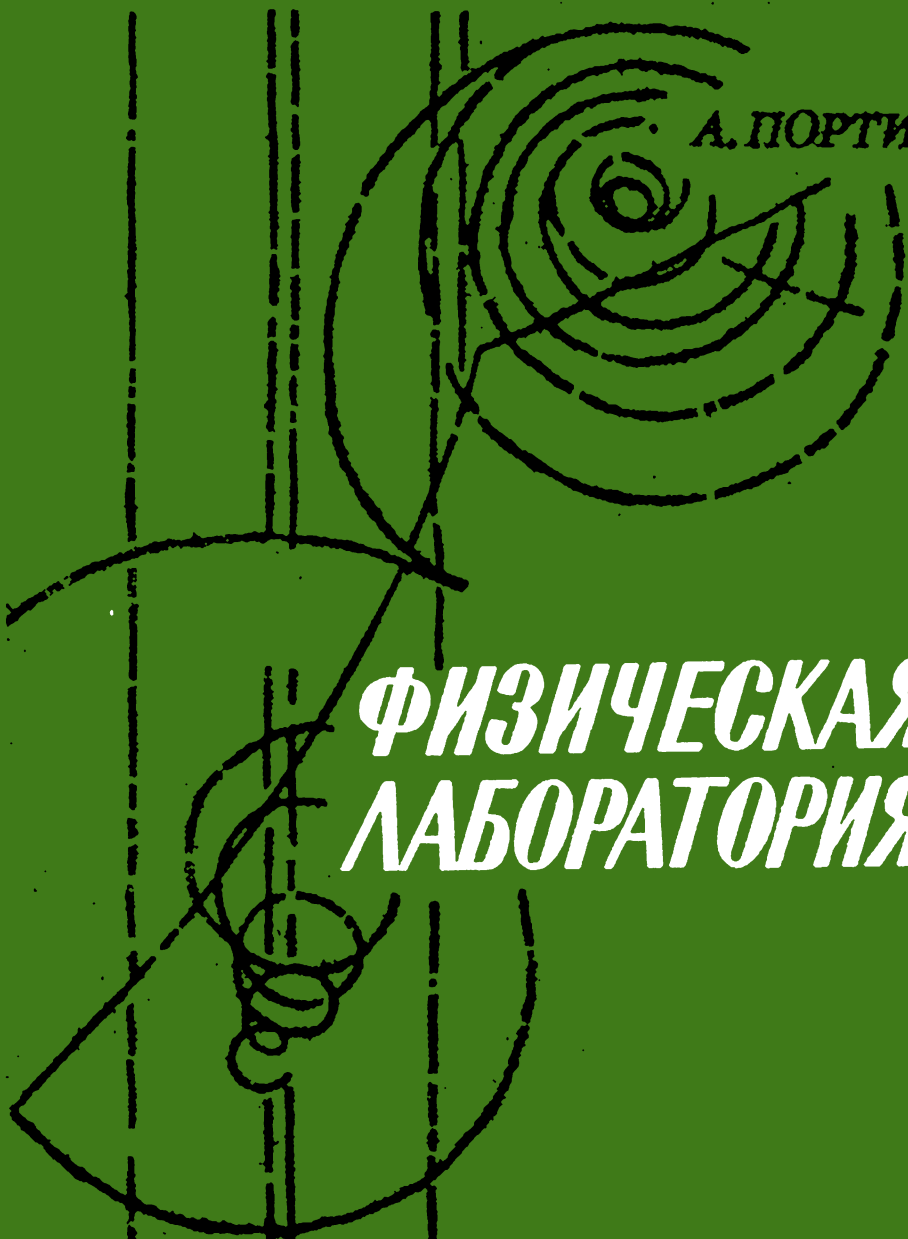


**Б**ерклеевский  
**К**урс  
**Ф**изики

А. ПОРТИС

**ФИЗИЧЕСКАЯ  
ЛАБОРАТОРИЯ**





*Берклевский  
курс  
физики*

---

А. ПОРТИС

# *ФИЗИЧЕСКАЯ ЛАБОРАТОРИЯ*

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ*

Перевод с английского  
под редакцией  
А. И. Шальникова и А. О. Вайсенберга



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1978

530.1  
П 60  
УДК 530.10

LABORATORY PHYSICS  
BERKELEY PHYSICS  
LABORATORY

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

**Физическая лаборатория.** А. Портис. Издание 2-е, стереотипное. Перевод с англ. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1978.

В книге сделана оригинальная попытка создать лабораторный практикум, соответствующий духу современных физических исследований, на базе современных электронных методов наблюдений и измерений.

При создании практикума авторы исходили из того, что значительную часть теоретических вопросов можно объяснить с помощью аналогий и что именно такой метод изложения лучше всего подходит для лабораторного курса. Поэтому настоящий физический практикум в сильной степени отличается от других практикумов, созданных под влиянием исторически сложившихся традиций и методов проведения исследований.

Идейно связанная с пятитомным «Берклеевским курсом физики», книга, по существу, является его составной частью. Она может оказаться хорошим источником лабораторных работ для других курсов как в университетах, так и в технических вузах.

Табл. 9. Илл. 416. Библ. назв. 244.

П  $\frac{20401-115}{053(02)-78}$  96-78

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие общего редактора русского перевода . . . . .	5
Предисловие редактора перевода . . . . .	6
Из предисловия автора . . . . .	7
Обозначения и единицы . . . . .	10
<b>Р а з д е л 1. Основные законы механики . . . . .</b>	<b>13</b>
Работа 1.1. Ускорение и отклонение электронов . . . . .	13
Приложение 1.1. Электростатическая фокусировка . . . . .	21
Работа 1.2. Магнитное отклонение электронов . . . . .	26
Работа 1.3. Движение электронов по винтовой линии . . . . .	32
Работа 1.4. Время пролета электронов . . . . .	38
Работа 1.5. Экспоненциальная релаксация . . . . .	47
Работа 1.6. Затухающие колебания . . . . .	55
Приложение 1.6. Комплексная частота . . . . .	63
Работа 1.7. Частотная характеристика . . . . .	65
Работа 1.8. Резонанс . . . . .	70
Приложение 1.8. Комплексная функция возбуждения . . . . .	73
Работа 1.9. Нелинейность . . . . .	75
Приложение 1.9. Диод . . . . .	80
Работа 1.10. Модуляция . . . . .	82
Работа 1.11. Отрицательное сопротивление . . . . .	87
Работа 1.12. Релаксационные колебания . . . . .	92
Приложение 1.12. Фазовая плоскость . . . . .	94
<b>Р а з д е л 2. Колебательные процессы в дискретных и непрерывных средах . . . . .</b>	<b>96</b>
Работа 2.1. Транзистор . . . . .	96
Приложение 2.1. Анализ электрических цепей . . . . .	103
Работа 2.2. Усиление и частотная характеристика . . . . .	106
Приложение 2.2. Графический анализ и усиление мощности . . . . .	109
Работа 2.3. Переходная характеристика и отрицательная обратная связь . . . . .	112
Приложение 2.3. Ряды Фурье . . . . .	115
Работа 2.4. Положительная обратная связь и колебания . . . . .	118
Приложение 2.4. Операционные усилители . . . . .	121
Работа 2.5. Связанные осцилляторы . . . . .	123
Работа 2.6. Периодические структуры . . . . .	128
Работа 2.7. Дисперсия . . . . .	134
Приложение 2.7. Фазовая и групповая скорости . . . . .	138
Работа 2.8. Линия передачи . . . . .	141
Приложение 2.8. Сетки и листы . . . . .	147
Работа 2.9. Клистрон . . . . .	148

Приложение 2.9. Акустические преобразователи . . . . .	158
Работа 2.10. Распространение микроволн . . . . .	162
Приложение 2.10. Распространение звука . . . . .	171
Работа 2.11. Поляризация микроволн . . . . .	172
Работа 2.12. Дифракция и интерференция микроволн . . . . .	175
Приложение 2.12а. Акустическая дифракция и интерференция . . . . .	179
Приложение 2.12б. Звуковой интерферометр Брауна — Твисса . . . . .	180
<b>Р а з д е л 3. Введение в статистическую физику . . . . .</b>	<b>185</b>
Работа 3.1. Радиоактивный распад . . . . .	185
Работа 3.2. Случайные процессы . . . . .	192
Приложение 3.2. Флуктуации заряда . . . . .	200
Работа 3.3. Электронные лампы . . . . .	203
Приложение 3.3. Условия работы магнетрона . . . . .	207
Работа 3.4. Электронный дробовой шум . . . . .	209
Работа 3.5. Фотоэмиссия электронов . . . . .	212
Работа 3.6. Фотонный шум . . . . .	216
Работа 3.7. Поляризация фотонов . . . . .	220
Работа 3.8. Интерференция фотонов . . . . .	234
<b>Р а з д е л 4. Введение в атомную физику . . . . .</b>	<b>245</b>
Работа 4.1. Дифракция электронов . . . . .	245
Эксперименты по дифракции катодных лучей (I—II) (245, 253). Лекционная демонстрация дифракции электронов (262).	
Работа 4.2. Опыт Франка и Герца . . . . .	266
О возбуждении резонансной линии ртути $2536 \text{ \AA}$ электронным ударом (266). Модификация опыта Франка — Герца (269).	
Работа 4.3. Атомная спектроскопия . . . . .	271
О влиянии магнетизма на природу света, испущенного веществом (271). Конструкция и применение интерферометра Фабри — Перо (277).	
Работа 4.4. Ядерный магнитный резонанс и электронный парамагнитный резонанс . . . . .	281
Ядерная индукция (281). Резонансное поглощение ядерными магнитными моментами в твердых телах (282). Простые опыты по электронному спиновому резонансу в слабых магнитных полях (284). Простой микроволновый резонансный спектрометр (286). Демонстрация ядерного магнитного резонанса в кобальте с помощью прибора, измеряющего уменьшение сеточного тока лампы (290).	
Работа 4.5. Оптическая накачка . . . . .	291
<b>Приложения к работам 4.4 и 4.5 . . . . .</b>	<b>305</b>
Приложение I (305). Приложение II (311).	
<b>Т а б л и ц а для замены указанных в тексте электронных устройств отечественными с близкими параметрами . . . . .</b>	<b>319</b>

## **ПРЕДИСЛОВИЕ ОБЩЕГО РЕДАКТОРА РУССКОГО ПЕРЕВОДА**

Мы являемся свидетелями возникновения новых отраслей физики и все более глубокого проникновения ее во все области современной науки и техники. Возникает вопрос: как при этом правильно поставить преподавание общей физики, являющейся основой мировоззрения и специальных знаний будущего ученого и инженера? Что действительно важно понять и знать и чем можно пренебречь?

Вопросы об улучшении преподавания общего курса физики часто обсуждаются, однако применимые решения обычно не идут дальше очередного изменения программ. Одной из попыток создания современного курса общей физики были «Фейнмановские лекции по физике», получившие у нас заслуженное признание. Другая попытка радикального решения этой проблемы была предпринята в университете Беркли (США, Калифорния), где в 1961 г. был создан специальный комитет, состоявший из ученых, поставивших своей целью создание учебника нового типа. Первые два тома этого учебника (механика, электричество и магнетизм) вышли в 1965 г., в последние годы закончено издание трех остальных томов (волны, квантовая и статистическая физика). Кроме того, три небольшие книги содержат описание тридцати семи работ Берклеевской физической лаборатории, идейно связанной с новым общим курсом.

Создатели Берклеевского курса стремились изложить в учебнике классическую физику, органически связав ее с основными идеями специальной теории относительности, квантовой физики и статистики, — именно в этом-то и заключены основные достоинства учебника.

Курс предназначен не только для физиков, но и для будущих инженеров, химиков и биологов. Объем его значительно превосходит претензии даже физиков и оставляет поэтому как преподавателю, так и студенту большую свободу в выборе материала.

Следует отметить прекрасную организацию курса. Превосходные рисунки, большое количество задач различной трудности (часто из смежных с физикой областей), описание классических опытов и выдержки из оригинальных работ увеличивают ценность и привлекательность курса.

Мы уверены, что Берклеевский курс физики окажется интересным и полезным широкому кругу учащихся и преподавателей.

*А. И. Шальников*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю книга является описанием физической лаборатории Берклеевского курса общей физики, созданной проф. А. М. Портисом. Представленные в ней работы заметно отличаются от обычных работ лаборатории общей физики. Разрыв с традицией сильнее всего проявился в разделе 1 лабораторного практикума. Здесь периодические, устанавливающиеся и нелинейные явления механики иллюстрируются движением электрона в электрических и магнитных полях, а основным прибором для наблюдения и измерения является осциллограф.

Раздел 2 начинается с исследования транзисторов и их применения в цепях с положительной и отрицательной обратной связью. Остальные две трети этого раздела посвящены колебательным процессам в сплошных средах, распространению сигналов в линейных, плоских и объемных структурах, генерации электромагнитных волн с помощью клистрона.

Раздел 3 лабораторного практикума содержит работы по статистической физике. Среди них представляют наибольшую методическую ценность исследования свойств статистических распределений и исследование шумов в электрических цепях, вызванных статистическим характером испускания электронов и фотонов.

В разделе 4 практикума описаны опыты по дифракции электронов, опыты Франка и Герца, опыты по расщеплению линий оптического спектра магнитным полем (эффект Зеемана) и опыты по магнитному ядерному и электронному резонансам и оптической накачке атомных уровней. В этом разделе даны только общие описания возможных опытов и подробные описания конструкций, доступных для учебных лабораторий. Кроме того, здесь помещены классические работы Томсона, Франка и Герца, Зеемана и других физиков. Эти работы рассеяны по малодоступным журналам давних лет, и мы надеемся, что читатель прочтет их с интересом.

Необходимо отметить, что лабораторный практикум не следует за Берклеевским лекционным курсом, а лишь идейно с ним связан. Он может оказаться хорошим источником лабораторных работ для других курсов общей физики как в университетах, так и в технических вузах. Мы думаем, что он поможет преподавателям в поисках новых и современных работ, осуществляемых простыми средствами.

Мы дополнили приведенную автором библиографию некоторыми ссылками на работы, опубликованные в журнале «Успехи физических наук», и на нашу учебную литературу и всюду, где было возможно, вместо американских приборов, ламп, транзисторов указали отечественные с близкими параметрами (см. таблицу в Приложении к практикуму, составленную В. Ф. Кузачевым).

Перевод раздела 1 выполнен Е. А. Назаровой, и П. А. Троицким, раздел 2 перевел В. П. Канавец, а разделы 3 и 4 — Б. В. Морозов.

*А. Вайсенберг*



## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Этот лабораторный практикум был основан на физическом факультете Калифорнийского университета в Беркли как дополнение к Берклеевскому курсу физики. Лабораторный курс имеет ту же цель, что и теоретический: он призван отразить переворот, происшедший в физике за последние сто лет.

Разработанный автором физический практикум колледжа существенно отличается от практикумов, которые сопровождают большинство вводных физических курсов. Обычно лабораторный курс тесно связан с лекционным курсом. Его цель состоит в том, чтобы показать скептически настроенному студенту, что физические законы действительно можно проверить в лаборатории. Большинство студентов вполне готовы поверить в справедливость этих законов, но, к сожалению, они обнаруживают, что практика с ее многочисленными источниками ошибок находится в некотором противоречии с элегантными обобщениями, сделанными на лекциях. Другим недостатком обычных лабораторных практикумов является то, что они состоят из постоянного набора опытов. Поскольку значительная часть курса связана с физикой прошлого века, лабораторные опыты основаны на явлениях, известных в течение многих десятилетий, если не больше. Такая лаборатория могла бы существовать и 25 лет назад, но современный студент, начинающий свое обучение, существенно отличается от прежнего. Он, по крайней мере поверхностно, информирован о достижениях современной науки, часто рассчитывает на научную карьеру, надеется, что курс даст ему возможность почувствовать дух современной науки. Студент, конечно, будет выполнять предложенные опыты, но вряд ли он сможет с таким же интересом работать с бечевками и блоками, как его предшественник пятьдесят лет назад.

Отобранные нами опыты имеют целью создать лабораторию, соответствующую духу современных физических исследований. Для этого ее пришлось сделать в значительной степени независимой от лекций. Современный физик в лаборатории имеет дело с движением частиц в электрических и магнитных полях, и мы начинаем с исследования этого аспекта динамики частиц вместо движения макроскопических тел. Хотя знания студента в области теорети-

ческой динамики заряженных частиц невелики, нам кажется, что он сможет получить все необходимое из аналогии с гравитационными силами, уже знакомыми ему. При объяснении физических основ опыта мы очень сильно полагались на аналогию, отчасти потому, что этому методу познания уделяется очень мало внимания в обычном курсе. Мы, разумеется, хотели избежать в лабораторном курсе выдержек из обычного текста учебников физики. В начале курса мы сделали попытку дать краткое описание логической схемы опытов. Из-за того, что все опыты проводятся на одинаковом оборудовании, студенты смогут выполнять их в разумной последовательности. Так, например, от *LCR*-генератора в разделе 1 они могут перейти к связанной паре генераторов в разделе 2, от связанной пары генераторов — к нагруженной линии задержки, от линии задержки — к передающей линии и от передающей линии — к излучению в пространстве. Это, конечно, не та последовательность, которая принята в учебниках. Нам кажется, что значительную часть теоретических вопросов можно объяснить с помощью аналогий и что такой метод изложения лучше всего подходит для лабораторного курса.

Для того чтобы раздел 1 нашего практикума принес пользу, студенты должны иметь хорошую подготовку в области классической механики, на которой основано большинство аналогий. Некоторое знакомство с электричеством полезно, но несущественно. Хотелось бы думать, что хороший школьный курс физики будет достаточной основой для этого практикума. Может быть, некоторым лабораторный курс покажется ограниченным по выбору тем. Он состоит из описания 37 опытов; разделы 1 и 2 содержат электрические явления, а физике теплоты, например, уделено небольшое внимание. Нам кажется, что попытка охватить больший круг явлений и экспериментальных методов привела бы к тому, что лабораторный курс стал бы слишком поверхностным. Для исследователя вообще совершенно недостаточно работать в лаборатории три часа в неделю. Поэтому начинающий студент-физик может достичь некоторой проницательности при проведении экспериментов только в том случае, если тема исследования не слишком широка. При этом он может глубоко проникнуть по крайней мере в один класс физических явлений. Очевидной причиной того, что мы избрали электронные методы, является их возрастающая роль не только в физике, но и в химии и биологии. Осциллограф — это сердце нашей лаборатории, и с развитием различного рода преобразователей и датчиков он становится универсальной считывающей схемой для быстро меняющихся переходных или периодических процессов.

Первые четыре опыта раздела 1 являются введением в динамику электронов. За экспериментальным исследованием отклонения электронов в однородных электрических и магнитных полях следует изучение движения по спирали и измерение скорости электрона методом времени пролета. Эта первая группа опытов знакомит студента с ускорением и отклонением электрона, с периодическим

движением и с устройством и работой электронно-лучевой трубки. Следующие четыре опыта знакомят с резонансным и нерезонансным откликом на толчки и синусоидальные сигналы. Нелинейные явления и отрицательное сопротивление рассмотрены в последних четырех опытах.

В разделе 2 продолжается синтез лабораторных опытов по электронике с использованием методов аналитической механики, изучаемой на лекциях и семинарах. Хотя непосредственным предметом лабораторных работ являются компоненты электроники, нас интересует (или должно интересовать) все то, что касается физики. По мере возможности мы будем использовать и обсуждать аналогии из других областей физики.

Раздел 1 был в значительной степени ограничен изучением изолированных объектов: свободной частицы, тормозящейся частицы и осциллятора. В разделе 2 наше внимание будет направлено на связанные осцилляторы, периодические структуры и, в частности, на распространение волн в непрерывной среде. При этом большое внимание будет уделено явлению распространения и дифракции микроволн.

Раздел 3 лабораторного курса служит введением в статистическую физику. Мы познакомимся с радиоактивными источниками и рассмотрим случайные процессы на примере испускания электронов ( $\beta$ -частиц) и фотонов ( $\gamma$ -квантов). Затем мы перейдем к флуктуациям в потоке электронов и определим заряд электрона.

Мы используем явление фотоэлектронной эмиссии для регистрации фотонов в видимой части спектра. С помощью фотоумножителя мы сможем наблюдать флуктуации в потоке фотонов и, исходя из величины этих флуктуаций, определим скорость счета фотонов. Наконец, мы используем этот экспериментальный метод для изучения поляризации и интерференции фотонов.

Раздел 4 лабораторного курса является введением в атомную физику. Здесь мы решили отказаться от способа изложения, который применялся для первых тридцати двух экспериментов в разделах 1, 2, 3, где использовалось стандартное и широко распространенное оборудование. По этой причине эксперименты могли выполняться всеми студентами в одинаковой последовательности. Оборудование, которое используется в опытах раздела 4, носит более специальный характер и стоит дороже. Поэтому мы считали, что не следует устанавливать какую-либо определенную последовательность проведения опытов, и рассматриваем раздел 4 скорее как программу лабораторных исследований. По этой причине мы решили отказаться от обсуждения теоретических вопросов и от каких-либо рекомендаций по проведению опытов и ограничились перепечаткой ряда классических работ, а также некоторых более современных исследований.

*Алан М. Портис*

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЕДИНИЦЫ

В нашем лабораторном курсе мы будем иметь дело с двумя системами единиц и их комбинациями. Это гауссова система СГС; которая используется исключительно в теоретической физике, и система МКСА. Физик-экспериментатор должен хорошо знать теорию, ему необходимо уметь использовать обе системы единиц и переходить от одной к другой. Положение усложняется тем, что ему приходится иметь дело еще и со смешанными системами единиц, придуманными им самим. Описание двух основных систем единиц дается ниже.

1. Симметричная система единиц СГС, или гауссова система единиц, базируется на трех основных величинах: сантиметр длины, грамм массы и секунда времени.

Единица измерения заряда определяется из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

т. е. заряд измеряется в единицах  $(\text{эрг} \cdot \text{см})^{1/2}$ .

Ток определяется как

$$I = \frac{q}{t} v,$$

т. е. единица тока  $(\text{эрг} \cdot \text{см})^{1/2} / \text{сек}$ .

Сила взаимодействия между двумя длинными проводниками, по которым течет ток, находится из выражения

$$\frac{F}{l} = \frac{2I_1 I_2}{rc^2},$$

где  $c = 2,99792 \cdot 10^{10}$  см/сек есть скорость распространения света в вакууме.

Электрическое поле  $E = F/q$  измеряется в единицах  $(\text{эрг}/\text{см}^3)^{1/2}$ .  
Магнитная индукция

$$B = \frac{F/l}{I/c}.$$

также измеряется в единицах  $(\text{эрг}/\text{см}^3)^{1/2}$ , или гауссах.

2. Система единиц МКСА — это согласованная система единиц механики, электричества и магнетизма, базирующаяся на четырех основных величинах: метр длины, килограмм массы, секунда времени и ампер тока. Ампер определяется из силы взаимодействия между двумя проводниками, по которым течет ток:

$$\frac{F}{l} = \frac{2I_1I_2}{r}.$$

Здесь сила измеряется в ньютонах, а  $l$  и  $r$  — в метрах.

Ниже в таблице приведен список некоторых физических величин, единицы измерения которых имеют специальные названия.

Физические величины	Символ	Название единиц (полное и сокращенное)	
		СГС	МКСА
Длина	$l$	сантиметр (см)	метр (м)
Масса	$M, m$	грамм (г)	килограмм (кг)
Время	$t$	секунда (сек)	секунда (сек)
Сила	$F$	дина (дин) = г·см/сек <sup>2</sup>	ньютон (н) = кг·м/сек <sup>2</sup>
Работа	$W$	эрг (эрг) = дин·см	джоуль (дж) = н·м
Мощность	$P$	эрг/сек	ватт (вт) = дж/сек
Электрический заряд	$q, Q$	(эрг·см) <sup>1/2</sup>	кулон (к) = а·сек
Электрический потенциал	$V$	(эрг/см) <sup>1/2</sup>	вольт (в) = дж/к
Напряженность электрического поля	$E$	(эрг/см <sup>3</sup> ) <sup>1/2</sup>	в/м
Электрический ток	$I$	(эрг·см) <sup>1/2</sup> /сек	ампер (а)
Плотность электрического тока	$j$	(эрг/см <sup>3</sup> ) <sup>1/2</sup> /сек	а/м <sup>2</sup>
Индукция магнитного поля	$B$	гаусс (гс) = (эрг/см <sup>3</sup> ) <sup>1/2</sup>	вебер/метр <sup>2</sup> (вб/м <sup>2</sup> )
Сопротивление	$R = V/I$	сек/см	ом (ом) = в/а
Емкость	$C = Q/V$	см	фарада (ф) = к/в
Индуктивность	$L = V(dI/dt)^{-1}$	сек <sup>2</sup> /см	генри (гн) = в·сек/а

В лаборатории, как и большинство физиков, мы производим наши измерения в смешанной системе единиц, используя амперы, вольты, гауссы и сантиметры. Вот пример таких смешанных единиц:

электрическое поле  $E$  в/см,

плотность тока  $j$  а/см<sup>2</sup>,

удельное сопротивление  $\rho = j/E$  ом·см.

Возможна еще худшая смесь, например константа Холла, измеряемая в единицах в·см/а·гс. Мы будем пользоваться системой СГС для всех теоретических выражений. Это означает, что, написав некоторый символ в уравнении, мы понимаем, что соответствующая физическая величина измерена в системе СГС. Иногда мы будем делать вычисления в системе МКСА или в смешанной системе

единиц; при этом мы всегда будем писать наименование единиц. Нам необходимо иметь несколько относительно простых способов перехода от одной системы единиц к другой. Для этого мы используем два приблизительно точных соотношения:

$$1 \kappa = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}_q, \text{ или } 1 \text{ ед. СГС}_q = (3 \cdot 10^9)^{-1} \kappa$$

и

$$1 \nu = (1/300) \text{ ед. СГС}_v, \text{ или } 1 \text{ ед. СГС}_v = 300 \nu.$$

Мы будем стараться сводить преобразование к этой паре или объединять такие величины, как  $RC$  или  $L/R$ , которые имеют размерность времени и измеряются в секундах в любой системе единиц. Часто удобно использовать единицы, относящиеся к нашим основным величинам, как целая степень десяти. Например, мы можем измерять длину в метрах, километрах ( $10^3 \text{ м}$ ), сантиметрах ( $10^{-2} \text{ м}$ ), миллиметрах ( $10^{-3} \text{ м}$ ), микронах ( $10^{-6} \text{ м}$ ) или ангстремах ( $10^{-10} \text{ м}$ ). Каждая из этих единиц находит свое применение при описании физического явления определенного масштаба. Например, мы думаем о расстоянии между городами в километрах, а обычные лабораторные измерения производим в сантиметрах. Как правило, для обозначения производных единиц мы используем приставку, ставя ее перед основной единицей. Приведем таблицу наиболее часто используемых приставок и несколько примеров их употребления.

Кратность	Приставка	Примеры и сокращения
$10^{12}$	Тера	—
$10^9$	Гига	Гигагерц ( <i>Ггц</i> )
$10^6$	Мега	Мегагерц ( <i>Мгц</i> )
$10^3$	Кило	Килогерц ( <i>кгц</i> ), килоом ( <i>ком</i> )
$10^{-2}$	Санتي	Сантиметр ( <i>см</i> )
$10^{-3}$	Милли	Миллиампер ( <i>ма</i> ), миллигенри ( <i>мгн</i> ), милливольт ( <i>мв</i> )
$10^{-6}$	Микро	Микроампер ( <i>мка</i> ), микрофарада ( <i>мкф</i> ), микросекунда ( <i>мксек</i> ), микрогенри ( <i>мкгн</i> )
$10^{-9}$	Нано	Наносекунда ( <i>нсек</i> )
$10^{-12}$	Пико	Пикофарада ( <i>пф</i> ), пикосекунда ( <i>псек</i> )

## РАЗДЕЛ I

### ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ

#### Работа 1.1. УСКОРЕНИЕ И ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

Серия лабораторных опытов начинается с экспериментального изучения ускорения и отклонения электронов. Мы подойдем к этой задаче как экспериментаторы, знакомые с ньютоновской механикой. При этом мы уверены, что ньютоновская механика достаточно точно описывает движение макроскопических тел, когда их скорости малы по сравнению со скоростью света  $c = 2,99792 \cdot 10^{10}$  см/сек. Масса электрона приблизительно равна  $9,109 \cdot 10^{-28}$  г. Силы, действующие в этом опыте, будут порядка  $10^{-8}$  дин, а энергия имеет порядок  $10^{-9}$  эрг. Применим ли критерий, который мы приняли для макроскопических тел, к микроскопическим телам, например к электрону?

Мы будем проводить наши исследования с помощью электронно-лучевой трубки, которая обычно называется катодно-лучевой. Это название возникло в середине XIX века во время изучения электрических разрядов в газах при низком давлении. В таких разрядах можно наблюдать синеватые лучи, исходящие из катода. Эти катодные лучи не что иное, как флуоресценция атомов газа, возбужденная электронным потоком.

В дальнейшем при изучении быстро меняющихся электрических явлений электронно-лучевая трубка будет нашим основным прибором. Здесь мы используем ее для исследования отклонения электронов, что позволит познакомиться с физикой этого замечательного прибора.

Прежде чем рассмотреть принцип действия электронно-лучевой трубки, вспомним с помощью простых рисунков, как происходит отклонение и ускорение частиц в силовых полях. Рис. 1, а — иллюстрируют обычную механику движения тела в поле силы тяжести, а рис. 1, д, е — сложение импульсов и скоростей. На рис. 2, а — е показаны соответствующие соотношения для электронов в электрическом поле. Мы видим, таким образом, прямую аналогию между этими двумя чрезвычайно сходными задачами.

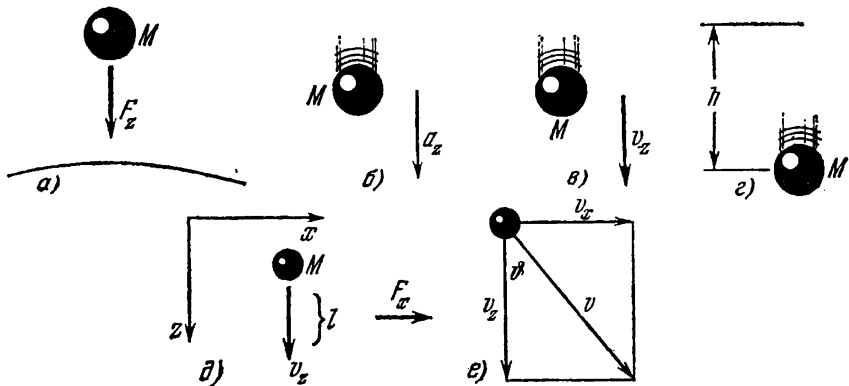


Рис. 1. На массу  $M$  у поверхности Земли действует сила тяжести  $F_z = Mg$ ,  $g = 980 \text{ см/сек}^2$  (а). Если масса  $M$  свободна, она падает с постоянным ускорением  $a_z$ , определяемым из уравнения  $Ma_z = F_z$ , причем  $a_z = g$  (б). За время падения  $t$  она приобретает импульс  $Mv_z = F_z t$  (в) и кинетическую энергию  $\frac{1}{2} Mv_z^2$ , равную работе поля  $Mgh$  (г). Если мы приложим на время  $\Delta t = l/v_z$  поперечную отклоняющую силу  $F_x$ , масса приобретет поперечный импульс  $Mv_x = Ma_x \Delta t = F_x \Delta t$  (д) и отклонится на угол  $\vartheta$ .  $\text{tg } \vartheta = v_x/v_z$  (е).

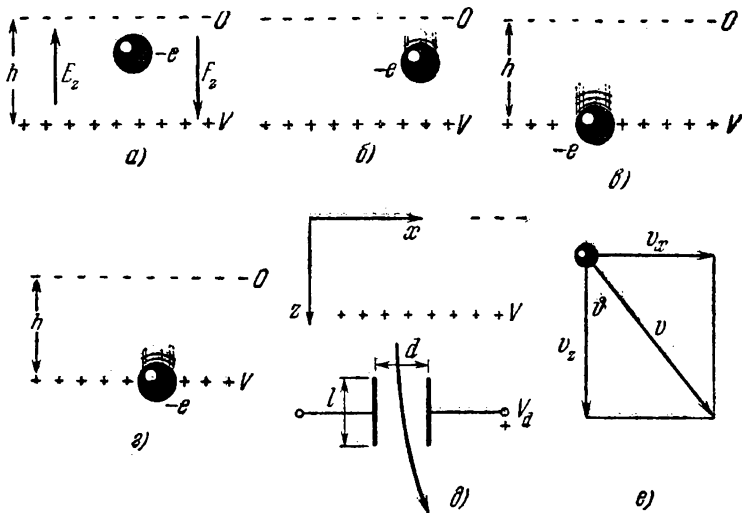


Рис. 2. На электрон с зарядом  $-e$ , находящийся между заряженными сетками, действует сила  $F_z = -eE_z = eV/h$  (а). Если потенциал нижней сетки положительный, электрон будет сдвигаться вниз с постоянным ускорением, определяемым из уравнения,  $ma_z = -eE_z = eV/h$  (б). За время ускорения  $t$  электрон приобретет импульс  $mv_z = F_z t$  (в) и кинетическую энергию, равную работе поля  $\frac{1}{2} mv_z^2 = -eE_z h = eV$  (г). Если мы создадим поперечное отклоняющее поле  $E_x = -V_d/d$ , электрон приобретает поперечный импульс  $mv_x = -eE_x \Delta t$  (д) и отклонится на угол  $\vartheta$ .  $\text{tg } \vartheta = v_x/v_z$  (е).



Катодно-лучевая трубка состоит из электронной пушки, которая испускает, ускоряет и фокусирует электроны, отклоняющей системы и индикатора отклоненных электронов.

Схема электронной пушки и отклоняющей системы для обычной четырехэлектродной электронно-лучевой трубки ЗВР1 показана на рис. 3.

Электроны излучаются подогревым катодом 1, который имеет форму цилиндра, закрытого с одной стороны маленькой пластинкой. Эта пластинка покрыта оксидами бария и стронция, которые испускают электронный поток большой плотности. Катод нагревается до рабочей температуры с помощью нагревательного элемента, который расположен внутри катодного цилиндра и изолирован от него с помощью хорошо проводящего тепло керамического слоя. Катод окружен цилиндром 2 с маленьким отверстием в центре. Этот внешний цилиндр называется управляющей сеткой. Отверстие в пластинке значительно меньше, чем излучающая поверхность, и пространство между отверстием и излучающей поверхностью очень мало. Рядом с управляющей сеткой располагается вторая сетка 3. Электроны, прошедшие через отверстие в первой (управляющей) сетке, ускоряются электрическим полем, которое возникает благодаря тому, что вторая сетка имеет высокий потенциал относительно катода. Рядом со второй сеткой находится первый анод 4. Его часто называют фокусирующим анодом. Этот цилиндр, коаксиальный со второй сеткой, содержит несколько диафрагм, каждая из которых имеет отверстие в центре. За первым анодом находится второй, или ускоряющий, анод 5. Он коаксиален по отношению к первому аноду и имеет пару диафрагм, служащих для дальнейшей коллимации (ограничения) электронного пучка. Продолжением второго анода является проводящее покрытие на внутренней стенке стеклянного баллона трубки, простирающееся до экрана трубки. Связь второго анода с этим покрытием достигается устройством электрически проводящих контактов, смонтированных на пушке.

Схематическое изображение электронно-лучевой трубки показано на рис. 4. Второй, или ускоряющий, анод  $A_2$  обычно имеет положительный потенциал порядка нескольких тысяч вольт по отношению к катоду  $K$ . Для безопасности и удобства работы мы пользуемся обычным лабораторным источником питания, который

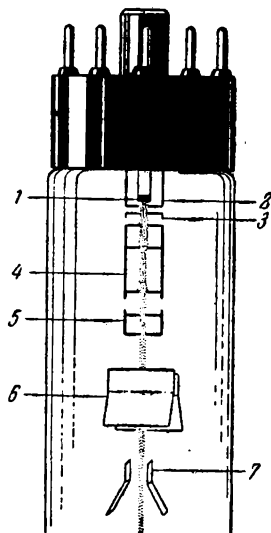


Рис. 3. Схема электронной пушки и отклоняющей системы электронно-лучевой трубки: 1 — подогревный катод, 2 — управляющая сетка, 3 — вторая сетка, 4 — первый анод, 5 — ускоряющий анод, 6 — вертикально отклоняющие и 7 — горизонтально отклоняющие пластины.

ограничивает потенциал  $A_2$ , равный  $V_B + V_C$ , значениями, близкими к 500 в. Первый, или фокусирующий, анод  $A_1$  работает при потенциале  $V_C$ , приблизительно равном  $(V_B + V_C)/4$ , где  $(V_B + V_C)$  — потенциал  $A_2$ .

Вторая сетка  $G_2$  внутренне соединена с  $A_2$ . Меняя потенциалы  $V_B$  и  $V_C$  с помощью источника питания и, следовательно, энергию электронов, можно сфокусировать луч. Управляющая сетка всегда имеет отрицательный потенциал по отношению к потенциалу на катодe. Интенсивность электронного пучка и, следовательно, яркость изображения на экране можно регулировать, меняя эту разность потенциалов, которая называется потенциалом смещения.

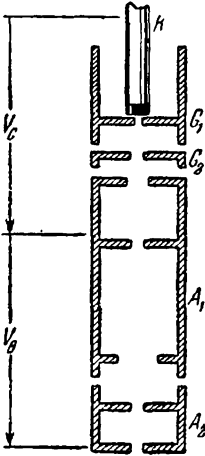


Рис. 4.

Обычно на управляющей сетке поддерживается отрицательный потенциал в 20 в по отношению к катоду. Из-за того, что в нашем опыте используется пониженная разность потенциалов, сеточного смещения  $\sim 4,5$  в достаточно для предотвращения местного прожигания фосфоресцирующего экрана из-за чрезмерного нагревания интенсивным электронным пучком. В то же время это смещение обеспечивает нормальную яркость изображения на экране. По этим же причинам желательно уменьшение потенциала второго анода.

Влияние фокусирующего анода  $A_1$  на проектирование изображения отверстия сетки на экран рассмотрено в приложении к работе 1.1\*), где обсуждается дополнительный опыт. Мы предполагаем, что основной опыт, заключающийся в отклонении электронного

пучка однородным электростатическим полем, будет выполнен первым. Если у вас будет достаточно времени, вы сможете исследовать некоторые замечательные свойства электростатических линз, действие которых на электронный луч очень близко к действию оптических линз на луч света.

Электростатическая электронно-лучевая трубка заключена в стеклянный баллон конической формы с цилиндрической шейкой, в которой расположена электронная пушка. Флуоресцирующий материал наносится на внутреннюю поверхность баллона. Так как трубка работает при высоком напряжении, в ней нужно создать высокий вакуум. При наличии большой поверхности экрана это делает трубку опасной в обращении. Малейшее повреждение оболочки, которое может быть вызвано механическим сотрясением или царапиной на стекле, может вызвать сильный взрыв, приводя-

\*) В дальнейшем при ссылках на работы настоящего практикума и приложения к работам мы будем использовать обозначения типа Р.1.1 и П.1.1 соответственно, где первая цифра дает номер раздела, а вторая — номер работы. (Прим. ред.)

щий к разбрасыванию стекла и вещества экрана. Измельченное графитовое покрытие (аквадаг), нанесенное на внутреннюю поверхность раструба, служит нескольким целям. Во-первых, оно является продолжением второго анода. Во-вторых, оно собирает вторичные электроны, возникающие в результате рассеяния электронного пучка от экрана. В-третьих, как электрический экран, оно уменьшает также влияние случайных электростатических полей, которые могут вызвать нежелательное отклонение и дефокусировку пучка. И в-четвертых, поскольку покрытие черное и светонепроницаемое, оно задерживает рассеянные световые лучи и не дает им попасть через боковые стенки трубки на флуоресцирующий экран. Это увеличивает контрастность изображения на экране.

Экран электронно-лучевой трубки с внутренней стороны покрыт фосфором, который светится, когда на него падает электронный пучок. Падающий на экран пучок приводит примесные или активные центры фосфора в возбужденное состояние. Возбужденные электроны активных центров переходят затем на более низкие электронные уровни, испуская световые кванты. Изменяя качество фосфора и род активатора, можно добиться изменения инерции светового изображения и цвета в больших пределах. Когда электронный пучок ударяется об экран, некоторые электроны полностью выбиваются из экрана. Эти свободные электроны называются *вторичными электронами*, а само явление называется *вторичной эмиссией электронов*. Вторичные электроны собираются на проводящем коллоидном графитовом покрытии и движутся к положительной клемме источника питания, создавая электрический ток. Если потенциал второго анода меньше нескольких сотен вольт, то вторичный поток электронов слабее, чем первичный поток. Отрицательный заряд может накапливаться на экране трубки, отклоняя первичный электронный пучок в сторону бокового покрытия. Увеличение потенциала на втором аноде облегчает продвижение электронов к экрану и в конечном счете выбивание достаточного количества вторичных электронов, что приводит к нейтрализации экрана. Уменьшая и повышая потенциал второго анода, вы имеете возможность наблюдать этот процесс.

Электронно-лучевая трубка маркируется обозначениями типа 3BP1, 5BP4 и т. п. Первая цифра указывает номинальный диаметр экрана в дюймах, первая буква указывает порядок, в котором регистрируются трубки этого диаметра, и последняя буквенно-цифровая комбинация указывает на тип использованного фосфора. Например, P1 означает веллимитовый фосфор, который представляет из себя силикат цинка со следами магнезии.

Серьезным недостатком электронной пушки, используемой в трубке типа 3BP1, является то, что заметная доля электронов ударяется о внутренние диафрагмы в первом аноде, образуя при этом сильный ток, который может изменить потенциал первого анода. Недавно была создана электронная пушка с нулевым током на первом аноде. Трубка с такой пушкой обозначается 3BP1A.

Электростатическая электронно-лучевая трубка имеет две пары отклоняющих пластин, которые отклоняют электронный пучок в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Электронно-лучевая трубка обычно ориентирована так, что первые две отклоняющие пластины 6 (рис. 3) дают вертикальное отклонение пятна, вторая же пара пластин 7 отклоняет пятно в горизонтальном направлении. Пластины изогнуты таким образом, чтобы обеспечить большой угол отклонения без удара электронного потока о края пластин. Схема отклонения пластинами электронного пучка показана на рис. 2,  $\delta$  и  $e$ . Если вторая сетка трубки (на рис. 2,  $\delta$  обозначена  $+$ ) имеет потенциал  $V_2$ , равный потенциалу второго анода, то электроны попадают в область отклоняющих пластин со скоростью, которая дается соотношением

$$\frac{1}{2} m v_z^2 = e V_2. \quad (1)$$

Если  $V_d$  — разность потенциалов между отклоняющими пластинами, расстояние между которыми  $d$ , то величина отклоняющего поля

$$E_x = \frac{V_d}{d}. \quad (2)$$

В таком поле электроны будут приобретать поперечную скорость

$$v_x = \frac{e E_x}{m} \Delta t = \frac{e}{m} \frac{V_d}{d} \frac{l}{v_z}, \quad (3)$$

где  $\Delta t$  — время пребывания электрона в поле между двумя пластинами, равное длине пластин, деленной на продольную скорость электрона. Тангенс угла отклонения  $\vartheta$  — это просто отношение поперечной и продольной скоростей электрона:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{v_x}{v_z} = \frac{e}{m} \frac{V_d}{d} \frac{l}{v_z^2}. \quad (4)$$

Принимая во внимание уравнение (1), получаем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{V_d}{V_2} \frac{l}{2d}. \quad (5)$$

Мы видим, что для данного отклоняющего потенциала тангенс угла отклонения прямо пропорционален протяженности отклоняющего поля, которое определяется длиной отклоняющих пластин. Если удлинить пластины, то время воздействия поля и отклонение электрона увеличатся. Уменьшив расстояние между отклоняющими пластинами при постоянном отклоняющем потенциале, мы увеличим силу поля. При этом угол отклонения возрастет. Угол отклонения будет также возрастать при увеличении разности потенциалов между заряженными пластинами. При этом поперечная сила увеличивается и в соответствии с этим возрастает угол отклонения. Наконец, угол отклонения может быть увеличен уменьшением ускоряющего потенциала  $V_2 = V_B + V_C$  (см. рис. 4). Это уменьшает скорость

электронов и увеличивает время воздействия на них отклоняющего поля. В результате уменьшения продольной скорости при той же поперечной скорости мы получаем увеличенное угловое отклонение. После того как электронный поток покидает область отклонения, он движется по прямой линии, касательной к траектории в точке, где электронный пучок покинул область отклонения. Таким образом, ожидаемое линейное отклонение пятна на экране равно

$$D = L \operatorname{tg} \vartheta, \quad (6)$$

где  $L$  — расстояние от пластин до экрана (точнее,  $L$  — это расстояние от центра пластин до экрана). Отклоненный пучок показан на рис. 5.

Схема подключения источника питания к электронно-лучевой трубке показана на рис. 6. Нить накала питается источником в 6,3 в, который присоединен к клеммам  $H-H$ , показанным на рис. 6. Катод, выведенный на один из штырьков на цоколе трубки, должен быть подключен к отрицательной клемме источника  $C$ . Первая сетка связана с катодом через маленькую батарею смещения с напряжением около 4,5 в. Вторая сетка и второй анод, соединенные в трубке, подключаются к положительной клемме источника  $V^+$ . Первый анод присоединяется к общему зажиму, где объединены  $C^+$  и  $B^-$  клеммы источника питания. Клеммы  $V^+$  и  $G$  соединяются перемычкой, причем клемма  $G$  присоединена к корпусу прибора. Необходимо убедиться в том, что корпус прибора надежно присоединен к общему заземлению здания. Одна из каждой пары отклоняющих пластин также заземлена. К зажимам данной пары отклоняющих пластин присоединен двуязыльный провод. Если вы найдете это удобным, эти провода можно подключить к щиту схемы. Чтобы правильно

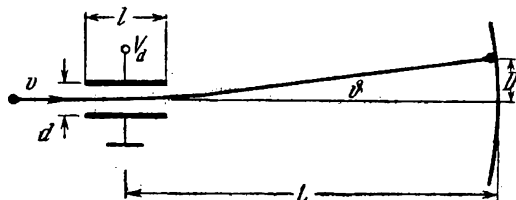


Рис. 5.

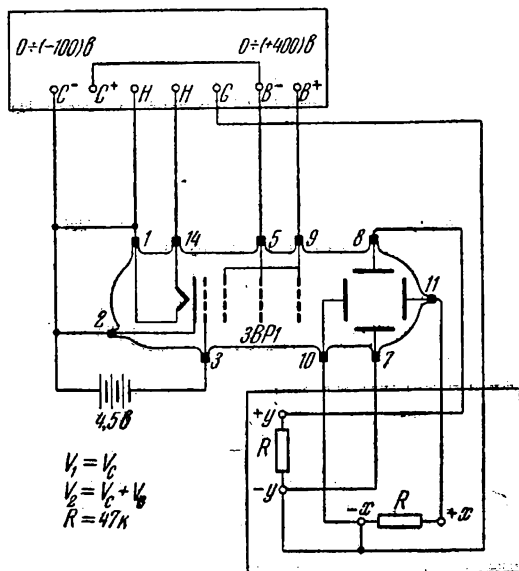


Рис. 6.

в трубке, подключаются к положительной клемме источника  $V^+$ . Первый анод присоединяется к общему зажиму, где объединены  $C^+$  и  $B^-$  клеммы источника питания. Клеммы  $V^+$  и  $G$  соединяются перемычкой, причем клемма  $G$  присоединена к корпусу прибора. Необходимо убедиться в том, что корпус прибора надежно присоединен к общему заземлению здания. Одна из каждой пары отклоняющих пластин также заземлена. К зажимам данной пары отклоняющих пластин присоединен двуязыльный провод. Если вы найдете это удобным, эти провода можно подключить к щиту схемы. Чтобы правильно

подключить отклоняющие пластины, вы должны проследить соединения, идущие назад к цоколю лампы, где номера клемм отвечают определенным пластинам. Для создания отклоняющего потенциала вы можете воспользоваться двумя батареями в 22,5 в, соединив их, как показано на рис. 7. Напряжение, приложенное к пластинам, можно измерить с помощью лабораторного вольтметра.

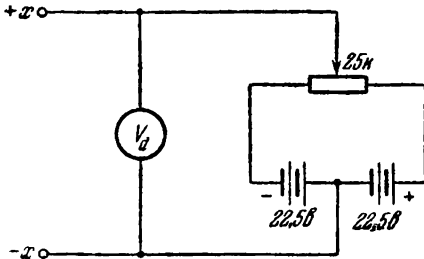


Рис. 7.

Поставьте регулируемый источник питания в исходное положение. Вы заметите красный свет, исходящий от нагревательных проволочек, помещенных сзади катода. Минуту спустя вы можете включить регулируемый источник питания. Отрегулировав источник  $B$  так, чтобы он давал потенциал, близкий к макси-

мальному, подберите потенциал источника  $C$  таким, чтобы пятно на экране оказалось хорошо сфокусированным. Приложите отклоняющее напряжение к горизонтально отклоняющим пластинам и зарегистрируйте отклонение как функцию отклоняющего напряжения. Получите аналогичные результаты для некоторых других значений  $V_B$  и  $V_C$ . Каждый раз отмечайте величины  $V_B$  и  $V_C$  и положение неотклоненного пучка. Определите расстояние  $L$  от центра горизонтально отклоняющих пластин до экрана и постройте график зависимости  $\text{tg } \phi$  от  $V_d$ , как показано на рис. 8.

Умножьте ваши данные для  $\text{tg } \phi$  на  $V_2 = V_B + V_C$  и постройте график зависимости  $\text{tg } \phi$  от  $V_d$ . Вы видите, что все данные теперь лежат на прямой линии. Чему равно эффективное значение отношения  $l/d$  для горизонтально отклоняющих пластин? На сколько эта эффективная величина отличается от значения, получаемого непосредственными измерениями геометрии пластин? Из-за больших рассеянных полей, которые простираются далеко за геометрические пределы пластин, эффективная величина  $l/d$  существенно больше, чем измеренная. Один из наиболее важных типов отклонения, используемый в катодно-лучевой трубке, это создание прямого следа, который образован отклоняющим напряжением, линейно возрастающим со временем. Такой след может быть использован в качестве шкалы времени при исследовании явлений, зависящих от времени. При образовании такого следа пятно движется обычно

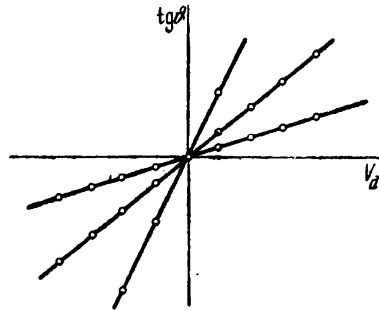


Рис. 8.

слева направо, затем быстро летит назад, налево, для того чтобы снова начать новый путь направо. Используя потенциометр, показанный на рис. 7, вы можете создать прямой след. Если пятно движется назад и вперед достаточно быстро, то совместное действие послесвечения экрана и инерции зрительного восприятия человеческого глаза дает иллюзию непрерывной горизонтальной световой линии.

### Приложение 1.1. Электростатическая фокусировка

Типичная электростатическая фокусирующая система может быть сравнена с толстыми линзами. Электростатическое поле между второй сеткой и первым анодом действует как первая преломляющая поверхность. Электроны преломляются к оси, а затем проходят через область фокусирующего анода, где поле отсутствует. В аноде находится несколько диафрагм, которые задерживают ненужные электроны, создавая тем самым узкий пучок электронов. Рис. 9, а и б показывают аналогию в электрических и оптических фокусирующих системах.

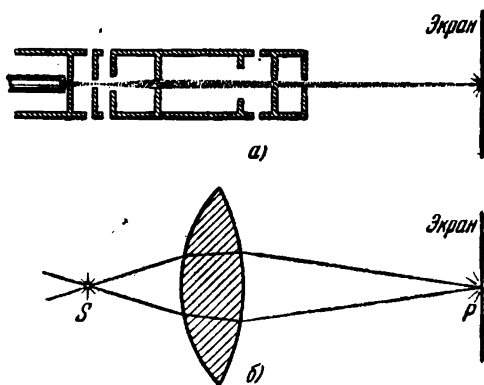


Рис. 9. Электростатическая (а) и оптическая (б) линзы.

Мы воспользуемся рядом графиков (рис. 10), для того чтобы показать принципиальные особенности оптической фокусирующей системы и чтобы разработать требования к электронным линзам. Мы можем наиболее просто вывести уравнение, приведенное на рис. 11, б, рассмотрев влияние электрического поля между  $G_2$  и  $A_1$  или между  $A_1$  и  $A_2$  на электронный пучок (см. рис. 4).

Эквипотенциальные поверхности между  $A_1$  и  $A_2$  показаны на рис. 12, электрическое поле показано на рис. 13. Мы аппроксимируем конфигурацию поля, показанную на рис. 13, с помощью очень простой модели. Представим себе, что в пределах расстояния  $2R$  (рис. 14) поле постоянно. На каждом конце этой области электрическое поле быстро обрывается на длине  $l$ , которая мала по сравнению с  $2R$ , как показано на рис. 14. Давайте вообразим, что электрон влетает в этот район слева со скоростью  $v_1$  и на расстоянии  $r$  от оси. На него будет действовать направленная к оси радиальная сила. Она вызывает уменьшение поперечной скорости

$$\Delta v_r = -\frac{e}{m} E_r \Delta t = -\frac{e}{m} \frac{E_r l}{v_1}. \quad (7)$$

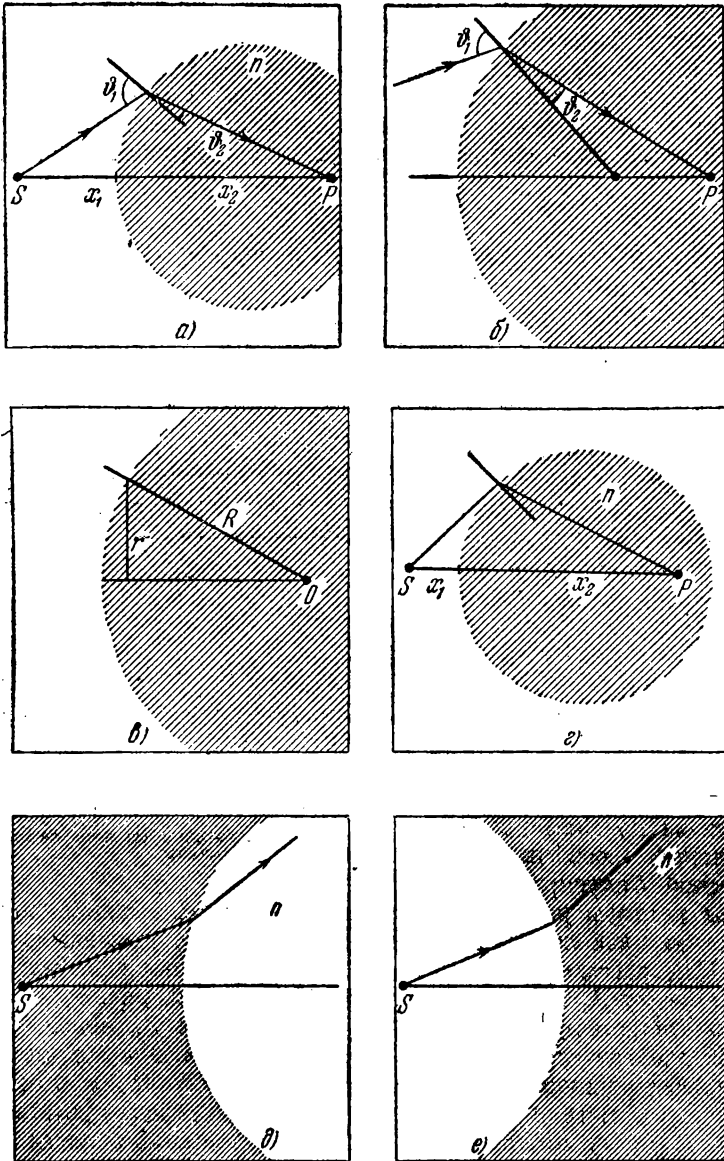


Рис. 10. Луч света от источника  $S$  после входа в оптически более плотную среду с показателем преломления  $n$  приближается к нормали к поверхности (а). Углы падения и преломления связаны законом Снеллуса  $\frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2} = n$  (б). Для параксимальных лучей  $\sin \phi_1 \approx \frac{r}{x_1} + \frac{r}{R}$ ,  $\sin \phi_2 \approx -\frac{r}{x_2} + \frac{r}{R}$  (в). Воспользовавшись законом Снеллуса, мы получим формулу линзы для одной преломляющей поверхности:  $\frac{1}{x_1} + \frac{n}{x_2} \approx \frac{n-1}{R}$  (г). Если  $n$  меньше единицы (д), или  $R$  отрицательно (е), поверхность рассеивает лучи.



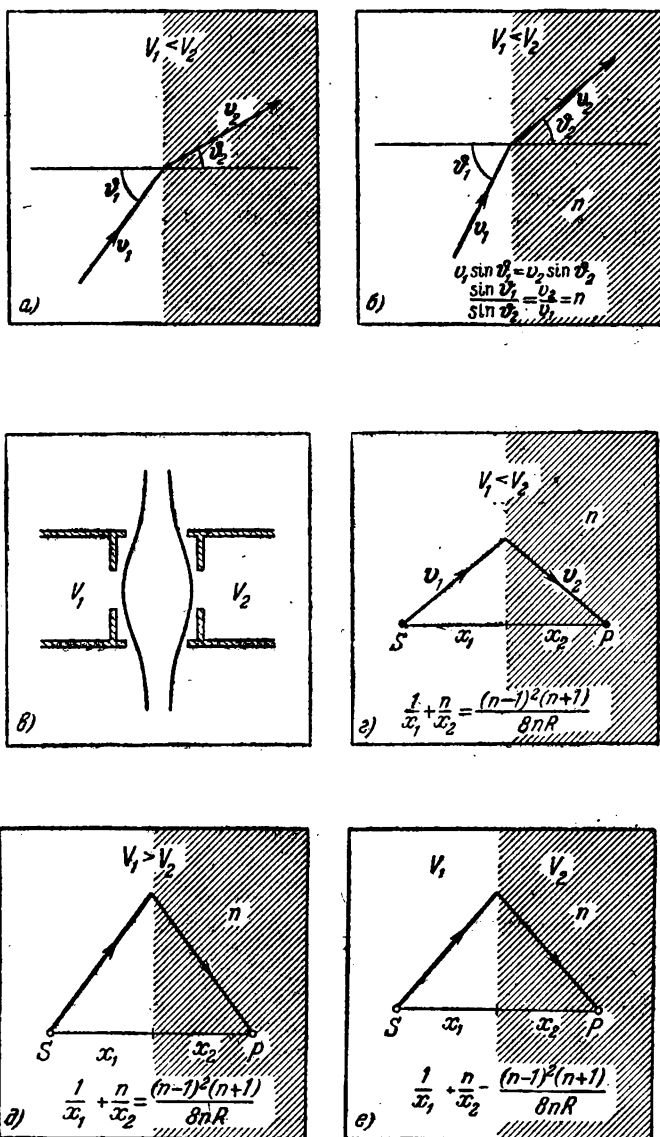


Рис. 11. Электрон после входа в область большего потенциала  $V_2$  приближается к нормали к эквипотенциальной поверхности (а). Углы падения и преломления связаны условием постоянства поперечной скорости (б). Две области постоянного потенциала разделены промежуточной областью сложной формы (в). Формула линзы имеет более сложный вид (г). Если  $n$  меньше единицы, поверхность продолжает собирать пучок электронов (д). Поэтому электростатические линзы в пространстве, свободном от зарядов, всегда являются собирающими (е).

Электрон проходит расстояние  $2R$  в однородном поле

$$E_z = \frac{V_1 - V_2}{2R}. \quad (8)$$

Поле ускоряет электрон от осевой скорости  $v_1$  до осевой скорости  $v_2$ , но не меняет его радиальную скорость. Наконец, электрон отклоняется радиально наружу и его скорость меняется на величину

$$\Delta v_r = -\frac{e}{m} E_r \Delta t = -\frac{e}{m} \frac{E_r l}{v_2}. \quad (9)$$

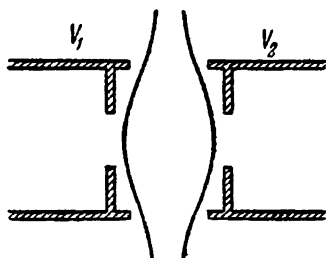


Рис. 12.

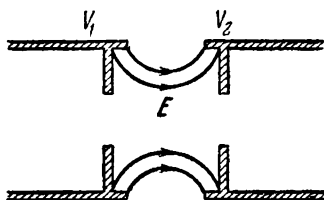


Рис. 13.

Представим себе цилиндр радиуса  $r$ , имеющий общую ось с электрическим полем. Электрические силовые линии, входящие в цилиндр справа, проходят внутри цилиндра параллельно оси и выходят слева, как показано на рис. 15. Полное число линий, проходящих через цилиндр, равно

$$N = \pi r^2 E_z = \frac{\pi r^2 (V_2 - V_1)}{2R}. \quad (10)$$

Число силовых линий, выходящих из боковой поверхности цилиндра, равно

$$N = 2\pi r l E_r. \quad (11)$$

Так как эти две величины должны быть равны, мы имеем

$$E_r = \pm \frac{r}{2l} E_z = \pm \frac{r}{4Rl} (V_2 - V_1). \quad (12)$$

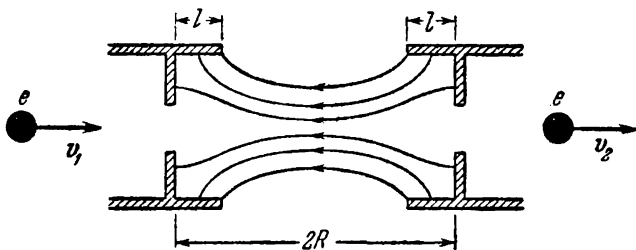


Рис. 14.

Объединяя уравнения (7) и (9) с уравнением (12), мы получаем общее изменение радиальной скорости

$$\Delta v_r = -\frac{e}{m} \frac{r}{4R} (V_2 - V_1) \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right). \quad (13)$$

Ссылаясь на рис. 11, д, мы можем написать

$$\Delta v_r = -v_2 \frac{r}{x_2} - v_1 \frac{r}{x_1}. \quad (14)$$

Объединяя уравнения (13) и (14), мы получаем

$$\frac{v_1}{x_1} + \frac{v_2}{x_2} = \frac{e}{m} \frac{r}{4R} (V_2 - V_1) \left( \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2} \right). \quad (15)$$

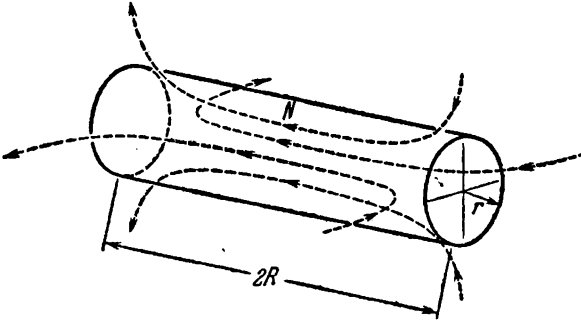


Рис. 15.

Мы можем упростить это уравнение, используя эффективные показатели преломления, введенные на рис. 11, б:  $n = v_2/v_1$ . Потенциальные энергии  $eV_2$  и  $eV_1$  равны кинетическим энергиям  $1/2mv_2^2$  и  $1/2mv_1^2$  соответственно. Подставляя значение  $n$ , окончательно получаем

$$\frac{1}{x_1} + \frac{n}{x_2} = \frac{(n-1)^2 (n+i)}{8nR}. \quad (16)$$

Из рис. 14 теперь легко понять, почему линзы всегда собирают пучок. Если мы изменим направление электрического поля, поток сначала отклонится наружу от оси, затем затормозится и потом пойдет внутрь. Таким образом, электроны проводят теперь больше времени во второй отклоняющей области, чем в первой, так что конечный эффект опять заключается в смещении пучка к оси. Элект-

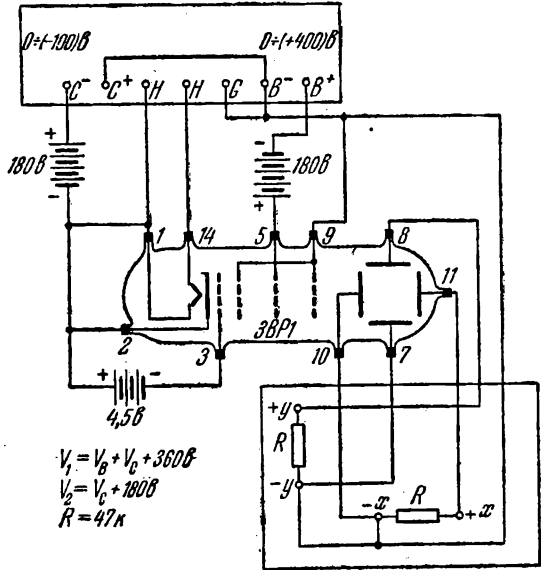


Рис. 16.

ронные пушки в ЗВР1 и сходных трубках предназначены для работы при отношении  $V_1/V_2 \cong 1/4$ , что отвечает показателю преломления  $n \cong 2$ . Чтобы оценить другое возможное значение величины  $n$ , сделаем упрощающее предположение, что электронный пучок движется параллельно оси в пределах фокусирующего анода, так что мы можем положить  $(1/x_1)$  равным нулю. Это дает второе решение для  $n \cong 1/\sqrt{3}$  или  $V_1 = 3V_2$ . Мы можем проверить это соотношение экспериментально при помощи схемы, показанной на рис. 16. Заметьте, что теперь второй анод связан с общей  $C^+B^-$  клеммой и что переключка связывает эти клеммы с землей. Первый, или фокусирующий, анод соединен с клеммой  $B^+$  через 180-вольтовую батарею. Катод соединен с клеммой  $C^-$  через такую же батарею. Найдите второе фокусирующее условие и сравните с вышеприведенными рассуждениями.

### Работа 1.2. МАГНИТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ

Мы знаем, что силы между магнитными веществами обусловлены взаимодействием между связанными атомными токами. В этом опыте мы будем изучать такие взаимодействия, но между макроскопическими (или свободными) электрическими токами.

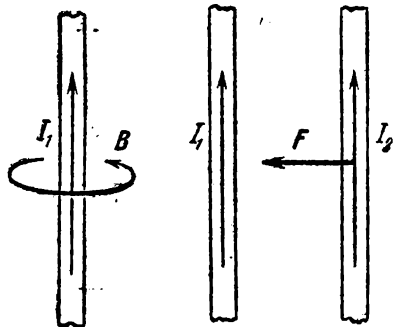


Рис. 1.

Рис. 2.

В Р.1.1 мы исследовали силу взаимодействия между квазистационарными зарядами. Мы нашли, что электронный пучок в электронно-лучевой трубке отклонялся под действием силы, вызванной присутствием зарядов на отклоняющих пластинах. Эта сила зависела только от относительного расположения зарядов, но не от их движения. Магнитные силы возникают при движении зарядов

в нашей системе координат. Можно рассматривать как силы взаимодействия между отдельными движущимися зарядами, так и силы между большим количеством зарядов, находящихся в движении, которые мы часто описываем как электрические токи. В этом опыте мы будем иметь дело с силами взаимодействия между токами, текущими в двух соленоидах, и электронным пучком в электронно-лучевой трубке. В Р.1.1, где мы изучали силы взаимодействия между статическими зарядами, мы нашли возможным описать их в терминах электрических полей. Здесь мы должны ввести понятие о так называемом магнитном поле. Мы говорим, что магнитное поле есть результат действия токов, протекающих через оба соленоида. Поток электронов, движущийся через такое поле, испытывает действие магнитной силы и отклоняется. Ток, текущий через длинный

прямой проводник, создает вокруг себя круговое магнитное поле, как показано на рис. 1. Магнитная индукция поля на расстоянии  $r$  равна

$$B = \frac{2I_1}{rc}, \quad (1)$$

где  $I_1$  — ток, текущий через проводник, а  $c = 2,99792 \cdot 10^{10}$  см/сек — скорость света. Второй проводник с током того же направления,

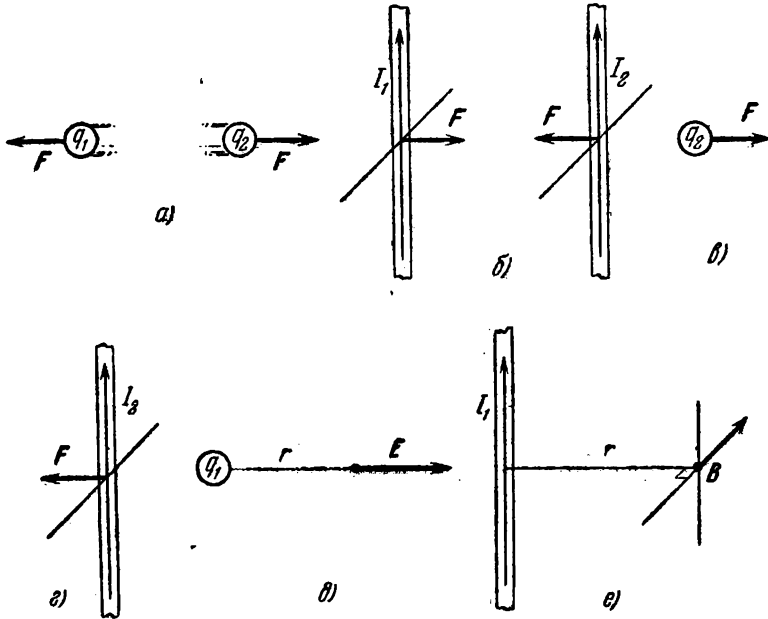


Рис. 3. Одноименные заряды отталкиваются с силой  $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$  (а). Токи одного направления притягиваются и сила, приходящаяся на единицу длины, равна  $F = 2I_1 I_2 / rc^2$  (б). Электрическое поле равно силе, действующей на единицу заряда  $F = q_2 E$  (в). Магнитное поле равно силе, действующей на единицу длины проводника при единичном токе:  $F = I_2 B / c$  (г). Поле вблизи заряда  $q_2$  равно  $E = q_1 / r^2$  (д). Магнитное поле вблизи проводника с током  $I_1$  равно  $B = 2I_1 / rc$  (е).

расположенный параллельно первому, как показано на рис. 2, будет притягиваться первым проводником с силой (на единицу длины)

$$F = \frac{I_2}{c} B = \frac{2I_1 I_2}{rc^2}. \quad (2)$$

Уравнение (2) — это экспериментальный закон. Единица заряда определяется по силе взаимодействия между неподвижными зарядами. Электрический ток определяется скоростью протекания заряда. Тот факт, что коэффициент пропорциональности в формулах (1) и (2) численно равен скорости света, не является простым

совпадением. Равенство (2) имеет фундаментальное значение и тесно связано со специальной теорией относительности. Для наших целей, однако, будет достаточно рассмотреть уравнения (1) и (2) как феноменологическое описание силы, действующей между движущимися зарядами. Мы поясняем ситуацию на рис. 3. Силу, действующую между отдельно движущимся зарядом и полем, легко найти из уравнения (2). Если  $I_2$  — ток, текущий во втором проводнике, мы можем написать

$$I_2 = N(-e)v, \quad (3)$$

потому что ток  $I_2$  можно заменить потоком  $N$  электронов через  $1 \text{ см}^2$  поверхности с зарядом  $(-e)$  и скоростью  $v$ . Тогда сила, действующая на один заряд, равна

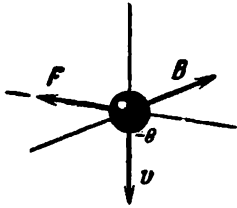


Рис. 4.

$$F = -e \frac{v}{c} B, \quad (4)$$

а направления трех векторов  $v$ ,  $B$  и  $F$  показаны на рис. 4. В общем случае любой ориентации  $v$  и  $B$  сила, действующая на электрон, равна

$$F = -\frac{e}{c} v \times B. \quad (5)$$

Операция, показанная в правой части уравнения (5), — это векторное произведение векторов. Вектор, равный векторному произведению двух векторов, нормален к их плоскости и имеет величину, равную произведению величин перемножаемых векторов на синус угла, который они образуют. Так, например, если  $v$  и  $B$  параллельны, то сила равна нулю. Направление результирующего вектора определяется правилом правой руки.

Если проводник (см. рис. 1) сделан в виде замкнутого контура, он будет окружен магнитным полем, форма которого показана на рис. 5. Поле в точке  $P$  на оси

$$B = \frac{2\pi a^2 I}{r^3 c} = \frac{2\pi I}{ac} \sin^3 \theta. \quad (6)$$

Поле однослойного соленоида, состоящего из  $N$  витков, показано на рис. 6. Его величину можно найти, суммируя вклад от каждого витка. Таким образом мы получим, что результирующее поле на оси равно

$$B = \frac{2\pi N I}{Lc} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1), \quad (7)$$

где  $L$  — длина соленоида. В частности, в центре длинной катушки  $\theta_2 \cong 0$  и  $\theta_1 \cong \pi$ , что приводит к

$$B \cong \frac{4\pi N I}{Lc}. \quad (8)$$

Если выразить ток  $I$  в единицах СГСЭ, используя соотношения

$$1 \text{ ед. СГСЭ}_q/\text{сек} = \frac{10}{c} a, \text{ или } 1a = \frac{c}{10} \text{ ед. СГСЭ}_q/\text{сек}, \quad (9)$$

получим (в смешанных единицах)

$$B \cong \frac{4\pi}{10} \frac{NI}{L}. \quad (10)$$

Удобно запомнить, что соленоид, у которого на 1 см длины приходится один ампер-виток  $\left(1 \frac{\text{амп} \cdot \text{виток}}{\text{см}}\right)$ , создает поле, примерно равное 1 гауссу.

Теперь мы рассмотрим показанное на рис. 7 явление, которое весьма близко соответствует нашему опыту.

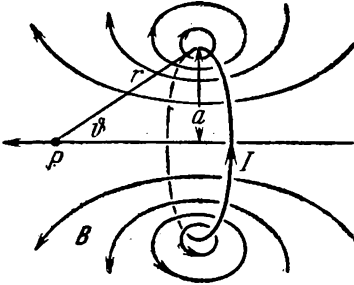


Рис. 5.

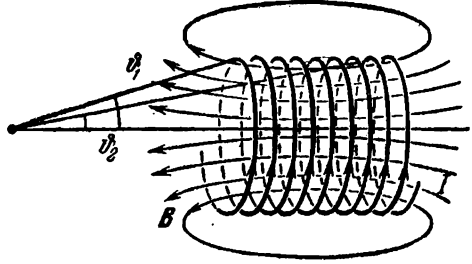


Рис. 6.

Электрон движется вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ . Он входит в область между парой соленоидов, где существует магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль оси  $x$ . Из-за этого возникает направленная вдоль оси  $y$  сила

$$F = -\frac{e}{c} vB. \quad (11)$$

В результате действия этой силы электрон будет приобретать ускорение вдоль оси  $y$ , определяемое из уравнения

$$m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{e}{c} vB. \quad (12)$$

Для простоты допустим, что поле достаточно слабое, так что скорость, приобретаемая электроном в направлении оси  $y$ , очень мала по сравнению со скоростью вдоль оси  $z$ . Мы можем записать значение  $v_y$  в любое время  $t$  как интеграл от ускорения:

$$v_y = -\frac{e}{mc} \int_0^t Bv dt = -\frac{e}{mc} \int_0^z B dz. \quad (13)$$

На рис. 8 изображена траектория электрона (в плоскости  $yz$ ) в магнитном поле. Кривизна траектории пропорциональна поперечной скорости, которая представляет собой проинтегрированное ускорение. Кривизна в любой точке пропорциональна полю. Слева от соленоида электрон движется по прямой. Траектория имеет наиболь-

шую кривизну там, где электрон проходит через соленоид. В нашем опыте мы можем предположить, что электрон ударяется об экран (штрих-пунктирная линия) в точке  $z = z_0$ , где его отклонение по оси  $y$  равно  $y_0$ . Мы можем записать смещение по  $y$  в виде

$$y_0 = D = \int_0^T v_y dt = \frac{1}{v} \int_0^L v_y dz. \quad (14)$$

Объединяя уравнения (13) и (14), мы можем получить выражение для  $y_0$  в виде двойного интеграла. Существуют различные способы вычисления этого интеграла. Если мы допустим, что

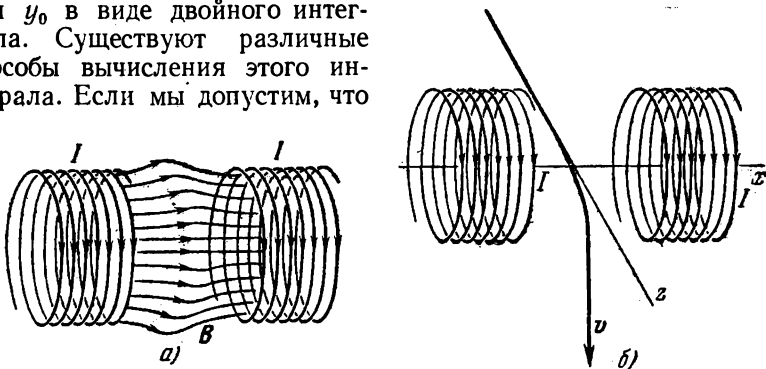


Рис. 7.

магнитное поле  $B$  постоянно, то из уравнения (13) получим

$$v_y \cong - \frac{e}{mc} Bz. \quad (15)$$

Подставив  $v_y$  в уравнение (14), придем к равенству

$$D \cong - \frac{e}{mc} \frac{BL^2}{2v}. \quad (16)$$

Другой крайний случай заключается в допущении, что поле  $B$  ограничено расстоянием  $2a$ , которое мало по сравнению с  $z_0$ . Электроны тогда отклоняются на угол

$$\vartheta \cong \frac{v_y}{v} = - \frac{e}{mc} \frac{2aB}{v}. \quad (17)$$

Реальная ситуация в нашем опыте находится где-то между этими двумя случаями, и в нашем геометрическом построении мы не сможем ожидать точного согласия расчета с опытом. Во всяком случае ясно, что отклонение, измеренное на экране, будет прямо пропорционально току через соленоиды и обратно пропорционально скорости электрона. Рассматривая связь между кинетической энергией электрона и потенциалом

$$\frac{1}{2} mv^2 = eV_2, \quad \text{или} \quad v = \left( \frac{2eV_2}{m} \right)^{1/2}, \quad (18)$$



мы видим, что отклонение должно быть обратно пропорционально корню квадратному из ускоряющего потенциала. В Р.1.1 мы нашли, что отклонение обратно пропорционально первой степени ускоряющего потенциала. Различие объясняется тем, что здесь отклоняющая сила пропорциональна скорости электрона, в то время как в электростатике отклоняющая сила не зависит от скорости электрона.

Используемое нами экспериментальное устройство идентично тому, которым мы пользовались в Р.1.1, рис. 6. Соленоиды удобно питать от низковольтного регулируемого источника питания, собранного на транзисторах (ИП на рис. 9). Присоединим соленоиды последовательно к источнику питания и убедимся, что поля обоих соленоидов складываются. Если  $R$  — сопротивление последовательно соединенных соленоидов, то напряжение на соленоидах равно

$$V_s = IR.$$

На рис. 10 показаны результаты измерения отклонений пятна в зависимости от напряжения на соленоидах для нескольких значений отклоняющего потенциала  $V_2$ . Заметьте, что отклонение растет линейно с увеличением тока через соленоид. Изобразите ваши экспериментальные данные как функцию величины  $V_s/\sqrt{V_2}$ . Какой вывод следует из полученной зависимости?

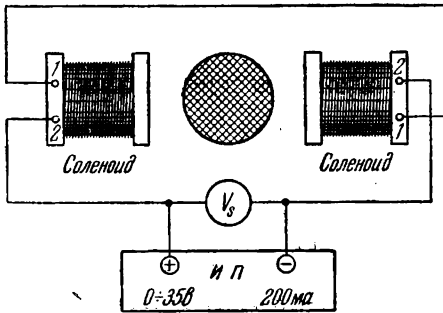


Рис. 9.

В Р.1.1 вы могли убедиться в том, что при отсутствии отклоняющего потенциала  $V_2$  положение пятна на экране катодно-лучевой трубки зависело от ускоряющего потенциала. Каково происхождение этого отклонения? Отмечая положение пятна на экране карандашом, вы можете найти такое направление трубки в пространстве, для которого не существует отклонения. Каково это направление? Можете ли вы найти направление, вдоль которого отклонение было бы максимальным? Используя уравнение (16), которое справедливо для этого случая, вычислите  $B$ . В качестве  $L$

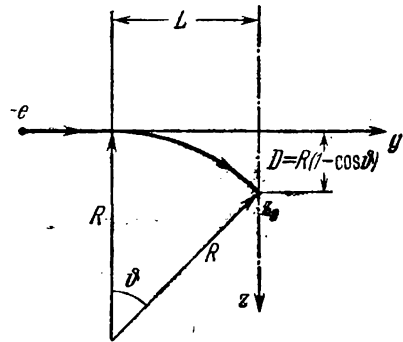


Рис. 8.

вы можете взять расстояние между вторым анодом и экраном. Электроды в большинстве катодно-лучевых трубок сделаны из никеля, так что магнитное поле внутри анодов очень мало и любое отклонение пучка перед тем, как он покинет вторичный анод, будет весьма небольшим. Сравните ваше определение величины и направления  $B$  с табличными данными о земном магнитном поле. Как вы объясните различие?

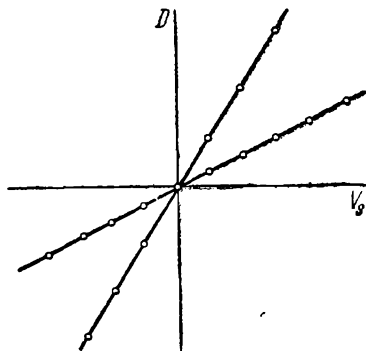


Рис. 10.

### Работа 1.3. ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ

В Р.1.2 мы изучали отклонение пучка электронов, движущихся в магнитном поле  $B$ . Поскольку угловое отклонение электронов было очень мало, мы можем считать, что электроны приобретали некоторую дополнительную поперечную скорость. Здесь мы будем изучать движение электронного пучка, движущегося приблизительно параллельно полю  $B$ . При анализе движения электрона удобно разложить скорость электрона на две составляющие: перпендикулярную и параллельную магнитному полю  $B$ . Как показано на рис. 1, магнитное поле  $B$  вращает вектор скорости с угловой частотой

$$\omega = \frac{eB}{mc}. \quad (1)$$

На рис. 2 показано, что орбита электрона представляет собой окружность радиуса

$$R = \frac{v}{\omega}, \quad (2)$$

где  $v$  — составляющая скорости вдоль направления, перпендикулярного полю (поперечная составляющая).

Движение электронов, показанное на рис. 1 и 2, осуществляется в круговых ускорителях частиц, например в циклотроне. По этой причине частота, определяемая уравнением (1), называется *угловой циклотронной частотой*.

Быстрота вращения поперечной составляющей скорости не зависит от скорости частицы: величина  $\omega$  пропорциональна отношению заряда к массе и величине магнитного поля  $B$ . Радиус орбиты, однако, зависит от поперечной скорости. Чем быстрее электрон движется, тем больше радиус орбиты.

Рассмотрим теперь составляющую скорости, параллельную магнитному полю  $B$ . Сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в некотором направлении по отношению к магнитному

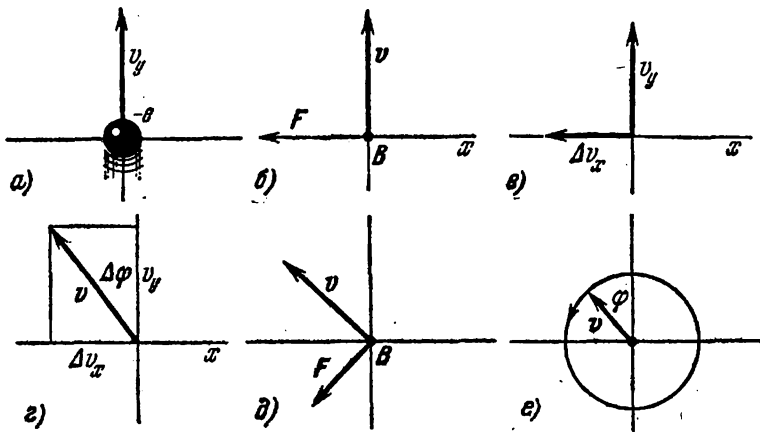


Рис. 1. Рассмотрим электрон (с зарядом  $-e$ ), движущийся вертикально со скоростью  $v_y$  (а). Если магнитное поле  $B$  направлено перпендикулярно плоскости рисунка по оси  $z$ , то на электрон действует сила, направленная по  $-x$ :  $F = (-e/c) v \times B$  (б). За время  $\Delta t$  электрон приобретает горизонтальную скорость  $\Delta v_x = (F_x/m) \Delta t$  (в). Результирующая скорость направлена под углом  $\Delta\phi = \Delta v_x/v_y$  (г). Скорость меняет направление, поэтому сила, которая перпендикулярна скорости, также меняет направление (д). Таким образом, под действием магнитного поля вектор  $v$  равномерно поворачивается с угловой скоростью  $\omega = \Delta\phi/\Delta t = eB/mc$  (е).

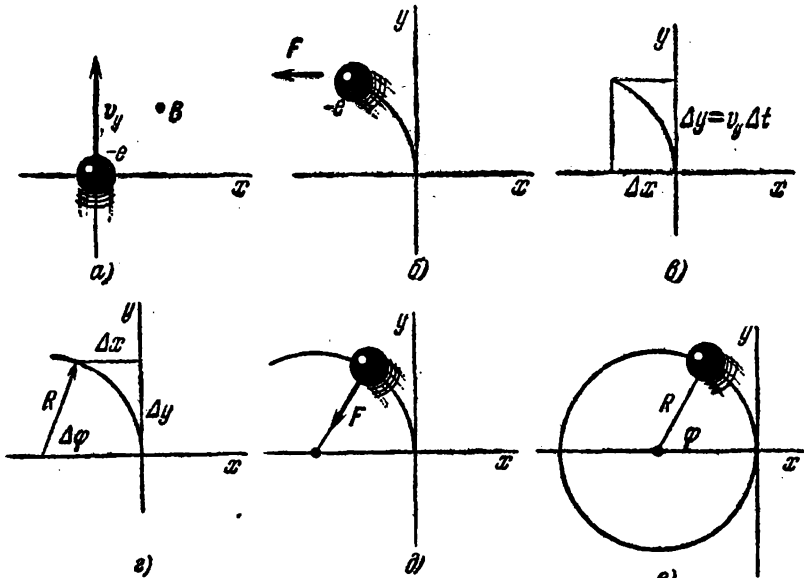


Рис. 2. Какова орбита электрона, движущегося в магнитном поле (а)? Поперечное поле отклоняет электрон (б). За время  $\Delta t$  электрон испытывает горизонтальное смещение  $\Delta x = \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$  (в). Начальный путь электрона представляет собой дугу окружности с радиусом кривизны  $R = v (\Delta t/\Delta\phi)$ , причём  $\Delta y = R \Delta\phi$ ,  $\Delta x = \frac{1}{2} R (\Delta\phi)^2$  (г). Но сила все время остается перпендикулярной траектории электрона (д). Поэтому электрон движется по круговой орбите радиусом  $R = v/\omega$  (е).

полю, равна

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3)$$

Величина силы

$$F = \frac{q}{c} vB \sin \vartheta, \quad (4)$$

где  $\vartheta$  — угол между направлением скорости и направлением поля  $\mathbf{B}$ . Если заряд движется параллельно магнитному полю, угол  $\vartheta$  равен нулю и сила отсутствует. Таким образом, частица, первоначально двигавшаяся параллельно магнитному полю, будет продолжать параллельное движение с постоянной скоростью.



Рис. 3.

Каким будет сложное движение электрона, движущегося приблизительно параллельно полю  $\mathbf{B}$ ? Мы видели, что магнитная сила, действующая на электрон, возникает только из-за поперечной скорости. Вектор

результатирующей скорости будет тогда вращаться по поверхности конуса, угол раскрытия которого равен  $2\vartheta$ . Орбита электрона будет представлять собой винтовую линию, показанную на рис. 3. Угол поворота электрона будет равен

$$\varphi = \omega t, \quad (5)$$

а его продольное смещение

$$z = v_z t. \quad (6)$$

Ход винта — это расстояние, которое электрон проходит при вращении на  $2\pi$  радиан. Исключая время в уравнениях (5) и (6), мы получаем

$$z = \varphi \frac{v_z}{\omega}. \quad (7)$$

Ход винта оказывается равным

$$p = 2\pi \frac{v_z}{\omega}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь частный случай винтового движения электронного пучка в электронно-лучевой трубке (рис. 4). Электронный пучок испускается со второго анода со скоростью  $v_z$ , параллельной приложенному аксиальному магнитному полю  $\mathbf{B}$ . Если разность потенциалов на вертикально отклоняющих пластинах равна  $V_d$ , электронный пучок будет отклонен на угол

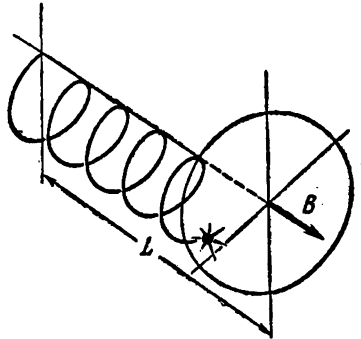


Рис. 4.

