку O. Проведем через точку O прямую, перпендикулярную к прямой l, и обозначим точки пересечения этой прямой с окружностью через A и B, а точку пересечения с прямой l — через H. Так как по предположению l — ось симметрии окружности, то точки A и B симметричны относительно точки H, т. е. H — середина отрезка AB. Мы пришли к выводу, что отрезок AB имеет две середины O и H, что невозможно.

§ 44. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

1. Теорема о касательной

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной к окружности*, а эта точка — *точкой касания*.

Теорема 1. *Прямая является касательной к окружности тогда и только тогда, когда она проходит через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку.*

○ Пусть l — касательная к окружности с центром O радиуса r, а M — точка касания. Докажем, что

$OM \perp l$. Для этого проведем перпендикуляр OH к прямой l. Точки H и M совпадают, т. к. в противном случае $OH < OM = r$. Отсюда следует, что H — внутренняя точка относительно окружности, но тогда прямая l, согласно следствию теоремы 1 § 43, не является касательной. Таким образом, $OM \perp l$.

Докажем обратное утверждение. Пусть прямая l проходит через точку H данной окружности с центром O радиуса r и $l \perp OH$ (рис. 126). Для любой точки X прямой l, отличной от H, имеем: $OX > OH = r$. Следовательно, H — единственная общая точка прямой l и данной окружности, т. е. l — касательная к окружности. ●

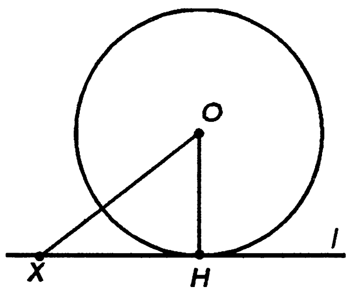


Рис. 126

2. Касательные к окружности, проходящие через данную точку плоскости

Рассмотрим окружность и произвольную точку M данной плоскости. Если M — внутренняя точка относительно окружности, то по следствию теоремы 1 § 43 любая прямая, проходящая через точку M является секущей, т. е. в этом случае через точку M не проходит ни одна касательная. Если точка M лежит на окружности, то по теореме о касательной через эту точку проходит одна и только одна касательная.

Выясним теперь вопрос о числе касательных, которые проходят через точку M, внешнюю относительно данной окружности. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть M — внешняя точка относительно окружности с центром O. Тогда через точку M*

проходят две и только две касательные к данной окружности, симметричные относительно прямой OM.

○ По условию теоремы $d = OM > r$, где r — радиус окружности. Рассмотрим три отрезка, длины которых равны r, d и $\sqrt{d^2 - r^2}$. Так как $r + d > \sqrt{d^2 - r^2}$, $r + \sqrt{d^2 - r^2} > d$, $d + \sqrt{d^2 - r^2} > r$, то по теореме 3 § 30 существует треугольник ABC такой, что $AC = r$, $BC = \sqrt{d^2 - r^2}$, $AB = d$. По теореме, обратной теореме Пифагора, этот треугольник является прямоугольным треугольником с гипотенузой AB.

От луча MO в две полуплоскости с границей MO отложим углы OMD и OMD', равные углу ABC, и на лучах MD и MD' от точки M отложим отрезки MN и MN', равные отрезку BC (рис. 127).

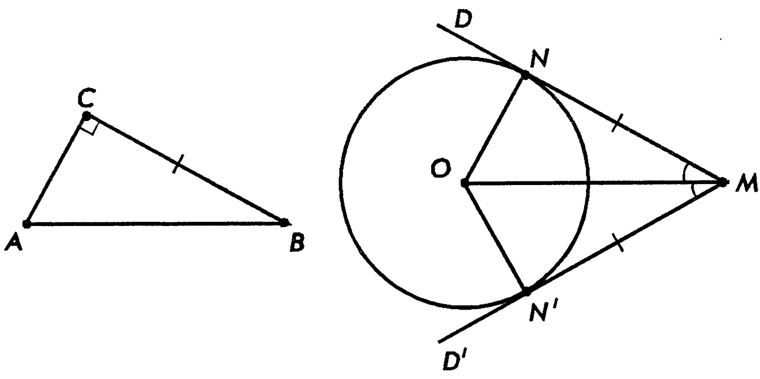


Рис. 127

Так как $\triangle OMN = \triangle OMN' = \triangle ABC$, то углы ONM и $ON'M$ — прямые и $ON = ON' = r$, поэтому по теореме 1 MN и MN' — касательные к окружности. Прямые MN и MN', очевидно, симметричны относительно прямой OM.

Если предположить, что через точку M проходит еще одна прямая, которая касается данной окружности в точке P, то по теореме 1 $OP = r = AC$, а угол OPM — прямой, и, кроме того, $OM = AB$, поэтому $\triangle OMP = \triangle ABC$ и, следовательно, $\angle OMP = \angle ABC$. Отсюда следует, что $\angle OMP = \angle OMN = \angle OMN'$, поэтому по аксиоме III_7 луч MP совпадает либо с лучом

MD, либо с лучом MD'. Следовательно, прямая MP совпадает с одной из касательных MN или MN'. ●

Следствие. *Если A — внешняя точка относительно окружности с центром O и прямые AB и AC являются касательными к этой окружности в точках B и C, то $AB = AC$ и $\angle OAB = \angle OAC$.*

§ 45. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Теорема о взаимном расположении двух окружностей

Докажем, что *две окружности с разными центрами не могут иметь более чем две общие точки.* Допустим, что это не так, т. е. существуют две окружности с центрами O_1 и O_2, которые имеют три общие точки A, B и C. Так как каждая из точек O_1 и O_2 равноудалена от точек A, B и C, то точки O_1 и O_2 лежат как на серединном перпендикуляре l_1 к отрезку AB, так и на серединном перпендикуляре l_2 к отрезку BC. Таким образом, различные прямые l_1 и l_2 (см. задачу 2 § 17) проходят через две точки O_1 и O_2. Мы пришли в противоречие с аксиомой 1_3.

Будем говорить, что две окружности *пересекаются,* если они имеют две общие точки.

Теорема 1. Пусть центры O_1 и O_2 двух окружностей с радиусами r_1 и r_2 не совпадают, $d = O_1O_2$. Тогда, если $d < r_1 + r_2$ и $d > |r_1 - r_2|$, то окружности пересекаются, если $d = r_1 + r_2$ или $d = |r_1 - r_2|$, то окружности имеют только одну общую точку, а если $d > r_1 + r_2$ или $d < |r_1 - r_2|$, то окружности не имеют общих точек.

○ Докажем сначала, что если $d < r_1 + r_2$ и $d > |r_1 - r_2|$, то данные окружности пересекаются. Из данных неравенств получаем: $r_1 + r_2 > d$, $r_1 + d > r_2$, $r_2 + d > r_1$. По теореме 3 § 30 существует треугольник ABC такой, что $AC = d$, $AB = r_1$, $BC = r_2$. От луча O_1O_2 в двух полуплоскостях с границей O_1O_2 отложим углы $O_2O_1D_1$ и $O_2O_1D_2$, равные углу BAC, и на лучах O_1D_1 и O_1D_2 отложим отрезки O_1M_1 и O_1M_2, равные отрезку AB (рис. 128а). Треугольники $O_1O_2M_1$ и $O_1O_2M_2$ рав-

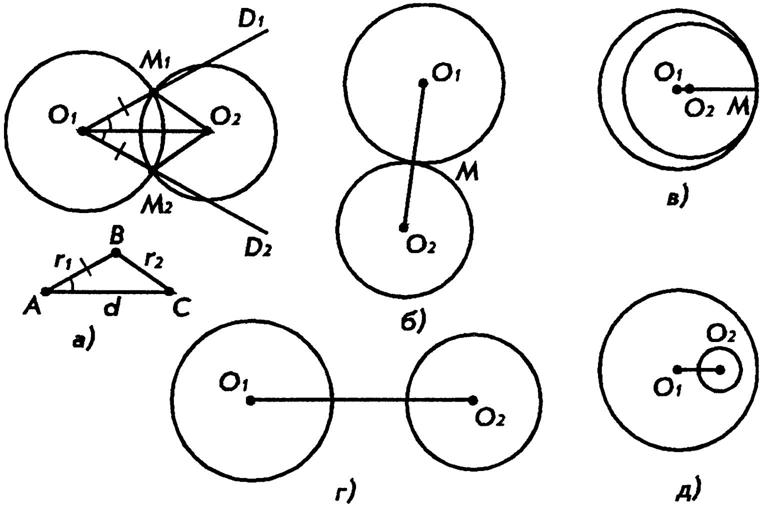


Рис. 128

ны треугольнику ABC по первому признаку равенства треугольников ($O_1O_2 = AC = d$, $O_1M_1 = O_1M_2 = AB$, $\angle M_1O_1O_2 = \angle M_2O_1O_2 = \angle A$), поэтому $O_1M_1 = AB = r_1$, $O_2M_1 = BC = r_2$, $O_1M_2 = AB = r_1$, $O_2M_2 = BC = r_2$. Следовательно, точки M_1 и M_2 принадлежат данным окружностям, т. е. эти окружности пересекаются.

Рассмотрим теперь случай, когда $d = r_1 + r_2$. На луче O_1O_2 отложим отрезок $O_1M = r_1$ (рис. 128б). Тогда, очевидно, $MO_2 = r_2$, т. е. точка M принадлежит данным окружностям. Для любой точки X, не лежащей на луче O_1O_2, имеем: $O_1X + XO_2 > O_1O_2 = d$, поэтому точка X не может быть общей точкой данных окружностей. С другой стороны, на луче O_1O_2 кроме точки M нет других точек, принадлежащих окружности с центром O_1. Следовательно, M — единственная общая точка данных окружностей.

Пусть теперь $|r_1 - r_2| = d$. Допустим, что $r_1 > r_2$, тогда, $r_1 - r_2 = d$, $r_1 = r_2 + d$. На продолжении луча O_2O_1 отложим отрезок $O_2M = r_2$ (рис. 128в). Тогда, очевидно, $MO_1 = r_1$, т. е. точка M принадлежит данным окружностям. Для любой точки X, не лежащей на прямой O_1O_2, имеем: $|O_1X - O_2X| < O_1O_2 = d$, поэтому точка X не может быть общей точкой данных окружностей. С другой стороны, на луче O_1O_2 кроме точки M нет других точек, принадлежащих окружности с центром O_1, а для любой точки Y, лежащей на продолжении этого луча, $O_1Y < O_2Y$, поэтому точка Y также не может быть общей точкой данных окружностей. Следовательно, M — единственная общая точка двух данных окружностей.

Если $d > r_1 + r_2$, то данные окружности не могут иметь общих точек (рис. 128г). В самом деле, если предположить, что M — общая точка этих окружностей, то $O_1M + O_2M \geqslant O_1O_2$, т. е. $r_1 + r_2 \geqslant d$. Мы пришли в противоречие с данным неравенством.

Аналогично, если $d < |r_1 - r_2|$, то данные окружности не могут иметь общих точек (рис. 128д). В самом деле, если предположить, что M — общая точка этих окружностей, то $O_1O_2 + O_2M \geqslant O_1M$ и $O_1O_2 + O_1M \geqslant \geqslant O_2M$, т. е. $d + r_2 \geqslant r_1$, $d + r_1 \geqslant r_2$. Отсюда следует, что $d \geqslant r_1 - r_2$ и $d \geqslant r_2 - r_1$, т. е. $d \geqslant |r_1 - r_2|$. Мы пришли в противоречие с данным неравенством. ●

Следствие. *Если две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются, то точки пересечения этих окружностей не лежат на прямой O_1O_2. Если же эти окружности имеют только одну общую точку, то эта точка лежит на прямой O_1O_2.*

2. Касание двух окружностей

Если две окружности имеют единственную точку M, то говорят, что они *касаются* друг друга в точке M.

Теорема 2. *Две окружности касаются друг друга тогда и только тогда, когда касательные к окружностям в их общей точке совпадают.*

○ Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга в точке M. По следствию теоремы 1 точка M лежит на прямой O_1O_2. По теореме о касательной прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой O_1O_2, является касательной к обеим окружностям.

Обратно, пусть касательные к двум окружностям с центрами O_1 и O_2 в их общей точке M совпадают. По теореме о касательной прямые O_1M и O_2M перпендикулярны к общей касательной, поэтому точки O_1, O_2 и M

лежат на одной прямой. По следствию теоремы 1 данные окружности не могут пересекаться, поэтому они касаются друг друга. ●

§ 46. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ. ТЕОРЕМА ОБ ОТРЕЗКАХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ХОРД

1. Дуга окружности и ее градусная мера

Две произвольные точки A и B окружности разбивают все точки окружности, отличные от A и B, на два множества. Фигура, состоящая из объединения каждого из этих множеств с точками A и B называется *дугой окружности,* а точки A и B — концами двух этих дуг. Ясно, что две точки A и B на окружности определяют две дуги (рис. 129; на этом рисунке одна из дуг с концами A и B выделена жирной линией).

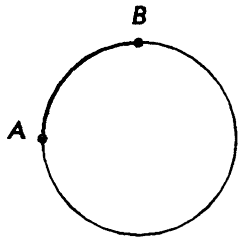


Рис. 129

Дуга называется *полуокружностью,* если отрезок, соединяющий ее концы является диаметром.

Угол, вершина которого совпадает с центром O окружности, называется ее *центральным углом.* Пусть стороны центрального угла O пересекают окружность в точках A и B (рис. 130а,б). Тогда две дуги окружности с концами A и B называются дугами, соответствующими центральному углу AOB. Если центральный угол развернутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 130б). Если $\angle AOB$ неразвернутый, то говорят, что дуга с концами A и B, расположенная внутри этого угла, *меньше полуокружности,* а другая дуга с концами A и B — *больше полуокружности*. Дугу с концами A и B, меньшую полуокружности, обычно обозначают через $\smile AB$, а другую дугу — через $\smile AMB$, где M — некоторая точка этой дуги. На рис. 130а $\smile AB$ выделена жирной линией. Полуокружность с концами A и B обозначают так: $\smile AMB$ (рис. 130б).

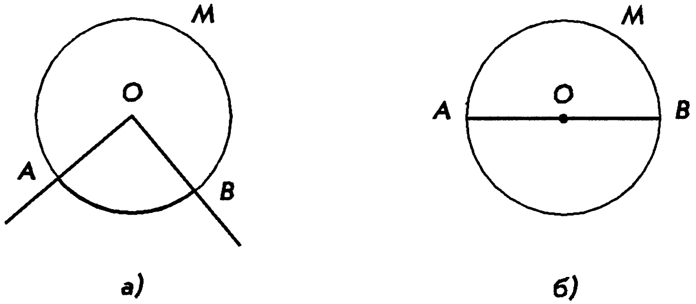


Рис. 130

Введем понятие градусной меры дуги окружности. Если дуга AB окружности с центром O не больше полуокружности, то *градусной мерой этой дуги* считается градусная мера центрального угла AOB. Если же дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360^\circ - \widehat{AOB}$.

Отсюда следует, что градусная мера полуокружности равна 180°, а сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами A и B равна 360°.

Градусную меру дуги AB будем обозначать так: $\overset{\smile}{AB}$.

Имеют место следующие свойства градусных мер дуг окружностей, которые читатель легко докажет самостоятельно.

1^0. *Если точка M лежит на дуге AB, то* $\overset{\smile}{AM} + \overset{\smile}{MB} = \overset{\smile}{AB}$.

Если дуга AB меньше полуокружности или равна полуокружности, то это равенство непосредственно следует из определения градусной меры дуги. Если же дуга AB больше полуокружности, то следует воспользоваться точкой N пересечения окружности с продолжением луча OM.

2^0. *Две дуги одной окружности или двух окружностей с равными радиусами равны тогда и только тогда, когда они имеют равные градусные меры.*

Для доказательства этого свойства рекомендуем воспользоваться теоремой 2 из § 33.

3^0. *Две дуги окружности, заключенные между параллельными секущими, равны.*

2. Теорема о вписанном угле

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется *вписанным углом* (рис. 131).

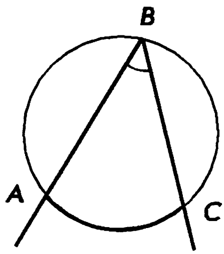


Рис. 131

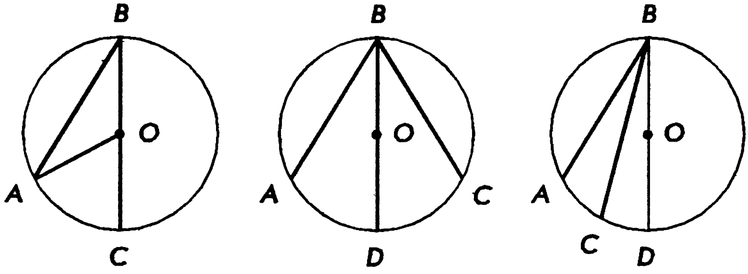
Если стороны вписанного угла B пересекают окружность в точках A и C, AC — дуга, которая расположена внутри угла ABC, то будем говорить, что вписанный угол ABC *опирается* на дугу AC. Докажем теорему о вписанном угле.

Теорема 1. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

○ Дан угол ABC, вписанный в окружность с центром O, опирающийся на дугу AC. Рассмотрим три возможных случая.

1) Центр O окружности лежит на одной из сторон угла, например, на стороне BC (рис. 132а). Тогда дуга AC, на которую опирается угол ABC, меньше полуокружности и поэтому $\smile{AC} = \widehat{AOC}$.

Угол AOC является внешним углом равнобедренного



а) б) в)

Рис. 132

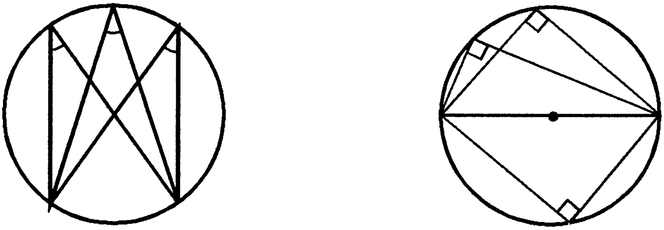
треугольника AOB, поэтому $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$. Таким образом, $\overset{\smile}{AC} = 2\widehat{ABC}$, $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.

2) Центр O окружности является внутренней точкой относительно угла ABC (рис. 132б). Тогда луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D и $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC}$. По доказанному имеем: $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD}$, $\widehat{DBC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DC}$, поэтому $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$.

3) Центр O окружности является внешней точкой относительно угла ABC. Обозначим через D точку пересечения луча BO с данной окружностью. Тогда лучи BA и BC лежат в одной полуплоскости с границей BD, поэтому один из них является внутренним лучом угла, образованного вторым лучом и лучом BD. Пусть, например, луч BC — внутренний луч угла ABD (рис. 132в).

Тогда $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} = \widehat{ABD}$, а значит, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} - \widehat{CBD}$. Из предыдущего следует, что $\widehat{ABD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD}$, $\widehat{CBD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CD}$, поэтому $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{CD} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$. ●

С л е д с т в и е. *Вписанные в окружность углы, опира-*



а) б)

Рис. 133

ющиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 133а). *В частности, вписанные в окружность углы, опирающиеся на полуокружность, прямые* (рис. 133б).

Используя теорему 1, докажем еще две теоремы, которые часто используются при решении геометрических задач, особенно задач на построение. Говорят, что отрезок *AB виден из точки M под данным углом*, если точка M не совпадает с точками A и B и $\angle AMB$ равен данному углу.

Теорема 2. *Множество всех точек плоскости, из каждой из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, есть окружность (без точек A и B) с диаметром AB.*

○ Рассмотрим окружность ω с диаметром AB и докажем, что данное множество точек совпадает с множеством точек окружности ω без точек A и B (рис. 134а).

Пусть M — произвольная точка данного множества. По условию теоремы $\angle AMB$ прямой, поэтому $\angle BAM$ острый. Отсюда следует, что прямая AM не является касательной к окружности ω, т. е. имеет с окружностью ω, кроме точки A, еще одну общую точку M'. Угол $AM'B$ опирается на полуокружность APB, поэтому он прямой. Итак, $BM' \perp AM$, $BM \perp AM$. По теореме о перпендикулярных прямых точки M и M' совпадают, т. е. $M \in \omega$.

Пусть теперь N — произвольная точка окружности ω, отличная от точек A и B. По следствию предыдущей теоремы $\angle ANB$ — прямой, т. е. N — точка данного множества. ●

8*

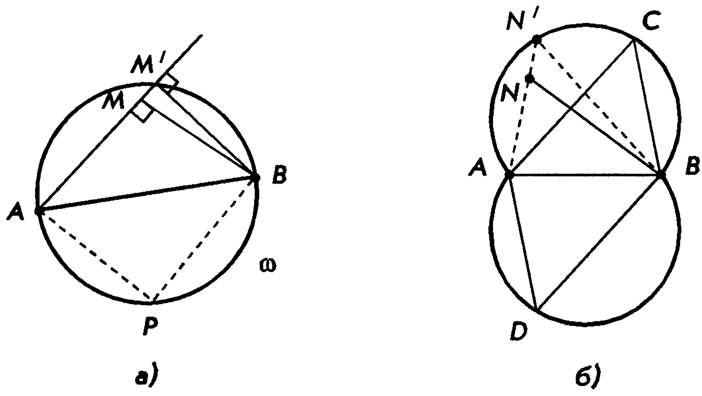


Рис. 134

Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Множество всех точек плоскости, из каждой из которых данный отрезок AB виден под данным неразвернутым углом, есть две дуги с общими концами A и B (без точек A и B), симметричные относительно прямой AB.*

○ Рассмотрим ромб $ACBD$, углы C и D которого равны данному неразвернутому углу, и проведем две окружности через точки A, C, B и A, D, B (рис. 134б). Очевидно, дуги ACB и ADB этих окружностей симметричны относительно прямой AB. Докажем, что множество всех точек этих дуг, без точек A и B, совпадает с данным множеством точек.

Из следствия теоремы 1 следует, что каждая точка, принадлежащая этим дугам, является точкой данного множества. Пусть теперь N — произвольная точка данного множества. Ясно, что хотя бы один из лучей AN и BN, например, луч AN, имеет общую точку N' с этими дугами (см. рис. 134б). Тогда углы ANB и $AN'B$ равны, поэтому точки N и N' совпадают, так как в противном случае в треугольнике ANN' не выполняется теорема о внешнем угле. Итак, N — точка, лежащая на одной из дуг. ●

3. Теорема об отрезках пересекающихся хорд

Используя следствие теоремы 1, докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды, равно произведению отрезков другой хорды.*

○ Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 135), тогда $\angle 1 = \angle 2$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Аналогично, $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, треугольники AMC и DMB подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$, т. е. $MA \cdot MB = MC \cdot MD$. ●

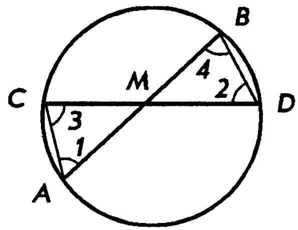


Рис. 135

Следствие. *Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.*

○ В самом деле, пусть AH — перпендикуляр, проведенный из точки A окружности к диаметру BC и D — вторая точка пересечения прямой AH с окружностью. По доказанной теореме $AH \cdot HD = BH \cdot HC$. По теореме о диаметре, перпендикулярном к хорде, $HD = AH$, следовательно, $AH^2 = BH \cdot HC$ и $AH = \sqrt{BH \cdot HC}$. ●

§ 47. УГЛЫ МЕЖДУ ХОРДАМИ, СЕКУЩИМИ И КАСАТЕЛЬНЫМИ

1. Углы между хордами и секущими

Выясним, как измеряются углы между хордами и секущими.

1^0. *Если хорды AA_1 и CC_1 окружности пересекаются в точке B, то*

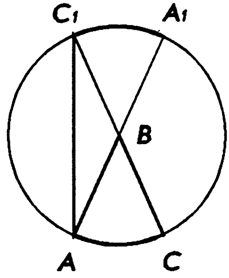


Рис. 136

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile A_1C_1), \qquad (1)$$

где $\smile AC$ и $\smile A_1C_1$ *— дуги, расположенные внутри угла* ABC *и вертикального угла* A_1BC_1 (рис. 136).

Угол ABC является внешним углом треугольника AC_1B, поэтому $\widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{C_1}$. По теореме 1 § 46 $\widehat{A} = \frac{1}{2}\smile A_1C_1$, $\widehat{C_1} = \frac{1}{2}\smile AC$. Подставив эти значения в предыдущее выражение, получим формулу (1). ●

2°. *Если две секущие* AA_1 *и* CC_1 *окружности пересекаются в точке* B, *внешней относительно этой окружности, то*

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile A_1C_1), \qquad (2)$$

где $\smile AC$ *и* $\smile A_1C_1$ *— дуги, расположенные внутри угла* ABC *и* $\smile AC > \smile A_1C_1$ (рис. 137).

Угол AA_1C — является внешним углом треугольника A_1CB, поэтому $\widehat{AA_1C} = \widehat{B} + \widehat{C}$ или $\widehat{B} = \widehat{AA_1C} - \widehat{C}$. По теореме 1 § 46 $\widehat{AA_1C} = \frac{1}{2}\smile AC$, $\widehat{C} = \frac{1}{2}\smile A_1C_1$. Подставив эти значения в предыдущее выражение, получим равенство (2).

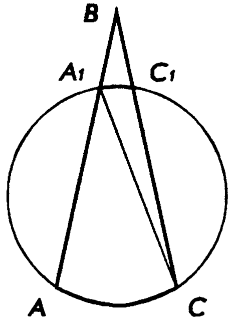


Рис. 137

2. Углы между касательной и хордой или секущей, угол между касательными

3^0. *Если BA — хорда, а BC — касательная к окружности в точке B, то*

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}, \qquad (3)$$

где $\smile AB$ — дуга окружности, расположенная внутри угла ABC.

○ Если хорда BA является диаметром, то $\angle ABC$ — прямой и утверждение 3^0 очевидно. Допустим, что хорда BA и диаметр BD не совпадают. Возможны два случая: а) BD — внутренний луч угла ABC (рис. 138а). В этом случае $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} + \widehat{DBC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{DMB} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{ADB}$. б) BA — внутренний луч угла DBC (рис. 138б). В этом случае $\widehat{DBC} = \widehat{DBA} + \widehat{ABC}$. Отсюда получаем: $\widehat{ABC} = \widehat{DBC} - \widehat{DBA} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DAB} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{DA} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AB}$. ●

4^0. *Если секущая AA_1 и касательная к окружности в точке C пересекаются в точке B, то*

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{A_1C} - \overset{\smile}{AC}), \qquad (4)$$

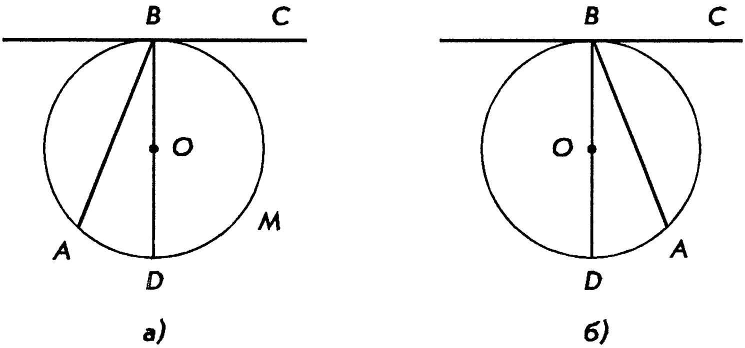


Рис. 138

где $\smile A_1C$ и $\smile AC$ — *дуги, заключенные между сторонами угла* ABC *и* $\overset{\smile}{A_1C} > \overset{\smile}{AC}$.

○ Угол CAA_1 является внешним углом треугольника ABC, поэтому $\widehat{CAA_1} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$ (рис. 139).

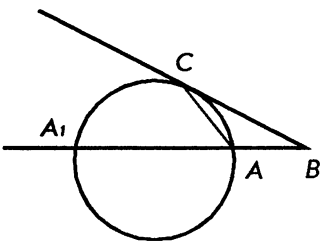


Рис. 139

Отсюда получаем: $\widehat{ABC} = \widehat{CAA_1} - \widehat{ACB}$. По доказанному $\widehat{CAA_1} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{A_1C}$, $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$. Подставив эти значения в предыдущую формулу, получим равенство (4). ●

5^0. *Если касательные к окружности в точках* A *и* C *пересекаются в точке* B, *то* $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AMC} - \overset{\smile}{AC})$, *где*

$\smile AMC$ *и* $\smile AC$ *— соответственно большая и меньшая дуги окружности с общими концами* A *и* C.

○ Введем обозначения: $\angle 1 = \angle BAC$, $\angle 2 = \angle ACB'$, где B' — точка на продолжении луча CB. По свойству 3° $\widehat{1} = \frac{1}{2}\smile AC$, $\widehat{2} = \frac{1}{2}\smile AMC$. Так как $\angle 2$ — внешний угол треугольника ABC, то $\widehat{2} = \widehat{1} + \widehat{ABC}$ или $\widehat{ABC} = \widehat{2} - \widehat{1} = \frac{1}{2}(\smile AMC - \smile AC)$. ●

Предлагаем читателю с помощью теоремы 2 § 46 и свойства 3° самостоятельно решить следующую задачу.

З а д а ч а. Две окружности касаются в точке A. Через эту точку проведены две прямые, пересекающие одну окружность в точках B и C, а другую — в точках D и E. Доказать, что $BC \parallel DE$.

3. Теорема об отрезках касательной и секущей

Т е о р е м а. *Если через точку* M *проведена касательная к окружности в точке* A *и секущая, которая пересекает окружность в точках* B *и* C, *то* $MA^2 = MB \cdot MC$.

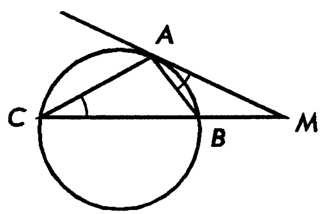


Рис. 140

○ Рассмотрим треугольники ABM и CAM (рис. 140). Угол ACB вписан в окружность, поэтому $\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\smile AB$, $\widehat{BAM} = \frac{1}{2}\smile AB$ как угол между касательной и хордой, следовательно, $\angle ACB = \angle BAM$. Таким образом, треугольники ABM и CAM подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AM}{CM} = \frac{BM}{AM}$, т. е. $AM^2 = BM \cdot CM$. ●

Следствие. *Если через точку M, внешнюю относительно окружности, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а вторая — в точках C и D, то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.*

§ 48. ЦЕНТР ПОДОБИЯ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ. РАДИКАЛЬНАЯ ОСЬ И РАДИКАЛЬНЫЙ ЦЕНТР

1. Центр подобия двух окружностей

В п. 1 § 40 было введено понятие гомотетии, которое, пользуясь отношением направленных отрезков (см. § 42, п. 2), можно определить следующим образом. Гомотетия с центром O и коэффициентом m есть преобразование, при котором точка O переходит в себя, а точка M, отличная от точки O, переходит в точку M' так, что $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = m$ или $\frac{\overline{M'O}}{\overline{OM}} = -m$. Это равенство можно записать так

$$(M'M, O) = -m. \tag{1}$$

Легко убедиться в том, что это равенство равносильно равенству

$$(MM', O) = -\frac{1}{m}. \tag{2}$$

В § 40 было доказано, что гомотетия является преобразованием подобия, следовательно, она обладает всеми свойствами подобия. В частности, при гомотетии с центром O и коэффициентом m, окружность с центром C радиуса r отображается на окружность с центром C' радиуса $|m|r$, где C' — образ точки C при данной гомотетии.

Точка O называется *центром подобия* двух окружностей, если существует гомотетия с центром O, при которой одна из окружностей отображается на другую. Если O — центр подобия двух окружностей с разными центрами C_1 и C_2, то, очевидно, точка O лежит на прямой C_1C_2. Возникает вопрос, любые ли две окружности имеют центр подобия и если имеют, то сколько таких центров подобия? Ответ на этот вопрос основан на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Если даны две точки A и B и действительное число λ, отличное от -1, то на прямой AB существует одна и только одна точка M такая, что $(AB, M) = \lambda$. При $\lambda = -1$ не существует точки M, удовлетворяющей этому условию.*

Предлагаем читателю, воспользовавшись леммой § 42 и указанием к задаче 306, самостоятельно доказать эту лемму.

Лемма 2. *Даны две окружности ω_1 и ω_2 с радиусами r_1 и r_2, центры C_1 и C_2 которых не совпадают. Точка O является центром подобия этих окружностей тогда и только тогда, когда $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$ или $(C_1C_2, O) = -\frac{r_1}{r_2}$.*

○ Предположим, что O — центр подобия окружностей ω_1 и ω_2. Тогда существует гомотетия f_1 с коэффициентом m_1, при которой $\omega_1 \mapsto \omega_2$, или другая гомотетия f_2 с коэффициентом m_2, при которой $\omega_2 \mapsto \omega_1$.

При гомотетии f_1: $C_1 \mapsto C_2$ и $r_2 = |m_1| r_1$. Отсюда следует, что $m_1 = \frac{r_2}{r_1}$ или $m_1 = -\frac{r_2}{r_1}$. Согласно формуле (2) $(C_1C_2, O) = -\frac{1}{m_1}$, поэтому $(C_1C_2, O) = -\frac{r_1}{r_2}$ или $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$. При гомотетии f_2: $C_2 \mapsto C_1$ и $r_1 = |m_2| r_2$. Отсюда следует, что $m_2 = \frac{r_1}{r_2}$ или $m_2 = -\frac{r_1}{r_2}$. По формуле (1) $(C_1C_2, O) = -m_2$, поэтому $(C_1C_2, O) = -\frac{r_1}{r_2}$ или $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$.

Обратно, пусть точка O прямой C_1C_2 удовлетворяет условию $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$ или $(C_1C_2, O) = -\frac{r_1}{r_2}$. Рассмотрим сначала первый случай. При гомотетии с центром O и коэффициентом $m = -\frac{r_1}{r_2}$, согласно формуле (1), точка C_1 является образом точки C_2, а окружность радиуса r_2 переходит в окружность радиуса $r_2' = r_2|m| = r_2\left|-\frac{r_1}{r_2}\right| = r_1$. Таким образом, при этой гомотетии $\omega_2 \to \omega_1$. Точно так же можно показать, что если точка O удовлетворяет условию $(C_1C_2, O) = -\frac{r_1}{r_2}$, то при гомотетии с центром O и коэффициентом $n = \frac{r_2}{r_1}$ имеем: $\omega_1 \to \omega_1$. ●

Теперь легко ответить на поставленный выше вопрос. Пусть ω_1 и ω_2 — данные окружности с радиусами r_1 и r_2, центры C_1 и C_2 которых не совпадают. Если $r_1 \neq r_2$, то согласно лемме 1 на прямой C_1C_2 существуют две и только две точки O и O', удовлетворяющие условиям $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$, $(C_1C_2, O') = -\frac{r_1}{r_2}$, поэтому согласно лемме 2 окружности имеют два и только два центра подобия. Если $r_1 = r_2$, то $\frac{r_1}{r_2} = -1$, поэтому по лемме 1 на прямой C_1C_2 существует только одна точка O, удовлетворяющая условию $(C_1C_2, O) = \frac{r_1}{r_2}$, следовательно, окружности имеют только один центр подобия, который совпадает с серединой отрезка C_1C_2. Итак, доказана теорема.

Теорема 1. *Даны две окружности с радиусами r_1 и r_2, центры C_1 и C_2 которых не совпадают. Тогда, если $r_1 \neq r_2$, то окружности имеют два и только два центра подобия, а если $r_1 = r_2$ — единственный центр подобия, который совпадает с серединой отрезка C_1C_2.*

Нетрудно доказать, что *две концентрические окружности имеют единственный центр подобия, который совпадает с их общим центром* (см. задачу 365).

2. Общая касательная к двум окружностям

Если даны две окружности, то прямая, которая является касательной как к одной, так и к другой окружности, называется общей касательной к этим окружностям. Общая касательная называется *внешней (внутренней)*, если центры данных окружностей лежат по одну сторону (по разные стороны) от этой касательной. Если общая касательная к двум окружностям не параллельна прямой, проходящей через центры O_1 и O_2 окружностей, то на ней лежит один из центров подобия этих окружностей (задача 368). Таким образом, на внутренней общей касательной всегда лежит один из центров подобия двух окружностей. Ясно, что этот центр подобия является точкой пересечения общей касательной и прямой O_1O_2.

Учитывая теорему 2 § 44 и предыдущую теорему, мы приходим к выводу, что *две окружности могут иметь не более чем четыре общие касательные.*

3. Радикальная ось и радикальный центр окружностей

Степенью произвольной точки M относительно данной окружности с центром O радиуса r называется число $k = MO^2 - r^2$. Ясно, что любая точка плоскости имеет степень относительно данной окружности. Из определения следует, что $k + r^2 = MO^2 \geqslant 0$, поэтому $k \geqslant -r^2$. Для центра O окружности $k_0 = -r^2$, для любой точки, принадлежащей внутренней области относительно окружности $k < 0$, для точек окружности $k = 0$, а для любой точки плоскости, принадлежащей внешней области $k > 0$.

Предлагаем читателю, воспользовавшись задачей 386, доказать теорему.

Теорема 2. *Множество всех точек плоскости, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных неконцентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через центры данных окружностей.*

Эта прямая называется *радикальной осью двух окружностей.*

Из этой теоремы следует, что если даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой, то на плоскости существует единственная точка, имеющая равные степени относительно данных окружностей (задача 391). Эта точка называется *радикальным центром трех окружностей.*

Радикальная ось двух окружностей и радикальный центр трех окружностей обладает рядом интересных свойств, некоторые из которых сформулированы в задачах 388—393.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IX

Окружность и ее свойства

329. Попарно различные окружности с центрами $O_1, O_2, \dots, O_k$, где $k \geqslant 2$, проходят через одну точку A и

в этой точке имеют общую касательную. Доказать, что: а) точки O_1, O_2, ..., O_k и A лежат на одной прямой; б) любые две из данных окружностей имеют единственную общую точку A.