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{V_d}{V_2} \frac{l}{2d}, \quad (9)$$

как это следует из формулы (5) Р.1.1. Пучок приобретает поперечную скорость, равную

$$v_y = v_z \operatorname{tg} \vartheta. \quad (10)$$

Электроны в пучке будут двигаться вдоль трубки по винтовой линии радиуса

$$r = \frac{v_y}{\omega} = \frac{v_z}{\omega} \operatorname{tg} \vartheta \quad (11)$$

с ходом винта

$$p = 2\pi \frac{v_z}{\omega}. \quad (12)$$

Если расстояние от центра вертикально отклоняющих пластин до экрана равно  $L$ , то электроны повернутся на угол

$$\varphi = 2\pi \frac{L}{p} = \omega \frac{L}{v_z}. \quad (13)$$

Траектория отклоненного пучка электронов показана на рис. 4. Как меняется положение пятна на экране катодно-лучевой трубки при изменении магнитного поля  $\mathbf{B}$ , если величина отклоняющей разности потенциалов  $V_d$  задана? Мы должны помнить, что электроны движутся по винтовой линии, ось которой горизонтально смещена от центра экрана на радиус  $r$ .

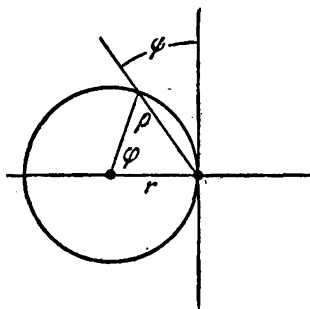


Рис. 5.

Чтобы написать уравнение траектории пятна при увеличении магнитного поля, воспользуемся полярными координатами  $\psi$  и  $\rho$  (рис. 5). С помощью этого рисунка мы получаем следующие выражения для полярных координат:

$$\rho = 2r \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{p}{\pi} \operatorname{tg} \vartheta \sin \pi \frac{L}{p}, \quad (14)$$

$$\psi = \frac{\varphi}{2} = \pi \frac{L}{p}. \quad (15)$$

Здесь мы использовали равенства (11), (12) и (13). Исключая ход винта  $p$  из уравнений (14) и (15), мы получаем уравнение

$$\rho = L \operatorname{tg} \vartheta \frac{\sin \psi}{\psi}. \quad (16)$$

Это уравнение спирали, называемой кохлеоидой; она графически изображена на рис. 6.

Начнем изучение движения электронов по винтовой линии с того, что приложим ускоряющие потенциалы к катодно-лучевой трубке (см. Р.1.1, рис. 6). Создадим осевое магнитное поле, помещая на шейку катодно-лучевой трубки пару соленоидов, присоединенных последовательно к транзисторному источнику питания. Приложим

отклоняющий потенциал к вертикальным пластинам и будем постепенно увеличивать величину магнитного поля. Заметим величину разности потенциалов на соленоидах, при которой пятно возвращается в центр экрана. Каково соотношение между этими потенциалами? Прибор, основанный на таком принципе, был впервые использован в 1922 г. профессором Бушем в

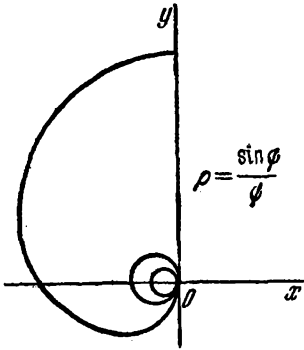


Рис. 6.

Йене для точного определения отношения заряда к массе у электрона. Применяв специально сконструированную для этой цели трубку, он смог получить точность порядка десятой. процента \*).

Хотя точность нашего опыта не лучше нескольких процентов, все же имеет смысл определить отношение  $e/m$  при помощи нашего простого прибора. Один из принципиальных источников ошибки в нашем опыте связан с тем, что пластины и аноды в нашей катодно-лучевой трубке сделаны из никеля, который магнитен. Поэтому электроды создают магнитное поле, которое вызывает неучитываемое отклонение электронов.

Далее, отклоняющая область простирается за пределы размеров соленоидов, так что мы вынуждены подсчитывать среднюю величину магнитного поля. Наконец, в нашем опыте центр электростатического отклонения также не является вполне определенным.

Из уравнений (1) и (2) мы получаем для хода винта

$$\rho = \frac{2\pi v_2 c}{(e/m) B} \tag{17}$$

Используя равенство (1) из Р.1.1  $\frac{1}{2} m v_2^2 = e V_2$ , мы получаем

$$\rho = \frac{2\pi c}{B} \sqrt{2V_2} \sqrt{m/e}, \tag{18}$$

откуда

$$\frac{e}{m} = 2V_2 \left( \frac{2\pi c}{B\rho} \right)^2 \tag{19}$$

Для хорошего определения отношения  $e/m$  мы должны точно вычислить среднюю величину поля вдоль оси катодно-лучевой трубки.

Поле на оси бесконечно длинного соленоида было дано уравнением (8) Р.1.2

$$B = \frac{4\pi N' I}{c}, \tag{20}$$

\*) Описание этого опыта см. Physikalische Zeitschrift 23, 438 (1922).

где  $N'$  — число витков на единицу длины. На рис. 7 показано сечение соленоида конечной длины, имеющего заметную толщину. На рис. 8 мы привели график поля вдоль оси такого соленоида длиной  $2S \cong 10$  см с внутренним диаметром  $d \cong 8$  см и внешним диаметром  $D = 11$  см. Единица на оси ординат этого графика отвечает полю, вычисленному по формуле (20). Воспользовавшись рис. 8, мы можем вычислить поправочный коэффициент для магнитного поля  $B$ , создаваемого парой соленоидов. Вычислив ток через соленоид по известной разности потенциалов и сопротивлению, определим величину  $B\rho$  в уравнении (19). Не забудем превратить ток  $I$ , вычисленный в амперах, в гауссовы единицы, пользуясь соотношением

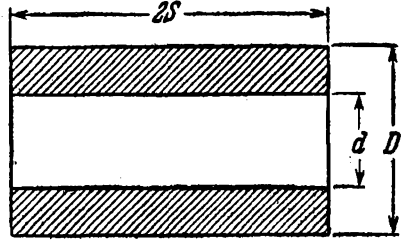


Рис. 7.

$$1 a = \frac{c}{10} \text{ ед. СГСЭ}_q/\text{сек},$$

а также выразить ускоряющий потенциал  $V_2$ , измеренный в вольтах, через гауссовы единицы согласно соотношению

$$1 v = \frac{10^8}{c} \text{ ед.СГСЭ}_v.$$

Наилучшее современное значение отношения  $e/m$  равно

$$\frac{e}{m} = 5,2727 \cdot 10^{17} \text{ (в гауссовых единицах).}$$

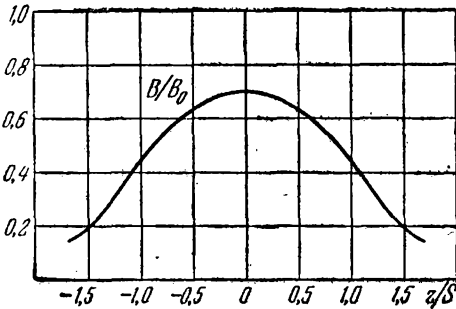


Рис. 8.

Какое значение получили вы? Каковы принципиальные источники ваших ошибок? Как можно создать более совершенный прибор \*)? Может быть вы заметили, что когда ход винтовой линии  $p$  был кратен  $L$ , электронное пятно было наиболее резким. Это наблюдение показывает, что постоянное магнитное поле фокусирует электронный пучок. Изменим отклоняющий потенциал  $V_a$ , чтобы слегка дефокусировать пучок электронов. Теперь увеличим магнитное поле  $B$  и будем наблюдать периодичность фокусировки и дефокусировки

\*) Описание современной трубки см. Н. V. Heher, Amer. J. Phys. 29, 471 (1961).

пучка. Можете ли вы объяснить с помощью рис. 6, каким образом магнитное поле фокусирует электронный пучок? Используйте условие фокусировки для получения улучшенного значения  $e/m$ . Каково теперь расстояние  $L$ ?

#### Работа 1.4. ВРЕМЯ ПРОЛЕТА ЭЛЕКТРОНОВ

В трех предыдущих работах нас интересовали прежде всего траектории электронов в электрических и магнитных полях. Мы не проявляли особенного интереса к скорости, с которой электроны движутся по своим траекториям. В этой работе мы проведем прямое измерение времени пролета электронов в катодно-лучевой трубке.

Прежде чем рассмотреть методику опыта, полезно получить некоторое представление о порядке величины скорости и времен пролета электронов. Формула (1) P.1.1 связывает кинетическую энергию электрона и потенциал

$$\frac{1}{2} m v_z^2 = e V_2. \quad (1)$$

Здесь  $V_2$  — электростатический потенциал отклоняющей области по отношению к катоду. Решая это уравнение для скорости электрона, получаем

$$v_z = \sqrt{2e/m} \cdot \sqrt{V_2}. \quad (2)$$

Подставляя значение  $e/m = 5,2727 \cdot 10^{17}$  (гауссовых единиц), получаем

$$v_z = 1,0269 \cdot 10^9 \sqrt{V_2} \text{ см/сек},$$

где  $V_2$  выражено в ед. СГСЭ<sub>v</sub>. Полезно запомнить, что электрон, который получил ускорение под действием 300 в (что равно 1 ед. СГСЭ<sub>v</sub>), достигает скорости  $\sim 10^9$  см/сек.

Циклотронная частота в поле  $B$  дана формулой (1) P.1.3

$$\omega = \frac{eB}{mc}, \quad (3)$$

где  $B$  выражено в гауссах. Подставляя величину  $e/m$  в (3), мы получаем для частоты (число циклов в секунду):

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \cong 2,7994 \text{ Мгц}^*).$$

В поле 100 гс электрон вращается с частотой, примерно равной 280 Мгц. Период вращения  $T = 1/\nu \cong 3,6$  нсек (нсек =  $10^{-9}$  сек). Сколько оборотов совершит электрон в поле 100 гс при движении от центра вертикально отклоняющих пластин к экрану, расположенному на расстоянии в 15 см? Один из способов такого подсчета состоит в том, чтобы сначала определить ход винтовой линии

$$p = \frac{v_z}{\nu} = \frac{10^9}{280 \cdot 10^6} = 3,6 \text{ см},$$

\*) Согласно принятым у нас обозначениям единица частоты колебаний, равная 1 циклу в секунду, называется герцем (гц). (Прим. ред.)



затем количество оборотов, равное длине  $L$ , деленной на величину  $p$ :

$$n = \frac{L}{p} = \frac{15}{3,6} \cong 4.$$

Другой способ рассмотрения этой задачи — подсчитать время, которое требуется электронам для движения от вертикально отклоняющих пластин до экрана:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{15}{10^9} = 15 \text{ нсек.}$$

Теперь заметим, что число циклов равно этому времени, деленному на период вращения:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{15}{3,6} \cong 4.$$

В Р.1.3 мы придерживались первого способа, так как нас интересовал прежде всего путь электрона. В этом опыте мы рассмотрим второй способ, так как нас интересует измерение времени.

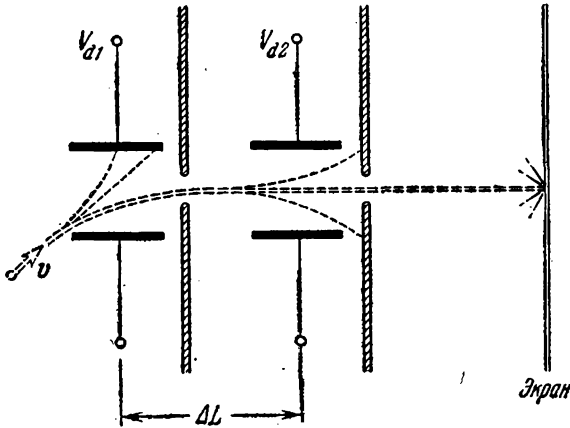


Рис. 1.

Первое измерение скорости катодных лучей было сделано профессором Вихертом \*). Остроумное приспособление, использованное им, показано на рис. 1. Пучок электронов направляется в область между парой отклоняющих пластин, непосредственно за которой помещается диафрагма, содержащая маленькое отверстие. Между этим устройством и флуоресцирующим экраном находится вторая пара таких же отклоняющих пластин и второе отверстие.

Вихерт прикладывал к двум парам пластин высокочастотное отклоняющее напряжение, подбирая такую амплитуду и частоту, чтобы наблюдать пятно на экране. Электронный пучок будет иметь

\*) См. Ann. d. Phys. Chem. **69**, 739 (1899).

максимальную интенсивность тогда, когда отклонение первого отверстия от траектории электронов будет минимальным. Если частота отклоняющего сигнала достаточно мала, то вторая пара отклоняющих пластин также отклонит пучок вниз. Однако, если частота такова, что электрон проходит расстояние  $\Delta L$  за четверть цикла, пучок почти не будет отклоняться при прохождении через вторую пару пластин и попадет на экран. Если увеличить частоту, пучок будет отклоняться второй парой пластин вверх.

На рис. 2 показана зависимость разности потенциалов отклоняющих пластин от времени  $t$ . Там же пунктиром показана зависимость от  $t$  координаты  $z$  электронного пучка. Для удобства мы предполагаем, что отклоняющая частота постоянна, а меняется скорость

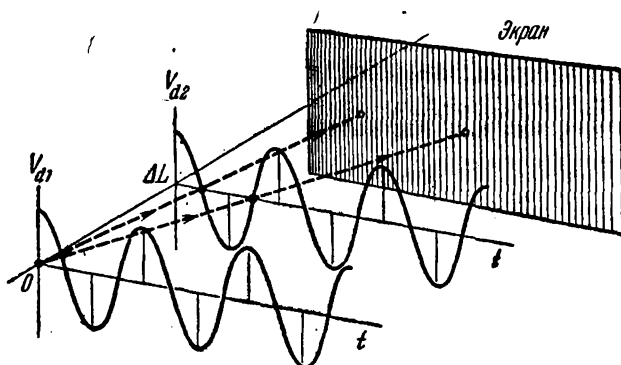


Рис. 2.

электрона. Заметьте, что только при определенных скоростях электронный пучок будет попадать на экран. Условие образования пятна заключается в том, что электроны должны пролететь расстояние  $\Delta L$  за нечетное число четвертей периода:

$$\frac{\Delta L}{v} = \frac{2n+1}{4\nu}. \quad (4)$$

Допустим, что  $\Delta L = 15$  см и что электроны были ускорены разностью потенциалов в 300 в; тогда время пролета равно

$$t = \frac{\Delta L}{v} = \frac{15}{10^8} = 15 \text{ нсек.}$$

Самая низкая частота, при которой может образоваться пятно на экране, равна

$$\nu = \frac{1}{60} \text{ нсек}^{-1} \cong 16 \text{ Мгц.}$$

Вихерт получал сигналы такой частоты, возбуждая с помощью искры резонансный контур, образованный парой отклоняющих пластин, соединенных проволочной петлей. Этот метод был разработан в 1880 г. Генрихом Герцем в Карлсруэ в связи с его экспери-

ментами по распространению электромагнитных волн. Хотя измерения Вихерта не были особенно точны, они были замечательным достижением для своего времени.

После создания современных электронных генераторов нам стали доступны когерентные радиочастотные сигналы, и с их помощью

мы можем производить измерения скорости электронов в обычной катодно-лучевой трубке. Давайте приложим синусоидальное радиочастотное отклоняющее напряжение одновременно к горизонтально и вертикально отклоняющим пластинам, как показано на рис. 3. Предположим, что отклоняющий сигнал имеет достаточно высокую частоту, так что электронам потребуется заметная часть цикла, чтобы пройти приблизительно 2 см от центра вертикально отклоняющих пластин к центру горизонтальных. Такая ситуация показана на рис. 4, где на одном рисунке совмещены отклоняющие напряжения и зависимости  $z$  от  $t$ , как это было сделано на рис. 2.

Время, которое требуется электрону, чтобы пройти расстояние  $\Delta L$ , равно  $\Delta t = 2/10^9$  сек = 2 нсек. Если это время составляет 10% четверти периода, мы получаем частоту

$$\nu = \frac{0,025}{2 \cdot 10^{-9}} \cong 12,5 \text{ Мгц.}$$

Каким образом характер видимого на экране следа дает возможность определить скорость электрона? Проследим с помощью рис. 4, как отклоняется электрон, проходящий через вертикально отклоняющие пластины в момент времени  $t_0$ . Напряжение на отклоняющих пластинах равно

$$V_{d1} = A \cos \omega t, \quad V_{d2} = B \cos \omega t. \quad (5)$$

Электрон получит вертикальную скорость

$$v_y = \frac{e}{m} \left( \frac{A}{d} \cos \omega t_0 \right) \frac{l}{v_z}, \quad (6)$$

где  $l$  — длина пластин. Спустя некоторое время электрон пройдет через горизонтально отклоняющие пластины, где он приобретает горизонтальную скорость

$$v_x = \frac{e}{m} \left[ \frac{B}{d} \cos \omega (t_0 + \Delta t) \right] \frac{l}{v_z}. \quad (7)$$

Электрон ударится об экран в точке с координатами

$$y = L_1 \frac{v_y}{v_z} = y_1 \cos \omega t_0, \quad (8)$$

$$x = L_2 \frac{v_x}{v_z} = x_1 \cos \omega (t_0 + \Delta t). \quad (9)$$

Какова форма кривой, образованной на экране следами от удара электронов для всех значений  $t_0$ ? Если сопоставить кривую, изображенную на рис. 5, с уравнениями (8) и (9), то легко понять, что максимальными значениями  $x$  и  $y$  являются  $x_1$  и  $y_1$ . Электроны, проходящие через вертикально отклоняющие пластины при  $V_{d1} = 0$ , не испытывают вертикального отклонения. Их горизонтальное отклонение равно  $\pm x_1 \sin \omega \Delta t$ , как это видно из рис. 4. Аналогично, вертикальные отклонения равны  $\pm y_1 \sin \omega \Delta t$ . Отсюда видно, что

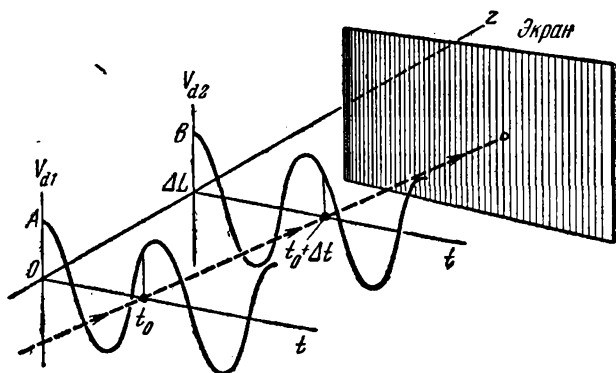


Рис. 4.

мы можем определить  $\sin \omega \Delta t$  по кривой на экране, измерив отношение расстояния между точками, в которых кривая пересекает ось  $y$ , к удвоенной величине максимального отклонения по оси  $y$ . Хотя для этого и необязательно знать уравнение кривой, показанной на рис. 5, полезно показать, что эта кривая представляет собой эллипс. Для этого мы выразим косинус суммы в уравнении (9) по формуле

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

и получим

$$\frac{x}{x_1} = \cos \omega \Delta t \cos \omega t_0 - \sin \omega \Delta t \sin \omega t_0. \quad (10)$$

Из уравнения (8) следует

$$\cos \omega t_0 = \frac{y}{y_1}, \quad \sin \omega t_0 = \left[1 - \left(\frac{y}{y_1}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Подставляя эти значения синуса и косинуса в (10), получаем

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} \cos \omega \Delta t - \left[1 - \left(\frac{y}{y_1}\right)^2\right]^{1/2} \sin \omega \Delta t. \quad (11)$$

После возведения уравнения (11) в квадрат мы наконец получаем

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 - 2\frac{x}{x_1}\frac{y}{y_1}\cos\omega\Delta t + \left(\frac{y}{y_1}\right)^2 = \sin^2\omega\Delta t. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет квадратичную форму и должно соответствовать окружности, эллипсу, параболе или гиперболе. Из рис. 5 следует, что уравнение (12) может представлять только эллипс. Легко преобразовать уравнение (12) к главным осям и получить более знакомую форму уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (13)$$

Мы не будем заниматься здесь этими простыми алгебраическими преобразованиями, а предоставим их вам в качестве упражнения.

Может быть, полезно рассмотреть несколько предельных случаев уравнений (8) и (9) и убедиться, что (12) является действительно геометрическим местом точек для начальных моментов времени  $t_0$ .

1. Когда частота достаточно низка, так что  $\omega\Delta t$  пренебрежимо мало, отклонения  $x$  и  $y$  будут в фазе и мы можем ожидать прямой линии с наклоном  $y_1/x_1$ . Полагая в уравнении (12)  $\omega\Delta t = 0$ , мы получим

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 - 2\frac{x}{x_1}\frac{y}{y_1} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^2 = 0,$$

что означает

$$\frac{x}{x_1} - \frac{y}{y_1} = 0,$$

т. е. уравнение прямой линии.

2. Когда частота настолько высока, что электронам требуется четверть периода, чтобы пройти расстояние между двумя парами отклоняющих пластин, то  $\omega\Delta t = \pi/2$  и мы должны получить эллипс с главными осями вдоль  $x$  и  $y$ . Подставляя  $\omega\Delta t = \pi/2$  в (12), имеем

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_1}\right)^2 = 1,$$

как и ожидалось.

Перед началом самого опыта рассмотрите его основные идеи, воспользовавшись для этого рядом простых рисунков (рис. 6 и 7). Схему подключения катодно-лучевой трубки к источникам питания см. в Р.1.1, рис. 6. Чтобы получить эллиптическую траекторию на экране катодно-лучевой трубки, необходимо иметь источник синусоидального напряжения в интервале частот 10—50 Мгц с амплитудой не менее 10 в. Типичная «блок-схема» высокочастотного генера-

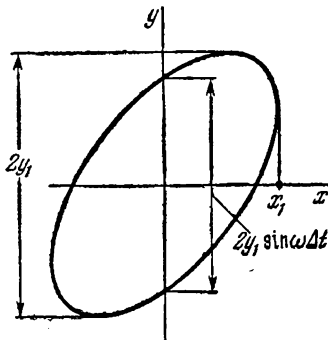


Рис. 5.

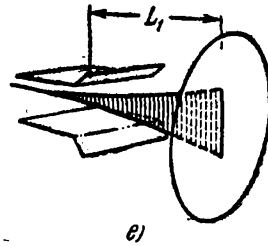
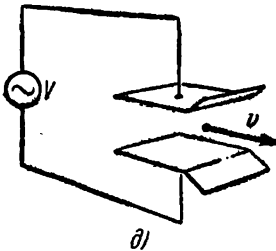
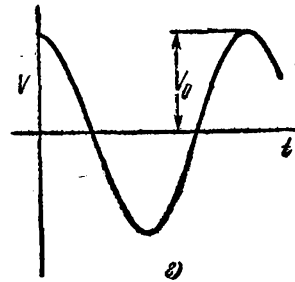
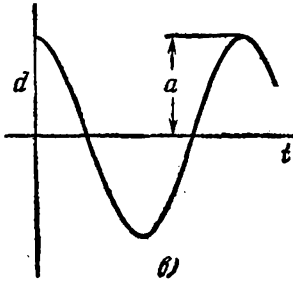
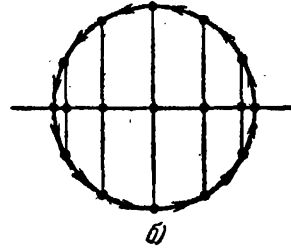
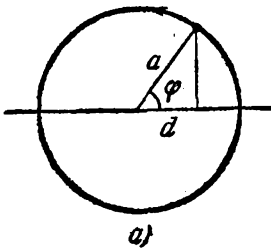


Рис. 6. Рассмотрим (а) проекции точки, равномерно движущейся по окружности:  $\varphi = \omega t$ ,  $d = a \cos \varphi$ . Эти проекции описывают простое гармоническое движение (б) со смещением, равным  $d = a \cos \omega t$  (с). Рассмотрим теперь (д) потенциал, который зависит от времени таким же образом, т. е.  $V = V_0 \cos \omega t$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ , и приложим его к паре отклоняющих пластин (д). Он развернет электронный пучок на экране в вертикальной плоскости (е), при этом  $\nu = \nu_1 \cos \omega t_1$ .

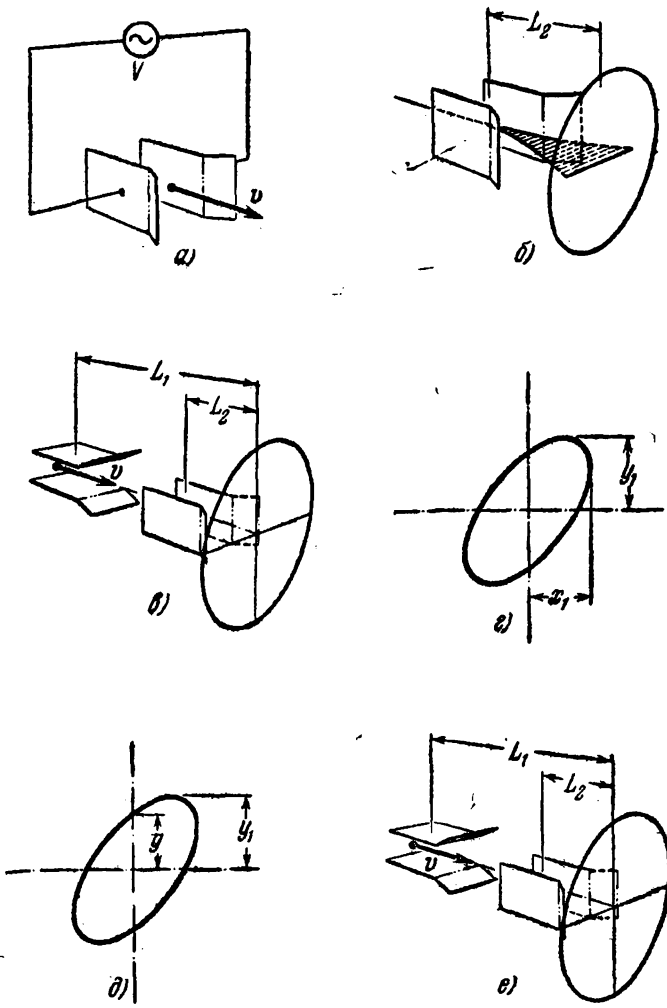


Рис. 7. Потенциал  $V = V_0 \cos \omega t$ , приложенный к паре горизонтально отклоняющих пластин (а), разворачивает пучок на экране (б) в горизонтальной плоскости  $x = x_1 \cos \omega(t + \Delta t)$ . Что произойдет, если мы будем одновременно отклонять пучок в горизонтальной и вертикальной плоскостях (см. (в))? След пучка на экране будет описывать эллипс (г). Если  $\omega(t_0 + \Delta t) = \pi/2$ , то  $x = 0$  и  $y = y_1 \sin \omega \Delta t$  (см. (д)). По величине отношения  $y/y_1$ , мы определим  $\Delta t$  и вычислим скорость электрона  $v = (L_1 - L_2)/\Delta t$  (е).

тора показана на рис. 8. (Блок-схема часто используется для того, чтобы показать функциональные узлы схемы, не рисуя самих электрических цепей.) Основным узлом генератора является осциллятор  $I$ , частота которого определяется резонансным контуром, состоящим

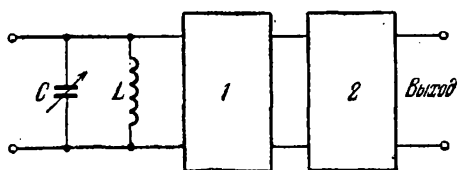


Рис. 8.

из индуктивности  $L$ . Генератор снабжен буферным усилителем 2, который отделяет осциллятор от нагрузки. Это необходимо для того, чтобы частота и амплитуда осциллятора не менялись при изменении внешней нагрузки.

К сожалению, у большинства высокочастотных генераторов максимум выходного сигнала не превышает 0,1 в, что явно недостаточно для нашего опыта. Так как уровень сигнала на резонансном контуре составляет 10 в или больше, мы изменили схему генератора, чтобы работать с этим напряжением. При этом, к сожалению, уровень выходного сигнала сильно зависит от частоты, а калибровка шкалы не является надежной. На рис. 9 приведена типичная калибровочная кривая шкалы генератора в двойном логарифмическом масштабе. Если эта градуировка не подходит к вашему экспериментальному устройству, вы можете сделать независимое определение частоты своего генератора, используя радиоприемник или какой-либо частотомер.

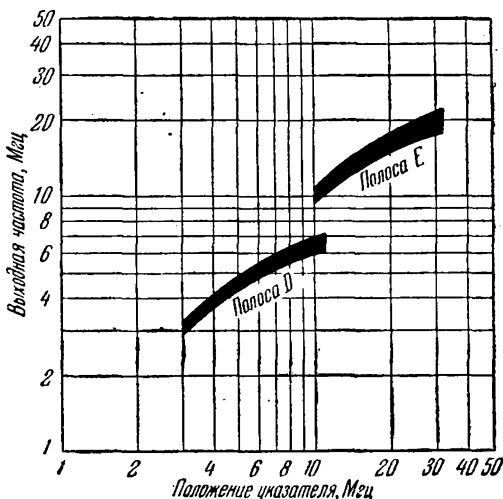


Рис. 9.

Заметьте (это видно на рис. 9), что расхождение между калибровочной частотой и частотой выходного сигнала наибольшее на вершине каждой полосы. Расхождение в частоте возникает от дополнительной емкости двойного соединительного провода и отклоняющих пластин. Так как при уменьшении переменной емкости  $C$



частота осциллятора увеличивается, мы можем, по крайней мере качественно, понять ход кривых на рис. 9.

Приложим высокочастотное отклоняющее напряжение к горизонтально и вертикально отклоняющим пластинам. Постараемся работать при возможно большей радиочастоте и низком отклоняющем потенциале  $V_2 = V_B + V_C$ , чтобы получить эллипс. Чтобы было удобно наблюдать за лучом на экране, вы можете накрыть катодно-лучевую трубку или выключить свет в комнате. С помощью рис. 5 мы можем определить величину  $\sin \omega \Delta t$ , а имея градуировочную кривую и зная положение указателя шкалы, мы определим частоту. Найдите, чему равно  $\Delta t$  (не забудьте, что  $\omega = 2\pi\nu$ ). Измерьте расстояние  $\Delta L$  между вертикально и горизонтально отклоняющими пластинами либо в открытой трубке, либо по теневого рентгеновскому снимку. Вычислите скорость электрона  $v$ . Какую скорость имеет электрон, ускоренный разностью потенциалов в 300 в? (Вспомните, что скорость пропорциональна квадратному корню из отклоняющего потенциала.)

Используя соотношение  $\frac{1}{2}mv^2 = eV_2$ , вычислите отношение заряда к массе для электрона. Сравните вашу величину с полученной в Р.1.3. Что вы можете сказать о принципиальных источниках ошибки? Как вы изменили бы конструкцию катодно-лучевой трубки, чтобы добиться наиболее точного измерения величины  $e/m$  нашим методом?

### Работа 1.5. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Этой работой мы начинаем использование осциллографа. Сердцем осциллографа является катодно-лучевая трубка, некоторые свойства которой мы подробно изучали в первых четырех работах. Теперь мы увидим, как катодно-лучевая трубка может быть использована для изучения и сравнения быстро меняющихся напряжений. Перед обсуждением работы осциллографа с катодно-лучевой трубкой мы познакомимся с задачей об экспоненциальной релаксации заряда. После обсуждения этой проблемы мы рассмотрим способы применения катодно-лучевого осциллографа к рассмотрению таких явлений.

Рассмотрим схему рис. 1, состоящую из батареи химических элементов с разностью потенциалов  $V_0$ , ключа  $S$ , емкости  $C$ , сопротивления  $R$ , вольтметра  $V$ . Кратко рассмотрим каждый из этих элементов.

1. *Батарея.* Наиболее часто используемые батареи собираются из угольно-цинковых сухих элементов с потенциалом элемента 1,5 в. Таким образом, батарея в 22,5 в состоит из 15 последовательно

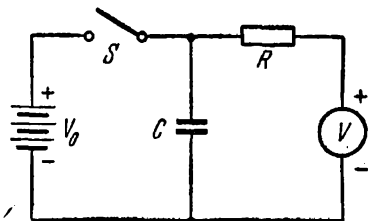


Рис. 1.

соединенных элементов. Емкость элемента обычно определяется в ампер-часах. Маленькие батареи, используемые для смещения, имеют емкость порядка 1,5 а-ч и внутреннее сопротивление 0,3 ом. Большие элементы, которые используются для цепей с расходом тока, имеют емкость порядка 10 а-ч и внутреннее сопротивление только 0,04 ом.

2. *Ключ.* Идеальный ключ имеет нулевое электрическое сопротивление в закрытом состоянии и бесконечное сопротивление в открытом состоянии. Конструкция ключа и скорость переключения должны быть в соответствии с задачей, для которой он используется.

3. *Емкость.* Большинство современных емкостей делается из алюминиевой фольги и тонкого изолирующего пластика — майлара. Фольга скручивается в рулончик, чтобы получить очень большую поверхность при маленьком объеме. Типичная емкость в 0,1 мкф сделана из двух узеньких полосок алюминиевой фольги, каждая около 150 см в длину, 1 см в ширину и 10 мкм (1 мкм =  $10^{-4}$  см) толщины. Майларовый изолятор для напряжения величиной в 100 в также должен иметь толщину 10 мкм. Емкости, работающие при более высоком напряжении, нуждаются в более толстом слое изолятора между слоями фольги.

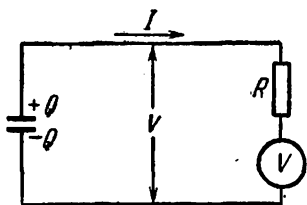


Рис. 2.

4. *Сопротивления.* Современные низковольтные сопротивления сделаны из смеси угля и клеящего вещества. Сопротивление можно менять, изменяя отношения угля и клея.

В производстве сложилась привычка сначала делать сопротивление, а потом измерять и маркировать его. Это объясняется большой трудностью изготовления сопротивления заранее заданной величины.

На сопротивлениях отмечается также величина рассеиваемой мощности. Наиболее часто употребляется мощность в 1/2 вт, 1 вт и 2 вт. Сопротивления с большой рассеиваемой мощностью делаются из сплавов с большим сопротивлением, например из нихромовой проволоки.

5. *Вольтметры.* Большинство вольтметров представляют собой приборы с высоким входным сопротивлением, потребляющие некоторый ток. По ним отсчитывается напряжение, которое калибровано таким образом, что оно равно величине тока, помноженной на величину внутреннего сопротивления. Обычный электронный вольтметр имеет внутреннее сопротивление 11 Мом (1 Мом на пробнике и 10 Мом на самом приборе). Сопротивление в 1 Мом на пробнике ослабляет емкостную нагрузку экранирующего провода.

Теперь, когда мы немного ознакомились с элементами цепи, показанной на рис. 1, сравним показание вольтметра для закрытого и открытого ключа. Когда ключ замкнут, емкость  $C$  очень быстро заряжается до потенциала батареи. Что происходит, когда ключ

разомкнут? Теперь мы имеем цепь, показанную на рис. 2: заряженную емкость, включенную последовательно с сопротивлением, которое равно внешнему сопротивлению плюс внутреннее сопротивление вольтметра. Мы обозначим общую величину сопротивления через  $R$ . Поскольку существует падение напряжения на емкости, должно существовать падение напряжения на параллельно включенном сопротивлении. Но падение напряжения на сопротивлении зависит от электрического тока и определяется по закону Ома:

$$V = IR, \text{ или } I = V/R. \quad (1)$$

Мы знаем, что электрический ток — это поток зарядов. Поскольку две стороны емкости изолированы одна от другой, заряд, который протекает через сопротивление, должен начинаться на одной из пластин и заканчиваться на другой. Как видно из рис. 2, ток уменьшает заряд емкости. Величина заряда, прошедшего через сопротивление за время  $dt$ , равна  $I dt$ . Но поскольку это выражение равно  $-dQ$ , где  $dQ$  — изменение заряда емкости (отрицательное), мы имеем

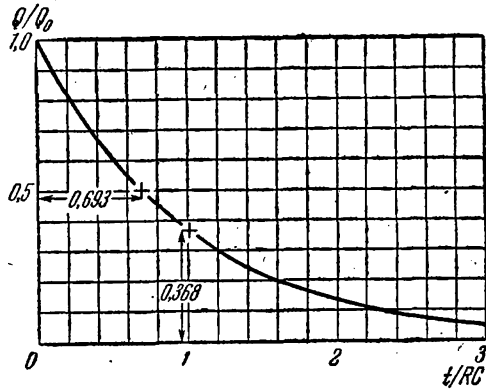


Рис. 3.

Из рис. 2, ток уменьшает заряд емкости. Величина заряда, прошедшего через сопротивление за время  $dt$ , равна  $I dt$ . Но поскольку это выражение равно  $-dQ$ , где  $dQ$  — изменение заряда емкости (отрицательное), мы имеем

$$\frac{dQ}{dt} = -I. \quad (2)$$

Нам известно еще одно соотношение, которое дает зависимость между зарядом  $Q$  и разностью потенциалов  $V$  на емкости:

$$Q = CV. \quad (3)$$

Исключая  $I$  из уравнений (1) и (2), получаем

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{V}{R}. \quad (4)$$

Исключая  $V$  из равенств (3) и (4), имеем

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что скорость уменьшения заряда на емкости  $C$  пропорциональна величине заряда. Мы можем ожидать, что заряд емкости будет уменьшаться сначала быстро, но потом по мере уменьшения заряда, скорость уменьшения заряда (а также напряжения и тока) будет замедляться. Уравнение (5) встречается в физических задачах очень часто. Функция  $Q(t)$ , которая удовлет-

воряет этому уравнению, называется экспоненциальной; ее график приведен на рис. 3.

Если заряд емкости в момент времени  $t = 0$  обозначить через  $Q_0$ , то решение (5) можно написать в виде

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (6)$$

Мы можем проверить это решение прямой подстановкой. Действительно, производная экспоненты

$$\frac{d}{dx} e^{-ax} = -ae^{-ax}. \quad (7)$$

Заменяя  $x = t$  и  $a = 1/RC$ , мы получаем

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} Q_0 e^{-t/RC} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = -\frac{Q}{RC}, \quad (8)$$

что совпадает с уравнением (5). Величина  $e$  (не путайте с зарядом

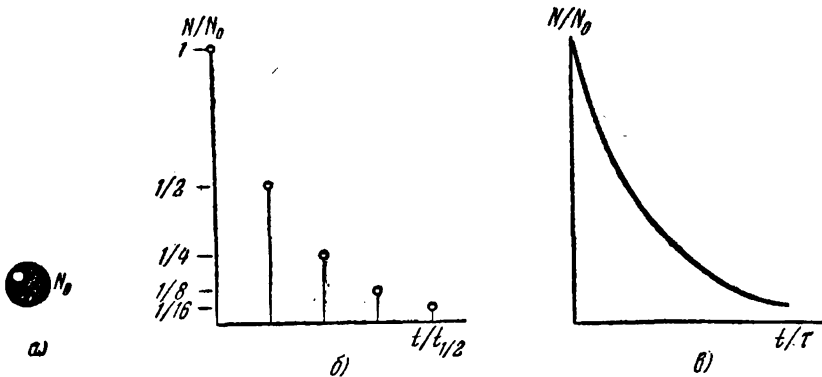


Рис. 4. Рассмотрим радиоактивный источник, который содержит  $N_0$  ядер (а), имеющих период полураспада  $t_{1/2}$ . За каждый интервал времени  $t_{1/2}$  число оставшихся ядер уменьшается в два раза (б). Поэтому  $N$  есть монотонно убывающая функция времени (в), имеющая вид  $N = N_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau$  — среднее время жизни.

электрона) — основание натуральных логарифмов и может быть определена как предел

$$e = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l}\right)^l \cong 2,71828. \quad (9)$$

Произведение  $RC$  имеет размерность времени и называется *постоянной времени*, или *характеристическим временем релаксации*. За время, равное  $RC$ , заряд  $Q$  убывает в отношении  $Q/Q_0 = 1/e = = 0,367879 \cong 36,8\%$  его первоначальной величины. Для определения  $RC$  по релаксации заряда часто удобно измерять время, за которое величина заряда падает до половины первоначального значения, и по этому времени вычислить  $RC$ . «Половинное время» дается выражением

$$e^{-t_{1/2}/RC} = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Взяв натуральный логарифм от обеих частей (10), получаем

$$t_{1/2} = RC \ln 2 = 0,69315RC, \text{ или } RC = 1,4425 t_{1/2}. \quad (11)$$

Способ измерения постоянной времени состоит в определении  $t_{1/2}$  и умножении полученной величины приблизительно на 1,44. Может

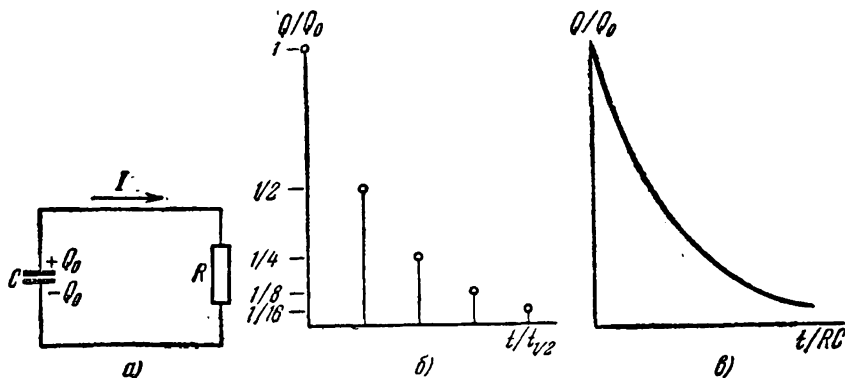


Рис. 5. Возьмем заряженную емкость (а), замкнутую на сопротивление  $R$ . За каждый интервал времени  $t_{1/2} = 0,693RC$  заряд на емкости уменьшается в два раза (б). Заряд  $Q$  есть монотонно убывающая функция времени (в), имеющая вид  $Q = Q_0 e^{-t/RC}$ . Произведение  $RC$  равно среднему «времени жизни» заряда.

быть, вы уже познакомились с выражениями «экспоненциальный распад», «время жизни», «время полураспада» при рассмотрении радиоактивного распада. Радиоактивный распад и рассасывание заряда (или релаксация) описываются одинаковым образом. На рис. 4 и 5 мы демонстрируем аналогию между этими двумя типами физических явлений.

Чтобы наблюдать релаксацию заряда, рассмотрим цепь, показанную на рис. 6, который повторяет рис. 1, но содержит удобные значения постоянных. Вместо того чтобы пользоваться ключом, проще замыкать и размыкать контакт на зажиме батареи. Поставим вольтметр на 15-вольтовую шкалу и замкнем цепь. Заметьте, что вольтметр показывает только 15 вольт, т. е.  $1/3$  напряжения батареи. Можете ли вы это объяснить? (Вспомните, что вольтметр отсчитывает только то напряжение, которое находится на его зажимах.) Теперь разомкните контакт на положительной клемме батареи и наблюдайте релаксацию. Измерьте, за какое время напряжение на вольтметре упадет до 7,5 в, т. е. до половины начального значения. Вычислите  $RC$  из уравнения (11) и сравните с ожидаемой величиной. Не забудьте включить в сопротивление внутреннее сопротивление прибора.

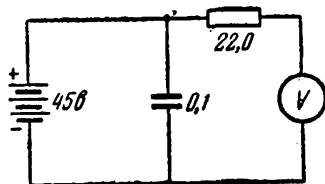


Рис. 6.

При попытке измерить более быстрые релаксационные процессы системой, показанной на рис. 6, оказывается, что измерение скорости уменьшения заряда ограничено затуханием прибора и недостаточной скоростью человеческой реакции для промежутков времени, значительно меньших, чем десятые доли секунды. Поскольку существует множество релаксационных процессов, которые происходят за времена значительно меньшие, чем несколько десятых долей секунды, необходимо иметь какой-то метод для их измерения.

Мы столкнулись с двумя проблемами. Во-первых, мы должны иметь прибор, который быстро реагировал бы на изменения напряжения; во-вторых, мы должны иметь возможность делать измерения, которые не были бы ограничены скоростью нашей реакции. Катодно-лучевая трубка осциллографа прекрасно удовлетворяет

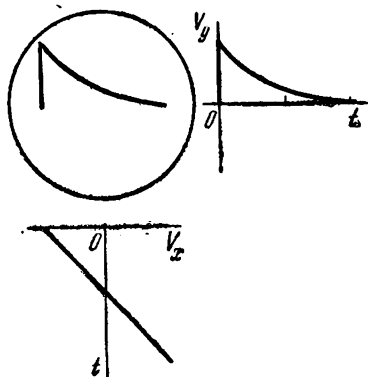


Рис. 7.

этим двум требованиям. Как было показано в Р.1.4, электрон пролетает между горизонтально или вертикально отклоняющими пластинами за время меньшее, чем 1 нсек. Таким образом, без особых трудностей мы можем зарегистрировать времена такого порядка, тогда как возможности глаза ограничены временем порядка 0,1 сек. (Проверьте ваши собственные визуальные возможности, следя за своим пальцем.) Теперь встает вопрос, как использовать катодно-лучевую трубку, не ограничивая себя скоростью нашей реакции.

Рис. 7 демонстрирует замечательный способ решения этой проблемы. Напряжение в виде затухающей экспоненты приложено к вертикально отклоняющим пластинам, а линейно возрастающее напряжение — к горизонтально отклоняющим пластинам. Вертикальное отклонение пятна пропорционально  $V_y$ . Его горизонтальное отклонение пропорционально  $V_x$ . Таким образом, пятно движется линейно слева направо по мере того, как напряжение затухает. В каждый момент времени положение пятна определяется значениями величин  $V_y$  и  $V_x$  в этот момент. Заметьте, что след пятна на экране катодно-лучевой трубки является функцией  $V_y(t)$ .

Возможность изображения таких процессов является важным достоинством катодно-лучевого осциллографа. В большинстве экспериментов, выполняющихся в нашем практикуме, мы будем наблюдать так называемые повторяющиеся сигналы. Вместо одиночного экспоненциального разряда, показанного на рис. 7, мы можем периодически заряжать емкость, получая сигнал, который имеет форму, показанную на рис. 8. Как нам рассмотреть такой сигнал в осциллографе? Мы должны развернуть луч слева направо в период времени от  $t = 0$  до  $t = T$ , затем мы должны очень быстро вернуть

его налево таким образом, что второй ход пятна будет рассмотрен между моментами времени  $T$  и  $2T$ . Горизонтальный сигнал  $V_x(t)$ , обладающий свойством линейного роста, повторяющийся периодически, называется *разверткой* и показан на рис. 9. Обратите внимание на то, что если период развертки равен периоду экспоненты, то мы наблюдаем одну единственную кривую. Как изменится график на экране осциллографа, если период развертки будет вдвое больше, чем период экспоненты?

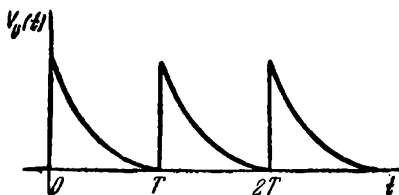


Рис. 8.

Теперь мы рассмотрим основные узлы, которыми должен обладать катодно-лучевой осциллограф, чтобы на его экране можно было получить рассмотренные нами графики. Мы составили список этих узлов и выполняемых ими функций.

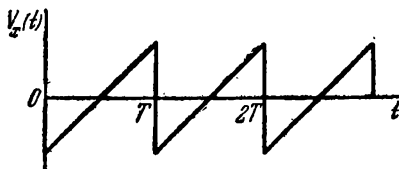


Рис. 9.

#### 1. Катодно-лучевая трубка.

Служит индикатором для сигнала  $V(t)$ . Как мы видели, катодно-лучевая трубка должна содержать электронную пушку, отклоняющую систему и индикатор положения пучка.

2. *Источник питания.* Он должен обеспечивать нужные потенциалы для сеток и анодов электронной пушки, а также ток для нагрева нити катодно-лучевой трубки. Обычно потенциал второго анода (по отношению к катоду) равен 2000 в. Для очень высоких скоростей записи или для проектирования изображения такие высокие напряжения, как 10 000 в, не являются необычными.

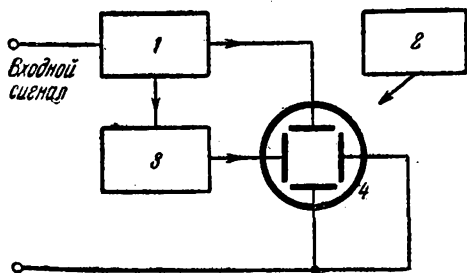


Рис. 10. Функциональная блок-схема осциллографа: 1 — усилитель, 2 — источник питания, 3 — генератор пилообразного напряжения, 4 — катодно-лучевая трубка.

#### 3. Генератор развертки.

Осциллограф должен вырабатывать пилообразное напряжение развертки переменной частоты. Кроме того, нужно иметь воз-

можность синхронизировать развертку с повторяющимся сигналом.

4. *Усилитель сигнала.* Напряжение, требуемое для полного отклонения электронного пучка вертикально вдоль экрана, близко к 200 в. Чтобы получить заметное отклонение для сигнала величи-

ной 0,1 в, необходимо иметь дополнительное усиление порядка нескольких тысяч.

Функциональная блок-схема катодно-лучевого осциллографа показана на рис. 10.

Более подробное описание схемы и работы катодного осциллографа вы найдете в его фирменном описании.

Чтобы наблюдать периодическую релаксацию заряда, удобно иметь потенциал, форма которого показана на рис. 11. Получение таких прямоугольных импульсов предусмотрено во многих фирменных генераторах синусоидальных волн, которые дают возможность регулировать амплитуду и частоту следования импульсов.

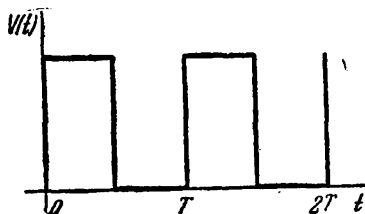


Рис. 11.

Начните с рассмотрения прямоугольных импульсов напряжения, подав их на вертикально отклоняющие пластины осциллографа. Регулируя частоту развертки или частоту следования импульсов, вы получите картины, показанные на рис. 12.

На рис. 13 показана возможная схема возбуждения  $RC$ -цепи прямоугольными импульсами ( $ГР$  — горизонтальная развертка осциллографа). Емкость  $C$  заряжается и разряжается через одно и то же сопротивление  $R$ . Какую картину ожидаете вы увидеть на экране осциллографа? Возьмите  $R = 10$  ком и  $C = 0,1$  мкф и получите на экране полный период заряда и разряда емкости.

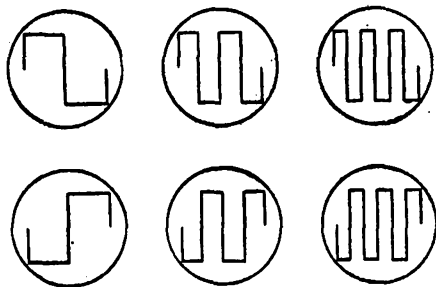


Рис. 12.

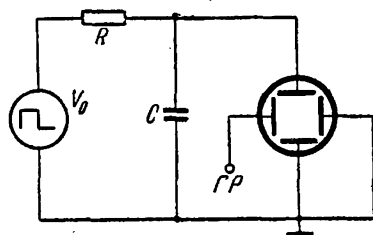


Рис. 13.

Прокалибруйте временную ось ( $x$ -ось) по частоте синусоидальных импульсов и определите время релаксации заряда  $\tau \approx RC$ . Повторите опыт при других значениях  $R$  и  $C$ .

Следует иметь в виду, что генератор прямоугольных импульсов имеет свое внутреннее сопротивление. Оно должно быть значительно меньше  $R$ , чтобы не повлиять на измерения  $\tau$ . Постарайтесь выяснить, выполняется ли это условие в ваших измерениях.



## Работа 1.6. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

В Р.1.5 мы рассмотрели чисто экспоненциальный разряд заряженной емкости через сопротивление. Мы видели, что экспоненциальная зависимость величины заряда от времени возникает потому, что скорость спада пропорциональна значению заряда, остающегося на емкости. Мы все хорошо знакомы с системами другого типа, которые приходят к состоянию покоя при помощи колебаний. Например, отклоненный маятник движется вниз к положению равновесия. Однако он не приходит сразу в это положение, а проходит через него к положению максимального отклонения в другую сторону, после чего он опять начинает двигаться вниз. Такие движения называются *колебаниями*. Из-за сопротивления воздуха амплитуда колебаний маятника будет постепенно уменьшаться до тех пор, пока маятник в конце концов не придет в положение равновесия. Движение груза, прикрепленного к пружине, аналогично движению маятника.

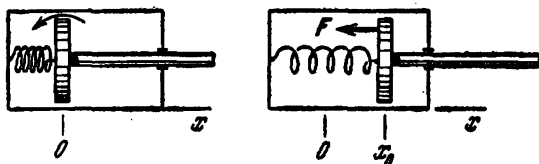


Рис. 1.

Можем ли мы сделать электрическую систему, в которой возникли бы затухающие колебания? Чтобы прийти к ответу на этот вопрос, рассмотрим аналогию между  $RC$ -цепочкой и демпфирующим устройством, эскиз которого показан на рис. 1. Демпфер состоит из цилиндра, наполненного маслом, и поршня (диска), в котором сделаны отверстия. При движении диска масло будет проходить через эти отверстия. Если мы сместим диск вправо, пружина будет растягиваться, вызывая силу, тянущую диск влево,

$$F = -kx. \quad (1)$$

Уравнение (1) является выражением закона Гука: возвращающая сила пропорциональна смещению. Что случится, если мы отпустим диск? Диск не может сразу же вернуться в положение равновесия. Он будет двигаться со скоростью, ограничиваемой вязкостью масла. Скорость (при условии ее малости) будет пропорциональна силе, действующей на диск:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{F}{\gamma}. \quad (2)$$

Как будет двигаться диск, если мы отпустим его из смещенного положения? Чтобы ответить на этот вопрос, исключим силу

из уравнений (1) и (2), тогда получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{\gamma} x. \quad (3)$$

Это уравнение имеет точно такую же форму, что и уравнение (5) в Р.1.5. По аналогии с ранее полученным решением мы можем написать решение (3):

$$x = x_0 e^{-(k/\gamma)t}. \quad (4)$$

Это уравнение описывает экспоненциальный закон движения диска с постоянной времени  $\tau = \gamma/k$ . Заметим, что чем жестче пружина (т. е. чем больше  $k$ ), тем меньше время успокоения, а чем меньше

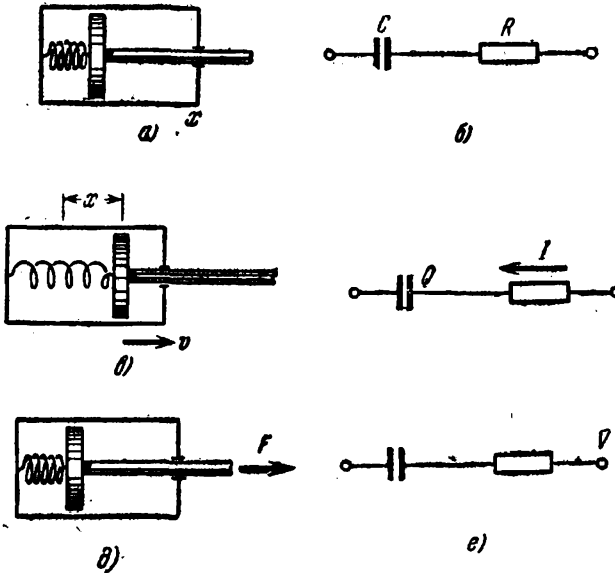


Рис. 2. Воздушный буфер (а) подобен  $RC$ -цепочке (б), смещение  $x$  и скорость  $v = dx/dt$  (в) соответствуют заряду  $Q$  и току  $I = dQ/dt$  (г), сила  $F = \gamma v + kx$  (д) соответствует напряжению  $V = IR + (Q/C)$  (е).

отверстия и гуще масло, тем больше это время. Теперь мы можем провести близкую аналогию между демпфирующим устройством и  $RC$ -цепочкой, как это сделано на рис. 2. В этих рассуждениях мы пренебрегли массой диска. Каких изменений в движении следует ожидать, если диск имел бы большую массу? Принципиальное различие между тяжелым и легким диском заключается в том, что тяжелый диск вследствие инерции должен проходить через положение равновесия, т. е., пройдя положение равновесия, он отклонится влево.

Таким образом, для диска достаточно большой массы следует ожидать колебательного движения. Как аналитически описать

движение диска? Если диск имеет инерциальную массу, мы должны переписать (2) таким образом, чтобы показать существование разности между силой пружины и силой, возникающей из-за вязкости масла. Эта разность сил ускорит диск:

$$Ma = M \frac{dv}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2} = F - \gamma v. \quad (5)$$

Для того чтобы найти кинематику движения диска, подставим (1) в (5). Исключая силу  $F$ , получим

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0. \quad (6)$$

Прежде чем пытаться решить уравнение для диска, имеющего массу (или лучше для груза на пружине с трением), рассмотрим решение задачи при отсутствии затухания. Если мы положим в уравнении (6)  $\gamma = 0$ , что эквивалентно сливу масла из цилиндра, мы получим

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (7)$$

Это знакомое нам уравнение простого гармонического осциллятора. Решение этого уравнения имеет вид

$$x = x_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Функцию  $x(t)$ , показанную на рис. 3, можно представить как вертикальное смещение точки, движущейся по окружности радиуса

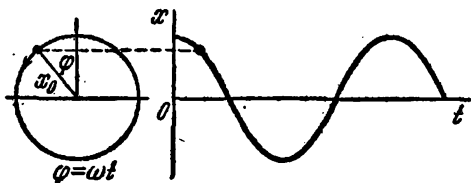


Рис. 3.

$x_0$  с угловой скоростью  $\omega$ . Попробуем теперь доказать, что (8) является решением (7), и определим угловую частоту  $\omega$ .

Дифференцирование тригонометрических функций показано на рис. 4.

Дифференцируя (8) по времени, получим

$$v = \frac{d}{dt} x_0 \cos \omega t = -\omega x_0 \sin \omega t, \quad (9)$$

$$a = \frac{d^2}{dt^2} x_0 \cos \omega t = \frac{d}{dt} (-\omega x_0 \sin \omega t) = -\omega^2 x_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (7), получим

$$-M\omega^2 x_0 \cos \omega t + kx_0 \cos \omega t = 0.$$

Мы видим, что решение (8) удовлетворяет уравнению (7) и определяет угловую частоту

$$\omega = \sqrt{k/M}. \quad (11)$$

Теперь займемся изучением эффекта затухания. Если затухание не очень велико, то его действие на движение наиболее просто

выяснить, рассмотрев выражение для энергии. Энергия воздушного демпфера равна сумме кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$  диска

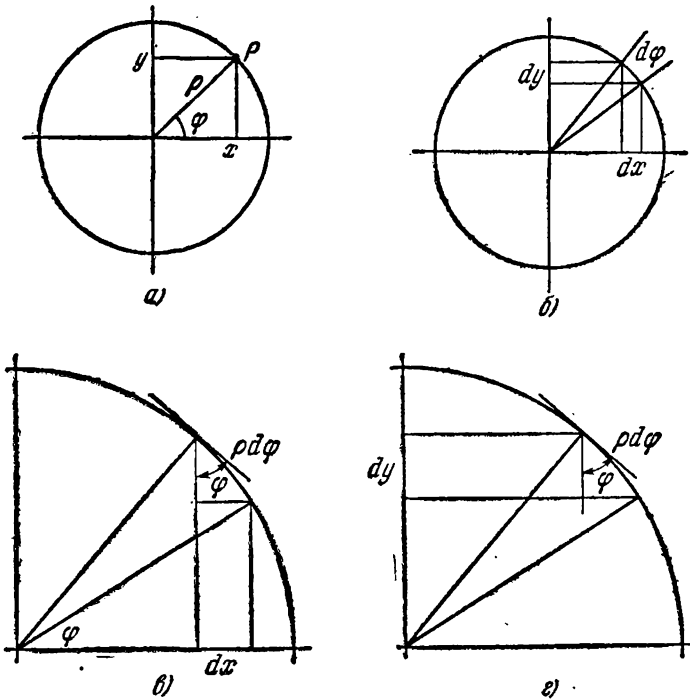


Рис. 4. Рассмотрим точку  $P$  с декартовыми координатами  $(x, y)$  и полярными координатами  $(\rho, \varphi)$  (а); очевидно что  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . При возрастании полярного угла на  $d\varphi$  происходят соответственные изменения  $dx$  и  $dy$  декартовых координат (б);  $dx = \rho d(\cos \varphi)$ ,  $dy = \rho d(\sin \varphi)$ . Если  $d\varphi$  мало (в), можно сразу написать выражение для  $dx$ :  $dx = -(\rho d\varphi) \sin \varphi$ , а также (г) для  $dy$ :  $dy = (\rho d\varphi) \cos \varphi$ . Сравнивая выражения для  $dx$  и  $dy$ , получаем соотношения  $\rho d(\cos \varphi) = -(\rho d\varphi) \sin \varphi$  и  $\rho d(\sin \varphi) = (\rho d\varphi) \cos \varphi$ , которые после сокращения на  $\rho$  дают правила дифференцирования тригонометрических функций:

$$\frac{d}{d\varphi} \cos \varphi = -\sin \varphi \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi = \cos \varphi.$$

и потенциальной энергии  $E_{\text{пот}}$  растянутой пружины:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} M v^2, \quad (12)$$

$$E_{\text{пот}} = - \int_0^x F dx = \frac{1}{2} kx^2. \quad (13)$$

Если мы подставим (8) в (13), а (9) — в (12), мы получим

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} M \omega^2 x_0^2 \sin^2 \omega t, \quad (14)$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} M \omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t. \quad (15)$$

Чтобы получить полную энергию, которая постоянна, сложим уравнения (14) и (15):

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} M \omega^2 x_0^2. \quad (16)$$

В действительности полная энергия остается постоянной, только если мы пренебрегаем затуханием. Если рассмотреть затухание, мы увидим, что силы вязкости отводят часть энергии колеблющейся системы в масло, где она появляется в виде тепла. Скорость, с которой энергия рассеивается силами трения, дается формулой

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{полн}}) = -\gamma v^2. \quad (17)$$

Если силы трения очень слабы, так что они не могут вызвать слишком быстрого затухания, мы можем с правой стороны подставить усредненное за цикл значение потерь энергии. Заметим, что среднее значение кинетической энергии (обозначаемое угловыми скобками), как раз равно половине полной энергии:

$$\langle E_{\text{кин}} \rangle = \langle \frac{1}{2} M v^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle E_{\text{полн}} \rangle. \quad (18)$$

Подставляя среднее значение скорости  $\langle v^2 \rangle$  вместо  $v^2$  в (17), получим

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{полн}}) = -\frac{\gamma}{M} (E_{\text{полн}}). \quad (19)$$

Из уравнений (16) и (19) вытекает

$$\frac{d}{dt} x_0^2 = 2x_0 \frac{d}{dt} x_0 = -\frac{\gamma}{M} x_0^2. \quad (20)$$

Деля на  $x_0$ , мы, наконец, получаем

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{\gamma}{2M} x_0. \quad (21)$$

Это уравнение затухающей экспоненты. Его решение может быть записано в виде

$$x_0 = x_0(0) e^{-\gamma t/2M}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (8), мы можем написать конечное решение для осциллятора с небольшим затуханием

$$x = x_0(0) e^{-t/\tau} \cos \omega t, \quad (23)$$

где  $\tau = 2M/\gamma$  — постоянная времени затухания амплитуды, а  $\omega = \sqrt{k/M}$  — угловая частота. Мы должны подчеркнуть, что уравнение (23) описывает колебательное движение только тогда, когда значение затухания, приходящегося на угол в один радиан, мало:

$$e^{-1/\omega\tau} \cong 1, \text{ или } \omega\tau \gg 1. \quad (24)$$

Произведение  $\frac{1}{2} \omega\tau$  обычно называется *добротностью осциллятора* и обозначается  $Q$  (чтобы не перепутать с электрическим зарядом  $Q$ ). В П.1.6 дано точное решение уравнения (6) с использованием комплексных переменных. Полученный результат выглядит так:

Слабое затухание ( $\gamma < 2\sqrt{kM}$ ):

$$\omega = \sqrt{k/M} \cdot \sqrt{1 - \gamma^2/4kM}, \quad (25)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{2M}. \quad (26)$$

Сильное затухание ( $\gamma > 2\sqrt{kM}$ ):

$$\omega = 0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{2M} (1 - \sqrt{1 - 4kM/\gamma^2}). \quad (28)$$

Промежуточный случай, когда  $\gamma = 2\sqrt{kM}$  (что дает  $\omega = 0$  и  $1/\tau = \sqrt{k/M}$ ), называется *критическим затуханием*. Это наименьшее значение затухания, для которого мы получим чистую экспоненту. Заметим, что для критического затухания постоянная времени  $\tau$  равна  $1/2\pi$  периодов незатухающих колебаний.

Теперь вернемся к первоначальному вопросу. Как сделать электрическую модель простого гармонического осциллятора? Сравнивая уравнение (6) с уравнением для  $RC$ -цепочки

$$M \frac{dv}{dt} + \gamma v + kx = 0, \quad (29)$$

$$RI + \frac{1}{C} Q = 0, \quad (30)$$

мы видим, что нам необходим элемент схемы, напряжение на зажимах которого пропорционально скорости изменения тока:

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (31)$$

Таким элементом является индуктивность. Мы знаем, что возрастающий в индуктивности ток образует магнитное поле, которое также возрастает и вызывает противоположно направленную э. д. с. Знак индуцируемой э. д. с. такой, что она противодействует возрастанию тока. Если бы мы попытались уменьшить ток, то навелась бы э. д. с., мешающая уменьшению тока. Индуктивность как раз похожа на инерциальную массу тем, что она препятствует любому изменению в «количестве» движения. Эта аналогия показана на рис. 5; на рис. 6 мы сравниваем обмен энергией между массой и пружиной и между индуктивностью и емкостью. На рис. 7 показана полная электрическая схема, предназначенная для наблюдения за временным ходом изменения заряда  $Q$  на емкости.

Откалиброввав шкалу времени, определим частоту колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (32)$$

где  $T$  — период колебаний.

За какое время амплитуда колебаний уменьшается до половины начального значения? Это время равно

$$\tau = 1,44 t_{1/2}. \quad (33)$$

Сравните ваши экспериментальные значения для  $\nu$  и  $\tau$  со значениями, вытекающими из формул (11), (25) и (26) для слабо демпфированных колебаний:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (34)$$

$$\tau = \frac{2L}{R}. \quad (35)$$

Сопротивление  $R$  включает в себя сопротивление индуктивности  $L$ , которое вы можете померить на омметре, и внутреннее

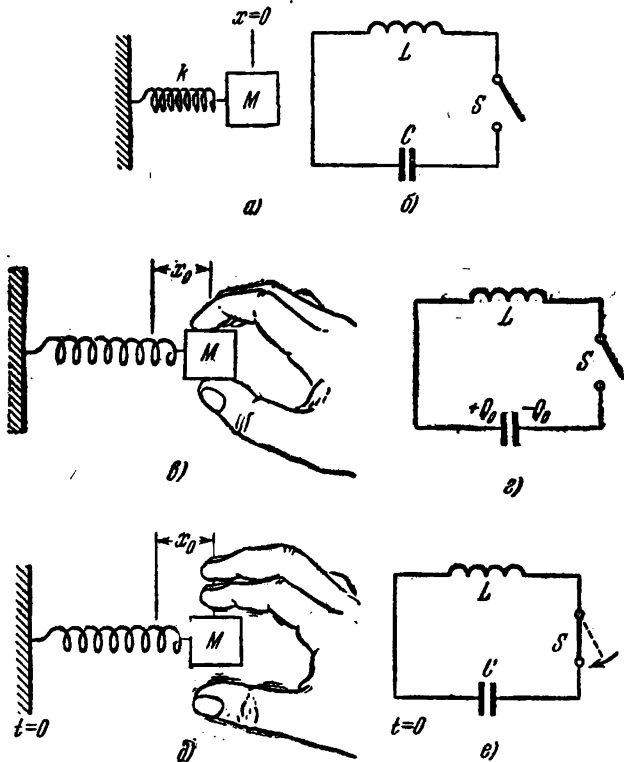


Рис. 5. Рассмотрим массу с пружиной (а) и LC-цепочку (б). Растянутая пружина (в) (ее потенциальная энергия  $E_{\text{пот}} = kx_0^2/2$ ) подобна заряженной емкости (д) ( $E_{\text{пот}} = Q_0^2/2C$ ). Освобождение пружины (г) подобно замыканию ключа (е).

сопротивление генератора прямоугольного напряжения. Вы можете повторить измерения с другими значениями индуктивности и емкости.

Для того чтобы изучить критическое и сильное демпфирование, поставим между генератором прямоугольного напряжения и индуктивностью переменное сопротивление, как показано на рис. 8.

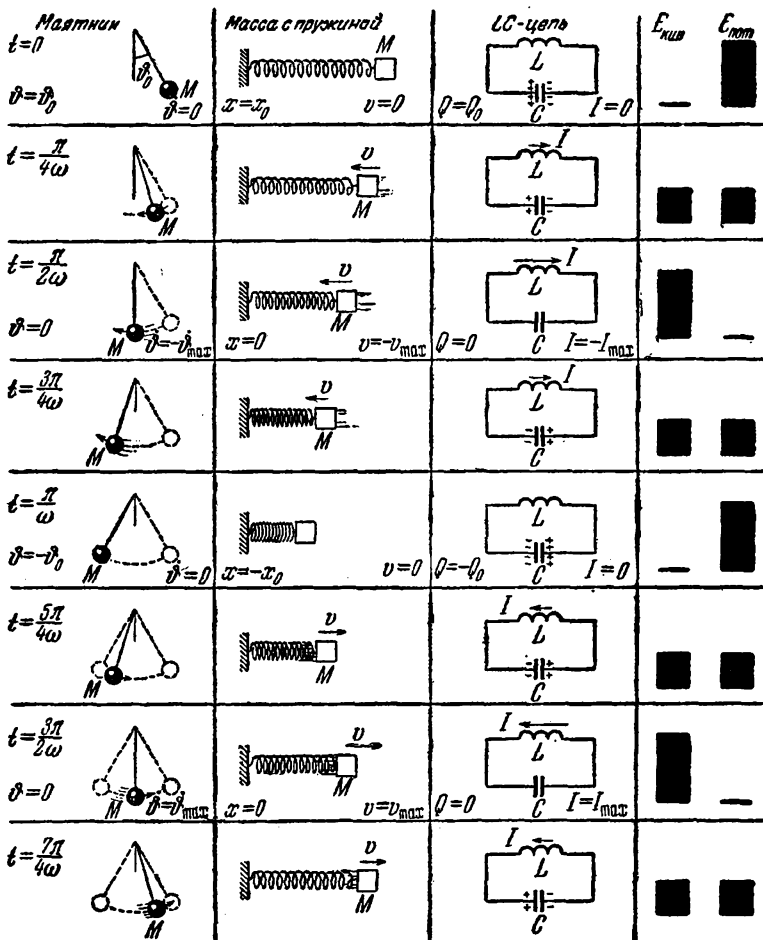


Рис. 6.

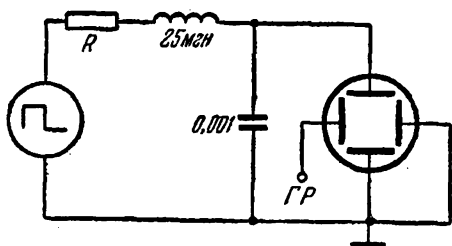


Рис. 7.

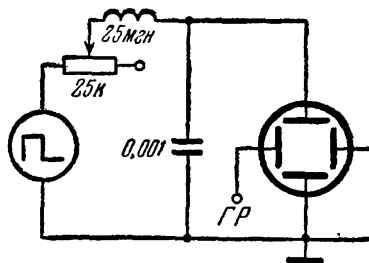


Рис. 8.



Увеличение сопротивления соответствует увеличению демпфирования. Найдем наименьшее значение сопротивления, отвечающее критическому режиму. Эта величина сопротивления равна

$$R = 2\sqrt{L/C}. \quad (36)$$

Величина переменного сопротивления измеряется омметром. Не забудьте включить в сопротивление величину сопротивления индуктивности и внутреннее сопротивление генератора. С какой точностью вы сможете подтвердить формулу (36)?

### Приложение 1.6. Комплексная частота

При обсуждении затухающих колебаний мы видели, что, когда время релаксации (постоянная времени, характеризующая спад экспоненты) велико по сравнению с  $1/\omega$ , амплитуда убывает экспоненциально. При более сильном затухании релаксация протекает сложнее: амплитуда не является больше медленно меняющейся функцией времени и частота  $\omega$  зависит от затухания. Запишем ток в обычной форме

$$I = I_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi), \quad (37)$$

где  $\tau$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  являются функциями  $L$ ,  $R$  и  $C$ . Только в пределе, когда добротность  $Q = 1/2\omega\tau \gg 1$  (или, что то же,  $L/R \gg RC$ ), эти функции просто равны  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  и  $\tau = 2L/R$ .

Чтобы решить задачу для произвольного затухания, мы должны подставить общее решение вида (37) в уравнение движения и решить его относительно параметров. Это громоздкая процедура, которая к тому же не позволяет вникнуть в сущность физического поведения системы и, в частности, в уникальное состояние критического затухания как промежуточного между сильным и слабым затуханием. Эту проблему можно очень изящно решить, введя комплексную частоту

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{i}{\tau}, \quad (38)$$

(где  $i = \sqrt{-1}$ ) для описания зависимости тока и заряда от времени.

Из простых геометрических построений рис. 4 мы имеем следующее правило дифференцирования синуса и косинуса:

$$\frac{d}{d\varphi} \sin \varphi = \cos \varphi, \quad \frac{d}{d\varphi} \cos \varphi = -\sin \varphi. \quad (39)$$

Мы также знаем, что для экспоненциальной функции справедливо следующее правило дифференцирования:

$$\frac{d}{d\varphi} e^{p\varphi} = p e^{p\varphi}. \quad (40)$$

Теперь рассмотрим комплексное число

$$\cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Продифференцировав это выражение, мы получим

$$\frac{d}{d\varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Таким образом, мы можем написать тождество

$$\cos \varphi + i \sin \varphi \equiv e^{i\varphi}, \quad (41)$$

где комплексная функция  $e^{i\varphi}$  может быть дифференцируема и интегрируема в соответствии с общими правилами для экспонент с реальным аргументом.

Применим этот метод для решений нашей задачи. Допустим, что напряжение  $V_0$  вызывает ток  $I_0 = V/R$ , текущий через последовательно соединенные сопротивление и индуктивность. В момент  $t = t_0 = \varphi/\omega$  включим в эту цепь емкость. Ток в последующее время будет определяться формулой

$$I_1 = I_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi). \quad (42)$$

Другое решение может быть получено при разряде емкости в момент  $t = \varphi/\omega$  через последовательно соединенные индуктивность и сопротивление:

$$I_2 = I_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t + \varphi). \quad (43)$$

Теперь для любой комбинации начального заряда и начального тока мы можем написать ток в виде

$$AI_1 + BI_2. \quad (44)$$

Это утверждение о *линейности* системы. Время увеличения приращения заряда на емкости не зависит от начального тока или заряда, и наоборот. Рассмотрим комплексную комбинацию постоянных

$$A = 1, \quad B = i. \quad (45)$$

Используя наши прежние рассуждения о комплексных функциях, мы видим, что можем интерпретировать полученное решение как комплексный ток

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i(\tilde{\omega} t + \varphi)}, \quad (46)$$

где  $\tilde{\omega} = \omega + i/\tau$  — комплексная частота, упоминавшаяся выше. Но этот ток должен быть решением уравнения

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (47)$$

Заряд может быть определен интегрированием выражения (46) для тока

$$Q = \frac{I_0}{i\tilde{\omega}} e^{i(\tilde{\omega} t + \varphi)}, \quad (48)$$

что может быть проверено дифференцированием, если вспомнить, что  $I = dQ/dt$ . Подставляя (46) в уравнение движения, получим

$$i\tilde{\omega} L I_0 e^{i(\tilde{\omega} t + \varphi)} + I_0 R e^{i(\tilde{\omega} t + \varphi)} + \frac{I_0}{i\tilde{\omega} C} e^{i(\tilde{\omega} t + \varphi)} = 0. \quad (49)$$

Поделив на ток обе части уравнения, получим простое выражение

$$i\tilde{\omega}L + \frac{1}{i\tilde{\omega}C} + R = 0, \text{ или } \tilde{\omega}^2LC - i\tilde{\omega}RC - 1 = 0. \quad (50)$$

Решая квадратное уравнение относительно  $\tilde{\omega}$ , получим

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{i}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - R^2C/4L} + \frac{iR}{2L}. \quad (51)$$

Если  $R^2C/4L \leq 1$ , мы можем написать

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2C}{4L}},$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L}. \quad (52)$$

Но когда затухание настолько велико, что  $R^2C/4L \geq 1$ , то частота  $\tilde{\omega}$  — чисто мнимая и единственно возможное решение будет

$$\omega = 0,$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L} (1 - \sqrt{1 - 4L/R^2C}). \quad (53)$$

Таким образом, в случае большого затухания  $\omega = 0$  и абсолютно никаких колебаний не возникает. Специальный случай  $R^2C/4L = 1$ , или  $RC = 4L/R$ , назван *критическим затуханием*. Из нашего анализа следует, что критическое затухание характеризуется чистым экспоненциальным спадом с характеристическим временем  $\tau = \sqrt{LC}$ , которое равно  $1/2\pi$  периодов колебаний недемпфированной системы.

Следует подчеркнуть, что такого рода подход возможен только для линейных систем. Если система нелинейна, то решения для  $I_1$  и  $I_2$  будут смешиваться, и поэтому выбор  $B = i$  может привести к неправильным результатам.

### Работа 1.7. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

В Р.1.5 и Р.1.6 мы рассмотрели переходные характеристики осциллятора и системы, в которой колебания не могут возникнуть из-за большого затухания. Мы видели, что характеристики этих двух систем различны. В этой и следующей работах мы рассмотрим другой способ изучения характеристик систем. Рассмотрим систему, на которую действует сила или напряжение, меняющиеся по синусоидальному закону

$$F = F_0 \cos \omega t \text{ или } V = V_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Мы увидим, что реакцией линейной системы на возмущение вида (1) является синусоида

$$x = x_0 \cos (\omega t + \varphi) \text{ или } Q = Q_0 \cos (\omega t + \varphi), \quad (2)$$

где амплитуда и фаза зависят от частоты. Это происходит потому, что производные от синусоидальных функций — синусоидальные функции. (Экспонента также обладает этим свойством — почему мы не рассматриваем возмущающую силу, меняющуюся по экспоненте?)

Мы будем рассматривать эту проблему только для ее электрической аналогии. Полученные результаты всегда можно перенести на механическую систему, используя замену переменных:

$$(V, F) \quad (Q, x) \quad (I, v) \quad \left(\frac{dI}{dt}, a\right) \quad (L, M) \quad (1/C, k) \quad (R, \gamma). \quad (3)$$

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1. Последовательно соединены емкость  $C$  и сопротивление  $R$  подключены к источнику синусоидального напряжения. Уравнение для этой схемы может быть записано в виде

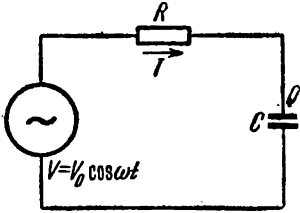


Рис. 1.

$$IR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Для того чтобы получить выражение для заряда (и его производной — тока), запишем решение в виде (2) и подставим его в (4). Дифференцируя уравнение (2) по времени, получим выражение для тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (5)$$

Подставляя его в уравнение (4), получим

$$-\omega Q_0 R \sin(\omega t + \varphi) + \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) = V_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Мы хотим определить амплитуду заряда  $Q_0$  и фазовый сдвиг  $\varphi$ , показанные на рис. 2. Проще всего это сделать, применив к левой части (6) тригонометрические преобразования

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B, \quad (7)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B. \quad (8)$$

Преобразовывая левую часть уравнения (6) и группируя члены, получаем

$$\left(-\omega R \cos \varphi - \frac{1}{C} \sin \varphi\right) Q_0 \sin \omega t + \left(-\omega R \sin \varphi + \frac{1}{C} \cos \varphi\right) Q_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t. \quad (9)$$

Так как уравнение (9) справедливо для любых моментов времени, мы можем определить коэффициенты, подставив частные значения  $\omega t$ . Подставив  $\omega t = 0$ , мы получим

$$\left(-\omega R \sin \varphi + \frac{1}{C} \cos \varphi\right) Q_0 = V_0. \quad (10)$$

Подставляя  $\omega t = \pi/2$ , имеем

$$\left(-\omega R \cos \varphi - \frac{1}{C} \sin \varphi\right) Q_0 = 0. \quad (11)$$

Из уравнения (11) следует, что выражение в круглых скобках тождественно равняется нулю. Отсюда получаем выражение для фазового сдвига

$$\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC. \quad (12)$$

Заметим, что когда частота приложенного сигнала сравнима с  $1/RC$ , изменение заряда происходит в фазе с изменением напряжения.

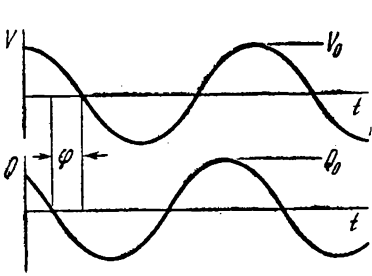


Рис. 2.

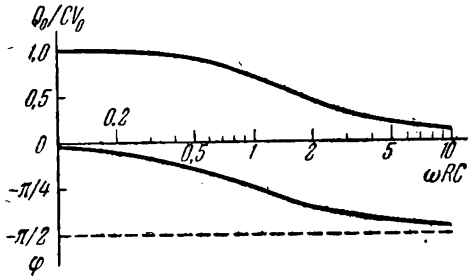


Рис. 3.

Но для больших частот изменение заряда отстает по фазе от изменения напряжения примерно на  $90^\circ$ . Мы можем найти амплитуду колебаний заряда, подставив (12) в (10):

$$Q_0 = CV_0 \cos \varphi, \quad (13)$$

где фазовый сдвиг  $\varphi$  определяется уравнением (12). Для очень низких частот результат будет такой же, как если бы мы имели дело с постоянным током. Для частот, значительно больших  $1/RC$ , амплитуда заряда уменьшается. На рис. 3 показана частотная зависимость амплитуды заряда  $Q$  и фазового сдвига  $\varphi$ . Простые соотношения (12) и (13) между зарядом и фазовым сдвигом позволяют построить совместный график этих двух величин. На рис. 4 эта зависимость заряда  $Q$  дана в полярных координатах. Длина радиуса-вектора равна  $Q_0$ , а фазовый угол равен  $\varphi$ . Частота  $\omega$  является параметром кривой. С ростом частоты движение радиуса-вектора происходит в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Рассматривая выражение для тока, можно получить высокочастотный предел для уравнений (12) и (13). Дифференцируя уравнение (2) по времени,

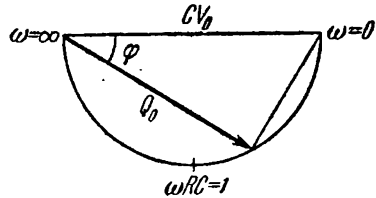


Рис. 4.

получаем

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi) = \omega Q_0 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (14)$$

Ток опережает заряд на  $\pi/2$  и имеет амплитуду  $I_0 = \omega Q_0$ . Используя уравнения (12) и (13), мы получим выражение для амплитуды тока

$$I_0 = \omega Q_0 = \omega C V_0 \cos \varphi = -\frac{V_0}{R} \sin \varphi. \quad (15)$$

Для высоких частот, когда фазовый угол приближается к  $-\pi/2$ , ток изменяется в фазе с приложенным напряжением с амплитудой, равной  $V_0/R$ . В результате для низких частот характеристика схемы (рис. 1) соответствует закороченному сопротивлению  $R$ , для высоких частот — закороченной емкости  $C$ .

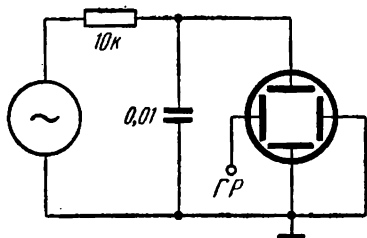


Рис. 5.

Для того чтобы изучить частотные характеристики цепочки  $RC$ , соберем схему, показанную на рис. 5.

Ниже рассмотрены четыре метода определения фазового угла  $\varphi$ .

**Синхронизация развертки.** На рис. 6 показан график приложенного напряжения и заряда на емкости в функции времени для низких, средних ( $\omega RC \cong 1$ ) и высоких частот.

Если сигнал развертки синхронизирован с  $Q$ , то на экране электронно-лучевой трубки мы не получим фазового сдвига. Однако мы можем наблюдать фазовый сдвиг, если синхронизирующим сигналом является приложенное напряжение  $V$ . С возрастанием частоты приложенного сигнала изображение будет двигаться по экрану вправо. Движение вправо указывает на то, что максимум заряда возникает позже, чем максимум напряжения. Это мы и имеем в виду, когда говорим, что заряд отстает от напряжения. Ваш генератор сигналов генерирует сигналы прямоугольной формы, находящиеся в фазе с синусоидальным сигналом, и вы можете считать более удобным использовать для синхронизации прямоугольные импульсы. Для синхронизации развертки с помощью прямоугольных импульсов надо: подать прямоугольный сигнал на внешние клеммы синхронизации, включить внешнюю синхронизацию, повернуть ручку син-

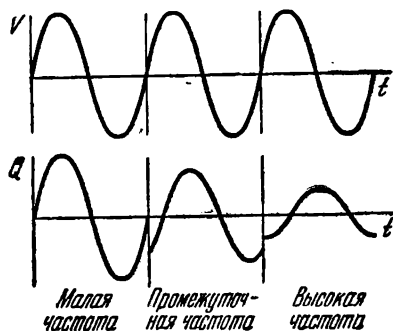


Рис. 6.

хронизации амплитуды полностью по часовой стрелке и уменьшить выход генератора прямоугольных волн до наименьшего уровня, при котором вы достигаете положительной синхронизации.

**Модуляция интенсивности.** Мы указывали уже, что интенсивность электронного пучка в электронно-лучевой трубке зависит от напряжения, приложенного между первой сеткой и катодом. Поэтому интенсивность пучка можно модулировать с помощью внешнего сигнала. Применяемая для этого схема показана на рис. 7; она имеется в большинстве катодно-лучевых осциллографов. На электронном жаргоне интенсивность пучка (и яркость изображения) интерпретируется как «Z-ось». Для получения синхронной модуляции пучка подайте прямоугольный сигнал на зажим «Ось Z» и отрегулируйте интенсивность пучка и выходные прямоугольные импульсы для получения хорошего контраста. При использовании внутренней синхронизации развертки вы можете получить изображение, показанное на рис. 8. Заметим, что при увеличении частоты кажется, что яркие области движутся влево. Так как яркие области следуют за положительной полуволне напряжения, то отсюда

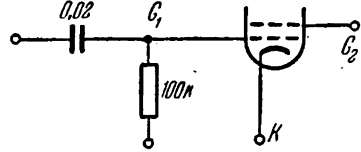


Рис. 7.

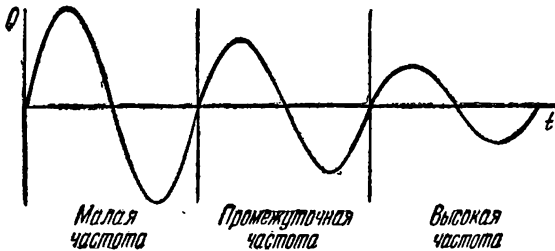


Рис. 8.

можно заключить, что заряд отстает по времени от напряжения. Преимущество модуляции интенсивности перед синхронизацией развертки заключается в отсутствии необходимости иметь положительную и независимую от частоты синхронизацию.

**Метки времени.** Если прямоугольные импульсы с генератора прямоугольного напряжения подать на вход осциллографа вместе с исследуемым сигналом, то изображение кривой на экране станет прерывистым, состоящим из отдельных точек («меток времени»), соответствующих прямоугольным импульсам. При этом используется принцип яркостной модуляции. Зная период следования импульсов, можно рассчитывать временные соотношения в изображении процесса.

**Фигуры Лиссажу.** Последний метод определения фазового угла  $\varphi$  заключается в непосредственном сравнении  $V$  и  $Q$  на экране катодно-лучевой трубки. С этой целью в большинстве осциллографов предусмотрена возможность непосредственной подачи сигнала на

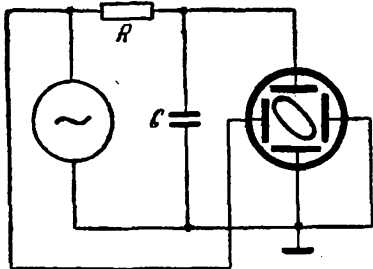


Рис. 9.



Рис. 10.

горизонтально отклоняющие пластины. Принципиальная схема измерений показана на рис. 9; на рис. 10 показаны возможные типы траекторий. В Р.1.4 было показано, что получаемые при этом методе измерений траектории являются эллипсами. На рис. 11 показан простой способ измерения фазового сдвига  $\varphi$ .