330. Две окружности имеют общую точку A. Доказать, что если касательные в этой точке к данным окружностям совпадают, то A — единственная общая точка окружностей, а если касательные не совпадают, то данные окружности пересекаются.

331. Точки A и B являются соответственно внутренней и внешней точками относительно данной окружности. Доказать, что: а) любая окружность, проходящая через точки A и B, пересекает данную окружность в двух и только в двух точках; б) отрезок AB пересекает данную окружность в единственной точке.

332. Доказать, что две хорды окружности равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: а) они стягивают равные дуги, б) они равноудалены от центра окружности.

333. Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена произвольная секущая, пересекающая окружности в двух точках C и D. Доказать, что: а) мера угла CBD не зависит от выбора секущей, б) длина отрезка CD будет наибольшей, если $CD \parallel O_1O_2$.

334. Касательная к окружности в точке A параллельна хорде BC. Доказать, что: а) дуги AB и AC равны; б) точка A равноудалена от прямых BM и CM, где M — произвольная точка окружности, отличная от точек A, B и C.

335. К данной окружности с центром O проведены параллельные касательные a и b. Касательная к окружности в произвольной точке M, не лежащей на прямых a и b, пересекает эти прямые в точках A и B. Доказать, что: а) $\angle AOB$ — прямой; б) произведение $AM \cdot MB$ не зависит от выбора точки M.

336. Хорда AB окружности перпендикулярна к диаметру CD и пересекает его в точке O. Доказать, что перпендикуляр MM_1 к прямой AB, проведенный из точки M дуги ACB, отличной от точки C, меньше CO.

337. Доказать, что из всех треугольников с равными основаниями и равными углами при вершине мак-

симальную площадь имеет равнобедренный треугольник.

338. Две окружности касаются внешним образом в точке A. Данная прямая пересекает первую окружность в точках B и C, а вторую — в точках D и E, причем точки C и D лежат на отрезке BE. Найти сумму мер углов BAE и CAD.

339. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2, где $r_1 < r_2$, касаются внутренним образом в точке M. Прямая, проходящая через точку O_1, пересекает окружность с центром O_1 в точках B и C, а окружность с центром O_2 — в точках A и D, причем $A - B - C$. Найти $\frac{r_1}{r_2}$, если $AB : BC : CD = 2 : 4 : 3$.

340. Доказать, что если меньшие дуги окружности, стягиваемые двумя хордами AB и AC, имеют единственную общую точку A, то прямая, соединяющая середины этих дуг, отсекает на хордах AB и AC равные отрезки, считая от точки A.

341. Через точку D, лежащую вне окружности, проведены касательная DB в точке B и секущая, пересекающая окружность в точках A и C. Доказать, что $DA : DC = AB^2 : BC^2$.

342. Даны две пересекающиеся окружности равных радиусов, расстояние между центрами O_1 и O_2 которых равно d. Прямая, параллельная прямой O_1O_2, пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D, причем точки B и C лежат между точками A и D. Найти AC.

343. Даны две окружности равных радиусов, пересекающиеся в точках M и N. Прямая l, параллельная линии центров или совпадающая с ней и пересекающая отрезок MN, пересекает первую окружность в точках A и B, вторую — в точках C и D, причем точки B и C лежат между точками A и D. Доказать, что величина угла AMC не зависит от выбора прямой l.

344. Окружность пересекает две концентрические окружности, одну в точках A и B, другую — в точках C и D. Доказать, что прямые AB и CD параллельны и $AC = BD$, $AD = BC$.

345. В окружности радиуса R проведены две перпендикулярные хорды MN и PQ. Найти MP, если $NQ = a$.

346. Доказать, что сумма квадратов четырех отрезков, которые получаются при пересечении двух взаимно перпендикулярных хорд окружности, равна квадрату диаметра (задача Архимеда).

347. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке T. Доказать, что MT — биссектриса угла AMB.

348. Две окружности касаются внешним образом в точке D. Прямая касается одной из этих окружностей в точке A и пересекает вторую окружность в точках B и C. Доказать, что точка A равноудалена от прямых BD и CD.

349. Окружность касается боковых сторон равнобедренного треугольника ABC в точках M и P и пересекает основание BC в точках N и K. Найти AN и AK, если $AM = a$, $BM = b$.

350. Через точку A проведены к окружности касательная AT в точке T и секущая AN, где N — одна из точек пересечения окружности с этой секущей, $AT = 20$ *см*, $AN = 40$ *см*, а расстояние от центра O окружности до прямой AN равно 8 *см*. Найти радиус окружности.

351. Две окружности с радиусами r_1 и r_2 касаются внешним образом в точке A. Через точку B окружности радиуса r_1 проведена касательная к другой окружности в точке С. Найти BC, если $AB = a$.

352. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N. Найти MN и NC, если $AC = a$, $AB = b$.

353. Две окружности пересекаются в двух точках A и B. Доказать, что: а) через каждую из этих точек пересечения проходит единственная прямая, которая пересекает данные окружности в точках, симметричных относительно этой точки пересечения; б) если AA_1 и AB_1 — диаметры данных окружностей, то точки A_1, B_1 и B лежат на одной прямой.

354. Две окружности радиусов r_1 и r_2 пересекаются в двух точках, причем касательные к окружностям в этих точках перпендикулярны. Найти расстояние между центрами окружностей, длину отрезка общей

касательной, заключенного между точками касания, и длину общей хорды.

355. Две окружности радиусов R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A. Через произвольную точку B большей окружности, отличную от точки A, проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найти AB, если $BC = a$.

356. Три окружности равных радиусов проходят через одну точку и попарно пересекаются еще в трех точках. Доказать, что эти три точки лежат на окружности того же радиуса.

357. На отрезках AB, AC и BC, где C — середина отрезка AB, как на диаметрах построены три полуокружности, расположенные в одной полуплоскости с границей AB. Найти радиус окружности, которая касается трех построенных полуокружностей, если $AB = a$.

358. Две окружности радиусов r и R касаются сторон данного угла и друг друга. Найти радиус третьей окружности, касающейся сторон того же угла, центр которой совпадает с точкой касания данных окружностей.

359. В данной окружности проведены три хорды MA, MB и MC с общим концом M. Доказать, что точки, симметричные точке M относительно прямых AB, BC и CA, лежат на одной прямой.

360. В данной окружности проведены три хорды с общим концом. Доказать, что три окружности, построенные на этих хордах, как на диаметрах, попарно пересекаются в трех точках, лежащих на одной прямой.

361. Дана окружность с центром O и точка A на ней. Доказать, что множество середин всевозможных хорд AX данной окружности есть окружность (без точки A) с диаметром OA.

362. Доказать, что множество всех точек, отношение расстояний от каждой из которых до двух данных точек равно данному положительному числу, отличному от единицы, есть окружность.

363. Доказать, что множество всех точек, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек равна данному положительному числу, есть окружность, одна точка или пустое множество.

Центр подобия окружностей.
Общие касательные к двум окружностям

364. Точка C является центром подобия двух окружностей с неравными радиусами r_1 и r_2. Доказать, что существуют две гомотетии с центром C, одна из которых с коэффициентом m_1 переводит окружность радиуса r_1 в окружность радиуса r_2, а другая с коэффициентом m_2 переводит окружность радиуса r_2 в окружность радиуса r_1, причем $|m_1| = \frac{r_2}{r_1}$, а $|m_2| = \frac{r_1}{r_2}$.

365. Доказать, что две концентрические окружности имеют единственный центр подобия, совпадающий с их общим центром.

366. Доказать, что если центр подобия двух окружностей принадлежит одной из них, то он является общей точкой данных окружностей, и в этой точке окружности имеют общую касательную.

367. Прямая проходит через центр подобия двух окружностей и является касательной к одной из них. Доказать, что данная прямая является общей касательной к двум данным окружностям.

368. Доказать, что общая касательная к двум окружностям с центрами O_1 и O_2, не параллельная прямой O_1O_2, проходит через один из центров подобия этих окружностей.

369. Доказать, что если центр C подобия двух окружностей принадлежит: а) внутренней области относительно одной из данных окружностей, то C принадлежит также внутренней области относительно другой окружности; б) внешней области относительно одной из данных окружностей, то C принадлежит внешней области относительно другой окружности.

370. Доказать утверждения: а) если данная окружность ω целиком принадлежит внутренней области относительно другой окружности, то центры подобия этих окружностей принадлежат внутренней области относительно окружности ω; б) если каждая из двух окружностей принадлежит внешней области относительно другой окружности, то центры подобия этих окружностей принадлежат внешней области относительно этих окружностей.

371. Доказать, что две окружности, не имеющие общих точек, либо не имеют ни одной общей касатель-

ной, либо имеют четыре и только четыре общие касательные.

372. Доказать утверждения: а) две пересекающиеся окружности имеют две и только две общие касательные; б) две окружности, касающиеся друг друга, либо имеют только одну общую касательную, либо имеют три и только три общие касательные.

373. К двум окружностям, которые не имеют общих точек, проведены две общие внешние касательные A_1A_2 и B_1B_2 и общая внутренняя касательная C_1C_2, точки A_1, B_1 и C_1 принадлежат одной окружности, точки A_2, B_2 и C_2 — другой окружности. Доказать, что: а) прямая C_1C_2 пересекает прямые A_1A_2 и B_1B_2 соответственно в точках E_1 и E_2, причем E_1 — точка, лежащая на отрезке A_1A_2, а E_2 — на отрезке B_1B_2, и точки E_1 и E_2 не принадлежат отрезку C_1C_2; б) $A_1E_1 = E_1C_1 = C_2E_2 = E_2B_2$.

374. Доказать, что отрезок общей внешней касательной к двум окружностям, заключенный между общими внутренними касательными, равен отрезку общей внутренней касательной, заключенному между точками касания.

375. К двум окружностям, пересекающимся в точках A и B, проведена общая внешняя касательная CD в точках C и D. Найти сумму углов CAD и CBD.

376. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A проведены касательные к этим двум окружностям, пересекающие окружности в точках C и D. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

377. К двум окружностям с центрами O_1 и O_2, которые касаются внешним образом в точке A, проведена их общая внешняя касательная BC в точках касания B и C. Доказать, что: а) окружность, проходящая через точки A, B, C, касается прямой O_1O_2; б) угол BAC — прямой.

378. Две окружности радиусов r_1 и r_2 касаются внешним образом. Найти длину отрезка общей внешней касательной с концами в точках касания.

379. К двум окружностям, которые касаются внешним образом, проведена общая касательная в точках A и D. Из конца B диаметра AB одной окружности проведена касательная BM к другой окружности. Доказать, что $BM = AB$.

380. Окружности радиусов r_1 и r_2, где $r_1 > r_2$, касаются внешним образом. Найти радиус окружности, касающейся данных окружностей и их общей внешней касательной.

381. Точка A_1 лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC. В треугольники ABA_1 и ACA_1 вписаны окружности, касающиеся отрезка AA_1 в точках M и N. Найти MN, если $A_1B = b$, $A_1C = c$ и $c > b$.

382. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами соответственно $r_1 = 2$ *см*, $r_2 = 7$ *см* касаются внешним образом в точке C. Общая касательная к окружностям в точке C пересекает другую их общую касательную в точке D. Найти длины отрезков O_1D и O_2D.

Радикальная ось и радикальный центр окружностей

383. Доказать, что любое число k, где $k \geqslant -r^2$, является степенью некоторой точки плоскости относительно данной окружности радиуса r. Найти множество всех точек, каждая из которых имеет степень k относительно данной окружности с центром O радиуса r. Здесь k — данное действительное число, $k \geqslant -r^2$.

384. Степень точки M относительно данной окружности равна k. Доказать утверждения: а) если M — внешняя точка относительно окружности и через нее проведена секущая, пересекающая окружность в двух точках A и B, и касательная MT в точке T, то $k = AM \cdot BM = MT^2$; б) если M — внутренняя точка относительно окружности, то $k = -AM \cdot BM$.

385. Даны действительное число d и две окружности равных радиусов с различными центрами O_1 и O_2. Доказать, что на прямой O_1O_2 существует единственная точка, разность степеней которой относительно окружностей с центрами O_1 и O_2 равна d.

386. Пользуясь задачей 385, доказать, что множество всех точек плоскости, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек A и B равна данному действительному числу d, есть прямая, перпендикулярная к прямой AB.

387. Доказать, что множество всех точек, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных неконцентрических окружностей, есть прямая, перпендикулярная к прямой, проходящей через

центры данных окружностей (радикальная ось двух окружностей).

388. Доказать, что радикальная ось: а) двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения; б) двух касающихся друг друга окружностей является касательной в их общей точке; в) двух неконцентрических окружностей, не имеющих общих точек, не имеет общих точек с данными окружностями.

389. Даны окружность и точка A, не совпадающая с ее центром и не лежащая на окружности. Доказать, что множество всех точек M, каждая из которых удовлетворяет условию $MA = MT$, где MT — касательная к данной окружности в точке Т, есть прямая. Что представляет собой это множество, если точка A принадлежит окружности?

390. Даны две неконцентрические окружности. Найти множество всех точек плоскости, для каждой из которых отрезки касательных, соединяющих эту точку с точками касания, равны.

391. Доказать, что если центры трех окружностей не лежат на одной прямой, то на плоскости существует единственная точка, имеющая равные степени относительно данных окружностей (радикальный центр трех окружностей). Через эту точку проходят радикальные оси трех окружностей, взятых попарно.

392. Даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Доказать, что существует не более одной точки, из которой к данным окружностям можно провести три касательные так, чтобы отрезки касательных, соединяющие эту точку с точками касания, были равны. В каком случае существует такая точка?

393. Через точку A проведены к данной окружности две касательные AB и AC в точках B и C. На прямой, проходящей через середины отрезков AB и AC, взята произвольная точка M. Доказать, что отрезок касательной MK к данной окружности равен MA.

Глава X

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

§ 49. ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1. Описанный треугольник

Будем говорить, что отрезок касается окружности, если прямая, содержащая этот отрезок, является касательной к окружности и точка касания лежит на данном отрезке.

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то многоугольник называется *описанным около окружности,* а окружность — *вписанной в многоугольник.*

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема 1. *В любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность.*

○ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим через O точку пересечения его биссектрис (теорема 2 §17). Проведем из точки O перпендикуляры OK, OL и OM к прямым AB, BC и CA (рис. 141).

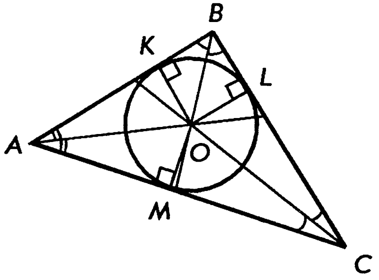


Рис. 141

Так как любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон, то $OK = OL = OM$, поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M.

Докажем, что эта окружность является вписанной в треугольник ABC. В самом деле, стороны треугольника касаются окружности, т. к. они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM, и точки K, L и M касания лежат на соответствующих сторонах треугольника. Например, точка K лежит на стороне AB, т. к. $\angle OAB$ и $\angle OBA$ — острые (лемма о перпендикуляре, проведенном из точки, лежащей на стороне угла, лемма 2 § 10). Аналогично, точки L и M лежат соответственно на сторонах BC и AC. Остается доказать, что окружность с центром O радиуса OK единственная окружность, вписанная в треугольник ABC. Допустим, что в этот треугольник вписана какая-то окружность с центром O_1, которая касается сторон AB, BC и CA соответственно в точках K_1, L_1 и M_1. Так как точки K_1 и M_1 лежат на сторонах угла BAC и $O_1K_1 = O_1M_1$, то точка O_1 лежит на биссектрисе этого угла (задача 1 § 17). Аналогично доказывается, что точка O_1 лежит на биссектрисах углов ABC и ACB. Таким образом, точка O_1 совпадает с точкой O и поэтому точки K_1, L_1 и M_1 совпадают соответственно с точками K, L и M. Итак, окружность с центром O радиуса OK совпадает с окружностью с центром O_1 радиуса O_1K_1. ●

2. Вписанный треугольник

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то многоугольник называется *вписанным* в эту окружность, а окружность — *описанной* около многоугольника. Прежде чем доказать теорему об окружности, описанной около треугольника, докажем следующую лемму.

Лемма. *Серединные перпендикуляры к сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке.*

○ Пусть ABC — произвольный треугольник, а l_1, l_2 и l_3 — серединные перпендикуляры соответственно к сторонам BC, CA и AB. Докажем сначала, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Допустим, что это не так, т. е. $l_1 \parallel l_2$ или прямые l_1 и l_2 совпадают. Тогда прямая BC, перпендикулярная к прямой l_1, перпендикулярна также к прямой l_2 (следствие теоремы 1 § 19). Мы пришли к выводу, что $l_2 \perp BC$, $l_2 \perp AC$. Но этот вывод противоречит теореме о перпендикулярных прямых.

Итак, прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке O. По теореме о серединном перпендикуляре к отрезку $OB = OC$, $OA = OC$, поэтому $OA = OB$. По этой же теореме точка O лежит на прямой l_3. Таким образом, O — общая точка прямых l_1, l_2 и l_3[1]. ●

Докажем теперь теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема 2. *Около любого треугольника можно описать одну и только одну окружность.*

○ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим через O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам (рис. 142).

По теореме о серединном перпендикуляре $OA = OB$ и $OB = OC$. Таким образом, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от вершин треугольника ABC. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит че-

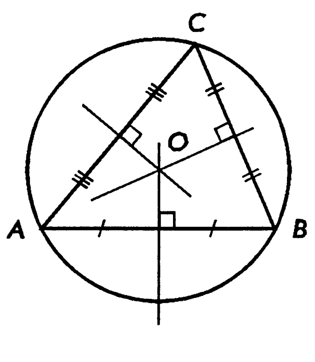


Рис. 142

[1] При доказательстве утверждения о том, что серединные перпендикуляры к двум сторонам треугольника пересекаются, мы существенно воспользовались аксиомой параллельных прямых (вернее, следствием теоремы 1 § 19). Можно доказать, что это утверждение эквивалентно аксиоме параллельных прямых. Интересно отметить, что аналогичные утверждения о пересечении двух биссектрис треугольника или двух медиан доказываются без аксиомы параллельных прямых, т. е. эти утверждения относятся к абсолютной геометрии (см. § 22).

рез все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC.