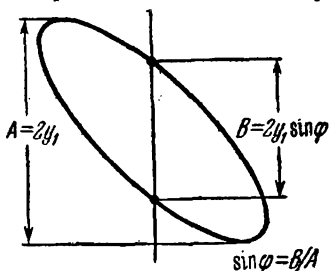


Рис. 11.

Используйте схему рис. 5 для измерения частотной зависимости амплитуды и фазы заряда, модулируя интенсивность пучка прямоугольными импульсами. Представьте свои данные, как показано на рис. 4, отмечая частоты на дуге. Чему равно полученное вами значение  $RC$ ? Не забудьте включить в  $R$  внутреннее сопротивление генератора синусоидального напряжения. Типичные значения  $R$  указаны ниже:

Порядок напряжения, $v$	Внутреннее сопротивление, $\text{ом}$
10	0—5000
1	600
0,1	600
0,01	600

Попытайтесь применить другие методы определения фазы и использовать другие значения элементов схемы. Заметьте, что при малых частотах невозможно добиться усиления или ослабления яркости изображения в течение целой половины цикла. Можете ли вы объяснить это?

### Работа 1.8. РЕЗОНАНС

Всем нам известно явление резонанса. Высокая нота, взятая на пианино, может вызвать интенсивные колебания стеклянной пластинки. Низкие ноты из громкоговорителя могут вызвать сотрясение предметов в комнате. Это результат возбуждения системы



частотой, близкой к характеристической частоте колебаний системы. Здесь мы будем изучать электрический аналог резонансного возбуждения, используя схему, показанную на рис. 1.

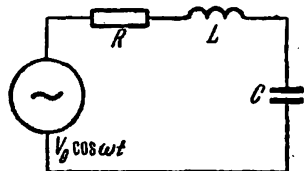


Рис. 1.

Уравнение, описывающее колебания в этой схеме, имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

Решение уравнения ищем в виде

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Ток будет определяться формулой

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

а скорость изменения тока

$$\frac{dI}{dt} = -\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

Чтобы найти амплитуду и фазовый сдвиг, подставим уравнения (2), (3) и (4) в уравнение (1):

$$-\omega^2 L Q_0 \cos(\omega t + \varphi) - \omega Q_0 R \sin(\omega t + \varphi) + \frac{Q_0}{C} \cos(\omega t + \varphi) = V_0 \cos \omega t. \quad (5)$$

Раскрывая левую часть и группируя члены, получим

$$\left[ \left( \omega^2 L - \frac{1}{C} \right) \sin \varphi - \omega R \cos \varphi \right] Q_0 \sin \omega t - \left[ \left( \omega^2 L - \frac{1}{C} \right) \cos \varphi + \omega R \sin \varphi \right] Q_0 \cos \omega t = V_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Полагая  $\omega t = \pi/2$ , получим

$$\left( \omega^2 L - \frac{1}{C} \right) \sin \varphi - \omega R \cos \varphi = 0, \quad (7)$$

которое приводит к выражению для фазы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - 1/\omega C}. \quad (8)$$

Полагая  $\omega t = 0$ , получим

$$-\left[ \left( \omega^2 L - \frac{1}{C} \right) \cos \varphi + \omega R \sin \varphi \right] Q_0 = V_0. \quad (9)$$

Комбинируя (8) и (9), получим выражение для амплитуды заряда

$$Q_0 = -\frac{V_0}{\omega R} \sin \varphi. \quad (10)$$

Изменение амплитуды и фазы с частотой показано на рис. 2. Заметим, что при очень низких частотах фазовый угол  $\varphi$  равен нулю, как и для  $RC$ -цепочки. На высоких частотах заряд  $Q$  отстает от приложенного напряжения на  $\pi$ . На частоте, при которой фазовый угол  $\varphi$  отстает от приложенного напряжения на  $\pi/2$ , амплитудная характеристика проходит через максимум. Частота, для которой знаменатель (8) обращается в нуль, равна

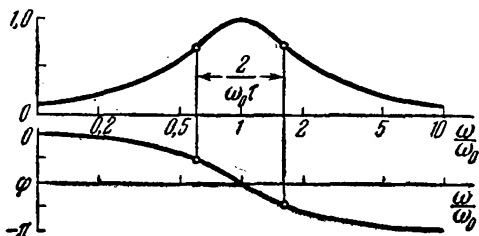


Рис. 2.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11)$$

На этой частоте  $\varphi = -\pi/2$  и амплитуда заряда определяется формулой

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega_0 R}. \quad (12)$$

Напряжение на емкости равно

$$V_C = \frac{Q_0}{C} = \frac{V_0}{\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L}{R} V_0. \quad (13)$$

Интересно определить частоты, для которых фазовый угол  $\varphi$  равен  $-\pi/4$  и  $-3\pi/4$ , а  $\operatorname{tg} \varphi = \pm 1$ . Они определяются из уравнения

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R. \quad (14)$$

Деля обе части на  $L$  и комбинируя (11) и (14), получим

$$\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} = \pm \frac{2}{\tau}, \quad (15)$$

где  $\tau = 2L/R$  — время затухания, рассмотренное в Р.1.6. Если затухание не очень велико,  $\omega$  будет близко к  $\omega_0$  и мы можем написать приближенное равенство

$$\frac{\omega_0^2}{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0 + \Delta\omega} \cong \omega_0 - \Delta\omega. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) дают

$$\Delta\omega \cong \pm \frac{1}{\tau}. \quad (17)$$

Изменение величины  $\omega Q_0$ , которая пропорциональна току, можно представить в полярных координатах, как показано на рис. 3. Величины  $\omega Q_0$  и  $\varphi$  связаны таким образом, что мы получим окружность. С увеличением частоты вектор поворачивается в отрицатель-

ном направлении. При резонансе отставание по фазе равно  $-\pi/2$  и амплитуда максимальна. Для  $\varphi$ , равного  $\pi/4$ , с обеих сторон от резонанса амплитуда в  $1/\sqrt{2}$  меньше максимального значения. Так как активные потери равны  $I^2R$ , потери в схеме на этих частотах равны половине максимального значения. Поэтому эти частоты называются частотами половинной мощности.

Для изучения резонанса собирается схема, показанная на

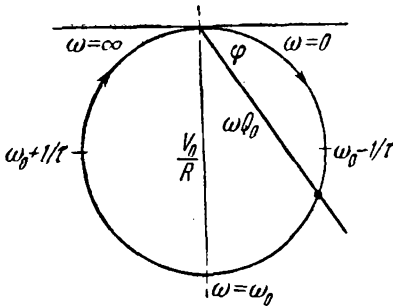


Рис. 3.

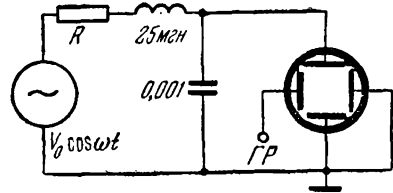


Рис. 4.

рис. 4. Измерьте частотную зависимость амплитуды и фазы заряда  $Q$ . Используйте для определения фазы модуляцию интенсивности электронного пучка. Постройте график  $\nu Q_0$ , как это сделано на рис. 3, и отметьте несколько частот  $\nu = \omega/2\pi$  на кривой. Сравните наблюдаемую резонансную частоту с вычисленной:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (18)$$

Сравните полное расстояние между точками половинной мощности с вычисленным значением:

$$2\Delta\nu = \frac{1}{\pi\tau} = \frac{1}{2\pi} \frac{R}{L}. \quad (19)$$

Заметьте, что отношение

$$\frac{\omega_0}{2\Delta\omega} = \frac{\nu_0}{2\Delta\nu} = \frac{\omega_0 L}{R} = Q, \quad (20)$$

т. е. равно добротности, рассмотренной в Р.1.6. Не забудьте включить в сопротивление  $R$  внутреннее сопротивление генератора синусоидальных колебаний.

Вы можете попытаться использовать другие величины  $L$  и  $C$  и ввести дополнительное сопротивление. При малых емкостях вы должны учитывать шунтирующую емкость осциллографа. Попробуйте также произвести измерения фазы с помощью фигур Лиссажу.

### Приложение 1. 8. Комплексная функция возбуждения

В П.1.6 мы рассматривали реальную и мнимую части решения уравнения движения, для того чтобы найти зависимость частоты  $\omega_0$  и скорости релаксации  $1/\tau$  от параметров схемы. Для случая свободной релаксации мы ввели комплексную частоту  $\tilde{\omega} = \omega_0 + i/\tau$ .

Мы можем с успехом использовать этот метод для рассмотрения установившегося режима при действии вынуждающей силы, изменяющейся по синусоидальному закону. Для системы, уравнение которой имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t, \quad (21)$$

решение для заряда будет следующим:

$$Q_1 = Q_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (22)$$

где  $Q_0$  и  $\varphi$  зависят от  $V_0$ ,  $\omega$  и параметров схемы.

Если вынуждающий сигнал сдвинут на  $90^\circ$ , уравнение (21) примет вид

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t. \quad (23)$$

В этом случае решением будет

$$Q_2 = Q_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (24)$$

Теперь, если приложенное напряжение имеет вид

$$V(t) = AV_0 \cos \omega t + BV_0 \sin \omega t, \quad (25)$$

можно ожидать, что величина заряда выразится формулой

$$Q(t) = AQ_1 + BQ_2. \quad (26)$$

Полагая

$$A = 1, \quad B = i, \quad (27)$$

можно записать выражения для заряда и приложенного напряжения в виде

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}, \quad Q(t) = Q_0 e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (28)$$

Подставляя эти выражения в (21), получим

$$-\omega^2 L Q_0 e^{i\varphi} + i\omega R Q_0 e^{i\varphi} + \frac{1}{C} Q_0 e^{i\varphi} = V_0, \quad (29)$$

откуда

$$Q_0 e^{i\varphi} = \frac{V_0}{(-\omega^2 L + 1/C) + i\omega R}. \quad (30)$$

Приравнявая реальные и мнимые части справа и слева, получим окончательно

$$Q_0 = -\frac{V_0}{\omega R} \sin \varphi \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - 1/\omega C}. \quad (31)$$

Заметим, что точно такие же выражения были получены в Р.1.8 при использовании одних действительных функций. Такой подход годится только для линейных систем, где решения не смешиваются.

## Работа 1.9. НЕЛИНЕЙНОСТЬ

Во всех предыдущих опытах мы рассматривали линейные системы. Так, например, ускорение электрона пропорционально действующей силе. Это означает, что «отклик» электрона линеен по отношению к действующей силе. Ток через сопротивление обычно считается пропорциональным приложенному напряжению. Заряд на емкости пропорционален напряжению на емкости, подобно тому как скорость изменения тока через индуктивность пропорциональна приложенному напряжению. Если нарисовать график ускорения (или заряда, или тока, или скорости изменения тока) в зависимости от приложенной силы, то мы получим прямую линию, как показано на рис. 1. Теперь мы можем сказать, что «отклик» системы является линейной функцией приложенной силы, или что система линейна. В действительности для большинства систем линейность является идеализацией, которая хорошо описывает соотношение между откликом системы и приложенной силой лишь для ограниченного диапазона изменения силы. Так, например, при приближении скорости электрона к световой его ускорение уменьшается. Это можно

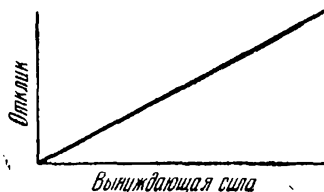


Рис. 1.

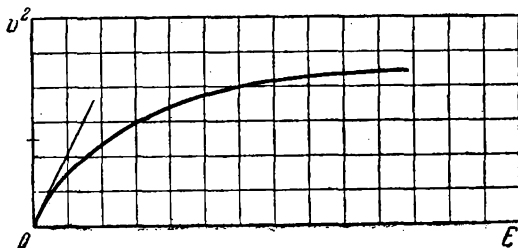


Рис. 2.

наглядно показать, используя график зависимости квадрата скорости электрона от энергии. Этот график показан на рис. 2. Для малых скоростей  $v^2$  растет линейно с ростом энергии, но для больших энергий  $v^2$  — нелинейная функция  $E$ . В этом опыте мы будем изучать нелинейность, реализуемую на схемных элементах. Наиболее наглядным является пример с вольфрамовой нитью. Если измерить сопротивление 100-ваттной лампы с вольфрамовой нитью в холодном состоянии, то мы получим 10 ом. Если мы вычислим сопротивление, используя формулу для рассеянной мощности, считая, что к лампе приложено 115 в, то получим

$$P = IV = \frac{V^2}{R}, \quad \text{или} \quad R = \frac{V^2}{P} = \frac{(115)^2}{100} \cong 130 \text{ ом},$$

т. е. в 13 раз больше. Что является причиной такого различия? Обычная рабочая температура вольфрамовой нити  $2575^{\circ}\text{K}$ , что в восемь раз больше комнатной температуры. Зависимость удельного сопротивления  $\rho$  вольфрамовой нити от температуры  $T$  показана на рис. 3. Мы видим, что удельное сопротивление примерно пропорционально температуре.

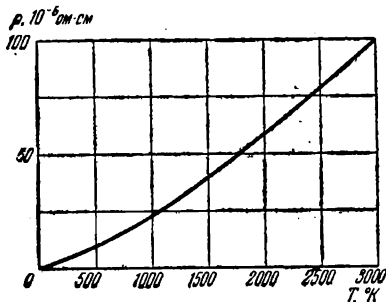


Рис. 3.

Предположим, что мы постепенно увеличиваем напряжение, приложенное к вольфрамовой нити, и одновременно измеряем ток через нее. Для очень малых напряжений ток будет расти пропорционально напряжению. Но с дальнейшим ростом напряжения рост тока замедляется. При еще большем увеличении напряжения нить накалится добела, и легко представить себе, что здесь происходит. С увеличением мощности, рассеиваемой нитью, мы увеличиваем ее температуру, а тем самым и ее сопротивление. Нелинейность зависимости между током и напряжением в опыте с вольфрамовой нитью объясняется зависимостью ее сопротивления от температуры, которая в свою очередь зависит от скорости рассеяния энергии нитью.

Причина нелинейности полупроводникового диода менее очевидна. Чтобы понять основные физические процессы в полупроводниках, рассмотрим вкратце их свойства. Кремний и германий, основные материалы, используемые в полупроводниковых приборах, имеют кристаллическую структуру алмаза, показанную на рис. 4 ( $a$  — постоянная решетки). В этой структуре, которая имеет кубическую симметрию, каждый атом находится в центре правильного тетраэдра, составленного из таких же атомов.

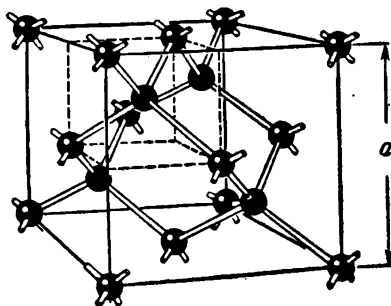


Рис. 4.

Идеальная структура, как мы покажем, является электрическим изолятором. Однако при повышенных температурах эти материалы становятся сравнительно хорошими проводниками электричества. (Название «полупроводник» означает, что их электрическая проводимость лежит между электрической проводимостью изоляторов и металлов.) Что является причиной их электропроводности? Обширные исследования показали, что энергия, близкая к  $1 \text{ эв}$  ( $1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ ), может привести к перемещению электрона из одного

места структуры в соседнее. При небольшом избытке энергии электрон может свободно перемещаться с места на место независимо от вакансии, или дырки, которая остается после него. Такой свободный электрон может создавать ток. Кроме этого, существует еще один механизм образования тока. Электрон в атоме по соседству

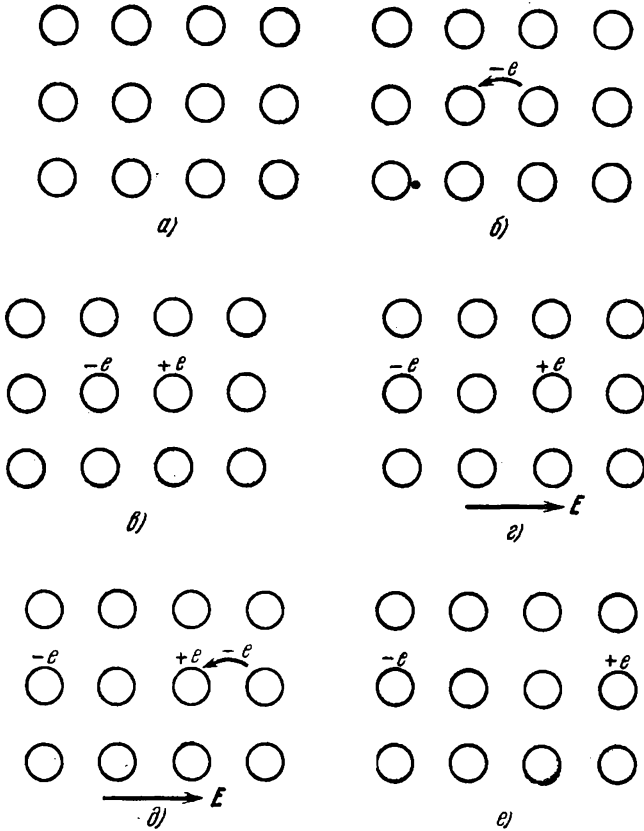


Рис. 5. Рассмотрим решетку из нейтральных атомов (а). Затратив энергию порядка  $1 \text{ эВ}$ , электрон можно перебросить к соседнему узлу решетки (б). Таким образом, мы образуем пару, состоящую из электрона и дырки (в). В электрическом поле, направленном по стрелке (г), электрон движется влево. Другой электрон (д) может попасть в дырку, совершив такой же переход, как и первый. Это эквивалентно перемещению дырки направо (е).

от дырки может занять эту дырку, в результате происходит перемещение дырки. Такой перенос заряда также образует ток. Так как мы имеем много электронов на одну дырку, то проще считать, что ток создается дырками. Для этого дыркам приписывают положительный заряд. Поведение электронов и дырок показано на рис. 5.

До сих пор мы рассматривали поведение полупроводников, в которых носители тока возникают при термическом или оптическом возбуждении. Второй способ образования носителей тока заклю-

чается во введении контролируемых примесей. Например, справа от германия в периодической таблице элементов стоит мышьяк, который имеет на один электрон больше. Если мы заменим атом германия на атом мышьяка, то получим кристалл с одним добавоч-

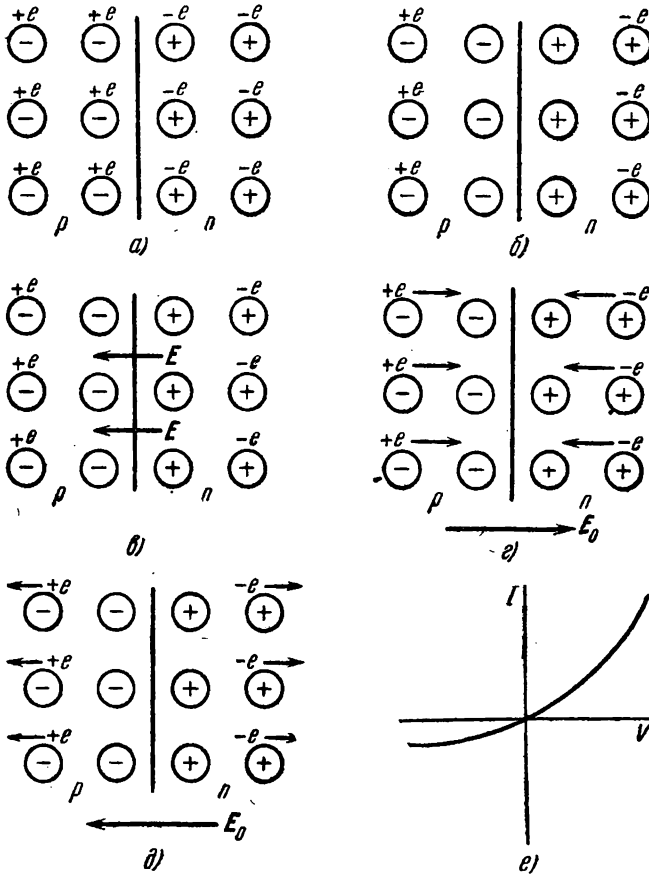


Рис. 6. Здесь показаны решетки атомов  $n$ - и  $p$ -типов. Эти атомы могут быть введены в полупроводник в качестве примесей (а). Вблизи  $p$ - $n$ -перехода электроны и дырки диффундируют через границу  $n$ - и  $p$ -областей и рекомбинируют (б). В результате возникает электрическое поле  $E$ , которое препятствует дальнейшей рекомбинации (в). Создав электрическое поле  $E_0$  противоположного направления, мы получим большой ток рекомбинации (г). Переменим направление поля. Пойдет слабый ток, связанный с носителями заряда, возникающими в переходе благодаря тепловому движению (д). Поэтому вольтамперная характеристика  $p$ - $n$ -перехода оказывается сильно асимметричной (е).

ным электроном, который, если ему сообщить небольшую дополнительную энергию, сможет свободно передвигаться в германии. В этом случае электрон не оставляет дырки, которую мог бы занять соседний электрон. Такой материал с примесью мышьяка называется полупроводником  $n$ -типа, так как в нем преобладают отрицательные носители заряда.



Можно ввести в решетку германия атомы галлия, который стоит в периодической таблице слева от германия. Галлий содержит на один электрон меньше, чем германий, и поэтому является для кристалла дыркой. При некотором значении добавочной энергии дырка сможет свободно передвигаться по кристаллу. Полупроводники с примесями; подобными галлию, называются полупроводниками *p*-типа, потому что в них преобладают положительные носители заряда.

Замечательным результатом технологии полупроводников является создание материалов, в которых осуществлен плавный переход *p*-типа проводимости в *n*-тип. В полупроводниках *p*-типа мы имеем избыток дырок, а *n*-типа — избыток электронов. Что удерживает электроны и дырки от диффузии через весь кристалл и рекомбинации друг с другом для образования нейтрального вещества? Рис. 6 показывает, что требование нейтральности заряда препятствует этому процессу. Как видно из этого рисунка, состояние равновесия устанавливается благодаря образованию электрического поля, которое препятствует дальнейшей диффузии зарядов. Если создать электрическое поле, направленное вправо, то под действием этого поля дырки будут двигаться вправо, т. е. в полупроводник *n*-типа, и рекомбинировать там. Такая же сила действует на электроны, заставляя их двигаться в противоположном направлении, т. е. в *p*-область, где они также рекомбинируют. Поэтому при указанном направлении электрического поля можно ожидать большого тока через переход. Что будет, если создать электрическое поле, направленное влево? Направление действия сил изменится на обратное и заряды будут двигаться преимущественно от перехода. В этом случае мы получим очень маленький ток через переход. Его значение пренебрежимо мало по сравнению с током в прямом направлении, когда поле направлено вправо. Таким образом, мы видим, что *p*—*n*-переход выпрямляет. Это хороший проводник тока в направлении от *p* к *n* и плохой в направлении от *n* к *p*.

Для измерения вольтамперной характеристики вольфрамовой нити соберите схему, показанную на рис. 7. Для этой работы удобно использовать лампу на 6—8 в и 0,15 а. Схему можно питать от трансформаторного выпрямителя 0 ÷ 35 в, 200 ма. Используя ламповый вольтметр, измерьте и изобразите графически характеристики лампы. Как определить сопротивление холодной лампы, используя начальный наклон полученной вами кривой? Какое сопротивление у лампы в нормальном рабочем режиме? Из рис. 3 определите рабочую температуру нити.

Для получения вольтамперной характеристики полупроводникового диода вы можете взять германиевый диод 1N34AL, имеющий широкое применение. Рекомендуемая схема показана на рис. 8. Обратите внимание на стрелку на диоде, указывающую направление проводимости. После снятия характеристик в прямом направлении измените полярность трансформаторного выпрямителя и снимите обратную характеристику. Вы можете уменьшить масштаб напряжения

для обратной характеристики. Обычно более удобно получить характеристику прибора непосредственно на экране электронно-

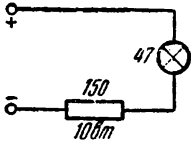


Рис. 7.

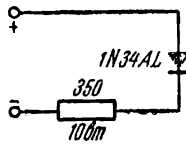


Рис. 8.

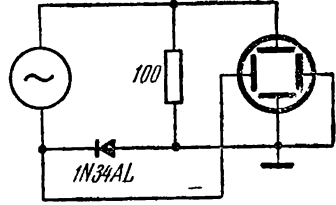


Рис. 9.

лучевого осциллографа. Для этого собирается схема, показанная на рис. 9.

### Приложение 1.9. Диод

Мы можем использовать диод, включенный в обратном направлении, как переменную управляемую емкость. Такой диод получил название *вариконд*. На рис. 6 мы видели, что при возрастании обратного напряжения на диоде как электроны, так и дырки движутся прочь от перехода, оставляя освобожденное ими пространство электрически заряженным.

Рассмотрим пример, показанный на рис. 10. При обратном напряжении  $V$ , приложенном к диоду, электроны и дырки отошли на расстояние  $d$  по обе стороны перехода, образовав около перехода среду с плотностью заряда  $+\rho$  и  $-\rho$ . Эффективный заряд на емкости определяется как

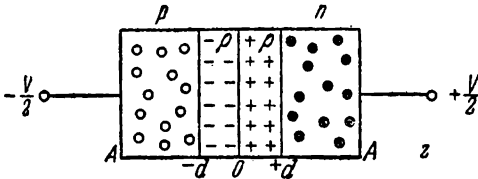


Рис. 10.

$$Q = \rho Ad, \quad (1)$$

и остается определить связь между  $V$  и  $d$ . Случай, показанный на рис. 10, отличается от случая включения обычной емкости с параллельными пластинами, когда поле между пластинами постоянно. Для диодного перехода электрическое поле возрастает линейно до максимального значения  $4\pi Q/\epsilon A$  в центре перехода ( $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная) и уменьшается до нуля при  $z = d$  (см. рис. 10). На рис. 11 сравниваются графики полей и потенциалов для этих двух случаев. Потенциал в переходе вдоль оси  $z$  определяется по формуле

$$V = - \int E dz = \frac{4\pi Qd}{\epsilon A}. \quad (2)$$

Исключая  $d$  с помощью уравнения (1), получим

$$V = \frac{4\pi}{\epsilon \rho} \left( \frac{Q}{A} \right)^2. \quad (3)$$

Во многих применениях обратного включенного диода малый сигнал  $v$  подается на диод последовательно с основным напряжением

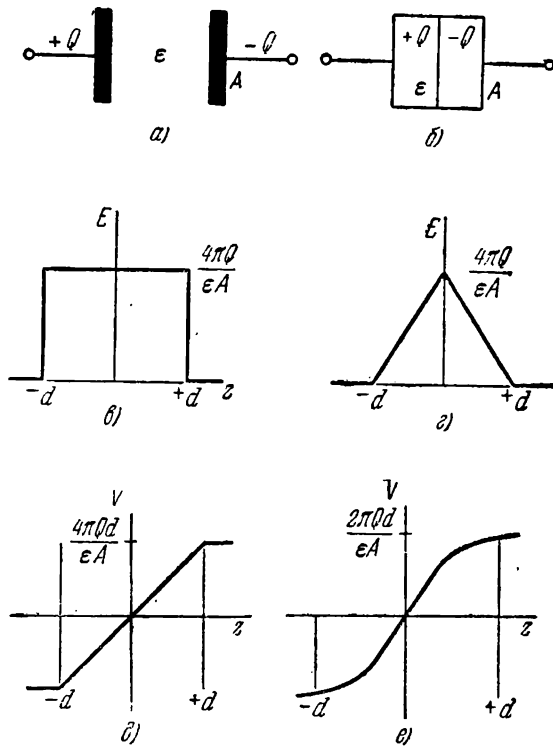


Рис. 11. В обычной емкости (а) заряды  $+Q$  и  $-Q$  расположены на пластинах площадью  $A$  и разделены средой с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ . В диоде (б) в обратном смещении заряды  $+Q$  и  $-Q$  распределены равномерно в некоторой переходной области. В емкости (с) электрическое поле в пространстве между пластинами однородно. В диоде, включенном в прямом направлении, электрическое поле растет линейно к середине перехода и затем линейно уменьшается (д). В емкости (е) потенциал линейно растет в пространстве между пластинами. В диоде, включенном в прямом направлении, потенциал меняется по квадратичному закону (е).

смещения. Поэтому важно найти емкость перехода для этого малого сигнала

$$C_v = \frac{dQ}{dV}. \quad (4)$$

Решая уравнение (3) относительно  $Q$ , получим

$$Q = \left( \frac{\epsilon \rho}{4\pi} \right)^{1/2} A \sqrt{V}. \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (5) по  $V$  и подставляя в (4), получаем

$$C_v = \left( \frac{\epsilon \rho}{16\pi} \right)^{1/2} \frac{A}{\sqrt{V}}. \quad (6)$$

Чтобы найти зависимость емкости  $C_v$  (для малого сигнала) от напряжения, собирается схема, показанная на рис. 12. Схема питается

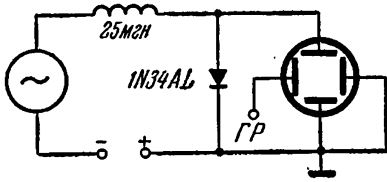


Рис. 12.

от транзисторного выпрямителя на  $0 \div 35$  в и  $200$  ма. Определите резонансную частоту для каждого значения основного напряжения и вычислите емкость из формулы

$$\nu = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}. \quad (7)$$

Следует помнить, что емкость  $C$ , которую вы определяете, это емкость  $C_v$ , включенная параллельно с входной емкостью осциллографа. Как учесть эту добавочную емкость?

### Работа 1.10. МОДУЛЯЦИЯ

Здесь мы используем полупроводниковый диод как ключ для включения и выключения синусоидально изменяющегося сигнала. Схема, выполняющая такие функции, называется электронными «воротами». Когда «ворота» открыты, сигнал проходит. При закрытых «воротах» сигнал пройти не сможет. Мы используем сигнал, подверженный такому воздействию, для изучения возникновения вынужденных колебаний в  $LRC$ -цепочке. (Вспомним, что в Р.1.6 мы возбуждали  $LRC$ -контур с помощью генератора прямоугольных импульсов и изучали затухающие колебания). Мы увидим, что, подавая на диоды небольшие сигналы, можно выполнить операцию умножения двух сигналов.

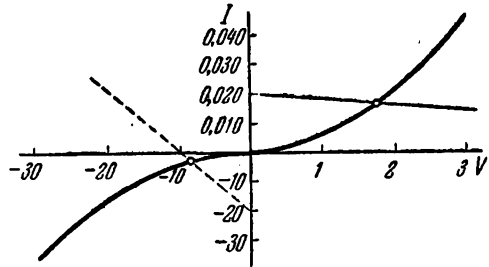


Рис. 1.

Каким образом диод можно использовать как ключ? На рис. 1 показана вольтамперная характеристика полупроводникового диода. Она очень близка к характеристике диода, которую вы получили в Р.1.9.

Рассмотрим теперь схему, показанную на рис. 2, где напряжение  $10$  в подано на последовательно соединенные диод  $D$  и сопротивление  $R = 500$  ом. Какое напряжение падает на диоде? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны графически решить уравнение схемы

$$V + IR = V_0, \quad (1)$$

где  $V$  и  $I$  — напряжение на диоде и ток через диод. Уравнение (1) — это прямая линия на диаграмме  $I, V$ . Она показана на рис. 1 сплош-

ной прямой линией для параметров схемы рис. 2. Эта линия обычно называется *нагрузочной прямой*. Мы должны считать, что вольт-амперная характеристика диода на рис. 1 и уравнение (1) образуют систему уравнений, которую мы решим графически. Из рис. 1 видно, что напряжение на диоде близко к 1,7 в. Таким образом, только небольшая часть напряжения  $V_0$  падает на диоде, и можно считать, что сопротивлением диода можно пренебречь по сравнению с сопротивлением в 500 ом. Какое напряжение будет на диоде, если переменить полярность напряжения, т. е. включить — 10 в? Уравнение (1) для  $V_0 = -10$  показано на рис. 1 в виде пунктирной нагрузочной прямой. По пересечению этой линии с вольт-амперной характеристикой диода мы видим, что на диоде падает 8 в, т. е. почти все напряжение. Таким образом, в этом случае диод можно считать разомкнутой цепью по сравнению с сопротивлением в 500 ом.

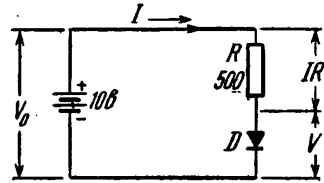


Рис. 2.

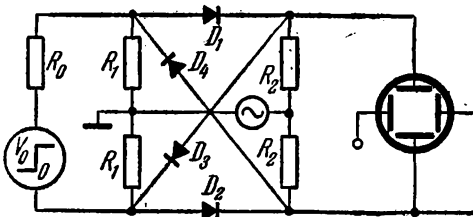


Рис. 3.

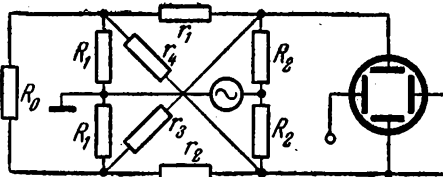


Рис. 4.

вого полупериода напряжение на выходе генератора прямоугольных сигналов равно нулю. Для малых высокочастотных сигналов мы можем заменить диоды их дифференциальными сопротивлениями  $r$  в нулевой точке вольт-амперной характеристики, которые близки к 280 ом. Для этого полупериода мы можем схему рис. 3 заменить схемой рис. 4, в которой мы заменили генератор прямоугольных волн его внутренним сопротивлением  $R_0 \cong 60$  ом.

Хотя схема, показанная на рис. 4, кажется довольно сложной, из ее симметрии следует, что если все четыре диода имеют сбаланси-

Этот пример показывает, что диод может действовать как ключ, отпирание или запирающее которого зависит от приложенного напряжения и величины последовательно включенного сопротивления.

Схема на диодах марки 1N34AL, которую мы используем для модуляции радиочастотного сигнала, показана на рис. 3. Здесь  $R_1 = 47$  ом,  $R_2 = 470$  ом. Пусть модулирующим сигналом будет прямоугольный импульс с амплитудой  $V_0 = 10$  в, как показано на рис. 3. В течение пер-

рованные сопротивления, то сигнал на выходе схемы будет равен нулю. Заметим, что схема, показанная на рис. 4, симметрична относительно горизонтальной плоскости. Так как сигнал высокой частоты также приложен симметрично, то на выходе сигнала не будет.

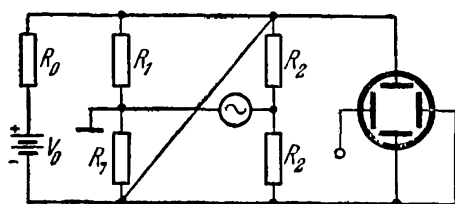


Рис. 5.

В течение второго полупериода к диодам прикладывается напряжение  $V_0 \cong \cong 10$  в. Из рис. 3 видим, что диоды  $D_1$  и  $D_3$  включены в прямом направлении и работают просто как элементы без сопротивления по сравнению с сопротивлениями  $R_2 = 470$  ом. С другой стороны, смещение на диодах  $D_2$  и  $D_4$  имеет противоположный знак и их действие будет аналогично размыканию цепи. Это показано на рис. 5. Для того чтобы понять, как сигнал высокой частоты проходит на выход системы, схема рис. 5 изображена на рис. 6 в более ясном виде. Из рис. 6 мы видим, что большая часть сигнала высокой частоты придет на выход схемы. Заметим, что потенциал  $V_0$  не появляется на выходе схемы.

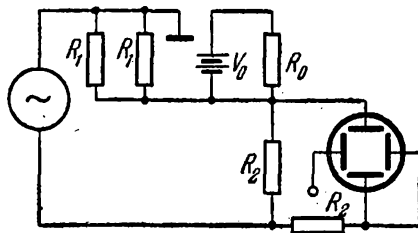


Рис. 6.

Соберем схему, показанную на рис. 3, с  $R_1 = 47$  ом и  $R_2 = 470$  ом и будем наблюдать форму выходного сигнала. Вы можете обнаружить на выходе составляющую с частотой 50 гц. Это сигнал переменного тока, который пролезает в схему от источ-

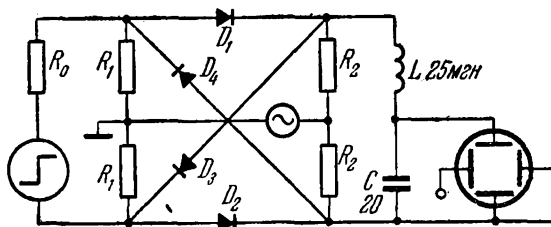


Рис. 7.

ника питания генератора импульсов. Заметим, что в этом опыте заземлен только генератор высокочастотного сигнала; генератор прямоугольных волн и осциллограф должны быть отсоединены от земли.

Чтобы изучить возникновение и затухание вынужденных колебаний, соберем схему, показанную на рис. 7. Здесь LC-цепочка присоединена к выходу модулятора и на осциллографе можно наблюдать образование заряда.

Как мы можем объяснить возникновение колебаний? Уравнение для схемы на рис. 8 записывается в виде

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

В Р.1.8 мы получили решение для установившегося процесса в этой схеме:

$$Q = Q_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

$$Q_0 = -\frac{V_0}{\omega R} \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\omega L - 1/\omega C}. \quad (5)$$

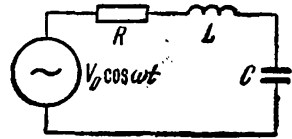


Рис. 8.

Здесь мы хотим выяснить, каким образом возникают вынужденные колебания.

Чтобы ответить на этот вопрос, будем считать, что колебания заряда описываются уравнением (3) при условии, что амплитуда  $Q_0$  зависит от времени. Ток в этом случае равен

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{dQ_0}{dt} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

и соответственно скорость изменения тока

$$\frac{dI}{dt} = -\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \varphi) - 2\omega \frac{dQ_0}{dt} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{d^2 Q_0}{dt^2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (7)$$

Подставив (3), (6) и (7) в (2), получим

$$\left[ L \frac{d^2 Q_0}{dt^2} + R \frac{dQ_0}{dt} + \left( -\omega^2 L + \frac{1}{C} \right) Q_0 \right] \cos(\omega t + \varphi) - \left( 2\omega L \frac{dQ_0}{dt} + \omega R Q_0 \right) \sin(\omega t + \varphi) = V_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Чтобы упростить уравнение (8), предположим, что схема находится в резонансе. Если предположить далее, что  $R$  настолько мало, что  $Q_0$  будет меняться медленно, то можно пренебречь выражением в квадратных скобках в уравнении (8). Подставляя  $\varphi = -\pi/2$ , в конце концов получаем

$$2\omega L \frac{dQ_0}{dt} + \omega R Q_0 = V_0. \quad (9)$$

Это уравнение простой экспоненциальной релаксации. Если мы включим вынуждающий сигнал в момент  $t = 0$ , то решение для  $Q_0$  будет иметь вид

$$Q_0 = \frac{V_0}{\omega R} (1 - e^{-t/\tau}), \quad (10)$$

где  $\tau = 2L/R$  — характеристическое время для возникновения резонансных колебаний, равное релаксационному времени их затухания, полученному в Р.1.6.

Настройте генератор высокочастотного сигнала (рис. 7) на резонансную частоту  $LRC$ -цепочки и сравните характеристические времена возникновения и затухания колебаний.

Схема рис. 3 часто используется для перемножения двух сигналов  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ . Заменяем генератор прямоугольных импульсов

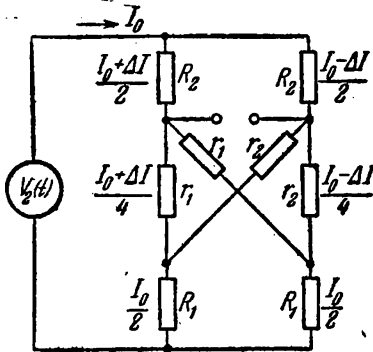


Рис. 9.

рис. 3, показав эффективные сопротивления диодной цепи.

При обозначении токов на рис. 9 принята во внимание симметрия схемы. У нас есть два неизвестных тока  $I_0$  и  $\Delta I$ , которые могут быть найдены решением двух контурных уравнений. Решение этих уравнений дает

$$\Delta I = \frac{4V_2(t)(r_2 - r_1)}{(r_1 + 2R_2)(r_2 + 2R_1 + 2R_2) + (r_1 + 2R_1 + 2R_2)(r_2 + 2R_2)}. \quad (12)$$

Если предположить, что  $r_1$  и  $r_2$  пренебрежимо малы по сравнению с  $2R_2$ , то с помощью (11) получим

$$\Delta I \cong \frac{V_1(t)V_2(t)}{R_2(R_1 + R_2)i_0}. \quad (13)$$

Выходное напряжение, равное  $R_2\Delta I$ , дается выражением

$$V = \frac{V_1(t)V_2(t)}{(R_1 + R_2)i_0}. \quad (14)$$

Для проверки уравнения (14) в качестве  $V_1(t)$  возьмем сигнал звуковой частоты, а для  $V_2(t)$  — сигнал радиочастоты. Оба сигнала должны иметь достаточно малую амплитуду. На выходе схемы мы получим сигнал вида

$$V = V_0 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t. \quad (15)$$

Теперь соединим  $LRC$ -цепочку с выходом модулятора, как показано на рис. 7, и будем наблюдать отклик  $LRC$ -цепочки на напряжение,



представленное уравнением (15). Заметим, что для  $\omega_1 < R/2L$  отклик совпадает с сигналом (15). С другой стороны, для  $\omega_1 > R/2L$  частотная характеристика цепочки имеет два максимума, один на частоте  $\omega_2 - \omega_1$  и другой на частоте  $\omega_2 + \omega_1$ . Как вы можете объяснить это?

Простой способ анализа отклика схемы на сигнал (15) заключается в разложении  $V(t)$  на две синусоидальные функции. Имея в виду тригонометрическое равенство

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} \cos(A+B) + \frac{1}{2} \cos(A-B), \quad (16)$$

перепишем уравнение (15) в виде

$$V(t) = \frac{1}{2} V_0 \cos(\omega_2 - \omega_1)t + \frac{1}{2} V_0 \cos(\omega_2 + \omega_1)t. \quad (17)$$

Таким образом, мы видим, что сигнал (15) может быть представлен в виде двух синусоидально меняющихся напряжений. Когда частоты близки друг к другу, мы наблюдаем отклик в виде одного максимума; когда частоты сильно отличаются на выходе, получаются два максимума.

#### Работа 1.11. ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

При изучении нелинейных сопротивлений (см. Р.1.9) были получены характеристики вольфрамовой нити и полупроводникового диода. Хотя оба эти прибора обнаруживают сильное отклонение от линейности, ток, который проходит через них, есть монотонно возрастающая функция приложенного напряжения. Из рис. 1 следует, что при изменении напряжения на малую величину  $\Delta V$  малое изменение тока  $\Delta I$  будет иметь тот же знак, что и  $\Delta V$ . Здесь будет изучен другой тип вольтамперных характеристик, показанный на рис. 2. Их особенностью является наличие такого участка характеристики, где отношение  $\Delta V/\Delta I$  (дифференциальное сопротивление или, что то же самое, сопротивление для малого сигнала) отрицательно. На рис. 2 показаны две типичные характеристики с отрицательным сопротивлением. Примерами приборов первого типа, которые управляются по напряжению, являются вакуумный тетрод, туннельный диод, некоторые электростатические генераторы, а также нервы живого организма. Ко второму типу приборов, управляемых по току, относятся устройства с использованием вольтовой дуги, тлеющего разряда, термисторы.

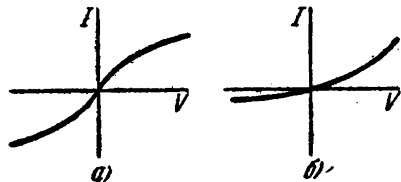


Рис. 1. Вольтамперные характеристики вольфрамовой нити (а) и полупроводникового диода (б).

Чем замечательны системы с отрицательным сопротивлением? При работе в области отрицательного сопротивления они могут быть неустойчивы. Они могут работать в качестве усилителей мощности или генераторов. Весьма подробное обсуждение свойств

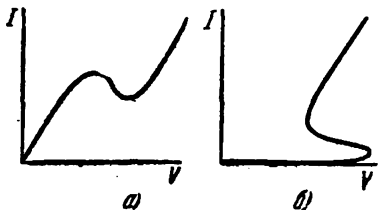


Рис. 2. Вольтамперные характеристики приборов с отрицательным сопротивлением: а) первый тип, б) второй тип.

отрицательного сопротивления см. R. S. Mackay, American Journal of Physics 26, 60 (1958). Начнем с вопроса об устойчивости и неустойчивости. Мы все знакомы с механической устойчивостью в применении к понятию равновесия. Состояние равновесия (рис. 3) может быть устойчивым (а), нейтральным (б) и неустойчивым (в). Если сместить шарик влево (рис. 3, а), то он будет совершать коле-

бания вокруг положения равновесия. Когда эти колебания затухнут, шарик будет находиться в состоянии покоя. Если сместить шарик в случае нейтрального равновесия (рис. 3, б), то он останется смещенным, так как не существует возвращающей силы (по крайней мере для маленьких смещений), которая вернула бы шарик в начальное положение. Что случится, если сместить шарик в случае неустойчивого равновесия (рис. 3, в)?

При маленьком толчке в любую сторону он будет удаляться от положения равновесия с увеличивающейся скоростью. Другим примером этих трех состояний равновесия является конус, стоящий на основании, на боку и на вершине. В случае, показанном на рис. 3, в, можно добиться устойчивого равновесия с помощью трения. Вообще в идеальном случае невозможно найти тело, находящееся в положении неустойчивого равновесия. Так, например, невозможно установить конус на его вершину (идеально отточенную).

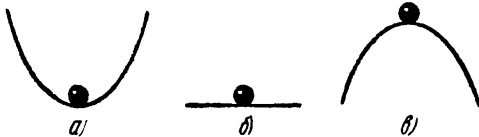


Рис. 3.

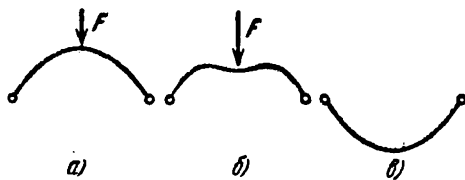


Рис. 4.

На рис. 4 показан пример простой системы, обладающей характеристикой с отрицательным сопротивлением. Такой системой является выгнутый тонкий диск, закрепленный по краям. Если приложить небольшую силу, действующую вниз к центру диска (рис. 4, а, б), то центр диска сместится книзу на малое расстояние. При приложении большей силы диск прогибается все больше (в противоположную сторону) и, наконец, скачком переходит в свое

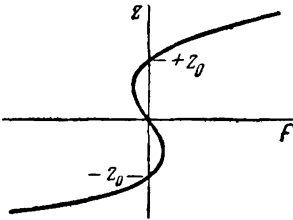


Рис. 5.

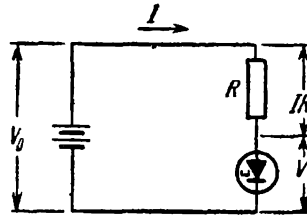


Рис. 6.

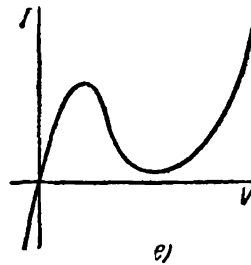
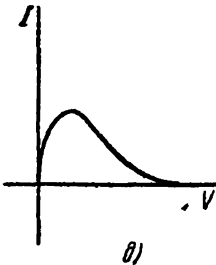
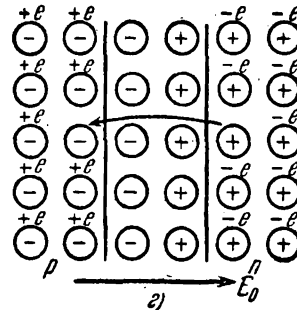
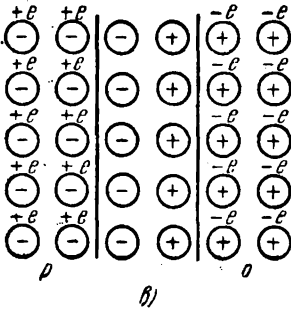
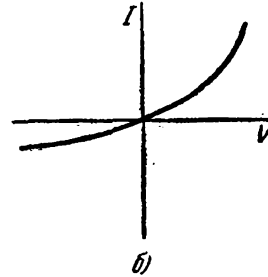
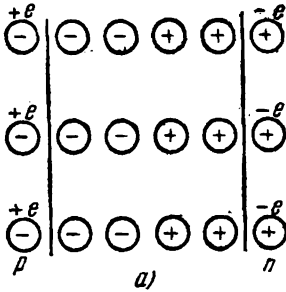


Рис. 7. В обычном диоде плотности электронов и дырок невелики и область, из которой черпаются заряды, широка (а). Ток прямого направления связан с рекомбинацией, а обратного — с генерацией носителей (б). В туннельном диоде плотности электронов и дырок очень велики, а область, из которой черпаются заряды, узка (в). Даже при небольшом приложенном потенциале электроны просачиваются через переход и рекомбинируют с дырками (г). Это просачивание (туннельный эффект) носителей создает дополнительный ток при небольшом потенциале (д). Действительная характеристика туннельного диода определяется суммой рекомбинационного и туннельного токов (е).

другое устойчивое положение (рис. 4, в). Если бы мы нарисовали график в координатах смещения диска  $z$  — приложенная сила  $F$ , то он имел бы вид, как на рис. 5.

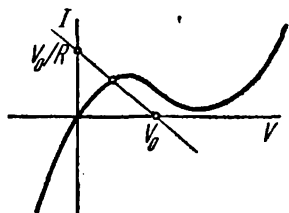


Рис. 8.

—  $z_0 \leq z \leq z_0$  диск ведет себя, как обычная пружина, подчиняющаяся закону Гука, т. е. смещение от положения равновесия пропорционально действующей силе. В промежуточной области смещений на диск действует сила изменяющегося знака, что говорит о наличии отрицательного сопротивления. Эта аналогия не совсем точна, так как мы видели, что электрическим аналогом пружины является емкость, а не сопротивление. Лучшей аналогией может быть пример вязкого трения, которое уменьшается с увеличением скорости.

Рассмотрим теперь схему из последовательно соединенных туннельного диода и сопротивления  $R$ , показанную на рис. 6. (Свойства туннельного диода рассмотрены на рис. 7.) Для того чтобы найти ток через диод, нанесем нагрузочную прямую

$$V + IR = V_0$$

на вольтамперную характеристику диода, как показано на рис. 8.

Вообразим, что мы пытаемся определить вольтамперную характеристику прибора, постепенно увеличивая  $V_0$ . На рис. 9 показано семейство нагрузочных прямых для  $V_0$  от 0 до 0,8 в и  $R = 100$  ом (туннельный диод). Заметим, что при увеличении  $V_0$  от нуля до 0,3 в нагрузочная прямая пересекает характеристику в одной точке и ток постоянно возрастает. В окрестности 0,4 в нагрузочная прямая пересекает характеристику в трех точках. При этом два решения, отвечающие внешним точкам пересечения, устойчивы, а внутренней точке — неустойчиво. При приближении  $V_0$  к 0,5 в нагрузочная прямая сходится с горба характеристики, и мы опять получаем одно решение.

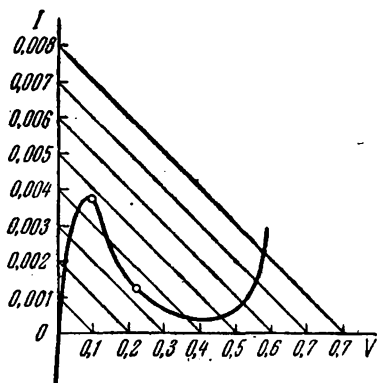


Рис. 9.

Зависимость тока  $I$  от  $V_0$  показана на рис. 10. Заметим, что существует область напряжения, где возможны два значения тока. Действительное значение тока зависит от того, уменьшалось или увеличивалось  $V_0$ . Если мы захотим воспользоваться рис. 10, чтобы восстановить характеристику, то окажется, что мы не в состоянии получить ее полностью. В частности, та область характеристики,

которая заключена между кружками на рис. 9, отсутствует. Чтобы вы сделали, чтобы получить полную характеристику прибора?

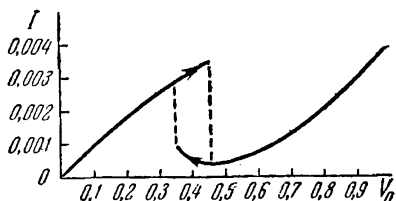


Рис. 10.

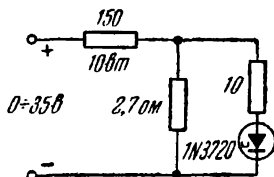


Рис. 11.

Соберем схему, показанную на рис. 11, и определим характеристику туннельного диода марки 1N3720. Схема, при помощи

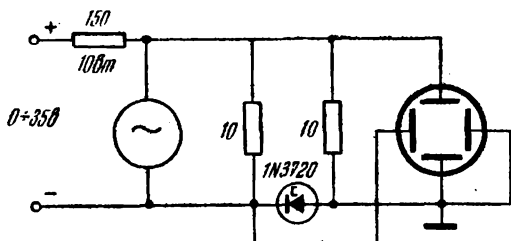


Рис. 12.

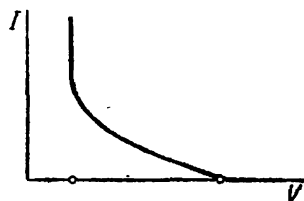


Рис. 13.

которой характеристику туннельного диода можно увидеть на экране осциллографа, показана на рис. 12.

В качестве примера приборов с характеристиками второго типа рассмотрим неоновую лампу. Вольтамперная характеристика такой лампы показана на рис. 13. Ток через лампу не будет проходить до тех пор, пока напряжение, приложенное к лампе, не достигнет потенциала зажигания, который может лежать в пределах от 60 до 100 в. Только при этом напряжении мы в состоянии поддерживать электрический разряд. Тусклое свечение в области отрицательного электрода указывает на рекомбинацию электронов и положительных ионов неона. С увеличением тока разряда потенциал на приборе падает до более низкого уровня, который определяется процессами на электродах и при котором возникает токовая независимость. Если потенциал падает ниже этого уровня, называемого *потенциалом гашения*, то газ полностью деионизован и ток прекращается. Чтобы опять вызвать разряд, мы должны увеличить напряжение до потенциала зажигания.

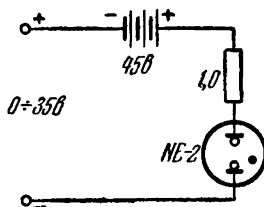


Рис. 14.

Используйте схему, показанную на рис. 14, для определения вольтамперной характеристики неоновой лампы NE-2. Можете ли вы объяснить, почему нельзя получить полной характеристики прибора? Сколь велико должно быть последовательно включенное сопротивление, чтобы можно было снять полную характеристику неоновой лампы NE-2? Определите область отрицательного сопротивления этого прибора.

### Работа 1.12. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Простым примером релаксационного генератора является зуммер (рис. 1), временная диаграмма работы которого показана на рис. 2. Когда ключ  $S$  замыкается, ток через сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$  начинает расти, как показано на рис. 2. При некотором критическом значении тока  $I_0$  контакт  $K$  размыкается и ток падает до нуля. При нулевом значении тока контакт замыкается и цикл повторяется.

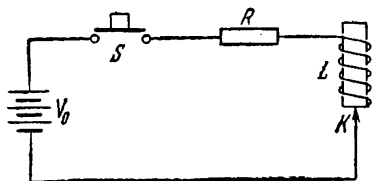


Рис. 1.

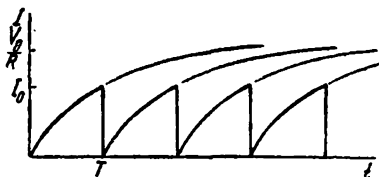


Рис. 2.

Аналогичным примером является генератор релаксационных колебаний на туннельном диоде, показанный на рис. 3. Схема работает следующим образом. При замыкании ключа ток через туннельный диод начинает расти. Когда ток превысит пиковое значение  $I_p$  (рис. 4), напряжение на диоде скачком переходит к значению  $V_2$ . Параметры схемы выбраны так, что после такого увеличения падения напряжения на диоде ток начнет уменьшаться. Это уменьшение будет происходить до тех пор, пока не достигнет значения  $I_v$ ,

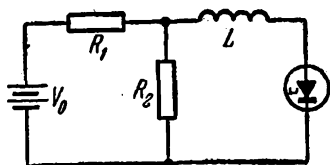


Рис. 3.

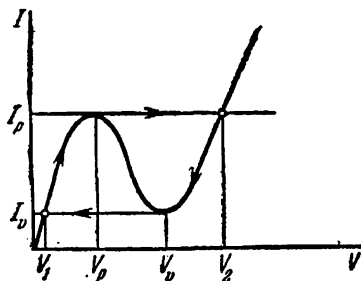


Рис. 4.

после чего напряжение скачком падает до  $V_1$ . Теперь ток начинает расти опять и цикл повторяется. Временные диаграммы тока и напряжения показаны на рис. 5 и 6.

Релаксационный генератор может быть сделан и на неоновой лампе, как это показано на рис. 7. Принцип действия этой схемы

проще, чем схемы на туннельном диоде, благодаря почти идеальной характеристике лампы с тлеющим разрядом. При включении напряжения  $V_0$  емкость  $C$  начинает заряжаться через сопротивление  $R$  до значения  $V_f$ . Но как только напряжение достигает потенциала зажигания  $V_f$ , лампа загорается и емкость разряжается. Когда напряжение на емкости достигнет потенциала гашения  $V_e$ , газ в лампе деионизуется, емкость перезаряжается через сопротивление  $R$  и цикл, показанный на рис. 8, повторяется. Временная зависимость напряжения показана на рис. 9. Период  $T_1$ , в течение которого емкость  $C$  заряжается через сопротивление  $R$ , обычно значительно больше времени разряда емкости через тлеющую лампу. Это происходит потому, что сопротивление  $R$  значительно больше сопротивления лампы во время разряда.

Можно получить простое аналитическое выражение для периода  $T_1$  и для частоты колебаний. Из рис. 9 мы имеем соотношения  $V_e = V_0(1 - e^{-t_0/\tau})$ ,  $V_f = V_0(1 - e^{-(t_0 + T_1)/\tau})$ . Решив эти уравнения относительно  $T_1$ , получим  $T_1 = RC \ln \frac{V_0 - V_e}{V_0 - V_f}$ .

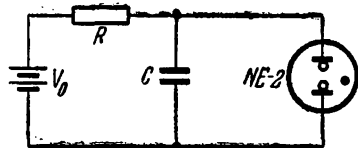


Рис. 7.

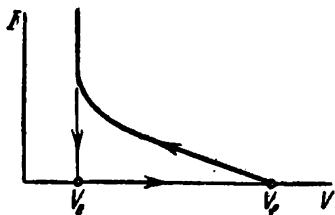


Рис. 8.

циллографе. Что произойдет с колебаниями при уменьшении  $V_0$ ? Почему?

Вы можете построить схему генератора на туннельном диоде, показанную на рис. 3. Возьмите  $R_1 = 22 \text{ ом}$ ,  $R_2 = 2,7 \text{ ом}$  и  $V_0 =$

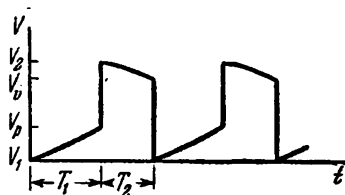


Рис. 5.



Рис. 6.

Соберите схему, показанную на рис. 7, со следующими параметрами:  $V_0 = 90 \text{ в}$  включается последовательно с транзисторным источником питания,  $R = 22 \text{ Мом}$ ,  $C = 0,1 \text{ мкф}$ . При  $V_0 = 135 \text{ в}$  вычислите время  $T_1$ , используя значения  $V_e$  и  $V_f$ , полученные из характеристики неоновой лампы NE-2, снятой в Р.1.11. Определите период по секундной стрелке ваших часов и сравните его с вычисленным. Включите сопротивление  $R = 1 \text{ Мом}$  и емкость  $C = 0,001 \text{ мкф}$  и посмотрите форму колебаний на осциллографе.

$= 3 \text{ в.}$  Активное сопротивление индуктивности должно быть меньше одного ома, для того чтобы диод работал в области отрицательного сопротивления.

Оцените периоды  $T_1$  и  $T_2$  по снятой вами характеристике туннельного диода, как показано на рис.5. Посмотрите форму волны на осциллографе и сравните измеренные времена с вашими оценками.

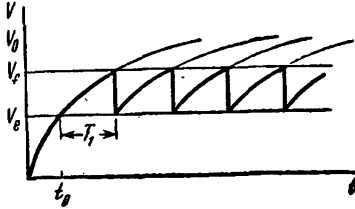


Рис. 9.

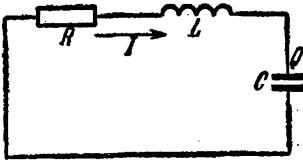


Рис. 10.

### Приложение 1.12. Фазовая плоскость

Очень удобно представить нелинейные процессы, рассмотренные в настоящей работе, в виде графика в координатах заряд — ток. В механике аналогичными координатами являются положение и скорость. Плоскость таких координат называется *фазовой плоскостью*. До рассмотрения релаксационных колебаний мы воспользуемся фазовой плоскостью для обсуждения переходных процессов в LRC-цепочке.

Рассмотрим схему, показанную на рис. 10. Уравнение схемы имеет вид

$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$ . Используя тождество  $\frac{dI}{dt} \equiv \frac{dI}{dQ} \frac{dQ}{dt} \equiv I \frac{dI}{dQ}$  и подставляя его в уравнение, получим

$$\frac{dI}{dQ} = - \frac{IR + Q/C}{LI}. \quad (1)$$

При  $Q = Q_0$  и  $I = 0$  в момент  $t = 0$  мы получим  $dI/dQ$ , равное бесконечности. Это значит, что траектория на фазовой плоскости начинается вертикально. Проинтегрировав (1), можно получить всю траекторию. Для интегрирования удобно перейти к полярным координатам  $Q = \rho \cos \vartheta$ ,  $I = \omega_0 \rho \sin \vartheta$ , где  $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$  — частота колебаний.

В новых координатах из (1) имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{R}{L} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{\omega_0 + (R/2L) \sin 2\vartheta}. \quad (2)$$

Если  $1/\tau = R/2L$  мало по сравнению с  $\omega_0$ , то, проинтегрировав уравнение (2), получим  $\rho = Q_0 e^{[\vartheta - 1/2 \sin 2\vartheta]/\omega_0 \tau}$ . Эта кривая графически представлена на рис. 11. Каждый поворот на  $2\pi$  соответствует периоду колебаний. Из выражения для  $\rho$  видно, что за один период амплитуда уменьшается в  $e^{-2\pi/\omega_0 \tau} = e^{-T/\tau}$  раз. Такой же результат был получен в Р.1.6.



При помощи схемы на рис. 12 фазовую диаграмму можно получить на экране осциллографа.

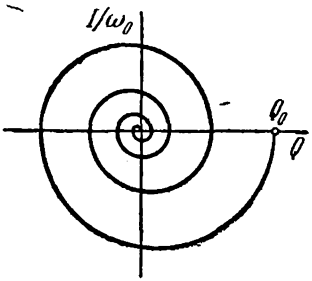


Рис. 11.

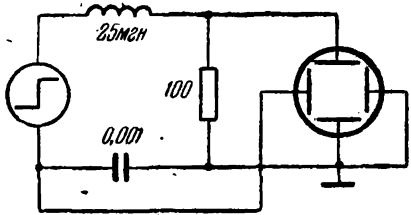


Рис. 12.

Фазовая диаграмма очень удобна для описания нелинейных явлений, особенно когда невозможно аналитически выразить отклик

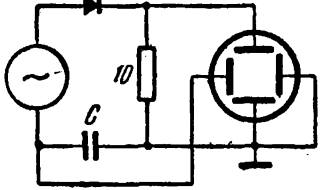


Рис. 13.

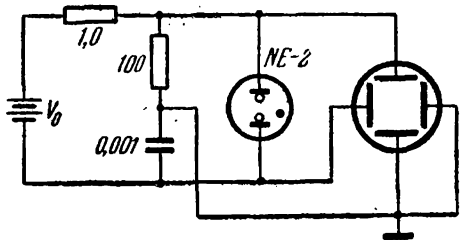


Рис. 14.

систем. Практическим примером является схема, составленная из диода и емкости, показанная на рис. 13.

Релаксационные колебания также можно изобразить на фазовой плоскости. На рис. 14 показан релаксационный генератор с маленьким сопротивлением, включенным последовательно с емкостью для того, чтобы можно было наблюдать фазовую диаграмму. Нарисуйте ожидаемую диаграмму. Соберите схему и наблюдайте действительную диаграмму для различных значений  $V_0$ .

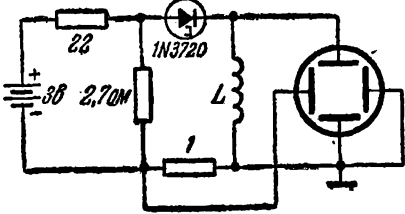


Рис. 15.

Для генератора на туннельном диоде (рис. 3) более удобно иметь фазовую плоскость в координатах  $I$  и  $dI/dt$ . Схема, соответствующая этим координатам, показана на рис. 15.

## РАЗДЕЛ 2

### КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СРЕДАХ

#### Работа 2.1. ТРАНЗИСТОР

Мы познакомились с рядом линейных «двухполюсных» элементов: сопротивлением, конденсатором, индуктивностью, а также и с несколькими нелинейными элементами. Рабочий режим такого

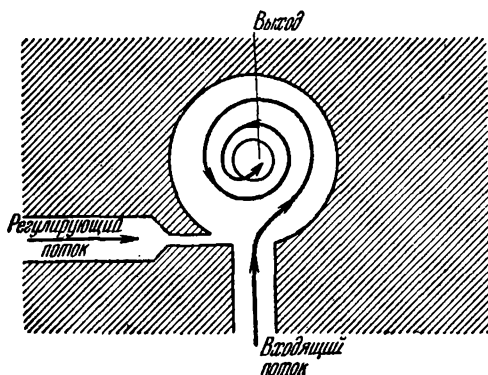


Рис. 1.

элемента можно характеризовать током, протекающим через него, и напряжением (или разностью потенциалов) на его полюсах. В этой и трех следующих работах мы будем изучать поведение замечательного «трехполюсного» полупроводникового устройства, а именно плоскостного транзистора. Этот прибор интересует нас, в частности, потому, что он является представителем растущего класса устройств, называемых усилителями мощности. В каком смысле можно усиливать мощность? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала жидкостный усилитель.

На рис. 1 показана схема недавно разработанного жидкостно-струйного регулирующего устройства \*), которое является вихревым усилителем мощности.

В вихревом усилителе основной поток протекает по периферии устройства. Жидкость циркулирует в контейнере, образуя вихрь, и выходит через отверстие перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 1). В отсутствие регулирующего потока падение давления

\*) S. W. A n g r i s t, Fluid control devices, Scientific American 211, 80 (1964).

между входом и выходом будет относительно малым. Если теперь вводить жидкость через регулирующее сопло, мы изменим форму потока в пределах камеры, прижав поток к стенкам контейнера. При заданном давлении на входе выходной поток уменьшится. Чтобы сохранить величину потока, нужно увеличить перепад давления в устройстве.

Характеристики такого устройства можно представить в виде графиков, показанных на рис. 2, а и б. Его поведение можно характеризовать четырьмя переменными:

1. Давление на входе (относительно выходного)  $P_i$ .
2. Входной поток  $\Phi_i$ .
3. Регулирующее давление (относительно выходного)  $P_c$ .
4. Регулирующий поток  $\Phi_c$ .

Из этих переменных только две являются независимыми. Например, если мы установили входное давление и регулирующий поток,

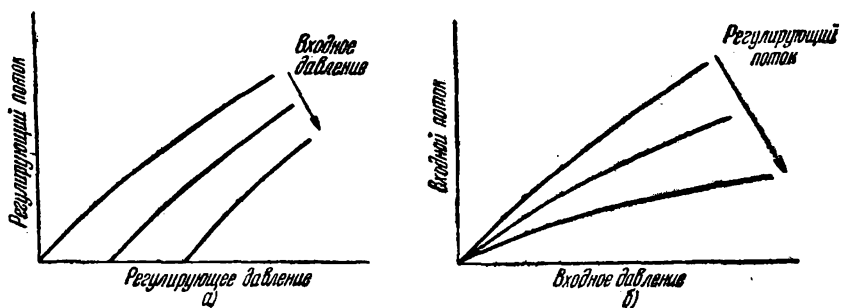


Рис. 2.

то тем самым будут определены как входной поток, так и регулирующее давление. Какие переменные считают независимыми и какие зависимыми, является вопросом удобства. Целесообразность выбора тех или иных независимых переменных связана с характеристиками устройства и его применением. Если мы имеем дело с характеристикой регулирования (рис. 2, а), регулирующий поток удобно рассматривать как функцию регулирующего давления и входного давления. На рис. 2, а показано семейство кривых для трех постоянных значений входного давления. Там, где мы имеем дело с входными характеристиками, удобно рассматривать входной поток как функцию входного давления с регулирующим потоком в качестве параметра. На рис. 2, б показана входная характеристика такого типа.

Как использовать такое устройство в качестве усилителя? Сначала предположим, что входное давление поддерживается постоянным и мы меняем регулирующий поток. В этих условиях усиление потока  $\beta$  определяется отношением

$$\beta = \left( \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta \Phi_c} \right)_{P_i = \text{const}} \quad (1)$$

Предположим, что входной поток поддерживается постоянным, а регулирующее давление изменяется. Тогда усиление давления  $\mu$  определяется отношением

$$\mu = \left( \frac{\Delta P_i}{\Delta P_c} \right)_{\Phi_i = \text{const}} \quad (2)$$

Произведение усиления давления  $\mu$  на усиление потока  $\beta$  дает максимальное теоретическое значение усиления мощности. Мы не будем доказывать это соотношение здесь, а перенесем обсуждение

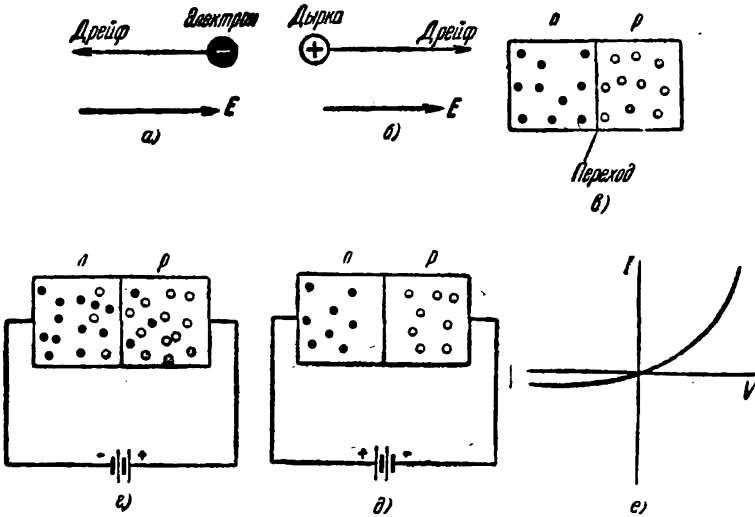


Рис. 3. Полупроводники имеют два типа носителей: электроны, которые заряжены отрицательно (а), и дырки, которые представляют собой дефицит электронов и ведут себя как частицы, имеющие положительный заряд (б). Полупроводниковый переход (в) разделяет область типа  $n$ , в которой большинство носителей заряда являются электронами, и область типа  $p$ , в которой большинство носителей — дырки. Если мы приложим положительный потенциал к области типа  $p$ , то возникнет сильный «прямой» ток через переход. Электроны перемещаются направо, а дырки — налево (г). Если мы приложим отрицательный потенциал к области типа  $p$ , возникнет только очень слабый «обратный» ток (д). Таким образом,  $p$ - $n$ -переход является выпрямителем тока (е).

вопроса об усилении мощности в Приложение 2.2, где подробно рассмотрено усиление мощности с помощью транзистора.

Следует подчеркнуть, что усиление потока или усиление давления в устройстве еще не свидетельствует о том, что оно является усилителем мощности. Например, рычаг является усилителем силы. Но перемещения концов рычага обратно пропорциональны соответствующим силам, и для рычага усиление мощности равно единице. Это является следствием закона сохранения энергии, поскольку другие источники энергии отсутствуют. В усилителе мощности должен быть энергетический резервуар, и мы регулируем скорость, с которой производится работа. Чтобы управлять этой скоростью, мы должны сами производить некоторую работу. Отношение этих двух величин как раз и характеризует усиление мощности. Конечно, энергия в целом сохраняется.

После такого довольно общего введения мы перейдем к транзистору. Плоскостной транзистор можно представить как пару полупроводниковых диодов с общей областью  $n$ - или  $p$ -типа. Если участок  $n$ -типа — общий, мы имеем  $p-n-p$ -транзистор. Если общим является участок  $p$ -типа, мы имеем дело с транзистором  $n-p-n$ -типа. Мы уже обсуждали (см. Р.1.9) характеристики

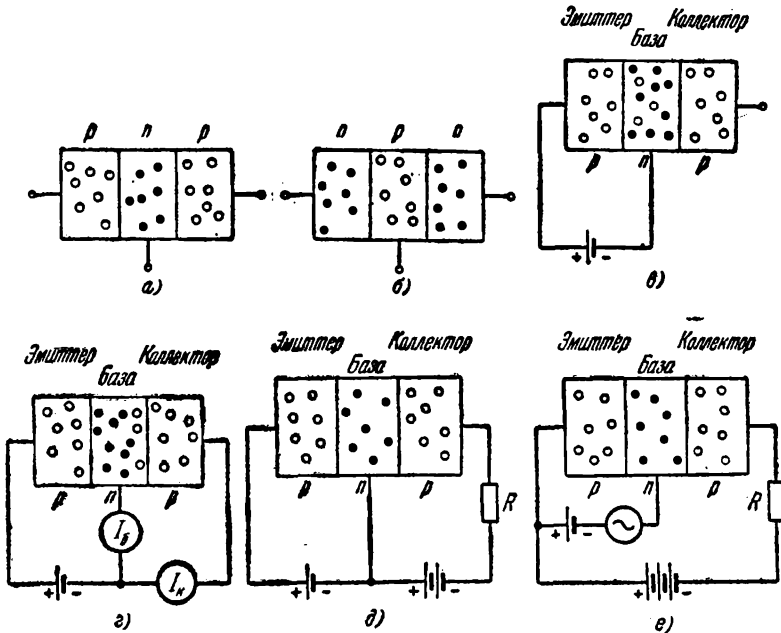


Рис. 4. Транзистор (а) образован из пары  $p-n$ -переходов с областью типа  $n$  в центре ( $p-n-p$ -транзистор), или с областью типа  $p$  в центре ( $n-p-n$ -транзистор) (б). Если мы сместим один из переходов в прямом направлении, мы введем неосновные носители в область базы (в). Эти носители диффундируют во второй переход, где они собираются. В идеальном случае все введенные носители улавливаются, и ток базы отсутствует (г). Если мы поместим сопротивление в цепь коллектора, то получим напряжение, пропорциональное току эмиттера. На коллектор подано смещение в обратном направлении, чтобы предотвратить инжекцию через коллекторный переход (д). В обычном транзисторном усилителе мы подаем сигнал на базу, а усиленный сигнал снимаем с коллектора (е).

$p-n$ -перехода. Электрические свойства  $p-n$ -перехода иллюстрируются рис. 3. На рис. 3, г (прямое смещение) дырки проникают через переход в область  $n$ -типа, где они рекомбинируют с электронами. Электроны аналогично пересекают переход и попадают в область  $p$ -типа, где рекомбинируют с дырками. При изменении знака разности потенциалов (обратное смещение) большая часть основных носителей уходит от перехода соответственно на свои стороны. Остается небольшой ток обратного направления, обусловленный теми носителями обоих знаков, которые образуются в зоне перехода.

Принцип действия транзистора показан на рис. 4. При прямом смещении на левом  $p-n$ -переходе, как показано на рис. 4, в, дырки

инжектируются в центральную область, или область базы. Большинство этих дырок диффундирует через область базы к коллекторному переходу. Небольшая часть дырок рекомбинирует с электронами в пределах области базы, вызывая ток базы.

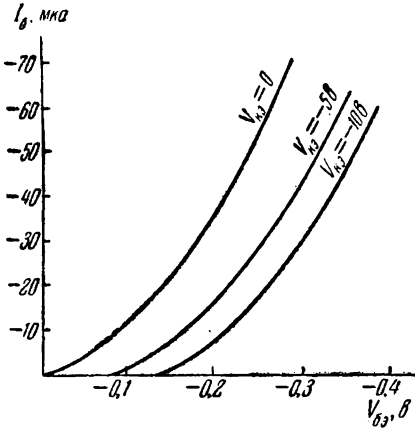


Рис. 5.

Если коллекторный переход смещен в обратном направлении, как показано на рис. 4, д, то имеет место слабая инжекция электронов в область базы.

На рис. 5 показана входная характеристика транзистора  $p-n-p$ -типа.

Смысл обозначений рис. 5 пояснен схематическим изображением транзистора на рис. 6. Направление тока к транзистору принято считать положительным. Условные обозначения напряжений также показаны на рисунке. Например,  $V_{кб}$  — напряже-

ние коллектора по отношению к базе. Положительное  $V_{кб}$  означает, что коллектор положителен по отношению к базе, и т. п. Направление стрелки на эмиттере соответствует направлению прямого тока. Поэтому транзистор, показанный на рис. 6, должен быть транзистором  $p-n-p$ -типа. Для  $n-p-n$ -транзистора направление стрелки будет обратным. Обратим внимание на входную характеристику для  $V_{кб} = 0$ , показанную на рис. 5. Она напоминает входную характеристику полупроводникового диода, включенного в прямом направлении. Когда коллектор и эмиттер имеют один и тот же потенциал, дырки инжектируются в область базы с обеих сторон и вытекают из этой области. Но если потенциал коллектора отрицателен по отношению к потенциалу эмиттера, инжекция дырок через коллекторный переход сокращается и этот переход в конечном итоге становится коллектором дырок. Это значительно сокращает вклад дырок в ток базы, как можно видеть из рис. 5. (Ток базы в хорошем приближении является экспоненциальной функцией напряжения между эмиттером и базой  $V_{бэ}$ . Таким образом, уменьшение тока базы  $I_b$  на постоянный множитель просто сдвигает кривую вправо. Можете ли вы получить этот результат?)

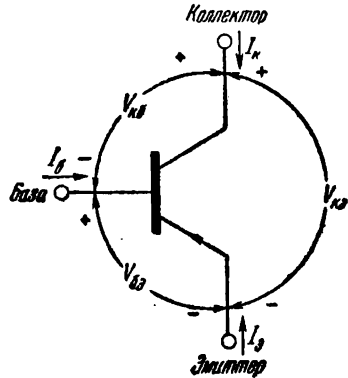


Рис. 6.

Выходная характеристика  $p-n-p$ -транзистора показана на рис. 7. Здесь ток коллектора представлен в зависимости от напряжения между коллектором и эмиттером  $V_{кэ}$ , с током базы  $I_б$  в качестве параметра.

Основания для произведенного нами выбора зависимости переменной и параметра станут яснее, когда мы изучим работу транзисторного усилителя (см. Р.2.2).

Сейчас мы можем рассматривать рис. 5 и 7 просто как примеры двух из нескольких возможных характеристик транзистора. Следует отметить, что (очень приближенно) ток коллектора  $I_к$  в пятьдесят раз превосходит ток базы. Это означает, что дырка, инжектированная эмиттером, с 98-процентной вероятностью достигает коллекторного перехода. Она имеет двухпроцентную вероятность рекомбинировать в пределах области базы и этим путем внести вклад в базовый ток.

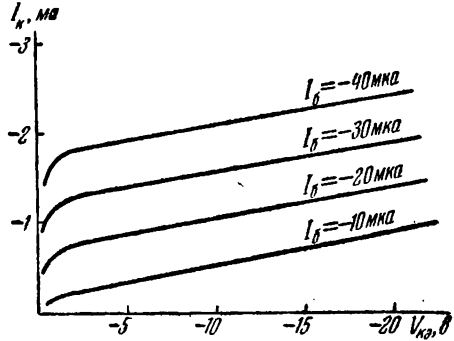


Рис. 7.

Заметьте, что имеется легкий наклон кривой зависимости тока коллектора  $I_к$  от  $V_{кэ}$ . Этот дополнительный ток возникает из-за образования электронов и дырок у коллектора.

На рис. 8 показана схема, которая может быть использована для определения характеристик транзистора. Указанные полярности батареи предназначены для  $p-n-p$ -транзистора. При использовании схемы для  $n-p-n$ -транзисторов их нужно обратить

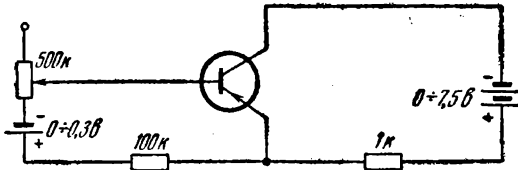


Рис. 8.

(т. е. при подключении поменять местами эмиттер и коллектор). Все потенциалы и токи в этой схеме могут быть измерены одним ламповым вольтметром, корпус которого соединен с эмиттером. Ток базы можно отрегулировать с помощью переменного сопротивления в  $500 \text{ ком}$  и вычислить, измерив падение потенциала на сопротивлении  $100 \text{ ком}$ . Напряжение коллектор — эмиттер  $V_{кэ}$  можно изменять в пределах от 0 до  $7,5 \text{ в}$  с помощью отводов на батарее. Ток коллектора можно найти, зная падение потенциала на сопротивлении  $1 \text{ ком}$ . Для этих опытов можно использовать любой герма-

ниевый транзистор общего назначения. Приведем обозначения употребляемых транзисторов:

$p-n-p$	$n-p-n$
2N1303	2N1302
2N1305	2N1304

Используя схему рис. 8, определите входные и выходные характеристики  $p-n-p$ -транзистора и сравните их с соответствующими

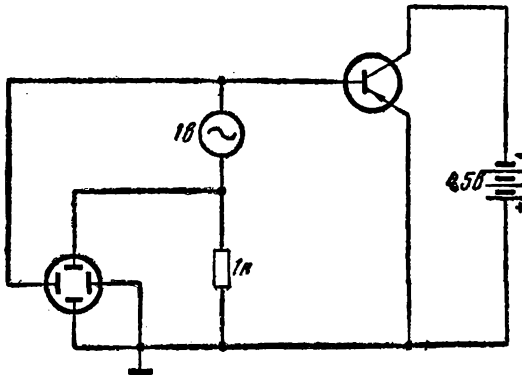


Рис. 9.

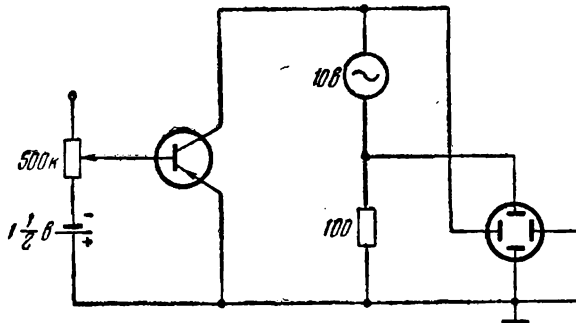


Рис. 10.

характеристиками  $n-p-n$ -транзистора. Вы можете увидеть характеристики транзистора на экране осциллографа. Схема для демонстрации входных характеристик дана на рис. 9. Соответствующая схема для демонстрации выходных характеристик показана на рис. 10.



## Приложение 2.1. Анализ электрических цепей

Мы умеем вычислять ток в цепи, показанной на рис. 11. Напряжение на батарее равно напряжению на сопротивлении. Последнее равно произведению величины сопротивления на величину тока

$$V = IR, \text{ или } I = \frac{V}{R}. \quad (3)$$

За положительное направление тока принято направление движения положительных зарядов. Так как положительные заряды движутся в поле, направленном от положительного полюса батареи, ток на схеме должен течь через сопротивление вниз. Но что происходит в цепи, показанной на рис. 12? Ясно, что эту задачу невозможно решить с одного взгляда. Нам потребуется несколько более систематический путь решения, который заключается в применении законов Кирхгофа:

1. Алгебраическая сумма токов в узле должна равняться нулю.

2. Алгебраическая сумма разностей потенциалов вдоль замкнутой цепи должна равняться нулю.

Первый закон Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда и того факта, что в узле в установившемся режиме не может быть накопления заряда.

Второй закон является следствием существования электростатического потенциала. Если мы пронесем заряд в цепи по замкнутому контуру (или в пространстве в непосредственной близости от цепи), то вся работа, произведенная над зарядом, должна равняться нулю.

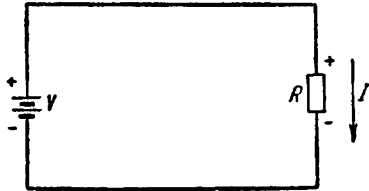


Рис. 11.

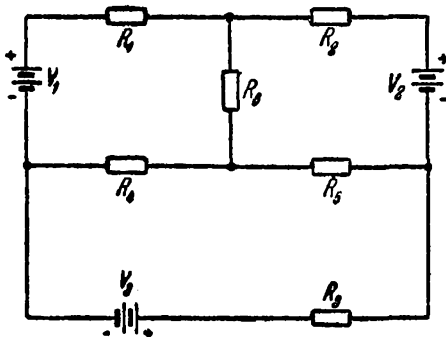


Рис. 12.

Для определения токов и потенциалов цепи, изображенной на рис. 12, мы обозначим токи, протекающие через шесть ответвлений, через  $I_1 - I_6$ . Мы задаем направление токов, но это направление произвольно; если мы выбрали неправильное направление, решение

задачи даст ток с отрицательным знаком. Удобно также указать относительные потенциалы на сопротивлениях, опираясь на принятое направление тока. (Запомните, что токи текут к более низким потенциалам.) На рис. 13 показаны принятые направления токов для цепи рис. 12.

При рассмотрении вышеприведенной схемы видно, что имеется четыре узла, позволяющие нам написать четыре уравнения, вытекающие из первого закона Кирхгофа. Число замкнутых контуров, равно шести, что позволяет написать с помощью второго закона Кирхгофа шесть уравнений. Но у нас только шесть неизвестных!

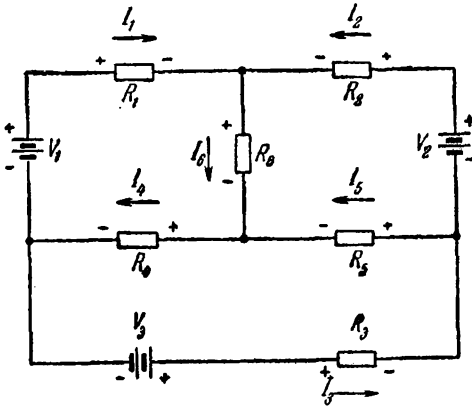


Рис. 13.

В действительности число линейно независимых уравнений для контуров равно лишь трем, и мы имеем лишь три линейно независимых уравнения для токов. Мы берем следующие уравнения для токов:

$$I_1 + I_2 - I_6 = 0, \quad (4)$$

$$I_5 + I_6 - I_4 = 0, \quad (5)$$

$$I_4 - I_1 - I_3 = 0. \quad (6)$$

Заметьте, что ток в направлении узла считается положительным, ток, текущий от узла — отрицательным.

Покажите, что уравнение для четвертого узла может быть получено из трех приведенных. Три линейно независимых контурных уравнения можно записать следующим образом:

$$V_1 - I_1 R_1 - I_6 R_6 - I_4 R_4 = 0, \quad (7)$$

$$-V_2 - I_5 R_5 + I_6 R_6 + I_2 R_2 = 0, \quad (8)$$

$$-V_3 + I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_3 R_3 = 0. \quad (9)$$

Мы получили эти уравнения, обходя три независимых контура по часовой стрелке. Падение потенциала на любом элементе цепи мы записываем как разность потенциалов выходного и входного полюса этого элемента. Имеется три других контура, которые можно было бы рассмотреть. Вы можете убедиться в том, что уравнения для этих контуров являются линейными комбинациями уравнений (7), (8) и (9). Решение написанных уравнений является алгебраической задачей, и мы не будем ее касаться.

Теперь обратимся к цепи переменного тока и напомним уравнение для цепи, показанной на рис. 14.

Чтобы написать это уравнение, мы сначала должны принять несколько условий. Прежде всего будем считать потенциал источника положительным, когда верхний вывод положителен по отношению к нижнему выводу. Тогда положительное направление тока будет в направлении обхода по часовой стрелке (рис. 15).

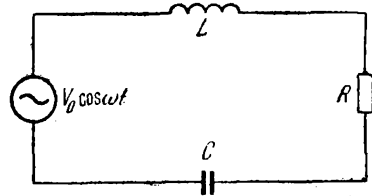


Рис. 14.

Мы определяем заряд  $Q$  как заряд на правой обкладке конденсатора. Далее, мы знаем, что если ток увеличивается, то на индуктивности будет наблюдаться падение потенциала. Итак, мы можем написать уравнение для тока в контуре в такой форме:

$$V_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} - IR - \frac{Q}{C} = 0. \quad (10)$$

Решение этого уравнения подробно обсуждалось в Р.1.8. Теперь рассмотрим цепь, изображенную на рис. 16. Как найти токи в такой цепи? Выберем положительное направление тока в соответствии с рис. 17. Теперь имеем дело с четырьмя токами и двумя зарядами. Уравнение

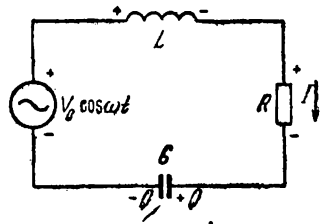


Рис. 15.