Остается доказать, что окружность с центром O радиуса OA — единственная окружность, описанная около треугольника ABC. Допустим, что около этого треугольника описана окружность с центром O_1. Так как $AO_1 = BO_1$, то точка O_1 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Аналогично, точка O_1 лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам BC и AC. Отсюда следует, что точка O_1 совпадает с точкой O, поэтому окружности с центрами O и O_1 совпадают. ●

3. Четыре замечательные точки треугольника

Теорема 3. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

○ Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 143). Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим новый треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника. Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$. Аналогично, $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$. Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 яв-

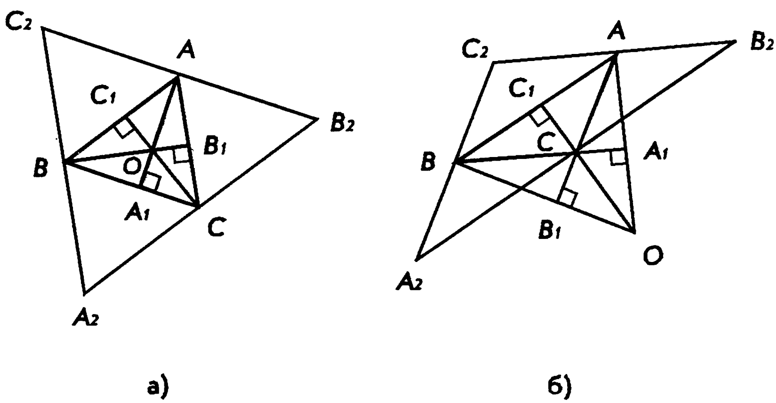


Рис. 143

ляются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Следовательно, они пересекаются в одной точке. ●

Предлагаем читателю, пользуясь теоремой 2 и построением, рассмотренным при доказательстве теоремы 3, самостоятельно доказать утверждение, сформулированное в п. 1 § 12: в остроугольном треугольнике точка O пересечения прямых AA_1, BB_1, CC_1 лежит на всех трех высотах треугольника ABC (рис. 143а), в тупоугольном треугольнике эта точка лежит на продолжениях трех высот (рис. 143б), а в прямоугольном треугольнике она совпадает с вершиной прямого угла.

Мы доказали, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке. В предыдущем пункте было доказано, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке. Ранее было доказано, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (теорема 2 § 17), а также медианы треугольника пересекаются в одной точке (задача 2 § 42).

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан, точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника. Эти четыре точки называются *замечательными точками треугольника.*

Отметим, что четыре замечательные точки треугольника не могут быть расположены на плоскости этого треугольника произвольно. Имеют место следующие свойства, которые мы предлагаем читателю доказать самостоятельно.

1^0. *В равностороннем треугольнике четыре замечательные точки совпадают. Обратно, если в треугольнике какие-нибудь две из четырех замечательных точек совпадают, то все четыре замечательные точки совпадают и треугольник является равносторонним.*

Для доказательства обратного утверждения следует использовать теорему 2 § 12.

2^0. *Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравностороннего треугольника, O — центр описанной около этого треугольника окружности, M — точка пересечения медиан треугольника. Тог-*

да: а) точки H, O и M лежат на одной прямой (прямая Эйлера[1]*); б) точка M принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2:1$, т. е. $\frac{HM}{MO} = 2$.*

3^0. *В треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков высот, заключенных между вершинами треугольника и точкой H пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, принадлежат одной окружности (окружность Эйлера).*

Если данный треугольник равносторонний, то центром окружности Эйлера является точка, с которой совпадают все четыре замечательные точки треугольника (см. 1^0), и в этом случае утверждение очевидно. В общем случае центром окружности Эйлера является середина отрезка OH, а радиус окружности равен $\frac{1}{2}R$, где O и R — центр и радиус описанной окружности. В этом случае для доказательства утверждения следует рассмотреть гомотетию с центром в точке пересечения медиан и коэффициентом $-\frac{1}{2}$, другую гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$ и использовать задачу 404.

§ 50. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ, ОПИСАННОЙ И ВНЕВПИСАННЫХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Вневписанная окружность треугольника

В предыдущем параграфе мы доказали, что с каждым треугольником связаны две окружности — вписанная окружность и описанная окружность. Здесь мы покажем, что с треугольником связаны еще три окружности, каждая из которых касается прямых, содержащих стороны треугольника, но не все точки касания лежат на сторонах треугольника.

Вневписанной окружностью треугольника называет-

[1] Эйлер Леонард (1707—1793) — выдающийся математик и физик. Он заложил основы вариационного исчисления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитическую теорию чисел и др. Он ввел обозначения для чисел e и π.

ся такая окружность, которая касается всех трех прямых, содержащих стороны треугольника, причем одна из точек касания лежит на стороне треугольника, а две другие точки касания — на продолжениях двух других сторон.

Докажем теорему о вневписанных окружностях треугольника.

Теорема. *Любой треугольник имеет три вневписанные окружности. Каждая сторона треугольника касается одной и только одной из этих окружностей.*

○ Пусть ABC — данный треугольник. Докажем, например, что существует вневписанная окружность такая, что сторона BC касается этой окружности.

Обозначим через BB' и CC' продолжения лучей BA и CA и рассмотрим биссектрисы AA_1 и BB_1 углов BAC и CBB' (рис. 144).

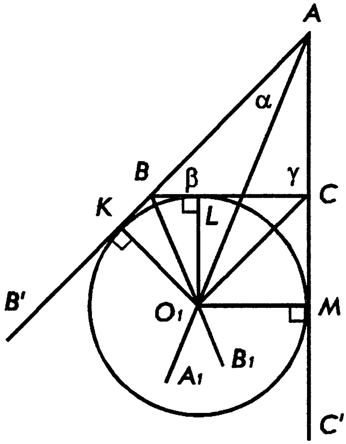


Рис. 144

Эти биссектрисы, согласно пятому постулату Евклида, пересекаются в некоторой точке O_1. В самом деле, если $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$, то $\widehat{B_1BA} + \widehat{BAA_1} =$ $= \beta + \frac{180^\circ - \beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ + \alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} < 180^\circ$.

Точка O_1 является внутренней точкой углов $B'BC$ и

BAC, поэтому она является также внутренней точкой угла BCC' (читателю предлагается обосновать это утверждение).

Проведем из точки O_1 перпендикуляры O_1K, O_1L и O_1M соответственно к прямым AB, BC и CA (см. рис. 144). Так как O_1 лежит на биссектрисе угла $B'BC$, то $O_1K = O_1L$. Аналогично, точка O_1 лежит на биссектрисе угла BAC, следовательно, $O_1K = O_1M$. Таким образом, $O_1K = O_1L = O_1M$. Отсюда следует, что окружность с центром O_1 радиуса O_1K проходит через точки L и M. Прямые AB, BC и CA касаются этой окружности, т. к. они перпендикулярны к радиусам O_1K, O_1L и O_1M. Далее, из равенства $O_1L = O_1M$ следует, что CO_1 — биссектриса угла BCC', поэтому точка L лежит на луче CB, а точка M — на луче CC'. Аналогично, BB_1 — биссектриса угла $B'BC$, поэтому точка L лежит на луче BC, а точка K — на луче BB'. Мы пришли к выводу, что L — точка, лежащая на стороне BC, а точки K и M — на продолжениях сторон AB и AC. Таким образом, окружность с центром O_1 радиуса O_1K является вневписанной окружностью треугольника ABC. ●

2. Формулы для вычисления площади треугольника

Пусть ABC — произвольный треугольник, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Тогда площадь S этого треугольника вычисляется по формулам:

$$S = pr, \tag{1}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \tag{2}$$

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c), \tag{3}$$

где r_a, r_b, r_c — радиусы соответствующих вневписанных окружностей.

Для вывода формулы (1) заметим, что если O центр вписанной окружности, то треугольник ABC разложен на треугольники ABO, BCO и CAO, поэтому $S = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CAO} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr$.

Для вывода формулы (2) воспользуемся теоремой 3

§ 29: $S = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$. Если $\widehat{A} = 90^\circ$, то $\sin \widehat{A} = 1$, $a = 2R$, поэтому формула (2) верна. Если же $\widehat{A} \neq 90^\circ$, то $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{A'} = \frac{a}{2R}$ (рис. 145), поэтому формула (2) также верна.

Для вывода формулы $S = r_a(p - a)$ следует выразить площадь S треугольника ABC через площади треугольников ABO_1, ACO_1 и BCO_1 (см. рис. 144). Предлагаем читателю доказать формулы (3) самостоятельно.

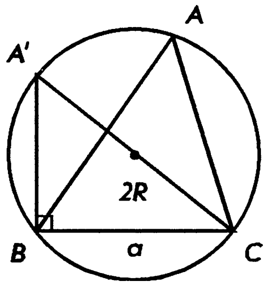


Рис. 145

§ 51. ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

1. Вписанный четырехугольник

Выясним необходимые и достаточные условия того, что около выпуклого четырехугольника можно описать окружность.

Теорема 1. *Около выпуклого четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов этого четырехугольника равна* 180°.

○ Допустим, что около четырехугольника $ABCD$ описана окружность (рис. 146). Тогда углы A и C являются вписанными в эту окружность и, следовательно,

$\widehat{A} = \frac{1}{2}\smile{BCD}$, $\widehat{C} = \frac{1}{2}\smile{BAD}$.

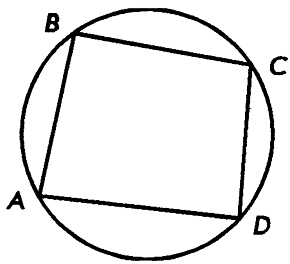


Рис. 146

Так как $\overset{\smile}{BCD} + \overset{\smile}{BAD} = 360^\circ$ (п. 1 § 46), то $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$. Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360°, следовательно, $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Рассмотрим теперь выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$, поэтому и $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$. Докажем, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

Рассмотрим окружность ω, описанную около треугольника ABC и докажем, что точка D лежит на этой окружности. Для этого заметим, что угол ABC вписан в окружность ω, поэтому $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AMC}$ (рис. 147). Но $\overset{\smile}{ABC} + \overset{\smile}{AMC} = 360^\circ$, следовательно, $\widehat{ABC} = 180^\circ - \frac{1}{2}\overset{\smile}{ABC}$. По условию $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Из двух последних равенств следует, что $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{ABC}$. Отсюда мы заключаем, что точка D лежит на окружности ω. В самом деле, если предположить, что D — точка, не лежащая на этой окружности, то по свойствам 1^0 и 2^0 § 47 имеем: $\widehat{ADC} \neq \frac{1}{2}\overset{\smile}{ABC}$ (см. рис. 147а,б). ●

Следствие 1. *Около параллелограмма можно описать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм является прямоугольником.*

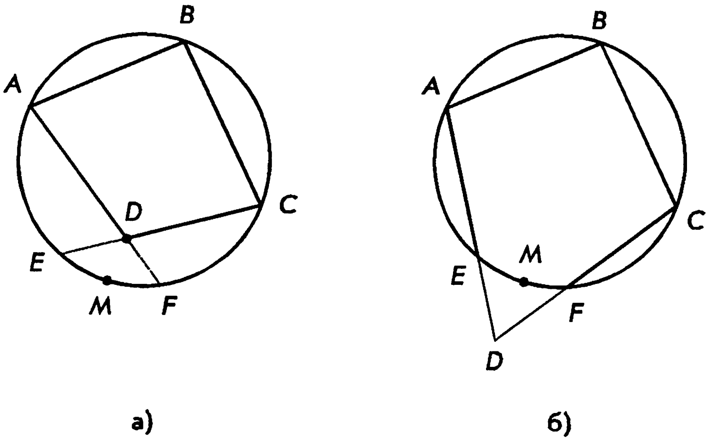


Рис. 147

Следствие 2. *Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция равнобедренная.*

В заключение отметим, что имеет место следующее интересное свойство, в котором устанавливается связь между диагоналями и сторонами вписанного четырехугольника.

Теорема Птолемея[1]. *В четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.*

○ Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, вписанный в окружность. Докажем, что

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \qquad (1)$$

Если прямые AC и BD являются осями симметрии четырехугольника $ABCD$, то он — ромб, а так как он вписан в окружность, то четырехугольник $ABCD$ — квадрат. В этом случае равенство (1) непосредственно следует из теоремы Пифагора.

Рассмотрим общий случай и предположим, что

[1] Птолемей Клавдий (2 в.) — древнегреческий ученый. Разработал так называемую геоцентрическую систему мира, согласно которой все видимые движения небесных светил объяснялись их движением вокруг неподвижной Земли. Основные труды по астрономии и географии.

$\angle ABD \neq \angle DBC$, например, $\angle ABD < \angle DBC$ (рис. 148). От луча BC в полуплоскость, содержащую точку D, отложим угол CBE, равный углу ABD, где E — точка на отрезке CA (см. рис. 148). Так как $\triangle CBE \sim \triangle DBA$, то $BC \cdot AD = CE \cdot BD$. Аналогично, $\triangle ABE \sim \triangle DBC$, поэтому $AB \cdot CD = AE \cdot BD$. Сложив эти два равенства и учитывая, что $AE + EC = AC$, получаем равенство (1). ●

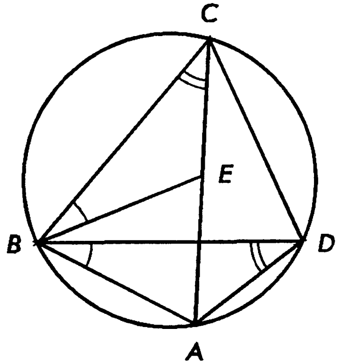


Рис. 148

2. Описанный четырехугольник

Рассмотрим теперь необходимые и достаточные условия того, что в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность.

Теорема 2. *В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.*

○ Предположим, что в выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, CD, DA соответственно в точках M, N, P и Q (рис. 149а). Тогда, очевидно, $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DQ$. Следовательно, $AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC$, т. е. $AB + CD = AD + BC$.

Предположим теперь, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ суммы его противоположных сторон равны, и докажем, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Проведем биссектрисы углов ABC и BAD. Так как $\overset{\frown}{CBA} + \overset{\frown}{BAD} < 360°$, то эти биссектрисы пересекаются в некоторой точке O (рис. 149б,в). По свойству биссектрисы угла точка O равноудалена от сторон углов ABC и BAD, следовательно, существует окружность с центром O, касающаяся отрезка AB и лучей BC и AD. Докажем, что эта окружность касается стороны CD.

Пусть это не так. Проведем касательную к построенной окружности, параллельную прямой CD, и обозначим через C_1 и D_1 точки пересечения этой касательной соответственно с лучами BC и AD. При этом из двух касательных к окружности выбираем ту, которая, пе-

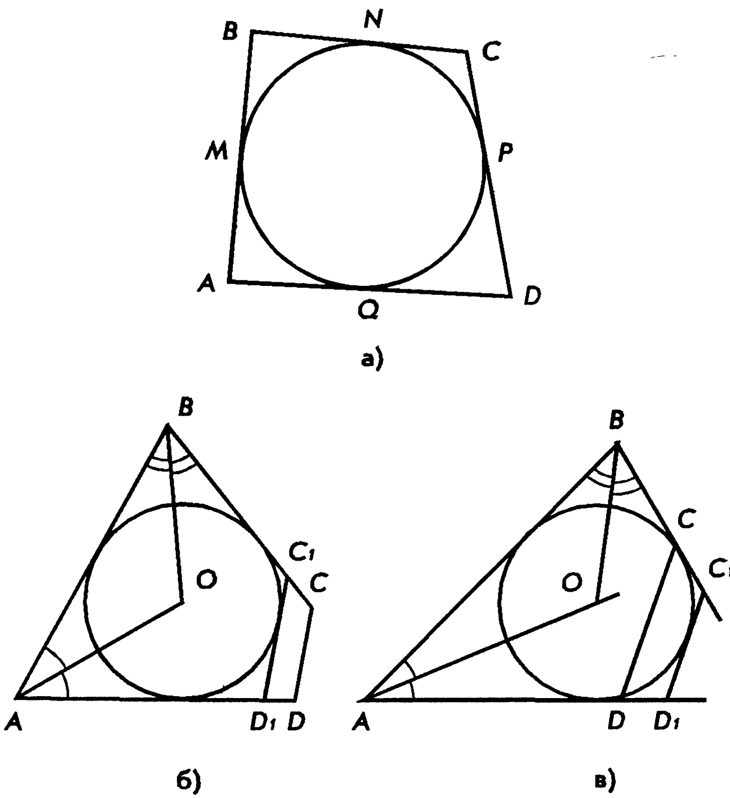


Рис. 149

ресекаясь с лучами BC и AD, образует четырехугольник ABC_1D_1, описанный около окружности. Прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью (рис. 149б), либо является секущей окружности (рис. 149б). Рассмотрим сначала первый из этих случаев. В данном случае $BC = BC_1 + C_1C$, $AD = AD_1 + D_1D$ (рис. 149а). По условию $AB + CD = AD + BC$, поэтому $AB + CD = AD_1 + D_1D + BC_1 + C_1C$.

Так как четырехугольник ABC_1D_1 описан около окружности, то по доказанному $BC_1 + AD_1 = AB + C_1D_1$. Таким образом, $AB + CD = AB + C_1D_1 + D_1D + C_1C$ или $CD = C_1D_1 + D_1D + C_1C$. Аналогично, в случае, когда прямая CD является секущей (рис. 149в), получаем: $C_1D_1 = CD + D_1D + C_1C$. Мы пришли к выводу, что одна сторона четырехугольника CDD_1C_1 равна сумме трех других сторон, что невозможно (см. теорему 3 § 23). Следовательно, окружность касается стороны CD, т. е. четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. ●

Следствие 1. *В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда этот параллелограмм является ромбом.*

Следствие 2. *В прямоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда этот прямоугольник является квадратом.*

§ 52. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Окружность, описанная около правильного многоугольника

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат.

По теореме о сумме углов выпуклого многоугольника угол правильного n-угольника равен $\frac{n-2}{n} \cdot 180°$.

Теорема 1. *Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.*

○ Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ правильный многоугольник, а A_1A_1' и A_2A_2' — биссектрисы углов A_1 и A_2 (рис. 150). Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\hat{1} = \hat{3} = \frac{\hat{A_1}}{2}$, следовательно, $\hat{1} + \hat{3} = \frac{n-2}{n} \cdot 180° < 180°$. Отсюда следует, что биссектрисы A_1A_1' и A_2A_2' углов A_1 и A_2 пересекаются в некоторой точке O. Докажем, что $OA_1 = OA_2 = OA_3 = \ldots = OA_n$. Треугольник OA_1A_2 равнобедренный, поэтому $OA_1 = OA_2$. По второму признаку равенства треугольников $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3$, следовательно, $OA_1 = OA_3$. Аналогично доказывается, что $OA_2 = OA_4$ и т. д. Таким образом, точка O равноудалена от всех вершин многоугольника, поэтому окружность с центром O радиуса OA_1 является описанной около многоугольника.

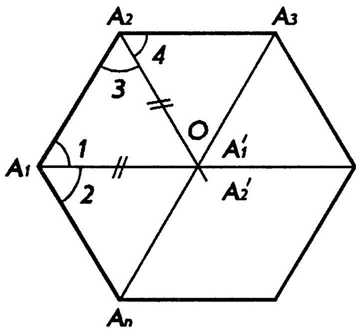


Рис. 150

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например, A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ нельзя описать более чем одну окружность. ●

З а м е ч а н и е. Описанную окружность можно использовать для доказательства существования правильного n-угольника при любом натуральном n, где $n > 2$ и для построения тех правильных многоугольников, которые можно построить циркулем и линейкой. В самом деле, возьмем какую-нибудь окружность с центром O и проведем радиусы OA_1, OA_2, ..., OA_n этой окружности так, чтобы $\widehat{A_1OA_2} = \widehat{A_2OA_3} = \ldots = \widehat{A_{n-1}OA_n} = \widehat{A_nOA_1} = \frac{360^\circ}{n}$ (рис. 151). Такие радиусы существуют согласно теореме 2 § 15 и аксиоме III_7. Если теперь провести отрезки A_1A_2, A_2A_3 ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, то легко доказать, что получаем правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$.

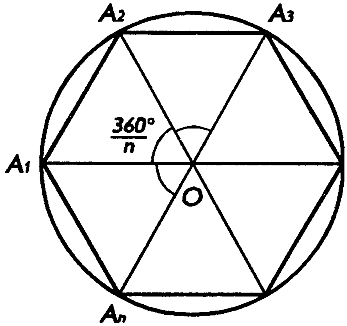


Рис. 151

2. Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Теорема 2. *В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.*

○ Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 152). Так как $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \ldots = \ldots = \triangle OA_nA_1$ (см. доказательство теоремы 1), то высоты этих треугольников равны: $OH_1 = OH_2 = \ldots = OH_n$. Следовательно, окружность с центром O радиуса OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность является вписанной в данный правильный многоугольник.

Докажем, что вписанная окружность только одна. Предположим, что имеется какая-то окружность с центром O', вписанная в многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$. Пусть H_1' и H_2' точки касания на сторонах A_1A_2 и A_2A_3. Так как $O'H_1' = O'H_2'$, то точка O' лежит на биссектрисе угла A_2 (задача 1 § 17). Точно так же можно доказать,

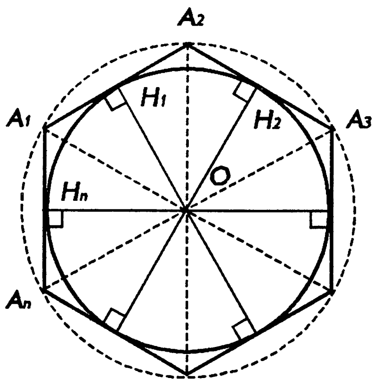


Рис. 152

что точка O' лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника. Так как O — точка пересечения этих биссектрис, то точки O' и O совпадают. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, окружности с центрами O и O' совпадают. ●

Следствие 1. *Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.*

Следствие 2. *Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.*

Эта точка называется *центром правильного многоугольника.*

3. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, стороны и радиуса вписанной окружности

Докажем, что площадь S правильного n-угольника, сторона a_n и радиус r вписанной в него окружности связаны с радиусом R описанной окружности и периметром P соотношениями:

$$S = \frac{1}{2}Pr, \qquad (1)$$

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Рассмотрим правильный многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ с центром O. Для вывода формулы (1) соединим точку O с вершинами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ отрезками (рис. 151). Тогда многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ разложится на n равных друг другу равнобедренных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_nr$. Поэтому $S = \frac{1}{2}na_n r = \frac{1}{2}Pr$.

Для вывода формул (2) и (3) рассмотрим перпендикуляр OH_1, проведенный к прямой A_1A_2 (рис. 152). Так как $\widehat{A_1} = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$, то в прямоугольном треугольнике OA_1H_1 $\widehat{OA_1H_1} = \frac{n-2}{2n} \cdot 180° = 90° - \frac{180°}{n}$. Следовательно, $a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = 2R\sin\frac{180°}{n}$. Далее, $r = OH_1 = R\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right) = R\cos\frac{180°}{n}$.

§ 53. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

1. Длина окружности

Длина окружности является одним из важнейших понятий элементарной геометрии. Интуитивно ясно, что периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение.

Мы исходим из следующего определения. *Длиной окружности* называем предел, к которому стремятся периметры правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон. Мы сейчас докажем, что этот предел существует.

Можно доказать, что к этому же пределу стремятся периметры вписанных в окружность многоугольников (не обязательно правильных) при неограниченном увеличении числа их сторон и при стремлении к нулю длин всех сторон многоугольников. Таким образом, данное выше определение длины окружности полностью согласуется с общим определением длины дуги кривой, которым пользуются в курсе математического анализа.

Докажем, что *каждая окружность имеет определенную длину*.

Пусть P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в данную окружность радиуса R. Рассмотрим бесконечную последовательность

$$P_3,\ P_4,\ P_5,\ \ldots,\ P_n\ \ldots \qquad (1)$$

Эта последовательность является возрастающей, так как $P_k < P_{k+1}$ при любом $k \geqslant 3$. В самом деле, по формуле (2) § 52 $P_k = k\,2R \sin \frac{180^\circ}{k}$, $P_{k+1} = (k+1)\,2R \sin \frac{180^\circ}{k+1}$. При любом $k \geqslant 3$ имеем[1]: $k \sin \frac{180^\circ}{k} < (k+1) \sin \frac{180^\circ}{k+1}$, поэтому $P_k < P_{k+1}$.

Последовательность (1) является ограниченной, так как если, например, P периметр треугольника, внутри которого лежит данная окружность, то для любого k имеем $P_k < P$ (см. задачу 2 § 24). Следовательно, по известной из курса математического анализа теореме Вейерштрасса (см. [25]) последовательность (1) имеет предел. Так как все члены этой последовательности положительные числа, а сама последовательность возрастающая, то этот предел является положительным числом. По определению предел последовательности (1) есть длина данной окружности.

2. Формула для вычисления длины окружности

Для того чтобы выразить длину окружности через ее радиус, докажем следующую теорему.

Теорема. *Отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же число для всех окружностей.*

○ Пусть C и C' — длины окружностей с центрами O и O' и радиусами R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P_n' их периметры, а через a_n и a_n' их стороны (рис. 153). Так как $P_n = n \cdot a_n$; $P_n' = n \cdot a_n'$, то $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{a_n}{a'_n}$. Заметим, что $\frac{a_n}{a'_n} = \frac{R}{R'}$. Действительно, $\triangle OA_1A_2 \sim \triangle OA_1'A_2'$ по первому признаку подобия треугольников, откуда следует указанное равенство. Итак,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{R}{R'}. \tag{2}$$

Отметим, что это равенство справедливо при любом значении n. Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P_n' \to C'$ при $n \to \infty$, то по из-

[1] При $k = 3$ это неравенство очевидно. Действительно, $3 \sin 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $4 \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$. Так как $\frac{3}{2}\sqrt{3} < 2\sqrt{2}$, то $3 \sin 60^\circ < 4 \sin 45^\circ$. Для любого $k > 3$ неравенство можно доказать методом математической индукции.

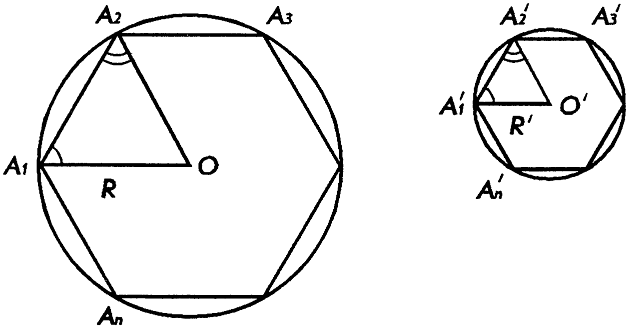


Рис. 153

вестной теореме из курса математического анализа при $n \to \infty$ получаем : $\lim \frac{P_n}{P_n'} = \frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (2) этот предел равен $\frac{R}{R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$, поэтому $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$, откуда следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$. ●

Отношение $\frac{C}{2R}$ принято обозначать греческой буквой π: $\frac{C}{2R} = \pi$. Из этого равенства получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R. \qquad (3)$$

Доказано, что число π является трансцендентным числом. Оно представляется бесконечной непериодической десятичной дробью, первые его десятичные знаки таковы: $\pi = 3{,}141592653589792...$ На практике при решении задач обычно пользуются приближенным значением π с точностью до 0,01, т. е. $\pi \approx 3{,}14$.

Замечание. Периметр каждого из вписанных в данную окружность правильных многоугольников позволяет найти приближенное значение π с недостатком, причем это значение дает тем лучшее приближение, чем больше число сторон. Например, по формуле (2) § 52 находим: $a_6 = 2R \sin \frac{180^\circ}{6} = R$, откуда следует, что $P_6 = 6 \cdot R$, поэтому $\pi \approx \frac{6R}{2R}$ или $\pi \approx 3$. По той же формуле находим: $a_{12} = 2R\sin\frac{180°}{12} = 2R\sin 15° \approx$ $\approx 2R\ 0{,}2588$. Отсюда следует, что $\pi \approx \frac{12 \cdot a_{12}}{2R} \approx 3{,}1056$.

Древнегреческий геометр Архимед, который первым определил и вычислил длину окружности, нашел приближенное значение π с избытком с точностью до $0{,}002$: $\pi \approx \frac{22}{7}$. Это значение носит название Архимедова числа.

3. Длина дуги окружности

Аналогично длине окружности можно ввести понятие длины дуги окружности. При этом вместо вписанного в окружность правильного многоугольника можно рассматривать вписанные в дугу окружности ломаные (строгое определение понятия длины дуги кривой приведено в курсе математического анализа [25]).

Выведем формулу для нахождения длины l дуги ALB с градусной мерой α окружности радиуса R. Для этого воспользуемся утверждением, которое вытекает из понятия меры дуги: отношение длин двух дуг одной и той же окружности равно отношению числовых значений их градусных мер.

Пусть AMB другая дуга той же окружности с концами A и B (рис. 154), а l' — ее длина. Так как $\smile{ALB} = \alpha$, $\smile{AMB} = 360 - \alpha$, то $l' : l = (360 - \alpha) : \alpha$. Но $l' + l = 2\pi R$, поэтому $(2\pi R - l) : l = (360 - \alpha) : \alpha$, $2\pi R : l = 360 : \alpha$. Отсюда получаем:

$$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha. \tag{4}$$

4. Радианная мера угла

В § 15 мы отметили, что в качестве единицы измерения углов может быть принят любой неразвернутый угол. Наряду с градусным измерением углов в математике применяется также радианное измерение углов. В этом случае за единицу измерения углов принимается такой центральный угол, что соответствующая дуга, расположенная внутри этого угла, имеет длину, равную радиусу окружности. По формуле

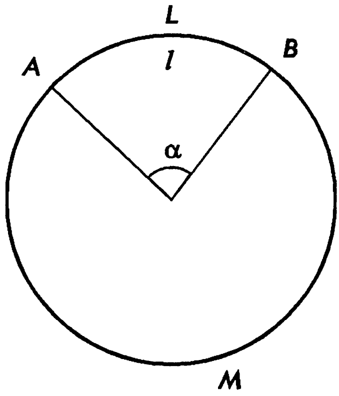


Рис. 154

(4) получаем градусную меру этого угла: $R = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha^\circ$, $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ\ 17'44''$.

Пусть AOB — произвольный угол, градусная мера которого равна α, а радианная мера равна φ. Рассмотрим окружность с центром O радиуса R. Не нарушая общности, будем считать, что точки A и B являются точками пересечения этой окружности с соответствующими сторонами угла AOB. Тогда если l длина дуги AB, расположенной внутри угла AOB, то, очевидно, $\varphi = \frac{l}{R}$. По формуле (4) получаем связь между φ и α: $\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$. Из формулы $\varphi = \frac{l}{R}$ получаем выражение длины дуги окружности, если соответствующий центральный угол измеряется в радианах: $l = R\,\varphi$.

§ 54. ПЛОЩАДЬ КРУГА

1. Площадь круга

Пусть на плоскости дана окружность с центром O радиуса R (рис. 155). Фигура, состоящая из всех внутренних точек относительной этой окружности и точек самой окружности называется *кругом с центром O радиуса R*. Сама окружность называется *границей круга*.

На рис. 155 внутренняя область этого круга заштрихована.

Интуитивно ясно, что площадь любого правильного многоугольника, вписанного в границу данного круга, является приближенным значением площади круга. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение.

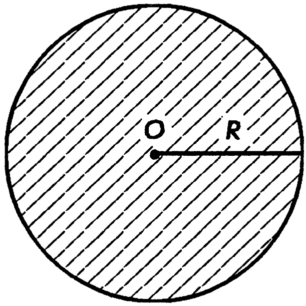


Рис. 155

Мы исходим из следующего определения. *Площадью круга* называется предел, к которому стремятся площади правильных многоугольников, вписанных в границу данного круга при неограниченном увеличении числа сторон. Мы сейчас докажем, что этот предел существует.

В курсе математического анализа [25] доказывается, что к этому же пределу стремятся площади вписанных в границу круга многоугольников (не обязательно правильных) при неограниченном увеличении числа их сторон и при стремлении к нулю длин всех сторон многоугольников.

Докажем, что *каждый круг имеет определенную площадь.*

Пусть S_n площадь правильного n-угольника, вписанного в границу данного круга радиуса R. Обозначим через P_n периметр этого n-угольника, а через r_n — радиус вписанной окружности.

Рассмотрим бесконечные последовательности

$$P_3, P_4, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}r_3,\ \frac{1}{2}r_4,\ \ldots,\ \frac{1}{2}r_n,\ \ldots \qquad (2)$$

При $n \to \infty$ последовательность (1), как мы знаем, имеет предел, равный $2\pi R$. Так как $r_n = R\cos\frac{180^\circ}{n}$ (см. (3) § 52), то при $n \to \infty$ последовательность (2) также имеет предел, равный $\frac{1}{2}R$.

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность

$$S_3,\ S_4,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots \qquad (3)$$

По формуле (1) § 52 $S_n = \frac{1}{2}P_n \cdot r_n = P_n\left(\frac{1}{2}r_n\right)$, поэтому, как известно из курса математического анализа, при $n \to \infty$ последовательность (3) имеет предел, равный произведению пределов последовательностей (1) и (2), т. е. равный числу πR^2. Таким образом, площадь данного круга существует и вычисляется по формуле:

$$S = \pi R^2. \qquad (4)$$

2. Площадь кругового сектора

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется *дугой сектора.* На рис. 156 изображены два сектора с дугами ALB и AMB, первый из секторов заштрихован.

Аналогично площади круга можно определить понятие площади сектора (строгое определение этого понятия приведено в курсе математического анализа [25]).

Выведем формулу для нахождения площади S_c сектора с радиусом R, ограниченного дугой ALB с градусной мерой α и радиусами OA и OB (рис. 156). Для этого воспользуемся утверждением, доказательство которого мы опускаем: отношение площадей двух секторов одного и того же круга равно отношению градусных мер дуг соответствующих секторов.

Пусть AMB дуга другого сектора того же круга, ограниченного радиусами AO и OB (рис. 156), а S_c' — его площадь. Так как $\smile{ALB} = \alpha$, то $\smile{AMB} = 360 - \alpha$, по-

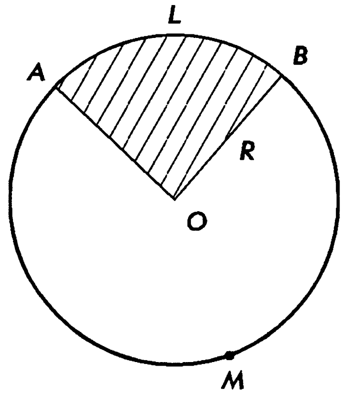


Рис. 156

этому $S_c' : S_c = (360 - \alpha) : \alpha$. Но $S_c' + S_c = \pi R^2$, поэтому $(\pi R^2 - S_c) : S_c = (360 - \alpha) : \alpha$, $\pi R^2 : S_c = 360 : \alpha$. Отсюда получаем:

$$S_c = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \text{ или } S_c = \frac{1}{2} R l. \qquad (5)$$

Здесь l — длина дуги сектора (см. (4) § 53).

3. Площадь кругового сегмента

Круговым сегментом называется часть круга, ограниченная дугой и стягивающей ее хордой. Дуга, которая ограничивает сегмент, называется *дугой сегмента*. На рис. 157а изображены два сегмента, один из которых заштрихован.

Пусть $S_{сег}$ — площадь сегмента круга с центром O радиуса R, отличного от полуокружности, а $\smile{AMB}$ — дуга этого сегмента. Тогда, учитывая формулу (5), получаем: $S_{сег} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \pm S_\Delta$, где S_Δ — площадь треугольника OAB. Знак «$-$» берется в случае, когда $\smile{AMB}$ меньше полуокружности (рис. 157а), а знак «$+$» в случае, когда дуга $\smile{AMB}$ больше полуокружности (рис. 157б).

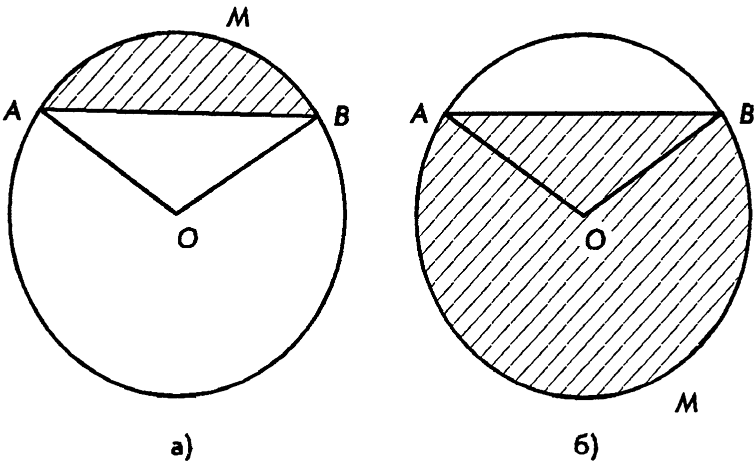


Рис. 157

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ X

394. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. а) Найти расстояния от каждой вершины треугольника до точек касания. б) Найти стороны и углы треугольника $A_1B_1C_1$. в) Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку (точка Жергона[1]).

395. Найти радиусы окружностей, вписанной и описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно a, а угол, противоположный основанию, равен α.

396. Центр O описанной около треугольника ABC окружности не лежит на сторонах AB и AC. Доказать, что $\angle HAB = \angle OAC$, где H — основание высоты AH треугольника.

397. Найти угол при данной вершине треугольника, если расстояние от этой вершины до точки пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, равно радиусу описанной окружности.

---

[1] Жергон Жозеф (1771—1859) — французский астроном и математик.

398. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC $AB \cdot AC = 2R \cdot AH$, где R — радиус описанной окружности, а AH — высота треугольника.

399. В треугольник вписана окружность. Точки касания ее с двумя сторонами соединены отрезком. Во вновь образованный треугольник вписана окружность. Доказать, что центр второй окружности лежит на первой окружности.

400. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Доказать, что треугольник BOD — равнобедренный, где O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

401. Биссектрисы углов A, B, C треугольника ABC пересекают описанную около треугольника окружность соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

402. Доказать, что в остроугольном треугольнике сумма расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.

403. Доказать, что если в неравностороннем треугольнике ABC угол A равен 60°, то прямая Эйлера (см. свойство 2^0 § 49) пересекает прямые AB и AC под углами 60°.

404. Доказать, что середина отрезка, соединяющего любую точку окружности, описанной около треугольника с точкой H пересечения прямых, содержащих его высоты, принадлежит окружности Эйлера (см. свойство 3^0 § 49).

405. Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, O_1, O_2, O_3 — центры окружностей, описанных около треугольников AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1, а M_1, M_2, M_3 — центры окружностей, вписанных в те же треугольники. Доказать, что треугольники $O_1O_2O_3$ и $M_1M_2M_3$ равны.

406. Точки C_1 и C_2 симметричны вершине C треугольника ABC относительно прямых, содержащих соответственно биссектрисы углов A и B. Доказать, что середина отрезка C_1C_2 есть точка касания вписанной в треугольник окружности и стороны AB.