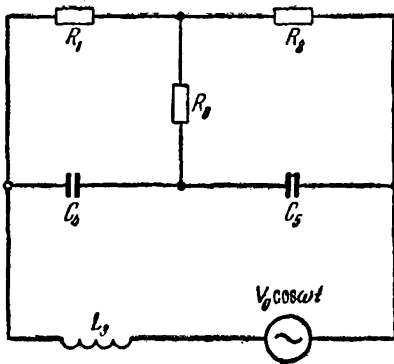


Рис. 16.

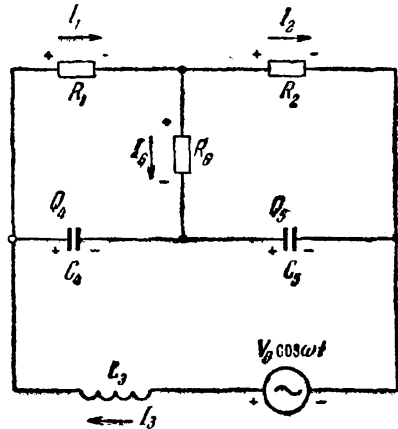


Рис. 17.

для токов, которые вытекают из сохранения заряда, принимают теперь вид

$$I_3 - I_1 - \frac{dQ_4}{dt} = 0, \quad (11)$$

$$I_6 + \frac{dQ_4}{dt} - \frac{dQ_6}{dt} = 0, \quad (12)$$

$$I_2 - I_3 + \frac{dQ_5}{dt} = 0. \quad (13)$$

Контурные уравнения имеют вид

$$-I_1 R_1 - I_6 R_6 + \frac{Q_4}{C_4} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{Q_5}{C_5} + I_6 R_6 - I_2 R_2 = 0, \quad (15)$$

$$V_0 \cos \omega t - L_3 \frac{dI_3}{dt} - \frac{Q_4}{C_4} - \frac{Q_5}{C_5} = 0. \quad (16)$$

Если схема питается от одного синусоидального генератора (рис. 17), самое простое — это ввести комплексное входное напряжение и определить результирующие комплексные токи. Мы можем привести соображение, аналогичное приведенному в П.1.8: вместо решения для токов с входным сигналом  $V_1(t)$  мы могли бы решить уравнения для токов при входном сигнале  $V_2(t)$ . Каким бы был результирующий ток, если бы сигнал имел вид

$$V(t) = AV_1(t) + BV_2(t)? \quad (17)$$

Из принципа суперпозиции следует, что ток в каждом элементе будет изменяться по такому же закону  $I(t) = AI_1(t) + BI_2(t)$ , где  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$  — токи, вызываемые действием напряжений  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$  на входе системы. Для удобства сделаем выбор постоянных:

$$A = 1, \quad B = i, \quad V_1(t) = V_0 \cos \omega t, \quad V_2(t) = V_0 \sin \omega t. \quad (18)$$

Тогда (17) дает

$$V(t) = V_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t) = V_0 e^{i\omega t}. \quad (19)$$

Запишем токи в виде

$$I_j(t) = I_{0j} e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Тогда, например, напряжение на индуктивности можно записать следующим образом:

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 e^{i\omega t}) = (i\omega L) I_0 e^{i\omega t} = (i\omega L) I. \quad (21)$$

Величина  $i\omega L$  играет роль сопротивления и называется индуктивным сопротивлением. Аналогично, емкостное сопротивление равно  $-1/i\omega C$ . Комплексная сумма активного и реактивных сопротивлений  $Z = R + (i\omega L) + (-1/i\omega C)$  называется *импедансом*. Таким образом, уравнения (11) — (16) принимают такую же форму, как уравнения для цепи постоянного тока, за исключением того, что мы имеем комплексные импедансы вместо активных сопротивлений. После того как мы нашли комплексные токи, определение тока для случая, когда действует только  $V_1(t) = V_0 \cos \omega t$ , является простым делом. Это действительная часть каждого из комплексных токов  $I_j(t)$ .

## Работа 2.2. УСИЛЕНИЕ И ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА

Усилитель является устройством, которое увеличивает мощность сигнала. Например, средний квадратичный входной сигнал радиоприемника может быть не более 10 мкв. При входном импедансе 100 ом это соответствует входной мощности

$$P = \frac{V^2}{R} = 10^{-12} \text{ вт} = 1 \text{ нвт}. \quad (1)$$

Мощность, доходящая в конечном итоге до громкоговорителя, может быть порядка одного ватта. Приемник увеличил мощность

сигнала на двенадцать порядков, или 120 децибел \*). Источником этой выходной мощности является внутренний источник питания. Таким образом, функцией усилителя является превращение энергии в сигнал, согласованный с входным сигналом.

Существует много видов усилителей, не только электрических, но и магнитных, химических, механических и жидкостных. Жидкостный усилитель описан в Р.2.1. Наиболее распространенные электрические усилители выполнены на электронных лампах и транзисторах. Транзисторы обладают существенными преимуществами: долговечностью и высокой экономичностью, поскольку исключена необходимость тратить большое количество энергии для поддержания высокой температуры катода. По этим и другим причинам полупроводниковые устройства постепенно вытесняют электронные лампы. В Р.2.2 и двух последующих работах мы исследуем некоторые свойства транзисторных усилителей. В разделе 3 лабораторного практикума в связи с изучением электронных пучков будут рассмотрены свойства электронных ламп.

Существуют различные способы использования транзистора в качестве усилителя мощности. На рис. 1, без указания смещений и сопротивлений, показана схема с общим эмиттером.

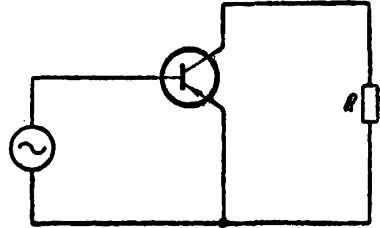


Рис. 1.

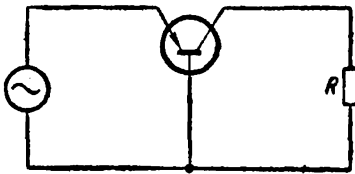


Рис. 2.

Входной сигнал подается между базой и эмиттером. Выходной сигнал снимается с коллектора. Транзистор, используемый таким образом, дает приблизительно пятидесятикратное усиление по току. Сопротивление в коллекторе может быть несколько больше, чем

входное сопротивление, при этом усиление по мощности будет достигать нескольких тысяч. На рис. 2 показан транзистор в схеме с общей базой. Здесь входной и выходной токи одинаковы. Но выходное сопротивление может быть в несколько тысяч раз больше входного сопротивления. Входной импеданс этой схемы на много меньше выходного импеданса схемы с общим эмиттером, и она полезна только при работе на высокоомную нагрузку. И, наконец, схема с общим коллектором, показанная на рис. 3, имеет усиление по напряжению, равное единице. Однако выходное сопротивление

\*) Обычно усиление мощности выражается в логарифмическом масштабе. Единицей логарифмического усиления является бел, чаще децибел. Логарифмическое усиление мощности  $L_{УМ} = 10 \lg (P_2/P_1)$  дб.

может быть значительно ниже, чем входное сопротивление, что приводит к значительному увеличению по мощности. (Рис. 1—3

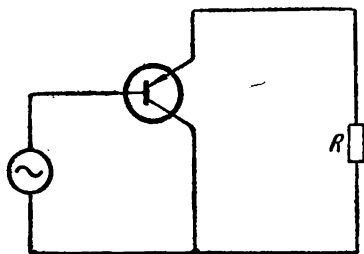


Рис. 3.

должны рассматриваться как схематические. Кроме входных и выходных сигналов, нужно вводить потенциалы, чтобы установить рабочие точки устройств.)  
 На рис. 4 изображена реальная схема с общим эмиттером. Для простоты мы используем одну и ту же батарею, чтобы установить рабочие точки как входной, так и выходной цепи. Установите потенциометр 500 ком так, чтобы ток коллектора был равен приблизительно 1 ма. Измерьте напряжение  $V_{кэ}$  коллектора по отношению к эмиттеру и напряжение  $V_{бэ}$  базы по отношению к эмиттеру. Определите ток базы, измерив напряжения во входной цепи. Зафиксируйте величины  $V_{кэ}$ ,  $V_{бэ}$ ,  $I_{к}$  и  $I_{б}$ , определяющие рабочий режим транзистора. Для введения тока генератора

$$i_r = i_0 \cos \omega t \quad (2)$$

в базу можно использовать схему рис. 5.

Измерьте величину входного сигнала  $u_{бэ}$  на базе транзистора при частоте входного сигнала 400  $\mu$ . Вычислите эффективное входное сопротивление  $r_{вх}$  базы. Измерьте величину сигнала  $u_{кэ}$  на коллекторе и подсчитайте усиление по току  $\beta = (i_k/i_b)$ . (Заметьте, что мы используем строчные буквы  $i$  и  $u$  для обозначения малых переменных токов и напряжений сигналов. Прописные буквы используются для обозначения статических рабочих точек наших схем.)

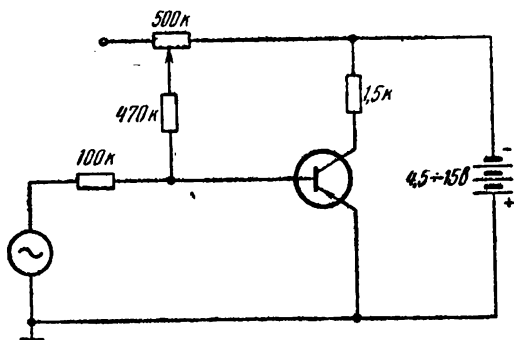


Рис. 5.

Теперь измерьте зависимость усиления по току  $\beta$  от частоты. При какой частоте усиление упадет до  $1/\sqrt{2}$  своей низкочастотной величины? Используя один из методов, опи-

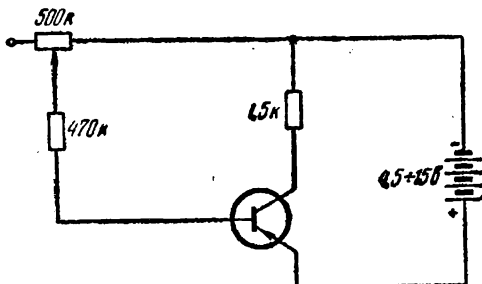


Рис. 4.

санных в Р.1.7, найдите частотную зависимость сдвига фазы в усилении по току  $\beta$ . Причину падения усиления по току  $\beta$  с увеличением частоты мы обсудим в Р.2.3, где рассмотрим переходную характеристику транзистора. Ход этой характеристики легко понять с помощью эквивалентной схемы, изображенной на рис. 6, где входное сопротивление  $r_{вх}$  шунтируется входной емкостью  $c_{вх}$ . Ток коллектора равен

$$i_k = \beta_0 i = \beta_0 \frac{v_{бэ}}{r_{вх}} = \\ = \beta_0 \frac{q_6}{r_{вх} c_{вх}} = \beta_0 \frac{q_6}{\tau}, \quad (3)$$

где  $\beta_0$  — усиление по току при низкой частоте,  $q_6$  — заряд, накопленный в емкости  $c_{вх}$ , и  $\tau = r_{вх} c_{вх}$  — постоянная времени. На рис. 6

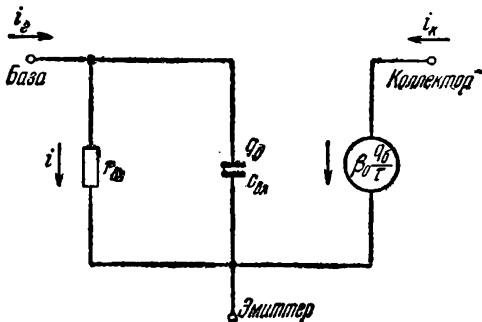


Рис. 6.

мы ввели генератор тока. Для простой входной цепи показанного типа при  $\omega\tau = 1$  величина усиления по току упадет до  $1/\sqrt{2}$  ее низкочастотного значения и ток коллектора будет отставать по фазе от тока базы на  $45^\circ$ . Используйте этот результат и ваши измерения для определения эффективной входной емкости  $c_{вх}$ .

## Приложение 2.2. Графический анализ и усиление мощности

В Р.2.2 мы ввели ряд упрощающих предположений. Мы считали, что токи как базы, так и коллектора не зависят от напряжения коллектора. Это является хорошим приближением, пока сигнал  $v_{кэ}$  достаточно мал. В этом приложении мы укажем путь, с помощью которого можно перейти к более точному рассмотрению этой задачи.

Всю информацию, относящуюся к транзистору, получают из входной и выходной характеристик, показанных на рис. 7, а и б. Представим себе, что мы имеем входной сигнал вида

$$v_s = v_1 \cos \omega t, \quad (4)$$

поданный на вход схемы рис. 1.

В результате возникает сигнал между базой и эмиттером  $v_{бэ}$ , и сигнал на выходе будет равен

$$v_{кэ} = v_2 \cos \omega t, \quad (5)$$

в результате чего появятся базовый и коллекторный токи  $i_b = i_1 \cos \omega t$  и  $i_k = i_2 \cos \omega t$ . (Для обозначения статических величин напряжения и тока мы используем прописные буквы, а для обозначения малых переменных сигналов — строчные буквы.)

Помимо характеристик мы имеем два дополнительных уравнения:

$$v_{б9} = v_s - i_б R_r, \tag{6}$$

$$v_{к9} = -i_к R_n, \tag{7}$$

где  $R_r$  — внутреннее сопротивление генератора напряжения на входе схемы, а  $R_n$  — сопротивление нагрузки. Уравнения (6) и

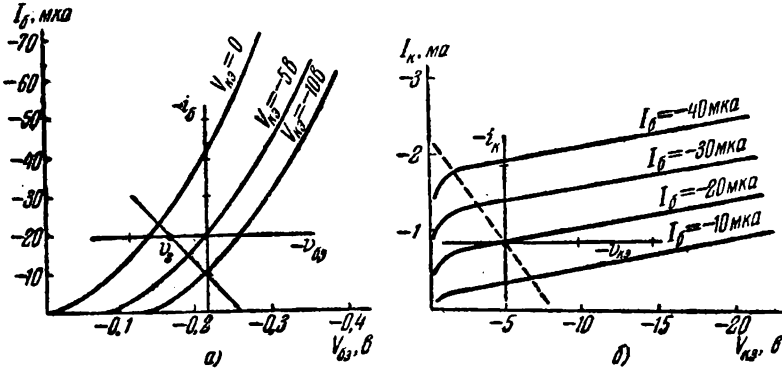


Рис. 7.

(7) показаны как линии нагрузки на рис. 7, а и б. Пересечение

линий нагрузки с соответствующими характеристиками транзистора дает нам два уравнения, из совместного решения которых мы можем определить фактические величины напряжений и токов сигнала. Мы можем использовать эти уравнения (рис. 7, а) для исключения  $v_{б9}$ , получив тем самым кривую зависимости  $i_б$  от  $v_{к9}$ , которая показана сплошной линией на рис. 8. Аналогично мы можем (рис. 7, б) получить вторую кривую  $i_б$  в зависимости от  $v_{к9}$ . Эта кривая показана штриховой линией на рис. 8. Точка пересечения этих двух кривых

дает величину напряжения  $v_{к9}$  сигнала на коллекторе для напряжения входного сигнала  $v_s$ . Работа непосредственно с характеристиками является несколько запутанной процедурой, и когда сигналы малы, характеристиками не пользуются.



Для малых сигналов мы можем написать, исходя из рис. 7, а и б:

$$v_{\delta_3} = + r_{\text{вх}} i_{\delta} - \frac{1}{\mu} v_{\text{кв}}, \quad (8)$$

$$i_{\text{к}} = \beta i_{\delta} + y_0 v_{\text{кв}}. \quad (9)$$

Величина  $r_{\text{вх}}$  является входным импедансом короткозамкнутой схемы. Это входной импеданс, который был бы измерен, если бы напряжение на коллекторе поддерживалось постоянным. Величина  $(1/\mu)$  называется коэффициентом передачи обратного напряжения разомкнутой цепи. Это то напряжение, которое должно быть подано на базу на каждую единицу напряжения коллектора, чтобы поддерживать постоянным ток базы. Величина  $\beta$  является коэффициентом прямой передачи тока короткозамкнутой схемы (или усилением по току). Наконец, величина  $y_0$  называется *выходной проводимостью разомкнутой схемы*. Очевидным преимуществом работы с уравнениями (8) и (9) является то, что мы можем взять их вместе с уравнениями (6) и (7), чтобы получить систему уравнений, которые определяют все токи и напряжения через входное напряжение  $v_s$ . Типичными величинами являются  $r_{\text{вх}} = 2700 \text{ ом}$ ,  $(1/\mu) = 3 \cdot 10^{-4}$ ,  $y_0 = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ ом}^{-1}$  и  $\beta = 50$ .

Наконец, используем уравнения (6) — (9) для вычисления усиления по мощности. Входная мощность  $p_{\text{вх}}$  дается выражением  $p_{\text{вх}} = \frac{1}{2} v_1 i_1$ , где  $v_1$  и  $i_1$  являются пиковыми значениями напряжения и тока. Выходная мощность определяется выражением  $p_{\text{вых}} = \frac{1}{2} v_2 i_2$ . Чтобы определить усиление по мощности

$$K_p = \frac{v_2 i_2}{v_1 i_1} = \frac{i_2^2 R_{\text{н}}}{v_1 i_1}, \quad (10)$$

мы должны выразить напряжения и токи через  $v_1$ :

$$i_1 = \frac{1 + y_0 R_{\text{н}}}{(1 + y_0 R_{\text{н}}) + (\beta/\mu) R_{\text{н}}} v_1, \quad (11)$$

$$i_2 = \frac{\beta}{(1 + y_0 R_{\text{н}}) + (\beta/\mu) R_{\text{н}}} v_1. \quad (12)$$

Подставляя  $i_1$  и  $i_2$  в равенство (10), получаем для усиления по мощности

$$K_p = \frac{\beta^2 R_{\text{н}}}{(1 + y_0 R_{\text{н}}) [\beta R_{\text{н}}/\mu + (1 + y_0 R_{\text{н}}) (r_{\text{вх}} + R_{\text{г}})]}. \quad (13)$$

Каким будет максимально достижимое усиление мощности, если мы примем, что  $R_{\text{н}}$  и  $R_{\text{г}}$  — переменные? Прежде всего сведем к минимуму рассеяние энергии внутри генератора и поэтому положим  $R_{\text{г}} = 0$ . Мы можем определить оптимальное значение  $R_{\text{н}}$ , исследуя на максимум уравнение (13). Тогда получим

$$y_0 R_{\text{н}}^2 = \left[ 1 + \frac{\beta}{\mu r_{\text{вх}} y_0} \right]^{-1/2}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем

$$K_p = \left( \frac{\beta}{1 + \sqrt{1 + \beta/\mu r_{вх} y_0}} \right)^2 \frac{1}{r_{вх} y_0}. \quad (15)$$

Если  $\beta/\mu r_{вх} y_0$  невелико, выражение для усиления по мощности упрощается:

$$K_p \approx \frac{\beta^2}{4 r_{вх} y_0}. \quad (16)$$

И, наоборот, если  $\beta/\mu r_{вх} y_0$  велико, то

$$K_p \approx \beta \mu.$$

### Работа 2.3. ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА И ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

В Р.2.2 мы измерили усиление транзистора по току и определили его частотную характеристику. Мы нашли, что зависимость усиления по току от частоты определяется характеристическим временем установления  $\tau$ . Это время  $\tau$  определяется эквивалентной емкостью  $c_{вх} = \tau/r_{вх}$ , включенной параллельно со входным сопротивлением  $r_{вх}$ .

Здесь мы исследуем переходную характеристику транзистора и обсудим физическую природу релаксации. Наконец, мы введем

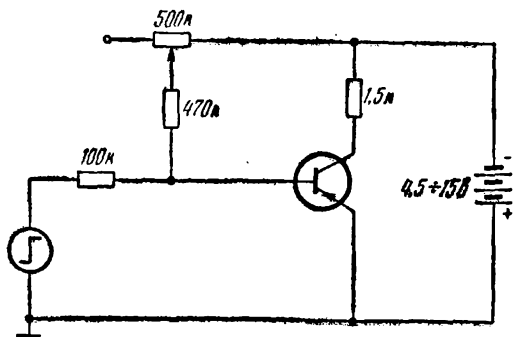


Рис. 1.

отрицательную обратную связь и покажем, как с ее помощью можно улучшить переходную характеристику. В П.2.3 мы рассмотрим связь между переходной и частотной характеристиками, выражаемую с помощью рядов Фурье.

На рис. 1 показана схема для измерения переходной характеристики транзистора. Рассмотрите импульс на коллек-

торе. Какую он имеет форму? Определите характеристическое время установления. Сравните это время с величиной, которую вы получили из частотной характеристики в Р.2.2. Какой переходной характеристики можно было бы ожидать для эквивалентной схемы, предложенной ранее (рис. 6 в Р.2.2).

Представим, что при  $t < 0$  заряда на емкости  $c_{вх}$  нет. При  $t = 0$  в базу поступает ток генератора  $i_r$ . Какова зависимость заряда  $q_0$  от времени? Из закона сохранения заряда (первый закон Кирхгофа) следует

$$i_r - i - \frac{dq_0}{dt} = 0. \quad (1)$$

Из уравнения для потенциалов (второй закон Кирхгофа) имеем

$$i r_{\text{вх}} = \frac{q_6}{c_{\text{вх}}}. \quad (2)$$

Исключая ток  $i$  из уравнений (1) и (2), получаем

$$\frac{dq_6}{dt} + \frac{1}{r_{\text{вх}} c_{\text{вх}}} q_6 = i_{\text{г}}. \quad (3)$$

Это известное уравнение релаксации, решение которого имеет вид

$$q_6 = i_{\text{г}} \tau (1 - e^{-t/\tau}), \quad (4)$$

где  $\tau = r_{\text{вх}} c_{\text{вх}}$ . Наконец, мы можем получить ток коллектора

$$i_{\text{к}} = \beta_0 \frac{q_6}{\tau} = \beta_0 i_{\text{г}} (1 - e^{-t/\tau}). \quad (5)$$

Таким образом, мы видим, что одна и та же эквивалентная схема может быть использована для описания частотной и переходной характеристик. (Вы можете спросить, не вытекает ли этот результат из каких-либо особых свойств нашей схемы? В Приложении 2.3 показано, что этот результат является общим. Он относится к любой схеме.)

Какова природа релаксации, которую мы наблюдали в работах Р.2.1 и Р.2.2? Мы видели в Р.2.1, что ток через коллекторный переход возникает в результате диффузии неосновных носителей через базу. Выражаясь точнее, ток коллектора зависит не от тока эмиттера или базы, а скорее от величины неосновного заряда в базе. Если мы имеем в виду  $p-n-p$ -транзистор, то неосновными носителями являются дырки. Если обозначить через  $p$  общее количество дырок в базе, можно написать

$$e \frac{dp}{dt} = i_{\text{э}} + i_{\text{к}} - \frac{ep}{\tau}, \quad (6)$$

где  $\tau$  — время рекомбинации в базе. Далее, чтобы сохранить электрическую нейтральность транзистора, сумма трех токов должна равняться нулю:

$$i_{\text{э}} + i_{\text{к}} + i_{\text{б}} = 0. \quad (7)$$

Из (6) и (7) получаем

$$i_{\text{б}} = - \left( e \frac{dp}{dt} + \frac{ep}{\tau} \right). \quad (8)$$

Мы видим, что ток базы содержит два члена. Первый равен и противоположен скорости нарастания заряда неосновного носителя в базе. Это компонента основного носителя, которая как раз поддерживает электрическую нейтральность. Второй член равен и противоположен току рекомбинации. Эта часть тока базы заменяет те основные носители, которые теряются при рекомбинации. Сравнивая уравнения (3) и (8), мы видим, что  $q_6 = -ep$  является компенсирующим основным зарядом в базе, а  $\tau$  — время рекомбинации неосновного носителя в пределах базы.

Теперь рассмотрим отрицательную обратную связь и способ ее использования для получения кажущегося сокращения времени установления. С явлением обратной связи мы встречаемся постоянно. Живые существа можно считать тщательно разработанными системами с обратной связью. Их реакция на окружающее непрерывно меняется под действием их органов чувств. Чтобы взять кусочек хлеба, мы должны сжать его. Сила, с которой мы сжимаем хлеб, контролируется ощущением наших пальцев. Таким образом, мы сжимаем хлеб достаточно сильно, чтобы он не выскользнул из пальцев, но не настолько сильно, чтобы смять его. Большое число

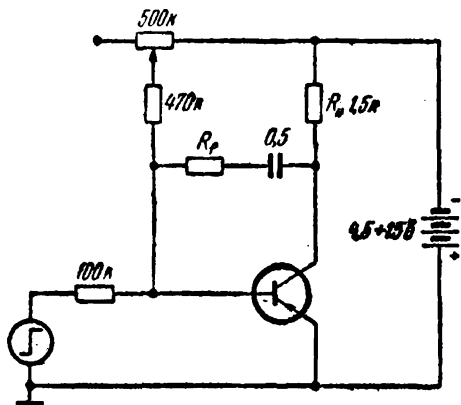


Рис. 2.

механических регулирующих приспособлений использует как раз этот принцип подачи какого-либо выходного сигнала обратно на вход. Системы с этим свойством называют *серво-системами*.

На рис. 2 показана схема транзисторного усилителя с обратной связью с коллектора на базу. Действие этой обратной связи состоит во введении в базу добавочного тока, пропорционального напряжению на коллекторе. Последовательно с сопротивлением

обратной связи  $R_f$  мы включили емкость  $0,5 \text{ мкф}$ , так что рабочая точка транзистора по постоянному току остается неизменной. (Простая теория обратной связи, приводимая ниже, относится к частотам выше  $1/2\pi R_f C_f = 20 \text{ гц}$ .) Представим себе, что мы вводим ток сигнала с генератора  $i_r$  в базу. Цепь обратной связи вызовет дополнительный ток в базе

$$i_f = \frac{v_{кэ}}{R_f} = f i_k, \quad (9)$$

где  $f = R_n / (R_f + R_n)$  является долей тока коллектора, подаваемой обратно (или коэффициентом обратной связи). К эквивалентной схеме, показанной на рис. 6, Р.2.2, нужно прибавить цепь обратной связи, как это показано на рис. 3.

Теперь уравнение (3) преобразуется в

$$\frac{dq_6}{dt} + \frac{1}{\tau} q_6 = i_r - f i_k. \quad (10)$$

Заменяя  $i_r$  на  $\beta_0 q_6 / \tau$ , получаем

$$\frac{dq_6}{dt} + \frac{1 + f\beta_0}{\tau} q_6 = i_r. \quad (11)$$

Рассматривая уравнение (11), мы видим, что время установления теперь уменьшилось в  $(1 + f\beta_0)$  раз. Решая уравнение (11) для ступенчатого тока  $i_r$ , получаем

$$i_k = \frac{\beta_0 q_0}{\tau} = \frac{\beta_0 i_r}{1 + f\beta_0} (1 - e^{-(1 + f\beta_0) t/\tau}). \quad (12)$$

Заметим, что усиление тока низкой частоты уменьшается пропорционально уменьшению времени установления. (Независимость произведения усиления на ширину полосы пропускания усилителя от величины обратной связи является общим результатом.)

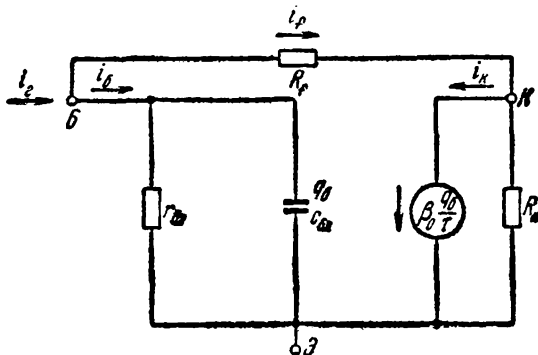


Рис. 3.

Возьмем в качестве  $R_f$  сопротивление 6,8 ком. Как велик коэффициент обратной связи  $f$ ? Измерьте время установления. Во сколько раз оно уменьшилось? Сравните с  $(1 + f\beta_0)$ . По величине ступенчатого напряжения на коллекторе  $u_k$ , вы можете сравнить усиление тока низкой частоты без обратной связи и с нею. На какой множитель сокращается усиление тока низкой частоты?

Если продифференцировать уравнение (12) по времени, мы получим

$$\frac{di_k}{dt} = \frac{\beta_0 i_r}{\tau} e^{-(1 + f\beta_0) t/\tau}. \quad (13)$$

Заметьте, что начальный наклон зависимости  $i_k$  от времени не подвергается влиянию обратной связи. Проверьте это.

Рекомендуем вам испытать другие величины  $R_f$ , получить частотную зависимость усиления с отрицательной обратной связью и сравнить ее с переходной характеристикой.

### Приложение 2.3. Ряды Фурье

В работах Р.1.5—Р.1.8, а также в Р.2.2 и Р.2.3 мы имели дело с реакцией системы на скачок напряжения или тока и с ее реакцией на синусоидально изменяющееся напряжение или ток.

В Р.2.2 мы видели, что частотная характеристика транзистора эквивалентна частотной характеристике входной емкости  $c_{вх}$ , соединенной параллельно с входным сопротивлением  $r_{вх}$ . В действительности транзистор ведет себя сложнее и его поведение зависит

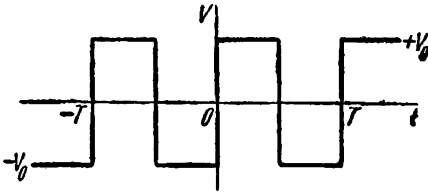


Рис. 4.

от объемного распределения заряда. Все же частотная характеристика очень близка к характеристике системы со сосредоточенной входной емкостью. Должно ли нас удивлять, что переходная характеристика, как это видно из Р.2.3, также подтверждает

эту модель? Разумеется, это не случайно. Частотная и переходная характеристики не являются независимыми. В самом деле, если известна частотная характеристика любой системы (независимо от ее сложности), всегда можно вычислить и ее переходную характеристику.

Для начала покажем, что периодические прямоугольные колебания можно рассматривать как суперпозицию синусоидальных колебаний. Представим себе, что мы имеем прямоугольные колебания с периодом  $T$  и амплитудой  $V_0$ , как показано на рис. 4.

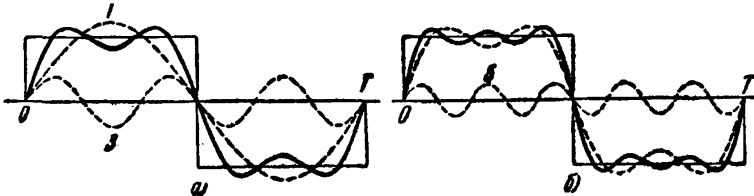


Рис. 5.

Покажем, что эти колебания можно представить как сумму бесконечного ряда синусоидальных напряжений

$$V(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sin [2\pi (2l+1) t/T]}{2l+1}. \quad (14)$$

На рис. 5, а показана суперпозиция первых двух компонент Фурье, а на рис. 5, б — суперпозиция первых трех. Обратите внимание на то, что действие компонент более высокой частоты приводит к заострению поднимающихся и опускающихся краев результирующей кривой и к сглаживанию ее на вершинах импульсов.

Как доказать соотношение (14)? Обычный путь доказательства — это предположить, что  $V(t)$  может быть выражено рядом вида

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2\pi n t}{T}. \quad (15)$$

Поскольку  $V(t)$  является нечетной функцией  $t$ , правая часть (15) должна быть тоже нечетной функцией. Далее, левая часть имеет период  $T$ , так что правая часть должна тоже иметь период  $T$ . Эти два соображения диктуют выбор ряда. Остается определить  $a_n$ . Для этого мы умножаем обе части уравнения (15) на  $\sin [2\pi mt/T]$  и интегрируем от  $t = 0$  до  $t = T$ :

$$\begin{aligned}
 V_0 \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi mt}{T} dt - V_0 \int_{T/2}^T \sin \frac{2\pi mt}{T} dt = \\
 = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad (16)
 \end{aligned}$$

или

$$\frac{V_0 T}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = a_m \frac{T}{2}, \quad (17)$$

откуда

$$a_m = \frac{2V_0}{\pi m} (1 - \cos m\pi). \quad (18)$$

Обратите внимание, что для  $m$  четного  $a_m = 0$ , а для  $m$  нечетного  $a_m = 4V_0/\pi m$ . Итак, в уравнении (15) нужно суммировать только по нечетным  $m$ . Наиболее удобно это сделать, заменяя  $m$  на  $2l + 1$  и суммируя по всем положительным целым  $l$ . Таким путем мы приходим к уравнению (14).

Поскольку периодические прямоугольные колебания могут рассматриваться как суперпозиция синусоидальных колебаний, можно найти отклик системы на прямоугольные колебания, вычисляя отклики на каждую фурье-компоненту и суммируя их. Это существенно более простая процедура для сложных цепей, отклик которых мы можем описать через импеданс, зависящий от частоты.

Для осуществления экспериментального фурье-анализа прямоугольных колебаний можно использовать схему на рис. 6. Мы возбуждаем последовательный резонансный  $LC$ -контур, подключив его к выходу генератора прямоугольных импульсов. Синусоидальный сигнал той же частоты, что и частота прямоугольных импульсов, подается на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа, а напряжение конденсатора — на вертикально отклоняющие.

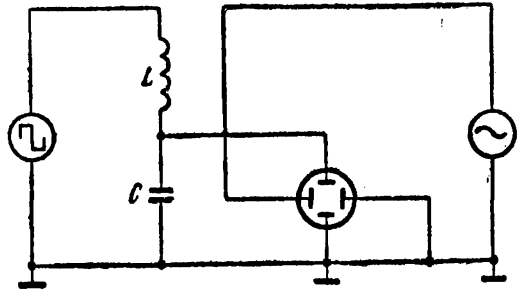


Рис. 6.

Когда частота прямоугольного импульса будет равна резонансной частоте  $LC$ -контура, возникает фигура Лиссажу. Если мы уменьшим частоту прямоугольного сигнала до одной трети резонансной частоты  $LC$ -контура, будет наблюдаться второй резонансный максимум с амплитудой, равной одной третьей амплитуды первого максимума. Мы можем считать, что этот сигнал возбужден третьей гармоникой прямоугольного импульса. Можно сократить частоту прямоугольных импульсов до одной пятой, что дает сигнал в одну пятую амплитуды и т. д. Синусоидальный сигнал подается на горизонтально отклоняющие пластины, чтобы визуально идентифицировать гармоники.

#### Работа 2.4. ПОЛОЖИТЕЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ И КОЛЕБАНИЯ

В Р.1.6 мы рассмотрели затухание колебаний в  $LC$ -контуре, показанном на рис. 1. Допустим, что емкость  $C$  была заряжена до напряжения  $V_0$  генератором прямоугольных сигналов. Когда напряжение прямоугольных сигналов падает до нуля, емкость начинает разряжаться через последовательно включенные индуктив-

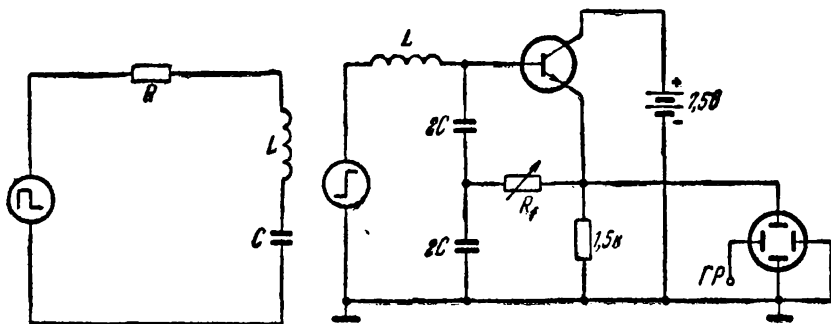


Рис. 1.

Рис. 2.

ность  $L$  и сопротивление  $R$ . Мы знаем, что если бы не было сопротивления  $R$ , то заряд на емкости менялся бы по закону

$$Q = Q_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $Q_0 = CV_0$  и  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ . Каково действие небольшого последовательно включенного сопротивления  $R$ ? Мощность, рассеиваемая в нем

$$P = I^2 R, \quad (2)$$

вызывает затухание колебаний.

Мы видели в Р.1.6, что для небольших затуханий максимальный заряд  $Q_0$  спадает экспоненциально, с временем релаксации

$$\tau = \frac{2L}{R}. \quad (3)$$



Условие слабого затухания заключается в том, что добротность

$$Q = \frac{1}{2} \omega \tau = \frac{\omega L}{R} \quad (4)$$

гораздо больше единицы. Если это условие не выполняется, частота  $\omega$  уменьшается с возрастанием затухания. Для  $R$ , больших критической величины

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C}, \quad (5)$$

затухание чисто экспоненциальное. Накопленная энергия уменьшается экспоненциально с постоянной времени, равной  $L/R$  для колебательного контура с затуханием, меньшим критического, и равной  $(RC/4)(1 + \sqrt{1 + 4L/R^2C})$  для передемпфированного контура.

Можно ли использовать усилитель мощности, чтобы компенсировать, по крайней мере частично, потери тока и таким способом поддержать колебания? Схема, реализующая эту идею, показана на рис. 2. Колебательный контур этой схемы состоит из индуктивности  $L$  и двух емкостей  $2C$ . Транзистор включен по схеме с общим коллектором, для которой усиление по току велико, но отсутствует усиление по напряжению. Эквивалентная схема дана на рис. 3. Переменный ток эмиттера будет в  $(1 + \beta)$  раз больше тока базы  $i_b$ . Мы можем представить это схематически генератором тока  $\beta i_b$ , как показано на рис. 3. Чтобы упростить обсуждение, мы пренебрегаем сопротивлением в

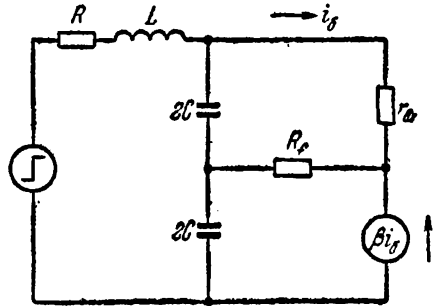


Рис. 3.

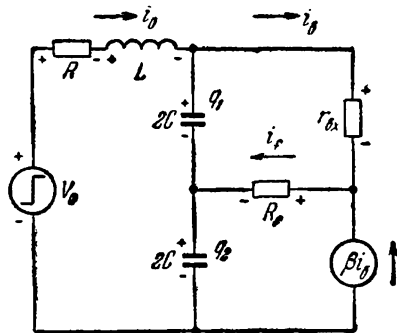


Рис. 4.

1,5 ком в эмиттере. Для определения переходной характеристики эквивалентной схемы рис. 3 мы принимаем направления токов и знаки зарядов, показанные на рис. 4. Мы имеем два контурных уравнения

$$V_0 - i_0 R - L \frac{di_0}{dt} - \frac{q_1}{2C} - \frac{q_2}{2C} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{q_1}{2C} - i_{\delta} r_{вх} - i_f R_f = 0 \quad (7)$$

и три уравнения для токов

$$i_0 - i_6 - \frac{dq_1}{dt} = 0, \quad (8)$$

$$i_f - \frac{dq_2}{dt} + \frac{dq_1}{dt} = 0, \quad (9)$$

$$(1 + \beta) i_6 - i_f = 0. \quad (10)$$

Мы можем исключить  $i_f$  и  $i_6$  и получить следующие три уравнения:

$$\left( L \frac{di_0}{dt} + i_0 R \right) + \frac{q_1}{2C} + \frac{q_2}{2C} = V_0, \quad (11)$$

$$-i_0 r_{вх} + \left[ (R_f + r_{вх}) \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{2C} \right] - R_f \frac{dq_2}{dt} = 0, \quad (12)$$

$$-(1 + \beta) i_0 + \beta \frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} = 0. \quad (13)$$

Теперь мы хотим определить характер переходного процесса. Самым простым способом является принятие временной зависимости для  $i_0$ ,  $q_1$  и  $q_2$  в форме  $e^{i\tilde{\omega}t}$ , где  $\tilde{\omega}$  может быть комплексным числом. Условием существования решения вышеприведенной системы уравнений является равенство нулю детерминанта. Это условие приводит к выражению

$$-\tilde{\omega}^2 L + i\tilde{\omega} \left\{ R - \frac{(1 + \beta)/2\tilde{\omega}^2 C - L}{2C[r_{вх} + (1 + \beta)R_f]} \right\} + \frac{1}{C} \left\{ 1 + \frac{R}{2[r_{вх} + (1 + \beta)R_f]} \right\} = 0. \quad (14)$$

Пока потери невелики, мы можем заменить  $\tilde{\omega}^2$  во втором слагаемом на  $1/LC$ . Отсюда получается уравнение для скорости установления колебаний \*)

$$\frac{1}{\tau} = \frac{R}{2L} - \frac{\beta - 1}{8[r_{вх} + (1 + \beta)R_f]C}. \quad (15)$$

Заметьте, что если отсутствует усиление по току ( $\beta = 1$ ) или если  $r_{вх}$  или  $R_f$  очень велики, мы получаем обычное выражение для скорости установления колебаний в  $LRC$ -контуре:  $1/\tau_0 = R/2L$ . При уменьшении  $R_f$  второй член правой части (15) становится значимым и, поскольку он вычитается из первого члена, уменьшается скорость установления. Уравнение (15) подтверждает, что роль усилителя мощности состоит в компенсации потерь с тем, чтобы поддержать колебания. Обратите внимание на то, что имеется критическая величина  $R_f$ , для которой  $1/\tau$  равна нулю,

$$R_f = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \frac{L}{4RC} - \frac{r_{вх}}{\beta + 1} \approx \frac{\tau_0}{8C} - \frac{r_{вх}}{\beta + 1}. \quad (16)$$

Для этого значения  $R_f$  скорость установления равна нулю. Колебания продолжают на начальном уровне при потерях тока, точно возмещаемых усилителем. Что произойдет, если  $R_f$  уменьшится еще больше? В соответствии с уравнением (15) нам следует ожидать

\*) Величина  $\delta = 1/\tau$  в нашей литературе называется коэффициентом затухания. (Прим. ред.)

отрицательной скорости установления, которая означает экспоненциальный рост уровня колебаний! (Фактически из-за ограниченности области линейности транзистора амплитуда колебаний не может возрастать бесконечно, а устанавливается на некотором уровне.)

Соберите схему, показанную на рис. 2, с  $L = 25 \text{ мГн}$  и  $2C = 0,05 \text{ мкФ}$ . В качестве сопротивления обратной связи  $R_f$  может служить потенциометр в  $5 \text{ ком}$ . Заметьте, что применен  $n-p-n$  транзистор, а генератор прямоугольных сигналов выполняет двойную функцию возбуждения цепи  $LRC$  и обеспечения смещения эмиттерного перехода в прямом направлении. Соберите схему без сопротивления обратной связи  $R_f$  и наблюдайте затухание колебаний. Установите такую амплитуду генератора прямоугольных сигналов, чтобы амплитуда импульсов на эмиттере была около  $2 \text{ в}$ . (Вы можете получить указанную амплитуду прямоугольных сигналов с помощью вольтметра постоянного тока, потребовав, чтобы среднее напряжение на эмиттере по отношению к земле составляло приблизительно  $1 \text{ в}$ .) Измерьте время установления  $\tau_0$  по нарастающему фронту прямоугольного сигнала. Вычислите эффективное сопротивление схемы  $R = 2L/\tau_0$ . Теперь включите  $R_f$  и постепенно уменьшайте его, наблюдая затухание колебаний. Найдите значение  $R_f$ , для которого скорость установления близка к нулю. Отключите  $R_f$  и измерьте его значение омметром. Используя разумные значения  $r_{вх}$  и  $\beta$ , сравните ваш результат со значением  $R_f$ , даваемым выражением (16).

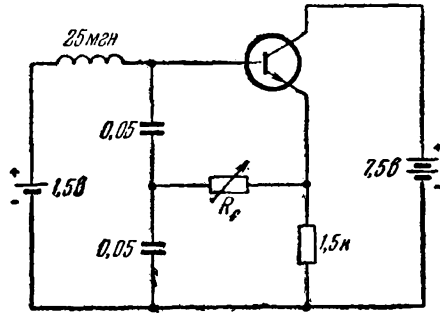


Рис. 5.

Вы можете построить генератор периодических колебаний по схеме рис. 5, в которой генератор прямоугольных сигналов заменен батареей с напряжением  $1,5 \text{ в}$ . Изменяйте сопротивление обратной связи  $R_f$  до тех пор, пока не наступят колебания. Требуемая величина  $R_f$  больше, чем раньше. Можете ли объяснить, почему? Что, по вашему мнению, возбуждает колебания?

Наблюдайте за формой колебаний по мере того, как вы постепенно уменьшаете  $R_f$ . Заметьте, что при больших амплитудах высокочастотного сигнала его форма искажена из-за влияния нелинейности транзистора.

#### Приложение 2.4. Операционные усилители

В Р.2.3 мы видели, что можно улучшить частотную характеристику усилителя, создав отрицательную обратную связь с помощью активных сопротивлений (резисторов). С помощью обратной связи,

величина которой зависит от частоты, мы можем получить нелинейную характеристику или добиться желательной частотной характеристики. В частности, применяя соответствующую схему обратной связи, мы можем собрать устройство, которое дифференцирует или интегрирует входной сигнал. Усилители такого типа называются *операционными усилителями*, поскольку они выполняют некоторые специфические математические операции со входным сигналом.

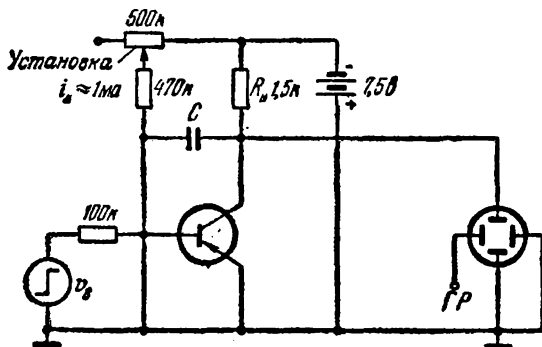


Рис. 6.

В качестве простого примера операционного усилителя рассмотрим схему на рис. 6; это схема транзисторного усилителя, дополненная емкостью, включенной между базой и коллектором. Емкость  $C$  вводит в базу дополнительный ток, пропорциональный скорости изменения напряжения на коллекторе. Более точно базовый ток равен

$$i_g = i_r + C \frac{d}{dt} (v_{кв} - v_{бв}). \quad (17)$$

Так как  $v_{бв}$  составляет только один процент от  $v_{кв}$ , мы можем пренебречь  $v_{бв}$  и записать

$$i_g = i_r - R_n C \frac{di_k}{dt}. \quad (18)$$

Подставляя  $i_g$  в выражение

$$\tau \frac{di_k}{dt} + i_k = \frac{\beta i_g}{1 + y_0 R_n}, \quad (19)$$

получаем

$$\left( \tau + \frac{\beta R_n C}{1 + y_0 R_n} \right) \frac{di_k}{dt} + i_k = \frac{\beta i_r}{1 + y_0 R_n}. \quad (20)$$

Теперь усилитель имеет граничную частоту

$$\omega = \frac{1}{\tau + \beta R_n C / (1 + y_0 R_n)}. \quad (21)$$

Для частот выше граничной можно написать

$$i_k = \frac{\beta/(1+y_0R_H)}{\tau + \beta R_H C/(1+y_0R_H)} \int i_6 dt. \quad (22)$$

Для  $\beta R_H C > \tau$  справедливы простые соотношения

$$i_k = \frac{1}{R_H C} \int i_6 dt \quad (23)$$

и

$$v_k = -\frac{1}{C} \int i_6 dt. \quad (24)$$

Таким образом, напряжение на коллекторе является интегралом базового тока. В данной схеме при емкости  $C = 0,5 \text{ мкф}$  мы можем ожидать получения интеграла базового тока для частот выше 20 гц. Подайте в базу прямоугольный импульс и наблюдайте за сигналом треугольной формы (интеграл) на коллекторе.

Конечно, нет ничего удивительного в получении интеграла тока, пропускаемого через конденсатор. Функция операционного усилителя — создавать на относительно низком сопротивлении нагрузки сигнал, который почти не зависит от характеристики усилителя.

### Работа 2.5. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

С этой работы мы начинаем изучение обмена и распространения энергии. Нас будут интересовать различные виды колебаний: механические, электромагнитные и акустические. Основные опыты посвящены изучению электромагнитных колебаний, но мы рассмотрим также некоторые механические и акустические аналогии.

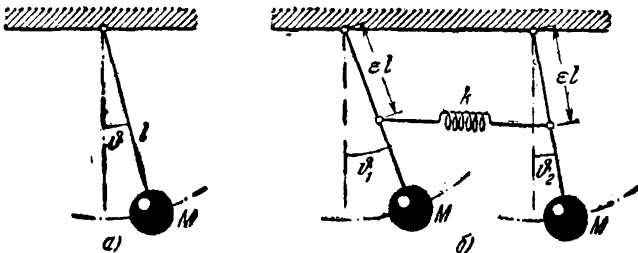


Рис. 1.

Все мы знакомы с колебательным движением маятника и, вероятно, наблюдали поведение связанных маятников. На рис. 1, а показан одиночный маятник, представляющий собой массу  $M$ , подвешенную на стержне длиной  $l$ . Мы знаем, что при смещении маятника на угол  $\varphi$  возникает восстанавливающий вращающий момент  $L = -Mgl \sin \varphi$ . Так как угловая скорость маятника

равна  $d\vartheta/dt$ , а его угловое ускорение равно  $d^2\vartheta/dt^2$ , мы имеем уравнение движения массы  $M$ :

$$Ml^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mgl \sin \vartheta. \quad (1)$$

Если угловое смещение невелико, мы можем положить  $\sin \vartheta \approx \vartheta$ . Тогда получается уравнение простого гармонического колебания. Если мы поднимем груз на угол  $\vartheta_0$  и отпустим его при  $t = 0$ , то угловое смещение массы  $M$  будет

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $\omega = \sqrt{g/l}$  является известным выражением для угловой частоты маятника.

Что произойдет с парой аналогичных, но связанных пружиной маятников, показанных на рис. 1, б, если мы сместим только один из них (маятник 1, слева), удерживая другой на месте, а затем отпустим их одновременно? В этом случае маятник 1 начинает колебаться один, но с течением времени колебания маятника 2 будут постепенно нарастать, а колебания маятника 1 — затухать. Через некоторое время маятник 2 испытывает сильные колебания, а маятник 1 останавливается, и т. д. Это поведение кажется значительно более сложным, чем поведение одного маятника.

Исследуем уравнение движения связанных маятников, что даст нам возможность рассмотреть эту задачу с иной точки зрения. Если угол смещения  $\vartheta_2$  превышает  $\vartheta_1$ , на маятник 1 действует положительный момент вращения, равный

$$L_{21} = k\epsilon^2 l^2 (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1) \quad (3)$$

(в предположении, что  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  малы). Аналогично, маятник 2 будет испытывать вращающий момент противоположного знака

$$L_{12} = -k\epsilon^2 l^2 (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1). \quad (4)$$

С учетом этих членов, описывающих связь между маятниками, мы получим следующие уравнения движения:

$$Ml^2 \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = -Mgl \sin \vartheta_1 + k\epsilon^2 l^2 (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1), \quad (5)$$

$$Ml^2 \frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} = -Mgl \sin \vartheta_2 - k\epsilon^2 l^2 (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1). \quad (6)$$

Допустим, что смещения невелики, так что мы можем везде заметить  $\sin \vartheta$  на  $\vartheta$ . Тогда

$$Ml^2 \frac{d^2\vartheta_1}{dt^2} = -Mgl\vartheta_1 + k\epsilon^2 l^2 (\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad (7)$$

$$Ml^2 \frac{d^2\vartheta_2}{dt^2} = -Mgl\vartheta_2 - k\epsilon^2 l^2 (\vartheta_2 - \vartheta_1). \quad (8)$$

Получились довольно сложные уравнения для двух переменных. Мы можем упростить ситуацию, написав новые уравнения, полу-

чаемые сложением и вычитанием уравнений (7) и (8). Сложив эти два уравнения, получаем

$$Ml^2 \frac{d^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{dt^2} = -Mgl(\vartheta_1 + \vartheta_2). \quad (9)$$

Разность (7) и (8) имеет вид

$$Ml^2 \frac{d^2(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{dt^2} = -(Mgl + 2k\varepsilon^2 l^2)(\vartheta_1 - \vartheta_2). \quad (10)$$

Обратите внимание на то, что нам удалось с помощью этой операции «развязать» уравнения. Сначала напишем формальные решения этих двух уравнений, а затем обсудим их значение. Рассматривая уравнение (9), мы видим, что величина  $(\vartheta_1 + \vartheta_2)$  является переменной и что, если при  $t = 0$  смещения равны  $\vartheta_{10}$  и  $\vartheta_{20}$ , сумма двух смещений будет иметь зависимость от времени вида

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) = (\vartheta_{10} + \vartheta_{20}) \cos \omega^+ t, \quad (11)$$

где частота  $\omega^+ = \sqrt{g/l}$  равна частоте одиночного осциллятора. Мы видим, что если наша переменная является суммой смещений маятников 1 и 2, то амплитуда изменения этой переменной постоянна.

Решение уравнения (10) мы можем записать в следующем виде:

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) = (\vartheta_{10} - \vartheta_{20}) \cos \omega^- t, \quad (12)$$

где частота  $\omega^- = \sqrt{g/l + 2\varepsilon^2 k/M}$  немного больше частоты одиночного осциллятора. Так же, как и сумма смещений, разность смещений меняется с постоянной амплитудой. Если мы сложим равенства (11) и (12), получим

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2}(\vartheta_{10} + \vartheta_{20}) \cos \omega^+ t + \frac{1}{2}(\vartheta_{10} - \vartheta_{20}) \cos \omega^- t. \quad (13)$$

Если вычтем равенство (12) из (11), получим

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}(\vartheta_{10} + \vartheta_{20}) \cos \omega^+ t - \frac{1}{2}(\vartheta_{10} - \vartheta_{20}) \cos \omega^- t. \quad (14)$$

Заметьте, что если оба маятника имеют вначале равные смещения  $\vartheta_{10} = \vartheta_{20}$ , они будут колебаться с постоянной амплитудой и частотой  $\omega^+ = \sqrt{g/l}$ . Если при  $t = 0$  имеются равные и противоположные амплитуды  $\vartheta_{10} = -\vartheta_{20}$ , то маятники будут колебаться с постоянной амплитудой, но со слегка повышенной частотой

$$\omega^- = \sqrt{g/l + 2\varepsilon^2 k/M}. \quad (15)$$

Эти два вида движения называются *нормальными модами колебаний* системы связанных осцилляторов. Нормальная мода колебаний — это коллективное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой частицы остается неизменной. Если мы сместим только один из маятников, то результирующим движением явится комбинация двух нормальных мод движения. Например, если  $\vartheta_{20} = 0$ , мы получаем

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2}\vartheta_{10}(\cos \omega^+ t + \cos \omega^- t), \quad (16)$$

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}\vartheta_{10}(\cos \omega^+ t - \cos \omega^- t). \quad (17)$$

Используя тригонометрические тождества

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B), \quad (18)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \sin \frac{1}{2}(A - B), \quad (19)$$

мы можем записать уравнения (16) и (17) в виде

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} [\cos \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t] \cos \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t, \quad (20)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_{10} [\sin \frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t] \sin \frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t. \quad (21)$$

Поведение  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  показано на рис. 2. Обратите внимание, что при  $t = 0$  амплитуда  $\vartheta_2$  равна нулю. Но амплитуда  $\vartheta_2$  увеличивается,

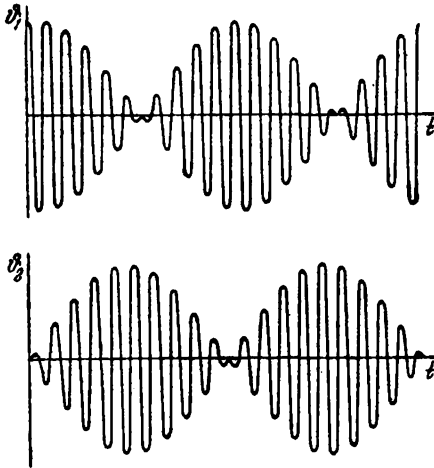


Рис. 2.

а амплитуда  $\vartheta_1$  падает до тех пор, пока в момент времени, определяемый из соотношения  $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t = \pi/2$ , амплитуда  $\vartheta_1$  не станет равной нулю, а амплитуда  $\vartheta_2$  достигнет максимума. Такое поведение можно понять, апеллируя к нормальным модам колебаний. В случае четной моды нормальных колебаний, обозначенной знаком  $+$ , маятники движутся вместе, пружина не растянута и частота такая же, как и для одиночного осциллятора. В случае нечетной моды нормальных колебаний (знак  $-$ ) пружина растянута, что увеличи-

вает частоту этой моды колебаний. Если смещен только один из маятников, мы имеем две нормальные моды колебаний, находящиеся в определенной относительной фазе. Но поскольку частота нечетного колебания немного выше частоты четного колебания, относительная фаза изменяется. Через некоторое время два нормальных вида колебаний окажутся в противофазе, амплитуда  $\vartheta_1$  упадет до нуля, в то время как амплитуда  $\vartheta_2$  достигнет максимума, и т. д.

Мы можем рассмотреть ситуацию, показанную на рис. 2, с энергетической точки зрения. При  $t = 0$  вся энергия сосредоточена в маятнике 1. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от маятника 1 к маятнику 2 до тех пор, пока вся энергия не скопится в маятнике 2. Время, необходимое для перехода энергии из 1 в 2 и обратно, можно получить из уравнения  $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t_{\text{обм}} = \pi$ . Мы можем определить частоту

$$\omega_{\text{обм}} = \frac{2\pi}{t_{\text{обм}}} = \omega^+ - \omega^-, \quad (22)$$

с которой осцилляторы обмениваются энергией.



Мы можем изучить аналогичную электрическую систему с помощью схемы, приведенной на рис. 3. Здесь мы имеем пару контуров  $LRC$ , слабо связанных через общую емкость  $C_{12}$ . Упрощенный вариант этой схемы показан на рис. 4, где мы

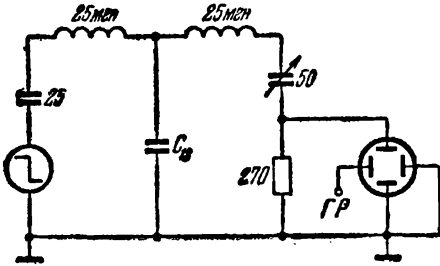


Рис. 3.

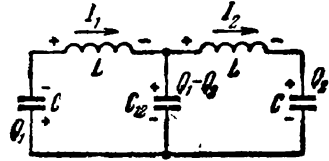


Рис. 4.

обозначили знаки зарядов и положительное направление тока. Проверьте знаки зарядов, показанные на рисунке. Мы можем записать два контурных уравнения

$$L \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0, \quad (23)$$

$$L \frac{dI_2}{dt} + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1 - Q_2}{C_{12}} = 0. \quad (24)$$

Подставляя  $I_1 = dQ_1/dt$  и  $I_2 = dQ_2/dt$ , получаем

$$L \frac{d^2Q_1}{dt^2} = -\frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2 - Q_1}{C_{12}}, \quad (25)$$

$$L \frac{d^2Q_2}{dt^2} = -\frac{Q_2}{C} - \frac{Q_2 - Q_1}{C_{12}}. \quad (26)$$

Заметьте, что уравнения (25) и (26) имеют точно такую же форму, что и уравнения (7) и (8). Следовательно, должны существовать две моды нормальных колебаний с частотами

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad (27)$$

$$\omega^- = \sqrt{\frac{1}{L} \left( \frac{1}{C} + \frac{2}{C_{12}} \right)}. \quad (28)$$

Для четной моды колебаний токи текут в одинаковом направлении и на емкости  $C_{12}$  нет заряда. Это аналогично случаю с нерастянутой пружиной в механической задаче, при этом частота остается такой же, как для несвязанных осцилляторов. (Мы развязываем контуры, закорачивая емкость  $C_{12}$ .) В случае нечетного вида колебаний на емкости имеется заряд и частота возрастает.

Будем наблюдать ток  $I_2$  (см. рис. 4) при  $C_{12} = 500 \text{ нф}$ . Чтобы применить к контурам рассмотренную здесь теорию, они должны иметь одинаковую резонансную частоту. Для балансировки

контуров регулируйте переменный конденсатор (рис. 3) до тех пор, пока разностная частота не будет сведена к минимуму.

Измерьте частоту обмена на осциллографе и сравните ваш результат с вычисленной величиной

$$\omega_{обм} = \omega^+ - \omega^- \cong \frac{C}{C_{12}} \omega. \quad (29)$$

Мы предполагаем, что  $C_{12}$  велика по сравнению с  $C$  (слабая связь). Попробуйте изменить величину емкости связи  $C_{12}$ . Предлагаемые

варианты величин — 200 пф и 0,001 мкф. Другой способ изучения нормальных колебаний пары связанных осцилляторов показан на рис. 5. Здесь мы заменили генератор прямоугольных импульсов синусоидальным генератором. Исследуйте амплитуду на выходе как функцию частоты.

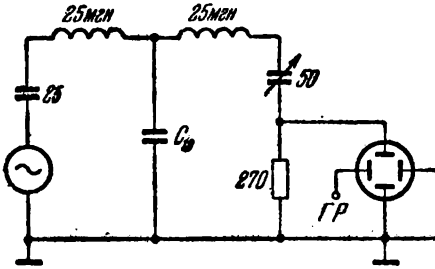


Рис. 5.

Вы должны найти два резонансных максимума: один при

$\omega^+$  и другой при  $\omega^-$ . Измерьте эти две частоты для нескольких значений емкости связи  $C_{12}$ . Для четной моды нормальных колебаний токи находятся в фазе (рис. 6, а), для нечетной — в противофазе (рис. 6, б). Сравните наблюдаемые разности частот с частотой обмена, определенной из поведения схемы в переходном режиме.

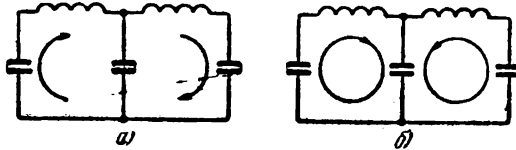


Рис. 6.

В качестве упражнения вы можете вычислить ток  $I_2$  для синусоидально возбуждаемой схемы, показанной на рис. 5. Покажите, что существуют два максимума тока, приходящихся на частоты нормальных мод колебаний. Как подействует включение небольшого сопротивления последовательно с  $C_{12}$ ? Какое действие окажет это на переходный сигнал? На периодический режим? Что бы вы сделали для подавления второй моды колебаний? Попробуйте осуществить это подавление.

## Работа 2.6. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Механическая или электрическая структура с многократно повторяющимся основным элементом обладает рядом интересных физических свойств. Во-первых, возмущение, введенное с одного

конца такой структуры, будет распространяться по ней без отражения. Во-вторых, имеется максимальная (критическая) частота для распространения синусоидальной волны по структуре. В этой работе мы исследуем передачу и отражение импульсов периоди-

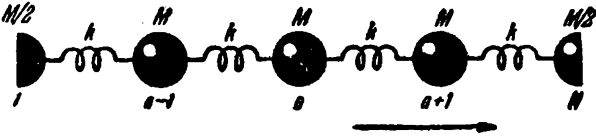


Рис. 1.

ческой структурой, а в Р.2.7 рассмотрим поведение периодических структур, возбуждаемых синусоидальной силой или напряжением.

Простой пример периодической структуры показан на рис. 1, где мы имеем линию, состоящую из масс  $M$ , соединенных пружинами, имеющими коэффициент упругости  $k$ . Ударив левую массу  $1$  (рис. 1), мы положим начало импульсу смещения, продвигающемуся вдоль линии. Когда импульс достигнет конца линии, он отразится в обратном направлении и, достигнув входа, отразится снова, и т. д. Мы увидим далее, что импульс можно полностью поглотить при помощи

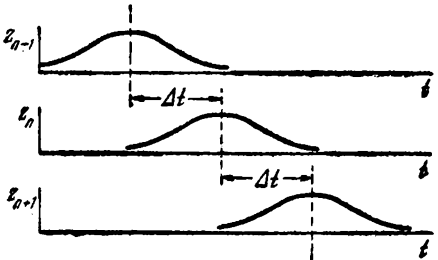


Рис. 2.

подходящего демпфирования конечных пружин. С этой целью величина крайних масс  $1$  и  $N$  сделана вдвое меньше остальных. Заметьте также, что, жестко соединив оба конца линии, мы получим кольцевую структуру.

Как описать распространение импульса по линии? Начнем с записи системы  $N$  уравнений движения для  $N$  масс на линии:

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = k(z_2 - z_1), \tag{1}$$

.....

$$M \frac{d^2 z_n}{dt^2} = -k(z_n - z_{n-1}) + k(z_{n+1} - z_n), \tag{2}$$

.....

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2 z_N}{dt^2} = -k(z_N - z_{N-1}). \tag{3}$$

Уравнения (1) и (3) описывают движение первой и последней массы  $M/2$ . Уравнение (2) — общее уравнение для любой массы на линии. Теперь представим, что у нас очень длинная линия, так что мы мо-

жем пренебречь массами на концах. Для начала покажем, что равномерное распространение волны по линии является возможным решением уравнений движения. Представим себе импульс смещения, движущийся вправо, как показано на рис. 2.

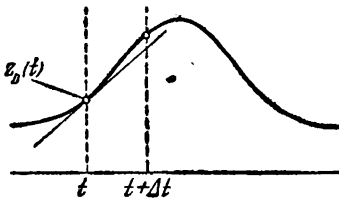


Рис. 3.

Для предполагаемого решения можно написать

$$z_{n-1}(t) = z_n(t + \Delta t), \quad (4)$$

$$z_{n+1}(t) = z_n(t - \Delta t). \quad (5)$$

Чтобы понять, при каких условиях удовлетворяются уравнения (4) и (5), мы должны разложить  $z_n(t)$  в ряд Тейлора вблизи произвольного момента времени  $t$  (рис. 3):

$$\begin{aligned} z_n(t + \Delta t) &= \\ &= z_n(t) + \frac{d}{dt} z_n(t) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} z_n(t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} z_n(t) \Delta t^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Изменяя знак  $\Delta t$ , мы имеем также

$$\begin{aligned} z_n(t - \Delta t) &= \\ &= z_n(t) - \frac{d}{dt} z_n(t) \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} z_n(t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} z_n(t) \Delta t^3 + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

и при подстановке уравнений (4) и (5) в уравнение (2) получим

$$M \frac{d^2}{dt^2} z_n(t) = k [z_n(t + \Delta t) + z_n(t - \Delta t) - 2z_n(t)]. \quad (8)$$

Подставляя затем (6) и (7) в уравнение (8), получаем

$$M \frac{d^2}{dt^2} z_n(t) = k \frac{d^2}{dt^2} z_n(t) \Delta t^2. \quad (9)$$

Из (9) видно, что (4) и (5) действительно являются решением, если

$$\Delta t = \sqrt{M/k}. \quad (10)$$

Если бы мы произвели разложение  $z_n(t + \Delta t)$  до четвертого порядка по  $\Delta t$ , то получили бы поправочный член в уравнении (9). Поправка незначительна при условии, что длительность импульса велика по сравнению с  $\Delta t$ . В этом случае импульс будет равномерно передвигаться вдоль линии, не изменяя своей формы. Конечно, импульс, движущийся влево ( $\Delta t < 0$ ), также является возможным решением.

Теперь рассмотрим отражение импульса от конца линии. Если крайние массы демпфированы, то вместо уравнения (3) можно написать

$$\frac{1}{2} M \frac{d^2}{dt^2} z_N = -k (z_N - z_{N-1}) - \gamma \frac{d}{dt} z_N. \quad (11)$$

Мы хотим определить, с какой амплитудой импульс отражается от конца линии. Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 4.

Пусть в момент времени  $t - \Delta t$  масса  $N - 1$  имеет максимальное отклонение, равное единице. Максимум отклонения достигает конечной массы  $N$  в момент времени  $t$ . Импульс отражается, снова

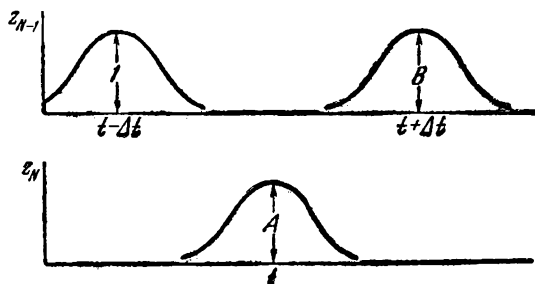


Рис. 4.

достигая максимума для массы  $N - 1$  в момент  $t + \Delta t$ . Исходя из рис. 4, можно написать соотношение между  $z_{N-1}$  и  $z_N$ :

$$z_{N-1}(t) = \frac{1}{A} z_N(t + \Delta t) + \frac{B}{A} z_N(t - \Delta t). \quad (12)$$

Используя разложение уравнений (6) и (7) в ряд Тейлора до членов второго порядка, получаем

$$z_{N-1}(t) = \frac{1+B}{A} z_N(t) + \frac{1-B}{A} \frac{d}{dt} z_N(t) \Delta t + \frac{1+B}{2A} \frac{d^2}{dt^2} z_N(t) \Delta t^2. \quad (13)$$

Подставляя в уравнении (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M \frac{d^2}{dt^2} z_N = -kz_N + k \frac{1+B}{A} z_N + k \frac{1-B}{A} \frac{d}{dt} z_N \Delta t + \\ + k \frac{1+B}{2A} \frac{d^2}{dt^2} z_N \Delta t^2 - \gamma \frac{d}{dt} z_N. \end{aligned} \quad (14)$$

Мы удовлетворим уравнению (14) выбором

$$B = \frac{1 - (\gamma/k \Delta t)}{1 + (\gamma/k \Delta t)}, \quad A = 1 + B = \frac{2}{1 + (\gamma/k \Delta t)}. \quad (15)$$

Включение членов порядка  $(\Delta t)^3$  привело бы лишь к незначительному изменению этих формул. Заметьте, что для частного случая, когда постоянная затухания  $\gamma = k\Delta t = \sqrt{Mk}$ , получаем  $B = 0$  и отраженного импульса нет. Это означает, что вся энергия импульса поглощается при затухании. Если нет затухания ( $\gamma = 0$ ),  $A = 2$  и  $B = 1$ . Импульс отражается с единичной амплитудой, а смещение крайней массы вдвое превосходит смещение других масс на линии. При  $\gamma \rightarrow \infty$ , что соответствует закреплённой на конце линии, получаем  $B = -1$ , т. е. инвертированный импульс, и  $A = 0$ , что означает неподвижность крайней массы.

Интересно рассмотреть электрический аналог этой механической задачи. Такие электрические структуры используются для постоянной задержки сигнала и называются *линиями задержки*. На рис. 5 показана периодическая электрическая структура. Предполагается, что индуктивная связь между элементами отсутствует.

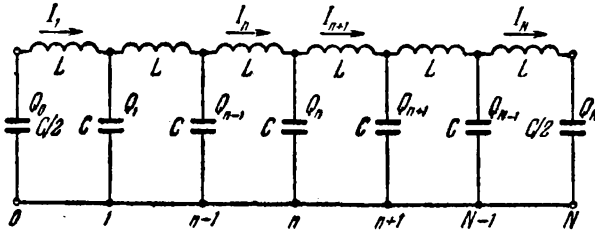


Рис. 5.

Электрическая линия может заканчиваться индуктивностью  $1/2L$  или емкостью  $1/2C$ . Контурные уравнения электрической линии имеют вид

$$\frac{2Q_0}{C} - L \frac{dI_1}{dt} - \frac{Q_1}{C} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{Q_{n-1}}{C} - L \frac{dI_n}{dt} - \frac{Q_n}{C} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{Q_n}{C} - L \frac{dI_{n+1}}{dt} - \frac{Q_{n+1}}{C} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{Q_{N-1}}{C} - L \frac{dI_N}{dt} - \frac{2Q_N}{C} = 0. \quad (19)$$

Скорости изменения заряда равны

$$\frac{dQ_0}{dt} = -I_1, \quad (20)$$

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_n - I_{n+1}, \quad (21)$$

$$\frac{dQ_N}{dt} = I_N. \quad (22)$$

Исключая токи из уравнений (16) — (22), получаем

$$L \frac{d^2Q_0}{dt^2} = \frac{1}{C} (Q_1 - 2Q_0), \quad (23)$$

$$L \frac{d^2Q_n}{dt^2} = -\frac{1}{C} (Q_n - Q_{n-1}) + \frac{1}{C} (Q_{n+1} - Q_n), \quad (24)$$

$$L \frac{d^2Q_N}{dt^2} = -\frac{1}{C} (2Q_N - Q_{N-1}). \quad (25)$$

Обратите внимание на аналогию между уравнениями (24) и (2). Можно ожидать, что мы получим прежние результаты, заменив  $M$  на  $L$ ,  $z$  на  $Q$  и  $k$  на  $1/C$ . Уравнения (23) и (25) отличаются от уравнений (1) и (3), так как электрическая линия заканчивается емкостью, а не индуктивностью. Исходя из аналогии с равенством (10), можно ожидать, что задержка на каждую секцию линии будет равна

$$\Delta t = \sqrt{LC}. \quad (26)$$

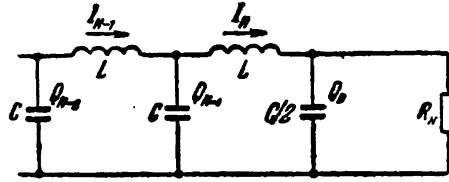


Рис. 6.

Как можно согласовать электрическую линию с нагрузкой на ее конце? Пусть электрическая линия заканчивается сопротивлением  $R_n$ , включенным параллельно с конечным конденсатором, как показано на рис. 6. Теперь мы должны дополнить (22) добавочным членом, что приводит к уравнению вида

$$\frac{dQ_N}{dt} = I_N - \frac{2Q_N}{R_n C}, \quad (27)$$

где добавленный член — это ток, протекающий через  $R_n$ . Производя подстановку в уравнение (19), получаем вместо уравнения (25)

$$\frac{1}{2} L \frac{d^2 Q_N}{dt^2} = -\frac{1}{C} \left( Q_N - \frac{1}{2} Q_{N-1} \right) - \frac{L}{R_n C} \frac{dQ_N}{dt}. \quad (28)$$

Как отражается импульс от конца линии? По аналогии с уравнением (12) имеем

$$Q_{N-1}(t) = \frac{1}{A} Q_N(t + \Delta t) + \frac{B}{A} Q_N(t - \Delta t). \quad (29)$$

Разлагая  $Q_N$  в ряд Тейлора и подставляя в уравнение (28), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L \frac{d^2 Q_N}{dt^2} = & -\frac{Q_N}{C} + \frac{1}{2C} \frac{1+B}{A} Q_N + \frac{1}{2C} \frac{1-B}{A} \Delta t \frac{dQ_N}{dt} + \\ & + \frac{1}{2C} \frac{1+B}{2A} \Delta t^2 \frac{d^2 Q_N}{dt^2} - \frac{L}{R_n C} \frac{dQ_N}{dt}. \end{aligned} \quad (30)$$

Приравнявая коэффициенты, получаем

$$B = \frac{1 - (L/R_n \Delta t)}{1 + (L/R_n \Delta t)}, \quad A = \frac{1}{2} (1 + B) = \frac{1}{1 + (L/R_n \Delta t)}. \quad (31)$$

При сопротивлении нагрузки

$$R_n = R_0 = \frac{L}{\Delta t} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (32)$$

импульс полностью поглощается. Это сопротивление называется *характеристическим сопротивлением* (или, более обычно, *волновым сопротивлением*) линии. Если бы мы рассмотрели линию, имеющую

на концах индуктивности, строго аналогичную механической линии, то получили бы ту же самую величину волнового сопротивления. (Заметьте, что для бесконечного  $R_n$  мы получаем  $A = 1$  для линии, заканчивающейся емкостями, и  $A = 2$  для линии, заканчивающейся индуктивностями. Напряжения, однако, ведут себя точно таким же образом, как смещения.)

Для изучения передачи и отражения импульсов на периодической электрической линии соберите схему, показанную на рис. 7. Входное сопротивление должно быть приблизительно равно волновому сопротивлению линии, чтобы избежать отражений от входа. Вы сможете наблюдать входной импульс, импульс на конце линии и отраженный импульс, используя схему, показанную на рис. 7.

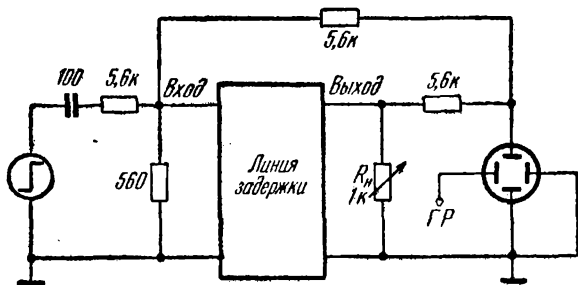


Рис. 7.

Измерьте полную задержку  $N\Delta t$ . Зная количество секций, определите время задержки каждой секции  $\Delta t$ . Регулируйте  $R_n$  до тех пор, пока линия не будет согласована. Снимите  $R_n$  и измерьте его величину омметром, чтобы найти  $R_0$ . Вычислите  $L$  и  $C$ . Постройте график зависимости отношения амплитуд импульсов на конце и в начале линии как функции  $R_n/R_0$ . Постройте также аналогичный график для отраженного импульса. Сравните с уравнением (31). Почему амплитуды импульса на конце линии и отраженного импульса меньше, чем можно было ожидать? В П.2.7 будет показано, что ослабление на каждую секцию приблизительно определяется величиной

$$e^{-R/2R_0}, \quad (33)$$

где  $R$  — сопротивление на одну секцию. Исходя из наблюдаемого ослабления для  $N$  секций, вычислите  $R$ . Измерьте сопротивление  $N$  индуктивностей, включенных последовательно. Определите сопротивление каждой секции этим способом и сравните с величиной, вычисленной из формулы для ослабления.

### Работа 2.7. ДИСПЕРСИЯ

Мы видели, что периодическая структура передает возмущение без отражения или изменения формы, пока возмущение является медленным по сравнению с задержкой в каждой секции. Что про-



изойдет, когда возмущение не будет таким постепенным? Ответ на этот вопрос можно получить, исследуя реакцию периодической структуры на синусоидальную возмущающую силу. Мы обнаружим, что существует максимальная частота, которая пропускается линией. При более высоких частотах будет иметь место чисто экспоненциальное затухание сигнала. Для частот, приближающихся к этой критической частоте, скорость, с которой распространяется по линии смещение (*фазовая скорость*) и скорость, с которой распространяется по линии энергия (*групповая скорость*), могут быть совершенно различны. В частности, групповая скорость падает до нуля при критической частоте, в то время как фазовая скорость не обращается в нуль. Таким образом, можно ожидать, что короткий импульс будет видоизменен этой линией. Такую линию мы называем *линией с дисперсией*.

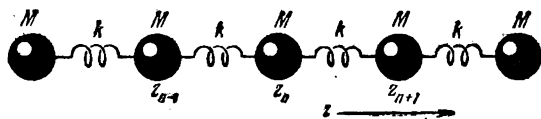


Рис. 1.

Рассмотрим идеальную линию без потерь, имеющую форму, показанную на рис. 1. В П.2.7 будут рассмотрены свойства реальной линии, имеющей потери. Допустим, что линия бесконечна или согласована на обоих концах, так что нам надо принимать во внимание только одну секцию. Из уравнения (4) Р.2.6 мы имеем для произвольной секции линии

$$M \frac{d^2 z_n}{dt^2} = -k(2z_n - z_{n-1} - z_{n+1}). \quad (1)$$

Возбуждая конец синусоидальным смещением

$$z_1 = z_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

мы можем ожидать, что возмущение будет распространяться по линии таким образом, что смещение  $n$ -й массы выразится равенством

$$z_n = z_0 \cos(\omega t - n\beta). \quad (3)$$

Подставив (3) в (1), получим

$$-M\omega^2 z_0 \cos(\omega t - n\beta) = -kz_0 \{2 \cos(\omega t - n\beta) - \cos[\omega t - (n-1)\beta] - \cos[\omega t - (n+1)\beta]\}. \quad (4)$$

Правую часть (4) можно упростить с помощью тригонометрического тождества

$$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B \quad (5)$$

и получить

$$-M\omega^2 z_0 \cos(\omega t - n\beta) = -2kz_0 (1 - \cos \beta) \cos(\omega t - n\beta), \quad (6)$$

или

$$1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} M \frac{\omega^2}{k}, \quad (7)$$

что равносильно

$$\sin \frac{1}{2} \beta = \frac{1}{2} \omega \sqrt{M/k} = \frac{1}{2} \omega \Delta t, \quad (8)$$

где  $\Delta t = \sqrt{M/k}$  — задержка на низкой частоте. График  $\beta$  в зависимости от  $\omega/\omega_{кр}$ , где  $\omega_{кр} = 2/\Delta t$  — критическая частота, дан на рис. 2. Пока  $\frac{1}{2}\omega\Delta t$  невелико, отстаивание фазы  $\beta$  приблизительно равно  $\omega\Delta t$ .

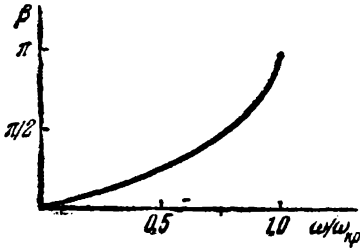


Рис. 2.

Когда  $\frac{1}{2}\omega\Delta t$  приближается к единице, отстаивание фазы увеличивается до  $\pi$  и соседние массы колеблются в противофазе, как показано на рис. 3. Из уравнения (8) видно, что, поскольку максимальная величина  $\sin \frac{1}{2}\beta$  равна

единице, самая высокая частота, которая может распространяться, это

$$\omega_{кр} = \frac{2}{\Delta t} = 2 \sqrt{k/M}. \quad (9)$$

Эта частота называется *критической частотой* линии.

Ничто не мешает нам возбуждать первую массу с частотой  $\omega$ , более высокой, чем критическая частота  $\omega_{кр}$ . Что произойдет, если

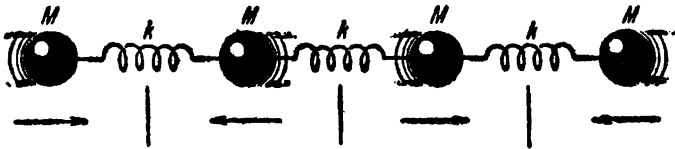


Рис. 3.

мы сделаем это? При попытке возбудить линию на частотах выше  $\omega_{кр}$  на линии возникнут противофазные колебания с экспоненциально уменьшающейся амплитудой.

В П.2.7 мы покажем, что эти колебания имеют форму

$$z_n = (-1)^n z_0 e^{-n\alpha} \cos \omega t. \quad (10)$$

Делая подстановку в (1), получаем

$$\begin{aligned} -M\omega^2 (-1)^n z_0 e^{-n\alpha} \cos \omega t = \\ = -k (-1)^n z_0 (2 + e^\alpha + e^{-\alpha}) e^{-n\alpha} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда имеем выражение для затухания на одной секции

$$e^{-\alpha} = \left[ 2 \left( \frac{\omega}{\omega_{кр}} \right)^2 - 1 \right] - \sqrt{\left[ 2 \left( \frac{\omega}{\omega_{кр}} \right)^2 - 1 \right]^2 - 1}, \quad (12)$$

представленное на рис. 4. При больших значениях  $\omega/\omega_{кр}$  приблизительно имеем

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{4} \frac{\omega_{кр}^2}{\omega^2} = \frac{k}{M\omega^2}. \quad (13)$$

Поведение линии при низкой частоте не очень удивительно. Но как понять поведение линии при частоте выше критической,

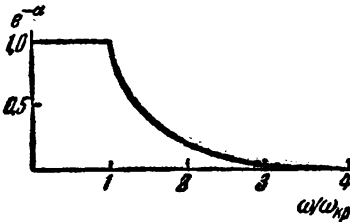


Рис. 4.

когда массы колеблются в противофазе, с экспоненциально уменьшающейся амплитудой?

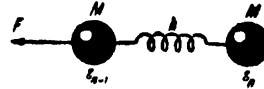


Рис. 5.

Можно представить себе, что при высоких частотах массы возбуждаются очень слабыми пружинами, причем движение каждой массы ограничено ее инерцией. Рассмотрим ситуацию, показанную на рис. 5, где масса слева колеблется с амплитудой

$$z_{n-1} = z_0 \cos \omega t. \quad (14)$$

С какой амплитудой и фазой колеблется другая масса? Если частота намного превышает критическую, можно пренебречь влиянием  $(n+1)$ -й массы и остальных масс. Можем записать уравнение движения для  $n$ -й массы в виде

$$M \frac{d^2 z_n}{dt^2} + k z_n = k z_{n-1} = k z_0 \cos \omega t, \quad (15)$$

где мы произвели замену для  $z_{n-1}$ , используя (14). Предположим, что решение имеет вид

$$z_n = z_1 \cos \omega t, \quad (16)$$

и подставим в уравнении (15). В результате получаем

$$z_1 = - \frac{k}{M\omega^2 - k} z_0 \cong - \frac{k}{M\omega^2} z_0, \quad (17)$$

где мы в знаменателе пренебрегли  $k$  по сравнению с  $M\omega^2$ . Это выражение с точностью до знака совпадает с (13).  $n$ -я масса колеблется в противофазе по отношению к  $(n-1)$ -й массе с существенно уменьшенной амплитудой, пока  $M\omega^2$  велико по сравнению с  $k$  или, что равноценно, пока частота значительно выше критической. Движение  $(n+1)$ -й массы, возбуждаемой  $n$ -й массой, можно рассматри-

вать аналогично. Она будет колебаться в противофазе относительно  $n$ -й массы с уменьшенной амплитудой.

Наши экспериментальные исследования будут касаться электрической линии задержки, использованной в Р.2.6. Как мы видели, уравнения для зарядов на линии задержки аналогичны уравнениям для смещений на механической линии. Для того чтобы измерить сдвиг фазы на всей

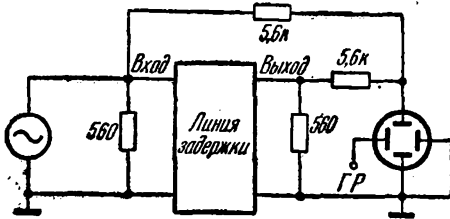


Рис. 6.

линии, соберите схему, показанную на рис. 6. Эта схема суммирует входной и выходной сигналы. При очень низких частотах будет иметь место очень маленький сдвиг фазы на линии. Поэтому входной и выходной сигналы будут складываться. По мере

увеличения возбуждающей частоты сигнал на выходе начнет отставать по фазе от входного сигнала до тех пор, пока сигналы не окажутся точно в противофазе и не погасятся. Из-за затухания на линии выходной сигнал несколько меньше входного и будет наблюдаться небольшой остаточный сигнал. С дальнейшим увеличением частоты рассматриваемые сигналы снова оказываются в фазе и т. д. Таким образом, мы должны построить кривую, напоминающую кривую на рис. 2. Получите кривую такого типа для общего сдвига фазы и сравните ее с четвертью синусоидальной волны. Вы можете обнаружить, что  $N\beta$  ближе к линейной функции частоты, чем этого можно было ожидать. Это результат индуктивной связи между секциями, которая оказывает сглаживающее влияние на линию.

Какова критическая частота? Сравните критическую частоту и время задержки, измеренное в Р.2.6, с помощью соотношения

$$v_{кр} = \frac{1}{\pi \Delta t}. \quad (18)$$

Вблизи критической частоты, возможно, понадобится дополнительное ослабление входного сигнала на осциллографе с помощью сопротивления большего, чем 5,6 ком на рис. 6.

Если доступны отдельные элементы линии задержки, можно проверить экспоненциальное затухание линии на частотах, превышающих критическую. Сравните наблюдаемое затухание с графиком рис. 4 для нескольких частот выше критической.

### Приложение 2.7. Фазовая и групповая скорости

Чтобы рассмотреть фазовую и групповую скорости на реальной линии (линии с затуханием), удобно ввести комплексные заряды и токи. На рис. 7 показана линия с потерями. Типичное контурное

уравнение на линии принимает вид

$$L \frac{dI_n}{dt} + RI_n + \frac{Q_n}{C} = \frac{Q_{n-1}}{C}. \quad (19)$$

Мы предполагаем, что комплексный заряд выражается в виде

$$Q_n = Q_0 e^{i\omega t} e^{-n(\alpha + i\beta)}, \quad (20)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные величины. Токи  $I_n$  будут иметь вид

$$I_n = I_0 e^{i\omega t} e^{-n(\alpha + i\beta)}. \quad (21)$$

Соотношение между зарядом и током может быть получено из

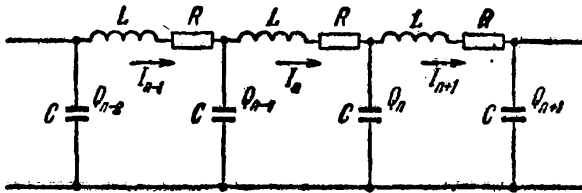


Рис. 7.