407. Доказать, что если r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник, а h_1, h_2, h_3 — высоты этого треугольника, то $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}$.

408. К данной окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. В полученные треугольники вписаны окружности с радиусами r_1, r_2, r_3. Найти радиус данной окружности.

409. Доказать, что если разность между суммой двух сторон треугольника и его третьей стороной равна диаметру вписанной окружности, то треугольник — прямоугольный.

410. Точки M_1, M_2, M_3 — основания перпендикуляров, проведенных из точки M пересечения медиан треугольника ABC к прямым BC, CA, AB. Найти площадь треугольника $M_1M_2M_3$, если $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

411. Радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей треугольника равны соответственно R, r, r_a, r_b, r_c. Доказать, что: а) площадь треугольника равна $\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$; б) $4R + r = r_a + r_b + r_c$; в) $d^2 = R^2 - 2Rr$. Здесь d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

412. Вневписанные окружности треугольника ABC со сторонами $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ и углами $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$ касаются сторон BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Первая из окружностей касается продолжений сторон AB и AC соответственно в точках C_2 и B_2. а) Найти AC_2, BA_1, CB_2. б) Найти стороны и углы треугольника $A_1B_2C_2$. в) Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через одну точку (точка Нагеля[1]).

413. Площадь прямоугольного треугольника равна 6 *см*^{2}, а радиус вневписанной окружности, касающейся одного из катетов, равен 3 *см*. Найти стороны треугольника.

414. Произвольная точка M окружности, описанной около правильного треугольника ABC, соединена с его

[1] Нагель Христиан Август (1821—1903) — немецкий геодезист и математик.

вершинами. Доказать, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

415. Доказать, что любой многоугольник, вписанный в окружность, является выпуклым.

416. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, где AD — диаметр окружности. Найти радиус этой окружности, если $AB = 2\sqrt{5}$ *м*, $BC = 2\sqrt{5}$ *м*, $CD = 6$ *м*.

417. Доказать, что в равнобедренную трапецию с перпендикулярными диагоналями нельзя вписать окружность.

418. В трапецию, основания которой равны 6 *см* и 21 *см*, а одна из боковых сторон равна 14 *см*, вписана окружность. Найти ее радиус.

419. Доказать, что если диагонали четырехугольника, вписанного в окружность, перпендикулярны и пересекаются в точке M, то прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная к одной из его сторон, проходит через середину противоположной стороны.

420. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Зная, что $AB = a$, $AC = b$, $AD = 2a$, $CD = 2BC$, найти BC.

421. Доказать, что если прямая, соединяющая противоположные вершины вписанного в окружность четырехугольника, проходит через точку пересечения касательных, проведенных в двух других его вершинах, то произведение противоположных сторон четырехугольника равно произведению двух других сторон.

422. Противоположные стороны выпуклого четырехугольника продолжены до пересечения, и около образовавшихся четырех треугольников описаны окружности. Доказать, что все эти окружности проходят через одну точку.

423. Биссектрисы углов выпуклого четырехугольника, пересекаясь попарно, образуют вершины некоторого четырехугольника. Доказать, что около этого четырехугольника можно описать окружность.

424. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AD и BC пересекаются в точке M, а прямые AB и CD — в точке N. Доказать, что если биссектрисы углов AMB и BNC перпендикулярны, то около данного четырехугольника можно описать окружность.

425. Дан правильный десятиугольник $A_1A_2 \ldots A_{10}$,

вписанный в окружность с центром O. Доказать, что $A_1A_4 = A_1O + A_1A_2$.

426. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного n-угольника, до прямых, содержащих все его стороны, не зависит от выбора точки.

427. Доказать, что любые две диагонали правильного пятиугольника, не имеющие общего конца, пересекаются, и найти отношение, в котором точка пересечения делит каждую из них.

428. Фигура F образована пересечением четырех кругов с центрами в вершинах данного квадрата и радиусами, равными стороне a квадрата. Найти длину границы фигуры F.

429. В сегмент с дугой, равной 120°, вписана окружность[1], касающаяся этой дуги в ее середине. Найти отношение длины окружности к длине дуги сегмента.

430. В сегмент вписана окружность, которая касается дуги и хорды сегмента в точках A и B. Доказать, что прямая AB проходит через некоторую точку M_0, не зависящую от выбора вписанной в сегмент окружности.

431. Полуокружность с концами A и B радиуса R точками C и D разделена на три равные дуги. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками AC и AD и дугой CD.

432. Точка пересечения медиан равностороннего треугольника со стороной a является центром круга радиуса $\frac{a}{3}$. Найти площадь фигуры, образованной пересечением круга и треугольника.

433. На сторонах правильного треугольника со стороной a, как на диаметрах, построены три круга. Найти площадь фигуры, образованной пересечением этих кругов.

434. На перпендикулярных радиусах OA и OB сектора AOB внутри него, как на диаметрах, построены полуокружности, пересекающиеся в точке C. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами AB, AC, BC.

435. Окружности радиусов 3 *см* и 1 *см* касаются внешним образом в точке C. Их общая внешняя каса-

---

[1] Будем говорить, что окружность вписана в сегмент, если она касается дуги сегмента и его хорды.

тельная касается окружностей в точках A и B. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезком AB и дугами AC и BC.

436. Найти площадь круга, касающегося двух сторон равностороннего треугольника со стороной, равной 18 *см*, и окружности, вписанной в этот треугольник.

437. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Фигура F образована пересечением трех кругов, два из которых имеют радиус a и центры C и D, а третий круг построен на диаметре AB. Найти площадь круга, вписанного в фигуру F, т. е. касающегося трех дуг, ограничивающих фигуру F.

438. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $\widehat{B} = \alpha$. Доказать, что площадь четырехугольника вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha$.

439. Доказать, что площадь четырехугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где p — полупериметр, а a, b, c и d — стороны четырехугольника.

440. Доказать, что если около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность, то его площадь вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{abcd},$$

где a, b, c и d — стороны четырехугольника.

441. На окружности взяты шесть точек A, B, C, D, E и F так, что прямые AB и DE, BC и EF, CD и FA пересекаются соответственно в точках L, M и N. Доказать, что эти точки лежат на одной прямой (теорема Паскаля[1]).

[1] Паскаль Блез (1623—1662) — французский математик, физик и философ. Сформулировал одну из основных теорем проективной геометрии.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

1. При $n = 4$ — 6 точек, при $n = 5$ — десять точек.

2. 15 углов.

4. Указание. Воспользоваться теоремой о делении отрезка (§ 3, теорема 1).

6. Указание. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от принадлежности точек C и D полуплоскостям с границей a, содержащим соответственно точки A и B.

8. Указание. Воспользоваться леммой § 4.

9. Указание. Воспользоваться задачей 8.

10. Указание. Учесть, что все точки, лежащие на отрезке AB, являются внутренними точками угла AOB.

11. Указание. Воспользоваться задачами 9 и 10.

12. Указание. Учесть, что данный отрезок пересекает хотя бы одну из прямых, содержащих стороны угла.

13. Указание. Задача решается аналогично задаче 7 с применением задачи 12.

14. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 3 (теорема 2 § 4).

15. Указание. Воспользоваться свойством 1^0 §5 и аксиомой III_4.

17. Указание. Воспользоваться аксиомами III_7, III_6 и свойством 4^0 §5.

18. Указание. а) Воспользоваться свойствами 3^0 и 4^0 § 5 и свойством 5^0 §5; б) воспользоваться утверждением а).

21. Указание. а) Воспользоваться теоремой 1 § 4; б) воспользоваться утверждением а).

22. Указание. Пусть hk и lf — данные углы. Рассмотреть смежные углы hk и $h'k$, пользуясь задачей 21б, доказать, что $\angle hk + \angle lf$ существует тогда и только тогда, когда $\angle lf \leqslant \angle h'k$.

24. Указание. Провести луч k', дополнительный к лучу k_1, и доказать, что лучи k' и k_2 совпадают.

25. Указание. Воспользоваться задачей 23в.

26. Указание. Воспользоваться свойствами 5^0, 4^0, 6^0 § 6.

27. Указание. Воспользоваться задачей 21б.

28. Указание. Предположить, что $\angle hl$ — прямой или тупой, и доказать, что $\angle lk$ — острый. Для этого провести луч h', дополнительный к лучу h, и воспользоваться задачами 21б и 27.

29. Указание. Доказать методом от противного, используя теорему 2 § 3.

31. Указание. Рассмотреть два случая в зависимости от того, проходит ли данная прямая через какую-нибудь вершину треугольника или нет. Во втором случае воспользоваться предложением Паша (§ 9, п. 1).

32. Указание. Сначала решить задачу для случая, когда данная ломаная состоит из одного звена. В этом случае можно воспользоваться задачей 31.

34. Указание. На продолжении луча BA отложить отрезок BD, равный BC, а на продолжении луча B_1A_1 — отрезок B_1D_1, равный B_1C_1. Сначала доказать, что $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

35. Да. а) Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB, а D — точка такая, что $A - B - D$, $BD \neq BC$. Тогда неравные треугольники ACD и BCD удовлетворяют условиям задачи; б) пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB, D — точка на стороне BC такая, что $AB = AD$. Тогда неравные треугольники ABC и ABD удовлетворяют условиям задачи.

36. Указание. Воспользоваться теоремой о внешнем угле треугольника.

37. Указание. б) Сначала доказать, что $\triangle ABA' = \triangle A_1B_1A_1'$, где A' и A_1' — точки такие, что M — середина отрезка AA', а M_1 — середина отрезка A_1A_1'.

38. а) Да; б) да.

39. Указание. Воспользоваться задачами 33 и 18б.

40. Указание. Доказать методом от противного.

42. Указание. Воспользоваться задачей 22.

43. Указание. Провести биссектрису угла B.

44. Указание. Провести биссектрису того острого угла, который вдвое больше другого.

46. Указание. Рассмотреть наложение, при котором луч AB переходит в себя, а луч AE_1 — в луч AE_2.

47. Указание. Воспользоваться задачей 28.

48. Указание. Утверждение о том, что биссектрисы указанных в задаче углов не совпадают и не являются дополнительными лучами, доказать методом от противного. Если данные углы — смежные, а l_1 и l_2 — их биссектрисы, рассмотреть продолжение l_2' луча l_1 и доказать, что $\angle l_1l_2' = \angle l_1l_2$, воспользовавшись задачей 23а.

50. Указание. Используя полуплоскости с общей границей a, содержащей биссектрисы углов AOB и COD, сначала доказать, что OB и OC являются лучами одной полуплоскости с границей a, а лучи OA и OD — другой полуплоскости. Затем, рассматривая образовавшиеся равные углы, применить задачу 24.

51. Указание. Воспользоваться леммой 2 § 10 и задачей 3.

53. Указание. Использовать биссектрису CD треугольника ABC.

54. Указание. Воспользоваться задачей 51.

55. Указание. Провести биссектрису CD треугольника ABC и, пользуясь аксиомой III_6, рассмотреть наложение, при котором луч CA переходит в луч CB, а луч CD — в себя. Затем воспользоваться свойством 5^0 § 5.

56. Указание. Рассмотреть два случая в зависимости от того, является ли угол BAB_1 неразвернутым или развернутым. В первом случае доказать сначала, что $\angle B_1AC = \angle B_1AC_1$, и учесть, что $C, C_1 \div AB_1$.

57. Указание. Сначала доказать, что $\angle ACD = \angle BCD$

58. Указание. Для тупоугольного треугольника доказать методом от противного.

59. Указание. Использовать лемму 2 § 10.

60. Указание. Использовать задачу 59.

61. Указание. б) На луче BB_1 отложить отрезок $B_1B' = A_1A$ и воспользоваться утверждением а).

62. Указание. Через середину отрезка A_1B_1 провести прямую, перпендикулярную к отрезку AB, доказать, что она пересекает отрезок AB в некоторой точке D, и рассмотреть наложение, при котором луч CA_1 переходит в луч CB_1, а луч CD — в себя.

63. Указание. Использовать задачу 62.

64. Указание. Воспользоваться задачей 59.

65. Указание. б) Провести прямую через середины сторон BC и AB и воспользоваться задачей 63.

66. Указание. Воспользоваться задачей 62.

67. Указание. а) Воспользоваться задачами 65б и 53.

68. Указание. Воспользоваться задачей 67.

69. Указание. Доказать сначала, что $OH = OM$.

70. Указание. б) На отрезке ME взять точку F такую, чтобы $\angle B = \angle MCF$.

71. Указание. Сначала отбросить каждый такой отрезок, который составляет часть другого; затем, перенумеровав оставшиеся отрезки в порядке их следования, доказать, что сумма длин отрезков либо с четными, либо с нечетными номерами не меньше, чем 0,5 *см*.

73. Указание. Рассмотреть два возможных случая: хотя бы один из лучей h, k и l является внутренним лучом угла, образованного двумя другими, и ни один из них не является внутренним лучом угла, образованного двумя другими.

74. Указание. Воспользоваться теоремой о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

75. Указание. Сначала решить задачу для случая, когда концы данного отрезка принадлежат сторонам треугольника ABC.

77. Указание. а) Построить треугольник CAB', равный треугольнику $C_1A_1B_1$, где AB' — внутренний луч угла A, и воспользоваться теоремой о соотношениях между углами и сторонами треугольника; б) используя утверждение а), доказать методом от противного.

78. Указание. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники. Методом от противного доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

80. Указание. Решить задачу методом математической индукции, воспользоваться задачей 79 и неравенством треугольника.

81. Указание. а) Воспользоваться отрезком AK, где K точка пересечения луча AM с отрезком CB; б) сначала доказать, что $\angle B < \angle A$.

82. Указание. б) Воспользоваться задачей 81а.

83. Указание. а) Воспользоваться задачей 76 и неравенством треугольника для треугольника ACC', где CC' — отрезок, серединой которого является точка M; б) воспользоваться утверждением а).

84. Указание. Воспользоваться равенством $\widehat{hk} + \widehat{hl} = 180°$.

85. Указание. Сначала решить задачу для случая, когда точки A', B', C' принадлежат сторонам треугольника ABC.

86. Указание. Воспользоваться следствием теоремы 2 § 10 и теоремой 1 § 16.

87. Указание. б) Сначала доказать, что если $CA < CB$, то $AD < DB$. Для этого на отрезке BC взять точку A' так, чтобы $CA' = CA$б и рассмотреть соответствующие треугольники.

88. Указание. б) Воспользоваться задачей 87б.

90. Указание. б);в) Рассмотреть треугольник AB_1C_1, равный треугольнику $A'B'C'$ и расположенный так, что точка C_1 лежит на луче AC и B, $B_1 \overset{\cdot\cdot}{-} AC$. Далее в случае б) воспользоваться утверждением а), а в случае в) — задачей 66в.

91. Указание. Воспользоваться задачей 68.

93. Указание. Рассмотреть три случая в зависимости от того, является ли угол C — прямым, острым или тупым.

94. Указание. а) Воспользоваться теоремой 2 § 16; б) каждое из неравенств $c < b$ и $c < a$ доказать методом от противного.

95. Указание. Доказать методом от противного, что третьи стороны треугольника равны.

96. Нет.

98. $p - \frac{1}{2}b$.

99. Нет, если $OA = OB$; одна точка, если $OA \neq OB$ и $\angle AOB$ — не острый; одна или две точки, если $OA \neq OB$ и $\angle AOB$ — острый. Указание. Воспользоваться серединным перпендикуляром к отрезку AB.

100. Одна точка, если $\angle AOB$ — неразвернутый; нет, если $\angle AOB$ — развернутый.

101. Не существует, если $OA \geqslant CD$, и существует только одна точка, если $OA < CD$.

102. Указание. Воспользоваться отрезком CD, серединный перпендикуляр к которому совпадает с прямой p.

106. 90°.

107. Указание. Пусть $\widehat{B_1BC} + \widehat{C_1CB} < 180^\circ$. Сначала доказать, что прямые BB_1 и CC_1 не параллельны, т. е. имеют общую точку, а затем методом от противного доказать, что эта точка лежит на лучах BB_1 и CC_1.

108. Указание. Во всех задачах а), б) и в) использовать задачу 107.

109. Указание. Сначала, используя задачи 47 и 107, доказать, что биссектрисы углов DBC и ECB пересекаются.

110. $90° - \frac{\alpha}{2}$.

111. Указание. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения лучей AM, BM и CM с соответствующими сторонами треугольника ABC. Используя теорему о сумме углов треугольника, доказать, что ABB_1, ACA_1 и BCC_1 — прямоугольные треугольники.

112. 108°, 36°, 36°. Указание. Учесть, что углы при основании равнобедренного треугольника — острые.

113. Указание. Сначала доказать, что точка P лежит между точками A и M.

115. Указание. Учесть, что точка D лежит на отрезке AB, и сначала доказать, что $\angle BCE = \angle BEC$.

116. Указание. Провести медиану AM треугольника ADB и воспользоваться свойством 2^0 § 20.

117. Указание. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от расположения данной точки на боковых сторонах и на основании треугольника и данной прямой, параллельной основанию или боковой стороне.

118. Если точка лежит на продолжении основания, то сумма расстояний заменится на разность соответствующих расстояний. Указание. Через данную точку на основании треугольника провести прямую, параллельную одной из боковых сторон, и воспользоваться задачей 117.

119. Указание. Использовать задачу 118.

121. 15°, 75°. Указание. Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом C и $\widehat{A} < 45°$. Построить равнобедренный треугольник ABD, где D такая точка, что C — середина отрезка BD, и использовать задачу 118.

122. Указание. Пусть F — середина отрезка DE. Воспользовавшись свойством 2^0 § 20, сначала доказать, что $\angle AFB = \angle ABF = 2\angle DBC$.

123. 45°, 45°, 90° или 36°, 72° 72°. Указание. Пусть AD — биссектриса данного треугольника ABC. Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от того, какие стороны треугольников ABD и ADC являются их основаниями.

124. Указание. Провести биссектрису AE треугольника ABC и воспользоваться задачей 120.

125. Указание. Построить точки B_1 и C_1 так, чтобы точка A была серединой отрезков BB_1 и CC_1. Доказать, что указанная в задаче сумма отрезков равна $2AH$, где AH — высота треугольника ABC.

126. Указание. Пусть CD, CH и CM — биссектриса, высота и медиана треугольника ABC с прямым углом C, где $CB > CA$. Воспользовавшись задачами 68 и 59, сначала доказать, что лучи CD, CM и CH являются соответственно внутренними лучами углов MCH, DCB и DCA. Затем доказать, что $\angle BCM = \angle ACH$.

127. Указание. Пусть AM и AH — медиана и высота треугольника ABC, которые делят угол A на три равных угла. Используя перпендикуляр MD к прямой AC, сначала доказать, что $\widehat{C} = 30°$.

128. Указание. в) Пусть AE и BD — равные биссектрисы треугольника ABC. Доказательство того, что $AC = BC$, провести методом от противного. Предположить, что $\angle A < \angle B$ и рассмотреть прямые $BF \parallel AE$ и $AF \parallel BE$ и сначала доказать, что $BF = AE$. Пользуясь задачей 77а, рассмотреть треугольники ADB и AFB и доказать, что $AD > AF$. С другой стороны доказать, что в треугольнике ADF $\angle ADF > \angle AFD$, откуда следует, что $AF > AD$.

129. Указание. а) Сначала доказать, что $\angle FCD = \angle CDF$; б) доказать, что $\angle C = \angle E$; в) на луче DC отложить отрезок DB_1, равный DB, и показать, что $AB_1 = CB_1$.

130. Указание. Через точку D провести прямую, параллельную прямой BC, а также провести медиану DM треугольника FDC. Показать, что $MD \parallel AC$.

131. а) 70°. Указание. Провести биссектрису AD треугольника ABC и сначала доказать, что $AC = MC$; б) 80°. Указание. Внутри треугольника ABC взять точку N так, чтобы $AM = AN$ и $\widehat{NAC} = 20°$. Доказать, что $\triangle ABN$ — равнобедренный, а затем доказать, что $\triangle ANB = \triangle AMC$.

132. Указание. Воспользоваться свойствами 2^0 и 1^0 § 20.

133. Указание. а), б) Воспользоваться задачей 108а); в) доказать, что это утверждение эквивалентно аксиоме параллельных отрезков А. Д. Александрова (см. п. 3 § 22); г) через данную точку провести прямую, параллельную стороне угла.

135. Указание. Воспользоваться свойством 2^0 § 3 и учесть, что полуплоскость — выпуклая фигура.

136. Указание. Доказать методом от противного, используя задачу 134.

137. Указание. Доказать методом математической индукции, воспользовавшись задачей 31. Для доказательства второго утверждения задачи воспользоваться задачами 134, 135 и 136.

138. Указание. Пусть F — выпуклый n-угольник, $\bar{F}$ — фигура, указанная в задаче, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — все его полуплоскости, а $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$ — соответствующие замкнутые полуплоскости. Доказать сначала, что $\bar{F} = \bar{\lambda}_1 \cap \ldots \cap \bar{\lambda}_n$.

139. Указание. Воспользоваться задачей 137 и теоремой 1 § 24.

140. Указание. Пусть n — число звеньев данной ломаной. При $n = 1$ воспользоваться задачей 137. При $n > 1$ задачу решить методом математической индукции.

142. Указание. Воспользоваться аксиомой Ш_4, свойством 2^0 § 5 и тем, что при наложении полуплоскость переходит в полуплоскость.

143. Указание. Воспользоваться задачей 80.

144. Указание. Воспользоваться задачей 137 и задачей 80.

145. $\frac{n(n-3)}{2}$; $n = 5$. Указание. Доказать методом математической индукции, воспользовавшись теоремой 1 § 24.

146. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 23.

147. Указание. По условиям задачи $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, поэтому существует наложение f такое, что $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Доказать, что $D' = f(D)$.

149. Указание. Воспользовавшись задачей 139, сначала доказать, что ломанная BOD разлагает данный четырехугольник на два четырехугольника, один из которых выпуклый, и его угол BOD — тупой, поэтому искомый угол равен $180^\circ - \widehat{BOD}$.

150. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 23 и неравенством треугольника.

151. Указание. б) Воспользоваться задачами 150 и 151а.

152. Указание. Сначала доказать, что $p < OA + OB + OC + OD$, а затем воспользоваться задачей 144.

153. Указание. Рассмотреть два случая $AD \parallel BC$, $AD \nparallel BC$.

154. Указание. См. указание к задаче 153.

156. Три. Указание. Воспользоваться задачей 155.

160. Указание. Учесть, что четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда середины его диагоналей совпадают, и воспользоваться теоремой о средней линии треугольника.

161. Указание. Сначала доказать, что $AB \parallel CD$, а затем рассмотреть три возможных случая: а) точки B и E совпадают; б) $B - E - D$; в) $E - B - D$.

163. Указание. Пусть $AA_1 \parallel MC$, $BB_1 \parallel MD$, $CC_1 \parallel MA$, $DD_1 \parallel MB$. Доказать, что точка пересечения прямых AA_1 и CC_1 совпадает с точкой пересечения прямых BB_1 и DD_1.

164. Указание. а), б) и в). Воспользоваться теоремой 3 § 25.

165. Указание. Пусть, например, AC и BD — диагонали выпуклого пятиугольника $ABCDE$, не имеющие общих концов. Пользуясь теоремой 1 § 24 и теоремой 1 § 23, доказать, что в четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются.

166. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 27.

167. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 27.

168. Указание. Воспользоваться задачей 166а.

169. Указание. Пусть M и N — середины сторон BC и AD четырехугольника $ABCD$, а P, Q, R и S — середины отрезков AM, CN, MD и BN. Доказать, что середины отрезков MN, PR и QS совпадают.

171. Указание. Пусть M и N — середины непараллельных сторон BC и AD данного четырехугольника $ABCD$. Построить параллелограмм $ABMP$ и $MCDQ$ и сначала доказать, что отрезок MN является медианой и биссектрисой треугольника PMQ. Затем воспользоваться задачей 24 и теоремой 2 § 12.

172. Указание. а) Пусть P, X, Q и Y — середины сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$; $XX_1 \parallel MY$, $YY_1 \parallel MX$, $PP_1 \parallel MQ$, $QQ_1 \parallel MP$. Доказать, что точка пересечения прямых XX_1 и YY_1 совпадает с точкой пересечения прямых PP_1 и QQ_1.

173. Указание. Сначала доказать, что ABM_2M_3 и CM_3M_1B — параллелограммы.

174. Указание. Доказать, что центры построенных квадратов являются вершинами ромба с прямым углом.

176. Квадрат. Указание. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, а K, N, M и L — точки пересечения биссектрис пар углов A и B, B и C, C и D, D и A. Сначала доказать, что точки K, N, M и L не лежат на одной прямой и что $KNML$ — параллелограмм.

177. Указание. Методом от противного сначала доказать, что каждая диагональ данного четырехугольника точкой пересечения диагоналей делится пополам.

179. Указание. Воспользоваться теоремами 3 и 2 § 27.

180. Указание. Воспользоваться теоремами 2 и 3 § 19 и теоремой о средней линии треугольника.

181. Указание. а) Воспользоваться задачей 180.

182. Указание. Воспользоваться задачей 180.

183. Указание. б) Построить параллелограммы $ADMK$ и $MCBL$, где M — середина отрезка DC, и сначала доказать, что треугольник MKL является прямоугольным. Затем, воспользоваться свойствами 2° § 20.

184. Указание. а) Воспользоваться теоремой 3 § 25; б) провести прямые $CK \parallel DB$ и $C'K' \parallel D'B'$, где точка K лежит на прямой AB, а K' — на прямой $A'B'$. Показать, что существует наложение f такое, что $A' = f(A)$, $C' = f(C)$, $K' = f(K)$. Далее доказать, что $B' = f(B)$, и воспользоваться задачей а); в) пусть E — точка пересечения прямых AD и BC, а E' — точка пересечения прямых $A'D'$ и $B'C'$. Показать, что существует наложение f такое, что $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $E' = f(E)$. Далее доказать, что $C' = f(C)$, $D' = f(D)$; г) воспользоваться утверждением а).

185. Указание. Пусть в четырехугольнике $ABCD$, где $AB \nparallel CD$, M — середина AB, N — середина CD, O — середина диагонали AC и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Сначала доказать, что точки M, N и O лежат на одной прямой.

186. Указание. Пусть точки P, Q, R и S — середины соответственно сторон AB, CD, BC и ED пятиугольника $ABCDE$. Точки M, H, K — середины отрезков BE, PQ, SR соответственно. Доказать, что точка K лежит на отрезке MQ, учесть, что HK — средняя линия треугольника MPQ, а MP — средняя линия треугольника ABE.

187. Указание. Пусть A — точка пересечения прямых A_2A_3 и A_4A_5, B — прямых A_2A_3 и A_1A_6, а C — прямых

A_1A_6 и A_4A_5. Сначала доказать, что AA_3A_4, BA_1A_2, CA_5A_6 и ABC, являются правильными треугольниками.

188. Указание. Воспользоваться неравенством $4mn < (m+n)^2$, где m и n — произвольные положительные числа, $m \neq n$.

190. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 29.

191. а) Не существует; б) существует, например, равнобедренный треугольник с основанием $AB = 500$ *м* и высотой $CH = 0{,}5$ *см*.

192. Указание. Рассмотреть треугольник, образованный средними линиями данного треугольника, и учесть, что точки M, N и P лежат на сторонах этого треугольника.

193. Указание. б) Сначала доказать, что если m и n — длины двух сторон треугольника с площадью S, то $S \leqslant \frac{m^2+n^2}{4}$.

194. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 29.

195. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 29 и теоремой синусов.

196. $\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)}$,

где $m = \frac{1}{2}(m_1+m_2+m_3)$.

197. а) $\frac{1}{4}S_{ABC}$; б) $\frac{2abc\, S_{ABC}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$;

в) $2\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}\cdot S_{ABC}$;. Указание. Воспользоваться задачей 194.

198. $\frac{1}{2}(b-a)^2\cdot\sin\alpha$. Указание. Воспользоваться задачей 176.

199. а) h^2; б) a^2.

200. Указание. Воспользоваться задачей 199а.

201. Указание. Воспользоваться следствиями теорем 2 и 3 § 29.

202. Указание. а) Воспользоваться следствием теоремы 2 § 29; б) воспользоваться задачей 201а.

203. $\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot S$. Указание. Воспользоваться задачей 201г.

204. $\frac{2am}{m+1} - c$.

205. Указание. Воспользоваться задачей 201а.

206. Указание. а) Воспользоваться теоремой 3 § 29; б) рассмотреть треугольник $AB'C$ такой, что

B, $B' \doteq AC$ и $\triangle ABC = \triangle CB'A$. Воспользоваться пунктом а) этой задачи.

207. Указание. Воспользоваться теоремами 1 § 23 и 3 § 29.

208. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 27 и теоремой 3 § 29 и задачей 207.

209. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 27 и задачей 208.

210. Указание. Сначала доказать, что $S_{AMQ} + S_{CNP} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$, а затем воспользоваться задачей 208.

211. Указание. Воспользоваться задачей 210.

212. Указание. а) Воспользоваться задачей 207; б) см. указание к задаче 193б; в) воспользоваться задачей 193б.

213. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 29.

214. Указание. а) Доказать, что все вершины замкнутой ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$, не принадлежащие произвольно взятому звену этой ломаной, а также точки A, B и C лежат по одну сторону от прямой, содержащей это звено; б) доказать, что прямые AB, BC, AC разлагают шестиугольник $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ на четыре равных друг другу треугольника и три равновеликие трапеции.

215. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора и следствием теоремы 1 § 16.

216. 3, 4, 5.

217. 3 *м* и 4 *м*. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 29 и теоремой Пифагора.

218. $a(\sqrt{2} - 1)$, $a(2 - \sqrt{2})$. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 29 и теоремой Пифагора.

219. 9 *см*, $\frac{12}{7}$ *см*, $\frac{100}{7}$ *см*. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 29.

220. Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора.

221. Указание. Воспользоваться задачей 59 и теоремой, обратной теореме Пифагора.

222. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 30.

223. Да. Указание. Воспользоваться формулой Герона и теоремой 3 § 30.

224. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 30 и теоремой косинусов.

225. Указание. См. указание к задаче 224.

226. Тупоугольный треугольник. Указание. Воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника и теоремой косинусов.

227. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.

228. Указание. Воспользоваться теоремой 4 § 31.

229. Если в треугольнике ABC $BC = a$, $\widehat{B} = \alpha$, $\widehat{C} = \beta$, то $\frac{a^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

230. Указание. Воспользоваться теоремой синусов.

231. $\frac{4bc - b^2 - c^2}{2bc}$. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов и следствием теоремы 4 § 31.

232. Указание. Воспользоваться теоремой косинусов.

233. Указание. Провести диагональ AC и воспользоваться теоремой косинусов для треугольников ABC и ADC.

234. Указание. Воспользоваться следствием теоремы 4 § 31 и теоремой, обратной теореме Пифагора.

235. Указание. При $m = 0$ воспользоваться задачей 227, а при $m > 0$ следствием теоремы 4 § 31.

236. Указание. Провести прямую AC' параллельно прямой BC, $D - C' - C$ и воспользоваться теоремой косинусов для треугольника ADC'.

237. Указание. Рассмотреть два случая: $AB \parallel CD$ и $AB \nparallel CD$. Во втором случае воспользоваться теоремой косинусов и задачей 235.

238. Указание. Воспользоваться формулой Герона и следующим утверждением: если сумма трех положительных чисел постоянна, то их произведение имеет максимальное значение тогда и только тогда, когда числа равны друг другу.

239. $4\sqrt{p(p - \frac{d_1}{2})(p - \frac{d_2}{2})(p - m)}$, где $p = \frac{d_1}{4} + \frac{d_2}{4} + \frac{m}{2}$. Указание. Воспользоваться задачей 1 § 27 и формулой Герона.

240. 3, 4, 5. Прямоугольный. Указание. Воспользоваться формулой Герона и теоремой, обратной теореме Пифагора.

241. Указание. Воспользоваться формулой Герона, задачей 228а и задачей 197б.

242. Указание. а) Воспользоваться формулой Герона и следующим утверждением: если a, b и c — положительные числа, то $a \cdot b \cdot c \leqslant \frac{1}{27}(a + b + c)^3$.

243. а) Если лучи AB и CD сонаправлены, то один, а если они противоположно направлены, то не существует; б) один. Указание. Воспользоваться пунктом а) задачи.

244. Указание. Рассмотреть параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{BC}$.

245. $\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos \alpha} - b$. Указание. Рассмотреть параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{DC}$.

246. 6 *см*, $6\sqrt{3}$ *см*. Указание. Рассмотреть параллельный перенос f на отрезок $\overline{BC}$ и сначала доказать, что точка $A' = f(A)$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$.

247. 126 *см*^{2}.

248. Указание. Пусть D — середина стороны AB треугольника ABC, а P, M, N — центры квадратов, построенных на сторонах AB, BC и CA. а) Рассмотреть поворот вокруг точки C на угол 90°; б) рассмотреть поворот вокруг точки D на угол 90° и воспользоваться пунктом а) этой задачи.

249. Указание. Рассмотреть повороты вокруг вершин треугольника на углы 60°.

250. Указание. Рассмотреть поворот вокруг точки B на угол 60°, при котором точка E переходит в точку A.

251. Указание. Рассмотреть поворот вокруг центра данного квадрата на угол 90° и воспользоваться тем, что прямые A_1P, A_2P, A_3P, A_4P переходят в прямые, пересекающиеся в одной точке.

252. Указание. Рассмотреть центральную симметрию относительно точки A. Доказательство того, что отрезок, удовлетворяющий условию задачи единственный, провести методом от противного.

253. Указание. Учесть, что при повороте вокруг точки O вершины данного треугольника переходят в вершины того же треугольника. Далее показать, что точка O лежит на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника.

254. Указание. Рассмотреть осевую симметрию с осью CM.

255. Указание. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с данным основанием AB и с данной площадью. Воспользоваться точкой A_1, симметричной точке A относительно прямой CC', где $CC' \parallel AB$.

256. Точка M_0 является точкой пересечения прямой l и прямой AB', где B и B' — точки, симметричные относительно прямой l.

257. Указание. Сначала, пользуясь задачей 48, доказать, что угол M_1AM_2 неразвернутый, и, пользуясь задачей 73 и теоремой 2 § 4, доказать, что луч AM, а также лучи AB и AC внутренние лучи угла M_1AM_2.

258. Точки N и P являются точками пересечения отрезка M_1M_2 со сторонами данного угла, где M_1 и M_2 — точки, симметричные точке M относительно прямых, содержащих стороны угла. Указание. Воспользоваться задачей 257.

259. Указание. Рассмотреть отражения от прямых, содержащих биссектрисы данного треугольника.

260. 70°. Указание. Рассмотреть отражение от прямой, содержащей высоту треугольника, проведенную к основанию.

261. $\frac{a^2}{6}$. Указание. Рассмотреть отражения от прямых, проходящих через противоположные вершины квадрата и середины его противоположных сторон, и поворот вокруг центра квадрата на угол 90°. Воспользоваться тем, что площадь получившегося восьмиугольника равна восьми площадям треугольников с вершинами в центре квадрата.

262. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 34.

263. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 34.

264. Указание. Воспользоваться задачей 262.

265. Указание. Воспользовавшись задачей 264, доказать, что R_2— центральная симметрия относительно середины отрезка OO', где O — центр симметрии R, а $O' = g\ (O)$, R_1— центральная симметрия относительно середины отрезка O_1O, где $O = g\ (O_1)$.

266. Указание. Воспользоваться задачами 265 и 264.

267. Указание. а) Сначала доказать, что движение fg не имеет неподвижных точек, а затем воспользоваться задачей 262; б) сначала доказать, что движение fg имеет по крайней мере две неподвижные точки, а затем воспользоваться задачей 263.

268. Указание. Воспользоваться задачей 263.

269. Указание. Воспользоваться задачей 262.

270. Указание. В случае, когда $PQ \perp a$ воспользоваться задачей 263. В общем случае, когда прямые PQ и a не перпендикулярные и не параллельны, пользуясь задачей 266, представить данный параллельный перенос в виде произведения двух параллельных переносов и воспользоваться предыдущим случаем.

271. Указание. а) Воспользоваться задачами 269 и 270 и задачами 268 и 267б; б) воспользоваться задачами 268 и 267а.

272. Указание. Воспользоваться задачей 271а.

273. Указание. Воспользоваться задачей 265.

274. Указание. Используя задачи 264 и 273, сначала доказать, что произведение трех центральных симметрий с центрами O_1, O_2 и O_3 есть центральная симметрия.

275. Указание. Воспользовавшись задачами 264 и 266, доказать, что произведение четырех отражений от вершин параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$ есть тождественное преобразование.

276. Указание. Воспользоваться указанием к задаче 274.

277. Указание. Воспользоваться задачами 266 и 269.

278. а) Прямая, содержащая луч; б) прямая, содержащая отрезок и серединный перпендикуляр к отрезку; в) прямые, содержащие биссектрисы углов между данными прямыми; г) прямая, равноудаленная от данных прямых и любая прямая, перпендикулярная к ним; д) прямая, содержащая биссектрису угла; е) прямая, перпендикулярная к сторонам развернутого угла и проходящая через его вершину, и прямая, содержащая стороны угла; ж) прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная к данной прямой.

279. Указание. Доказать методом от противного.

280. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись задачей 279.

281. Указание. Доказать методом от противного, учитывая, что каждая вершина многоугольника является общим концом только двух сторон многоугольника.

282. Указание. Доказать методом от противного, воспользовавшись задачами 280 и 281.

284. Указание. Для доказательства того, что a' — ось симметрии фигуры, сначала доказать утверждение:

композиция отражений от прямых a, b и b есть отражение от прямой a' (задача 272).

285. Указание. а) Воспользовавшись задачей 284, доказать методом от противного.

286. Указание. Воспользовавшись задачами 262 и 277, доказать методом от противного.

287. Указание. а) Воспользовавшись задачами 264 и 286, доказать методом от противного; б) воспользовавшись задачей 284, доказать методом от противного.

288. Указание. Воспользовавшись задачами 264 и 273, доказать, что если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет еще хотя бы один центр симметрии.