уравнения непрерывности

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_n - I_{n+1}. \quad (22)$$

Производя подстановку из уравнения (21) и разрешая уравнение относительно  $I_n$ , получаем

$$I_n = \frac{i\omega}{1 - e^{-(\alpha + i\beta)}} Q_n. \quad (23)$$

Подставляя в (19), получим

$$e^{(\alpha + i\beta)} + e^{-(\alpha + i\beta)} = 2 + i\omega RC - \omega^2 LC. \quad (24)$$

Разделяя действительную и мнимую части, приходим к выражениям

$$2 \operatorname{ch} \alpha \cos \beta = 2 - \omega^2 LC, \quad (25)$$

$$2 \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = \omega RC. \quad (26)$$

При частоте ниже критической и при условии, что потери невелики, справедливо

$$\sin \frac{1}{2} \beta \cong \frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}, \quad (27)$$

где

$$\omega_{\text{кр}} = 2/\sqrt{LC}$$

и

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2} \beta \cos \frac{1}{2} \beta = \frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{кр}}}\right)^2}. \quad (28)$$

Комбинируя (26) и (28) и полагая, что  $\alpha$  мало, получаем

$$\alpha \cong \text{sh } \alpha \cong \frac{R/2R_0}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_{кр})^2}}. \quad (29)$$

Выражение (29) остается справедливым, пока  $R$  мало по сравнению с характеристическим импедансом линии  $R_0 = \sqrt{L/C}$  и частота не слишком близка к критической.

Рассмотрим теперь вопрос о фазовой и групповой скоростях распространения сигнала по линии и начнем со времени задержки

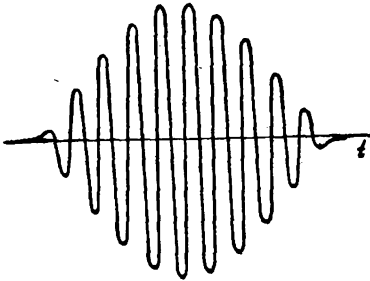


Рис. 8.

сигнала, распространяющегося по линии. Мы различаем два вида задержки по времени. Первый — кажущаяся задержка синусоидального сигнала, которая равна отставанию фазы  $\beta$ , деленному на круговую частоту  $\omega$ :

$$\Delta t_{\phi} = \frac{\beta}{\omega} = \frac{2}{\omega_{кр}} \frac{1/2\beta}{\sin 1/2\beta}. \quad (30)$$

Второй, и в действительности более важный, вид задержки по времени — это задержка группы колебаний, показанной на рис. 8.

Для импульса, более длительного по сравнению с  $\sqrt{LC}$ , задержка по времени на секцию равна просто  $\Delta t = \sqrt{LC}$ . Но как обстоит дело с группой? Хотя группа может иметь длинную огибающую, частота колебаний  $\omega$  может и не быть низкой по сравнению с  $\omega_{кр}$ . Самый простой путь вычисления групповой задержки — это деление энергии, накопленной в каждой секции, на скорость, с которой энергия течет по линии.

Обращаясь к рис. 7, можно энергию, накопленную в  $n$ -й емкости, выразить уравнением

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{Q_n Q_n^*}{C} \right\} = \frac{1}{2C} Q_0^2 e^{-2n\alpha}. \quad (31)$$

где  $Q_n^*$  — величина, комплексно сопряженная величине  $Q_n$ . Скорость передачи энергии дается выражением

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{Q_n I_{n+1}^*}{C} \right\} = \frac{1}{2} Q_0^2 e^{-2n\alpha} \frac{\omega \sin \beta e^{-\alpha}}{1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta + e^{-2\alpha}}. \quad (32)$$

Тогда групповая задержка во времени равна

$$\Delta t_g = \frac{1 - 2e^{-\alpha} \cos \beta + e^{-2\alpha}}{\omega e^{-\alpha} \sin \beta} \cong \quad (33)$$

$$\cong \frac{2}{\omega_{кр}} \frac{1}{\cos 1/2\beta}. \quad (34)$$

где мы делаем предположение, что затухание невелико.

Задержки времени  $\Delta t_\phi$  и  $\Delta t_r$  изображены на рис. 9. Рассматривая распространение сигнала в среде, обычно говорят о фазовой и групповой скоростях, а не о временах задержки. Эти скорости определяются соотношениями

$$v_\phi = \frac{\Delta l}{\Delta t_\phi}, \quad v_r = \frac{\Delta l}{\Delta t_r}. \quad (35)$$

Используя (30) и (34), получаем для периодической линии

$$v_\phi = \omega_{кр} \Delta l \frac{\sin \frac{1}{2}\beta}{\beta}, \quad (36)$$

$$v_r = \frac{1}{2} \omega_{кр} \Delta l \cos \frac{1}{2} \beta. \quad (37)$$

На рис. 10 по оси ординат отложена относительная частота  $\omega/\omega_{кр}$ , по оси абсцисс —  $\beta/\Delta l$ . Заметим, что фазовая скорость при частоте  $\omega$  определяется наклоном хорды, проведенной от начала координат в эту точку, т. е.  $v_\phi = \text{tg } \varphi_1$ , а групповая скорость — крутизной кривой в этой точке:  $v_r = \text{tg } \varphi_2$ .

Групповая скорость определяется наклоном кривой только в том случае, если нет затухания. Более общее выражение должно быть определено с помощью способа, аналогичного способу, использованному при получении уравнения (33).

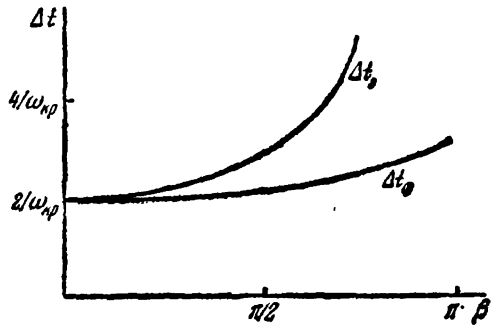


Рис. 9.

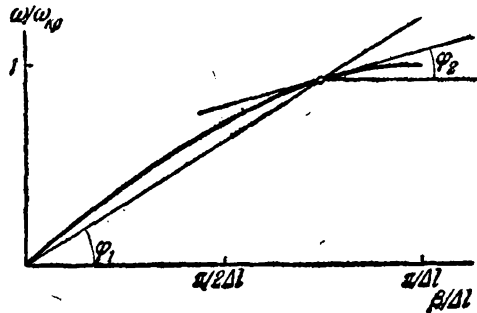


Рис. 10.

## Работа 2.8. ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ

Если в линии задержки с сосредоточенными элементами (см. Р.2.6 и Р.2.7) мы стали бы уменьшать емкости и индуктивности, одновременно увеличивая количество секций, в пределе мы получили бы линию, в которой индуктивность и емкость равномерно распределены по линии. В такой непрерывной линии критическая частота  $\omega_{кр} = 2/\sqrt{LC}$  стремится к бесконечности, поскольку  $L$  и  $C$  (каждая) приближаются к нулю. В этом пределе линия больше не вносит дисперсии, и нет необходимости различать фазовую и групповую скорости.

Для распределенной линии мы должны описывать заряд и ток через координату  $z$  линии, а не через количество секций  $n$ , которое

теряет свой смысл. Из уравнения (22) Р.2.6 имеем

$$L \frac{d^2 Q_n}{dt^2} = -\frac{1}{C} (2Q_n - Q_{n-1} - Q_{n+1}). \quad (1)$$

При  $n \rightarrow \infty$   $Q_n$  можно рассматривать как медленно меняющуюся функцию  $z$ , показанную на рис. 1.

Если рассматривать  $Q_n$  как функцию  $z$  и  $t$ , можно записать

$$Q_n(t) = Q(z, t), \quad (2)$$

$$Q_{n+1}(t) = Q(z, t) + \frac{dQ(z, t)}{dz} \Delta l + \frac{1}{2} \frac{d^2 Q(z, t)}{dz^2} \Delta l^2, \quad (3)$$

$$Q_{n-1}(t) = Q(z, t) - \frac{dQ(z, t)}{dz} \Delta l + \frac{1}{2} \frac{d^2 Q(z, t)}{dz^2} \Delta l^2, \quad (4)$$

где мы выразили  $Q_{n+1}$  и  $Q_{n-1}$  с помощью разложения в ряд Тейлора вблизи  $Q_n$ . Подставляя эти выражения в (1), находим

$$\frac{L}{\Delta l} \frac{d^2 Q(z, t)}{dt^2} = \frac{\Delta l}{C} \frac{d^2 Q(z, t)}{dz^2}. \quad (5)$$

При  $\Delta l \rightarrow 0$  удобно определить индуктивность на единицу длины  $\Delta l$

$$L' = \frac{L}{\Delta l} \quad (6)$$

и емкость на единицу длины

$$C' = \frac{C}{\Delta l}. \quad (7)$$

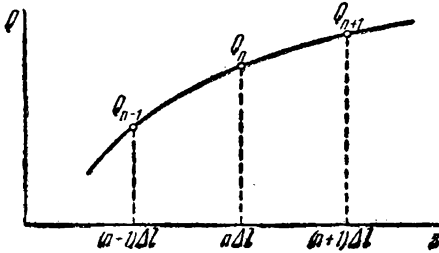


Рис. 1.

Если мы посылаем волну вдоль линии, она распространяется со скоростью

$$u = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta l}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(L/\Delta l)(C/\Delta l)}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}. \quad (8)$$

Используя (8), можно переписать уравнение (5)

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = u^2 \frac{d^2 Q}{dz^2}. \quad (9)$$

Уравнение (9) называется *волновым уравнением*. Волновое сопротивление линии равно

$$R_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10)$$

Таким образом, волновое сопротивление непрерывной линии может быть выражено через отношение индуктивности на единицу длины к емкости на единицу длины.

Какой окажется в непрерывном пределе линия с массами и пружинами, рассматривавшаяся в Р.2.6 и Р.2.7? Составьте волновое уравнение для такой линии.



В этой работе мы измеряем скорость распространения и характеристическое сопротивление «ленточной линии»\*), имеющей ширину  $w$  и высоту  $h$  над заземленной плоскостью (рис. 2, поперечное сечение). Мы рассчитаем емкость на единицу длины и индуктивность на единицу длины в предположении, что лента расположена близко к заземленной плоскости. Исходя из этих величин, мы вычислим  $u$  и  $R_0$ , используя равенства (8) и (10).

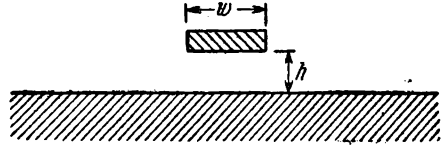


Рис. 2.

Предположим, что лента имеет заряд  $Q'$  на единицу длины. Тогда заземленная пластина будет иметь зеркальный заряд  $-Q'$ . Электрическое поле в промежуточном пространстве, показанное на рис. 3, а, будет равно

$$E = 4\pi \frac{Q'}{w}. \quad (11)$$

Поэтому лента имеет потенциал

$$V = Eh = 4\pi Q' \frac{h}{w} \quad (12)$$

по отношению к заземленной плоскости. Емкость на единицу длины составит

$$C' = \frac{Q'}{V} = \frac{w}{4\pi h}. \quad (13)$$

Чтобы вычислить индуктивность  $L'$  на единицу длины, представим себе ток  $I$ , текущий вдоль ленты, и зеркальный ток  $-I$  (рис. 3, б).

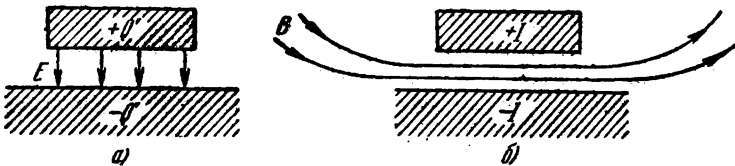


Рис. 3.

Индукция магнитного поля между лентой и заземленной плоскостью равна

$$B = 4\pi \frac{I}{wc} \quad (14)$$

( $c$  — скорость света). Поток магнитной индукции на единицу длины ленты равен

$$\Phi' = Bh = 4\pi \frac{I}{c} \frac{h}{w}. \quad (15)$$

\*) Общепринятым является название «открытая несимметричная линия»: (Прим. перев.)

Индуктивность на единицу длины дается соотношением

$$L' = - \frac{\Delta V}{dI/dt} = \frac{l}{c} \frac{d\Phi'/dt}{dI/dt} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{h}{\omega}. \quad (16)$$

Скорость распространения волн по линии может быть вычислена с помощью подстановки уравнений (13) и (16) в уравнение (8). В результате получаем

$$u = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = c, \quad (17)$$

т. е. скорость распространения по ленточной линии тождественно равна скорости света  $c = 2,99792 \cdot 10^{10}$  см/сек. Характеристическое сопротивление линии может быть получено подстановкой (13) и (16) в уравнение (10), что дает

$$R_0 = \frac{4\pi}{c} \frac{h}{\omega}. \quad (18)$$

Получая уравнения (17) и (18), мы полагали, что ленточная линия находится вблизи заземленной плоскости. Что мы можем ожидать для  $u$  и  $R_0$ , если такого условия нет? По причинам, которые станут ясны после того, как мы рассмотрим излучение электромагнитной энергии, скорость распространения равна  $c$  даже в том случае, когда лента значительно удалена от земли. Однако по мере того, как лента

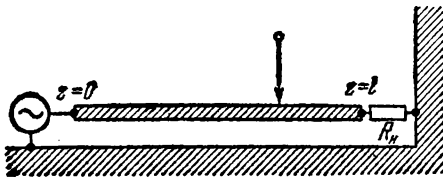


Рис. 4.

удаляется от плоскости земли, емкость на единицу длины уменьшается в зависимости от  $h/\omega$  не линейно, а логарифмически. Чтобы скорость  $u$  оставалась постоянной,  $L'$  должна уменьшаться с  $h/\omega$  логарифмически. Таким образом, можно ожидать, что для большого  $h/\omega$  зависимость сопротивления  $R_0$  от  $h/\omega$  будет ближе к логарифмической, чем к линейной.

Предлагаемое экспериментальное устройство показано на рис. 4. Один конец линии возбуждается высокочастотным сигнал-генератором. Для определения огибающей высокочастотного сигнала можно использовать детектирующий пробник. Линия нагружена на переменное сопротивление  $R_n$ .

Представим волну синусоидального напряжения, распространяющуюся направо, в виде

$$V = \frac{Q'}{C'} = V_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right). \quad (19)$$

Из уравнения (29) Р.2.6 ожидаем, что волна будет отражена от конечного сопротивления с амплитудой

$$B = \frac{R_n/R_0 - 1}{R_n/R_0 + 1}. \quad (20)$$

Если линия разомкнута ( $R_n$  бесконечно), волна отражается в фазе. Если линия коротко замкнута ( $R_n$  равно нулю), волна напряжения отражается в противофазе. Общее напряжение, измеренное на линии, является суммой двух членов

$$V(z, t) = V_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + V_0 \frac{R_n/R_0 - 1}{R_n/R_0 + 1} \cos \omega \left( t - \frac{2l}{c} + \frac{z}{c} \right). \quad (21)$$

Мы можем рассматривать три особых случая:

1. Разомкнутая линия,  $R_n = \infty$ . Из уравнения (21) получаем

$$V(z, t) = 2V_0 \cos \omega \left( t - \frac{l}{c} \right) \cos \frac{\omega}{c} (l - z). \quad (22)$$

На конце линии (при  $z = l$ ) напряжение максимально.

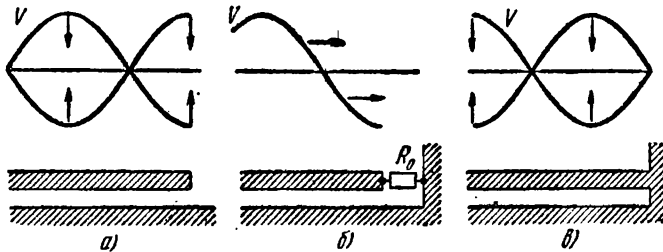


Рис. 5.

2. Согласованная линия,  $R_n = R_0$ :

$$V(z, t) = V_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (23)$$

амплитуда напряжения постоянна вдоль линии.

3. Короткозамкнутая линия,  $R_n = 0$ :

$$V(z, t) = -2V_0 \sin \omega \left( t - \frac{l}{c} \right) \sin \frac{\omega}{c} (l - z), \quad (24)$$

напряжение на конце линии (при  $z = l$ ) равно нулю. Эти три условия схематически изображены на рис. 5, а, б и в.

Для того чтобы наблюдать детектированную волну на осциллографе, высокочастотный сигнал должен быть модулирован по амплитуде внутренним модулятором или сигналом от внешнего синусоидального генератора. Огибающая детектируется пробником, последовательно соединенным с развязывающим сопротивлением 560 ом. Если нет детектирующего пробника, можно собрать его, используя схему на рис. 6.

Установите ленточную линию на удобной высоте над заземленной плоскостью и закончите линию пластиной короткого замыкания. Настройте высокочастотный сигнал-генератор на самую высокую частоту (выше 100 Мгц), на которой вы еще можете детектировать сигнал. Определите положение первого максимума и вычислите  $u$ . Увеличьте расстояние  $h$  от заземленной плоскости и повто-

рите вычисление. Чтобы линия была замкнута накоротко ( $V = 0$  при  $z = l$ ), необходимо использовать широкую пластину. Попробуйте применить проволоку. Почему вы теперь можете обнаружить напряжение на конце линии?

Определите положение минимума напряжения при разомкнутой линии. Заметьте, что при увеличении высоты  $h$  минимум движется к концу линии. Это явно противоречит уравнению (22). Что мы не приняли во внимание?

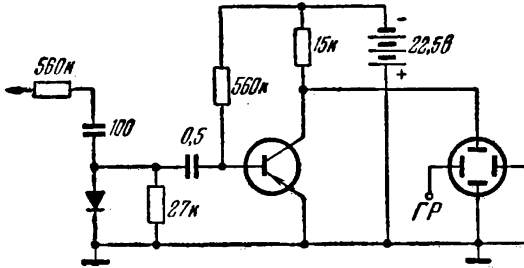


Рис. 6.

Теперь нагрузите линию на сопротивление и определите волновое сопротивление линии как функцию отношения высоты  $h$  к ширине  $w$ .

Для сравнения ваших результатов с уравнением (18), которое дано в гауссовых единицах, будет полезно преобразовать выражение для  $R_0$  в омы. Чтобы сделать это, вспомним переводные множители для напряжения и тока:

$$1 \text{ ед. СГСЭ}_v = \frac{c}{10^8} \text{ в}, \quad (25)$$

$$1 \text{ ед. СГСЭ}_q/\text{сек} = \frac{10}{c} \text{ а}. \quad (26)$$

Разделив уравнение (25) на (26), получаем

$$1 \text{ ед. СГСЭ}_r = \frac{c^2}{10^9} \text{ ом}. \quad (27)$$

Это дает для волнового сопротивления

$$R_0 = \frac{4\pi ch}{10^9 w} \text{ ом} = 376,73 \frac{h}{w} \text{ ом}. \quad (28)$$

Величина  $376,73 \text{ ом}$  называется *импедансом свободного пространства*.

Часто желательно передать сигнал, симметричный по отношению к земле. Для этой цели можно использовать пару лент. Сечение такой линии изображено на рис. 7, а. Ее волновое сопротивление тож-

Дественно равно волновому сопротивлению ленты над заземленной плоскостью

$$R_0 = 376,73 \frac{h}{w} \text{ ом.} \quad (29)$$

Пример несимметричной линии, в которой используются три ленты, показан на рис. 7, б. Две внешние ленты соединены вместе и заземлены. Средняя полоса соединена с возбуждающим выходом генератора. Импеданс этой линии приблизительно равен половине импеданса полосы над заземленной плоскостью:

$$R_0 = 376,73 \frac{h}{2w} \text{ ом.} \quad (30)$$

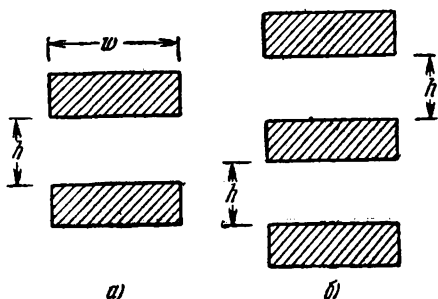


Рис. 7.

Рекомендуем вам исследовать несимметричную линию, показанную на рис. 7, б. Каких погрешностей можно ожидать при измерениях на симметричной линии, если высокочастотный сигнал-генератор и осциллограф заземлены?

### Приложение 2.8. Сетки и листы

В работах Р.2.6, Р.2.7 и Р.2.8 мы имели дело с распространением волн по линии. Волны могут также распространяться по двумерной поверхности или в трехмерном пространстве. Здесь мы рассмотрим распространение сигналов в двумерных сетях и в листах, которые являются предельным случаем сетей, состоящих из малых ячеек.

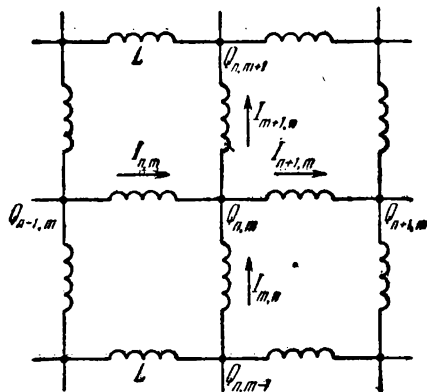


Рис. 8.

На рис. 8 показана квадратная сетка, каждый узел которой соединен с четырьмя соседними через индуктивность  $L$  и с заземленной пластиной через емкости  $C$ , не показанные на рисунке. Токи и заряды обозначаются двумя индексами, как показано

на рисунке. Из закона сохранения заряда следует уравнение непрерывности

$$\frac{dQ_{n,m}}{dt} = I_{n,m} - I_{n+1,m} + I_{m,n} - I_{m+1,n}. \quad (31)$$

Кроме того, имеем следующие контурные уравнения:

$$\frac{Q_{n,m-i}}{C} - L \frac{dI_{m,n}}{dt} - \frac{Q_{n,m}}{C} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{Q_{n-i,m}}{C} - L \frac{dI_{n,m}}{dt} - \frac{Q_{n,m}}{C} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{Q_{n,m}}{C} - L \frac{dI_{m+i,n}}{dt} - \frac{Q_{n,m+i}}{C} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{Q_{n,m}}{C} - L \frac{dI_{n+i,m}}{dt} - \frac{Q_{n+i,m}}{C} = 0. \quad (35)$$

Дифференцируя уравнение (31) по времени и исключая ток из уравнений (32) — (35), получаем

$$L \frac{d^2 Q_{n,m}}{dt^2} = -\frac{1}{C} (4Q_{n,m} - Q_{n-1,m} - Q_{n+1,m} - Q_{n,m-1} - Q_{n,m+1}). \quad (36)$$

Это уравнение является двумерным обобщением уравнения (22), приведенного в Р.2.6. Представим себе, что в каких-то точках в сеть поступают сигналы, которые измеряются в других точках. По крайней мере в принципе, все напряжения и токи могут быть определены.

Чтобы перейти к непрерывному пределу от периодической сетки рис. 8, нужно безгранично уменьшать емкости и индуктивности. Если рассматривать  $Q_{n,m}$  как функцию  $x$ ,  $z$  и  $t$ , легко получить двумерное волновое уравнение

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = u^2 \left( \frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{d^2 Q}{dz^2} \right) \quad (37)$$

для заряда на листе, расположенном над заземленной плоскостью.

## Работа 2.9. КЛИСТРОН

Чтобы сконструировать генератор, нужны два элемента. Первый элемент — резонансная структура с малыми потерями, второй — устройство, которое компенсирует эти потери.

В Р.2.4 мы построили такой генератор. Резонансным элементом служил обычный  $LRC$ -контур, показанный на рис. 1. Мы компенсировали потери подачей усиленного базового тока в контур. Какие частотные ограничения имеются в такой системе? Мы можем отдельно рассмотреть ограничения, которые вносятся резонансным элементом и системой обратной связи. Для увеличения частоты резонансного элемента надо только уменьшить  $L$  и  $C$ , так как резонансная частота равна  $1/\sqrt{LC}$ . Усложняющим обстоятельством является то, что при высоких частотах емкость между витками катушки индуктивности становится существенной и индуктивность и емкость нельзя больше рассматривать как отдельные сосредоточенные элементы. При частотах выше 100 Мгц обычно выгодно

использовать в качестве резонансного элемента короткозамкнутую четвертьволновую линию.

Мы видели в Р.2.8, что на входе такой линии имеется максимум напряжения и минимум тока и она действует аналогично параллельному резонансному контуру. При еще больших частотах, порядка 1000 Мгц и выше, резонансный элемент обычно представляет собой замкнутый короб или полость, поведение которой будет рассмотрено в этой работе. Таким путем можно построить резонансные структуры при частотах выше 300 Ггц (длина волны меньше одного миллиметра!).

Каковы ограничения системы обратной связи? При изучении частотной характеристики транзистора мы нашли, что зависимость комплексного усиления по току от частоты определяется выражением

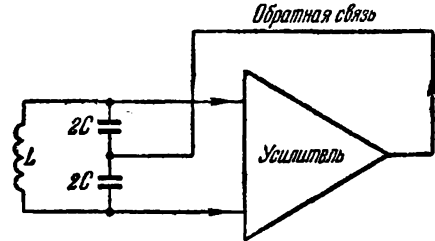


Рис. 1.

$$\beta = \frac{\beta_0}{1 + i\omega\tau}, \quad (1)$$

где  $\beta$  — усиление по току на низкой частоте, а  $\tau$  — время рекомбинации в базе. С увеличением частоты усиление по току падает и при частоте

$$\omega = \frac{\beta_0}{\tau} \quad (2)$$

становится равным единице. Вероятность рекомбинации в базе, равная  $1/\beta_0$ , должна быть точно равна отношению времени перехода  $\Delta t$  ко времени рекомбинации  $\tau$ :

$$\frac{1}{\beta_0} = \frac{\Delta t}{\tau}. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем соотношение

$$\omega = \frac{1}{\Delta t}, \quad (4)$$

которое устанавливает границу применимости обратной связи: максимальная частота для эффективной обратной связи — это частота порядка обратной величины времени пролета. Ограничения по времени пролета приобретают значение для электронных ламп при частотах выше 100 Мгц. Очень тщательное исполнение дало возможность построить микроволновые триоды с промежутком между сеткой и анодом, равным только 0,01 дюйма. Такие устройства эффективно использовались при частоте до 6,5 Ггц \*), но такая частота близка к верхнему пределу.

\*) См. С. L. Andrews, Physics Teacher 2, 55 (1964).

В 1939 г. Р. Х. и С. Ф. Вариан заявили об изобретении совершенно нового электронно-пучкового устройства, которое исключает ограничения по времени пролета. В работе их устройства (которые они назвали *клизотрон* — от греческого слова «клизо», что означает береговой волнорез) эффекты пролета играют существенную роль. На рис. 2 показан отражающий клизотрон с одной резонансной полостью (резонатором). Электроны излучаются оксидным катодом с косвенным накалом.

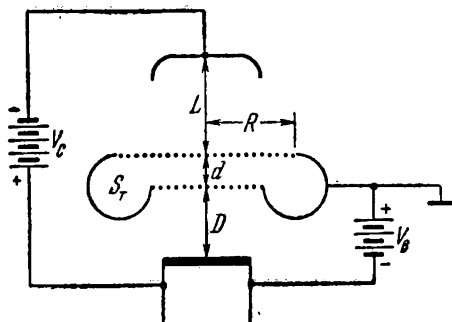


Рис. 2.

Потенциал катода приблизительно на  $V_B = 300$  в ниже потенциала резонатора, в направлении которого ускоряются электроны. Резонатор

проще всего рассматривать, как  $LC$ -контур. Емкость этого контура равна емкости между двумя близкими сетками, через которые проходят электроны. Индуктивность образуется раздвоенным тороидальным кольцом, которое соединяет две сетки. Емкость дается соотношением

$$C = \frac{1}{4\pi} \frac{S_c}{d}, \quad (5)$$

где  $d$  — расстояние между сетками, а  $S_c$  — их площадь. Индуктивность равна

$$L = \frac{1}{c} \frac{\Phi}{I}, \quad (6)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток в торе,  $I$  — полный ток, протекающий через тор. Приближенная формула для индуктивности имеет вид

$$L = \frac{2}{c^2} \frac{S_T}{R}, \quad (7)$$

где  $S_T$  — площадь поперечного сечения тора, а  $R$  — его радиус (см. рис. 2). Резонансная частота равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2\pi R d}{S_c S_T}} c. \quad (8)$$

Такой частоте соответствует длина волны в свободном пространстве

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} = \sqrt{2\pi \frac{S_c S_T}{R d}}. \quad (9)$$

При  $S_c$  и  $S_T$  порядка  $0,5 \text{ см}^2$ ,  $R$  порядка  $1 \text{ см}$ , а также  $d$  — около  $0,1 \text{ см}$  длина волны в свободном пространстве приблизительно равна  $3 \text{ см}$ . Частота резонатора регулируется изменением расстояния  $d$  между сетками.



Сближение сеток увеличивает емкость и уменьшает частоту.

Пройдя сетку, электроны попадают в район дрейфа, где замедляются под действием поля отражательного электрода, потенциал  $V_C$  которого приблизительно на 100 в ниже потенциала катода.

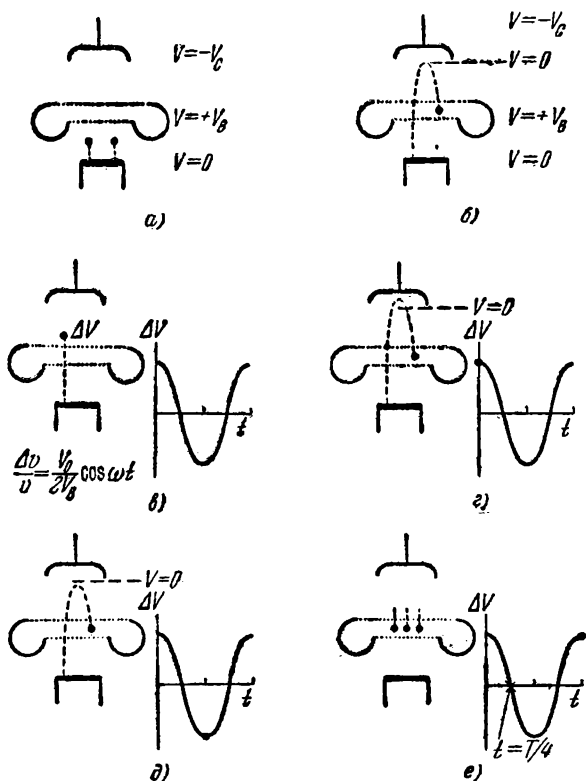


Рис. 3. Электроны испускаются горячим оксидным катодом и ускоряются по направлению к положительно заряженной сетке (а). Пройдя через сетку резонатора, они попадают в область дрейфа (с обратным направлением вектора напряженности электрического поля), тормозятся, а затем ускоряются и проходят вторично через сетки (б). Если в резонаторе существовали колебания  $\Delta V = V_0 \cos \omega t$ , то после прохождения через сетки (в) электроны будут промодулированы по скорости:  $\frac{\Delta v}{v} = \frac{V_0}{2V_B} \cos \omega t$ . Электроны, которые проходят через сетку в момент  $t = 0$ , соответствующий максимуму напряжения колебаний  $\Delta V = V_0$ , получают дополнительное ускорение, летят дальше и возвращаются к сеткам *позже* (г). Электроны, прошедшие через сетки в момент  $t = 1/2T$ , когда  $\Delta V = -V_0$ , слегка тормозятся полем между сетками, летят не так далеко и возвращаются к сеткам *раньше* (д). Электроны, проходящие через сетки в момент  $t = 1/4T$ , не испытывают действия поля между сетками, образуют электронные сгустки и, возвращаясь к сеткам, передают ему энергию, возбуждая его (е).

Электроны приобретают обратное направление, снова ускоряются и вторично проходят через сетки. Во время второго прохождения через сетки электроны отдают энергию резонатору, компенсируя энергию, рассеиваемую или излучаемую из него. Ясно, что колебания могут поддерживаться только в том случае, если электроны

при своем возвращении смогут добавить в контур больше энергии, чем они отобрали при первом прохождении. Принцип работы отражательного клистрона объясняется на рис. 3.

Чтобы изучить взаимодействие электронного сгустка и резонатора, построим диаграмму, определяющую положение электронов, оставляющих катод в различные моменты времени.

Перед рассмотрением полной диаграммы разберем частичные диаграммы в случае ускорения в постоянном поле между катодом

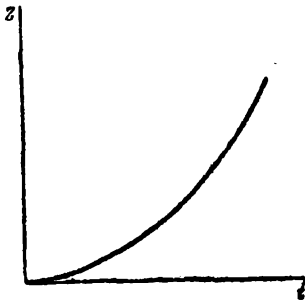


Рис. 4.

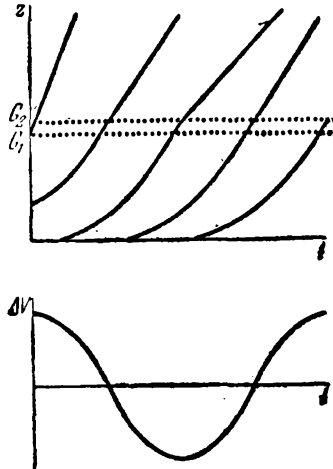


Рис. 5.

и сеткой, в высокочастотном поле между сетками, в области дрейфа и в высокочастотном поле между сетками при возвращении электронов. Для упрощения допустим, что поле, ускоряющее электроны от катода к сеткам, однородно и равно (см. рис. 2)

$$E = \frac{V_B}{D}. \quad (10)$$

Тогда скорость и положение электрона даются уравнениями

$$v = at = \frac{eE}{m} t, \quad (11)$$

$$z = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \quad (12)$$

(рис. 4). Электроны достигают сеток, обладая кинетической энергией

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = eV_B. \quad (13)$$

Между сетками  $G_1$  и  $G_2$  (рис. 5) действует высокочастотное напряжение

$$\Delta V = V_0 \cos \omega t. \quad (14)$$

В этой области электроны изменяют кинетическую энергию на величину

$$\Delta \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = mv \Delta v = e \Delta V = e V_0 \cos \omega t. \quad (15)$$

Итак, электроны выходят из сеток со скоростью, которая является синусоидальной функцией времени (момента прохождения через сетки), как показано на рис. 5. Те электроны, которые проходят через сетки, когда  $\Delta V$  положительно, ускоряются и получают энергию от высокочастотного поля. Те электроны, которые проходят между сетками, когда  $\Delta V$  отрицательно, замедляются и отдают энергию высокочастотному полю. Так как ток электронов постоянен, изменения энергии приблизительно балансируются.

В области дрейфа электроны движутся под действием замедляющего поля (рис. 2).

$$E = \frac{V_B + V_C}{L}. \quad (16)$$

В этом поле скорость и положение электрона определяются соотношениями

$$v = v_0 + \Delta v - \frac{e}{m} \frac{V_B + V_C}{L} t, \quad (17)$$

$$z = (v_0 + \Delta v) t - \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{V_B + V_C}{L} t^2, \quad (18)$$

где  $v_0$  взято из уравнения (13), а  $\Delta v$  — из (15). Координата  $z$  отсчитывается от положения сеток  $G_1$  и  $G_2$ . Электроны возвращаются к сеткам в момент времени, который можно определить из уравнения (18) подстановкой  $z = 0$ . Таким образом, мы получаем

$$t_0 = 2 (v_0 + \Delta v) \frac{m}{e} \frac{L}{V_B + V_C} \quad (19)$$

(см. рис. 6). Мы видим, что электроны с положительным  $\Delta v$  возвращаются к сеткам *позднее*, чем электроны с отрицательным  $\Delta v$ .

Наконец, на рис. 7 дана полная диаграмма для отражательного клистера, на которой показаны характерные электроны, проходящие через сетки каждую четверть периода колебаний резонатора. Заметьте, что при возвращении электронов сгустки образуются вокруг тех электронов, которые проходили через сетки при  $t = -\frac{3}{4} T$ , когда  $\Delta V$  было равно нулю и уменьшалось. Это происходит потому, что те электроны, которые проходят через сетки немного раньше, ускоряются так, что им надо больше времени, чтобы вернуться к сеткам, и они отстают. Те электроны, которые проходят через сетки немного позднее, замедляются, и им требуется меньше времени, чтобы вернуться к сеткам, поэтому они опережают сгусток электронов. При каких условиях электронные сгустки регенерируют

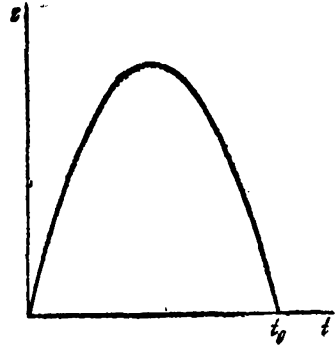


Рис. 6.

высокочастотное поле? Электронны, проходящие обратнo через сетки, когда  $\Delta V$  положительно, замедляются, сообщая энергию полю. Электронны, возвращающиеся через сетки при отрицательном  $\Delta V$ , ускоряются, отнимая энергию у поля. Таким образом, самой большой регенерации поля можно ожидать при прохождении электронных сгустков через сетки при  $t = nT$ .

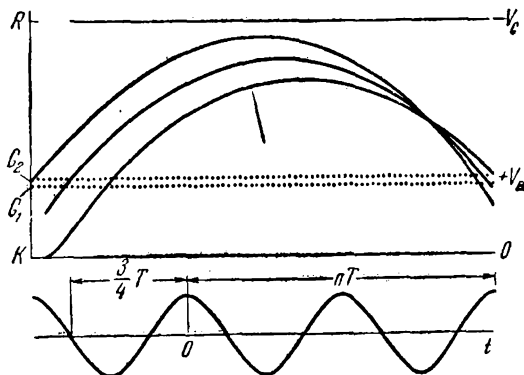


Рис. 7.

Регенерация будет максимальна тогда, когда общее время пролета электронов дается уравнением

$$t_0 = \left(n + \frac{3}{4}\right) T. \quad (20)$$

Подставляя значение  $t_0$  из (19), получаем

$$\left(n + \frac{3}{4}\right) T = 2v_0 \frac{m}{e} \frac{L}{(V_B + V_C)} \quad (21)$$

Используя равенство (13), получаем, наконец, соотношение между  $V_B$  и  $V_C$ :

$$n + \frac{3}{4} = 4 \frac{(V_A V_B)^{1/2}}{(V_B + V_C)}, \quad (22)$$

где  $V_A$  — приблизительно постоянная, характеризующая прибор и выражающаяся через

$$eV_A = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{T}\right)^2. \quad (23)$$

Уравнение (22) дает семейство кривых, которые называются модами колебаний клистрона и обозначаются номером моды  $n$ . Уравнение (22) выражает условие максимальной регенерации, которое соответствует максимальной выходной мощности. Для напряжений, отличных от напряжений, соответствующих максимуму колебаний данной моды, все еще можно получить колебания, но на

уменьшенном уровне. Если мы выходим слишком далеко от максимума кривой, регенерация оказывается недостаточной для поддержания колебаний и клистрон перестает работать. Для каждой моды колебаний мы получаем кривую выходной мощности  $P$  в зависимости от напряжения на отражателе  $V_C$ , показанную на рис. 8. Если бы не было потерь в резонаторе и нагрузке, интервал  $V_C$  соответствовал бы интервалу времен пролета  $t_0 = \pm T/4$ . Это дало бы нам ширину области колебаний данной моды, которая грубо была бы равна половине расстояния между центрами мод. Из-за потерь энергии в резонаторе и нагрузке ширины мод немного уже.

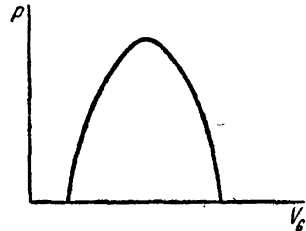


Рис. 8.

На рис. 9 дан график уравнения (22) для клистронов типа 723 А/В. Показаны величины  $V_B$  и  $V_C$ , соответствующие центрам различных мод колебаний для

определенной величины  $V_A$ , которая соответствует определенной рабочей частоте. При изменении частоты клистрона за счет регулирования расстояния между сетками кривые слегка сдвигаются.

Отражательный клистрон 723 А/В, который работает в диапазоне 8,5—9,66 Гц (длины волн 3,5—3,1 см), является распространяемым низковольтным клистроном. На рис. 10 показана принципиальная схема клистрона 723 А/В, подсоединенного к источнику питания. Отражатель подключен к источнику питания через сопротивление

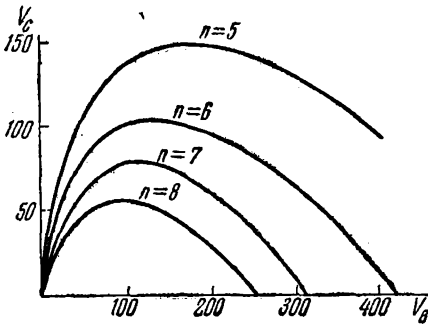


Рис. 9.

1 Мом. Конденсатор 0,01 мкф соединяет отражатель со входным гнездом для модуляции. Подавая напряжение модуляции в это гнездо, можно изменить напряжение отражателя  $V_C$ . Наиболее удобным источником напряжения модуляции является пилообразное напряжение горизонтальной развертки (ГР) осциллографа.

Чтобы привести клистрон в действие, сначала необходимо включить цепь накала нити и подождать около минуты. Включите рабочие напряжения при положении регуляторов  $B^+$  и  $C^-$  примерно в середине их диапазона. Регулируйте питание  $B^+$  в пределах 300 в, а  $C^-$  — в пределах 100 в. Ток клистрона должен быть приблизительно 25 ма. Если ток не достигнет этой величины за несколько минут, возможно, понадобится заменить клистрон.

Микроволновая энергия выводится из клистрона 723 А/В с помощью петли связи, которая введена в индуктивную часть резонатора. Микроволновый ток течет по коаксиальному выходному

выводу к выходной антенне. Выходная антенна соединяется с волноводом, который в свою очередь может быть связан с выходным излучателем (рупором) (рис. 11). Микроволновая энергия может восприниматься приемным рупором и детектироваться микроволновым диодом 1N23. В этом эксперименте нас прежде всего будут интересовать моды колебаний клистрона 723 А/В. В последующих экспериментах мы рассмотрим распространение микроволн.

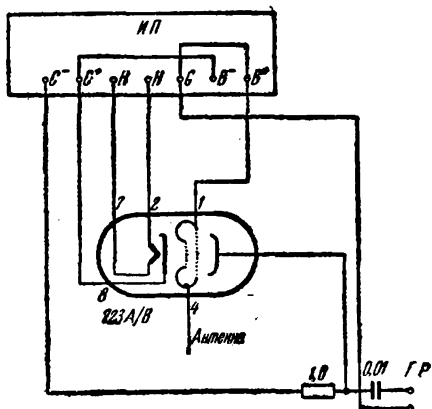


Рис. 10.

моды колебаний мы ожидаем максимума выходной энергии вблизи центра моды колебания, как показано на рис. 8. Таким образом, можно ожидать появления на осциллографе кривой, аналогичной кривой рис. 12, б, представляющей собой график выходной энергии  $P$  клистрона как функции напряжения на отражателе. Заметьте, что в центре каждой моды колебания клистрон работает на резонансной частоте своего объемного резонатора  $\nu_0$  (рис. 12, а). Если мы увеличим величину  $V_C$ , сгустки электронов возвратятся к сеткам  $G_1$  и  $G_2$  скорее и возбуждают объемный резонатор на частоте более высокой, чем  $\nu_0$ . И, наоборот, если мы уменьшим величину  $V_C$ , электроны вернуться позднее и возбуждают резонатор на частоте более низкой, чем  $\nu_0$ . Итак, возможно небольшое изменение частоты каждой моды колебаний клистрона. Для клистрона 723 А/В интервал частот между точками половинной мощности, называемый *электронным диапазоном настройки*, составляет около 45 Мгц.

Регулируя напряжение отражателя  $V_C$ , изменяя напряжение горизонтальной развертки, можно сцентрировать одну из мод

Подайте сигнал из приемного рупора на катодный осциллограф по схеме рис. 11. При использовании пилообразного напряжения горизонтальной развертки осциллографа напряжение на отражателе  $V_C$  изменяется синхронно с этим напряжением.

Представим себе, что напряжение  $V_B$  равно 100 в. Если мы меняем напряжение отражателя  $V_C$  от 50 до 150 в, то, как видно из рис. 9, мы пройдем через  $n = 8, 7, 6$  и 5 моды колебаний. Для каждой

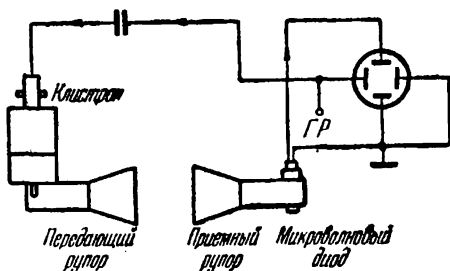


Рис. 11.

колебаний на развертке осциллографа. Теперь можно зафиксировать величины  $V_B$  и  $V_C$  для этого вида колебаний. Можно постепенно изменять  $V_B$  и производить соответствующие изменения в  $V_C$ ,

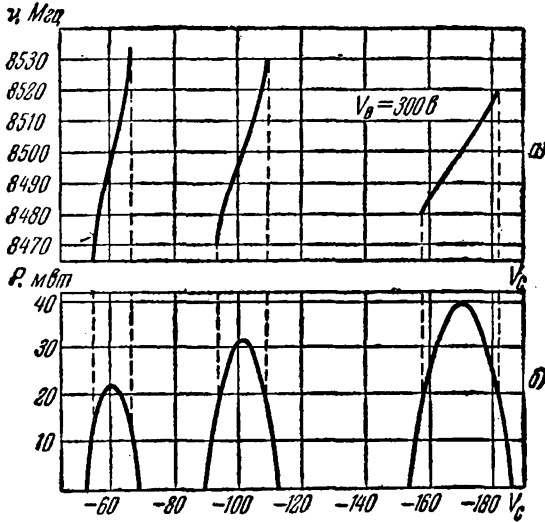


Рис. 12.

чтобы сохранять центровку данной моды колебаний на развертке. Таким путем можно получить график для одной из мод колебаний. Повторите эту процедуру для всех мод колебаний, которые вы сможете обнаружить.

Составьте график семейства кривых, аналогичных кривым на рис. 9.

Можно ли использовать это семейство кривых для определения индекса  $n$  моды колебаний, соответствующего каждой кривой? Простой способ такого определения показан ниже на рис. 13. Взяв полученные данные для колебаний клистрона, проведите линию с соответствующим наклоном. Если мы запишем уравнение этой линии в виде

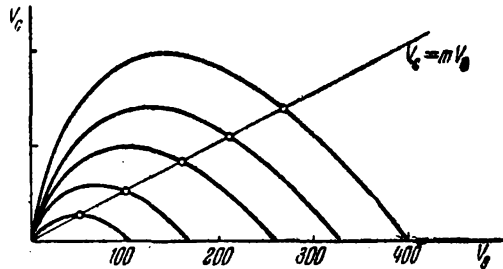


Рис. 13.

$V_C = mV_B$ , (24)

то подстановкой в уравнение (22) получим

$$\frac{1}{\sqrt{V_B}} = \frac{1+m}{4\sqrt{V_A}} \left( n + \frac{3}{4} \right). \quad (25)$$

Теперь мы можем составить график величины  $1/\sqrt{V_B}$ , разделенный равными интервалами, и произвести линейную экстраполяцию, как показано на рис. 14. Линия должна пересекать ось абсцисс при  $n = -\frac{3}{4}$ , что дает возможность установить индексы мод колебаний.

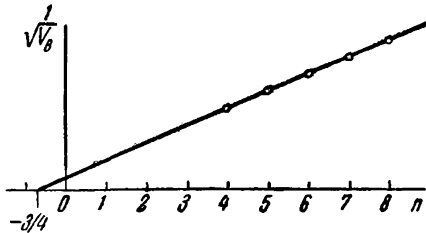


Рис. 14.

Возможно вас удивит то, что линейность, полученная на рис. 14, гораздо лучше, чем согласование кривых мод колебаний с уравнением (22). Как вы это объясните? Основной причиной нарушения соответствия между модами колебаний и уравнением (22) является упрощающее предположение об однородном замедляющем поле между сеткой и отражателем. Поскольку размер отражателя ограничен, замедляющее поле будет неоднородным, причем неоднородность зависит от размера и формы отражателя. Однако, если мы одинаковым образом изменим масштаб  $V_B$  и  $V_C$ , траектория электрона не изменится. Электрон повернет обратно точно в том же месте. Это значит, что общее время пролета должно изменяться как  $1/v$ , или, что эквивалентно, как  $1/\sqrt{V_B}$ .

Так как время пролета для различных видов колебаний пропорционально  $(n + \frac{3}{4})$ , можно заключить, что линейная зависимость, показанная на рис. 13, не является следствием каких-либо особых предположений относительно формы поля.

Используйте данные рис. 14 для вычисления  $V_A$ . Вычислите расстояние  $L$  от сеток до отражателя и сравните его с измерениями на ненагруженном клистроне 723 А/В.

Используйте данные рис. 14 для вычисления  $V_A$ . Вычислите расстояние  $L$  от сеток до отражателя и сравните его с измерениями на ненагруженном клистроне 723 А/В.

### Приложение 2.9. Акустические преобразователи

Чтобы получить акустические волны с длиной порядка 1 см, необходимо работать на частотах, которые значительно выше обычных звуковых, иными словами — в сверхзвуковом диапазоне.

Скорость звука в воздухе при 20 °С равна  $3,44 \cdot 10^4$  см/сек, и длине волны в 1 см соответствует частота

$$v = \frac{u}{\lambda} = 34,4 \text{ кГц.} \quad (26)$$

Для изучения распространения звука в этом частотном диапазоне нам понадобится устройство для преобразования звуковой энергии в электрическую и второе устройство для обратного преобразования. Такие устройства называются преобразователями. Ультразвуковой преобразователь стандартного типа показан на рис. 15. Это устройство представляет собой цилиндр из титаната



бария, который является материалом с постоянным электрическим дипольным моментом. Титанат бария можно поляризовать в радиальном направлении. Для этого между электродами на наружной и внутренней поверхности цилиндра следует приложить разность потенциалов. Когда температура охлаждаемого цилиндра пройдет через  $120^{\circ}\text{C}$ , возникнет поляризация. Замечательным свойством титаната бария является его способность укорачиваться при наложении потенциала, совпадающего с направлением поляризации. Если приложить потенциал противоположного знака, цилиндр удлинится. Прилагая переменный потенциал между внутренней и наружной поверхностями, можно использовать цилиндр с пластиной на конце в качестве акустического излучателя.

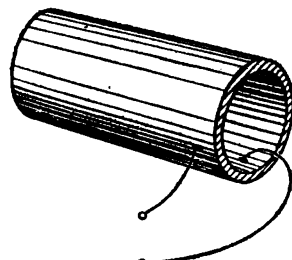


Рис. 15.

Под действием продольного сжатия между наружным и внутренним электродом цилиндра возникает разность потенциалов. При растяжении цилиндра разность потенциалов меняет знак. Поэтому цилиндр из титаната бария можно использовать как акустический приемник. Такие преобразователи успешно работают на частотах до  $100\text{ кГц}$ .

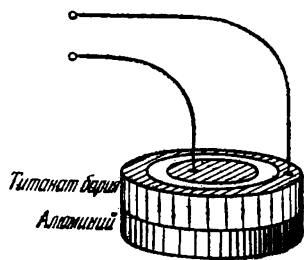


Рис. 16.

Недавно был разработан очень простой и недорогой ультразвуковой дисковый преобразователь для дистанционного управления телевизионными приемниками \*). Его устройство показано на рис. 16. Преобразователь состоит из диска, изготовленного из титаната бария и соединенного с ним алюминиевого диска. Пара электродов, один в центре и один по краю, наносятся на титанат

бария с помощью испарения. Устройство поляризуется с помощью этих электродов, как было описано выше. Теперь, если мы приложим потенциал между электродами, диск изогнется. Направление изгиба зависит от знака потенциала. И, наоборот, если мы изогнем диск, между выводами возникнет разность потенциалов.

Еще одним интересным свойством преобразователя является исключительно узкая резонансная кривая. Эти устройства, имеющие около  $2\text{ см}$  в диаметре, резонируют приблизительно при  $40\text{ кГц}$  и имеют акустическую добротность около 200. Высокая акустическая добротность связана с колебанием алюминиевого диска, к которому присоединен титанат бария. Алюминиевый диск колеблется таким образом, что в движении находятся только его край и центральная часть. Крутящие моменты возникают у узлов,

\*) Malcolm Correll, Amer. J. Phys. 32 (1964).

которые находятся на расстоянии около  $1/\sqrt{2}$  расстояния до края. Частота таких колебаний дается уравнением

$$\nu \cong \frac{ut}{2a^2}, \quad (27)$$

где  $u = 6,26 \cdot 10^5$  см/сек — скорость звука в алюминии,  $t \cong 0,1$  см — толщина диска,  $a \cong 1$  см — его радиус. (Заметьте, что основная частота колебаний тонкого диска обратно пропорциональна квадрату его радиуса.)

При анализе поведения звукового преобразователя очень полезно представить преобразователь эквивалентной схемой. Приближенная эквивалентная схема дискового преобразователя показана на рис. 17.

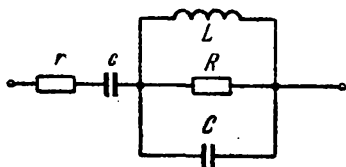


Рис. 17.

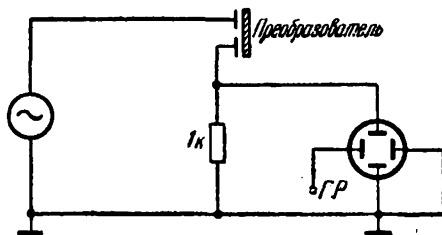


Рис. 18.

При очень низких частотах основную роль играет реактивное сопротивление емкости  $c$ , которая близка к  $850$  нф и является просто емкостью между электродами на поверхности титаната бария.

Благодаря очень высокой диэлектрической постоянной титаната бария ( $\epsilon \cong 3000$ ) мы получаем необычно большую емкость. При очень высоких частотах импеданс становится активным за счет потерь, которые возникают главным образом в диэлектрике титаната бария. Вблизи резонансной частоты параллельного резонансного контура

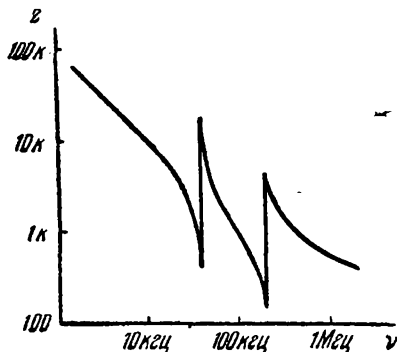


Рис. 19.

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (28)$$

импеданс определяется параллельным сопротивлением  $R$  контура. Сопротивление  $R$  соответствует излучению звуковой энергии. Конденсатор  $C$  и индуктивность  $L$  характеризуют механические свойства системы и соответствуют потенциальной и кинетической энергии вибрирующего диска. Импеданс преобразователя как функцию частоты можно определить с помощью схемы, показанной на рис. 18.

Так как импеданс устройства реактивен, вы измерите главным образом реактивную часть импеданса параллельного резонансного контура. Таким путем вы можете определить резонансную частоту преобразователя. Вы можете также найти второй резонанс при частоте приблизительно в четыре раза большей, чем основная, как показано на рис. 19. Этот резонанс является следующей гармоникой, в которой имеется два радиальных узла, что иллюстрируется рис. 20, б. Характер колебаний основной частоты показан на

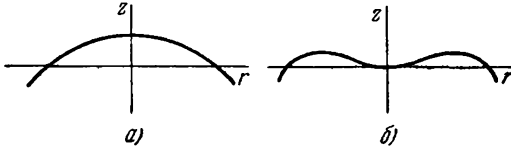


Рис. 20.

рис. 20, а. Кроме этого, вы сможете заметить, вероятно, дюжину других слабых резонансов в интервале частот до 1 МГц. Эквивалентный контур, изображенный на рис. 17, соответствует только основному резонансу. Мы можем учесть и более высокие гармоники, добавив ряд дополнительных параллельных резонансных контуров.

Из измерения импеданса как функции частоты вы сможете найти  $r$ ,  $s$ ,  $R$  и  $\nu_0$ . Поскольку резонанс очень острый, вы, вероятно, не сможете определить его ширину, что позволило бы вычислить

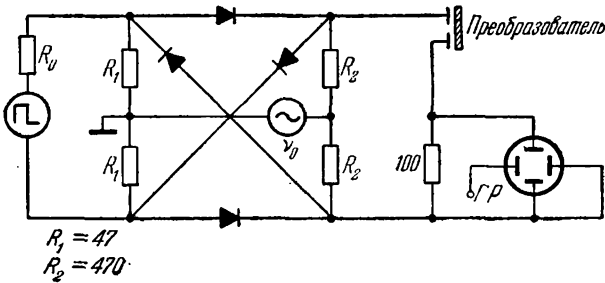


Рис. 21.

$L$  и  $C$  по отдельности. Однако используя метод, представленный в Р.1.10, можно наблюдать затухание колебаний. В этой работе диодная мостовая схема была использована в качестве «ключа» для прямоугольного сигнала. Когда преобразователь работает в резонансе, можно наблюдать переходное нарастание и переходное затухание колебаний. Мостовая схема дана на рис. 21. Когда возбуждение выключено, вы можете наблюдать переходное затухание в форме

$$V = V_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_0 t. \tag{29}$$

Можно измерить время релаксации  $\tau$  и вычислить добротность  $\mathcal{Q}$  из соотношения

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} \omega_0 \tau. \quad (30)$$

Наконец,  $L$  и  $C$  можно вычислить из равенств

$$\mathcal{Q} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC. \quad (31)$$

Заметьте, что величина (31) обратна величине (20) в Р.1.8. Мы имели там дело с сопротивлениями, соединенными последовательно с индуктивностью  $L$ . Здесь мы вместо этого представляем потери с помощью сопротивления, включенного параллельно индуктивности  $L$ . Такое представление потерь предпочтительно при работе с параллельными резонансными контурами. Какое количество энергии вы можете излучить при напряжении 10 в на преобразователе, если считать, что при резонансе вся энергия, рассеянная в  $R$ , переходит в звук?

Попробуйте определить параметры контура для резонанса около 160 кГц. Сравните величины  $L$ ,  $R$  и  $C$  для двух видов колебаний. Какой вывод можно сделать из этого сравнения?

### Работа 2.10. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МИКРОВОЛН

Здесь будет рассмотрено распространение электромагнитных волн в свободном пространстве и их отражение от проводящих поверхностей. Излучение микроволн особенно удобно изучать в ла-

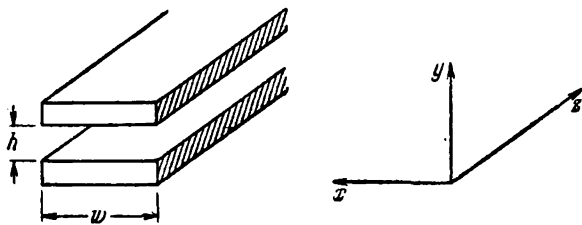


Рис. 1.

боратории вследствие малости длины волны. В приложении к этой работе мы опишем соответствующие эксперименты со звуковыми волнами сравнимой длины.

В Р.2.8 мы уже изучали распространение электромагнитных волн по ленточной линии. Рассмотрим симметричную ленточную линию, представленную на рис. 1. Как мы уже видели, ее емкость на единицу длины линии равна

$$C' = \frac{\omega}{4\pi h}, \quad (1)$$

а индуктивность на единицу длины

$$L' = \frac{4\pi}{c^2} \frac{h}{w}. \quad (2)$$

Если через  $V$  обозначить напряжение между пластинами, то из уравнения (19) Р.2.6 следует

$$C' \frac{dV}{dt} = - \frac{dI}{dz}. \quad (3)$$

Это выражение просто отражает факт сохранения заряда. Воспользовавшись уравнением (15) Р.2.6, можно написать

$$L' \frac{dI}{dt} = - \frac{dV}{dz}. \quad (4)$$

Это равенство представляет собой предел контурного уравнения для непрерывной линии. Взяв производную по времени от обеих частей уравнения (3) и воспользовавшись уравнением (4), получаем

$$C' \frac{d^2V}{dt^2} = - \frac{d}{dt} \frac{dI}{dz} = - \frac{d}{dz} \frac{dI}{dt} = \frac{L'}{L'} \frac{d^2V}{dz^2}. \quad (5)$$

Подставляя сюда значения  $C'$  и  $L'$  из уравнений (1) и (2), получаем окончательно

$$\frac{d^2V}{dt^2} = c^2 \frac{d^2V}{dz^2}. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) является волна произвольной формы, идущая налево или направо со скоростью  $c$ :

$$V(z, t) = V_1(z - ct) + V_2(z + ct). \quad (7)$$

С волной напряжения связана волна тока

$$I(z, t) = cC' [V_1(z - ct) - V_2(z + ct)], \quad (8)$$

которую можно получить из уравнения (3) или (4).

Имеется и другой способ написания уравнений (3) и (4). Вместо того, чтобы писать их через напряжение между лентами и текущие в них токи, можно написать уравнения, связывающие электрическое поле  $E_y$  между лентами и магнитное поле  $B_x$ . Поля связаны с током и напряжением следующим образом:

$$E = - \frac{V}{h}, \quad B = \frac{4\pi}{c} \frac{I}{w}. \quad (9)$$

Исключая  $V$  и  $I$ , получаем

$$\frac{dE}{dt} = c \frac{dB}{dz}, \quad (10)$$

$$\frac{dB}{dt} = c \frac{dE}{dz} \quad (11)$$

для уравнений, связывающих  $B$  и  $E$ . Заметьте, что вид уравнений (10) и (11) не зависит явно от размеров ленточной линии. На-

пример, мы можем представить, что  $\omega$  и  $h$  бесконечно велики. Тогда бы мы получили описание полей в свободном пространстве. Эти

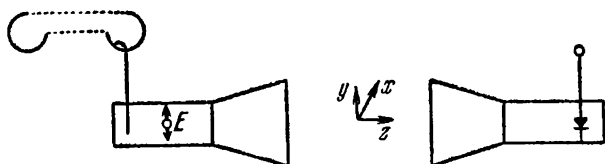


Рис. 2.

уравнения являются, в упрощенной форме, уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. Они приводят к решениям в виде

$$E(z, t) = E_1(z - ct) + E_2(z + ct), \quad (12)$$

$$B(z, t) = -E_1(z - ct) + E_2(z + ct). \quad (13)$$

Уравнения (12) и (13) описывают *плоские волны*. Для плоской волны векторы электрического и магнитного полей равны по величине и лежат в плоскости, нормальной к направлению распространения волны. Можно обобщить уравнения (10) и (11) для описания более сложных полей. Для наших целей в настоящее время достаточно описания с помощью плоских волн.

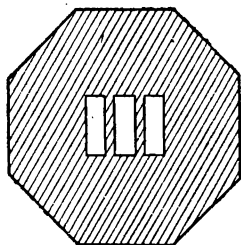


Рис. 3.

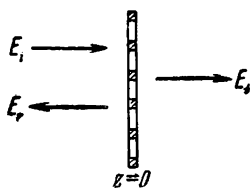


Рис. 4.

В Р.2.9 мы уже регистрировали электромагнитное излучение, используя устройство, показанное на рис. 2. Источник излучения — резонатор клистрона. Переменное магнитное поле в полости индуцирует напряжение в маленькой петле связи. Микроволновые токи текут по штырю, который излучает в волновод. Вертикальные токи создают вертикальное электрическое поле  $E_y$  и горизонтальное магнитное поле  $B_x$ . Эти поля распространяются по волноводу и, в конечном счете, излучаются из рупора. На достаточно большом расстоянии от излучающего рупора волны можно считать плоскими.

Мы начнем изучение распространения волн с исследования многократного отражения электромагнитных волн от пары частично прозрачных плоскопараллельных пластин. Такие пластины легче всего изготовить из алюминиевого листа, пробив в нем ряд пазов, как показано на рис. 3. Если пазы вертикальны, вертикальное электрическое поле вызывает токи в полосках между пазами. Эти токи вызывают поле излучения, которое в большой степени гасит первоначальное поле в направлении распространения волны, а

также генерируют отраженную волну. Только небольшая часть падающей волны проникает через пазы. При расстоянии в 3 мм между пазами и ширине пазов в 6 мм через пластину передается около 10 процентов начальной мощности. Поместите пластину с пазами между передающим и принимающим рупорами так, чтобы пазы были вертикальны, и измерьте долю передаваемого сигнала. Поворачивайте пластину до тех пор, пока пазы не примут горизонтальное положение. Можете ли вы объяснить, почему теперь ленты гораздо менее эффективно ослабляют микроволны?

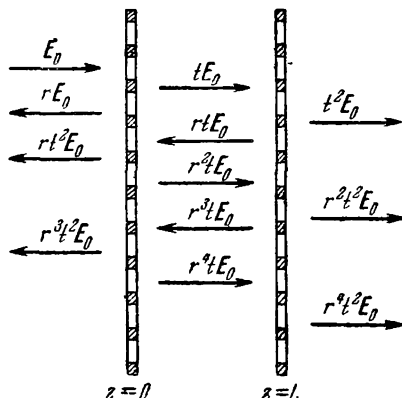


Рис. 5.

Теперь возьмите пару пластин с вертикальными пазами и исследуйте, как передаваемая энергия зависит от расстояния между пластинами. Вы обнаружите периодические максимумы в передаваемой мощности. Как объяснить наличие этих максимумов? Для одной пластины с пазами, изображенной на рис. 4, мы имеем падающее электрическое поле

$$E_i = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (14)$$

отраженное поле

$$E_r = -rE_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad (15)$$

и проникшее через пластину поле

$$E_t = tE_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right). \quad (16)$$

Из закона сохранения энергии имеем

$$r^2 + t^2 = 1. \quad (17)$$

Как можно описать действие пары аналогичных пластин с пазами? Существуют два способа решения этой проблемы. Первый — через многократное отражение парциальных волн. Этот способ применим только, пока пластины не имеют потерь. Чтобы упростить математический расчет, мы используем комплексные переменные и в окончательном результате возьмем действительную часть.

На рис. 5 показаны две параллельные пластины, отстоящие друг от друга на расстояние  $L$ . Если у нас есть начальное поле  $E_0$ , то переданное поле можно записать так:

$$E_T = t^2 E_0 e^{i\omega(t - z/c)} (1 + r^2 e^{-2i\omega L/c} + r^4 e^{-4i\omega L/c} + \dots). \quad (18)$$

Уравнения (18) содержат бесконечный ряд, сумма которого вычисляется как сумма геометрической прогрессии

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots = \frac{1}{1 - \alpha}. \quad (19)$$

Таким образом, мы получаем

$$E_T = \frac{e^{i(\omega t - z/c)}}{1 - r^2 e^{-2i\omega L/c}} t^2 E_0, \quad (20)$$

причем только действительная часть уравнения (20) имеет значение. Заметьте, что, когда показатель степени в знаменателе удовлетворяет соотношению

$$\frac{2\omega L}{c} = 2\pi n, \text{ или } L = \frac{1}{2} n \lambda_0, \quad (21)$$

мы получаем

$$E_T = \frac{t^2}{1 - r^2} E_0 e^{i\omega(t - z/c)} = E_0 e^{i\omega(t - z/c)}. \quad (22)$$

В этом случае имеет место полная передача энергии через пластины, как если бы никаких пластин не было. Для других расстояний такого гашения в знаменателе нет, и доля переданного поля определяется членом  $t^2 E_0$ .

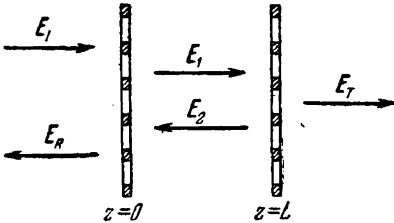


Рис. 6.

Другой способ решения этой задачи заключается в следующем: представим, что у нас есть пять волн, как показано на рис. 6. Условия, которые связывают эти волны, — это так называемые «граничные условия» на двух пластинах. Анализ рис. 6

упрощается, если рассматривать свободное пространство как линию передачи с характеристическим сопротивлением  $R_0$ , а каждую пластину — как емкость  $C$  на линии (см. рис. 7).

Волна, падающая слева, будет частично пропущена и частично отражена. В промежутке между пластинами будут волны, распространяющиеся как направо, так и налево. При  $z = 0$  и  $z = L$  граничное условие заключается в том, что напряжение непрерывно, а ток имеет скачок, равный  $I = C dV/dt$ , т. е. току через шунтирующий конденсатор. Таким образом, мы можем написать четыре уравнения, которые позволяют определить  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_R$  и  $E_T$  через  $E_0$ . Этот путь несколько длинен, и здесь мы не будем ему следовать. Результаты идентичны с результатами, полученными для парциальных волн, до тех пор, пока нет потерь, которые связывают волны.

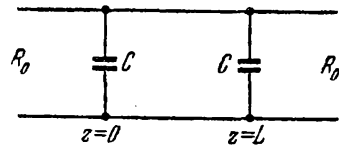


Рис. 7.



Полностью, а не по аналогии, задача для свободного пространства может быть решена через электрические и магнитные поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Уравнения непрерывности напряжения и тока должны быть заменены уравнениями непрерывности  $E$  и  $B$ .

При изменении расстояния между пластинами максимумы передачи мощности соответствуют расстояниям, составляющим  $1/2$ ;  $1$ ;  $3/2$ ;  $2$ ... длины волны  $\lambda$  в свободном пространстве. Определите длину волны в свободном пространстве и вычислите частоту по нескольким положениям пластин.

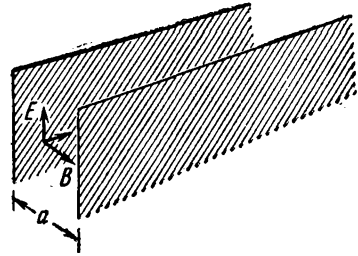


Рис. 8.

Теперь рассмотрим распространение электромагнитных волн в канале, показанном на рис. 8. Плоская электромагнитная волна не может распространяться в таком канале, поскольку электрическое поле у поверхности металла должно равняться нулю. Волну в таком канале можно рассматривать как наложение двух плоских волн.

Чтобы показать это, возьмем две плоские волны с волновыми векторами  $\hat{n}_1$  и  $\hat{n}_2$ , направленными под углами  $+\vartheta$  и  $-\vartheta$  к оси  $z$ , как изображено на рис. 9. Электрическое поле можно записать так:

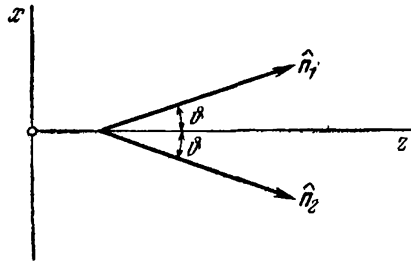


Рис. 9.

$$E_y = E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{\hat{n}_1 \cdot \hat{r}}{\lambda_0}\right) + E_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{\hat{n}_2 \cdot \hat{r}}{\lambda_0}\right). \quad (23)$$

Скалярные произведения, содержащие волновые векторы, можно записать следующим образом:

$$\hat{n}_1 \cdot \hat{r} = z \cos \vartheta + x \sin \vartheta, \quad (24)$$

$$\hat{n}_2 \cdot \hat{r} = z \cos \vartheta - x \sin \vartheta. \quad (25)$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B), \quad (26)$$

можно выразить электрическое поле в виде

$$E = 2E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z \cos \vartheta\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \vartheta\right). \quad (27)$$

Заметьте, что электрическое поле равно нулю при условии

$$x \sin \vartheta = \pm \frac{1}{4} \lambda_0 \quad (28)$$

и если длина волны вдоль канала равна

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \vartheta}. \quad (29)$$

Итак, мы можем распространять электромагнитную энергию по каналу с шириной  $a$  следующим образом. Мы вводим плоскую электромагнитную волну в канал с наклоном  $+\vartheta$  к направлению канала, причем

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda_0}{2a}, \quad (30)$$

как показано на рис. 10.

Исходя из построения Гюйгенса для волнового фронта, можно убедиться, что отражение от стенок канала вызывает аналогичную волну с волновым вектором, направленным под углом  $-\vartheta$ . Интерференция между двумя волнами создает затем электрическое поле, выраженное уравнением (27). Исключая  $\vartheta$  из уравнений (29) и (30),

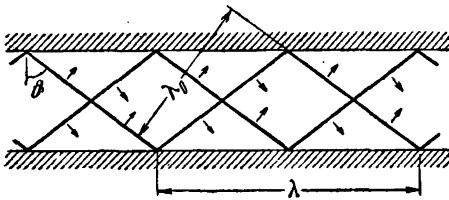


Рис. 10.

мы можем связать длину волны в канале  $\lambda$  с длиной волны в свободном пространстве  $\lambda_0$  и шириной  $a$ :

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2. \quad (31)$$

Имеется и другой путь получения уравнения (27), который следует из уравнения для волн на листах, т. е. из уравнения (37) П.2.8. Как мы уже видели, можно заменить заряд  $Q$  напряжением  $V$  и напряжение  $V$  электрическим полем  $E$  и получить для свободного пространства

$$\frac{d^2 E}{dz^2} = c^2 \left( \frac{d^2 E}{dx^2} + \frac{d^2 E}{dt^2} \right). \quad (32)$$

Предположим, что электрическое поле можно записать в виде

$$E = E(x) \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right). \quad (33)$$

Если мы подставим решение (33) в уравнение (32) и упростим наши результаты, то получим

$$\left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{d^2 E(x)}{dx^2} = \left( \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) E(x). \quad (34)$$

Мы ищем решение с условием, что  $E(x) = 0$  при  $x = \pm a/2$ . Простейшее решение есть

$$E(x) = E_0 \cos \frac{\pi x}{a}. \quad (35)$$

Подстановкой в уравнение (34) получаем выражение, идентичное уравнению (31). Поле  $E$ , полученное таким путем, совпадает с по-

лем (27). Способ многократно отраженных плоских волн можно использовать только в том случае, когда волна ограничена плоскими отражающими поверхностями. Второй способ, который использует волновое уравнение, является более общим.

Чтобы измерить длину волны в канале, применим устройство, изображенное на рис. 11. Мы используем пластины с пазами и, кроме того, пару экранов для ограничения бокового распространения волн. Найдите различные комбинации расстояний между пластинами  $1/2\lambda$  и расстояний между экранами  $a$ , которые приводят к передаче энергии.

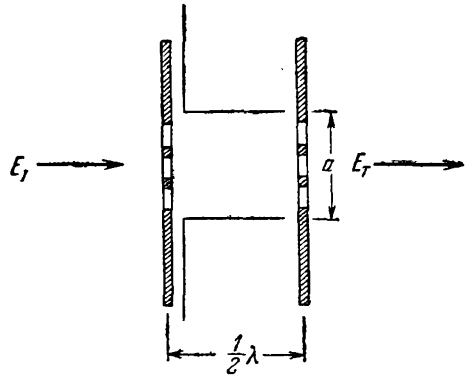


Рис. 11.

Можете использовать экраны различной длины, чтобы получить набор значений. Пластины с пазами не должны находиться в тесном контакте с экранами, так чтобы можно было получить несколько условий передачи с одним набором экранов. Все ваши данные должны удовлетворять уравнению (31). Чтобы проверить это, постройте график, форма которого дана на рис. 12, где  $1/(2a)$  и  $1/\lambda$  — координаты каждой точки. Точки должны лежать на окружности с радиусом  $1/\lambda_0$ .

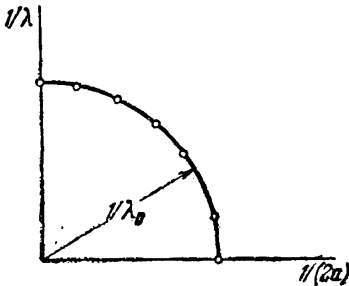


Рис. 12.

Мы видим, что по мере уменьшения ширины канала  $a$  длина волны в канале увеличивается, пока ширина  $a$  не станет равной  $1/2\lambda_0$ ; для этой ширины  $\lambda$  становится бесконечной. Для значений  $a$ , меньших  $1/2\lambda_0$ , уравнение (31) приводит к мнимым значениям  $\lambda$ . Ситуация аналогична той, с которой мы встречались в случае сосредоточенной линии в Р.2.7, где мы обнаружили, что существует максимальная частота  $\omega_{кр}$  для распространения волны по линии. При более высоких частотах напряжение падало экспоненциально.

В нашем случае существует максимальная длина волны  $\lambda_{кр} = 2a$  для колебаний, распространяющихся по каналу. Для больших длин волн можно по аналогии ожидать экспоненциального затухания поля в соответствии с выражением

$$E = E_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \omega t e^{-kz}. \quad (36)$$

Подстановкой в уравнение (32) получаем

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2 - \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2. \quad (37)$$

Это выражение заменяет уравнение (31) за границей пропускания.

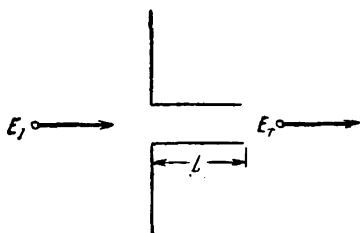


Рис. 13.

Будем пропускать через пару экранов волны с электрическим полем, нормальным по отношению к плоскости листа (рис. 13). Постепенно сокращайте расстояние между пластинами, следя за тем, чтобы пластины оставались параллельными. Повторите это измерение с экранами разной длины  $L$ . Заметьте, что у более длинных экранов граница пропускания гораздо резче, что подтверждает экспоненциальный характер решения (36).

Измерение границы пропускания дает дополнительный способ определения длины волны в свободном пространстве  $\lambda_0$ .

Наконец, интересно рассмотреть вопрос о фазовой и групповой скорости распространения микроволн в канале. Из уравнения (29) следует, что длина волны в канале равна

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\cos \vartheta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \quad (38)$$

По мере приближения  $\lambda_0$  к  $2a$  угол  $\vartheta$  стремится к  $\pi/2$ , а длина волны — к бесконечности. Скорость волны можно вычислить, умножая длину волны на частоту  $\nu$ . Таким образом, бесконечная длина волны предполагает бесконечную скорость. Но эта вычисленная скорость является только фазовой скоростью

$$v_\varphi = \lambda \nu = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}, \quad (39)$$

которая представляет собой чисто геометрическую величину.

Тот факт, что она стремится к бесконечности, конечно, не означает, что мы можем подавать сигналы с бесконечно большой скоростью.

Как мы уже видели в П.2.7, скорость, которая связана с передачей сигнала, является скоростью потока энергии. Эта скорость называется групповой скоростью. Из рис. 7 и 8 ясно, что скорость потока энергии равна скорости света, умноженной на  $\cos \vartheta$ :

$$v_g = c \cos \vartheta = c \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}. \quad (40)$$

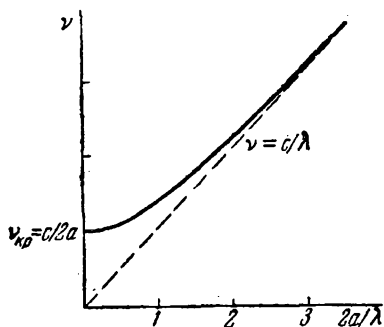


Рис. 14.

На рис. 14 представлен график зависимости частоты от  $1/\lambda$ . Фазовая скорость дается наклоном хорды, а групповая скорость — наклоном касательной к кривой. Сопоставьте этот рисунок с рис. 10 в П. 2.7, где границей распространения была максимальная частота. В данном случае частоты распространения имеют нижнюю границу.

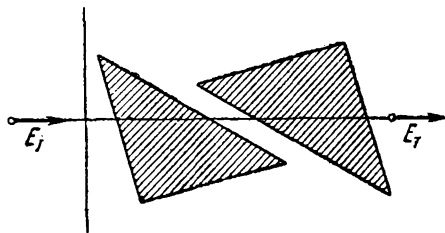


Рис. 15.

Соответствующую демонстрацию экспоненциального затухания можно осуществить с двумя  $45^\circ$  парафиновыми призмами в условиях полного внутреннего отражения, как показано на рис. 15 \*). При приближении второй призмы к первой можно наблюдать значительное усиление передаваемого сигнала. Объяснение этого явления предоставляется студентам.

### Приложение 2.10. Распространение звука

Пользуясь парой акустических дисковых преобразователей, описанных в П.2.9, можно изучать распространение ультразвуковых волн. Все преобразователи настраиваются, с точностью в несколько сотен герц, на 40 кГц.

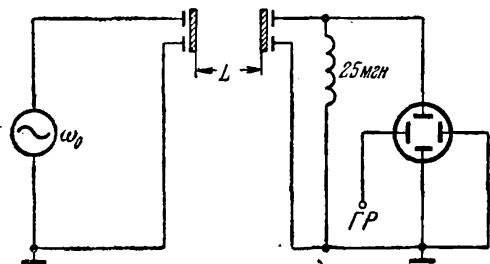


Рис. 16.

Один преобразователь можно возбуждать непосредственно сигнал-генератором и использовать как передатчик. Второй преобразователь используется в качестве приемника. На расстояниях порядка метра принимаемый сигнал достаточно велик и его можно непосредственно подать на осциллограф. Такое устройство показано на рис. 16.

Параллельно приемнику следует включить индуктивность в 25 мГн, чтобы уменьшить фон переменного тока на осциллографе.

Так как преобразователи являются частично отражающими, звуковой путь  $L$  на рис. 16 может быть резонансным. Так же, как и при передаче микроволн через пару пластин с пазами, можно ожидать максимума связи, когда длина пути удовлетворяет соотношению

$$L = \frac{1}{2} n\lambda = \frac{nu}{2v}. \quad (41)$$

\*) W. J. Rhein, Amer. J. Phys. 31, 809 (1963); J. Strong, Concepts of Classical Optics, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1958.

Изучая зависимость величины принимаемого сигнала от длины пути  $L$ , можно определить длину волны  $\lambda$ . Вычислите скорость звука. Скорость звука в газе дается уравнением

$$u = \sqrt{\gamma P / \rho}, \quad (42)$$

где  $P$  — среднее давление,  $\rho$  — средняя плотность и  $\gamma$  — отношение удельной теплоемкости при постоянном давлении к удельной теплоемкости при постоянном объеме. Для идеального газа мы имеем  $\gamma = 5/3$  и  $P/\rho = RT/M$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура и  $M$  — молекулярный вес. Таким образом, мы можем переписать выражение для скорости звука в виде

$$u = \sqrt{5RT/3M}. \quad (43)$$

Сколь малые изменения комнатной температуры вы можете обнаружить, производя тщательные измерения длины волны?

### Работа 2.11. ПОЛЯРИЗАЦИЯ МИКРОВОЛН

В Р.2.10 мы изучали распространение микроволн в канале, причем электрическое поле микроволн было параллельно боковым пластинам. Прежде всего заметим, если мы распространяем микроволны при электрическом поле, нормальном к боковым пластинам, то длина волны в волноводе не изменяется. Чтобы произвести это измерение, поверните как передающий, так и принимающий рупоры таким образом, чтобы электрическое поле микроволн было горизонтально. Необходимо будет также повернуть пластины с пазами так, чтобы проводящие полосы были горизонтальными. Теперь вставьте боковые экраны, как показано на рис. 1, и проверьте, что длина волны в волноводе  $\lambda$  не зависит от величины  $a$ . Из предыдущего измерения можно заключить, что возможно распространение плоской электромагнитной волны между парой параллельных пластин, когда электрическое поле нормально по отношению к ним. Такие колебания являются в действительности как раз тем видом колебаний, с которым мы имели дело в Р.2.8 (ленточная линия).

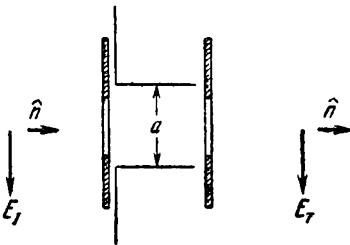


Рис. 1.

Мы замечаем далее, что приемный рупор может быть использован в качестве анализатора поляризации. Это возможно отчасти потому, что высота волновода близка к  $1\text{ см}$ , т. е. значительно меньше, чем длина волны в свободном пространстве, которая составляет от  $3,1$  до  $3,5\text{ см}$ . Кроме того, положение микроволнового кристалла в центре волновода обеспечивает детектирование только микровол-

нового электрического поля, нормального к короткому отрезку волновода. Ориентируйте приемный рупор таким образом, чтобы он оказался нормальным к передающему рупору, и заметьте отсутствие какого-либо детектируемого сигнала. Какой величины сигнал можно ожидать, если приемный рупор будет находиться под углом  $45^\circ$  к передающему рупору (рис. 2)? Мы можем ожидать распространения по приемному волноводу только вертикальной компоненты электрического поля. Таким образом, мощность, достигающая детектора, должна уменьшаться наполовину. Для низкой входной мощности кристалл работает в области «квадратичного закона», т. е. детектированное микроволновое напряжение пропорционально квадрату микроволнового поля. При более высоких уровнях мощности детектированное микроволновое напряжение приближается к линейной функции поля. На рис. 3 показано напряжение в разомкнутой цепи типичного микроволнового диода как функция входной мощности.

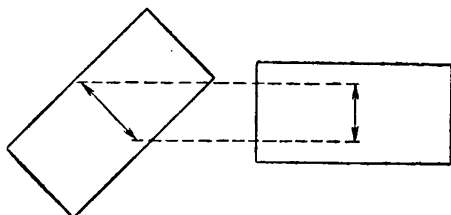


Рис. 2.

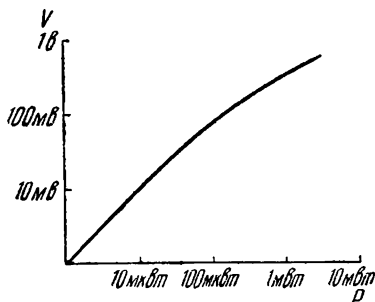


Рис. 3.

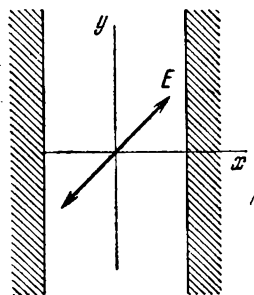


Рис. 4.

В этом эксперименте нас будет интересовать получение микроволн круговой поляризации путем использования анизотропного распространения микроволн в канале. Для того чтобы получить эллиптически поляризованную волну, ориентируйте рупор передатчика под углом  $45^\circ$  к вертикали, тогда электрическое поле будет наклонено под углом  $45^\circ$  (рис. 4). Как распространяется микроволновое поле в этом случае? Пока боковые экраны дают хорошее отражение, мы можем разложить микроволновое поле на две компоненты — вертикальную компоненту

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \quad (1)$$

и горизонтальную компоненту

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} z \right), \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda_0$  связаны выражением

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^2. \quad (3)$$

На рис. 5 изображены  $E_x$  и  $E_y$  как функции  $z$  для некоторого момента времени. Заметьте, что благодаря большей длине волны  $E_y$  две волны находятся в противофазе при  $z = L$ . Разность фаз между двумя волнами

$$\Delta\varphi = 2\pi L \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (4)$$

Когда две волны сдвинуты по фазе точно на  $90^\circ$ , результирующее электрическое поле вращается таким образом, что его вектор движется по окружности, как показано на рис. 6, а.

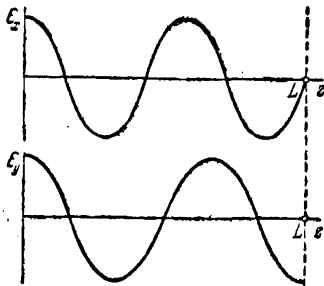


Рис. 5.

Когда фаза сдвинута на  $180^\circ$ , результирующее электрическое поле нормально по отношению к начальному полю, как видно из рис. 6, б.

Изменяйте расстояние между парой экранов до тех пор, пока интенсивность получаемого сигнала не станет независимой от ориентации приемного рупора. Сравните полученное расстояние с тем, которое предполагалось из уравнения (4) для  $\Delta\varphi = \pi/2$ . Можете

попробовать для сравнения проделать это с экранами разной длины  $L$ . Далее, уменьшайте расстояние между экранами до исчезновения сигнала при параллельном положении передающего и принимающего рупоров и получения максимального сигнала при перпендикулярном положении рупоров. В этих условиях сдвиг фазы состав-

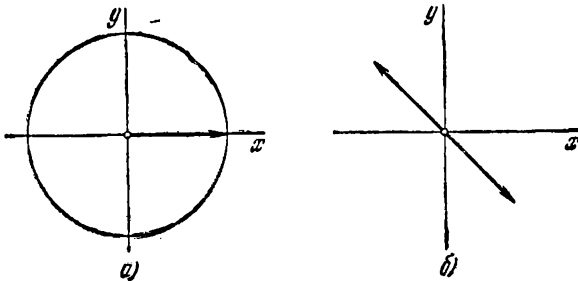


Рис. 6.

ляет  $180^\circ$ . Путем дальнейшего сокращения расстояния вы можете снова получить микроволны круговой поляризации с фазовой разностью в  $270^\circ$ , и так далее. Исключая длину волны  $\lambda$  из уравнений (3) и (4), получаем для сдвига фазы

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi L} = \frac{1}{\lambda_0} \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \right]. \quad (5)$$



График этого выражения показан на рис. 7. Заметьте, что для больших расстояний (величина  $\lambda_0/2a$  мала) фаза увеличивается квадратично с увеличением  $\lambda_0/2a$ . Максимально возможный сдвиг фазы равен  $2\pi L/\lambda_0$  и соответствует границе пропускания.

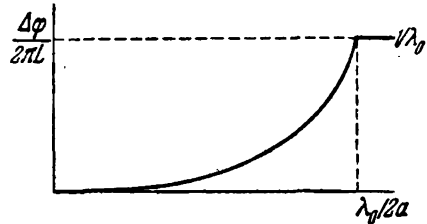


Рис. 7.

### Работа 2.12. ДИФРАКЦИЯ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МИКРОВОЛН

В этой работе нас будут интересовать дифракционные картины от микроволновых рупоров, которые были использованы для передачи и приема микроволнового излучения. Мы будем также изучать дифракцию от щели в плоской проводящей поверхности.

Мы исследуем также интерференцию микроволн от двух когерентных источников. Одним из наиболее легких способов имитирования пары таких источников является интерференция между прямой волной и волной, отраженной от плоской проводящей поверхности. Поверхность, используемая подобным образом, называется *зеркалом Ллойда*. Интерференционная картина в этом случае возникает в результате наложения прямой волны и волны от изображения источника за зеркалом. Другим способом получения пары когерентных источников является расщепление микроволнового пучка и пропускание его через пару щелей, расположенных на значительном расстоянии друг от друга. С помощью двух щелей можно обнаружить сильную интерференцию.

Начнем с описания излучения от нескольких простых источников. Мы знаем, что плоскую электромагнитную волну можно записать в виде

$$E_y = E_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (1)$$

$$B_x = B_0 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right), \quad (2)$$

что иллюстрируется рис. 1.

Каким будет поле излучения от длинной проволоки, по которой течет переменный ток

$$I_y = I_0 \cos \omega t? \quad (3)$$

Электрическое поле будет иметь вид

$$E_y = E_0 \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right), \quad (4)$$

как показано на рис. 2, а. Наконец, рассмотрим линейный источник, в котором мы имеем синусоидально изменяющееся намагничение

$$M_y = M_0 \cos \omega t. \quad (5)$$

Поле излучения вокруг такого источника можно выразить в виде

$$B_y = B_0 \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (6)$$

Рассмотрим теперь поле излучения от узкой щели в плоской проводящей поверхности. Можно рассматривать два типа полей

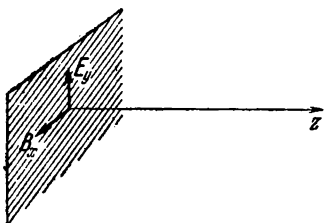


Рис. 1.

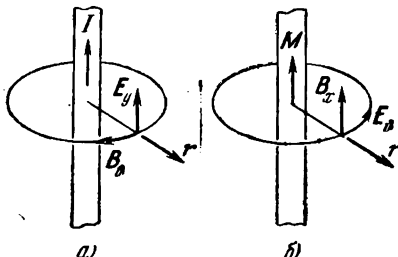


Рис. 2.

излучения. Поле первого типа возникает, когда микроволновое электрическое поле параллельно щели, как показано из рис. 3. Благодаря наличию проводящей плоскости электрическое поле будет равно нулю для  $\varphi = \pm \pi/2$ , чему отвечает поле излучения

$$E_y = E_0 \cos \varphi \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (7)$$

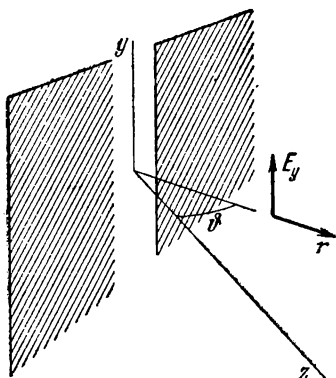


Рис. 3.

Поле второго типа возникает, когда магнитное поле параллельно щели. Поскольку соответствующее электрическое поле будет нормально к проводящей плоскости, мы можем ожидать такого же поля излучения, какое показано на рис. 2, б и выражено уравнением (6).

Как мы вычисляем поле излучения, от рупора или от широкой щели? Мы можем считать широкую щель

набором линейных источников, показанных на рис. 2. Результирующее поле излучения будет представлять собой простую сумму полей излучения от отдельных линейных источников.

Рассмотрим в качестве примера поле от широкой щели, когда электрическое поле параллельно щели (рис. 4). Поместим начало координат в центр щели и рассчитаем поле в точке P с координатами

$(r_0, \vartheta_0)$ . Расстояние от линейного источника в щели до точки  $P$  равно

$$r = \sqrt{r_0^2 - 2r_0x \sin \vartheta_0 + x^2}, \quad (8)$$

$$\cos \vartheta = \frac{r_0 \cos \vartheta_0}{\sqrt{r_0^2 - 2r_0x \sin \vartheta_0 + x^2}}. \quad (9)$$

В этих формулах  $x$  — координата источника в щели. Электрическое поле в точке  $P$

$$E_P = E_0 \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cos \vartheta \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) dx. \quad (10)$$

Уравнение (10) упрощается, если расстояние от щели  $r_0$  велико по сравнению с ее шириной  $a$ . Тогда угол  $\vartheta$  очень мало меняется вдоль

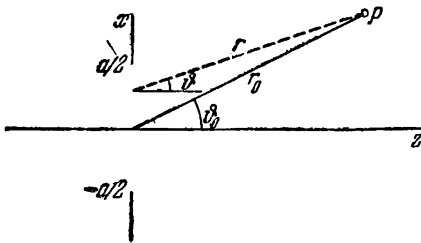


Рис. 4.

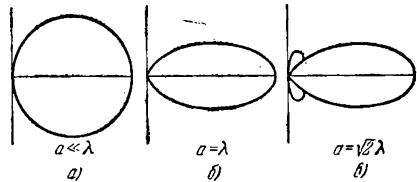


Рис. 5.

щели и существенно лишь изменение фазы. В таком приближении получаем

$$E_P \cong \frac{E_0}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{r_0}} \cos \vartheta_0 \int_{-a/2}^{a/2} \cos \omega \left( t - \frac{r_0}{c} + \frac{x}{c} \sin \vartheta_0 \right) dx. \quad (11)$$

Интегрируя и упрощая это выражение, получаем

$$E_P = \frac{E_0}{\pi} \frac{\lambda}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{r_0}} \cos \vartheta_0 \sin \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \vartheta_0 \right) \cos \omega \left( t - \frac{r_0}{c} \right). \quad (12)$$

Детектированный сигнал будет пропорционален  $E_P^2$ . Удобным способом представления зависимости сигнала от  $\vartheta_0$  является график в полярных координатах с  $E_P^2$  в качестве радиуса. На рис. 5 такой график приведен для нескольких значений  $a/\lambda$ . При расширении щели картина излучения становится более направленной. Для щелей более широких, чем  $a = \lambda$ , появится угол, для которого волны взаимно погашаются. При еще больших углах вновь возникает сигнал. Такая картина излучения показана на рис. 5, в. Она имеет

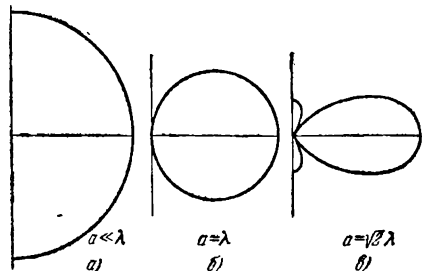


Рис. 6.

основной лепесток, вытянутый вперед, и побочные лепестки. На рис. 6 показаны графики излучения, когда магнитное поле параллельно щели.

Наконец, рассмотрим интерференцию волн от двух источников. Пару сильных когерентных источников проще всего получить с помощью отражающей плоскости (зеркало Ллойда, рис. 7). Для упрощения примем рупор  $S$  за линейный источник. Детектор в точке  $P$  получает два сигнала. Первый — это прямой сигнал от передающего рупора. Второй — сигнал, отраженный от проводящей поверхности. Мы можем заменить зеркало эффективным источником  $S$

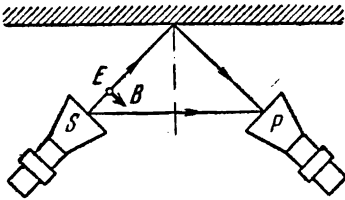


Рис. 7.

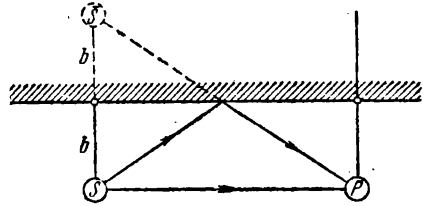


Рис. 8.

на противоположной стороне зеркала (рис. 8). Нужно помнить, что, поскольку знак электрического поля меняется при отражении, эффективный источник за зеркалом нужно считать отрицательным по отношению к реальному. Условие, необходимое для гашения двух источников, заключается в том, что разность пути равна целому числу длин волн

$$SP - \bar{S}P = n\lambda. \quad (13)$$

Таким образом, с помощью зеркала Ллойда мы можем получить узловые линии для расстояния  $b = 3\lambda$  (рис. 9).

Измерьте картину излучения от рупорной антенны в горизонтальной плоскости в двух случаях: для вертикального электрического поля  $E$

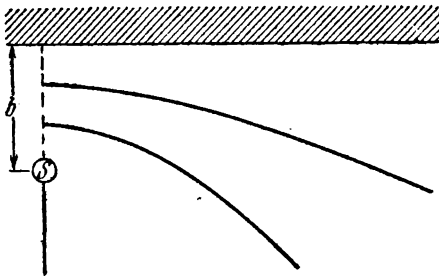


Рис. 9.

и вертикального магнитного поля  $B$ . Сравните наблюдаемые картины с рис. 5 и 6. Установите зеркало Ллойда в вертикальной плоскости, как показано на рис. 7, и нанесите узловые линии на горизонтальной поверхности при вертикальном направлении электрического поля. Затем поверните передающий и принимающий рупоры таким образом, чтобы магнитное поле  $B$  было вертикально, и повторите измерения. Как вы объясните сдвиг узловых линий? (Чтобы получить узкие узловые линии, может быть, придется слегка отрегулировать ориентацию рупоров.) Используя

металлические пластины, вы можете получить различные виды одно- и двухщелевых устройств. Рекомендуем вам произвести тщательное измерение картины излучения от узкой щели и картины интерференции от пары узких щелей.

### Приложение 2.12а. Акустическая дифракция и интерференция

Основной задачей этой работы будет изучение дифракции микро- волн от передающего рупора и от щели. Соответствующие опыты можно выполнить и с ультразвуковыми волнами. На рис. 10 изображено устройство для измерения картины излучения от дискового преобразователя. Для получения надежных данных необходимо, чтобы приемник был всегда ориентирован в направлении источника и находился на постоянном расстоянии от него. В эксперименте должны использоваться вертикальные отражающие поверхности. Удобное приспособление получится, если привинтить приемник к линейке, которая может вращаться вокруг оси.

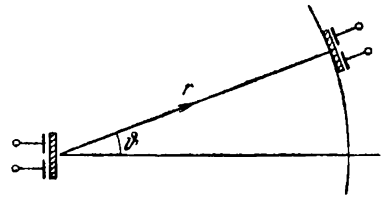


Рис. 10.

Измерьте картину излучения от узкой щели, как показано на рис. 11, и сравните обе картины. Почему излучение, исходящее из окна преобразователя, более направленно? Сравните диаметр отверстия с длиной волны, измеренной по способу, описанному в П.2.8.

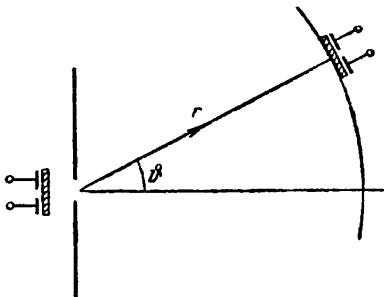


Рис. 11.

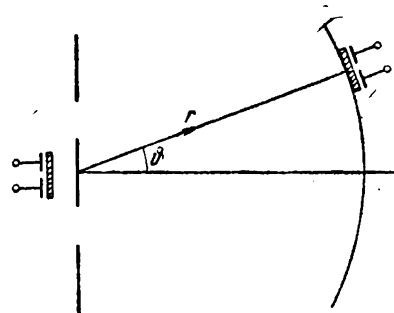


Рис. 12.

Интерференцию звуковых волн от пары когерентных источников можно наблюдать методами, очень похожими на уже описанные для микро- волн. На рис. 12 изображено устройство для наблюдения интерференции между парой щелей. При ширине щелей порядка длины волны и при нескольких длинах волн между центрами щелей можно наблюдать сильную интерференцию. Другим устройством является зеркало Ллойда, показанное на рис. 13. Вы можете установить передатчик на расстоянии нескольких длин волн от верти-

кальной отражающей пластины и измерить узлы картины интерференции, как в Р.2.12. При отсутствии вертикальной пластины подходящим зеркалом может служить крышка стола. Исходя из положения узловых линий, следует установить, находится ли эффективный источник в фазе или противофазе с реальным источником. Звуковые волны в газе чисто продольны в отличие от электромагнитных волн, которые поперечны. В каком направлении перемещается воздух у отражающей поверхности, судя по наблюдаемому расположению узлов? Принимая картину узлов как граничное условие у отражающей поверхности, поставьте эксперимент таким образом, чтобы показать, что звук в воздухе колеблется в продольном, а не в поперечном направлении.

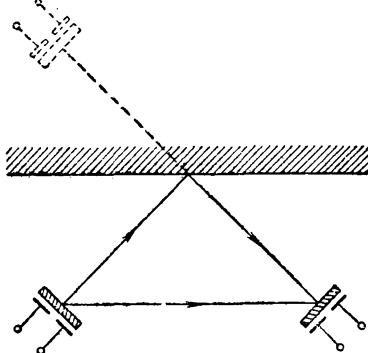


Рис. 13.

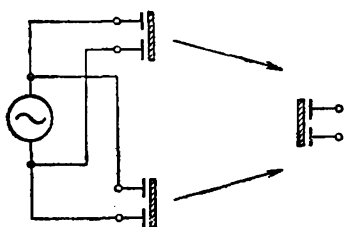


Рис. 14.

Третий способ наблюдения интерференции состоит в том, что берется пара преобразователей и подсоединяется к генератору по схеме рис. 14. После определения узловых линий измените полярность одного из преобразователей и повторите измерения. Сравните полученные результаты с картиной, наблюдавшейся в эксперименте с зеркалом Ллойда.

### Приложение 2.126. Звуковой интерферометр Брауна — Твисса

В 1954 г. Р. Браун и Р. Твисс сообщили об измерении углового диаметра радиозвезд посредством сравнения относительных фаз низкочастотных вариаций интенсивности, измеренных на разных приемниках \*). Обычный метод измерения содержал суммирование высокочастотных сигналов от пары приемников и определение результирующей интенсивности. Преимущество интерферометра Брауна — Твисса перед традиционным интерферометром Майкельсона заключается в том, что нет необходимости сохранять фазу высокочастотных сигналов, а достаточно сохранить фазу значительно более низкочастотных вариаций интенсивности.

Сначала мы рассмотрим интерферометр типа Майкельсона и близкий к нему вариант с зеркалом Ллойда. Затем рассмотрим

\*) Philosophical Magazine 45, 663 (1954).

интерферометр Брауна — Твисса. Мы покажем, как эти два типа интерферометров могут быть приспособлены для работы со звуковыми волнами.

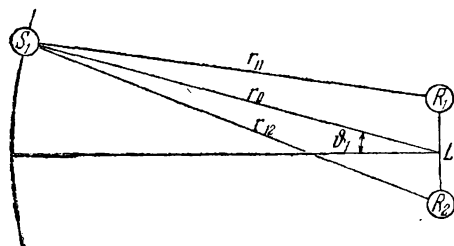


Рис. 15.

Представим себе источник монохроматических радиоволн  $S_1$  и пару приемников  $R_1$  и  $R_2$ , как показано на рис. 15. При сложении радиосигналов от двух приемников мы получим напряжение

$$V_1 = V_0 \cos \omega_1 \left( t - \frac{r_{11}}{c} \right) + V_0 \cos \omega_1 \left( t - \frac{r_{12}}{c} \right). \quad (14)$$

Полагая, что расстояние  $L$  между приемниками мало по сравнению с расстоянием до источника, мы можем приближенно положить

$$r_{11} = r_0 - \frac{1}{2} L \sin \vartheta_1, \quad r_{12} = r_0 + \frac{1}{2} L \sin \vartheta_1 \quad (15)$$

и получить

$$V_1 = 2V_0 \cos \omega_1 \left( t - \frac{r_0}{c} \right) \cos \left( \frac{\pi L \sin \vartheta_1}{\lambda_1} \right). \quad (16)$$

Этот сигнал показан на рис. 16 как функция  $\sin \vartheta_1$ .

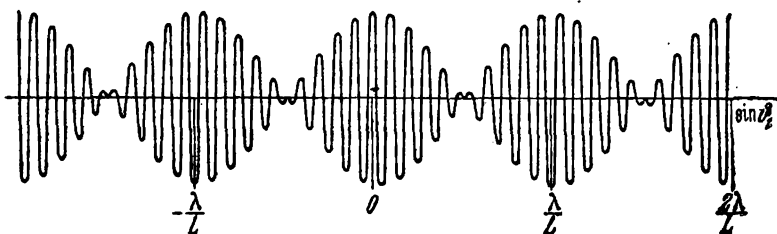


Рис. 16.

Теперь представим, что имеется второй источник с частотой  $\omega_2$ , показанный на рис. 17. Складывая напряжения приемников от сигнала второго источника, получим

$$V_2 = 2V_0 \cos \omega_2 \left( t - \frac{r_0}{c} \right) \cos \left( \frac{\pi L \sin \vartheta_2}{\lambda_2} \right). \quad (17)$$

Если два источника расположены очень близко друг к другу, интенсивности складываются. Однако если источники разделены,

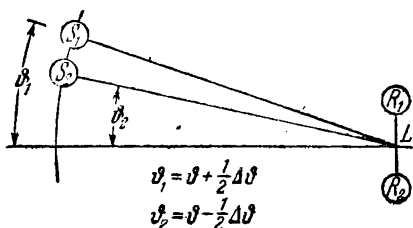


Рис. 17.

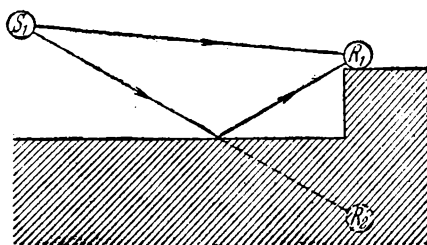


Рис. 18.

будет наблюдаться небольшое изменение в фазах вариаций интенсивности. В частности, если два источника разделены так, что

$$\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2 \cong \Delta \vartheta \cos \vartheta = \frac{\lambda}{L}, \quad (18)$$

максимум интенсивности одного сигнала будет лежать при нуле другого. Увеличивая расстояние  $L$  до тех пор, пока две вариации интенсивности не окажутся в противофазе, мы можем определить угловой диаметр  $\Delta \vartheta$ .

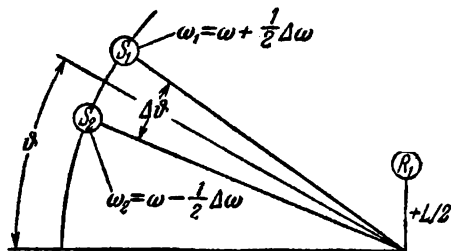


Рис. 19.

Один из способов, позволяющих избежать проблемы сравнения фаз на больших расстояниях, — это использование поверхности воды в качестве зеркала Ллойда. При этом приемник располагается на крутом обрыве, как показано на рис. 18. Сигнал, отраженный водой, равен сигналу,

который был бы принят воображаемым приемником  $R_2$ , расположенным в месте зеркального изображения приемника  $R_1$  относительно поверхности воды.

Чтобы понять устройство, использованное Брауном и Твиссом, сначала вычислим сигнал от источников  $S_1$  и  $S_2$ , полученный приемником  $R_1$ , находящимся на высоте  $+L/2$  (рис. 19). Используя приближение больших расстояний, напряжение на  $R_1$  можно записать в виде

$$V_1 = V_0 \cos \left( \omega t - \frac{2\pi r_0}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{1}{2} \Delta \omega t - \frac{\pi}{4} \frac{L}{\lambda} \Delta \vartheta \cos \vartheta \right). \quad (19)$$

График этого сигнала как функции времени показан на рис. 20.



Напряжение на втором приемнике  $R_2$  при высоте  $-L/2$  дается выражением

$$V_2 = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r_0}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{1}{2} \Delta\omega t + \frac{\pi}{4} \frac{L}{\lambda} \Delta\theta \cos\theta\right). \quad (20)$$

Если два источника  $S_1$  и  $S_2$  сдвинуты вплотную, вариации интен-

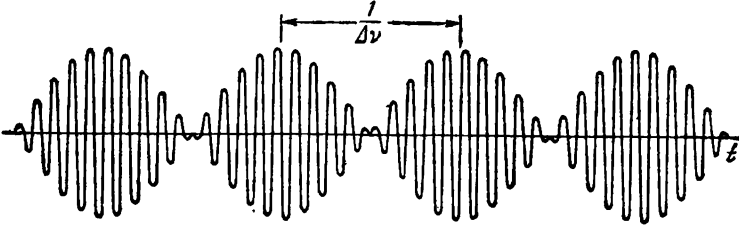


Рис. 20.

сивности с частотой  $\Delta\omega$  будут в фазе. Но если разница в углах составляет

$$\Delta\theta \frac{\lambda}{L \cos\theta}, \quad (21)$$

два сигнала будут отличаться по фазе на  $90^\circ$ . Мы можем измерить угловой диаметр  $S_1$  и  $S_2$ , увеличивая  $L$  до тех пор, пока разность фаз не будет равна  $90^\circ$ . Мы видим, что, хотя два метода определения совершенно различны, фазовые условия, выраженные уравнениями (18) и (21), идентичны.

На практике имеют дело не с парой источников, а с протяженным радиоисточником. Кроме того, радиоисточник излучает целый диапазон частот, что приводит к диапазону частот вариаций интенсивности. Когда приемники близки друг к другу, все изменения интенсивности будут в фазе. Когда приемники разнесены на расстояние, определяемое из соотношения (21), вариации интенсивности будут сильно перепутаны и между ними не будет определенной корреляции.

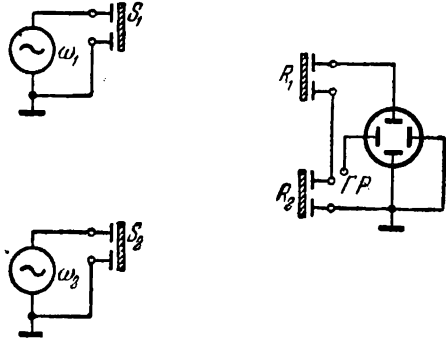


Рис. 21.

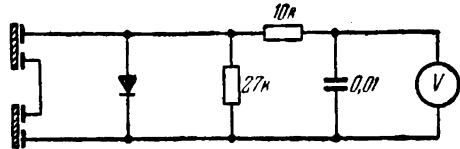


Рис. 22.

Интерферометр типа Майкельсона можно собрать по схеме, показанной на рис. 21. Сигналы от пары приемников могут быть

сложены на осциллографе. В данном случае действительно нет необходимости детектировать огибающую, так как интенсивность сигнала можно наблюдать непосредственно на осциллографе. Для наблюдения колебаний интенсивности приблизьте  $R_1$  и  $R_2$  вплотную друг к другу и расположите источники  $S_1$  и  $S_2$  перед приемниками. Увеличивая расстояние  $L$  между  $R_1$  и  $R_2$ , вы найдете расстояние, для которого изменения интенсивности от двух источников гасятся. Можно детектировать выходной сигнал по схеме рис. 22 и измерять вольтметром напряжение постоянного тока.

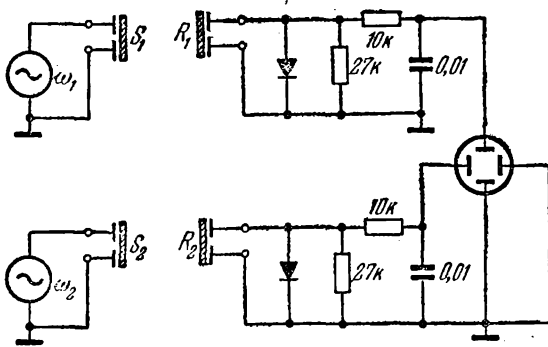


Рис. 23.

Устройство, используемое в качестве интерферометра Брауна — Твисса, представлено на рис. 23. Здесь сигналы от каждого приемника детектируются отдельно. Наиболее удобно сравнивать сигналы, подавая их соответственно на горизонтально и вертикально отклоняющие пластины осциллографа. Заметьте, что, когда приемники сдвинуты вплотную, две огибающие вариаций находятся в фазе, что проявляется как диагональная линия на экране осциллографа. Когда расстояние  $L$  возрастает, линия превращается в эллипс. Когда два сигнала сдвинуты по фазе точно на  $90^\circ$  (см. Р.1.7), основные оси эллипса будут вертикальны и горизонтальны. Проверьте расстояние  $L$  между приемниками по формуле (21).

## РАЗДЕЛ 3

### ВВЕДЕНИЕ В СТАТИСТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

#### Работа 3.1. РАДИОАКТИВНЫЙ РАСПАД

Раздел 3 лабораторного курса служит введением в статистическую и квантовую физику. Первые четыре опыта связаны, в основном, с электронами, следующие четыре опыта — с фотонами. В качестве электронного источника малой интенсивности со случайным вылетом частиц очень удобно использовать нестабильный изотоп, который испускает электрон ( $\beta$ -частицу). Мы приводим в таблице ряд пригодных для этой цели радиоактивных изотопов. Обычно стандартные источники такого типа заключены в пластмассовые капсулы.

Изотоп	Испускаемые частицы	Энергия, Мэв	Период полураспада
Кальций-45	$\beta$	0,25	165 дней
Углерод-14	$\beta$	0,15	5568 лет
Цезий-137	$\beta$	0,52	30 лет
Кобальт-60	$\gamma$	0,66	5,24 года
	$\beta$	0,31	
	$\gamma$	1,17	
Свинец-210		1,33	22 года
	$\alpha$	5,3	
	$\beta$	1,16	
Прометий-147	$\beta$	0,22	2,5 года
Натрий-22	$\beta$	0,54	2,6 года
	$\gamma$	1,27	
Сера-35	$\beta$	0,167	89 дней
Таллий-204	$\beta$	0,77	3,57 года
Цинк-65	$\beta$	0,33	246 дней
	$\gamma$	1,11	

Каждый изотоп характеризуется массовым числом, определяющим число нейтронов и протонов в ядре. *Электронвольт* есть энергия, которую получает электрон, ускоренный электрическим

полем с разностью потенциалов в один вольт.  $1 \text{ эв} = 1,60210 \times 10^{-12} \text{ эрг}$ . Период полураспада определяется временем, за которое распадается половина первоначального вещества.

В качестве примеров мы опишем распады двух изотопов из приведенной таблицы. Это таллий-204 (обозначим его  $\text{Tl}^{204}$ ) и цезий-137 ( $\text{Cs}^{137}$ ). Около 98 процентов  $\text{Tl}^{204}$  распадается на свинец-204 с одновременной эмиссией электрона и нейтрино:

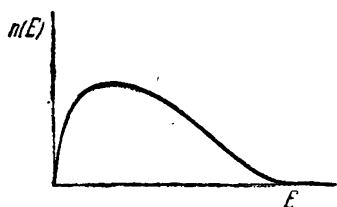
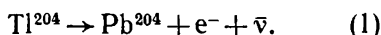


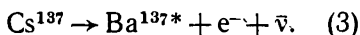
Рис. 1.

Суммарная энергия электрона и нейтрино равна  $0,765 \text{ Мэв}$ . Распределение энергий электронов представлено на рис. 1, где по оси ординат отложено число электронов в единичном

интервале энергии, а по оси абсцисс — энергия. Наиболее вероятная энергия составляет около половины максимальной энергии. Остальные два процента ядер  $\text{Tl}^{204}$  испытывают  $K$ -захват, который заключается в том, что один из внутренних орбитальных электронов поглощается ядром. Часть распадов второго изотопа  $\text{Cs}^{137}$  сопровождается эмиссией  $\gamma$ -квантов. Около восьми процентов ядер  $\text{Cs}^{137}$  переходят непосредственно в  $\text{Ba}^{137}$  с вылетом электрона и нейтрино



Суммарная энергия, уносимая электроном и нейтрино, равна в этом случае  $1,19 \text{ Мэв}$ . Преобладающая часть ядер  $\text{Cs}^{137}$  распадается по более сложной схеме. Сначала они переходят в возбужденное состояние  $\text{Ba}^{137*}$



При этом переходе электрон и нейтрино уносят энергию  $0,53 \text{ Мэв}$ . Звездочка указывает на то, что  $\text{Ba}^{137*}$  находится в состоянии с более высокой энергией, чем  $\text{Ba}^{137}$ . В данном случае энергия возбужденного состояния на  $0,66 \text{ Мэв}$  превышает энергию основного состояния. Возбужденное ядро живет в среднем несколько минут и переходит в основное состояние, испуская  $\gamma$ -квант:

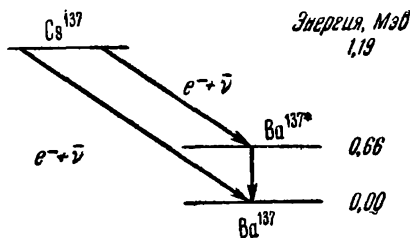


Рис. 2.



Эти последовательные переходы показаны на схеме энергетических уровней на рис. 2. Спектр электронов распада состоит из двух компонент (рис. 3).

Для регистрации  $\beta$ -частиц и  $\gamma$ -квантов мы используем счетчик Гейгера — Мюллера. Счетчик представляет собой металлический

цилиндр, заполненный инертным газом. По оси цилиндра проходит тонкая вольфрамовая нить (рис. 4). Она пересекает счетчик, она ионизирует атом газа. Образовавшиеся электроны притягиваются к аноду — центральной нити, находящейся под положительным потенциалом. Вблизи от анода электроны приобретают энергию, достаточную для того, чтобы осуществить дополнительную ионизацию (потенциал ионизации в аргоне 23,5 эв). Вторичные электроны, полученные таким образом, сами ускоряются и могут в свою очередь производить ионизацию. Тяжелые положительные ионы перемещаются намного медленней электронов и, накапливаясь около анода, уменьшают интенсивность электриче-

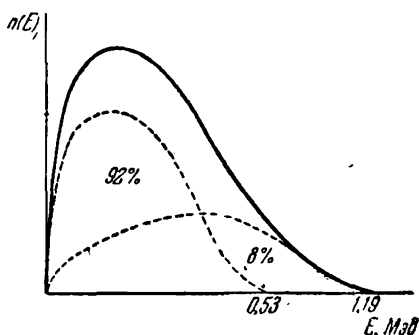


Рис. 3.

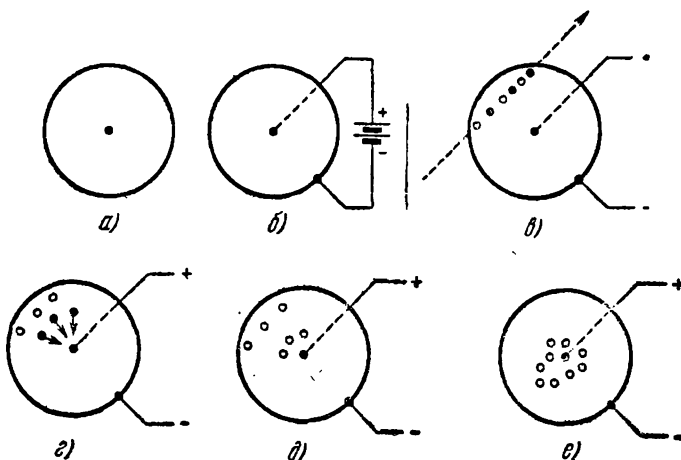


Рис. 4. Счетчик Гейгера—Мюллера представляет собой проводящий цилиндр, заполненный инертным газом. По оси цилиндра натянута тонкая проволока (а). Положительное напряжение подается на центральную нить, которая называется анодом (б). Когда  $\beta$ - или  $\gamma$ -частицы проходят через счетчик, то они ионизуют атомы инертного газа (в) (черный кружок — электрон, белый — положительный ион). Электроны быстро движутся по направлению к аноду. Тяжелые положительные ионы движутся более медленно к внешнему цилиндру (г). Начальные электроны ионизируют другие атомы, создавая электронную лавину (д). Положительные ионы накапливаются вблизи анода, уменьшая величину электрического поля и прекращая развитие лавины (е).

ского поля в этой области. Можно было бы ожидать, что разряд прекратится сам собой, если разность потенциалов на счетчике не будет очень высокой. Однако из возбужденного газа вблизи анода испускаются фотоны. Они бомбардируют катод, выбивая

дополнительные электроны, которые могут поддерживать разряд. Для поглощения этих фотонов в счетчики добавляют около 10 процентов «гасящего» газа. С аргоном используются органические соединения, подобные этиловому спирту, с неоном — галогены. Гасящий газ поглощает фотоны и диссоциирует. В течение одного разряда диссоциирует приблизительно  $10^{10}$  молекул. Так как молекулы этилового спирта не восстанавливаются после диссоциации, то счетчик с органическим гасящим газом имеет ограниченный срок службы — приблизительно около  $10^8$  срабатываний. Счетчики, в которых в качестве гасящего газа используются галогены, обладающие свойством рекомбинировать после диссоциации, имеют практически неограниченный срок службы.

Обычно счетчик Гейгера — Мюллера используется в схеме, которая осуществляет счет разрядов за какой-то определенный

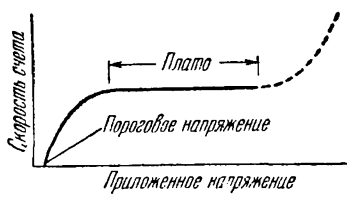


Рис. 5.

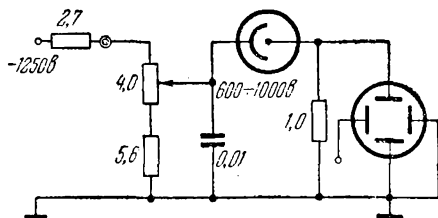


Рис. 6.

интервал времени. Скорость счета зависит от приложенного напряжения, как показано на рис. 5. Счет начинается при некотором «пороговом» напряжении на счетчике. Величина его лежит в пределах от 600 до 900 в в зависимости от давления газа и диаметра анода. При увеличении напряжения скорость счета увеличивается, мы приближаемся к участку характеристики, называемому «плато», где скорость счета относительно нечувствительна к величине приложенного напряжения. Так, при увеличении напряжения на несколько сотен вольт изменение скорости счета может быть меньше 5 процентов. Счетчики, заполненные органическими гасящими газами, обычно имеют более ровное плато по сравнению со счетчиками, в которых в качестве гасящего газа используются галогены.

При еще более высоком напряжении счетчик переходит в непрерывный разряд.

Практически важно не допустить перехода счетчиков с добавками из органических газов в разряд, так как гасящий газ в процессе разряда может быть истощен.

Схема для работы со счетчиком Гейгера — Мюллера показана на рис. 6. Для получения отрицательного потенциала можно использовать источник питания осциллографической трубки ( $-1250$  в). Для предотвращения сильного электрического разряда последовательно со счетчиком включается сопротивление, ограничивающее

ток. Но все же следует быть внимательными. Проверьте все соединения в схеме, прежде чем включить высокое напряжение.

Интенсивность радиоактивного источника может характеризоваться числом распадов за секунду. Общепринятой единицей интенсивности является кюри —  $3,666 \cdot 10^9$  распадов в секунду — активность одного грамма радия. Максимальная активность, с которой можно работать без специального разрешения Комиссии по атомной энергии, составляет 50 микрокюри  $Tl^{204}$  и 10 микрокюри  $Cs^{137}$ . Таким образом, общая активность может достигать 60 микрокюри, т. е. около 220 000 распадов в секунду.

Для определения безопасного для здоровья удельного уровня радиации важно учитывать ионизацию, производимую в ткани человеческого тела. Так, по рекомендации Комиссии по атомной энергии верхний предел стационарной дозы для работающих с радиацией составляет  $8 \cdot 10^{10}$  пар ионов на грамм ткани за 8-часовой рабочий день. Это приблизительно соответствует  $10^6$   $\beta$ -частицам или  $10^8$   $\gamma$ -частицам, поглощаемым квадратным сантиметром поверхности тела за 8-часовой рабочий день. Работая с источниками, необходимыми для проведения опытов, вы можете получить лишь малую часть предельно допустимой дозы облучения, установленной Комиссией по атомной энергии. Тем не менее, не следует работать с источниками больше, чем это необходимо. Важнейшая мера предосторожности заключается в том, чтобы держать источники достаточно далеко от глаз.

Установив наименьшую скорость развертки в катодном осциллографе, поставьте потенциометр в положение, соответствующее минимальному напряжению, и поместите один из ваших источников против чувствительной области счетчика. Медленно увеличивайте напряжение на счетчике, пока не увидите отрицательные импульсы на экране осциллографа. Затем, повернув ручку потенциометра на  $1/8$  оборота, увеличьте напряжение приблизительно на 50 в, чтобы вывести счетчик на плато.

Увеличив скорость развертки до 1 кГц, вы сможете наблюдать форму импульса. Убедитесь, что развертка установлена в положение, соответствующее синхронизации отрицательными импульсами. Прокалибруйте длительность развертки с помощью генератора прямоугольных импульсов и внимательно зарисуйте выходной импульс. В идеальном случае амплитуда импульса должна быть равна разности между действующим и пороговым напряжениями. Однако из-за того, что счетчик нагружен на сопротивление 1 Мом и входную емкость осциллографа, мы наблюдаем существенно меньший импульс. За какое время амплитуда импульса уменьшается в два раза?

Для того чтобы определить суммарный заряд, который проходит через счетчик в импульсе, подсоединим емкость 0,002 мкФ параллельно сопротивлению 1 Мом. Теперь вы должны наблюдать вместо импульса маленькую отрицательную ступеньку  $v$ . Так как время спада импульса, определяемое  $RC$  и равное 0,2 мсек, много

больше, чем время собирания заряда, то мы можем пренебречь влиянием сопротивления в этот промежуток времени. Тогда заряд, накопленный на емкости, будет определяться формулой

$$q = Cv. \quad (5)$$

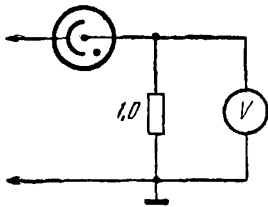


Рис. 7.

Формула (5) следует из определения емкости. Произведите амплитудную калибровку осциллографа и определите  $v$ . Вычислите  $q$ . Сколько пар ионов образуется за импульс? Теперь вы можете в качестве измерителя скорости счета использовать ламповый вольтметр, как показано на рис. 7.

Если  $V$  — напряжение, измеренное ламповым вольтметром, то скорость счета  $r$  будет определяться выражением

$$r = \frac{I}{q} = \frac{V}{Rq}. \quad (6)$$

Здесь мы пренебрегли проводимостью прибора. Какая максимальная скорость счета может быть достигнута с источником  $Cs^{137}$ ?

Вернитесь к схеме, изображенной на рис. 6. Установите максимально возможную скорость счета и на развертке  $1,5 \text{ мсек}$  внимательно исследуйте осциллограмму. Наблюдаемая осциллограмма должна напоминать рис. 8, где показан синхронизирующий импульс, за которым следуют импульсы меньшей амплитуды. Заметим, что в течение  $50 \text{ мксек}$  после первого импульса счетчик не чувствителен. Это время называется *мертвым временем*  $\tau$ . Как нам следует понимать постепенное увеличение амплитуды последующих импульсов?

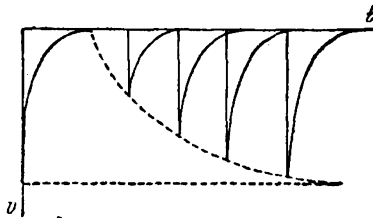


Рис. 8.

Представим себе это на примере двух электронов, которые последовательно проходят через счетчик. Первый электрон регистрируется счетчиком, производя импульс полной амплитуды и запуская развертку осциллографа. Если второй электрон приходит через промежуток времени, меньший мертвого времени счетчика  $\tau$ , то второй импульс будет отсутствовать. Если электрон приходит через интервал времени только немного больший, чем  $\tau$ , мы получим второй импульс, но он будет иметь уменьшенную амплитуду. Чем больше этот интервал, тем лучше восстанавливается счетчик и тем ближе амплитуда второго импульса к амплитуде первого.

При высоких скоростях счета значительную часть времени счетчик окажется нечувствительным и кажущаяся скорость счета будет слишком низкой. Предположим, что  $r_0$  частиц в секунду проходят через счетчик с мертвым временем  $\tau$  и что регистрируется  $r$  импульсов в секунду (рис. 9). Теперь за каждую секунду счетчик



нечувствителен время  $r\tau$ . Это означает, что только  $(1-r\tau)$  часть любых дополнительных импульсов будет сосчитана, следовательно,

$$dr = (1 - r\tau) dr_0, \text{ или } dr_0 = \frac{dr}{1 - r\tau}. \quad (7)$$

Интегрируя, мы получаем, что

$$r\tau = 1 - e^{-r_0\tau}. \quad (8)$$

Заметим, что если  $r_0$  много меньше, чем  $1/\tau$ , то  $r = r_0$ . Но если  $r_0$  много больше, чем  $1/\tau$ , то скорость счета ограничивается величиной  $1/\tau$ .

Мы можем определить эффективное мертвое время для счетчика Гейгера, измеряя суммарную скорость счета от двух источников и скорости счета от каждого из них в отдельности. Мы обозначим источники  $A$  и  $B$ . Сначала определим счет от источника  $A$ , используя вольтметр (рис. 7). Затем поднесем источник  $B$  и найдем скорость счета от двух источников. Наконец, удалим источник  $A$  и определим счет от  $B$ . Преимущество этого метода состоит в том, что нет необходимости помещать источник в воспроизводимое положение. Отметим, что скорость счета  $r(A+B)$  естественно меньше, чем  $r(A) + r(B)$ . Последующий анализ позволит определить мертвое время  $\tau$ . Пусть  $r_0(A)$  и  $r_0(B)$  — действительные активности. Для одного источника  $A$  мы получаем

$$1 - r(A)\tau = e^{-r_0(A)\tau}. \quad (9)$$

Для источников  $A$  и  $B$  совместно имеем

$$1 - r(A+B)\tau = e^{-[r_0(A) + r_0(B)]\tau} \quad (10)$$

и, наконец, для  $B$  имеем

$$1 - r(B)\tau = e^{-r_0(B)\tau}. \quad (11)$$

Мы можем найти из этих трех уравнений  $r_0(A)$ ,  $r_0(B)$  и  $\tau$ . Так как произведение (9) и (11) должно быть равно (10), мы имеем

$$[1 - r(A)\tau][1 - r(B)\tau] = 1 - r(A+B)\tau. \quad (12)$$

И, наконец, из (12) следует, что

$$\tau = \frac{r(A) + r(B) - r(A+B)}{r(A) \cdot r(B)}. \quad (13)$$

Определите  $\tau$  таким образом и сравните с результатом прямого измерения мертвого времени с помощью осциллографа. При использовании лампового вольтметра в качестве измерителя скорости счета можно ожидать только качественного согласия результатов. Если в вашем распоряжении имеется современное пересчетное устройство, желательно повторить измерения, используя этот прибор.

### Работа 3.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В этой работе мы будем рассматривать радиоактивный распад как случайный процесс, включающий большое число событий. Сущность вопроса, который будет нас интересовать, заключается в следующем. Предположим, что мы регистрируем в среднем 1 распад за секунду. Будем регистрировать распады в течение 10 секунд. Повторим процесс измерений много раз. Всегда ли мы будем иметь 10 отсчетов или иногда можем получить иной результат? Следует ли удивляться, если мы зарегистрируем восемь отсчетов? Можно ли насчитать только шесть распадов за 10 секунд? Прежде чем попытаться ответить на подобные вопросы, познакомимся несколько ближе со случайными процессами.

Начнем с бросания монеты. С равной вероятностью может выпасть «орел» или «решка». Мы не контролируем процесс падения монеты, и результаты отдельных опытов совершенно независимы. Итак, если мы подбросим монету, то вероятность выпадения орла (о) или решки (р) равна  $1/2$ . Если у нас выпал орел, то какова вероятность появления орла вторично? Эта вероятность равна  $1/2$ , так как опыты независимы. Если же мы спросим, какова вероятность появления двух орлов подряд, то это другой вопрос, и ответ —  $1/4$ . При двух подбрасываниях монеты можно ожидать появления четырех равновероятных комбинаций

ор, ро, рр, оо,

так что вероятность оо равна  $1/4$ . При трех подбрасываниях монеты мы можем ожидать

ooo, оор, оро, роо, рро, рор, орр, рrr.

Всего восемь различных размещений. Итак, вероятность выпадения трех орлов подряд равна  $1/8$ . Какова вероятность появления двух орлов, а затем решки? Снова  $1/8$ . Мы можем легко обобщить результат на случай  $N$  подбрасываний монеты. Тогда вероятность любого выбранного размещения будет равна  $(1/2)^N$ .

Теперь зададим несколько иной вопрос. Какова вероятность выпадения двух орлов при трех подбрасываниях монеты? Ответ —  $3/8$ , как мы можем видеть из приведенного выше набора возможных комбинаций. Вероятность любого размещения есть  $1/8$ . Так как имеется три различные возможности расположить два орла и решку, то вероятность равна  $3/8$  (решка может занимать одно место из трех). Какова вероятность выпадения  $n$  орлов, если подбрасывать монету  $N$  раз? Вероятность любой комбинации, включающей  $n$  орлов, есть  $(1/2)^N$ . Сколько существует различных размещений такого типа? Может быть, легче дать ответ на этот вопрос, если представить себе, что имеется  $N$  ящиков и нам нужно разместить в них  $n$  одинаковых шаров. Сколькими различными способами можно это сделать? Будем рассуждать следующим образом. Поместим первый шар в любой из  $N$  ящиков, второй шар в любой

из  $N-1$  оставшихся ящиков и так вплоть до последнего шара, для которого остается  $N-n+1$  свободных ящиков. Это дает

$$N(N-1)(N-2) \dots (N-n+1) \quad (1)$$

комбинаций. Но мы должны быть внимательными! Не все эти комбинации различны. В нашем рассуждении предполагалось, что шары можно отличить друг от друга. На самом деле мы не можем это сделать. Для того чтобы исправить расчет, надо разделить результат на число размещений  $n$  различных шаров в  $n$  ящиках. Поместим первый шар в один из  $n$  ящиков, второй шар — в один из  $n-1$  оставшихся ящиков и, наконец, последний шар можно поместить только в один-единственный ящик. Это дает

$$n(n-1)(n-2)(n-3) \dots (3)(2)(1) = n!. \quad (2)$$

Написанное произведение называется  $n$ -факториал и записывается как  $n$  с восклицательным знаком. Итак, полное число различных размещений  $n$  неразличимых шаров есть

$$\frac{N(N-1)(N-2)(N-3) \dots (N-n+1)}{n!}. \quad (3)$$

Умножив числитель и знаменатель на  $(N-n)!$ , получим

$$\frac{N!}{(n!)(N-n)!}. \quad (4)$$

Возвращаясь к монетам, умножим вероятность выбранной комбинации на число возможных перестановок и получим

$$P_N(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^N \frac{N!}{(n!)(N-n)!}. \quad (5)$$

Давайте проверим формулу для случая выпадения двух орлов при трех подбрасываниях монеты ( $n=2$ ,  $N=3$ ). Подставляя в (5), мы получим

$$P_3(2) = \frac{1}{8} \frac{3 \times 2 \times 1}{8(2 \times 1)(1)} = \frac{3}{8}. \quad (6)$$

Ответ правильный! Вы можете сами проверить формулу для других случаев.

Давайте теперь обратимся к несколько более сложному вопросу — бросанию игральной кости. Мы знаем, что при бросании игральной кости с равной вероятностью выпадают числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Например, какова вероятность появления тройки? Ответ: одна шестая. Какова вероятность появления двух троек подряд? Ответ:  $1/36$ , что есть  $(1/6)^2$ . Какова вероятность появления числа, отличного от тройки? Ответ:  $5/6$ . Какова вероятность появления двух троек, вслед за которыми следует какое-нибудь другое число? Ответ:  $(1/6)^2 (5/6)$ . Какова вероятность появления двух троек при трех бросаниях кости? Результат  $15/(6)^3$ , так как число, отличное от трех, может выпасть в одном из трех бросаний. Давайте сфор-

мулируем задачу в общем виде. Известно, что вероятность появления события при каком-то испытании есть  $p$ . Какова вероятность появления  $n$  событий при  $N$  испытаниях? Вероятность какой-либо выделенной комбинации  $n$  событий есть

$$p^n (1 - p)^{N-n}. \quad (7)$$

Число различных размещений  $n$  неразличимых объектов в ящиках дается соотношением (4)

$$\frac{N!}{(n!) (N-n)!}. \quad (8)$$

Для того чтобы найти вероятность появления  $n$  событий, мы перемножим эти два соотношения и получим

$$P_N(n) = p^n (1 - p)^{N-n} \frac{N!}{n! (N-n)!}. \quad (9)$$

Это так называемое *биномиальное распределение*, так как подобные члены возникают при разложении биннома

$$[(p) + (1 - p)]^N.$$

Для выпадения двух троек при трех бросаниях мы имеем  $p = 1/6$ ,  $n = 2$ ,  $N = 3$ . Подставляя в (9), получаем

$$P_3(2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 \frac{3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1)(1)} = \frac{15}{6^3}, \quad (10)$$

как и выше. Если мы бросаем пару игральных костей и суммируем выпавшие числа, то имеется 36 возможных комбинаций, как показано в таблице 1.

Т а б л и ц а 1

1+1=2						
1+2=3	2+1=3					
1+3=4	3+1=4	2+2=4				
1+4=5	4+1=5	2+3=5	3+2=5			
1+5=6	5+1=6	2+4=6	4+2=6	3+3=6		
1+6=7	6+1=7	2+5=7	5+2=7	4+3=7	3+4=7	
2+6=8	6+2=8	3+5=8	5+3=8	4+4=8		
3+6=9	6+3=9	4+5=9	5+4=9			
4+6=10	6+4=10	5+5=10				
5+6=11	6+5=11					
6+6=12						

Так, вероятность появления (в сумме) семи есть одна шестая, вероятность появления одиннадцати — одна восемнадцатая. Это намного более сложный случай, в котором в зависимости от выбора чисел проявляются различные вероятности. Можете ли вы вычислить вероятность того, что пять выпадает раньше семи или одиннадцати?

В качестве последнего примера мы познакомим вас с таблицей случайных чисел (табл. 2). Эта таблица взята из книги «Миллион случайных чисел». Такую таблицу можно составить, если воспользоваться игральной костью, хотя на самом деле это делается с помощью электронных вычислительных машин. Японская ассоциация стандартов выпускает икосаэдральную (двадцатигранную) кость. Каждая ее грань пронумерована от 0 до 9, причем цифры встречаются дважды. Заметим, что в таблице 2 имеется сто ячеек, каждая из которых состоит из 25 цифр. Какова вероятность того, что

данная цифра встретится в ячейке  $n$  раз? Мы можем получить ответ, воспользовавшись соотношением (9), приняв  $p = 1/10$  и  $N = 25$ . В качестве упражнения выберите цифру и проведите «экспериментальное» определение  $P_N(n)$  с помощью таблицы. Результат сравните с вычислениями по формуле (9). В качестве примера мы показываем на рис. 1 частоту нахождения  $n$

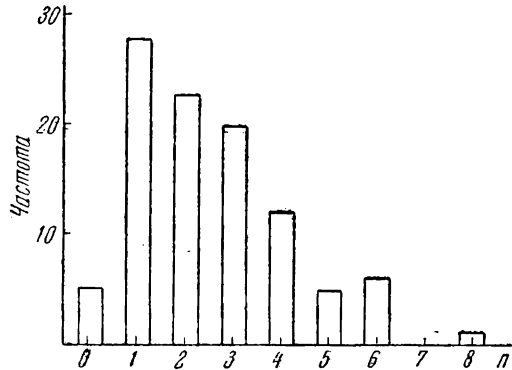


Рис. 1.

нулей в каждой из ячеек по 25 цифр как функцию  $n$ . Эти экспериментальные результаты получены с помощью таблицы 2 для случайных чисел. Так как имеется 100 ячеек, вероятность  $P(n)$  просто равна частоте, деленной на 100. Для сравнения мы приводим в таблице 3 результаты вычислений по теоретической формуле (9).

Какое среднее значение  $n$  мы ожидаем получить? Так как вероятность получения отдельной цифры есть  $p$  и имеется  $N$  цифр в ячейке, то

$$\bar{n} = pN. \quad (11)$$

Для данного случая, когда  $p = 1/10$  и  $N = 25$ , мы получим  $\bar{n} = 2,5$ . Используя наши «экспериментальные» данные, основанные на 100 «измерениях», мы получаем  $\bar{n} = 2,51$ . Мы можем взять ячейки парно, что дает нам  $N = 50$ , и подсчитать число нулей в каждой паре. Результаты при этих условиях представлены на рис. 2. Заметим, что распределение стало более симметричным относительно своего среднего значения  $\bar{n} = 5$ . Было бы желательно повторить эти «эксперименты» с другой цифрой.

Теперь мы готовы к проведению опыта с физической системой. Снова соберите схему, показанную на рис. 6 Р.3.1. Приблизив источник  $\text{Cs}^{137}$  с интенсивностью 10 мккюри к счетчику Гейгера — Мюллера, увеличьте напряжение на счетчике до появления импуль-

## Случайные числа

26687	74223	43546	45699	94469	82125	37370	23966	68926	87664
60675	75169	24510	15100	02011	14375	65187	10630	64421	66745
45418	98635	83123	98558	09953	60255	42071	40930	97992	93085
69872	48026	89755	28470	44130	59979	91063	28766	85962	77173
03765	86366	99539	44183	23886	89977	11964	51581	18033	56239
84686	57636	32326	19867	71345	42002	96997	84379	27991	21459
91512	49670	32556	85189	28023	88151	62896	95498	29423	38138
10737	49307	18307	22246	22461	10003	93157	66984	44919	30467
54870	19676	58367	20905	38324	00026	98440	37427	22896	37637
48967	49579	65369	74305	62085	39297	10309	23173	74212	32272
91430	79112	08685	05411	23027	54735	91550	06250	18705	18909
92564	29567	47476	62804	73428	04535	86395	12162	59647	97726
41734	12199	77441	92415	63542	42115	84972	12454	33133	48467
25251	78110	54178	78241	09226	87529	35376	90690	54178	08561
91657	11563	66036	28523	83705	09956	76610	88116	78351	50877
00149	84745	63222	50533	50159	60433	04822	49577	89049	16162
53250	73200	84066	59620	61009	38542	05758	06178	80193	26466
25587	17481	56716	49749	70733	32733	60365	14108	52573	39391
01176	12182	06882	27562	75456	54261	38564	89054	96911	88906
83531	15544	40834	20296	88576	47815	96540	79462	78666	25353
19902	98866	32805	61091	91587	30340	84909	64047	67750	87638
96516	78705	25556	35181	29064	49005	29843	68949	50506	45862
99417	56171	19848	24352	51844	03791	72127	57958	08366	43190
77699	57853	93213	27342	28906	31052	65815	21637	49385	75406
32245	83794	99528	05150	27246	48263	62156	62469	97048	16511
12874	72753	66469	13782	64330	00056	73324	03920	13193	19466
63899	41910	45484	55461	66518	82486	74694	07865	09724	76490
16255	43271	26540	41298	35095	32170	70625	66407	01050	44225
75553	30207	41814	74985	40223	91223	64238	73012	83100	92041
41772	18441	34685	13892	38843	69007	10362	84125	08814	66785
09270	01245	81765	06809	10561	10080	17482	05471	82273	06902
85058	17815	71551	36356	97519	54144	51132	83169	27373	68609
80222	87572	62758	14858	36350	23304	70453	21065	63812	29860
83901	88028	56743	25598	73349	47880	77912	52020	84305	02897
36303	57833	77622	02238	53285	77316	40106	38456	92214	54278
91543	63886	60539	96334	20804	72692	08944	02870	74892	22598
14415	33816	78231	87674	96473	44451	25098	29296	50679	07798
82465	07781	09938	66874	72128	99685	84329	14530	08410	45053
27306	39843	05634	96368	72022	01278	92830	40094	31776	41822
91960	82766	02331	08797	33858	21847	17391	53755	58079	48498
59284	96108	91610	07483	37943	96832	15444	12091	36690	58317
10428	96003	71223	21352	78685	55964	35510	94805	23422	04492
65527	41039	79574	05105	59588	02115	33446	56780	18402	36279
59688	43078	93275	31978	08768	84805	50661	18523	83235	50602
44452	10188	43565	46531	93023	07618	12910	60934	53403	18401
87275	82013	59804	78595	60553	14038	12096	95472	42736	08573
94155	93110	49964	27753	85090	77677	69303	66323	77811	22791
26488	76394	91282	03419	68758	89575	66469	97835	66681	03171
37073	34547	88296	68638	12976	50896	10023	27220	05785	77538
83835	89575	55956	93957	30361	47679	83001	35056	07103	63072

Значение  $P(n)$ 

$n$	Теория	Эксперимент	$n$	Теория	Эксперимент	$n$	Теория	Эксперимент
0	0,072	0,05	4	0,138	0,12	8	0,002	0,01
1	0,200	0,28	5	0,065	0,05	9	0,000	0,00
2	0,266	0,23	6	0,024	0,06	10	0,000	0,00
3	0,226	0,20	7	0,007	0,00			

сов на экране осциллографа. Затем поднимите напряжение на счетчике приблизительно на 50 в, повернув ручку потенциометра на 1/8 оборота. Теперь счетчик находится «на плато». Установите наименьшую скорость развертки инесите источник  $Cs^{137}$  достаточно далеко от счетчика, так чтобы на экране осциллографа

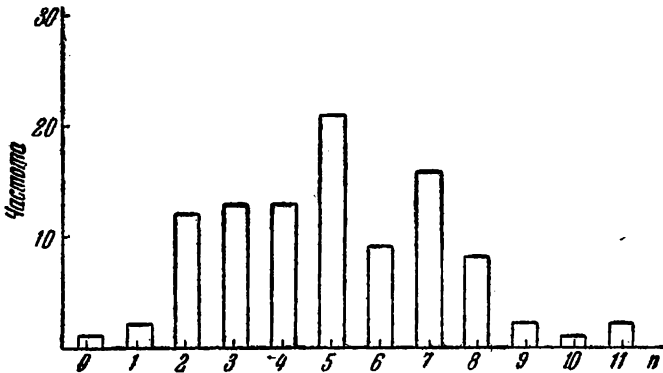


Рис. 2.

наблюдался в среднем 1 импульс за секунду. Определите число отсчетов в последовательные 10-секундные интервалы времени. Измерения проводите в течение 50 таких интервалов. Используя полученные результаты, постройте гистограмму, как это сделано на рис. 1 и 2, где частота появления  $n$  событий представлена как функция  $n$ .

Каким образом мы можем сравнить экспериментальные результаты с теорией? В формуле (9) вероятность  $P(n)$  выражена в зависимости от  $N$ , где  $N$  — максимально возможное значение  $n$  и  $p$  — вероятности отдельного события. Как мы видели, среднее число событий  $\bar{n} = Np$ . Как велико  $N$  в нашем опыте с радиоактивным источником? Или, другими словами, каково максимально возможное количество событий в 10-секундном интервале? По крайней мере в практике возможно (хотя чрезвычайно маловероятно), что за это время все ядра распадутся. Таким образом,  $N$  имеет

величину порядка числа ядер  $Cs^{137}$ . Для источника в 10 мкюри  $N = 3,5 \cdot 10^{13}$ . Для больших  $N$  формула (9) выражается в более простой форме.

Вспомним, как определяется основание натуральной системы логарифмов число  $e$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ 1 \pm \frac{1}{m} \right]^m = e^{\pm 1}. \quad (12)$$

Для малых  $p$  мы из формулы (9) получаем

$$P(n) = p^n e^{-(N-n)p} \frac{N!}{n! (N-n)!}. \quad (13)$$

Можно с уверенностью считать, что  $n$  много меньше  $N$ . Тогда

$$N! \approx (N)^n (N-n)! \quad (14)$$

Подставляя полученное выражение в (13), мы наконец получаем

$$P(n) = (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}. \quad (15)$$

Это распределение, называемое *распределением Пуассона*, не зависит от  $N$ . Используйте ваши экспериментальные данные для вычисления  $\bar{n}$ . Для того чтобы получить ожидаемую частоту событий, пронормируйте  $P(n)$ , умножив ее на число ваших измерений, и затем начертите график этой функции для сравнения с полученной гистограммой. Суммируя отсчеты в последовательные 10-секундные интервалы, вы можете получить данные за 25 двадцатисекундных интервалов. Нарисуйте гистограмму для сравнения с ожидаемой частотой. Заметим, что по мере увеличения  $\bar{n}$  распределение сжимается относительно  $\bar{n}$  и становится все более острым. При этом распределение Пуассона (15) переходит в *нормальное*, или *гауссово*, распределение

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-(n-\bar{n})^2/2\sigma^2}, \quad (16)$$

где  $\sigma = \sqrt{\bar{n}}$  называется *стандартным отклонением* и обычно определяется следующим образом:

$$\sigma^2 = \sum_n (n - \bar{n})^2 P(n). \quad (17)$$

Мы не будем устанавливать связь между выражениями (15) и (16). Читатель может найти это в одном из вводных курсов статистики. График функции (16) показан на рис. 3. Отметим, что при изменении  $(n-\bar{n})/\sigma$  на единицу от нуля (стандартное отклонение) вероятность падает до  $1/\sqrt{e}$ , т. е. до 60,5 процента, а на две единицы — до  $1/e^2$ , т. е. до 11,7 процента от своего пикового значения.

Мы часто сталкиваемся со случайными процессами, в которых обнаруживаются длительные флуктуации физических величин.



Например, броуновское движение и голубой цвет неба являются результатом флуктуаций плотности, которые в свою очередь связаны с поведением отдельных частиц.

Для демонстрации простого примера длительных флуктуаций соберем схему, показанную на рис. 4. Поднесите источник  $Cs^{137}$

достаточно близко к счетчику, так чтобы на развертке осциллографа наблюдались заметные скачки напряжения. Грубо говоря, мы можем

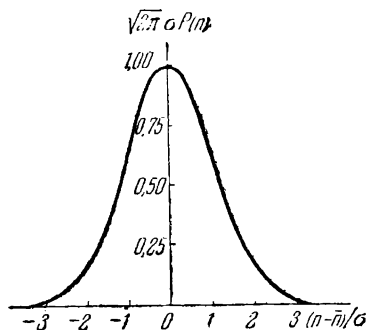


Рис. 3.

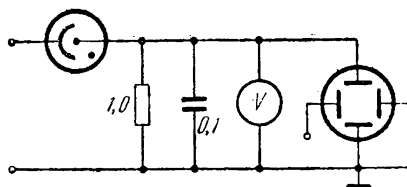


Рис. 4.

ожидать, что наблюдаемые флуктуации напряжения соответствуют изменениям в накоплении заряда за время, примерно равное постоянной времени цепи  $\tau = RC$ . В этих предположениях флуктуации заряда будут

$$\Delta Q \approx \sqrt{\bar{n}} q = \sqrt{r\tau} q, \quad (18)$$

где  $q$  — заряд в импульсе и  $r$  — скорость счета. Тогда выражение для флуктуаций напряжения запишется в виде

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C}. \quad (19)$$

Так как среднее напряжение в цепи равно

$$V = rRq, \quad (20)$$

то для отношения  $\Delta V$  к  $V$  мы получаем

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{1}{\sqrt{r\tau}}. \quad (21)$$

Приведенный вывод является приближенным по двум причинам. Во-первых, флуктуации, с которыми мы имеем дело, нельзя относить к определенному интервалу времени. В самом деле, мы имеем систему, в которой релаксация происходит экспоненциально. В П.3.2 будет показано, что точное выражение для стандартного отклонения в величине заряда имеет вид

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} q. \quad (22)$$

Во-вторых, возникает вопрос, как определить величину стандартного отклонения, если оценивать флуктуации визуально, фиксируя

разбросы амплитуды от максимума до минимума? Результат в значительной степени зависит от реакции и памяти наблюдателя. В ряде исследований предполагается, что наблюдаемые разбросы соответствуют четырем стандартным отклонениям. Это означало бы, что относительные флуктуации описываются выражением

$$\frac{4\Delta V}{V} = 4 \sqrt{\frac{2}{r\tau}}. \quad (23)$$

Используя экспериментальную схему, изображенную на рис. 4, определите относительную амплитуду флуктуаций в широком интервале скоростей счета и постоянных времени и сравните ваши наблюдения с формулой (23).

### Приложение 3.2. Флуктуации заряда

В Р.3.2 мы познакомились с распределениями случайных величин и их флуктуациями. Мы подсчитали число распадов за время  $\Delta t$  и нашли, что 1) в том случае, когда число возможных событий не ограничивается, и 2) среднее число наблюдаемых событий велико, вероятность наблюдения  $n$  событий в интервале  $\Delta t$  описывается нормальным, или гауссовым, распределением. Среднее квадратичное отклонение от среднего значения, или стандартное отклонение, просто равно корню квадратному из среднего числа событий  $\bar{n}$  за время  $\Delta t$ .

В реальном эксперименте, например с использованием счетчика Гейгера — Мюллера, стандартное отклонение в величине собираемого заряда за время  $\Delta t$  равно

$$\Delta Q = \sqrt{r\Delta t} q, \quad (24)$$

где  $r$  — средняя скорость счета, а  $q$  — заряд, собираемый в одном импульсе.

Теперь мы поставим несколько иной вопрос. Пусть заряды поступают на  $RC$ -цепочку, показанную на рис. 5. Пусть  $r$  по-прежнему обозначает среднюю скорость счета зарядов. Чему равно среднее квадратичное отклонение величины заряда на емкости? Ток  $I$ , протекающий через фильтр, будет случайной функцией времени, как показано на рис. 6. Какова величина среднего заряда на емкости? Так как падения напряжения на емкости и сопротивлении должны быть одинаковыми, то

$$\frac{\bar{Q}}{C} = IR = rqR. \quad (25)$$

Здесь  $q$  — заряд, протекающий в импульсе, и  $I = rq$  — средний ток. Разрешая выражение (25) относительно  $\bar{Q}$ , получаем

$$\bar{Q} = r\tau q, \quad (26)$$

где  $\tau = RC$  — постоянная времени фильтра.



Рис. 6.

Вычислим дисперсию заряда  $(\Delta Q)^2$ . В небольшой интервал времени  $\Delta t$  в момент  $t'$  (рис. 6) дисперсия записывается в виде

$$(\Delta Q)^2(t') = rq^2 \Delta t. \quad (27)$$

Так как заряд конденсатора изменяется в соответствии с формулой

$$Q(t) = Q(t') e^{-(t-t')/\tau}, \quad (28)$$

то можно ожидать, что дисперсия заряда, накопленного на емкости за время  $\Delta t$  в момент  $t'$ , меняется со временем следующим образом:

$$(\Delta Q)^2(t) = rq^2 \Delta t e^{-2(t-t')/\tau}. \quad (29)$$

Проинтегрируем (29) по времени, предшествующему моменту  $t$ . Тогда

$$(\Delta Q)^2 = rq^2 \int_{-\infty}^t e^{-2(t-t')/\tau} dt' = \frac{1}{2} r\tau q^2. \quad (30)$$

Извлекая корень из (30), мы получаем среднее квадратичное отклонение в величине заряда

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} q. \quad (31)$$

Легко видеть, что стандартное отклонение заряда, накопленного на экспоненциальном фильтре с постоянной времени  $\tau$ , такое же, как стандартное отклонение в величине протекающего заряда за время  $\Delta t = \tau/2$ . Прочитайте следующие статьи, в которых изложены занимательные задачи, связанные со случайными процессами: Kaiser S. K u n z, Paradoxical Features of Uniformly Distributed Random Events, American Journal of Physics 32, 562 (1964); R. E. В e l l, Three Problems on Random Events, American Journal of Physics 33, 219 (1965).

Имеется еще одна проблема, которую мы можем исследовать экспериментально. Это вопрос о спектре импульсов после пересчетной схемы. Пусть импульсы на входе пересчетной



Рис. 7.

схемы имеют среднюю скорость  $r$ , а на выходе  $r/S$ , как показано на рис. 7. Являются ли выходные импульсы случайно распределенными во времени? То есть могут ли они описываться распределением Пуассона? Каково стандартное отклонение заряда  $\Delta Q$ , если эти импульсы проходят через фильтр с постоянной времени  $\tau$ ?

Вероятность того, что за время  $\Delta t$  на вход поступит  $n$  импульсов, дается формулой (15)

$$P_{\text{вх}}(n) = (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}, \quad (32)$$

где  $\bar{n} = r\Delta t$ . Вероятность наблюдения  $m$  выходных импульсов за тот же временной интервал должна быть равна сумме вероятностей поступления на вход схемы от  $mS$  до  $(m+1)S$  импульсов

$$P_{\text{вых}}(m) = \sum_{n=mS}^{(m+1)S-1} (\bar{n})^n \frac{e^{-\bar{n}}}{n!}. \quad (33)$$

Если  $S$  достаточно мало, так что  $P_{\text{вх}}(n)$  медленно меняется в интервале  $\Delta n = S$ , то выражение (33) можно переписать в виде

$$P_{\text{вых}}(m) = S e^{-\bar{m}S} \frac{(\bar{m}S)^{mS}}{(mS)!}. \quad (34)$$

Наконец, если  $\Delta t$  — достаточно большой интервал, так что  $mS$  велико, мы получаем гауссово распределение

$$P_{\text{вых}}(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(m-\bar{m})^2/2\sigma^2}, \quad (35)$$

где  $\sigma = \sqrt{m/S} = \sqrt{\bar{n}/S}$ .

Заметим, что стандартное отклонение равно  $\sqrt{m/S}$ , а не  $\sqrt{\bar{m}}$ , как для случайно распределенных импульсов. Таким образом, выходные импульсы расположены более равномерно, чем это следовало бы для случайного распределения.

При наличии пересчетной схемы вы можете проверить, что флуктуации заряда теперь будут характеризоваться формулой

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{\tau r}{2}} \frac{q}{S}, \quad (36)$$

где  $r$  — средняя скорость поступления входных импульсов.

### Работа 3.3. ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛАМПЫ

Здесь мы будем изучать физические процессы, связанные с работой вакуумного диода. В Р.3.4 будут измерены флуктуации тока в этом приборе. На основе этих измерений мы определим заряд электрона.

Для этих измерений весьма удобно использовать вакуумный диод типа Ferranti GRD7, показанный на рис. 1. Катод представляет собой вольфрамовую нить диаметром 0,125 мм. Он окружен цилиндрическим анодом с внутренним диаметром 0,65 см. Заметим, что анод разделен на три секции. Наружные секции называются охранными кольцами. Они имеют потенциал центральной секции и служат для уменьшения рассеянного поля вблизи от нее.

Вольфрамовая нить нагревается до температуры  $2300 \pm 2600$  °К. Электроны, испущенные катодом, попадают на анод, находящийся под потенциалом  $0 \div (+300)$  в. Типичные вольтамперные характеристики при различных температурах катода показаны на рис. 2. Мы отметим два различающихся режима работы диода. При низких анодных напряжениях  $V$  катод окружен плотным облаком пространственных зарядов, которые непрерывно испускаются и поглощаются. На анод попадают только те электроны, которые достаточно далеко отходят от катода. В этих условиях изменение потенциала внутри лампы и ток  $I$  определяются пространственным зарядом. По мере увеличения анодного напряжения все больше и больше электронов вырывается из области пространственного заряда и попадает на анод. При достаточно больших токах пространственный заряд исчезает и ток ограничивается лишь скоростью эмиссии электронов с катода. Поведение пространственно-

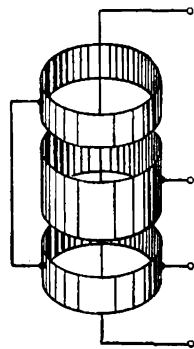


Рис. 1.

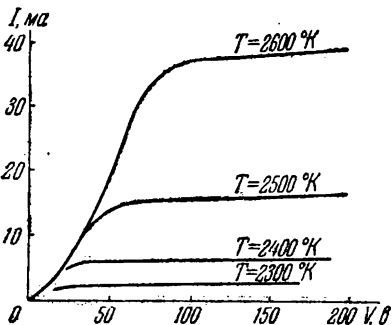


Рис. 2.

го заряда в диоде и распределение потенциала для различных режимов работы представлены на рис. 3.

Зависимость тока насыщения от температуры описывается формулой Ричардсона — Дашмена

$$j = AT^2 e^{-\phi/kT}, \quad (1)$$

где  $j$  — ток, приходящийся на единицу площади,  $\phi$  — работа выхода для металлической поверхности (около 4,5 эв для вольфрама)

и  $k$  — постоянная Больцмана. Для вольфрама  $A$  имеет величину порядка  $75 \text{ а}/(\text{см}^2 \cdot \text{град}^2)$ . Формула (1) выводится в элементарных учебниках по статистической физике. Количество электронов  $N$ , которые имеют достаточную энергию для того, чтобы вырваться из металла, пропорционально  $v^3 e^{-\phi/kT}$ , где  $v$  — скорость вылета.

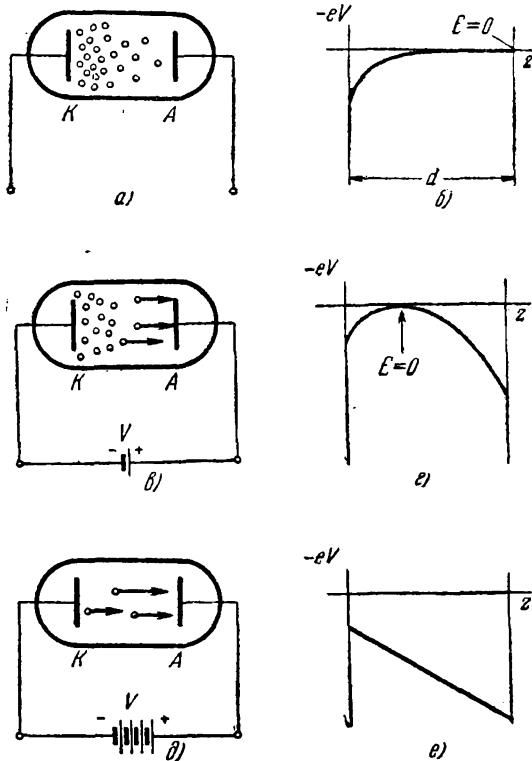


Рис. 3. Рассмотрим поведение вакуумного диода в разомкнутой цепи. В лампе будет накоплен пространственный заряд (а). Распределение потенциала в диоде будет таким, как показано на рисунке. Электрическое поле равно нулю на аноде (б). Если к диоду приложить небольшую разность потенциалов, то через него начнет течь ток (с) и точка, в которой поле равняется нулю, будет перемещаться к катоду (д). При очень больших напряжениях на диоде пространственный заряд исчезает (е) и электрическое поле в диоде становится однородным (е).

Поток частиц пропорционален  $Nv$ , или  $v^4 e^{-\phi/kT}$ . И, наконец, среднее значение квадрата скорости пропорционально  $T$ . Отсюда следует выражение (1). В режиме пространственного заряда плотность тока следует закону

$$j = \sqrt{\frac{2e}{m}} \left( \frac{2}{3d} \right)^2 V^{3/2}, \quad (2)$$

где  $d$  — расстояние между катодом и анодом, причем предполагается, что поверхности электродов плоскопараллельны.

Будем считать, что те электроны, которые вышли из области пространственного заряда, ускоряются по направлению к аноду без столкновений. При движении в области положительного потенциала происходит увеличение кинетической энергии электрона за счет уменьшения его потенциальной энергии. Пренебрегая начальной тепловой скоростью электронов, можно написать

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV. \quad (3)$$

Так как все электроны вне области пространственного заряда одинаково движутся по направлению к аноду, то для плотностей токов и зарядов имеем

$$j = \rho v, \quad \rho = \frac{j}{v}, \quad (4)$$

где плотность тока  $j$  является постоянной величиной, если электроды плоскопараллельны. Выражение для  $\rho$  покажется хорошо знакомым каждому, кто ездил по шоссе. Там, где транспорт движется наиболее быстро, плотность его наименьшая, и наоборот.

Какова связь между плотностью заряда и потенциалом внутри лампы? Будем рассматривать заряженный слой толщиной  $dz$ , как показано на рис. 4, тогда электрические поля  $E_1$  и  $E_2$  связаны соотношением

$$E_2 - E_1 = 4\pi\rho dz, \quad (5)$$

которое непосредственно следует из закона Гаусса. Если  $\rho$  — непрерывная функция координаты, то  $E_2$  можно представить в виде

$$E_2 = E_1 + \left(\frac{dE}{dz}\right) dz. \quad (6)$$

Подставляем последнее соотношение в (5). Тогда

$$\frac{dE}{dz} = 4\pi\rho. \quad (7)$$

Так как электрическое поле связано с потенциалом соотношением

$$E = -\frac{dV}{dz}, \quad (8)$$

то

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho. \quad (9)$$

Исключая  $\rho$  из формул (3) и (4) и подставляя  $\rho$  в соотношение (9), получим

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \left(\frac{m}{2eV}\right)^{1/2} j. \quad (10)$$

Умножим обе части выражения (10) на  $dV/dz$  и произведем интегрирование

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \left(\frac{2mV}{e}\right)^{1/2} j. \quad (11)$$

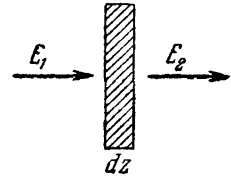


Рис. 4.

Извлекаем квадратный корень из обеих частей (11) и интегрируем полученное выражение. В результате имеем

$$\left(\frac{4}{3}\right) V^{3/4} = 2j^{1/2} \left(\frac{2m}{e}\right)^{1/4} d, \quad (12)$$

где  $d$  — расстояние до анода и  $V$  — потенциал анода. Возведя обе части выражения (12) в квадрат и произведя перестановку членов, мы наконец получаем формулу (2). Отметим, что формула (2) справедлива при условии, что между катодом и анодом имеется область, где  $dV/dz = 0$ . С увеличением электрического поля эта область отодвигается от анода и в конце концов исчезает вблизи катода.

Соберите схему, изображенную на рис. 5. Нить накала подсоединяется к источнику питания 6,3 в (НН). Температура нити может регулироваться с помощью реостата, соединенного последовательно с источником питания. Ток, проходящий через центральную часть

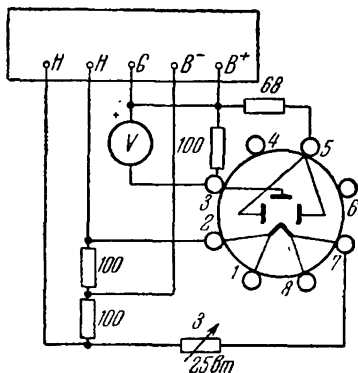


Рис. 5.

анода, можно измерять вольтметром  $V$  по падению напряжения на малом сопротивлении, включенном последовательно с диодом. Источник питания  $B^+$  заземлен, так что корпус вольтметра будет находиться под потенциалом земли. Зато нить накала подключается к источнику отрицательного потенциала  $B^-$ , дающего напряжение до  $-300$  в. Так что будьте осторожны.

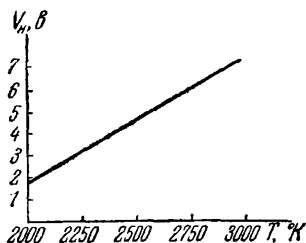


Рис. 6.

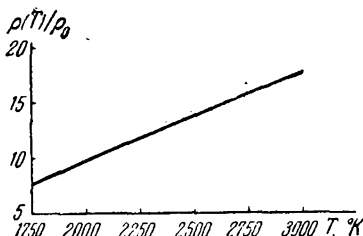


Рис. 7.

Установите напряжение на аноде 100 в и увеличивайте температуру нити накала, пока ток через центральный анод не достигнет величины 1 ма. Если у вас имеется оптический пирометр, то определите температуру нити. Снимите вольтамперную характеристику и начертите ее в двойном логарифмическом масштабе на графленой бумаге. При потенциале анода 100 в увеличьте температуру нити накала так, чтобы анодный ток достиг 5 ма, и снова сни-



мите характеристику. И, наконец, определите характеристику при максимальной температуре нити. Если у вас нет пирометра, то для определения температуры нити накала можно использовать график на рис. 6, который связывает падение напряжения на вольфрамовой нити накала  $V_n$  с температурой  $T$ . Температуру нити накала можно определить иначе, если измерить сопротивление нити и воспользоваться графиком на рис. 7. На графике представлена температурная зависимость отношения сопротивлений при температуре  $T$  и при комнатной температуре ( $70^\circ\text{F}$  или  $294^\circ\text{K}$ ). Определите наклон начальной части вольтамперной характеристики и результат сравните с формулой (2). Начертите  $\lg I_s/T^2$  как функцию  $1/T$ , где  $I_s$  — ток насыщения. Если формула (1) выполняется, то вы должны получить прямую линию. Найдите угловой коэффициент наклона прямой и ординату точки пересечения графика с вертикальной осью. Вычислите работу выхода  $\phi$  в эв и  $A$  в  $\text{a/cm}^2$ .

### Приложение 3.3. Условия работы магнетрона

Как будет происходить движение электронов в диоде с цилиндрической симметрией при наложении магнитного поля  $B$  параллельно оси симметрии? Для решения этой задачи мы должны решить уравнение движения электрона

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (13)$$

где вектор  $\mathbf{E}$  направлен в радиальном направлении,  $\mathbf{B}$  — по оси симметрии, а  $-e$  — заряд электрона. Для того чтобы упростить решение уравнения (13), запишем его в системе координат, вращающейся с частотой  $\omega$ . Для этого вспомним соотношение между производными по времени в неподвижной и вращающейся системах отсчета:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (14)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\delta^2\mathbf{r}}{\delta t^2} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (15)$$

Второй член в правой части выражения (15) называется *кориолисовым ускорением*, а третий — *центробежным ускорением*. Подставляя (14) и (15) в уравнение (13), получаем

$$m \frac{\delta^2\mathbf{r}}{\delta t^2} = -e\mathbf{E} + m \frac{\delta\mathbf{r}}{\delta t} \times \left( \frac{e\mathbf{B}}{mc} - 2\boldsymbol{\omega} \right) + m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \left( \boldsymbol{\omega} - \frac{e\mathbf{B}}{mc} \right). \quad (16)$$

Упростим выражение (16), принимая  $\omega$  равной ларморовской частоте прецессии:

$$\omega_L = \frac{e\mathbf{B}}{2mc}. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) примет вид

$$m \frac{\delta^2\mathbf{r}}{\delta t^2} = -e\mathbf{E} + m\omega_L \times (\omega_L \times \mathbf{r}). \quad (18)$$

Так как векторные величины в правой части (18) направлены по радиусу, то уравнение (18) можно переписать в скалярной форме

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -eE - m\omega_L^2 r. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19) по радиусу  $r$ , получаем

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = -eV - \frac{1}{2} m (r\omega_L)^2. \quad (20)$$

Радиальная кинетическая энергия равна разности между электростатическим потенциалом  $eV$  и выражением  $\frac{1}{2} m (r\omega_L)^2$ , которое

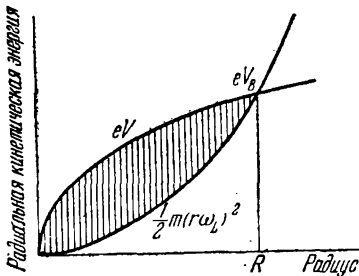


Рис. 8.

называется *центробежным потенциалом*. Разность электростатического и центробежного потенциалов представлена на рис. 8 в виде заштрихованной области.

Электрон, вылетевший из катода, ускорится в направлении анода. Если центробежный потенциал вблизи анода меньше, чем электростатический потенциал, то электрон достигнет анода. Однако если центробежный потенциал превышает электростатический потенциал,

то электрон никогда не попадет на анод. Во вращающейся системе координат электрон будет осциллировать в промежутке между катодом и анодом. (В лабораторной системе на колебательное движение накладывается вращательное движение с ларморовской частотой.) Таким образом, можно ожидать, что когда центробежный потенциал  $\frac{1}{2} m (R\omega_L)^2$  при  $r = R$  превосходит  $eV_B$  (рис. 8), ток в лампе прекратится. Пороговая величина магнитного поля следует из определения  $\omega_L$  и равна

$$B = \frac{2mc}{eR} \sqrt{\frac{2e}{m} V_B}. \quad (21)$$

Поместите диод в соленоид и, используя схему, изображенную на рис. 5, определите граничные поля  $B$  для нескольких значений потенциалов анода. Для проверки соотношения (21) начертите график  $B^2$  в функции  $V$ . Используйте свои экспериментальные результаты для вычисления  $e/m$ . Какова максимальная скорость электрона, если на диод подано напряжение 20 в? Чему равна ларморовская частота прецессии в герцах? Подумайте, каким образом можно определить эту частоту непосредственно?

Магнитное поле в центре соленоида, который имеет длину 10 см, внутренний диаметр 8 см и внешний диаметр 12,5 мм, составляет 0,7 величины поля длинного соленоида. Граничное условие, о ко-

тором мы здесь говорили, используется в мощном генераторе сантиметровых волн — магнетроне. В этом приборе вращающиеся пучки электронов индуцируют электромагнитные колебания в резонансной системе, которая смонтирована в генераторе.

#### Работа 3.4. ЭЛЕКТРОННЫЙ ДРОБОВОЙ ШУМ

В этой работе мы будем измерять шумы, возникающие в диоде в режиме, при котором достигается ток насыщения, и затем из результатов измерений определим заряд электрона. Как было отмечено в Р.3.2, стандартное отклонение в числе отсчетов, зарегистрированных в некоторый интервал времени, равно корню квадратному из среднего числа отсчетов за этот интервал. Таким образом, если  $r$  есть средняя скорость счёта, а  $q$  — заряд, связанный с одним событием, то среднее квадратичное отклонение в величине собранного заряда за время  $\Delta t$  дается выражением

$$\Delta Q = \sqrt{r \Delta t} q. \quad (1)$$

Как показано в П.3.2, в том случае, когда заряд попадает на RC-цепочку с постоянной времени  $\tau$ , среднее квадратичное отклонение  $\Delta Q$  будет определяться соотношением

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} q. \quad (2)$$

В Р.3.2 под  $q$  подразумевался заряд, протекающий при одном срабатывании счетчика Гейгера — Мюллера. В данном эксперименте флуктуации возникают из-за появления на аноде отдельных электронов, так что заряд  $q$  просто равен элементарному заряду  $e$ . При этом выражение (2) принимает вид

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} e. \quad (3)$$

Соберите схему, показанную на рис. 1. Схема включения диода подобна схеме Р.3.3, за исключением того, что для питания накала используется постоянный ток от свинцового кислотного аккумулятора. Питание накала переменным током 50 гц приводит к появлению нежелательной переменной составляющей в анодной цепи. Шумы диода необходимо усиливать приблизительно в сто раз, для того чтобы их можно было наблюдать на экране осциллографической трубки с чувствительностью порядка 0,1 в/см.

Подайте на диод напряжение 150 в и с помощью реостата в цепи накала установите анодный ток, равный 5 ма. При этом падение напряжения на сопротивлении 10 ком в анодной цепи составит 50 в. С помощью реостата в цепи базы транзистора задайте ток коллектора, равный 1 ма. Тогда вы должны наблюдать на экране осциллографа шумовые импульсы с амплитудой несколько десятых вольта. Теперь, чтобы найти  $e$  из формулы (3), остается определить флук-

туацию заряда  $\Delta Q$  и время релаксации  $\tau$ . Выразим соотношение (3) в более удобной для нас форме. Так как  $er = I$ , где  $I$  — ток диода, то соотношение (3) можно переписать в виде

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{eI\tau}{2}}. \quad (4)$$

Разрешая (4) относительно  $e$ , получаем наконец

$$e = 2 \frac{(\Delta Q)^2}{I\tau}. \quad (5)$$

Для определения  $\tau$  и  $\Delta Q$  подайте контрольные синусоидальные импульсы на базу транзистора через сопротивление  $1 \text{ Мом}$ . Установите частоту следования импульсов равной  $1 \text{ кГц}$  и увеличивайте

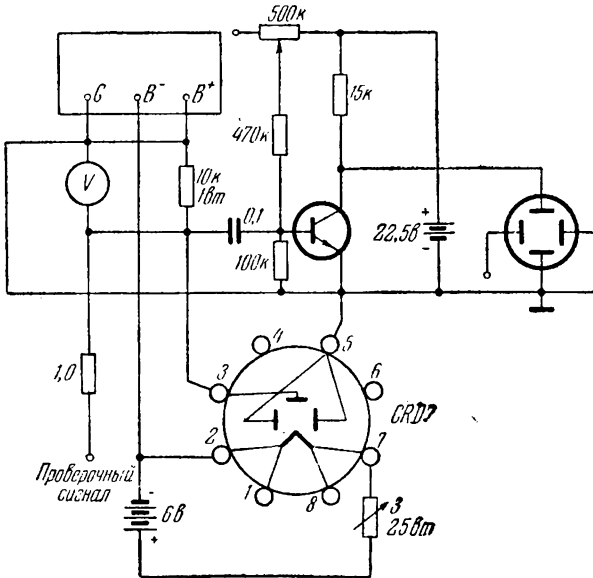


Рис. 1.