291. Указание. Провести через вершину B прямую, параллельную прямой CD, и воспользоваться подобием треугольников.

292. Указание. Сначала выразить MD и DN через a, b и c.

293. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 27 и задачей 128в.

294. Указание. Через точку P провести прямую, параллельную одной из сторон угла.

295. $\frac{2ab}{a+b}$.

296. Указание. Воспользоваться следствием теоремы 2 § 29 и теоремой 3 § 41.

297. 4 *см*^{2}. Указание. Воспользоваться следствием теоремы 3 § 29.

298. Указание. Воспользоваться леммой 2 § 10 и задачей 51.

299. Указание. а) Воспользоваться теоремой 2 § 16 и теоремой 3 § 30.

300. Указание. Воспользоваться задачей 202, следствием теоремы 3 § 29 и задачей 289.

301. $$\frac{h_a^2 h_b^2}{4\sqrt{p(p-h_a)(p-h_b)\left(p-\frac{h_a h_b}{h_c}\right)}},$$

где $2p = h_a + h_b + \frac{h_a h_b}{h_c}$. Указание. Воспользоваться задачей 299 и формулой Герона.

302. $\frac{a^2}{3}$.

303. $\frac{2100}{169}$ *см*^{2}. Указание. Воспользоваться задачей 298а.

304. а) Указание. Пользуясь задачей 1 § 29, сначала доказать, что $\frac{\rho_a}{h_a} = \frac{a}{a+b}$, $\frac{\rho_b}{h_b} = \frac{b}{b+c}$, $\frac{\rho_c}{h_c} = \frac{c}{c+a}$, где $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

305. Указание. Учесть, что треугольники, площади которых равны S_1, S_2, S_3, подобны данному треугольнику, и воспользоваться теоремой 3 § 41.

306. Указание. Сначала доказать существование точки M, рассмотрев три случая: $\lambda > 0$, $-1 < \lambda < 0$, $\lambda < -1$; затем воспользоваться леммой § 42.

307. Указание. Воспользоваться задачей 306.

308. Указание. Рассмотреть образ O' точки O при данном преобразовании подобия и доказать, что окружность с центром O' радиуса kr является искомой.

309. Указание. Воспользоваться свойством 1^0 § 40.

310. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром M.

311. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром M и коэффициентом $k = 2$ и воспользоваться задачей 1 § 27.

312. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром Q и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ и воспользоваться теоремой о средней линии треугольника и третьим признаком равенства треугольников.

313. Указание. Использовать образ данного четырехугольника при симметрии относительной прямой, содержащей биссектрисы пары вертикальных углов, образованных диагоналями.

315. Указание. Рассмотреть поворот вокруг точки пересечения медиан данного треугольника и воспользоваться задачей 253.

316. Множество всех точек некоторой прямой, проходящей через точку O, без точки O. Указание. Взять какую-нибудь точку M_0 искомого множества и, пользуясь задачами 306 и 309, доказать, что прямая OM_0 без точки O есть искомое множество.

317. Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, а S — точка пересечения прямых AD и BC. Рассмотреть гомотетию с центром S, при которой точка A переходит в точку D.

318. Указание. Используя гомотетию с центром в точке пересечения диагоналей данного четырехугольника, доказать, что противоположные стороны четырехугольника, середины которых заданы, параллельны.

Для доказательства обратного утверждения воспользоваться задачей 1 § 42.

319. Указание. а) Воспользоваться теоремой 1 § 41; б) воспользоваться пунктом а); в) воспользоваться пунктом а).

320. Указание. Через точки D и D' провести прямые, параллельные сторонам BC и $B'C'$, и доказать, что полученные треугольники подобны. Затем воспользоваться теоремой 1 § 41.

321. Указание. Воспользоваться следствием из теоремы 4 § 31, задачей 2 § 42, а также теоремой Пифагора и обратной к ней теоремой.

322. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 17 и задачей 1 § 42.

323. Указание. Воспользоваться теоремой Менелая и задачей 7 § 42.

324. Указание. Воспользоваться задачей 323 и задачей 201а.

325. Указание. Воспользоваться теоремой синусов и теоремой Чевы.

326. Указание. Воспользоваться задачей 325.

327. Указание. Воспользоваться теоремой Чевы.

328. Указание. Воспользоваться задачей 327 и теоремой косинусов.

330. Указание. Воспользоваться задачей 329 и теоремой 1 § 45.

331. Указание. Воспользоваться теоремой 1 § 45 и неравенством треугольника; б) Воспользоваться следствием из теоремы 1 § 43 и замечанием § 43.

333. Указание. а) Рассмотреть два случая, когда $C - A - D$ и когда точка A не лежит между точками C и D.

334. Указание. б) Воспользоваться задачей а) и рассмотреть два случая, когда точка M лежит вне полосы между данными параллельными прямыми и внутри этой полосы. Применить теорему 1 § 17.

335. Указание. б) Воспользоваться задачей а) и теоремой 2 § 39.

336. Указание. Воспользоваться задачей 66в.

337. Указание. Воспользоваться теоремой 3 § 46 и задачей 336.

338. 180°. Указание. Ввести точки пересечения прямых AD и AE с первой окружностью и воспользоваться задачей § 47 и свойством 3^0 § 46.

339. 1 : 3.

341. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABD \sim \triangle BCD$.

342. d. Указание. Рассмотреть параллельный перенос на направленный отрезок $\overline{O_1O_2}$.

343. Указание. См. указание к задаче 342.

344. Указание. Рассмотреть осевую симметрию с осью, проходящей через центры данных окружностей.

345. $\sqrt{4R^2 - a^2}$. Указание. Провести диаметр NL и доказать, что $LQ = MP$.

346. Указание. Воспользоваться задачей 345.

349. $AN = AK = \sqrt{a(a + 2b)}$. Указание. Доказать, что $BM^2 = = BN \cdot BK = AB^2 - AD^2 - DN^2$.

350. 17 *см*.

351. $a\sqrt{\frac{r_1 + r_2}{r_1}}$. Указание. Учесть, что $\triangle BO_1A \sim \triangle DO_2A$, где O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а D — точка пересечения прямой AB и окружности с центром O_2, отличная от точки A.

352. $\frac{a}{2}, \frac{a^2}{2b}$.

353. Указание. а) Рассмотреть центральную симметрию с центром в точке пересечения окружностей.

354. $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}, \sqrt{2r_1r_2}, \frac{2r_1r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$.

355. $a\sqrt{\frac{R}{R - r}}$.

356. Указание. Пусть A_1, A_2, A_3 — середины сторон треугольника $O_1O_2O_3$, образованного центрами данных окружностей, а A, B, C — точки, не совпадающие с общей точкой данных окружностей, в которых окружности попарно пересекаются. Сначала доказать, что $\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$, а затем, что $\triangle O_1O_2O_3 = \triangle ABC$.

357. $\frac{a}{6}$.

358. $\frac{2Rr}{R + r}$.

359. Указание. Воспользоваться задачей 73.

360. Указание. Воспользоваться задачей 359.

361. Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 43 и теоремой 2 § 46.

362. Указание. Пользуясь задачей 306, сначала доказать, что на прямой, проходящей через две данные точки, существуют две и только две точки C и D данного множества Ω. Затем доказать, что Ω есть окружность с диаметром CD.

363. Указание. Пусть A и B — данные точки, m — данное число. Пользуясь следствием теоремы 4 § 31, доказать, что если $2m - AB^2 > 0$, то данное множество Ω есть окружность с центром в середине O отрезка AB радиуса $\frac{1}{2}\sqrt{2m - AB^2}$, если $2m - AB^2 = 0$, то Ω есть $\{O\}$, а если $2m - AB^2 < 0$, то Ω — пустое множество.

364. Указание. Воспользоваться задачей 308.

366. Указание. Воспользоваться определением центра подобия.

367. Указание. Воспользоваться определением центра подобия.

368. Указание. Пусть C — точка пересечения прямой O_1O_2 с общей касательной. Рассмотреть гомотетию с центром C, при которой точка O_1 переходит в точку O_2.

369. Указание. а) Доказать методом от противного, используя задачу 367; б) воспользоваться задачей 366 и пунктом а) задачи.

370. Указание. Доказать методом от противного, используя задачи 367, 369а.

371. Указание. Сначала, пользуясь задачей 331а, доказать, что возможны два случая: 1) одна из окружностей принадлежит внутренней области другой окружности; 2) каждая окружность принадлежит внешней области относительно другой окружности. В случае 2) воспользоваться задачами 368, 370б, 367, теоремой 1 § 48 и теоремой 2 § 44.

372. Указание. Решить аналогично задаче 371. а) Сначала доказать, что один из центров подобия лежит внутри данных окружностей, а другой — вне окружностей; б) воспользоваться теоремой 2 § 45.

373. Указание. а) Использовать полуплоскости с границами C_1C_2, A_1A_2 и B_1B_2; б) воспользоваться пунктом а) задачи и следствием теоремы 2 § 44.

374. Указание. Воспользоваться задачей 373.

375. 180°.

376. Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

377. Указание. а) Провести общую касательную к данным окружностям в точке A; б) воспользоваться свойством 4° § 20.

378. $2\sqrt{r_1r_2}$.

379. Указание. Воспользоваться задачей 377б.

380. Условиям задачи удовлетворяют две окружности с радиусами $\frac{r_1r_2}{(\sqrt{r_1} \pm \sqrt{r_2})^2}$. Указание. Воспользоваться задачей 378.

381. $\frac{c-b}{2}$. Указание. Сначала доказать, что $A - N - M$.

382. $3\sqrt{2}$ *см*, $\sqrt{63}$ *см*.

383. Пусть Ω — искомое множество. Если $k > -r^2$, $k \neq 0$, то Ω — окружность, концентрическая данной; если $k = 0$, то Ω — данная окружность; если $k = -r^2$, то $\Omega = \{O\}$.

384. Указание. Воспользоваться теоремой 4 § 46 и теоремой § 47.

385. Указание. Пусть точка M — середина отрезка O_1O_2. Доказать, что если $d = 0$, то M искомая точка, если $d > 0$, то искомая точка принадлежит лучу MO_2, а если $d < 0$, то — лучу MO_1.

386. Указание. Сначала доказать, что на прямой AB существует единственная точка данного множества. Для этого рассмотреть две окружности равных радиусов с центрами в точках A и B.

387. Указание. Воспользоваться задачей 386.

388. Указание. Воспользоваться задачей 387 и учесть, что степень любой точки окружности относительно той же окружности равна нулю.

389. Если точка A принадлежит окружности, то искомое множество есть касательная к окружности в точке A без точки A. Указание. Воспользоваться задачей 386.

390. Радикальная ось двух окружностей, если окружности не имеют общих точек; множество всех точек радикальной оси без точек окружностей и их внутренних точек, если окружности имеют общие точки. Указание. Воспользоваться задачами 384а и 388.

392. Если радикальный центр трех данных окружностей лежит вне каждой из них, то он является искомой точкой. В противном случае такой точки не существует. Указание. Воспользоваться задачами 390 и 391.

393. Указание. Воспользоваться задачей 389.

394. а) $AC_1 = AB_1 = p - a$;

$$AA_1 = \sqrt{\frac{(p-c)\cdot c^2 + (p-b)\cdot b^2}{a} - (p-b)(p-c)};$$

б) $2(p-c)\sin\frac{\gamma}{2}$, $2(p-a)\sin\frac{\alpha}{2}$, $2(p-b)\sin\frac{\beta}{2}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$; $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\frac{\beta+\gamma}{2}$. Указание. б) Воспользоваться задачей а); в) Воспользоваться теоремой Чевы.

395. $\dfrac{a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

397. 60°. Указание. Воспользоваться задачей 396.

398. Указание. Воспользоваться задачей 396.

399. Указание. Доказать, что биссектрисы вновь образованного треугольника пересекаются в точке, лежащей на вписанной в данный треугольник окружность.

400. Указание. Доказать, что $\angle BOD = \angle OBD$.

401. Указание. Воспользоваться свойством 1^0 § 47.

402. Указание. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, и A_1, B_1, C_1 — середины сторон BC, AC, AB. Учесть, что точка O лежит внутри треугольника ABC и около четырехугольников OA_1CB_1, OB_1AC_1, OC_1BA_1 можно описать окружности. Затем воспользоваться теоремой Птолемея.

403. Указание. Если углы B и C не прямые, то сначала доказать, что $OA = AH$, а затем, что $AK = AP$, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника, а K и P — точки пересечения прямой Эйлера со сторонами AB и AC.

404. Указание. Рассмотреть гомотетию с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

405. Указание. Рассмотреть параллельные переносы на направленные отрезки $\overline{AC_1}$, $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$.

406. Указание. Рассмотреть отражения от прямых, содержащих биссектрисы углов A и B.

408. $r_1 + r_2 + r_3$. Указание. Использовать задачу 407.

409. Указание. По условию задачи $a + b - c = 2r$, где a, b, c — длины сторон данного треугольника, r — радиус вписанной в треугольник окружности. Используя формулу $S = p\,r$ и формулу Герона, доказать, что $a^2 + b^2 = c^2$.

410. $\frac{4S^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$, где $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Указание. Используя задачу 73, доказать, что точка M лежит внутри треугольника $M_1M_2M_3$, затем доказать, что $MM_1=\frac{1}{3}h_1$, $MM_2=\frac{1}{3}h_2$, $MM_3=\frac{1}{3}h_3$, где h_1, h_2, h_3 — высоты данного треугольника.

411. Указание. а), б) Использовать формулы (1), (2) и (3) § 50; в) пусть O — центр вписанной окружности данного треугольника ABC и луч AO пересекает описанную окружность в точке D. Сначала доказать, что $DO=DB$ и $AO\cdot OD=2Rr$.

412. а) p, $p-c$, $p-b$; б) $C_2B_2=2p\sin\frac{\alpha}{2}$, $C_2A_1=2(p-c)\cos\frac{\beta}{2}$, $A_1B_2=2(p-b)\cos\frac{\gamma}{2}$, $\widehat{A_1}=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$, $\widehat{B_2}=\frac{\beta}{2}$, $\widehat{C_2}=\frac{\gamma}{2}$; в) Указание. Воспользоваться задачей а) и теоремой Чевы.

413. 3 *см*, 4 *см*, 5 *см*. Указание. Использовать формулы (3) § 50.

414. Указание. Использовать теорему Птолемея.

416. 5 м.

417. Указание. Решить задачу методом от противного, используя задачу 200 и теорему 2 § 51.

418. 5,6 см.

420. $\sqrt{\frac{5}{8}b^2-a^2}$ Указание. Использовать теорему Птолемея и теорему косинусов.

422. Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, E и F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD. Окружности, описанные около треугольников BCE и CDF, пересекаются в точках C и G. Доказать, что точка G лежит на окружностях, описанных около треугольников ADE и ABF.

425. Указание. Сначала доказать, что отрезок OA_2 делит отрезок A_1A_4 на два отрезка, равные соответственно A_1A_2 и OA_4.

426. Указание. Соединить данную точку со всеми вершинами правильного n-угольника и вычислить его площадь.

427. $(\sqrt{5}+1):2$. Указание. Использовать задачу 165 и теорему Птолемея.

428. $\frac{2\pi a}{3}$.

429. $\frac{3}{4}$.

430. Указание. Доказать, что точка M_0 — середина дуги, дополнительной к дуге сегмента.

431. $\frac{\pi R^2}{6}$.

432. $\frac{a^2}{36}(2\pi + 3\sqrt{3})$.

433. $\frac{a^2}{8}(\pi - \sqrt{3})$.

434. $\frac{r^2}{8}(\pi - 2)$.

435. $\frac{24\sqrt{3} - 11\pi}{6}$ *см*^{2}.

436. 3π *см*^{2}.

437. $\frac{\pi a^2}{36}$.

438. Указание. Применить теорему 3 § 29 к треугольникам ABC и ACD.

439. Указание. Воспользоваться задачей 438. Используя обозначения, принятые в этой задаче, преобразовать формулу $S = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin\alpha$ с помощью теоремы косинусов для треугольников ABC и ACD.

440. Указание. Воспользоваться задачей 439 и признаком четырехугольника, описанного около окружности.

441. Указание. В общем случае, когда прямые CD и EF, AB и EF, AB и CD пересекаются соответственно в точках U, V, W, применить теорему Менелая (§ 42) к треугольнику UVW и тройкам точек L, D, E; A, M, F и B, C, N.

Литература

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Часть 1. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1948.

2. Александров А. Д. Основания геометрии. М.: Наука, 1987.

3. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия. М.: Просвещение, 1961.

4. Атанасян Л. С. Основания школьного курса планиметрии. М.: Прометей, 1989.

5. Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Часть 1. М.: Просвещение, 1986; часть II. М.: Просвещение, 1987.

6. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия. Учебник для 7—9 классов средней школы. М.: Просвещение, 1995.

7. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. М.: Учпедгиз, 1954.

8. Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская И. Л. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. М.: Просвещение, 1985.

9. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Преобразования. Векторы. М.: Просвещение, 1964.

10. Вересова Е. Е., Денисова Н. С., Полякова Т. Н. Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1979.

11. Вересова Е. Е., Денисова Н. С. Практикум по решению планиметрических задач. М.: Прометей, 1987.

12. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. М.: Просвещение, 1986.

13. Готман Э. Г., Скопец З. А. Решение геометрических задач аналитическим методом. М.: Просвещение, 1979.

14. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. М.: Учпедгиз, 1962.

15. Киселев А. П. Элементарная геометрия. М.: Учпедгиз, 1980.

16. Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. М.: Наука, 1978.

17. Моденов П. С. Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979.

18. Перепелкин Д. И. Курс элементарной геометрии. Часть 1. Геометрия на плоскости. М.— Л.: Огиз Гостехиздат, 1948.

19. Погорелов А. В. Геометрия 7—11. М.: Просвещение, 1992.

20. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть 1, часть П. М.: Наука, 1986.

21. Саранцев Г. И. Сборник задач по геометрическим преобразованиям. М.: Просвещение, 1981.

22. Скопец З. А., Жаров В. А. Задачи и теоремы по геометрии. Планиметрия. М.: Учпедгиз, 1962.

23. Фетисов А. И. Геометрия в задачах. М.: Просвещение, 1977.

24. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. М.: Наука, 1986.

25. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1964.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АТАНАСЯН ЛЕВОН СЕРГЕЕВИЧ,
ДЕНИСОВА НАТАЛЬЯ СЕРАФИМОВНА,
СИЛАЕВ ЕВГЕНИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

КУРС ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

часть I

ПЛАНИМЕТРИЯ

Редактор Л. Атанасян
Технический редактор Ф. Гольдштейн
Корректор С. Ковалёва

Подписано к печати 25.11.96. Формат 84x108/32. Бумага типографская № 2.Печать офсетная. Гарнитура тип."Школьная" №.Усл. печ. л. 17.64. Уч.-изд. л. 21.36. Тираж 15000 экз. Заказ № 6508. С076. Издательство "Сантакс-Пресс". 300058, г. Тула, ул. Кирова, 173-а (ЛР № 063773). Телефоны для реализации (095) 268-25-44, (0872) 41-06-37.
Отпечатано в типографии издательства "Самарский Дом печати", 443086, г. Самара, проспект К. Маркса, 201

10*