их амплитуду, пока величина наблюдаемого сигнала не превысит уровень шумов приблизительно в 10 раз. Затем повышайте частоту, пока амплитуда сигнала не упадет до  $1/\sqrt{2} = 0,707$  своего первоначального значения. Эквивалентная схема транзистора (рис. 2) была рассмотрена в Р.2.2 и Р.2.3. Частота синусоидального сигнала  $\nu_c$ , для которой коэффициент усиления падает в  $1/\sqrt{2}$  раз, определяется как  $\nu_c = 1/2\pi RC$ . Отсюда следует, что время релаксации

$$\tau = \frac{1}{2\pi\nu_c}. \quad (6)$$

Для определения  $\Delta Q$  снова установите частоту следования импульсов равной 1 кГц и подберите их амплитуду так, чтобы среднее квадратичное напряжение суммарных импульсов, наблюдаемых на экране осциллографа, было в  $\sqrt{2}$  раз больше среднего квадра-

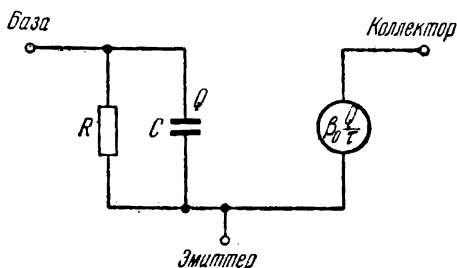


Рис. 2.

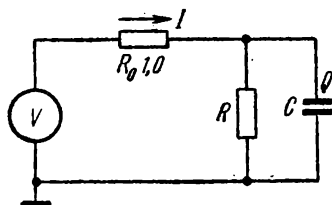


Рис. 3.

тичного напряжения шумов. При этих условиях средние квадратичные напряжения контрольных и шумовых импульсов равны. Можете ли вы доказать это утверждение? В соответствии со схемой на рис. 3 для контрольного синусоидального сигнала имеем

$$V = V_0 \cos \omega t. \quad (7)$$

Подводимый ток будет определяться как

$$I = \frac{V}{R_0} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t, \quad (8)$$

а заряд на емкости будет

$$Q = I\tau = \frac{V_0\tau}{R_0} \cos \omega t. \quad (9)$$

Наконец, среднее квадратичное отклонение в величине заряда будет равно

$$\Delta Q \approx \frac{Q_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_0\tau}{\sqrt{2}R_0}. \quad (10)$$

Определите с помощью осциллографа величину  $V_0$  и подсчитайте  $\Delta Q$  по формуле (10). Наконец, подставьте  $\Delta Q$  в формулу (5) и найдите  $e$ . Выразите  $I$  в амперах и  $\Delta Q$  — в кулонах. Тогда вы должны получить заряд электрона также в кулонах

$$e = (1,60210 \pm 0,00007) \cdot 10^{-19} \text{ к.} \quad (11)$$

Сравните полученную вами величину  $e$  с общепринятым значением. Определите принципиальные источники ошибок и оцените их величины. Можете ли вы объяснить расхождение между полученным вами значением  $e$  и величиной, приведенной выше?

Возвратитесь к схеме на рис. 1. Установите анодное напряжение равным 75 в и увеличивайте температуру нити накала, пока анодный ток достигнет величины 5 ма. Обратите внимание на существенное уменьшение шумов.

Объясните, почему в режиме работы с пространственным зарядом уровень шумов намного меньше, чем в режиме, при котором достигается ток насыщения.

### Работа 3.5. ФОТОЭМИССИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

Последние четыре работы этой части лабораторного курса относятся к разделу, который мы будем называть «физикой фотонов». В этих экспериментах подчеркивается фотонный характер света. При изложении материала мы будем постоянно сравнивать результаты проводимых исследований с основными результатами работ Р.2.9 — Р.2.12, где изучались процессы генерации, детектирования, распространения, поляризации и интерференции микроволнового излучения. Отметим как поразительное различие, так и замечательное сходство этих измерений, проводимых в совершенно различных областях электромагнитного спектра.

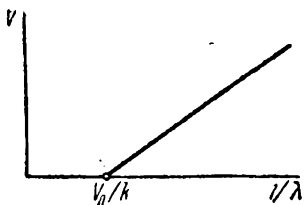


Рис. 1.

Явление фотоэлектронной эмиссии с поверхности под действием света драматически нарушает предсказания классической электромагнитной теории. Давайте вспомним, как ведут себя полупроводниковые диоды, которые использовались для регистрации микроволнового излучения в Р.2.9 — Р.2.12.

В этих экспериментах мы нашли, что измеренное напряжение на диоде при разомкнутой цепи (напряжение, при котором ток, поступающий во внешнюю цепь, пренебрежимо мал) было пропорционально мощности микроволнового излучения, попадающего на диод. При фиксированной подводимой мощности (которая определяется напряженностью электрического поля и разностью потенциалов на диоде) регистрируемое напряжение почти не зависит от частоты. Как нам известно, такие детекторы одинаково хорошо работают как в диапазоне радио- и звуковых частот, так и при более низких частотах.

Мы найдем, что в противоположность диоду, регистрирующему микроволновое излучение, напряжение на фотодетекторе при разомкнутой цепи не зависит от интенсивности света (однако, если бы измерялся фототок в замкнутой цепи, то мы бы обнаружили, что он пропорционален интенсивности падающего света). Далее, в противоположность диоду будет установлено, что напряжение на фотодетекторе при разомкнутой цепи является функцией длины волны падающего света, а именно

$$V = \frac{h}{\lambda} - V_0. \quad (1)$$

Эта зависимость приведена на рис. 1. Существует некоторая пороговая длина волны  $\lambda = h/V_0$ . Если длина волны падающего света больше, чем  $\lambda = h/V_0$ , то независимо от его интенсивности фототок

будет отсутствовать. Величина пороговой длины волны зависит от материала поверхности фотодетектора и обычно находится в видимой или в ближней инфракрасной области спектра.

Представленная на рис. 1 зависимость была впервые объяснена Эйнштейном в 1905 г. и послужила доказательством квантования электромагнитной энергии. Эйнштейн утверждал, что когда фотон поглощается поверхностью, то вся его энергия передается одному электрону. Вылетевший электрон будет иметь энергию

$$\frac{1}{2} mv^2 = h\nu - e\varphi, \quad (2)$$

где  $h$  — постоянная Планка ( $6,6256 \cdot 10^{-27}$  эрг · сек), а  $e\varphi$  есть работа выхода электрона за пределы поверхности тела. Как мы видели в Р.3.3, работа выхода определяет также и интенсивность термоэлектронной эмиссии. Представим себе, что фотодетектор имеет геометрию, показанную на рис. 2. Поглощающая свет поверхность находится в центре сферической полости. Испущенные со скоростью  $v$  электроны собираются на сферическую поверхность. При этом на центральном электроде, который называется *фотокатодом*, остается избыточный положительный заряд. Поле заряда замедляет движение электронов к аноду. Когда заряд на катоде становится достаточно большим, последующие фотоэлектроны не могут достигнуть анода и возвращаются обратно на катод. Величина этого тормозящего потенциала определяется соотношением

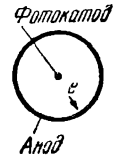


Рис. 2.

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 = h\nu - e\varphi. \quad (3)$$

Разделим обе части соотношения (3) на  $e$  и вместо  $v$  запишем  $c/\lambda$ . Тогда

$$V = \frac{hc}{e} \frac{1}{\lambda} - \varphi. \quad (4)$$

Из сравнения последнего соотношения с (1) следует, что коэффициент пропорциональности  $k = hc/e$ , а потенциал  $V_0$  равен потенциальному барьеру для поверхности фотокатода.

В проведенном рассуждении мы предполагали, что катод и анод сделаны из одного и того же материала. Если материалы катода и анода различны, то в выражение (3) надо добавить член, равный разности контактных потенциалов этих поверхностей. Учет этого члена приводит к тому, что  $V_0$  становится равным потенциальному барьеру анода, а не катода!

Самые ранние опыты по фотоэлектрическому эффекту проводились с щелочными металлами, которые характеризуются низкой работой выхода и относительно высоким выходом фотоэлектронов. Даже при этих условиях вероятность вылета фотоэлектрона составляла всего около 0,1 процента. Поэтому при умеренных интенсивностях света измерение фототока приходилось проводить в мик-

роамперном диапазоне. Современные фотоэлементы с сурьмяно-цезиевыми фотокатодами обладают рядом с низкой работой выхода высоким выходом фотоэлектронов, достигающим 20 процентов. Однако подобные фотокатоды имеют существенный недостаток,

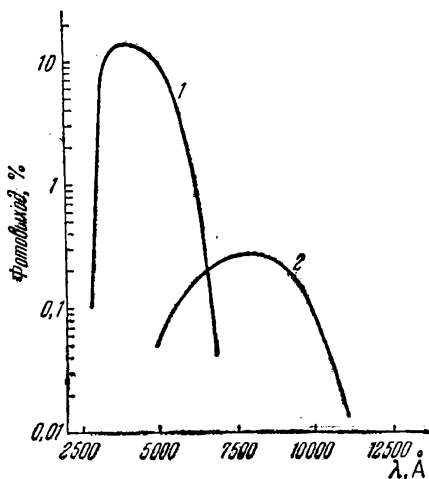


Рис. 3.

осложняющий проведение измерений величины  $hc/e$ , который заключается в том, что работа выхода фотокатода неодинакова по его поверхности. По этой причине невозможно получить резкое обрезание фототока. И все же, используя промышленные образцы фотоэлементов, можно добиться точности  $10 \div 20$  процентов при определении  $hc/e$ .

На рис. 3 представлены зависимости выхода фотоэлектронов от длины волны падающего света для двух фотокатодов, выпускаемых промышленностью. Характеристика 1 относится к сурьмяно-цезиевому фотокатоду, находящемуся в колбе из известкового стекла. Характеристика 2 дана для составного серебряно-цезиевого и сурьмяно-цезиевого фотокатода в такой же колбе. Максимальный выход в первом случае составляет около 13% при  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ , а во втором — приблизительно 0,3% при  $\lambda = 8000 \text{ \AA}$ .

На рис. 3 представлены зависимости выхода фотоэлектронов от длины волны падающего света для двух фотокатодов, выпускаемых промышленностью. Характеристика 1 относится к сурьмяно-цезиевому фотокатоду, находящемуся в колбе из известкового стекла. Характеристика 2 дана для составного серебряно-цезиевого и сурьмяно-цезиевого фотокатода в такой же колбе. Максимальный выход в первом случае составляет около 13% при  $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ , а во втором — приблизительно 0,3% при  $\lambda = 8000 \text{ \AA}$ .

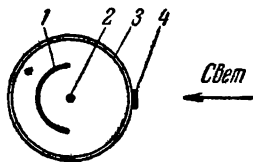


Рис. 4.

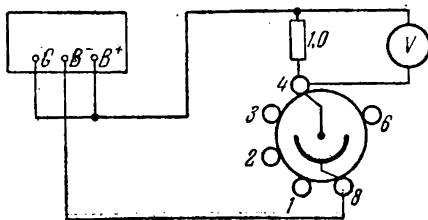


Рис. 5.

Фотокатод с характеристикой 1 используется в промышленном фотоэлементе типа 929, который изображен на рис. 4. Фотокатод 1 представляет собой полуцилиндр. Проволока, натянутая по его оси, является анодом 2. Устройство заключено в колбу из известкового стекла 3. Направление падающего света такое, как показано на рис. 4. Из-за сравнительно высокого давления паров сурьмяно-цезиевого покрытия катода на аноде откладывается материал фото-



катода. Если падающий свет будет попадать на анод, то возможно появление обратного фототока. Для устранения этого эффекта анод закрывается светозащитным экраном 4.

Для того чтобы снять зависимость фототока от напряжения для фотоэлемента 929, соберите схему, изображенную на рис. 5. При проведении данного и последующих измерений удобно использовать ртутную лампу. Ее спектральная характеристика представлена на рис. 6. Интенсивности линий  $I$  в интервалах по  $100 \text{ \AA}$  указаны в процентах по отношению к потребляемой энергии. С помощью набора фильтров можно выделить три основные линии в видимой части спектра. Линии  $4358 \text{ \AA}$ ,  $5461 \text{ \AA}$  и  $5790 \text{ \AA}$  выделяются соответственно темно-голубым, зеленым и желтым фильтрами.

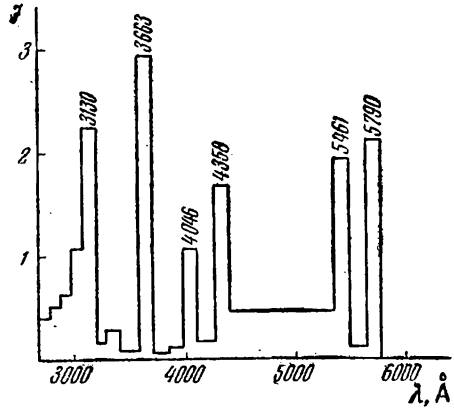


Рис. 6.

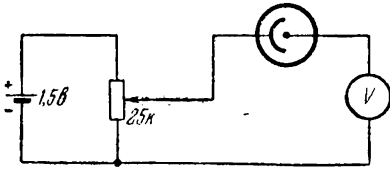


Рис. 7.

Направьте на фотоэлемент 929 свет с длиной волны  $5461 \text{ \AA}$  от ртутной лампы и измерьте фототок в зависимости от напряжения. Определите, сколько фотонов попадает на фотокатод за секунду в предположении, что выход электронов составляет 5 процентов. Для измерения величины тормозящего напряжения соберите схему, представленную на рис. 7. Осветите фотокатод светом с длиной волны  $5461 \text{ \AA}$  и установите с помощью потенциометра такое напряжение на фотоэлементе, чтобы ток в нем отсутствовал. При этом показание вольтметра будет равно нулю. Измерьте напряжение по схеме рис. 8. Повторите измерения для линий  $4358 \text{ \AA}$  и  $5790 \text{ \AA}$ . Начертите график зависимости  $V$  от  $1/\lambda$ . По наклону этой линии определите  $hc/e$ . (Напомним, что для того, чтобы получить  $hc/e$  в гауссовой системе единиц, надо выразить напряжение в единицах этой системы.) Приняв  $e = 4,80 \cdot 10^{-10}$  и  $c = 3,00 \cdot 10^{10}$ , вычислите  $h$  в  $\text{эрг} \cdot \text{сек}$ .

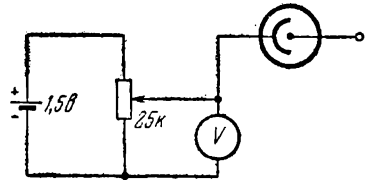


Рис. 8.

Используя полученные результаты, определите работу выхода для поверхности фотокатода. Из-за наличия обратного фототока

в определении  $V_0$  может быть допущена ошибка. Для уточнения измерений снимите зависимость фототока от напряжения и произведите экстраполяцию ваших данных, как показано на рис. 9. Ток  $I$  можно получить, разделив показание вольтметра на величину его внутреннего сопротивления. Падение напряжения на фотоэлементе равно разности показаний вольтметров, включенных по схемам рис. 8 и 7.

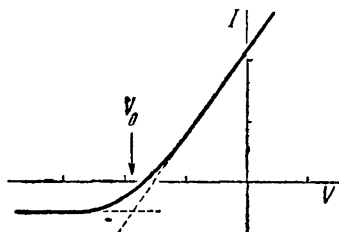


Рис. 9.

Измерьте напряжение на фотоэлементе при разомкнутой цепи, изменяя интенсивность света. Сопоставьте поведение фотоэлемента и поведение полупроводникового диода при регистрации микроволнового излучения. Желательно повторить измерения с фотоэлементом типа 925, который имеет фотокатод с характеристикой 2 (рис. 3).

Измерьте напряжение на фотоэлементе при разомкнутой цепи, изменяя интенсивность света. Сопоставьте поведение фотоэлемента и поведение полупроводникового диода при регистрации микроволнового излучения. Желательно повторить измерения с фотоэлементом типа 925, который имеет фотокатод с характеристикой 2 (рис. 3).

### Работа 3.6. ФОТОННЫЙ ШУМ

В этом эксперименте мы будем наблюдать шум, связанный с тем, что фотоны, попадающие на фотокатод, распределены во времени случайным образом. Какова величина шумов в фотоэлементе, работающем в условиях опыта Р.3.5? На рис. 1 показана схема опыта. Сопротивление и конденсатор характеризуют входную цепь осциллографа. Единичным зарядом здесь является заряд электрона, и мы ожидаем, что среднее квадратичное отклонение в величине заряда будет иметь вид

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} e = \sqrt{\frac{Ie}{2}} \sqrt{RC}. \quad (1)$$

В формуле (1) сделана подстановка  $I = re$  и  $\tau = RC$ . Среднее квадратичное отклонение напряжения на конденсаторе можно представить как

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} = \sqrt{\frac{Ie}{2}} \sqrt{\frac{R}{C}}. \quad (2)$$

Принимая ток равным 10 мкА и используя значения  $R$  и  $C$  из рис. 1, получаем, что среднее квадратичное отклонение напряжения составит 0,3 мВ. В типичном осциллографе среднему квадратичному напряжению шумов в 25 мВ соответствует вертикальное перемещение луча в один дюйм. Поэтому для того, чтобы наблюдать шумы фотоэлемента, нам потребовалось бы усилить их в 100 раз. Для увеличения выхода заряда на поглощенный фотон очень удобно использовать эффект вторич-

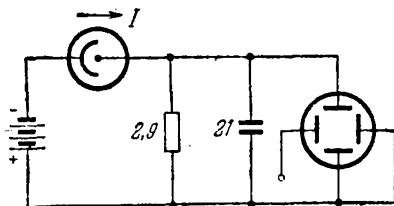


Рис. 1.

ной электронной эмиссии. Если электроны с достаточно высокой энергией ударяют о поверхность, то с этой поверхности могут быть испущены другие электроны. Для быстрых электронов коэффициент вторичной эмиссии  $\delta$  в случае вещества с низкой работой выхода может быть больше 10. Фотоумножитель с одним каскадом усиления схематично представлен на рис. 2. Электроны, испущенные фотокатодом 1 под действием света, ускоряются по направлению к диноду 2, потенциал которого на несколько сотен вольт выше потенциала фотокатода. Вторичные электроны с динода в свою очередь ускоряются к аноду 3. Из-за того, что свойства поверхности динода несколько различны, выход вторичных электронов на один первичный электрон оказывается неодинаковым. Хотя в среднем коэффициент размножения, например, равен четырем, в течение значительной части времени он может быть равным трем или пяти. Удобно сделать предположение о том, что

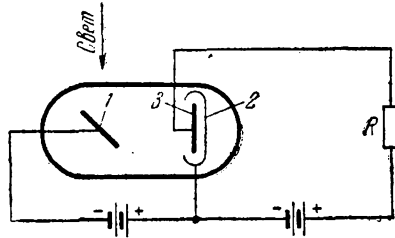


Рис. 2.

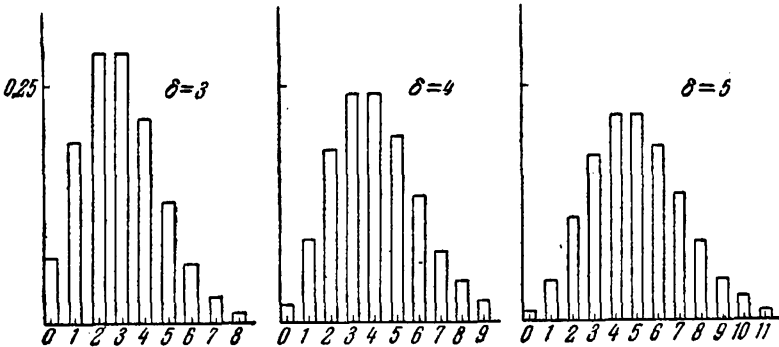


Рис. 3.

выход вторичных электронов следует распределению Пуассона, хотя на самом деле нет никаких оснований думать, что реальное распределение носит статистический характер. На рис. 3 показаны распределения Пуассона для среднего выхода вторичных электронов  $\bar{n} = \delta$ , где  $\delta = 3, 4, 5$ .  $P(n)$  обычно представляется в таком же виде, как в работе Р.3.2:

$$P(n) = \delta^n \frac{e^{-\delta}}{n!}. \quad (3)$$

Если коэффициент усиления  $G = \delta$ , то заряд, собранный анодом на один зарегистрированный фотон, будет равен

$$q = Ge = \delta e. \quad (4)$$

Мы можем ожидать, что дисперсия заряда запишется в виде

$$(\Delta Q)^2 = \frac{1}{2} r \tau q^2. \quad (5)$$

Теперь, наряду с шумом из-за статистики фотонов на входе фотоумножителя, необходимо учитывать источник шума, связанный с непостоянством выхода вторичных электронов. Для распределения Пуассона можно вычислить эту дополнительную компоненту шума

$$(\Delta Q)^2 = \frac{1}{2} r \tau \delta e^2. \quad (6)$$

В практике часто используются многокаскадные фотоумножители, содержащие большое число динодов — 14 и более, с усилением в каждом каскаде. Коэффициент усиления всей системы при этом равен

$$G = \delta^n, \quad (7)$$

где  $n$  — число каскадов. Если общее усиление велико, то шум, возникающий из-за флуктуации выхода вторичных электронов, представится в виде

$$(\Delta Q)^2 = \frac{1}{2} r \tau \frac{\delta^{2n}}{\delta - 1} e^2. \quad (8)$$

Наконец, суммарный шум получается сложением выражений (5) и (8)

$$(\Delta Q)^2 = \frac{1}{2} r \tau \frac{\delta}{\delta - 1} q^2. \quad (9)$$

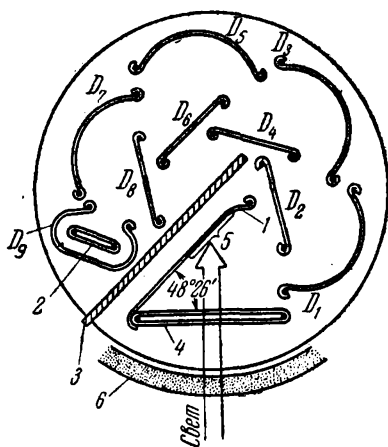


Рис. 4. Устройство фотоумножителя типа 931А: 1 — фотокатод, 2 — анод, 3 — экран, 4 — сетка, 5 — область наилучшего сбора электронов, 6 — баллон,  $D_1 - D_9$  — диноды.

Этот фотоумножитель имеет сурьмяно-цезиевый фотокатод с такой же характеристикой, как и в фотоэлементе 929 (кривая 1 рис. 3 Р.3.5). Девять динодов этого фотоумножителя также имеют сурьмяно-цезиевое покрытие.

Схема питания фотоумножителя 931А представлена на рис. 5. Цепочка сопротивлений по 1 Мом, смонтированных на цоколе, служит делителем напряжения. Для питания фотоумножителя можно воспользоваться катодным осциллографом. Напряжение между последним динодом и анодом следует подать от источника питания (с регулировкой напряжения), способного давать ток больших, чем источник питания осциллографа. В качестве упражнения вы можете рассчитать токи, текущие через отдельные сопротивления делителя напряжения в предположении, что катодный

ток равен  $I_0$  и усиление на каскад равно  $\delta$ . Вспомните, что сопротивление  $10 \text{ ком}$  включено параллельно входной емкости осциллографа. Если ее величина равна  $21 \text{ пф}$ , то постоянная времени цепи определится как

$$\tau = RC = 10 \text{ ком} \times 21 \text{ пф} = 210 \text{ нсек.} \quad (10)$$

Для работы с фотоумножителем выделите линию 5461 Å ртутной лампы. Поток света, падающий на фотокатод, следует ограничить щелью или ирисовой диафрагмой. Интенсивность света должна быть достаточно низкой, чтобы анодный ток не превышал  $10 \text{ мка}$ . В противном случае нагрузка делителя напряжения будет слишком

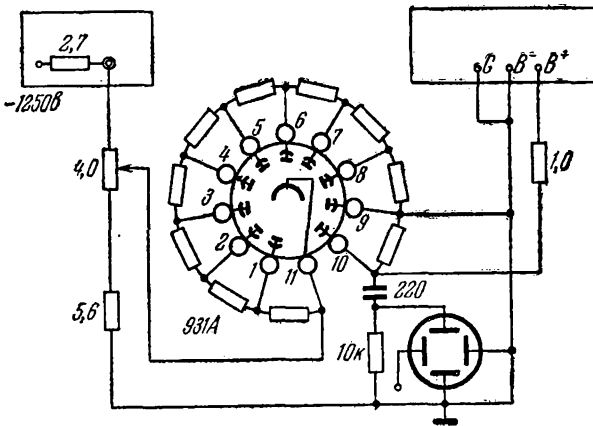


Рис. 5.

большой, что приведет к изменению потенциалов на последних динодах. В результате коэффициент усиления уменьшится и фотоумножитель окажется в нелинейном режиме.

Измерив падение напряжения на сопротивлении  $1 \text{ Мом}$ , включенном последовательно с анодом, найдите анодный ток

$$I = r q. \quad (11)$$

С помощью осциллографа измерьте среднее квадратичное напряжение шумов

$$\Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \dots \quad (12)$$

Вспоминая из Р.3.2, что наблюдаемая амплитуда шумов от минимума до максимума составляет  $4\Delta V$ , вычислите  $\Delta Q$ . Наконец, используя выражения (9) и (11), определите скорость счета  $r$  и средний коэффициент размножения  $\delta$ . Величина  $\tau$  вычислена по формуле (10). Чему равен коэффициент усиления фотоумножителя? Сколько фотонов детектируется за время  $\tau$ ? Повторите ваши измерения при различных напряжениях на динодах. В каждом случае

определите скорость счета  $r$  и средний коэффициент размножения  $\delta$ . Начертите зависимость  $\delta$  от величины напряжения между диодами.

Вспомните из Р.3.5, что фотовыход из катода с характеристикой I рис. 3 составляет 5 процентов в интервале длин волн, соответствующим зеленой линии ртути. Поэтому величина  $r$ , которую вы вычислили, составляет только 5 процентов от реального числа фотонов, попадающих на фотокатод за секунду. Следует ли ожидать, что это обстоятельство может привести к появлению дополнительного шума или наблюдаемый шум полностью объясняется приведенной теорией?

Какова амплитуда импульса напряжения на входе осциллографа от одного фотона? Какое дополнительное усиление потребовалось бы для наблюдения отдельных фотонов?

### Работа 3.7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ФОТОНОВ

Мы уже имели дело с поляризованными электромагнитными волнами в Р.2.11 и успешно описывали их с помощью электрических и магнитных полей  $\mathbf{E}(x, y, z, t)$  и  $\mathbf{B}(x, y, z, t)$ . В частности, плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в направлении положительной оси  $z$  в среде с коэффициентом преломления  $n$ , имеют вид

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_1\left(z - \frac{ct}{n}\right) + \hat{y}E_2\left(z - \frac{ct}{n}\right), \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_1\left(z - \frac{ct}{n}\right) + \hat{y}B_2\left(z - \frac{ct}{n}\right). \quad (2)$$

Компоненты электрического и магнитного полей связаны соотношениями

$$nE_1\left(z - \frac{ct}{n}\right) = B_2\left(z - \frac{ct}{n}\right), \quad (3)$$

$$nE_2\left(z - \frac{ct}{n}\right) = -B_1\left(z - \frac{ct}{n}\right). \quad (4)$$

Волна, излучаемая микроволновым клистроном, строго когерентна и характеризуется определенной круговой частотой  $\omega = 2\pi\nu$ . Плоскополяризованная в направлении оси  $x$  волна от такого источника может быть записана в виде

$$\mathbf{E} = \hat{x}E_1 \cos \omega\left(t - \frac{nz}{c}\right), \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \hat{y}nE_1 \cos \omega\left(t - \frac{nz}{c}\right). \quad (6)$$

Аналогично, волна, поляризованная в направлении оси  $y$ , записывается так:

$$\mathbf{E} = \hat{y}E_2 \cos \omega\left(t - \frac{nz}{c}\right), \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = -\hat{x}nE_2 \cos \omega\left(t - \frac{nz}{c}\right). \quad (8)$$

Поток энергии такой волны выражается в виде

$$\Phi = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (9)$$

В частности, для выбранной в Р.2.11 геометрии мы получаем

$$\Phi_z = \frac{nc}{8\pi} (E_1^2 + E_2^2). \quad (10)$$

Напомним, что в этом опыте мы изучали распространение волны, поляризованной под углом  $45^\circ$ , в вертикальном канале шириной  $a$  и длиной  $L$  (рис. 1). Было показано, что компонента поля, направленная вдоль оси  $x$ , имеет такую же длину волны, как и в свободном пространстве

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}. \quad (11)$$

Однако компонента, направленная вдоль оси  $y$ , имеет большую длину волны  $\lambda$ , определяемую из соотношения

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2. \quad (12)$$

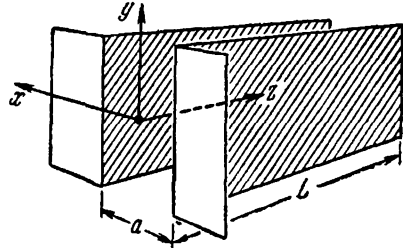


Рис. 1.

Влияние такого канала можно учесть, вводя эффективный коэффициент преломления для составляющей по оси  $y$ :

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (13)$$

Если  $a \gg \frac{\lambda_0}{2}$ , то  $n$  практически равняется единице. С уменьшением  $a$  коэффициент преломления  $n$  также уменьшается и в предельном случае, когда  $a = \frac{\lambda_0}{2}$ ,  $n$  становится равным нулю. При этом мы имеем бесконечную фазовую скорость. (Поток энергии, однако, стремится к нулю, как видно из формулы (10).) Для еще меньших величин  $a$  мы получаем чисто экспоненциальное ослабление интенсивности электрического и магнитного поля внутри канала.

Теперь, в соответствии с рис. 2, мы рассмотрим распространение волны в трех областях:

область I  $z < 0$ ,

область II  $0 < z < L$ ,

область III  $L < z$ .

Пусть волна распространяется в направлении положительной оси  $z$  и не отражается при  $z = 0$ , а электрическое поле в области I имеет вид

$$\mathbf{E}_1 = \hat{x}E_1 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c}\right) + \hat{y}E_1 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c}\right). \quad (14)$$

В области II поле будет равно

$$E_{II} = \hat{x}E_1 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \hat{y}E_1 \cos \omega \left( t - \frac{nz}{c} \right). \quad (15)$$

И, наконец, как записать выражение для поля в области III? Длина оптического пути в канале для компоненты волны, поляризованной в направлении  $x$ , равна  $L$ . Для компоненты, поляризованной в направлении  $y$ , длина оптического пути меньше и составляет  $nL$ . Разность оптических путей  $\Delta z =$

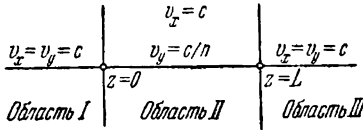


Рис. 2.

$= (1 - n)L$ . Поэтому поле в области III можно записать следующим образом:

$$E_{III} = \hat{x}E_1 \cos \omega \left( t - \frac{z}{c} \right) + \hat{y}E_1 \cos \omega \left( t - \frac{z - \Delta z}{c} \right). \quad (16)$$

В общем случае поле  $E_{III}$  будет эллиптически поляризовано. Мы можем выделить четыре случая, представляющих специальный интерес.

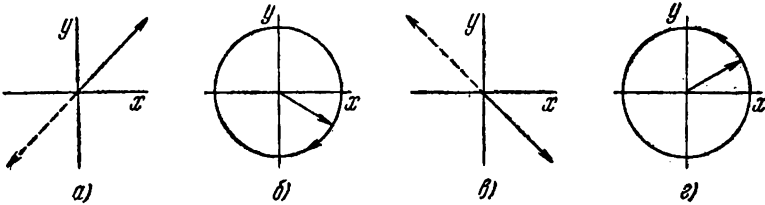


Рис. 3.

**Случай 1:**  $\Delta z = 0$ .

Обе компоненты электрического поля находятся в одной фазе. Поэтому вектор  $E$  наклонен под углом  $45^\circ$ , как показано на рис. 3, а.

**Случай 2:**  $\Delta z = \lambda_0/4$ .

Компонента, поляризованная по оси  $y$ , опережается по фазе на  $90^\circ$ . Волна будет иметь левую круговую поляризацию (рис. 3, б).

**Случай 3:**  $\Delta z = \lambda/2$ .

Компоненты электрического поля находятся в противофазе. Волна будет плоскополяризованной под углом  $-45^\circ$  (рис. 3, в).

**Случай 4:**  $\Delta z = 3\lambda_0/4$ .

Компонента поля, поляризованная по оси  $y$ , опережается по фазе на  $270^\circ$ . В результате возникает правая круговая поляризация волны (рис. 3, г).

Существует весьма изящный матричный метод описания состояния поляризации волны и действия различных поляризаторов и



систем, изменяющих фазу. Поляризованная по оси  $x$  волна, нормированная на единичный поток, может быть представлена следующим образом:

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Поток выражается в виде

$$\Phi = \psi_0^* \psi_0 = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (18)$$

Волна с единичной амплитудой по оси  $y$  запишется в виде

$$\psi_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Волна, поляризованная под углом  $+45^\circ$ , запишется как

$$\psi_{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Поток для этой волны вычисляется аналогично:

$$\Phi = \psi_{\pi/4}^* \psi_{\pi/4} = \frac{1}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1. \quad (21)$$

И, наконец, волна, поляризованная под углом  $-45^\circ$ , запишется как

$$\psi_{-\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Волна с правой и левой круговой поляризацией может быть представлена в виде матриц с комплексными числами (см. П.1.8)

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Как описать действие поляризатора, оптическая ось которого направлена по оси  $x$ , на проходящую волну? Поляризатор можно представить в форме матрицы

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Действие поляризатора на волну, поляризованную по оси  $x$ , опишем умножением матриц

$$P_0 \psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_0. \quad (26)$$

Таким образом, поляризатор не оказывает воздействия на такую волну. Однако если попытаться пропустить через такой фильтр волну, поляризованную по оси  $y$ , то мы получим

$$P_0 \psi_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

т. е. волна не проходит через фильтр. Поляризатору, ориентированному под углом  $45^\circ$ , отвечает матрица

$$P_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Пропустим через него волну, поляризованную под  $+45^\circ$ :

$$P_{\pi/4}\Psi_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Psi_{\pi/4}. \quad (29)$$

Мы получаем ту же самую волну. Но если подействовать этим фильтром на волну, поляризованную под углом  $-45^\circ$ , то

$$P_{\pi/4}\Psi_{-\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

и проходящая волна полностью отсутствует. Матрица для фильтра, ориентированного под углом  $-45^\circ$ , представится в следующем виде:

$$P_{-\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Пластинка в четверть волны, ориентированная так, что ее оптическая ось направлена по оси  $y$ , представляется матрицей

$$Q_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Пластинка с оптической осью, направленной по оси  $x$ , записывается в виде матрицы

$$Q_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Теперь, чтобы получить из неполяризованной волны волну с правой круговой поляризацией, мы пропустим волну сначала через полярироид, ориентированный под  $45^\circ$ , а затем через пластинку в четверть волны, ориентированную под  $0^\circ$ . На языке матриц: мы сначала подействуем на неполяризованную волну матрицей  $P_{\pi/4}$ , а потом матрицей  $Q_0$ . Каким образом мы можем представить неполяризованную волну? Проще всего записать ее в следующей форме:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где  $\delta$  — случайно меняющийся угол. Мы считаем, что неполяризованное излучение состоит из волновых пакетов поляризованных волн, плоскость поляризации которых меняется случайным образом от одного пакета к другому. (Кроме матрицы нам нужно было бы записать волновые пакеты со случайной фазой. Но мы не будем это делать, так как это только усложнит рассмотрение вопроса и не окажет влияния на результаты.) Выражение (34) нормировано на единичный падающий поток

$$\Phi_1 = \Psi_1^* \Psi_1 = \langle \cos^2 \delta + \sin^2 \delta \rangle = 1. \quad (35)$$

Для волны, прошедшей поляризатор, мы получаем

$$\psi_{11} = P_{\pi/4} \psi_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Величина потока прошедшей волны равна

$$\Phi_{11} = \psi_{11}^* \psi_{11} = \frac{1}{2} \langle (\cos \delta + \sin \delta)^2 \rangle = \frac{1}{2} \quad (37)$$

и составляет только половину начального потока. Наконец, мы подействуем на  $\psi_{11}$  матрицей  $Q_0$  и получим волну с правой круговой поляризацией

$$\psi_{111} = Q_0 \psi_{11} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

и потоком

$$\Phi_{111} = \psi_{111}^* \psi_{111} = \frac{1}{2} \langle (\cos \delta + \sin \delta)^2 \rangle = \frac{1}{2}. \quad (39)$$

Весьма существенное достоинство матричного представления связано с тем, что умножение матриц ассоциативно. Поэтому мы можем объединить действия поляроида и четвертьволновой пластинки с помощью одной матрицы, которая представляет круговой поляризатор. Матрица для получения правой круговой поляризации имеет вид

$$Q_0 P_{\pi/4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Для левой круговой поляризации

$$Q_{\pi/2} P_{\pi/2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Основные результаты матричного представления.

1. Состояние поляризации волны может быть представлено матрицей, состоящей из одного столбца

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi - i \cos \vartheta \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (42)$$

В общем случае волна эллиптически поляризована.  $\vartheta$  — угол, образованный главной осью эллипса и направлением оси  $x$ , а  $\operatorname{tg} \varphi$  определяет коэффициент сжатия эллипса, равный отношению малой оси к большой оси.

2. Поляризатор, ориентированный под углом  $\vartheta'$ , представляется следующей матрицей:

$$P_{\vartheta'} = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta' & \sin \vartheta' \cos \vartheta' \\ \sin \vartheta' \cos \vartheta' & \sin^2 \vartheta' \end{pmatrix}. \quad (43)$$

3. И, наконец, четвертьволновая пластинка, оптическая ось которой направлена под углом  $\vartheta''$ , может быть представлена в виде матрицы

$$Q_{\vartheta''} = \begin{pmatrix} i \cos^2 \vartheta'' + \sin^2 \vartheta'' & (i-1) \sin \vartheta'' \cos \vartheta'' \\ (i-1) \sin \vartheta'' \cos \vartheta'' & \cos^2 \vartheta'' + i \sin^2 \vartheta'' \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Для того чтобы узнать, как произвольная волна преобразуется комбинацией поляризаторов и пластин, меняющих фазу, нам нужно только осуществить перемножение указанных матриц.

Хотя электрическое и магнитное поля дают нам адекватный способ описания явлений в микроволновой части спектра, использование этих представлений в области более высоких частот может привести к ошибочным результатам. В частности, фотоэлектрический эффект, который мы наблюдали в Р.3.5 и Р.3.6, нельзя объяснить в рамках классической теории. Чтобы разобраться в явлениях в этой области спектра, необходимо признать фотонный характер электромагнитного излучения. Можно ли ожидать, что фотоны будут поляризованы подобно классическим электромагнитным волнам и что сможем обнаружить их поляризацию? Мы действительно можем говорить о состояниях фотона, которые аналогичны состояниям поляризации классических полей. Описав несколько простых демонстраций поляризации фотонов, мы обратимся к более детальному обсуждению проблемы.

Начнем с нескольких простых опытов с пленочными поляризаторами и пластинками в четверть волны. Чаще всего в качестве пленочных поляризаторов используется поляроид Н-типа \*). Этот материал получается при поглощении иода растянутой поливиниловой пленкой. При этом образуется полимерный иод, который является сильно дихроичным веществом. Коэффициент поглощения в зависимости от направления поляризации излучения меняется в сто раз. Для пластинки в четверть волны используется простая поливиниловая пленка, в которой при растяжении возникает небольшая анизотропия в диэлектрических свойствах. Толщина пленки подбирается таким образом, чтобы разность оптических путей равнялась  $\Delta z = \lambda_0/4$  в видимой части спектра.

Сначала посмотрим на монохроматический источник света (например, на цветную сигнальную лампочку одного из ваших электронных приборов) непосредственно и через поляризующую пленку (рис. 4). Обратите внимание на то, что поляризатор уменьшает интенсивность прошедшего света, но не меняет его цвета. В случае двух поляризаторов проходящий поток зависит от их относительной ориентации. Свет почти полностью гасится, когда поляризаторы скрещены. Наконец, поместим третий поляризатор между двумя скрещенными поляризаторами. При каком положении промежуточного поляризатора проходящий поток максимальный?

Если бы в этом опыте использовался когерентный источник микроволнового излучения, то интерпретация наблюдаемых явлений была бы очень простой. Первый поляризатор действует подобно горизонтальному каналу за границей пропускания. В результате

---

\*) См. E. H. Land, Some Aspects of the Development of Sheet Polarizers, Journal of the Optical Society of America 41, 957 (1951), а также библиографию «Resource Letter PL-1 on Polarized Light», Amer. J. Phys. 30, 227 (1962). Некоторые из этих статей имеются в сборнике «Polarized Light» (American Institute of Physics, New York, 1963).

прошедшая волна имеет вертикальную поляризацию. В случае, изображенном на рис. 4, *з*, через второй поляризатор может пройти компонента волны, перпендикулярная плоскости второго канала. Поэтому проходящий поток равен

$$\Phi = \cos^2 \vartheta, \quad (45)$$

как показано на рис. 5. В случае (*е*), где имеется третий поляриза-

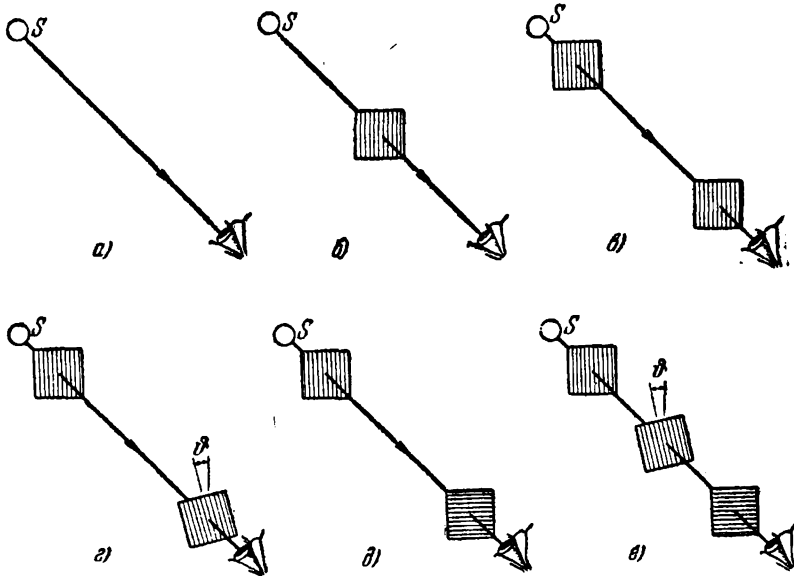


Рис. 4. Посмотрите на монохроматический источник света *S* непосредственно (*а*) и через пленочный поляризатор (*б*). Затем посмотрите на источник через два поляризатора (*в*) и измените угол  $\vartheta$  между направлениями их осей (*г*). Поместите два скрещенных поляризатора (*д*) и между ними внесите третий поляризатор, ориентированный под некоторым промежуточным углом (*е*).

тор, ориентированный нормально к первому, поток уменьшится из-за дополнительного множителя  $\sin^2 \vartheta$ :

$$\Phi = \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta = \frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta, \quad (46)$$

как показано на рис. 6.

С точки зрения фотонных представлений появление каждого отдельного фотона является независимым событием, и мы не можем использовать понятия электрического и магнитного полей в классическом смысле. Нам нужно исходить из квантовомеханической теории, которая носит вероятностный характер.

Мы можем сказать, что «идеальный» поляризатор без потерь пропускает фотоны, которые находятся в одном определенном состоянии поляризации. Фотоны, которые находятся в ортогональном состоянии поляризации, полностью поглощаются поляризатором.

ром. Что произойдет, если направление поляризации падающего фотона составляет угол  $\vartheta$  с осью поляризатора? Мы знаем, что состояние поляризации прошедших фотонов определяется поляризатором. Поэтому состояние поляризации падающего фотона изменится в процессе прохождения через поляризатор. Эффективность

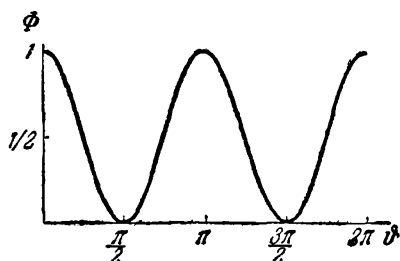


Рис. 5.

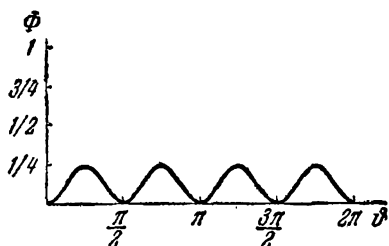


Рис. 6.

этого процесса  $\cos^2 \vartheta$ . Оставшаяся часть фотонов  $\sin^2 \vartheta$  переходит в другое состояние поляризации и поглощается. Матричная алгебра, которую мы применяли раньше, может быть прекрасно использована и в этом случае. Представим единичный поток фотонов в  $x$ -состоянии поляризации волновой функцией

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Подобно этому фотон в  $y$ -состоянии поляризации представится волновой функцией вида

$$\psi_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Для фотонов в промежуточном состоянии линейной поляризации мы напомним

$$\psi_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Неполяризованный пучок с единичным потоком может быть представлен в виде

$$\psi = \cos \delta \cdot \psi_0 + \sin \delta \cdot \psi_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \quad (50)$$

где  $\delta$  — переменная величина, меняющаяся случайным образом, как это обсуждалось раньше. (Отметим, что для того, чтобы различить поляризованный пучок, определяемый формулой (49), от неполяризованного (50), недостаточно знать поток для двух состояний поляризации. Мы должны также использовать амплитуду фотона.) Теперь для того, чтобы учесть действие второго поляризатора (рис. 4, з), надо спроектировать начальное направление поляризации  $x$  на направление  $x'$ , угол между которыми равен  $\vartheta$ . Как

следует из (43),

$$\psi_{II} = P_{\vartheta} \psi_I = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos \vartheta \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Выражение (51) характеризует фотоны, поляризованные под углом  $\vartheta$ , поток которых равен  $\cos^2 \vartheta$ , как и ожидается по классической теории. Разница в понимании этого явления заключается в том, что здесь  $\cos^2 \vartheta$  определяет уменьшение потока в среднем, что имеет смысл только для значительного числа случаев. И, наконец, опишем опыт на рис. 4, e:

$$\psi_{III} = P_{\pi/2} \psi_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} = \sin \vartheta \cos \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Таким образом, конечные фотоны находятся в  $y$ -состоянии поляризации. Поток при этом равен

$$\Phi_{III} = \psi_{III}^* \psi_{III} = \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta = \frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta, \quad (53)$$

как и ожидалось по классической теории.

Теперь мы выполним опыты, цель которых — количественное определение потоков, проходящих через пленочные поляризаторы. Используя схему, изображенную на рис. 5 Р.3.6, поместите два поляризатора с параллельными осями между источником и фотоумножителем. Изменяйте относительную ориентацию поляризаторов, регистрируя поток в зависимости от угла. Начертите график этой зависимости, как показано на рис. 5 настоящей работы. Желательно также выполнить опыт, изображенный на рис. 4 и получить график рис. 6.

Эти измерения было бы проще провести с помощью фотоэлемента, который применялся в Р.3.5. Однако очень высокая чувствительность фотоумножителя позволяет наблюдать поляризационные явления в широком диапазоне интенсивностей световых потоков. Действительно, можно настолько уменьшить интенсивность источника, что между источником и фотоумножителем одновременно будет находиться только один фотон. Повторив описанные выше измерения при этих условиях, вы можете убедиться, что средняя величина светового потока при разных углах  $\vartheta$  не зависит от скорости счета. Чтобы быть уверенным в том, что вы детектируете отдельные фотоны, надо знать эффективность регистрации фотокатода (смотрите рис. 3 в Р.3.5). Для оптимизации условий эксперимента вам нужно сфокусировать свет от источника на поверхность фотокатода так, чтобы фотоны, которые проходят через установку, действительно попадали бы в фотоумножитель.

Из этих опытов мы видим, что в том случае, когда дело сводится к вычислению величины светового потока, нет никакой разницы между классическими и квантовыми явлениями. Различие возникает только в характеристике метода регистрации. Классическим детектором микроволнового излучения является полупроводниковый диод, ток которого есть непрерывная функция приложенного

напряжения, подобно тому, как это имело место в устройстве, описанном в Р.1.9. Детектором светового излучения является фотокатод, из которого под действием света вылетают отдельные электроны. В отличие от классической физики, случайные явления присущи самому методу регистрации квантовых процессов.

Рассмотрим теперь круговую поляризацию фотонов. Описания круговой поляризации фотонов и классических полей (Р.2.11) полностью аналогичны. Мы начнем с нескольких простых примеров.

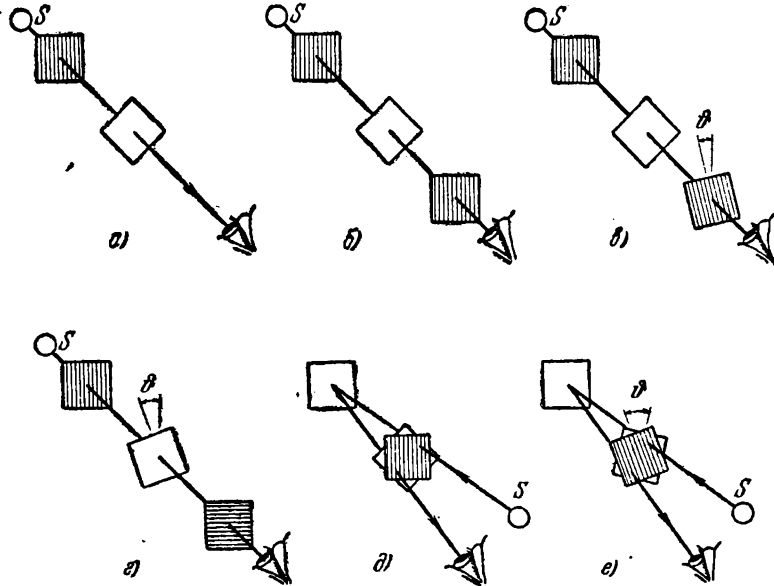


Рис. 7. Посмотрите на источник через поляризатор и пластинку в четверть волны, ориентированную под углом  $45^\circ$  (а). Поместите перед глазом еще один поляризатор (б) и убедитесь, что интенсивность не зависит от его ориентации (в). Измерьте зависимость интенсивности проходящего света от угла  $\phi$  при двух скрещенных поляризаторах (г). Посмотрите на отражение источника в зеркале через круговой поляризатор (д). Как будет зависеть интенсивность от угла между поляризатором и четверть волновой пластинкой (е)?

Сначала, как показано на рис. 7, а, поместите на пути пучка фотонов поляризатор и пластинку в четверть волны, которая ориентирована по отношению к поляризатору под  $45^\circ$ . Затем, в соответствии с рис. 7, б, поместите второй поляризатор перед глазом и посмотрите через эту систему на источник. Обратите внимание на то, что интенсивность проходящего света не зависит от ориентации второго поляризатора. Затем определите зависимость светового потока от ориентации пластинки в четверть волны при скрещенных поляризаторах.

Мы оставим в качестве упражнения задачу об определении потока в классическом случае и рассмотрим этот вопрос в случае фотонов, используя матричный метод. Фотоны, прошедшие первый



поляризатор, можно характеризовать волновой функцией

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (54)$$

которая нормирована на начальный поток. Если поместить пластинку в четверть волны под углом  $-45^\circ$ , то состояние фотонов будет определяться волновой функцией вида

$$\psi_{II} = \frac{1}{2} e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (55)$$

(см. формулу (44)). Мы видим, что  $\psi_{II}$  является суперпозицией двух состояний поляризации, сдвинутых по фазе на  $90^\circ$ . В случае классических полей мы называли это состояние  $\psi_+$ . После второго поляризатора волновая функция имеет вид

$$\psi_{III} = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \psi_{II} = \frac{1}{2} e^{i(\pi/4 - \vartheta)} \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Результирующий поток равен

$$\Phi_{III} = \psi_{III}^* \psi_{III} = \frac{1}{4} \quad (57)$$

и не зависит от ориентации второго поляризатора. Таким образом, фотоны оказываются линейно поляризованными под углом  $\vartheta$ . Конечный поток не зависит от угла и составляет  $1/4$  первоначального потока. Наконец, что можно ожидать для случая, представленного на рис. 7,  $z$ ? Поток после первого поляризатора будет характеризоваться волновой функцией

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Пластинка в четверть волны, ориентированная под углом  $\vartheta$ , переводит фотоны в состояние

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \begin{pmatrix} i \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta & (i-1) \sin \vartheta \cos \vartheta \\ (i-1) \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta + i \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \psi_I = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta \\ (i-1) \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (59)$$

Волновая функция после второго поляризатора записывается следующим образом:

$$\psi_{III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \psi_{II} = \frac{1}{2} e^{3\pi i/4} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2\vartheta \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Получаются фотоны, поляризованные по направлению оси  $y$ . Поток  $\Phi_{III}$  равен

$$\Phi_{III} = \psi_{III}^* \psi_{III} = \frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta. \quad (61)$$

График этой функции представлен на рис. 8. Мы предоставим вам самим в качестве упражнения провести анализ опытов, изображен-

ных на рис. 7, д и 7, е. Для того чтобы разобраться в этих экспериментах, надо ясно понимать, что направление круговой поляризации изменяется при отражении. Это показано на рис. 9, а. Если  $\psi_I$

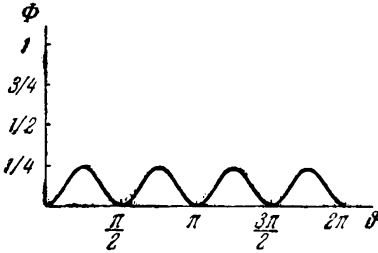


Рис. 8.

представляет состояние с правой круговой поляризацией

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (62)$$

то отраженная волна будет иметь левую круговую поляризацию

$$\psi_{II} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Что ожидаете вы получить в случае двойного отражения (рис. 9, б)? Можете ли вы поставить опыт для проверки своего вывода?

В заключение рассмотрим анализ волновой функции фотона, записанной в самом общем виде

$$\psi_I = \begin{pmatrix} \alpha (\cos \vartheta \cos \varphi + i \sin \vartheta \sin \varphi) + \beta \cos \delta \\ \alpha (\sin \vartheta \cos \varphi - i \cos \vartheta \sin \varphi) + \beta \sin \delta \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Фотонный пучок, определяемый данной волновой функцией, имеет компоненту с эллиптической поляризацией со средним потоком  $\alpha^2$ .

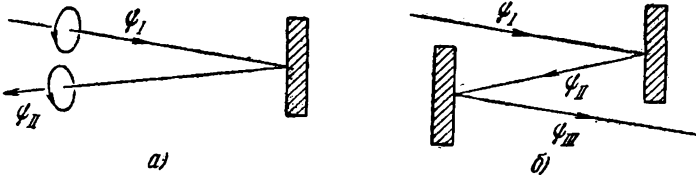


Рис. 9.

Угол  $\vartheta$  определяет ориентацию главной оси эллипса по отношению к направлению оси  $x$ . Коэффициент сжатия эллипса равен  $\tan \varphi$ . Вторая составляющая волновой функции с амплитудой  $\beta$  описывает неполяризованную компоненту. Угол  $\delta$  изменяется случайным образом. Если пучок нормирован на единичный поток, то

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \quad (65)$$

На самом деле в строгом изложении  $\alpha$  и  $\beta$  являются комплексными переменными величинами, меняющимися случайным образом, и в формуле (65) нужно брать квадраты модулей этих величин, усредненные во времени. Однако мы опустим это замечание, чтобы упростить рассмотрение вопроса. Для проведения анализа пучка нам необходимо определить  $\alpha^2$ ,  $\beta^2$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$ . Чтобы представить себе ситуацию наглядно, удобно обратиться к амплитудам, показанным на рис. 10.

Удобнее всего провести анализ следующим образом. Сначала пучок пропустим через линейный поляризатор и определим его ориентацию, при которой прошедший поток максимален. Можно показать, используя соотношение (64), что угол поворота поляризатора равен углу  $\vartheta$ . Если мы теперь поместим в пучок пластинку

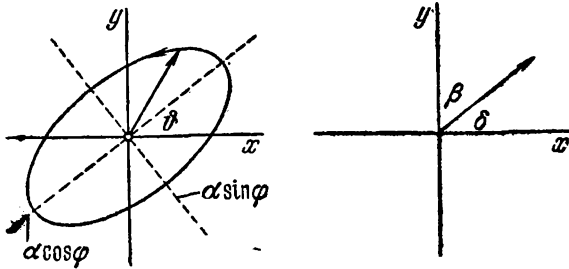


Рис. 10.

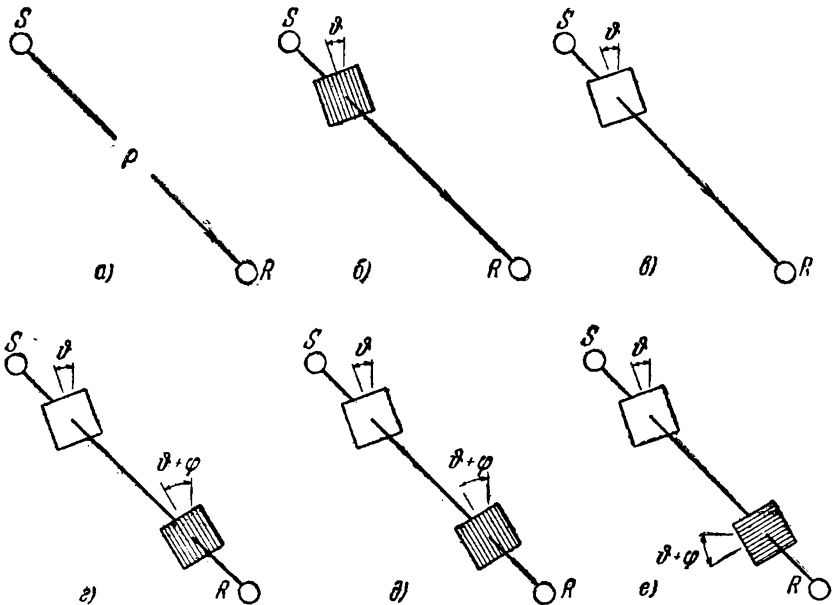


Рис. 11. Проводя анализ неизвестного пучка фотонов (а), сначала найдите, под каким углом надо ориентировать поляризатор, чтобы интенсивность проходящего света была максимальной (б). Внесите пластинку в четверть волны с такой же ориентацией (в) и определите ориентацию анализатора при максимальном проходящем потоке (д). Измерьте проходящий поток при том же положении анализатора (д) и после поворота его на  $90^\circ$  (е).

в четверть волны таким образом, чтобы ее оптическая ось была повернута на угол  $\vartheta$ , то пучок фотонов перейдет из состояния  $\psi_1$  в новое состояние  $\psi_{11}$ , которое определится следующей волновой функцией:

$$\psi_{11} = (\alpha \cos(\vartheta + \varphi) + \beta \cos \delta', (\alpha \sin(\vartheta + \varphi) + \beta \sin \delta')). \quad (66)$$

В этой формуле мы пренебрегли общими фазовыми множителями.  $\delta'$  — некоторый новый случайный угол. Его связь с прежним углом  $\delta$  здесь несущественна. Из сравнения формул (64) и (66) видно, что пластинка в четверть волны переводит первоначальный пучок в комбинацию линейно поляризованной и неполяризованной компонент. Если теперь внести в пучок анализатор и менять его ориентацию, то можно определить максимальный проходящий поток

$$\Phi_{\max} = \alpha^2 + 1/2\beta^2, \quad (67)$$

минимальный проходящий поток

$$\Phi_{\min} = 1/2\beta^2 \quad (68)$$

и угол поляризации  $\vartheta + \varphi$ . На рис. 11 приведены опыты, которые позволяют полностью анализировать пучок ( $S$  — источник,  $R$  — приемник).

Вы можете сами получить пучок фотонов с произвольной поляризацией, если пропустите неполяризованный пучок через поляризатор и несколько повернутую пластинку в четверть волны. Для получения малой примеси поляризованной компоненты пропустите часть поляризованного пучка через вошеную бумагу. Получите такой пучок и проанализируйте его с помощью методов, представленных на рис. 11.

### Работа 3.8. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ ФОТОНОВ

В последней работе этой части лабораторного курса мы исследуем интерференцию фотонов. Можно предположить, что так же, как и в Р.3.7, классическое и квантовое рассмотрение вопроса приведет к одинаковым результатам при вычислении среднего потока. Различие опытов, проводимых со светом и радиоволнами, проявляется лишь в процессе регистрации. В видимой части спектра мы обычно регистрируем события, носящие случайный характер, в области радиочастот мы регистрируем когерентные поля.

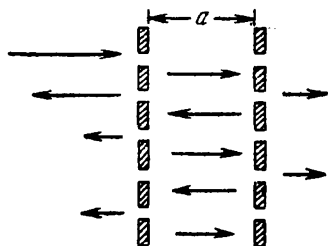


Рис. 1.

Наиболее простым прибором для наблюдения интерференции является интерферометр, состоящий из двух плоскопараллельных пластин, который использовался в Р.2.10. Как показано на рис. 1, падающая слева волна будет многократно отражаться от экранов, что приведет к возникновению ряда отраженных и проходящих парциальных волн. Каково условие интенсивного прохождения света через такую систему? Это условие заключается в том, что проходящие волны должны складываться в одной фазе. Так как разность путей для соседних волн

равняется  $2a$ , то

$$2a = n\lambda, \text{ или } a = \frac{n\lambda}{2}. \quad (1)$$

Соотношение (1) будет выполняться только в узком диапазоне частот, близких к резонансной частоте системы. Прибор, состоящий из экрана с двумя щелями, в котором складываются только две проходящие парциальные волны, позволяет использовать более широкий диапазон частот. Свойства такой системы исследовались в Р.2.12. Но прежде чем обсуждать результат воздействия двух щелей на падающую плоскую волну, рассмотрим, как действует на нее одна-единственная щель (рис. 2).

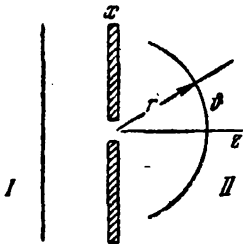


Рис. 2.

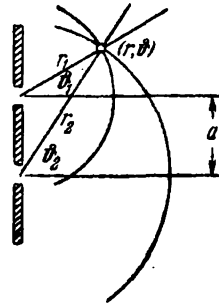


Рис. 3.

В области I волна, движущаяся слева, характеризуется электрическим полем

$$E_I = E_1 \cos(\omega t - kz), \quad (2)$$

где  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ . В области II на большом расстоянии от щели по сравнению с длиной волны  $\lambda$  будет распространяться цилиндрическая волна, которая может быть записана в виде

$$E_{II} = E_2(r, \vartheta) \cos(\omega t - kr). \quad (3)$$

Чего можно ожидать, если волна проходит через пару параллельных щелей, как показано на рис. 3? Поле в области II является суперпозицией волн, генерированных каждой из щелей. Таким образом, поле в точке с полярными координатами  $(r, \vartheta)$  определяется выражением

$$E_{II} = E_2(r_1, \vartheta_1) \cos(\omega t - kr_1) + E_2(r_2, \vartheta_2) \cos(\omega t - kr_2). \quad (4)$$

Если расстояния  $r_1$  и  $r_2$  велики по сравнению с расстоянием между щелями  $a$ , то мы можем ввести следующие приближения:

$$r_1 = r - \frac{1}{2}a \sin \vartheta, \quad r_2 = r + \frac{1}{2}a \sin \vartheta. \quad (5)$$

Используя тригонометрическое тождество

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \quad (6)$$

и предполагая, что  $E(r, \vartheta)$  является медленно меняющейся функцией, перепишем формулу (4) в виде

$$E_{II} = 2E(r, \vartheta) \cos(1/2ka \sin \vartheta) \cos(\omega t - kr). \quad (7)$$

Поток энергии в точке  $(r, \vartheta)$  определяется формулой

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{c}{4\pi} \langle E_{II}^2 \rangle = \frac{c}{2\pi} E^2(r, \vartheta) \cos^2(1/2ka \sin \vartheta). \quad (8)$$

Ход функции  $\cos^2(1/2ka \sin \vartheta)$  показан на рис. 4. В направлении вперед две парциальные волны складываются в одной фазе, и мы получаем максимум. Первые нули имеем при  $1/2ka \sin \vartheta = \pm\pi/2$ , или

$$k_{\perp} = k \sin \vartheta = \frac{\pi}{a}. \quad (9)$$

Интерференционные максимумы можно

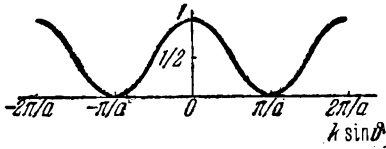


Рис. 4.

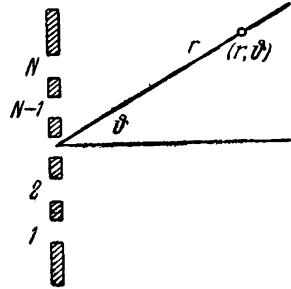


Рис. 5.

сделать более острыми, если пропускать волну через систему из  $N$  щелей, как показано на рис. 5. Поле в области II будет приближенно выражаться следующим образом:

$$E_{II} = E(r, \vartheta) \left\{ \cos \left[ \omega t - k \left( r - \frac{N-1}{2} a \sin \vartheta \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \cos \left[ \omega t - k \left( r - \frac{N-2n-1}{2} a \sin \vartheta \right) \right] + \dots \right. \\ \left. \dots + \cos \left[ \omega t - k \left( r + \frac{N-1}{2} a \sin \vartheta \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Выражение в фигурных скобках можно переписать в виде

$$S = \cos \left( A + \frac{N-1}{2} B \right) + \cos \left( A + \frac{N-3}{2} B \right) + \dots \\ \dots + \cos \left( A - \frac{N-1}{2} B \right), \quad (11)$$

где  $A = \omega t - kr$ , а  $B = ka \sin \vartheta$ . Суммирование (11) приводит к выражению

$$S = \frac{\sin 1/2 NB}{\sin 1/2 B} \cos A. \quad (12)$$

Таким образом, поток в направлении  $\vartheta$  для волны, проходящей  $N$  щелей, пропорционален

$$\Phi = \frac{\sin^2 1/2 (Nka \sin \vartheta)}{\sin^2 1/2 (ka \sin \vartheta)} \quad (13)$$

Амплитуда в максимуме пропорциональна  $N^2$ , а угловая ширина пропорциональна  $1/N$ , так что интегральный поток пропорционален числу щелей  $N$ . Максимумы получаются в тех же местах, как и в случае двух щелей, а именно

$$k \sin \vartheta = \frac{2\pi n}{a}. \quad (14)$$

На рис. 6 представлена зависимость потока от угла в окрестности максимума. Центральный максимум имеет ширину порядка  $2\pi/Na$ . Его сопровождают малые дополнительные максимумы.

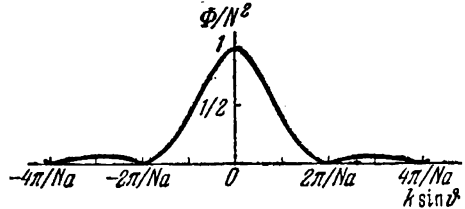


Рис. 6.

В качестве третьего примера интерференции волн мы рассмотрим интерферометр Майкельсона, изображенный на рис. 7. Волна от источника  $S$ , падающая слева, попадает на центральный экран

(штриховая линия), наклоненный под углом  $45^\circ$ . Экран наполовину отражает (путь 1) и наполовину пропускает (путь 2) падающую волну ( $M_1$  и  $M_2$  — зеркала). Можно представить себе, что интерференционная картина возникает от двух реальных источников  $S_1$  и  $S_2$ , показанных на рис. 8, находящихся на расстояниях  $L_1$  и  $L_2$  от детектора  $D$ . Мы ожидаем получить максимум в центральной части детектора, если  $\Delta = L_1 - L_2$  равно целому числу длин волн.

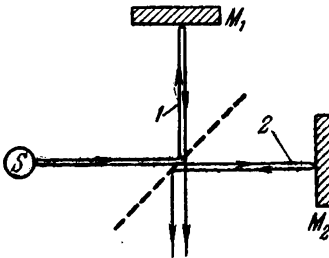


Рис. 7.

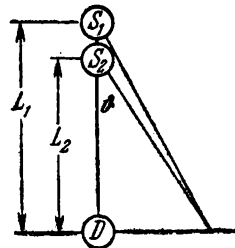


Рис. 8.

Смещаясь с оси, мы будем наблюдать максимумы и минимумы в виде чередующихся концентрических колец. Условия возникновения максимумов и минимумов соответственно

$$\Delta \cos \vartheta = n\lambda \quad \text{и} \quad \Delta \cos \vartheta = (n + 1/2)\lambda.$$

Опыты по интерференции электромагнитных и звуковых волн, которые рассматривались в разделе 2 этого курса, легко перенести и в видимую часть спектра. Вы можете простейшим образом наблюдать интерференцию, если посмотрите через две близко расположенные щели в экране на источник света, дающий яркую линию. Человеческий глаз способен разрешить угол  $\vartheta$ , равный приблизи-

тельно  $10^{-3}$  радиана. Если длина волны равна  $5000 \text{ \AA}$ , то расстояние между щелями должно быть меньше, чем  $a = \lambda/\vartheta = 0,5 \text{ мм}$ . Отметим, что с уменьшением расстояния между щелями интерференционные полосы будут расходиться \*). Если наблюдать источник через систему с щелями — дифракционную решетку, то максимумы становятся более резкими и интенсивными.

Каким образом мы должны описывать интерференционные явления в видимой части спектра, если нам известно, что в процессе детектирования, независимо от того, какой детектор используется — фотокатод или человеческий глаз, — фиксируются отдельные фотоны? Давайте возвратимся к дифракции света на одной щели

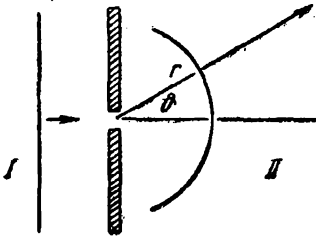


Рис. 9.

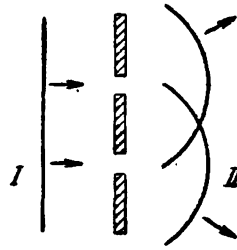


Рис. 10.

(рис. 9). В области I фотоны можно описать плоской волной с волновым вектором  $k = 2\pi/\lambda$ . Обычно волновую функцию записывают в комплексной форме  $\psi_I = \frac{1}{\sqrt{c}} e^{i(\omega t - kz)}$ . (Мы выбрали знак перед мнимой частью в соответствии с нашим прежним представлением переменных во времени полей в комплексной форме. Однако в квантовой физике принято использовать противоположный знак.) Поток фотонов запишется в виде  $\Phi = c\psi_I^* \psi_I = 1$ . Величина его не зависит от поперечной координаты. В области II состояние фотона характеризуется волновой функцией  $\psi_{II} = \frac{f(r, \vartheta)}{\sqrt{c}} e^{i(\omega t - kr)}$ . Поток  $\Phi_{II}$  в точке с координатой  $(r, \vartheta)$   $\Phi_{II} = c\psi_{II}^* \psi_{II} = |f(r, \vartheta)|^2$ . Если мы имеем две щели (рис. 10), то волновая функция в области II будет суперпозицией парциальных волн, генерированных каждой из щелей. Таким образом,

$$\begin{aligned} \psi_{II} &= \frac{f(r_1, \vartheta_1)}{\sqrt{c}} e^{i(\omega t - kr_1)} + \frac{f(r_2, \vartheta_2)}{\sqrt{c}} e^{i(\omega t - kr_2)} = \\ &= \frac{2f(r, \vartheta)}{\sqrt{c}} \cos(1/2ka \sin \vartheta) e^{i(\omega t - kr)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь сделаны такие же приближения, как и при выводе формулы (7).

\*) Описание набора пленок с щелевыми диафрагмами см. S. Charman, H. Meese, Amer. J. Phys. 25, 135—138 (March, 1957).



Мы видим, что задачи о распространении амплитуды классического электромагнитного поля и фотонов имеют сходную структуру, подобно тому, как это имело место в поляризационных явлениях, рассмотренных в Р.3.7. Разница между амплитудами снова состоит в том, что классическое электрическое поле можно измерить, а волновая амплитуда фотона не является измеряемой величиной. Заключение о волновой функции мы можем сделать, лишь измерив поток фотонов. Иногда можно услышать (в качестве объяснения интерференционного опыта), что половина фотонов проходит через одну щель, а другая половина — через другую щель и что наблюдаемая картина возникает из-за интерференции фотонов. Это объяснение совершенно неправильное: интерферируют не фотоны, а их волновые амплитуды. Таким образом, если бы мы уменьшили поток фотонов до такого низкого уровня, что в области между источником и детектором находился одновременно только один фотон, то мы все равно получили бы такую же интерференционную картину. При этих условиях нет никакого смысла говорить о том, через какую щель проходит фотон. Фотон ощущается только в процессе измерения. А любая попытка определить щель, через которую проходит фотон, потребовала бы измерения, которое нарушило бы фазовую когерентность двух парциальных волн в выражении (15) и уничтожило интерференционную картину. Подобная ситуация возникает в интерферометрах Майкельсона и Фабри — Перо. Мы не можем сказать, какие фотоны отражаются, а какие проходят. Физический эффект возникает в результате суперпозиции фотонных амплитуд, описывающих отражение и прохождение, причем оба эти процесса связаны с каждым фотоном в отдельности.

Для того чтобы определить количественно поток фотонов, сфокусируйте с помощью двух одинаковых линз изображение источника на экран, помещенный в фокальной плоскости второй линзы. Затем поместите между линзами одну из непрозрачных пленок с щелями из демонстрационного набора и наблюдайте на экране интерференционную картину. Замените экран фотоумножителем, так чтобы его входное отверстие лежало в плоскости экрана. Используя схему, изображенную на рис. 5 в Р.3.6, измерьте интенсивность дифракционной картины для какой-нибудь линии ртути. Вычислите длину волны выбранной спектральной линии, используя расстояние между щелями, указанное в демонстрационном наборе, или лучше найдите это расстояние непосредственно с помощью компаратора. Желательно повторить эти измерения с другими элементами из демонстрационного набора или с другой спектральной линией. Попытайтесь получить полный спектр ртути с помощью дифракционной решетки с известной постоянной, обладающей высокой разрешающей способностью. Определите таким образом длины волн основных линий.

Проведите наблюдение интерференции фотонов в широком интервале интенсивностей падающего света. Убедитесь в том, что наблюдаемая картина не зависит от интенсивности. В частности,

проведите наблюдение дифракции при таком низком уровне интенсивности, чтобы только один фотон находился в пределах установки.

К вопросу об однофотонном характере интерференции можно подойти по-другому, если исследовать флуктуации при регистрации фотонов.

Из П.3.2 нам известно, что при средней скорости счета фотонов  $r$  среднее квадратичное отклонение в величине заряда имеет вид

$$\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2}} q, \quad (16)$$

где  $q$  — заряд на выходе фотоумножителя при регистрации одного фотона, а  $\tau$  — постоянная времени фильтра. Используя дифракционную решетку, мы можем исследовать флуктуации фотонов в главном максимуме. Затем переведем фотоумножитель на максимум первого порядка, интенсивность которого составляет 5—10% от интенсивности главного максимума. Увеличивая апертуру фотоумножителя, вы можете довести скорость счета фотонов до уровня счета в главном максимуме. Какие флуктуации получаются при этих условиях по сравнению с флуктуациями в главном максимуме? Если бы дифракция являлась  $N$ -фотонным процессом, то вы могли бы ожидать, что флуктуации будут связаны с  $N$  фотонами. Например, флуктуации отсчетов после пересчета на 10 в  $\sqrt{10}$  раз меньше флуктуаций случайно распределенных выходных импульсов. Поэтому можно предполагать, что флуктуации сигналов от дифракционной картины были бы порядка  $\Delta Q = \sqrt{\frac{r\tau}{2N}} q$ . Для дифракционной решетки с очень большим числом щелей мы могли бы ожидать, что фактор подавления флуктуаций является большим числом. В действительности флуктуации в дифрагированном и прямом свете неразличимы. Поэтому можно считать, что  $N = 1$ .

Серьезные трудности в этом опыте возникают из-за того, что фотокатод обладает в лучшем случае эффективностью порядка 10%. Поэтому если на входе фотоумножителя не было бы никаких флуктуаций в числе дифрагированных фотонов, мы получили бы на выходе распределение отсчетов вида

$$P_N(n) = p^n (1-p)^{N-n} \frac{N!}{n!(N-n)!}, \quad (17)$$

которое встречалось в П.3.2, формула (9). В этой формуле  $p$  — вероятность выхода электрона на один падающий фотон,  $N = r_0\tau$  — максимальное число фотонов, которое может быть сосчитано за время  $\tau$ . Выход электронов, равный 1/10, приводит к появлению флуктуаций заряда, сравнимых с флуктуациями для случайных процессов, в соответствии с формулой (16). Тем не менее, проведя тщательные измерения, можно было бы различить флуктуации в этих случаях.

Наконец, мы обсудим несколько опытов, в которых проявляются интерференционные и поляризационные явления. Для наблюдения этих явлений проще всего воспользоваться интерферометром Майкельсона. Мы начнем с того, что поместим два плеченных поляризатора  $P_0$  и  $P_{\pi/2}$  перед зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  интерферометра Майкельсона (рис. 11). Если эти два поляризатора параллельны, то мы можем ожидать, что интерференционная картина не изменится, но интенсивность ее уменьшится в два раза. Что произойдет, если один из поляризаторов поворачивать относительно другого? В этом случае окажется, что наблюдаемая интерференционная картина исчезнет, когда поляризаторы будут установлены ортогонально друг к другу.

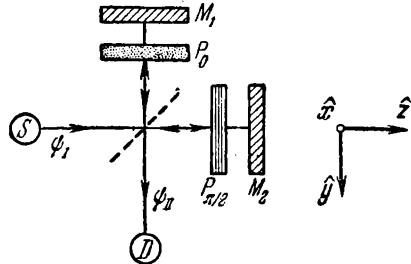


Рис. 11.

Если бы мы анализировали этот опыт в рамках классической теории, то мы сказали бы, что волна, идущая по первому пути (рис. 7), поляризована в направлении  $x$ , а волна, идущая по второму пути, поляризована в направлении  $y$ . Ввиду того, что волны, поляризованные в ортогональных направлениях, не интерferируют, мы не удивились бы исчезновению интерференционной картины. Анализ с помощью волновых функций для фотонов проходит подобным образом. Начнем с первичного пучка фотонов, характеризующегося волновой функцией

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}, \quad (18)$$

которая представляет собой произведение волновой функции движущегося фотона на матрицу, определяющую состояние его поляризации. Угол  $\delta$  в предположении, что излучаемые фотоны поляризованы случайным образом, является случайной переменной величиной. Парциальная волна, отраженная центральным экраном, движется по пути 1 (рис. 7) и доходит до детектора в виде

$$\psi_1 = \frac{1}{2\sqrt{c}} \begin{pmatrix} \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL_1)}. \quad (19)$$

Парциальная волна, прошедшая через экран, следует по пути 2 и достигает детектора в виде

$$\psi_2 = \frac{1}{2\sqrt{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL_2)}. \quad (20)$$

Общая волновая функция в области детектора равна сумме этих двух парциальных волновых функций  $\psi_{11} = \psi_1 + \psi_2$ . Поток фото-

нов, попадающих на детектор, имеет вид  $\Phi_{II} = c\psi_{II}^*\psi_{II} = c\psi_1^*\psi_1 + c\psi_1^*\psi_2 + c\psi_2^*\psi_1 + c\psi_2^*\psi_2$ . Перекрестные члены обращаются в нуль  $\psi_1^*\psi_2 = \psi_2^*\psi_1 = 0$  из-за того, что направления поляризации ортогональны. Поэтому интерференция между парциальными волнами, прошедшими по разным путям, отсутствует.

Далее мы рассмотрим интересный вариант этого опыта. Внесем в установку два дополнительных поляризатора  $P_{\pi/4}$ , ориентированных под  $45^\circ$ . Один из них поместим перед источником, другой — перед детектором, как показано на рис. 12. Мы снова получим

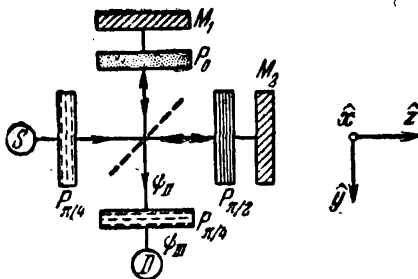


Рис. 12.

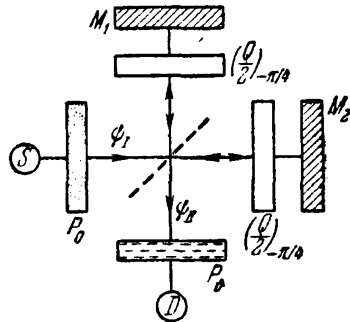


Рис. 13.

интерференцию между двумя световыми пучками. Волновая функция после поляризатора, расположенного перед источником, будет представляться в соответствии с формулой (28) Р.3.7 следующим выражением:

$$\psi_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c}} \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{2\sqrt{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kz)}. \quad (21)$$

Волновая функция перед последним поляризатором имеет вид

$$\psi_{II} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{4\sqrt{c}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikL_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ikL_2} \right] e^{i\omega t}. \quad (22)$$

Обе компоненты волновой функции (22) ортогональны. Поэтому при отсутствии последнего поляризатора нельзя было бы рассчитывать наблюдать интерференцию. В отличие от прежней ситуации, которая описывалась суммой соотношений (19) и (20), в данном случае вертикальная и горизонтальная компоненты когерентны. Так что формула (22) представляет эллиптически поляризованные фотоны. Мы можем получить интерференцию, если с помощью поляризатора, который ориентирован под  $45^\circ$ , переведем эти две ортогональные компоненты в одну плоскость. Тогда

$$\psi_{III} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \psi_{II} = \frac{\cos \delta + \sin \delta}{4\sqrt{c}} \cos \frac{1}{2} k\Delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL)}, \quad (23)$$

при этом  $L_1 = L + \Delta/2$  и  $L_2 = L - \Delta/2$ . Средний поток будет

$$\Phi_{III} = c \langle \psi_{III}^* \psi_{III} \rangle = (1/8) \cos^2 \frac{1}{2} k\Delta. \quad (24)$$

На примере этих опытов можно видеть, что объяснение их с точки зрения чисто фотонных представлений было бы весьма затруднительным или даже ошибочным. Вводя же волновую функцию, которая интерпретируется в вероятностном смысле, мы проводим простой и строгий анализ.

На рис. 13 приведена схема заключительного опыта, в котором осуществляется интерференция парциальных волн с круговой поляризацией. Поместим перед источником поляризатор  $P_0$ , ориентированный вертикально, и пластинки  $(\frac{Q}{2})_{-\pi/4}$  в  $1/8$  волны под  $-45^\circ$  перед зеркалами  $M_1$  и  $M_2$ , чтобы свет, проходящий на центральный экран по обоим направлениям, обладал правой круговой поляризацией. (Свет проходит дважды через каждую пластинку, поэтому они эффективно работают как пластинки в четверть волны.) Так как парциальная волна, идущая по пути 2 (рис. 7), отражается от центрального экрана, прежде чем попасть на детектор, то направление круговой поляризации для этой волны изменится с правой на левую (см. рис. 9 в Р.3.7) и на детектор поступят компоненты с правой и левой круговой поляризацией:

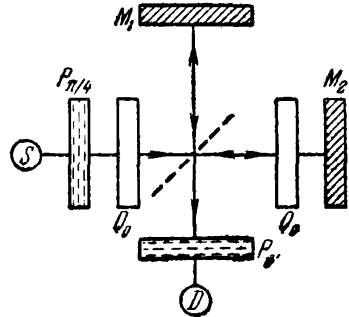


Рис. 14.

$$\psi_1 = \frac{\cos \delta}{2\sqrt{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL_1)}, \quad \psi_2 = \frac{\cos \delta}{2\sqrt{c}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL_2)}.$$

Результирующая волна запишется в следующем виде:

$$\psi_{II} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\cos \delta}{\sqrt{c}} \begin{pmatrix} \cos \frac{k\Delta}{2} \\ \sin \frac{k\Delta}{2} \end{pmatrix} e^{i(\omega t - kL)}. \quad (25)$$

Заметим, что формула (25) описывает волну, линейно поляризованную под углом

$$\vartheta = \frac{1}{2} k\Delta = \frac{\pi}{\lambda} (L_1 - L_2). \quad (26)$$

Поместив поляризатор перед детектором, можно непосредственно по углу поляризации определить разность путей  $(L_1 - L_2)$ . Необходимо подчеркнуть, что для получения интерференции между парциальными волнами существенно, чтобы когерентность фаз сохранялась по всему фронту волны. Поэтому к пластинкам в

$1/8$  волны предъявляются очень высокие требования. Их толщины выдерживаются с точностью до малой доли длины волны. Требования, предъявляемые к пластинкам для получения круговой поляризации, оказываются менее строгими, так как в этом случае необходимо сохранить постоянной разность оптических толщин для двух направлений поляризации. Если у вас имеются в наличии только пластинки в четверть волны, то вы можете вместо предыдущего опыта провести другой опыт, схема которого изображена на рис. 14. Анализ прохождения фотонов через эту систему предлагается вам в качестве упражнения. Какова функция пластинки  $Q_\vartheta$ ? Что происходит при изменении  $\vartheta$ ?

## РАЗДЕЛ 4

### ВВЕДЕНИЕ В АТОМНУЮ ФИЗИКУ

#### Работа 4.1. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОНОВ

##### Эксперименты по дифракции катодных лучей (I) \*)

1. Л. де Бройль предложил теорию, согласно которой движущаяся частица ведет себя, как группа волн, длина и скорость распространения которых определяются массой и скоростью частицы. Если  $m_0$  — масса покоя и  $v$  — скорость свободно движущейся частицы, то в этой теории длина волны  $\lambda = h \sqrt{1 - v^2/c^2} / m_0 v$ , фазовая скорость  $V = c^2/v$ , а групповая скорость равна скорости частицы  $v$ . Здесь  $c$  — скорость света и фазовая скорость превосходит  $c$ . В этом нет ничего невозможного, так как волны рассматриваются как чисто геометрические «фазовые волны», не переносящие энергию. Положение можно сравнить с распространением света в веществе, например в натрии, для которого коэффициент преломления меньше единицы. Все вышесказанное относилось к свободному пространству. В поле сил фазовая скорость  $V$  изменяется, и изменение направления распространения волн из-за рефракции в новой теории соответствует отклонению траектории частицы в силовом поле по старой теории.

Шредингер, де Бройль и другие применили новую теорию к вопросам спектроскопии и решили несколько чрезвычайно трудных проблем, которые были не по силам старой теории орбит. Тем не менее, ввиду исключительного значения новой теории, кажется в высшей степени желательным, чтобы она покоилась на более прямых доказательствах. Кроме того, нужно показать, что теория наряду с объяснением явлений позволяет делать новые предсказания.

Дюмонд [1] изучал рассеяние медленных электронов на гелии и получил замечательные результаты, которые в общих чертах соответствуют предсказаниям теории. Однако из-за того, что структура гелия известна недостаточно хорошо, а также из-за математических трудностей невозможно выполнить точное сравнение теории с результатами опыта. Дэвиссон и Кэнсман [2] и Дэвиссон и Джермер [3] изучали отражение медленных электронов поверхностью кристалла никеля, а также других кристаллов и нашли хорошее качественное согласие с теорией, хотя для некоторых величин расхождение достигало 30 процентов. Можно надеяться, что описанные здесь опыты существенно продвинут вопрос об экспериментальном обосновании теории. Предварительные результаты этих опытов недавно опубликованы [4].

2. В наших опытах, которые начались в прошлом году, идея Дюмонда была распространена на рассеяние быстрых электронов пленками чистых металлов, где нам казалось возможным использовать технику, развитую в работах по рассеянию положительных частиц. Имеется, однако, некоторое различие в интерпретации результатов данного опыта и опыта Дюмонда.

\*) G. P. T h o m s o n, Proc. Roy. Soc. 117, 600 (1928).

По теории де Бройля электрону соответствует группа волн, а его прохождение через вещество определяется процессами рассеяния и дифракции. Электрону с энергией  $25\ 000\ \text{эВ}$  по приведенной выше формуле отвечает длина волны, равная  $0,75 \cdot 10^{-8}\ \text{см}$ . Жесткие X-лучи \*) имеют длину волны такого же порядка, поэтому волны, связанные с электронами этой энергии, должны во многих отношениях вести себя подобно жестким X-лучам. Действительно, с этой точки зрения между электронами и X-лучами имеется близкое сходство. Считается, что квантовые эффекты X-лучей вызваны перенесением центров энергии волнами и что в случае электронов движение электрического заряда, в котором сосредоточена энергия, совпадает с движением связанной с ним группы фазовых волн. В частности, должна иметь место дифракция электронов, когда они проходят через кристалл, подобно дифракции X-лучей с той же длиной волны. Едва ли нужно говорить о том, что все это не означает, что фотоны и электроны неразличимы. В отличие от X-лучей электроны отклоняются электрическими и магнитными полями. Они являются носителями заряда и имеют намного меньшую энергию и проникающую способность по сравнению с X-лучами с той же длиной волны.

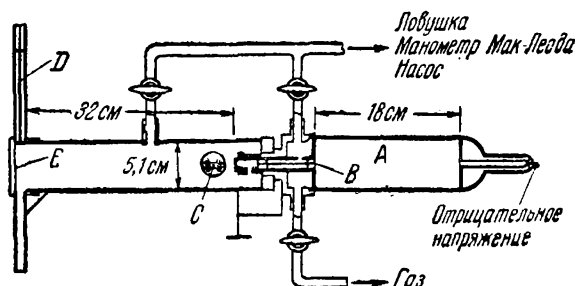


Рис. 1.

3. Сущность описываемых опытов заключается в следующем. Моноэнергетический пучок катодных лучей проходит через очень тонкую пленку нормально к ее поверхности и регистрируется фотопластинкой, находящейся на некотором расстоянии от нее. Если пленка состоит из мельчайших кристаллов, расположенных случайным образом, то мы должны получить такую же картину, как в опыте Холла, Дебая и Шеррера, где использовались X-лучи с такой же длиной волны. Если преобладает какая-либо определенная ориентация кристаллов, то можно рассчитывать изменение дифракционной картины. Мы увидим, что на опыте были обнаружены оба этих эффекта. Важнейшее условие проведения опыта состоит в том, чтобы электрон при прохождении через пленку рассеивался только один раз. Для этого она должна быть достаточно тонкой. В противном случае дифракционная картина будет безнадежно размыта из-за наложения отклонений и представится на фотографической пластинке в виде однородно затемненной области с некоторым увеличением интенсивности вблизи от места, соответствующего направлению начального пучка.

Соблюдение этого требования вызывает основные экспериментальные трудности, но делает возможным обнаружение эффекта, который не наблюдался раньше.

4. В опыте используется простейшая экспериментальная установка (рис. 1). Катодные лучи генерируются индукционной катушкой в трубке A, проходят через тонкую трубку B с внутренним диаметром  $0,23\ \text{мм}$  и длиной  $6\ \text{см}$  и ударяются в пленку, которая помещена в C (показано в разрезе). Трубка B экранирована от магнитного поля цилиндрическим экраном, зачерненным на рисунке. Расстояние между точкой C и местом расположения фотопластинки D равно  $32,5\ \text{см}$ . Фотопластинка может быть опущена в два этапа с помощью магнитного затвора, что

\*) Под X-лучами автор понимает рентгеновские лучи. (Прим. ред.)



дает возможность экспонировать ее дважды. Это удобно, так как довольно трудно заранее оценить время экспозиции для получения хорошего изображения. Когда фотопластинка поднята в верхнюю часть камеры, для наблюдения частиц используется виллемитовый экран *E*. Камера откачивается до хорошего вакуума. Газ, поступающий через тонкую трубку из *A*, удаляется трехступенчатым ртутным насосом. Напряжение разряда измеряется насколько возможно точно с помощью разрядника, состоящего из двух алюминиевых шаров диаметром 4 см, не показанных на рисунке. Предварительные опыты по отклонению частиц в магнитном поле на участке *CD* показали, что пучок электронов является почти однородным, так как изображение пучка на фотопластинке в виде пятна смещалось как целое и имело лишь слабо выраженный хвост.

5. Характерные результаты, полученные для пленок алюминия, золота, целлулоида и вещества *X* (сначала мы полагали, что это платина), показаны

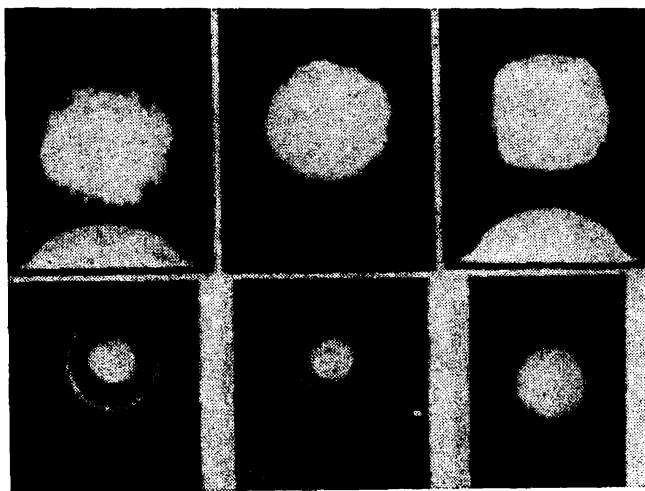


Рис. 2. Дифракция катодных лучей: а—в) алюминий, г) золото, д) целлулоид, е) вещество *X*.

на рис. 2. Как видно из рисунка, во всех случаях наблюдаемый эффект заключается в появлении концентрических колец, расположенных вокруг пятна, которое получается от нерассеянного пучка. В некоторых случаях эти кольца однородны, в других случаях их интенсивность в большей или меньшей степени сконцентрирована в виде ряда пятен на окружности. Нужно сразу отметить, что нет никаких сомнений в том, что наблюдаемый эффект связан именно с катодными лучами, которые рассеивались пленкой. Так, в отсутствие пленки наблюдалось только центральное пятно. Если на участке *CD* (рис. 1) помещался магнит, то все изображение сдвигалось как целое. В некоторых случаях, когда изображение было достаточно ярким, за всеми изменениями, связанными с магнитным полем, можно было следить с помощью виллемитового экрана. В случаях, когда кольца на экране не были видны, фотографирование производилось при наложении достаточно сильного магнитного поля на участке *CD*, чтобы обеспечить смещение центрального пятна, которое видно всегда на значительное расстояние. Все эти опыты показали, что пятно всегда находится в центре колец, перемещаясь совместно с ними при наложении магнитного поля. Таким образом, появление колец связано с катодными лучами, которые имеют приблизительно одинаковую скорость.

6. *Изменение энергии катодных лучей.* Если наблюдаемые кольца в какой-то мере связаны с явлением дифракции, то их размер для пленки из данного вещества должен быть прямо пропорционален длине волны. Точная формула де Бройля имеет вид  $\lambda = h\sqrt{1 - v^2/c^2}/m_0v$ , и если  $v/c$  мало, то  $\lambda = h/m_0v$ . Пусть для приобретения необходимой энергии электроны были ускорены полем с разностью потенциалов  $P$  вольт. Тогда  $v = \sqrt{2eP/300m_0}$ . Так как  $\lambda$  обратно пропорциональна  $\sqrt{P}$ , то для каждого кольца выражение  $D\sqrt{P}$  должно быть постоянной величиной (здесь  $D$  — диаметр кольца). Точная формула, учитывающая изменение массы со скоростью, дает следующую зависимость длины волны от разности потенциалов:  $\lambda = h\sqrt{150ePm_0}/(1 + eP/1200m_0c^2)$ . В наших опытах соответствующая поправка никогда не превышала 3%. Постоянство величины  $D\sqrt{P} (1 + eP/1200m_0c^2)$  для данной пленки хорошо видно из приведенных таблиц (табл. 1 и 2).

Полученные результаты являются серьезным указанием на справедливость теории де Бройля. Они позволяют провести детальный анализ ожидаемых следствий этой теории.

7. Предположим, что пучок катодных лучей падает под углом  $\vartheta$  на плоскость с индексами  $(h \ k \ l)$  кристалла (рис. 3). Согласно формуле Брэгга он будет отражаться от кристалла при условии, что

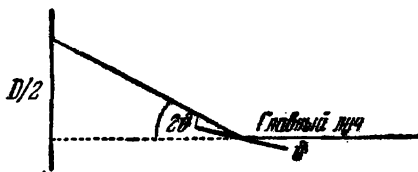


Рис. 3.

где  $d \sin \vartheta = n\lambda$ , где  $d$  — расстояние между параллельными плоскостями типа  $(h \ k \ l)$ . Если  $L$  — расстояние от кристалла до фотопластинки, то отраженный пучок будет фиксироваться на фотопластинке на расстоянии  $D/2$  от центрального пятна, где  $D = 4\theta L = 2n\lambda L/d$  (в предположении, что угол  $\theta$  мал).

Если имеется большое число малых кристаллов, ориентированных случайным образом, так что возможны любые углы падения, то мы будем наблюдать кольца, диаметр которых определяется приведенной выше формулой для всех значений  $d$  в кристаллической решетке и для  $n=1, 2, 3$  и т. д. Это хорошо известный метод Холла — Дебая — Шеррера для кристаллического порошка. Если кристаллы имеют определенные ориентации по отношению к пленке, то некоторые из колец будут отсутствовать. Итак, рассмотрим кристалл с прямоугольными осями и предположим, что плоскость  $(1 \ 0 \ 0)$  всегда (приблизительно) параллельна поверхности пленки. Мы считаем, что отражения будут возникать от плоскостей  $(0 \ 1 \ 0)$  и  $(0 \ 1 \ 1)$ , а малый угол  $\vartheta$  будет обеспечен небольшой расходимостью пучка и неровностью пленки. С другой стороны, отражение от плоскости  $(1 \ 1 \ 1)$  не будет иметь места, так как катодные лучи должны были бы падать на пленку под большим углом, чтобы требуемым соотношением  $2d \sin \vartheta = n\lambda$  угол с плоскостью  $(1 \ 1 \ 1)$  был мал. (Напомним, что  $\lambda$  составляет приблизительно  $1/50 d$ .) В промежуточном случае, когда имеется несколько осей ориентации, интенсивность по окружности каждого из наблюдаемых колец не будет постоянной. В случае кубической симметрии каждому направлению осей соответствуют четыре пятна, расположенные по периметру кольца.

8. *Алюминий.* Рассмотрим с этой точки зрения результаты, полученные для алюминия. Пленки представляли из себя тончайшие фольги, полученные при травлении едким калием до полной прозрачности. Их истинную толщину трудно оценить, так как при таком способе получения они неоднородны. Для получения хороших результатов их толщина не должна быть больше  $10^{-2}$  см. Посмотрев на рис. 2, а и б, мы заметим, что кольца неоднородны. Можно предположить, что ориентация кристаллов возникла при прокатывании пленки. Кроме внутреннего кольца  $D_1$  удается различить расположенные за ним два других кольца  $D_2$  и  $D_3$  и следы четвертого кольца между  $D_2$  и  $D_3$  \*). Отношения  $D_2/D_1$  и  $D_3/D_1$  приведены в таблице 3. В таблице не указано отношение  $D_3/D_1$  для тех случаев,

\*) Кольцо  $D_3$  на репродукциях не видно.

когда кольцо либо находилось вне поля зрения, либо было слишком слабым для измерений. Как видно из таблицы, наблюдаемые отношения близки к  $\sqrt{2} : 1$  и  $2 : 1$ .

Из экспериментов с X-лучами известно, что алюминий имеет гранцентрированную кубическую решетку. Для такой решетки расстояние  $d$  между плоскостями

Таблица 1

Алюминий				
Фотопластинка	Искровой зазор, мм	$P, \text{ в}$	$D_1, \text{ см}$	$D_1 \sqrt{P} (1 + Pe/1200 \text{ тс}^2)$
7 октября (3)	5	17 500	3,1	415
10 октября (2)	9,5	30 500	2,45	434
7 октября (2)	10	31 800	2,32	418
7 октября (4)	13	40 000	2,12	430
7 октября (5)	14,5	44 000	2,08	445
7 октября (6)	16,5	48 600	1,90	430
11 октября (1)	16,5	48 600	1,98	446
12 октября (2)	20	56 500	1,83	446
12 октября (3)	20	56 500	1,80	438
				В среднем 434

Таблица 2

Золото				
Фотопластинка	Искровой зазор, мм	$P, \text{ в}$	$D', \text{ см}$	$D' \sqrt{P} (1 + Pe/1200 \text{ тс}^2)$
13 октября (1)	7,5	24 600	2,50	398
12 октября (4)	10	31 800	2,15	390
12 октября (5)	12,75	39 400	2,00	404
12 октября (6)	15,25	45 600	1,86	405
12 октября (7)	19	54 300	1,63	388
17 октября	22	61 200	1,61	410
				В среднем 399

Таблица 3

Фотопластинка	12 окт. (3)	11 окт. (1)	7 окт. (6)	7 окт. (5)	7 окт. (2)	7 окт. (2)	7 окт. (1)	Среднее
$D_2/D_1$	1,41	1,39	1,42	1,37	1,38	1,42	1,41	1,40
$D_3/D_1$	—	—	2,15	—	2,02	—	—	2,08

определяется как  $d = a/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ , где  $h, k, l$  — индексы плоскости и  $a$  — сторона элементарного куба. Если некоторые из величин  $h, k, l$  нечетные, а некоторые четные (считается, что нуль — четное число), то все числа нужно удвоить.

Если одна из осей перпендикулярна поверхности пленки, то возможные плоскости, у которых один индекс равен нулю, а остальные индексы наименьшие, являются плоскости (1 0 0), (1 1 0), (1 2 0) и т. д. Теперь  $D = 2n\lambda L \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}/a$ , отсюда, удваивая индексы, когда это требуется, мы получаем в той же последовательности  $Da/\lambda L = n4, n4\sqrt{2}, n4\sqrt{5}$  и т. д. Если мы примем, что  $n=1, 2$  для первого члена и  $n=1$  для второго члена, то мы получим  $Da/\lambda L = 4, 4\sqrt{2}, 8$ . Эти числа, так же как и наблюдаемые величины  $D_1, D_2, D_3$ , находятся в соотношении  $1 : \sqrt{2} : 2$ . Легко видеть, что любое другое кольцо должно быть внешним по отношению к данным кольцам. Появление слабого кольца между  $D_2$  и  $D_3$  связано, по-видимому, с тем, что некоторые кристаллы ориентированы не так, как предполагалось. Отношение его диаметра к  $D_1$ , насколько его можно измерить, равно  $\sqrt{3} : 1$ , что соответствовало бы отражению второго порядка от плоскости (1 1 1).

В рассмотренных образцах имеется слишком много кристаллов, что видно из большого числа пятен, поэтому их симметрия не может отчетливо проявиться. К счастью, я нашел другой образец, который, по-видимому, на малом участке состоял из монокристалла. Для этого образца внутренний круг  $D_1$  превратился в четыре короткие дуги, размещенные в углах квадрата, а  $D_2$  имеет прежнюю форму, с той лишь разницей, что диагонали этих двух квадратов составляют угол  $45^\circ$ . Этот образец был довольно толстым и фон от частиц, рассеянных обычным образом, был значительным. Наблюдаемая картина воспроизведена на рис. 2, в. Так как плоскости (1 1 0) расположены под  $45^\circ$  к плоскости (1 0 0), то полученные результаты находятся в точном соответствии с предсказаниями теории.

Наконец, мы можем сравнить величину  $a$ , вычисленную в этом эксперименте и в опытах по рассеянию X-лучей. В пределах точности измерений величины  $a$  для трех образцов хорошо согласуются друг с другом. Исключая некоторые эксперименты с очень высокими напряжениями, где измерения с помощью искрового разрядника вносили большую ошибку, я нашел, что среднее  $a = 3,80 \cdot 10^{-8}$ , в то время как по измерениям с X-лучами  $a = 4,046 \cdot 10^{-8}$ . Расхождение результатов составляет 6 процентов. Эта величина лежит за пределами случайных ошибок и может быть следствием систематической ошибки\*). Метод измерения энергии с помощью искрового разрядника не является очень точным, особенно при применении быстро меняющихся напряжений, что имеет место в индукционной катушке. Весьма возможно, что вследствие этого возникает систематическая ошибка. С другой стороны, возможны и некоторые поправки теоретического характера. Расхождение было бы на 1 или 2 процента меньше, если пренебречь релятивистской поправкой.

9. *Золото*. Золотые пленки были приготовлены из тончайшего листка, полученного травлением в царской водке. На рис. 2, г изображена картина рассеяния, полученная для одного из образцов. В приведенной ранее таблице 2 показано, что величина  $D'\sqrt{P}$  не зависит от энергии частиц. В данном случае  $D'$  получается усреднением диаметров двух внутренних колец\*\*), которые не разрешались при низкой энергии частиц. Наблюдаемые кольца непрерывны, что указывает на наличие большого числа кристаллов, ориентированных случайным образом. Это можно ожидать, так как листок был изготовлен из поковок. Золото также имеет гранецентрированную кубическую решетку. В предположении, что кристаллы расположены хаотически, мы должны рассмотреть все возможные индексы ( $h k l$ ). Соответствующие величины  $Da/2\lambda L$  приведены ниже (табл. 4). (Считая, например, что (4 0 0) отличается от (2 0 0), мы тем самым исключаем необходимость введения переменного  $n$ .) «Наблюдаемые» величины вычислены при условии, что диаметр первого кольца принят за  $\sqrt{3}$ .

\*) См. замечание в конце статьи.

\*\*) На репродукции показано довольно широкое кольцо, разделенное на две части темным промежутком.

Таблица 4

(h k l)	$\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$	Наблюдаемые величины	
		17 октября	12 октября (7)
(2 1 1)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
(2 0 0)	$\sqrt{4} = 2,00$	2,05	2,02
(2 2 0)	$\sqrt{8} = 2,83$	2,81	2,83
(1 1 3)	$\sqrt{11} = 3,32$	3,40	3,33
(2 2 2)	$\sqrt{12} = 3,47$		
(4 0 0)	$\sqrt{16} = 4,00$	Отсутствует	Отсутствует
(3 3 1)	$\sqrt{19} = 4,36$	4,44	4,45
(4 2 0)	$\sqrt{20} = 4,47$		

Мы видим, что соответствие результатов очень хорошее, что все кольца можно объяснить и что кольца, появление которых можно ожидать, исходя из размеров фотопластины, имеются в наличии. Исключение составляет рассеяние более высокого порядка на плоскости (1 0 0), которое, как можно ожидать, должно дать очень слабое изображение. Кольца со значениями  $Da/2\lambda L$ , равными  $\sqrt{11}$  и  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{19}$  и  $\sqrt{20}$ , не разрешаются.

Я нашел, что абсолютная величина  $a = 3,80 \cdot 10^{-8}$ . Опыты по рассеянию X-лучей дают  $a = 4,065 \cdot 10^{-8}$ . Расхождение составляет 6,5 процента. Здесь можно привести те же замечания, что и в случае алюминия.

10. *Целлулоид*. Было сделано несколько фотографий для тонкой пленки целлулоида толщиной около  $5 \cdot 10^{-6}$  см, подобной тем, которые использовались Рэйдом в опытах, описанных в «Nature». Одна из фотографий представлена на рис. 2, д. Здесь имеется хорошо определенное внутреннее кольцо и намного более слабое, невидимое на репродукции внешнее кольцо с диаметром, приблизительно в два раза большим диаметра внутреннего кольца.

Рэйд продолжает сейчас работать с этими пленками, используя новую и несколько более сложную аппаратуру, преимущество которой заключается в том, что энергия частиц может быть измерена намного точнее. Можно надеяться, что подробное описание этой работы скоро будет готово к публикации.

11. *Вещество X*. В первых экспериментах с описанной аппаратурой использовалась, как мы полагали, тонкая пленка платины. Она получалась действием царской водки на пленку, образованную путем катодного распыления платины в колбе. При очистке колбы было случайно обнаружено, что под действием кислоты пленка отслаивается в виде отдельных чешуек размером в 2 или 3 мм. Две самые прозрачные из них были помещены в установку и исследованы. Самая тонкая пленка дала хорошо заметное внутреннее кольцо \*) (рис. 2, е) и более слабое внешнее кольцо (незаметное на снимке), размеры которого приблизительно в два раза больше размеров внутреннего кольца. Для более толстой пленки проявилось только внутреннее кольцо, да и то очень слабо. Но его размер был таким же. Внутреннее кольцо от более тонкого образца менялось с напряжением уже известным нам образом. Результаты приведены в таблице 5. Однако размеры кольца оказались почти точно в два раза меньше ожидаемого, если считать, что платина имеет гранецентрированную кубическую решетку со стороной  $3,91 \cdot 10^{-8}$  см. Наблюдаемое кольцо почти точно соответствует кольцу от целлулоида, хотя последнее

\*) В этом случае облучение вблизи от неотклоненного пучка приводит к появлению дополнительного внутреннего кольца. Подобные эффекты, проявляющиеся в меньшей степени, можно видеть на репродукциях рис. 2, в, г, д. Эти ложные кольца легко распознать, если осуществлять фотографирование с различной экспозицией.

выражено более отчетливо. Возможно, что эти пленки состояли из каких-либо жировых веществ, содержащихся в колбе (которая первоначально использовалась в совершенно других целях). Были сделаны попытки получить пленки платины, которые не вызывали бы сомнений. Однако эти попытки были неудачными, так как пленки, помещенные в установку, лопались при высыхании. Все это увеличивает вероятность того, что пленки, которые использовались в опыте, состояли не из платины.

Таблица 5

Искровой зазор, мм	$P, e$	$D, мм$	$DV\bar{V}$
3,25	12 000	18,5	203
4,5	16 100	15,8	200
7,0	23 200	12,9	196
9,25	29 600	11,9	205
13,0	39 900	10,0	200
14,75	44 400	9,7	204
			В среднем 201

Приготовить тонкие пленки платины, используя метод, пригодный для золота и алюминия, весьма трудно, и мне не удалось получить достаточно тонкую фольгу, чтобы начать работу \*).

**Заключение.** Я думаю, что полное соответствие экспериментальных результатов, полученных в этой работе, с теорией де Бройля является серьезным доказательством ее правильности. Это означает, что обычная ньютоновская механика (включая релятивистскую) является лишь первым приближением к действительности. Она так же относится к полной теории, как геометрическая оптика относится к волновой оптике. Может быть, такой вывод и далеко идущие следствия принять трудно. Однако полученные результаты невозможно объяснить без предположения, что имеет место дифракция, тем более, что количественное согласие наблюдаемых длин волн с их теоретическими значениями является просто поразительным. Необходимо подчеркнуть, что здесь не введены никакие дополнительные константы и, тем не менее, результаты опытов совпадают с теорией с точностью до 5 процентов. Важно установить, является ли это расхождение следствием экспериментальной ошибки в измерении скорости частиц, как предполагалось выше, или же оно представляет некоторую поправку к простой теории \*\*). Сейчас ведутся дальнейшие эксперименты в этом направлении. Можно также надеяться, что метод Дюмонда удастся использовать для наблюдения дифракции при рассеянии быстрых электронов на молекулах газа.

**Основные результаты.** 1. В описываемых опытах получены изображения, образованные катодными лучами, рассеянными тонкими пленками алюминия, золота, целлулоида и некоего неизвестного вещества.

2. Изображения, полученные в этом опыте и в опытах с X-лучами по методу «дифракции на порошке», оказываются совершенно подобными.

3. Размеры изображений с точностью до 5 процентов соответствуют предсказаниям волновой механики де Бройля относительно дифракции фазовых волн, связанных с электронами.

\*) *Замечание при корректуре.* Мне удалось показать, что пленки платины дают кольца, которые соответствуют известной кристаллической структуре этого металла.

\*\*\*) Можно заметить, что результаты Дэвиссона и Джермера отличаются в ту же сторону и на такую же величину.

**Замечание при корректуре.** В настоящее время я обнаружил ошибку, вызванную падением напряжения на проводах, амперметре и пр. Если искровой зазор измеряется непосредственно на разрядной трубке, а не поблизости от катушки, как это делалось в приведенном эксперименте, то величина  $a$  для платины согласуется с точностью в один процент с результатами экспериментов с X-лучами. В измерениях, сделанных старым способом, для всех металлов получалось расхождение в 6 процентов, которое можно теперь объяснить той же причиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. D y m o n d, Nature **118**, 336 (1926).
2. D a v i s s o n, K u n s m a n, Phys. Rev. **22**, 243 (1923).
3. D a v i s s o n, G e r m e r, Nature **119**, 558 (1927).
4. T h o m s o n, R e i d, Nature **119**, 890 (1927).

#### Эксперименты по дифракции катодных лучей (II) \*)

§ 1. В статье описаны опыты, которые являются продолжением опытов, рассмотренных в [1]. Используемая аппаратура осталась, в основном, без изменений. Ранее было установлено, что пучок катодных лучей, проходящий через тонкую пленку металла перпендикулярно ее поверхности, создает на фотографической пластинке, находящейся на расстоянии 30 см от пленки, изображение в виде концентрических колец. Их появление можно объяснить дифракцией волн де Бройля для электронов на атомах кристаллической решетки металла. В этой статье разъяснены некоторые неясные вопросы и приведены новые результаты для других пленок.

§ 2. В замечании в конце предыдущей статьи была объяснена причина 6-процентного расхождения в величине постоянных кристаллической решетки алюминия и золота, определяемых с помощью X-лучей и применением теории де Бройля к дифракционным кольцам, образованным катодными лучами. Это расхождение возникло из-за ошибки в измерении энергии и, следовательно, длины волны. Мы измеряли энергию с помощью разрядника, подключенного параллельно разрядной трубке. В предыдущих измерениях разрядник присоединялся к разрядной трубке проводами значительной длины. Как теперь выяснилось, на них и на выпрямительной лампе падала заметная доля напряжения. Когда мы подключили два искровых разрядника — один как раньше, а другой непосредственно к разрядной трубке, то в их показаниях наблюдалось расхождение, составляющее 1—2 мм. В таблице 1 приведены величины напряжений  $P$  и диаметры колец  $D$ , соответствующие отражению от плоскости (2 0 0), и  $D\sqrt{P}(1+Pe/1200m_0c^2)$ . Последняя величина, согласно теории де Бройля, не должна изменяться при изменении  $P$  (смотрите предыдущую статью). Множитель в скобках представляет собой релятивистскую поправку, которая в наших опытах отличается от единицы не больше, чем на 3 процента.

В первых трех сериях измерений на металлах было замечено, что величины  $D\sqrt{P}(1+Pe/1200m_0c^2)$ , соответствующие наименьшему напряжению, оказываются заниженными. Поэтому они были исключены при определении среднего значения. Этот эффект, вероятно, вызывается тем, что при проведении каждой серии измерений напряжение уменьшалось до тех пор, пока кольца переставали наблюдаться. Так как энергии частиц никогда не были совершенно одинаковыми из-за флуктуаций разряда, то, вероятно, слабые кольца, видимые при самом низком напряжении, были вызваны главным образом более быстрыми частицами и реально соответствовали какому-то более высокому среднему напряжению по сравнению с измеренным. В опытах с короткой камерой (см. § 5) к разрядной трубке были подключены две или три лейденские банки, и это привело к заметному улучшению стабилизации. Катодные лучи становились более однородными по энергии, что следовало из измерения их отклонений в магнитном поле. В этих

\*) G. P. T h o m s o n, Proc. Roy. Soc. **119**, 651 (1928).

Таблица 1

Пленка	$P, \text{ \AA}$	$D, \text{ см}$	$DV\bar{P}(1 + Pe/1200 \text{ м.с}^2)$	$a$
Целлулоид	50 000	0,85	195	$4,17 \cdot 10^{-8}$
	42 500	0,90	189	
	36 000	1,00	193	
	30 500	1,05	186	
	23 200	1,25	193	
	21 000	1,30	190	
	16 800	1,47	191	
	16 100	1,48	189	
	11 500	1,62	175	
	9 800	1,86	185	
			В среднем 189	
Золото	58 000	1,50	371	$4,20 \cdot 10^{-8}$
	55 000	1,58	381	
	44 000	1,75	376	
	33 700	2,00	374	
	21 000	2,40	(352)	
			В среднем 375,5	
Алюминий	64 000	1,47	384	$4,07 \cdot 10^{-8}$
	57 600	1,62	398	
	45 000	1,78	388	
	34 500	2,00	378	
	21 800	2,42	(361)	
			В среднем 387	
Платина	45 000	1,85 *)	402	$3,89 \cdot 10^{-8}$
	40 000	1,96 *)	400	
	34 500	2,23 *)	421	
	25 500	2,46	398	
	18 200	2,75	(375)	
			В среднем 405	
Алюминий (короткая камера)	34 500	1,64	310	$4,00 \cdot 10^{-8}$
	27 500	1,84	310	
	26 200	1,86	305	
	21 800	2,09	312	
			В среднем 309	
Платина	29 000	1,84 +)	319	$3,89 \cdot 10^{-8}$
	24 000	1,98	311	
			В среднем (взве- шенное) 317	

Примечания. Величина  $a$  для целлулоида — расстояние между отражающими плоскостями. Величина  $a$  для металлов — сторона элементарной ячейки в гранецентрированной кубической решетке.

\*) Рассчитано для кольца (1 1 1) умножением его диаметра на  $2/\sqrt{3}$ , так как кольцо (2 0 0) было определено недостаточно хорошо.

+) Среднее для четырех пластинок при одинаковых потенциалах.



Таблица 2

Металл	Al	Au	Pt
Катодные лучи	4,035	4,20	$3,89 \cdot 10^{-8}$
X-лучи	4,043	4,064	$3,93 \cdot 10^{-8}$

опытах рассмотренный эффект не наблюдался. Ниже (табл. 2) приведены средние величины  $a$ , полученные в наших измерениях и в измерениях с X-лучами.

Ошибка составляет в среднем только 1 процент и не носит систематического характера. Рэйд в статье, посланной одновременно с этой, показал, что результаты измерений колец на целлулоиде находятся в хорошем согласии, когда энергия катодных лучей определялась описанным методом и непосредственно по отклонению в электрическом поле. В последнем случае исключалась возможная систематическая ошибка в измерении напряжения на индукционной катушке с помощью искрового разрядника.

§ 3. Кроме колец, описанных в предыдущей статье, наблюдались кольца для золота с диаметрами  $\sqrt{22,7}$ ,  $\sqrt{22,6}$  и  $\sqrt{35,4}$  (диаметр кольца (2 2 0) при этом принимался за  $\sqrt{8}$ ).

Диаметры первых двух колец несомненно должны соответствовать  $\sqrt{24}$  и  $\sqrt{27}$ . Плоскости рассеяния для первого кольца (4 2 2), для второго или (3 3 3), или третий порядок (1 1 1). Третье кольцо может иметь диаметр либо  $\sqrt{35}$  (5 3 1), либо  $\sqrt{36}$ . Последний вариант может быть связан или с плоскостью (2 0 0) третьего порядка, или с плоскостью (4 4 2).

Результаты, полученные для относительных размеров колец в случае алюминия, описаны в § 5. Во всех случаях диаметр первого кольца принимался за  $\sqrt{4}$ . Кольцо, соответствующее плоскости (1 1 1), с диаметром  $\sqrt{3}$  для алюминия не

Таблица 3

Кольцо	1	2	3	4	5	6	7	8
Измеренный диаметр	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8,00}$	$\sqrt{10,9}$	$\sqrt{16,5}$	$\sqrt{20,4}$	—	$\sqrt{27}$	—
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7,65}$	$\sqrt{10,6}$	$\sqrt{14,8}$	$\sqrt{18,6}$	—	—	—
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8,05}$	$\sqrt{11,05}$	$\sqrt{15,8}$	$\sqrt{21,4}$	—	$\sqrt{28}$	—
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7,93}$	$\sqrt{11,4}$	$\sqrt{16,0}$	$\sqrt{21,0}$	—	—	—
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7,95}$	$\sqrt{10,8}$	$\sqrt{15,8}$	$\sqrt{19,3}$	—	$\sqrt{26,6}$	$\sqrt{35,0}$
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7,95}$	$\sqrt{11,0}$	$\sqrt{15,8}$	$\sqrt{20,2}$	—	—	—
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8,00}$	$\sqrt{10,9}$	$\sqrt{15,4}$	$\sqrt{19,2}$	$\sqrt{23,6}$	$\sqrt{27,4}$	$\sqrt{33,0}$
	Ожидаемый диаметр	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{19}$ или $\sqrt{20}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{27}$
Соответствующая плоскость	(2 0 0)	(2 2 0)	(3 1 1)	(4 0 0)	(3 3 1) или (4 2 0)	(4 2 2)	(5 1 1)	(5 3 1) или (6 0 0) (4 4 2)

наблюдалось. Это находится в соответствии с результатами Конобеевского [2] по рассеянию X-лучей на прокатанном алюминии (табл. 3). Он нашел, что в тончайших образцах оси кристаллов [1 0 0] нормальны к поверхности, и поэтому никакие плоскости (1 1 1) не могут образовать достаточно малые углы с направлением пучка, чтобы имели место отражения.

**§ 4. Платина.** Как видно из приведенных ранее результатов, оказалось возможным получить дифракционную картину для платины [3]. Это было сделано тремя способами. В первом удачном варианте тонкие пленки платины напылялись на стекло катодным распылением и снимались со стекла с помощью соляной кислоты. Эти пленки были настолько тонкими, что при установке в прибор всегда разрушались. Поэтому их переносили на подложку из тончайшего целлулоида и использовали в таком виде. Эти составные пленки давали кольца, ожидаемые для платины, но они не были достаточно резкими. В частности, не удалось разрешить кольца, соответствующие плоскостям (1 1 1) и (2 0 0) (диаметр  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{4}$ ).

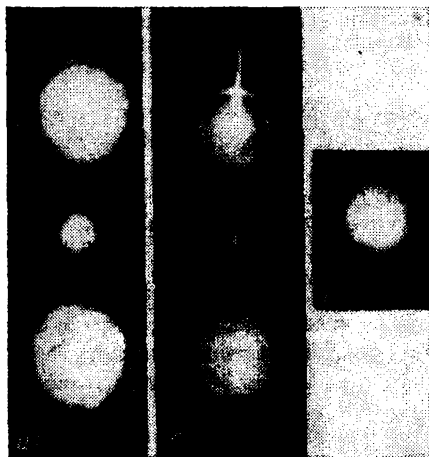


Рис. 4. Дифракция катодных лучей: а) алюминий, б) платина, в) серебряная фольга, наклоненная к горизонтальной оси.

Это обстоятельство может быть связано с тем, что возникает путаница из-за того, что второе кольцо от рассеяния на целлулоиде имеет почти такой же диаметр. Возможно, что напыленная платина состоит из таких малых кристаллов, что разрешающая сила их недостаточна. С такой пленкой были обнаружены кольца, соответствующие плоскости (2 2 0) ( $\sqrt{8}$ ) и плоскостям (3 1 1) или (2 2 2) ( $\sqrt{11}$  или  $\sqrt{12}$ ). Эти кольца были непрерывными и имели одинаковую интенсивность по окружности. Пленки были достаточно тонкими, так что через них были ясно видны колба и нить электрической лампочки. Другой метод получения пленки заключался в том, что толщина фольги постепенно уменьшалась сначала поковкой, а затем действием царской водки. Первоначальная фольга имела слишком большую толщину, и в полученной пленке легко образовывались дыры в одних местах и

излишняя толщина в других. Тем не менее, одна из пленок дала довольно хорошие результаты, хотя, наверное, только малая часть ее поверхности имела нужную толщину. В этом случае дифракционная картина была совершенно отличной от прежних, полученных для напыленных пленок. Она состояла из ряда изолированных пятен, свидетельствующих о том, что дифракция осуществлялась только на нескольких кристаллах. В некоторых случаях пары пятен оказывались на противоположных концах диаметра, проходящего через центр изображения, как и следовало ожидать по теории. Расстояния между парами пятен находились в хорошем соответствии с диаметрами колец, ранее найденных для пленок, полученных напылением. Найденные пятна соответствовали плоскостям (1 1 1), (2 0 0), (2 2 0), (3 1 1) и отношению диаметров  $\sqrt{3} : \sqrt{4} : \sqrt{8} : \sqrt{11}$ . Измерение потенциалов производилось методом, который содержал ошибку, рассмотренную в § 2. Поэтому абсолютная величина постоянной решетки получилась заниженной на 7 процентов.

В конце концов мне удалось достать очень тонкий лист платины, изготовленный компанией Messrs. Whiley Ltd. Он был неоднородным по толщине. Выбрав самые тонкие его части, довольно прозрачные, мне удалось получать дифракционные кольца, не уменьшая толщину фольги кислотой, как это требовалось для алюминия и золота. Кольца были почти непрерывными, но в них отчетливо наблю-

далось некоторое число пятен. Наблюдаемая картина являлась, таким образом, промежуточной по отношению к первым двум пленкам. Та же самая пленка использовалась позднее в экспериментах (§ 5) и дала совершенно непрерывные кольца без пятен, но с изменением интенсивности при переходе от одного квадранта к другому (см. рис. 4, б). По-видимому, здесь использовалась несколько другая часть пленки, так как маловероятно, чтобы свойства платины менялись бы при хранении. Результаты, полученные с этой пленкой, приведены в таблице 1. Было измерено большое число колец. Некоторые типичные примеры приведены ниже (табл. 4). Диаметр внутреннего кольца принимался равным  $\sqrt{3}$ .

Т а б л и ц а 4

Кольцо	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Измеренный диаметр	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4,00}$	$\sqrt{7,95}$	$\sqrt{11,1}$	$\sqrt{16,2}$	$\sqrt{18,8}$	$\sqrt{23,2}$	$\sqrt{26,8}$	$\sqrt{34,3}$
	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4,05}$	$\sqrt{8,05}$	$\sqrt{11,4}$	$\sqrt{15,2}$	$\sqrt{18,4}$	$\sqrt{22,5}$	$\sqrt{26,3}$	$\sqrt{34,2}$
	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3,98}$	$\sqrt{7,95}$	$\sqrt{10,8}$	$\sqrt{15,2}$	$\sqrt{18,3}$	$\sqrt{23,8}$	$\sqrt{26,4}$	—
Ожидаемый диаметр	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{35}$ или $\sqrt{36}$
Соответствующая плоскость	(1 1 1)	(2 0 0)	(2 2 0)	(3 1 1)	(4 0 0)	(3 3 1)	(4 2 2)	(3 3 3) или (5 1 1)	(5 3 1) или (6 0 0), (4 4 2)

Кроме этого, на краю кольца  $\sqrt{11}$ , вдоль радиусов, проходящих через точки, где наиболее сильно проявляется кольцо (1 1 1), можно было заметить следы кольца  $\sqrt{12}$ . Это так и должно быть, так как  $\sqrt{12}$  есть второй порядок этого кольца. Кольцо  $\sqrt{20}$ , соответствующее плоскости (4 2 0), непосредственно не наблюдалось, так как оно сливается с кольцом  $\sqrt{19}$ . Кольцо  $\sqrt{32}$  наблюдалось только в одном случае. Оно является вторым порядком  $\sqrt{8}$ , а все случаи более высоких порядков проявляются очень слабо. Как исключение наблюдались все кольца вплоть до  $\sqrt{35}$ , которые должны иметь место для гранцентрированной кубической решетки. На некоторых пластинках были обнаружены слабые следы колец с еще большими диаметрами.

**§ 5. Магнитное отклонение.** В первых же опытах нами было замечено, что дифракционная картина отклоняется магнитным полем приблизительно так же, как и основной пучок катодных лучей. Отсюда следовало, что частицы обладали одинаковой скоростью. Чтобы выяснить, можно ли обнаружить в их поведении хотя бы небольшое различие, имело смысл провести точные измерения. Для этой цели к старой установке (рис. 1) была подсоединена новая камера, более короткая и широкая. Расстояние от пленки до фотопластинки составило теперь 24,8 см (вместо 32,3 см). Внутренний диаметр латунной трубки, из которой была сделана камера, равнялся 12,5 см. Магнитное поле создавалось двумя большими катушками с диаметром 46,5 см, содержащими по 20 витков и расположенными так, что их витки лежали в вертикальной плоскости на расстоянии 25 см друг от друга. Такая магнитная система соответствовала катушкам Гельмгольца, насколько этого можно было достичь без дальнейшей переделки установки. Центры катушек находились на 4 см выше линии неотклоненного пучка и на 8,6 см впереди фотопластинки. Экран из мягкого железа между камерой и разрядной трубкой был

снят. Обычно на каждой пластинке делались две фотографии, при прямом и обратном токе магнита, который изменялся от 5 до 8,5 а в соответствии со скоростью частиц.

В этом приблизительно однородном магнитном поле, созданном катушками, всё изображение смещалось вверх или вниз на 3 см (см. рис. 4, а, б). Насколько можно было судить по визуальное наблюдению, основной пучок оставался в центре дифракционной картины. Для того чтобы точно измерить смещение, необходимо было отметить центр основного пучка. Для этого фотопластинка рассматривалась в отраженном свете, когда можно было наблюдать пятно от основного пучка, и в центре пятна с помощью иглы снималась маленькая частичка фотослоя.

От этой точки измерялось расстояние до различных колец в направлении магнитного отклонения и в обратном направлении. Это делалось для каждой из двух фотографий на пластинке. Подобные эксперименты проводились с платиной, где использовалась пленка, описанная ранее, и с алюминиевой пленкой, которая применялась в предыдущей работе.

Кольцо  $\sqrt{3}$  в алюминии отсутствует из-за упорядоченного размещения кристаллов в пленке. Поэтому измерения проводились с кольцами  $\sqrt{4}$  и  $\sqrt{8}$ , говоря точнее, мы использовали расположенные на них пятна. Для платины измерялись наиболее четко видимые кольца  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{4}$  и  $\sqrt{11}$  (см. рис. 4, б).

Результаты показаны в таблице 5. Измерения по двум снимкам на фотопластинке усреднялись.

Таблица 5

Кольцо	Алюминий		Платина		
	$\sqrt{4}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{11}$
Разность радиусов, мм	+0,14	+0,3	+0,15	-0,2	—
	+0,3	+0,22	+0,20	+0,5	—
	-0,1	+0,05	+1,0	+0,6	+0,6
	—	—	-0,05	-0,05	+0,05
Среднее	+0,11	+0,19	+0,33	+0,21	+0,32

Знак плюс означает, что радиус, направленный в сторону магнитного отклонения, был больше. Средняя разность по всем измерениям составляет 0,23, а соответствующий сдвиг колец по отношению к центру — 0,115. Среднее магнитное отклонение центров было 2,8 см. Как показывают вычисления, имеет место положительный эффект, приводящий к среднему сдвигу центра на 0,09. Причина его заключается в том, что фотопластинка расположена под углом, не равным  $90^\circ$ , по отношению к направлению отклоненного пучка. (Отношение разности радиусов к отклонению центра выражается как  $3\varphi^2$ , где  $\varphi$  равно половине угла при вершине конуса дифрагированных частиц.) Таким образом, большую часть эффекта можно объяснить, а имеющееся расхождение безусловно меньше вероятной ошибки. Скорость частиц в основном пучке совпадает со скоростью дифрагированных частиц с точностью, лучшей одного процента.

В этих опытах оказалось необходимым подсоединить к разрядной трубке конденсатор, состоящий из двух или трех лейденских банок. Это в значительной степени уменьшило неоднородность первоначального пучка и, следовательно, разброс, вызванный магнитным полем, приводящий к сильному размытию колец. Было обнаружено, что части колец, обращенные к первоначальному центру в присутствии магнитного поля, выглядели более четко, чем без него. И, наоборот, противоположные стороны колец казались более размытыми. Этот эффект связан с тем, что частицы не являются строго моноэнергетическими даже при подключен-

ном конденсаторе, и полностью аналогичен ахроматизму колец Ньютона при наблюдении их через призму.

**§ 6. Разрешающая способность.** Представляет интерес следующий вопрос: что можно сказать о свойствах волн и кристаллов по наблюдаемой ширине колец?

Ширина колец определяется различными причинами: конечным размером первичного пучка, ограниченным размером нескольких кристаллов, неоднородностью пучка, а также числом когерентных волн в волновом пакете каждого из электронов. Последние две причины тесно связаны и могут быть рассмотрены как различные аспекты одного и того же эффекта.

Практически наибольший вклад в эффект вносит первая причина, по крайней мере когда к разрядной трубке подключен конденсатор. Однако наблюдения разрешающей способности, определяемой шириной колец, позволяют получить нижний предел для размера кристаллов и числа волн в волновом пакете.

Если считать, что пучок совершенно однороден и число элементов в кристалле бесконечно, то можно следующим образом рассчитать разрешающую способность в зависимости от числа волн. Предположим, что группа волн имеет постоянную интенсивность в интервале от  $\lambda - \Delta\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , а вне этого интервала ее интенсивность равна нулю. Так как  $p\lambda = 2d \sin \vartheta$ , где  $p$  — порядок отражения волны, а  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — величины  $\vartheta$  для двух колец, которые находятся на границе разрешения, то  $2p\Delta\lambda = 2d(\vartheta_2 - \vartheta_1) \cos \vartheta$ , что приблизительно равно  $2d(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ . Число волн в пакете можно найти, предположив, что все волны находятся в одной фазе при  $x = 0$ . Тогда при  $x = r\lambda$  смещение будет определяться так:

$$\int_{-\Delta\lambda}^{\Delta\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda + t} dt = -\frac{\lambda^2}{2\pi x} \left[ \sin 2\pi r \left( 1 - \frac{t}{\lambda} \right) \right]_{-\Delta\lambda}^{\Delta\lambda},$$

если  $\Delta\lambda/\lambda$  мало. Для целого  $r$  это выражение переходит в  $\frac{\lambda}{\pi r} \sin 2\pi r \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ . Амплитуда

обращается в нуль, когда  $2\pi r \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \pi$  и  $2r$  (полное число волн с обеих сторон от начала) равно  $\lambda/\Delta\lambda$ . Таким образом,  $2r = p\lambda/d(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 2\vartheta/(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ . В данных экспериментах кольца  $\sqrt{24}$  и  $\sqrt{27}$  разрешаются легко, кольца  $\sqrt{11}$  и  $\sqrt{12}$  разрешаются с трудом, но можно с уверенностью считать, что они разрешились бы полностью, если бы не конечные размеры начальной пучка. В этом случае

$$2r = 2\sqrt{11}/(\sqrt{12} - \sqrt{11}) = 48.$$

По всей видимости, число волн больше, так как собственная ширина пучка определяет большую часть наблюдаемой ширины дифракционных колец.

**§ 7. Пленки, расположенные под углом.** В нескольких опытах пленки были расположены под углом к пучку. Угол между нормалью к пленке и направлением движения электронов составлял приблизительно  $30^\circ$ . Если кристаллы ориентированы беспорядочно, то изменение наклона пленки не должно приводить к каким-либо изменениям в дифракционной картине. Если же в расположении кристаллов имеется некоторое преобладающее направление по отношению к плоскости пленки, то относительная интенсивность различных участков одного и того же кольца и интенсивность различных колец в целом будет изменяться. При работе с наклонной пленкой серебра была обнаружена заметная разница в яркости различных частей кольца (2 0 0), хотя в случае пленки, расположенной нормально к пучку, интенсивность кольца была равномерной. Самые яркие части оказались на концах диаметра, параллельного оси, относительно которой была повернута пленка. Этого следовало бы ожидать при некоторой тенденции одной из осей кристаллов располагаться перпендикулярно поверхности. Так как длина волны мала по сравнению с расстоянием между плоскостями, то отражать будет только те плоскости, которые образуют малый угол с пучком. Единственные плоскости, которые удовлетворяют этому условию, — это плоскости (2 0 0). Направления нормалей для этих плоскостей почти совпадают с осью поворота пленки. Однако не все кристаллы ориентированы подобным образом. Это следует из того, что кольца от плоскости (1 1 1) проявляются обычным образом. Наиболее яркие части этого

кольца в случае наклоненной пленки проявляются на концах диаметра, который образует прямой угол с соответствующим диаметром для кольца (2 0 0). Так как эти два кольца близки друг к другу, то на фотопластинке они выглядят в виде эллипса (рис. 4, в). Для кристалла алюминия, где при нормальном положении пленки кольцо (2 0 0) проявлялось в виде ряда отдельных пятен, наиболее ярко выделялись два пятна, лежащие на концах диаметра, параллельного оси поворота пленки. Не все кристаллы были ориентированы так, что их оси перпендикулярны пленке, поэтому на кольце можно было заметить и другие пятна (см. § 3).

**Обсуждение.** Результаты данной работы подтверждают результаты предыдущего эксперимента и находятся в согласии с теорией электронных волн де Бройля. Сложные дифракционные картины во всех случаях соответствовали предсказаниям теории де Бройля и известной структуре металлов. В результате улучшения методики измерения потенциала разряда абсолютные размеры колец совпали с расчетными значениями. Средняя точность совпадения несколько больше одного процента. Тем не менее, нельзя с определенностью считать, что простая теория, использованная в вычислениях, абсолютно правильна. Мы допускали, что длина волны электрона в металле и вакууме одна и та же. Бете заметил [4], что расхождение в 30 процентов, которое имело место в опытах Дэвиссона и Джермера, можно объяснить рефракцией волны, если считать коэффициент преломления меньшим единицы. Такой эффект в небольшой степени наблюдался в случае X-лучей, его теоретический расчет выполнил Дарвин [5]. По теории де Бройля  $\mu = \sqrt{(E - V)/E}$ , где  $E$  — энергия электрона, а  $V$  — средний потенциал в металле, выраженные в вольтах. Для того чтобы согласовать результаты Дэвиссона и Джермера с теорией, надо считать  $V$  равным примерно 20 в. При этом  $\mu$  при  $E = 40\ 000$  эв отличается от единицы на 1/4000.

В данном опыте электроны движутся нормально к пленке и не отклоняются на входе, но длина волны будет изменяться от  $\lambda_0$  до  $\lambda_0/\mu$ . Условие отражения будет иметь вид  $2d \sin \theta = n\lambda_0/\mu$ . Электронные волны испытывают преломление на выходе. Полное отклонение  $2\theta'$  определяется из соотношения  $\sin 2\theta' = \mu \sin 2\theta$ . Если  $\theta$  мало,  $2\theta' = n\lambda_0/d$  не зависит от  $\mu$ . Таким образом, этот эффект не мог проявиться в этом опыте, не говоря о том, что величина  $\mu - 1$  мала.

Отсутствие сколько-нибудь заметной разницы в скоростях электронов в основном и дифрагированном пучках, вообще говоря, не вызывает удивления. Так как при дифракции пучка проявляется действие всего кристалла, то нужно считать, что в процессе рассеяния электрон сталкивается в целом с кристаллом, практически имеющим бесконечную массу. При этом не происходит никакой передачи энергии электрона и никакого изменения в его скорости.

Наоборот, если бы частицы рассеивались другим свободным электроном, мы должны были бы иметь  $u - u' = u \sin^2 \theta$ , где  $u$  и  $u'$  — начальная и конечная компоненты скоростей по направлению первичного пучка,  $\theta$  — угол изменения направления относительного движения. Для малых углов  $\sin \theta = 2 \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол отклонения частицы. Таким образом,  $(u - u')/u = 4 \sin^2 \varphi$ . Для рассмотренных колец  $\varphi$  около 0,04, а  $(u - u')/u$  составляет приблизительно 1 процент. Такая разница в скоростях должна была быть обнаружена. Энергия, переданная свободному электрону, при этом составляла бы  $(0,04)^2$  начальной энергии. Это было бы порядка 100 эв. По-видимому, столкновение со связанным электроном привело бы к таким же результатам, если бы энергия была достаточной для ионизации.

Таким образом, если считать, что рассеяние электронов возникает в процессе соударения, то результаты измерений показывают, что в соответствии с нашими ожиданиями имеют место не электрон-электронные соударения, а столкновения электронов с кристаллом или по крайней мере с атомами. С другой стороны, известно, что потери энергии электронов, проходящих через вещество, рассчитываются с достаточной точностью в предположении о столкновениях с электронами вещества. Возможно, что только часть электронов рассеивается в соответствии с законами дифракции. На практике обычное рассеяние всегда преобладает. И хотя оно может проявиться из-за многократного рассеяния на существенно более толстых пленках, я сомневаюсь, можно ли вообще принимать во внимание такое объяснение. Я надеюсь, что количественные измерения интенсивности колец могут дать ответ на этот вопрос.

Большой теоретический интерес представляет вопрос о числе волн, связанных с отдельным электроном. Высокая разрешающая способность с определенной точностью показывает, что волны с заметной амплитудой простираются по меньшей мере на расстояние около  $50 \cdot 10^{-8}$  см и, таким образом, волновая система свободного электрона имеет размер, превышающий размеры атома. Если у электрона волна сконцентрирована в малой области, то для того, чтобы согласовать результаты экспериментов, нужно сделать предположение о том, что различные электроны в пучке влияют друг на друга таким образом, что в результате получается когерентная волна\*). Это означало бы, что отдельный электрон, скорость которого хорошо определена, обязательно попал бы на какое-нибудь из возможных колец.

Чрезвычайно маловероятно, чтобы дифракционная картина становилась бы все более размытой при уменьшении интенсивности электронов до тех пор, пока интервалы между следующими друг за другом электронами стали бы настолько большими, что в установке одновременно находилась бы только одна частица. Даже если это так, то при тех плотностях тока, которые я имел, было мало шансов одновременно зарегистрировать на пленке больше одного электрона. Таким образом, нам пришлось сделать заключение о том, что волна, соответствующая даже отдельному электрону, должна приблизительно выражаться в виде  $a \cos 2\pi v \left( t - \frac{vz}{c^2} \right)$ .

Конечно, такая форма волны не может быть точной для «однородного» электрона, как и для однородного света, потому что она подразумевает установившееся движение от минус бесконечности к плюс бесконечности. Чем точнее определена скорость электрона, тем лучше он представляется волной, записанной в таком виде.

Любое устройство, которое раньше описывалось как средство получения электронов с постоянной скоростью, теперь может рассматриваться как средство получения длинного волнового пакета электронных волн. Между электронными и световыми волнами имеется точная аналогия. Разделение группы электронов, имеющих почти постоянную скорость, с помощью магнитного поля и щели аналогично получению приблизительно однородного света с помощью призмного спектрокопа. Так как скорость электронных волн увеличивается с длиной волны, то даже в отсутствие поля имеет место дисперсия и группа волн удлинится при распространении. Подобным образом расплывается импульс белого света, проходящий через стеклянную пластинку с параллельными сторонами.

Рассмотрим аналогию с волнами в воде. Если камень, брошенный в воду, создает нерегулярное возмущение, то на большом расстоянии от источника оно проявляется в виде длинного цуга волн, каждая из которых очень мало отличается от последующей, но, тем не менее, постоянно изменяет свою длину волны. Подобным же образом группа электронов, которая на небольшом расстоянии от источника представляется коротким цугом волн, на большом расстоянии будет расплываться из-за разницы в скоростях электронов. Те электроны, которые в малой области имеют почти одинаковые скорости, будут описываться длинным цугом почти однородных волн. Такими методами мы можем получить группу электронных волн, однородных настолько, насколько мы хотим.

Дарвин показал [6], что в задаче о движении электронов их нужно считать частицами только в начале и конце пути, где имеет место передача энергии. На всем остальном пути электрон можно трактовать с точки зрения представлений волновой теории. Однако для сохранения непрерывности желательно оставить концепцию электрона и для промежуточных точек. При этом с электроном

\*) *Замечание при корректуре.* Л. де Бройль показал (J. de Physique, vol. 8, p. 225 (1927)), что выражение вида  $f(x, y, z-vt) \cos 2\pi v(t-vz/c^2)$  удовлетворяет модифицированному волновому уравнению и его форма неизменна, если  $\nabla^2 f = 0$ . Он считает, что  $f$  имеет вид  $1/r$ , и получает волну, имеющую особенность в точке. При рассмотрении движения такой специальной волны он использует «принцип двойного решения», который эквивалентен предположению о том, что особенности перемещаются вдоль направления распространения соответствующей волны постоянной амплитуды. Если это принять, то возможен точечный электрон. Однако отмеченные ниже трудности просто переносятся на новую волну.

связывается волновой пакет, длина которого определяется разрешающей способностью процесса, с помощью которого выделяются однородные электроны. Для данной установки, если напряжение было бы постоянным (можно применить, например, батарею с высоким напряжением), предел достигался бы из-за неопределенности в скорости электронов, вылетающих с катода. Дарвин показал, что постоянное ускорение не изменяет длину волнового пакета (в см) и, хотя длина волны уменьшается, увеличивается число волн в пакете. Еще более однородные электроны можно было бы получить, отбирая электроны, которые дифрагируют в какой-нибудь точке одного из колец (если кристаллы, на которых происходит дифракция, достаточно велики). Точно так же можно получить однородный свет, если использовать дифракционный спектрометр в качестве монохроматического источника. В этом случае регулярный волновой пакет получается на регулярной структуре кристалла \*).

Следует заметить, что в этих экспериментах мы должны считать, что действие электрона распространяется на площадь кристалла, равную поперечному сечению тонкой трубки, определяющему поток. Так как длина волны электрона очень мала, дифракционная картина, практически не отличимая от наблюдаемой, получилась бы и от намного меньшей поверхности.

### Основные результаты

1. Дифракция электронов, проходящих через тонкие пленки платины, оказалась в полном соответствии с предсказаниями волновой теории де Бройля.

2. Величины постоянных решетки для алюминия, золота и платины, рассчитанные на основе теории де Бройля, с точностью до одного процента совпадают с постоянными, найденными в опытах с X-лучами.

3. Скорость дифрагированных электронов отличается от скорости частиц в основном пучке меньше, чем на один процент.

4. Из факта разрешения определенных колец можно заключить, что электроны должны сопровождаться волновым пакетом, в котором заключено не менее 50 волн.

5. Эксперименты с наклонными пленками находятся в качественном согласии с теорией.

6. Обсуждаются теоретические следствия, вытекающие из приведенных результатов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. G. P. T h o m s o n, Proc. Roy. Soc. 117, 600 (1928).

2. K o p o b e j e w s k i, Zs. Phys. 43, 741 (1927).

3. G. P. T h o m s o n, Nature 120, 802 (1927).

4. B e t h e, Naturwiss. 15, 786 (1927).

5. D a r w i n, Phil. Mag. 27, 318 (1913).

6. D a r w i n, Proc. Roy. Soc. 117, 258 (1928).

### Лекционная демонстрация дифракции электронов \*\*)

На основе черно-белой телевизионной трубки сконструирован прибор для демонстрации дифракции пучка электронов на тонкой

\*) Очевидно, что число волн, связанных с отдельным электроном, может быть бесконечно большим. Интересно рассмотреть вопрос о поведении электрона, который описывается очень узким волновым пакетом. Если закон, связывающий скорость и длину волны, точен, то такой электрон, не имеющий определенной волны, не может обладать никакой определенной скоростью. В соответствии с соотношением неопределенности Гейзенберга экспериментальное поведение электрона не поддается точному предсказанию. И не ясно, насколько правильно считать, что электрон вообще обладает скоростью.

\*\*\*) J. M. F o w l e r, W. W a r g e n, E. D. L a m b e, Amer. J. Phys. 30, 891 (1962).



пленке золота. На экране трубки, в которой на пути пучка помещена тонкая пленка золота, возникает изображение концентрических дифракционных колец, расположенных вокруг центрального максимума. Два наиболее ярких кольца можно наблюдать в затемненной комнате на расстоянии, не меньшем 13 метров, что дает возможность использовать этот прибор для показа в больших аудиториях.

**Введение.** Условия справедливости корпускулярной и волновой концепций можно показать на примере явлений, которые хорошо известны или по крайней мере легко демонстрируются. Не менее важными, но более сложными для показа являются опыты, в которых проявляется единство этих концепций. В частности, студентам-физикам должны быть продемонстрированы интерференционные свойства пучка частиц (скажем, электронов), кинетическое поведение которого было ими усвоено раньше.

Для показа интерференции удобно использовать демонстрационный прибор, который будет здесь описан. Его стоимость не очень велика, так как он почти целиком состоит из элементов, используемых в телевидении.

**Аппаратура.** В приборе использовалась черно-белая телевизионная трубка 16JP4 с диаметром 16 дюймов (41 см), приобретенная после восстановления. По соглашению с изготовителем в электронную пушку была вмонтирована пленка для получения дифракции и затем эта модифицированная пушка устанавливалась в трубку обычным образом. Мы применяли пушку с электростатической фокусировкой электронов, которая обычно используется в черно-белой (17-дюймовой) трубке 17AVP4.

Пленка золота была получена испарением золота в вакууме на поливиниловую подложку. Толщина пленки приблизительно  $500 \text{ \AA}$ , что эквивалентно поверхностной плотности  $0,1 \text{ мг/см}^2$ . Пленка такой толщины вполне пригодна для работы, хотя использование пленки с поверхностной плотностью около  $0,05 \text{ мг/см}^2$  улучшало разрешение и увеличивало интенсивность дифракционных колец. При этом яркость центрального максимума не мешала наблюдению колец. Подложка из поливиниловой пленки имела поверхностную плотность порядка  $0,005 \text{ мг/см}^2$ . Ее влиянием на дифракционную картину можно было пренебречь. Поливиниловая пленка с золотым покрытием помещалась в латунный «сэндвич»,

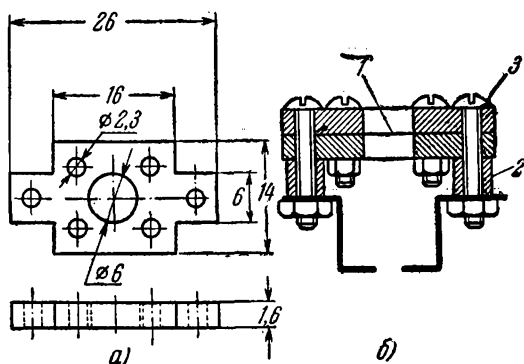


Рис. 5. Конструкция держателя фольги, который монтируется на электронную пушку промышленного типа: а) одна половина «сэндвича», б) «сэндвич» в собранном виде (1 — золотая пленка, 2 — латунная прокладка, 3 — латунные винты).

как показано на рис. 5. В конце электронной пушки были просверлены два отверстия и «сэндвич» закреплялся в них с помощью двух цилиндрических латунных прокладок (рис. 5, б). Пушка с фольгой помещалась в трубку, которая затем откачивалась и запаивалась изготовителем. Схема питания катодно-лучевой трубки показана на рис. 6. На внутреннее покрытие трубки от источника питания подается напряжение до 14 кв, катодный подогреватель питается от напряжения 6 в. Все остальные выводы с трубки заземляются. Приложенное высокое напряжение измеряется микроамперметром на 100 мка, последовательно с которым включено сопротивление

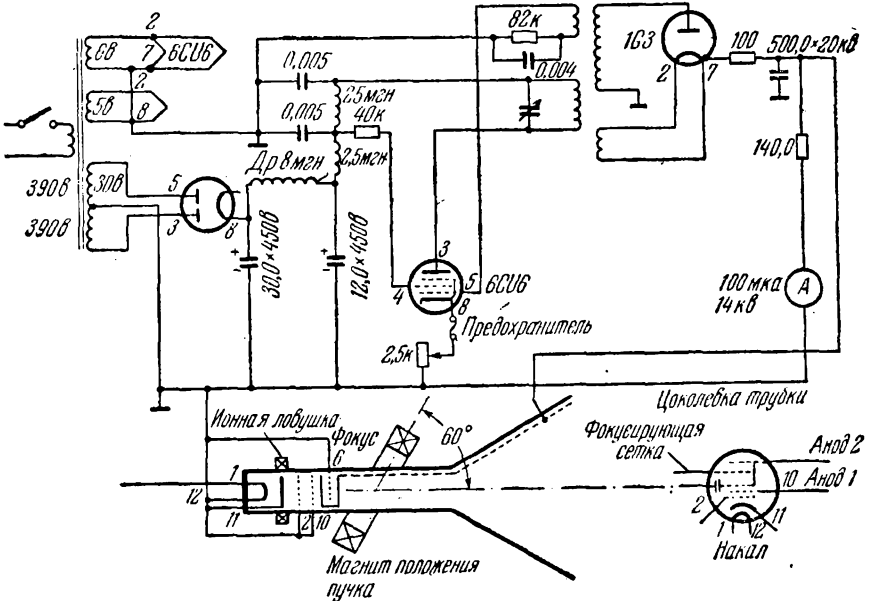


Рис. 6. Схема высоковольтного питания телевизионной трубки, которая используется для демонстрации дифракции электронов.

140 Ом. Максимальному отклонению прибора соответствует напряжение 14 кв. Для улучшения электронного пучка используются два внешних магнита, которые являются обычными элементами телевизионных приемников. Первый из них — «ионная ловушка» — представляет собой маленький постоянный магнит, который закрепляется на тонкой части трубки вблизи катода и препятствует прохождению ионов, вылетевших из катода. Второй магнит является магнитом положения пучка. Этот магнит, ярмо которого окружает шейку трубки, используется в данном случае вместо электростатического фокусирующего электрода пушки для фокусировки пучка. Было найдено, что наиболее четкое изображение получается тогда, когда плоскость ярма составляет угол около 60° с осью трубки (рис. 6).

**Результаты.** Ожидаемая дифракционная картина для золота может быть вычислена по формуле, данной Гарнвэллом и Ливингудом [1]:

$$r_{(hkl)} = (\lambda L/a) (h^2 + k^2 + l^2)^{1/2}, \quad (1)$$

где  $r_{(hkl)}$  — радиус кольца, соответствующий данному набору целых чисел  $h, k, l$ . Для гранецентрированной кубической решетки, такой как у золота, проявляются кольца либо для четных чисел  $h, k, l$ , либо для нечетных. Следовательно, кольца будут характеризоваться таким набором чисел, как (1 1 1), (0 0 2), (1 1 3) и т. д.  $\lambda$  есть длина волны де Бройля для электрона,  $\lambda = 12,26/V^{1/2}$  Å,  $L$  — расстояние от пленки золота до экрана,  $a$  — постоянная решетки. Для золота  $a = 4,07 \cdot 10^{-8}$  см.

Кольца, наблюдаемые на экране телевизионной трубки, показаны на рис. 7. Два самых ярких кольца с радиусами 2 и 3 см легко наблюдаются в аудитории. Слабые внешние кольца может видеть только наблюдатель, привыкший к темноте и находящийся поблизости от трубки.

Изменение диаметра кольца с напряжением в интервале 10—14 кВ заметно для наблюдателя в лекционной комнате. Однако для получения количественных результатов необходимо провести измерения радиусов колец непосредственно на трубке. Для этой цели удобно использовать гибкую прозрачную пластмассовую линейку, которая накладывается на экран так, чтобы ее край лежал на диаметре концентрических колец. Величины радиусов различных колец наносятся на график (рис. 8) в зависимости от напряжения (кружки с точкой). Сплошные линии рассчитаны по формуле (1) для разрешенных величин  $h, k, l$  вплоть до (4 4 4). В тех случаях, когда кольца для двух или более наборов целых чисел лежат очень близко друг к другу, на графике нанесены средние радиусы. Указанные ошибки связаны в основном с шириной дифракционных колец и небольшой асимметрией дифракционной картины, вызванной несовершенной установкой пушки и фольги.

Два внутренних кольца, которые намного ярче внешних колец, определяются наборами чисел (1 1 1), (0 0 2) и (1 1 3) — (2 2 2). Это согласуется с результатами работы Уайта [2], который, исследуя кольца, образованные электронами с энергией 30 кэВ, установил, что самые яркие из них (в порядке уменьшения интенсивно-

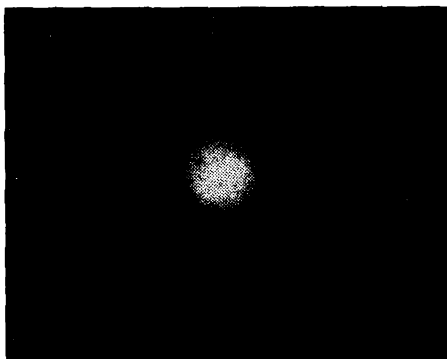


Рис. 7. Фотография экрана телевизионной трубки, на которой проявляются кольца от дифракции электронов. Радиус внешнего кольца приблизительно 3,5 см.

сти): (1 1 1), (1 1 3) — (2 2 2) и (0 0 2). Кольца (1 1 1) — (0 0 2) не разрешаются с помощью описанной аппаратуры и образуют широкое внутреннее кольцо.

Появление слабых внешних колец и отсутствие кольца (0 2 2) кажется удивительным, так как по результатам Уайта (0 2 2) яв-

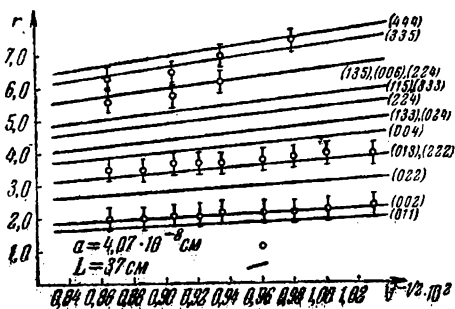


Рис. 8. Изменение радиуса колец в зависимости от  $V^{-1/2}$  представляется, как и ожидалось, линейной функцией. Линии (1 1 1) и (0 0 2) не могут быть разрешены.

картина будет отклоняться и искажаться. Это доказывает, что изображение создается заряженными частицами, а не электромагнитным излучением.

Опыты были бы более убедительными, если за счет механического усложнения системы можно было бы вынимать из трубки фольгу и электронную пушку для исследования и демонстрации. Дальнейшие усовершенствования должны обеспечить возможность удаления фольги и замены материала фольги без вскрытия трубки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. G. P. Harwell, J. J. Livingood, Experimental Atomic Physics, McGraw-Hill Book Comp., Inc., New York, 1933, p. 176.
2. P. White, Phil. Mag. 9, 641 (1930).
3. Meiners, Rensselaer Polytechnic Inst. (privat comm.).

#### Работа 4.2. ОПЫТ ФРАНКА И ГЕРЦА

### О возбуждении резонансной линии ртути 2536 Å электронным ударом\*)

Наши исследования столкновения электронов с молекулами благородных газов или паров металлов показали, что пока кинетическая энергия электронов не превзойдет некоторого критического значения, они отражаются от молекул без потери энергии, но если их энергия становится равной критической, они теряют при столкновении всю свою энергию. Критическая энергия является константой, характерной для данного газа, и во всех рассмотренных нами случаях она равна энергии ионизации [1]. Этот результат находится в согласии с квантовой теорией, которая предсказывает, что энергия электронов, совершающих колебания в атоме, изменяется не произвольным образом, а определенными квантами.

\*) J. Franck, G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 512 (1914).

Из квантовой теории следует далее, что наименьшее количество энергии, которую может приобрести электрон, равно произведению постоянной Планка  $h$  на частоту  $\nu$  его колебаний \*).

По-видимому, пары ртути являются подходящим объектом для проверки этого предсказания. Хотя критическое значение кинетической энергии для этих паров измерено не слишком точно, в этом случае нам хорошо известна частота колебаний электрона. Действительно, опыты Вуда по резонансному излучению паров ртути [2] показали, что в атоме ртути имеется электрон, частота колебаний которого соответствует длине волны 2536 Å. Измеренное нами наименьшее значение передаваемого кванта энергии в пределах ошибок равно произведению  $h\nu$ . Чтобы получить уверенность, что изучаемые нами явления находятся в согласии с квантовой теорией, недостаточно доказать, что передача энергии происходит определенными квантами. Не менее важно показать, что измеренной величине кванта  $h\nu$  действительно соответствует определенная частота  $\nu$  колебаний электрона в атоме. В этом и состоит цель излагаемого ниже исследования.

В упомянутой работе [1] было показано, что большая часть столкновений, при которых колеблющийся электрон получает энергию  $h\nu$ , не приводит к ионизации. В атоме, испытавшем подобное столкновение, переданной энергии  $h\nu$  соответствует электрон, колеблющийся с частотой  $\nu$ . Поэтому следует ожидать, что эти столкновения, при которых ионизации не происходит, но совершается передача энергии  $h\nu$ , будут приводить к испусканию света частоты  $\nu$ , что означает возможность наблюдения резонансного излучения. Если, например, ввести в пары ртути электроны, ускоренные разностью потенциалов 4,9 в, то мы должны ожидать испускания света, соответствующего резонансному излучению с длиной волны 2536 Å. Опыты в полной мере подтвердили эти ожидания.

Прибор, с которым мы работали, показан на рис. 1. Сосуд сделан из кварца, а его дно и оба отростка наполнены ртутью. С помощью круговой газовой горелки прибор нагревается до температуры 150° С. Источником электронов служит платиновая проволочка  $D$ , накаливаемая электрическим током до свечения. Против нее расположена платиновая сетка  $N$ , которая через гальванометр подключается к земле. Между платиновой проволокой и сеткой приложена разность потенциалов, ускоряющая электроны.

Сделанные на замаске соединения по возможности удалены от нагреваемой части прибора и охлаждаются водой. Для исследования излучения паров ртути служил спектрограф для ультрафиолета, любезно предоставленный нам проф. Гольдштейном.

Из сделанных ранее опытов мы знаем, что при выбранных нами условиях давления и напряженности поля при приложенной разности потенциалов 4,9 в нет электронов, скорость которых превышала бы значение скорости \*\*), отвечающее этой разности потенциалов.

\*) Предположение, что работа ионизации равна произведению  $h\nu$ , было впервые высказано Штарком.

\*\*\*) Это условие полностью выполняется при давлении около 1 мм рт. ст. и градиенте поля 2 в/см, как показало выполненное нами ранее измерение распределения скоростей электронов. После того, как электрон приобретает скорость, соответствующую 4,9 в, последующее столкновение приводит к полной потере энергии. Приращение энергии на оставшемся пути электрона слишком мало, чтобы он снова мог достичь критической энергии.

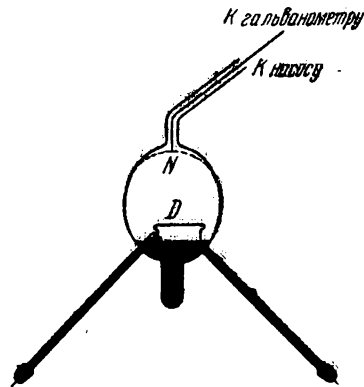


Рис. 1.

Сосуд сделан из кварца, а его дно и оба отростка наполнены ртутью. С помощью круговой газовой горелки прибор нагревается до температуры 150° С. Источником электронов служит платиновая проволочка  $D$ , накаливаемая электрическим током до свечения. Против нее расположена платиновая сетка  $N$ , которая через гальванометр подключается к земле. Между платиновой проволокой и сеткой приложена разность потенциалов, ускоряющая электроны.

Сделанные на замаске соединения по возможности удалены от нагреваемой части прибора и охлаждаются водой. Для исследования излучения паров ртути служил спектрограф для ультрафиолета, любезно предоставленный нам проф. Гольдштейном.

Из сделанных ранее опытов мы знаем, что при выбранных нами условиях давления и напряженности поля при приложенной разности потенциалов 4,9 в нет электронов, скорость которых превышала бы значение скорости \*\*), отвечающее этой разности потенциалов.

Из сделанных ранее опытов мы знаем, что при выбранных нами условиях давления и напряженности поля при приложенной разности потенциалов 4,9 в нет электронов, скорость которых превышала бы значение скорости \*\*), отвечающее этой разности потенциалов.

\*) Предположение, что работа ионизации равна произведению  $h\nu$ , было впервые высказано Штарком.

\*\*\*) Это условие полностью выполняется при давлении около 1 мм рт. ст. и градиенте поля 2 в/см, как показало выполненное нами ранее измерение распределения скоростей электронов. После того, как электрон приобретает скорость, соответствующую 4,9 в, последующее столкновение приводит к полной потере энергии. Приращение энергии на оставшемся пути электрона слишком мало, чтобы он снова мог достичь критической энергии.

Мы не можем с уверенностью утверждать, что таких электронов нет, если разность потенциалов меньше 4,9 в. Дело в том, что электроны покидают нить накаливания, обладая некоторой энергией, а при рабочей температуре нити эта энергия может соответствовать одному вольту.

В результате экспонирования продолжительностью от часа до двух мы получили фотографии, на которых виден непрерывный спектр, простирающийся до фиолета. Эта часть спектра возникает от излучения накаливаемой нити; кроме того, на значительном расстоянии от фиолетового края непрерывного спектра мы видим линию 2536 Å.

При этом никогда не наблюдалось появления других линий, которые присутствуют в спектре дугового разряда ртути и по интенсивности даже превосходят наблюдаемую нами резонансную линию. Огождествление линии 2536 Å производилось с помощью специально сделанной для нашего спектрографа шкалы длин волн, а также непосредственным сравнением нашего спектра со спектром дугового разряда ртути на той же фотографии.



Рис. 2.

Одна из таких фотографий показана на рис. 2. Она получена при разности потенциалов между электродами, равной 8 в. На ней ясно видна (даже на репродукции) резонансная линия 2536 Å. Интенсивность испущенного света зависит от величины давления паров ртути. Это было показано в работе Вуда, посвященной рассеянию и поглощению резонансного излучения ртутных паров. Наши лучшие

фотографии получены при температуре около 150° С, когда давление паров ртути превышает 1 мм рт. ст. Меняя условия опыта, мы наблюдали за поведением линии при различных значениях ускоряющего потенциала. Если этот потенциал был меньше критического, линия никогда не возникала. Например, при 4 в линия не наблюдается, но при 6 в она отчетливо видна.

Мы показали, что передаваемая энергия действительно равна величине  $h\nu$ . Отсюда следует возможность определения константы  $h$  по измеренной величине передаваемых квантов энергии. Точность этого метода определения  $h$  не уступает точности определения  $h$  по измерениям теплового излучения. Кроме измеренной разности потенциалов, ускоряющей электроны, мы должны знать величину элементарного заряда и частоту резонансного излучения. Таким образом константа  $h$  может быть определена с точностью, равной точности определения критической энергии электронов.

Из наших измерений следует, что  $h = 6,59 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек с вероятной ошибкой 2%. Заметим, что значения констант в спектральном распределении излучения абсолютно черного тела, полученные в различных работах, имеют разброс, превышающий 2%. Воспользовавшись значением постоянной  $c_2 = 1,437$  см·град, полученным Варбургом [3], и значением постоянной Стефана  $\sigma = 5,57 \cdot 10^{-12}$  вт/см<sup>2</sup>град<sup>4</sup> из работы Вестфала [4], мы получим  $h = 6,47 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек.

Взяв для  $\sigma$  среднее значение новых измерений  $\sigma = 5,70 \cdot 10^{-12}$ , мы получим  $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек.

В пределах ошибок оба значения согласуются друг с другом и со значением, полученным нами.

Из нашей работы следует ряд вопросов, ответ на которые требует дальнейших экспериментальных исследований.

Интересные исследования Герке и Зелигера [5] и фон Хольма [6] показали, что при больших скоростях электронов явление становится более сложным.

Так, например, при 10 в первые авторы наблюдали появления видимого света. Представляет большой интерес распространить эти исследования на область ультрафиолета. Далее необходимо исследовать пары других металлов и благородные газы, чтобы выяснить, можно ли и для них найти соответствие между

длиной волны излучения и энергией электронов, испытывающих неупругие столкновения с соответствующими молекулами. По-видимому, эти исследования лучше всего провести с парами щелочных металлов.

**Выводы.** Исследования процесса столкновения электронов с атомами ртути, выполненные в обеих наших работах, позволяют сделать следующие выводы:

1. Электроны отражаются от атомов ртути без потери энергии, если их кинетическая энергия меньше величины  $h\nu$ , где  $\nu$  — частота резонансной линии.

2. Если кинетическая энергия электрона достигает значения  $h\nu$ , то в одном из ближайших столкновений этот квант энергии передается электрону атома, если в спектре колебаний последнего имеется частота  $\nu$ .

3. Переданная энергия может вызывать ионизацию атома, а в других случаях может привести к испусканию света с частотой  $\nu$ .

4. Величина  $h$ , полученная из наших опытов, равна  $6,59 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек с вероятной ошибкой в 2%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Franck, G. Hertz, Verh. d. D. Phys. Ges. 17, 457 (1914).
2. R. W. Wood, Phys. Zs. 13, 353 (1912).
3. E. Warburg, Ann. d. Phys. (4) 40, 626 (1912).
4. W. Westphal, Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 897 (1913).
5. E. Gehrcke, R. Seeliger, Verh. d. D. Phys. Ges. 14, 339, 1023 (1912).
6. R. Holm, Phys. Zs. 15, 289 (1914).

## Модификация опыта Франка — Герца \*)

Опыт Франка — Герца, в котором определяется критический потенциал для ртути, описан в нескольких стандартных руководствах для студенческих лабораторий. Эти описания следуют первоначальному методу, в котором измеряется зависимость анодного тока от напряжения на сетке и строится график этой зависимости. В нашем методе вместо гальванометра в анодной цепи используется осциллограф, что позволяет получить величины критических потенциалов в течение нескольких минут. Флуктуации температуры в течение столь короткого интервала времени малы, поэтому ошибки из-за температурного дрейфа не будут появляться.

В опыте была использована лампа, специально сконструированная для измерений критического потенциала ртути в опытах типа опыта Франка — Герца. Лампа поддерживалась при  $t = 150\text{—}175^\circ\text{C}$ . Электрическая схема ее включения приведена на рис. 3. На вторую сетку лампы одновременно подается переменное напряжение с частотой 60  $\text{ц}$  и постоянное напряжение, величина которого может варьироваться. Анодный ток наблюдается с помощью осциллографа (чувствительность которого 3  $\text{мв./см}$ ) на правильно сфазированной синусоидальной развертке с частотой в 60  $\text{ц}$ . При изменении ве-

---

\*) R. A. Bernheim, A. C. Gossard, R. V. Pound, Amer. J. Phys. 24, 630 (1956).

личины приложенного постоянного напряжения могут наблюдаться последовательные осцилляции анодного тока, возникающие в результате многократных неупругих соударений электронов с атомами ртути. Разность напряжений между последовательными максимумами с поправкой на общее увеличение тока с анодным напряжением дает первый потенциал возбуждения ртути, равный приблизительно 4,9 в.

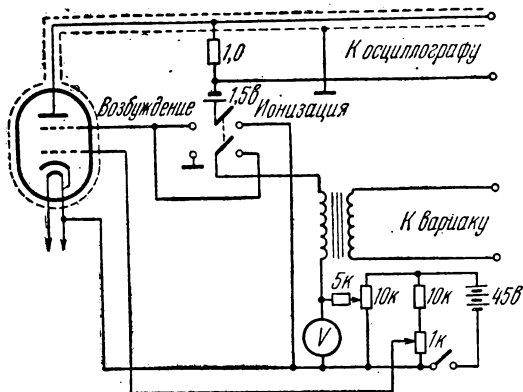


Рис. 3. Электрическая схема опыта Франка — Герца.

временной демонстрации последовательных максимумов и минимумов, показанных на рис. 4, а и б, это напряжение может быть увеличено. При достаточно высоких температурах удавалось наблюдать девять или десять последовательных максимумов до наступления пробоя. При проведении количественных измерений обычно исследовался отдельный максимум, представленный на рис. 4, в.

Мы сделали попытку использовать тиратрон GL5557/F-G17. В этом случае изображение не получалось столь же четким. Однако такой тиратрон намного легче приобрести, чем описанную лампу. Он не имеет первой сетки для управления током эмиссии, поэтому в этом случае цепь сеточного смещения не нужна.

Если обернуть лампу алюминиевой фольгой и соединить ее с экраном кабеля, подсоединенного к аноду, то наводки, наблюдаемые на осциллографе, сильно уменьшатся.

Возможности установки для проведения лабораторных опытов можно расширить, если ввести показанный на схеме переключач-

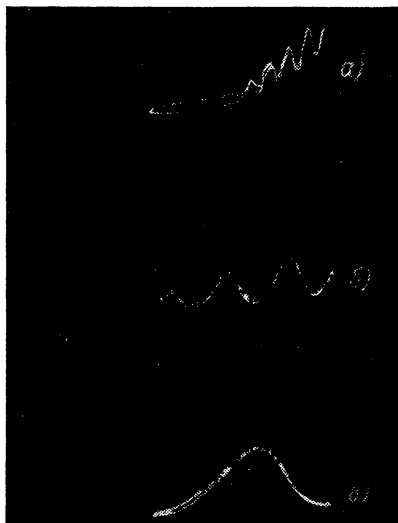


Рис. 4. Осциллограммы процесса в зависимости от напряжения, поданного на вторую сетку: а) маленькое напряжение постоянного тока, большое переменное напряжение, б) промежуточное переменное напряжение, в) маленькое переменное напряжение.



тель, который позволяет использовать лампу для измерения потенциала ионизации ртути. Этот эффект легко наблюдается с помощью осциллографа. Можно также проводить эти эксперименты общепринятым способом, заменяя осциллограф достаточно чувствительным прибором и уменьшая до нуля амплитуду переменного напряжения.

### Работа 4.3. АТОМНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ

#### О влиянии магнетизма на природу света, испущенного веществом \*)

1. Несколько лет назад, занимаясь исследованием эффекта Керра, я захотел проверить, будут ли возникать какие-нибудь изменения в свете пламени, если источник света подвергнуть действию магнитного поля. В настоящее время уже несущественны причины, по которым я полагал, что такое явление возможно \*\*), во всяком случае, они побудили меня приступить к эксперименту. Используя импровизированную аппаратуру, я рассмотрел спектр окрашенного натрием пламени, помещенного между полюсами электромагнита Румкорфа. Результат был отрицательный. Я бы не вернулся к этому эксперименту, если бы спустя два года не обратил внимание на следующий отрывок из заметок Максвелла о жизни Фарадея (Maxwell, Collected Works, p. 790). Максвелл писал: «Прежде чем описывать этот результат, мы отметим, что в 1862 году Фарадей сделал предметом своей экспериментальной работы связь между магнетизмом и светом. Он тщетно пытался обнаружить какие-либо изменения в спектре пламени, когда на него оказывал действие сильный магнит». Если Фарадей думал о возможности такой связи, то, может быть, стоило повторить этот опыт, используя последние достижения спектроскопии, тем более, что я не был уверен в том, что этот опыт был сделан другими. Я позволю себе представить читателям краткое сообщение о результатах, полученных к настоящему времени.

2. В работе использовался электромагнит средней величины, изготовленный Румкорфом. Обмотка магнита питалась аккумуляторами. Ток в магните в большинстве случаев был 27 а, но мог быть увеличен до 35 а. Для анализа света использовалась решетка Роуленда с радиусом 10 футов и числом линий на дюйм, равным 14 438. Использовался спектр первого порядка, а наблюдения производились с помощью микрометрического окуляра с вертикальным перекрестием. Поблизости от источника света, находящегося в поле магнита, помещалась диафрагма с точной регулировкой.

3. Между параболическими полюсами электромагнита находилась средняя часть пламени горелки Бунзена. В пламя вводился кусок асбеста, пропитанный раствором обыкновенной соли. При этом наблюдались узкие и резко очерченные D-линии на темном фоне. Расстояние между полюсами магнита было равно приблизительно 7 мм. При включении тока магнита эти две линии отчетливо расширялись. При выключении тока D-линии снова принимали обычный вид. Возникновение и исчезновение эффекта расширения линий происходило одновременно с включением и выключением тока. Этот опыт можно было повторять сколько угодно раз с тем же результатом.

4. В дальнейшем вместо горелки Бунзена было использовано пламя горелки, в которой применялся светильный газ с кислородом. Таким же образом, как и в п. 3, в пламя вводился асбест, пропитанный обычной солью. Пламя поднималось вертикально между полюсами магнита. При включении тока D-линии расширялись приблизительно в три или четыре раза.

5. Совершенно аналогичное явление было обнаружено для красных линий лития, который применялся в виде карбоната.

\*) P. Zeeman, Phil. Mag. 43, 226 (1897).

\*\*) Сравните пп. 15 и 16.

6. Возможно, что наблюдаемое явление (пп. 3, 4, 5) не будет иметь глубокого смысла. Можно высказать предположение, что расширение спектральных линий раскаленных паров вызывается увеличением их плотности и температуры. Под действием магнита очертания пламени без сомнения меняются (это легко видеть). От этого температура и давление паров могут также изменяться. Подобное объяснение наблюдаемого явления может казаться достоверным.

7. Другой опыт уже не так легко объяснить. Фарфоровая глазированная с внутренней и внешней стороны трубка помещается горизонтально между полюсами магнита так, что ее ось перпендикулярна линии, соединяющей полюсы. Внутренний диаметр трубки равен 18 мм, внешний диаметр — 22 мм, длина трубки равна 15 см. Концы трубки закрыты навинчивающимися колпачками. Эти колпачки с одной стороны закрываются стеклянными плоскопараллельными пластинками и окружаются маленькими кожухами, которые охлаждаются водой. Благодаря этому медные колпачки и стеклянные пластинки могут оставаться достаточно холодными, в то время как фарфоровая трубка оказывается в раскаленном состоянии. Рядом со стеклянными пластинками к медным колпачкам крепились отводные трубки, снабженные кранами. С помощью большой горелки Бунзена фарфоровая трубка могла нагреваться на длине 8 см. На расстоянии двух метров от электромагнита (для устранения какого-либо воздействия) помещалась дуговая лампа, свет от нее с помощью металлического зеркала посылался через трубку. Для наблюдения спектра дуги использовалась дифракционная решетка. Окуляр фокусировался на  $D$ -линии. Это может быть сделано очень точно, так как в центре ярких  $D$ -линий часто бывают видны узкие обращенные линии. Затем мы вводили в трубку кусочек натрия. Пламя от горелки начинает нагревать трубку, температура повышается и окрашенные пары вскоре наполняют трубку. Сначала они фиолетовые, потом синие и зеленые и, наконец, пары становятся невидимыми невооруженному глазу. С увеличением температуры поглощение ослабляется. Наиболее сильным образом оно проявляется в окрестности  $D$ -линий. Наконец, становятся невидимыми две темные  $D$ -линии. В этот момент полюсы магнита подводятся ближе к трубке, расстояние между ними теперь равно 24 мм. Линии поглощения выглядят довольно резкими почти по всей длине. В верхней части они толще. Темные участки спектра вызывались более плотными парами. Сразу после включения тока линии расширяются и, по-видимому, становятся более черными. После выключения тока они немедленно восстанавливают свою прежнюю резкость. Эксперименты можно было повторять несколько раз, пока не кончался натрий. Исчезновение натрия нужно приписать главным образом химической реакции, идущей с нанесенной на трубку глазурью. В последующих экспериментах применялись неглазурованные трубки.

8. Можно попытаться объяснить последний эксперимент следующим образом. Весьма правдоподобно, что температура верхней и нижней части трубки была различной. Далее, как это следует из формы  $D$ -линий, плотность паров натрия меняется по высоте. Таким образом, в трубке создавались токи конвекции из-за имеющейся разности температур. При этих довольно вероятных предположениях можно рассчитать, что при включении электромагнита в трубке возникает разность давлений того же порядка, как из-за разности температур. Так, намагничивание будет приводить, например, к выталкиванию более плотных слоев со дна в направлении оси трубки. Линии будут расширяться, так как их ширина на данной высоте определяется количеством частиц пара в направлении оси трубки. Хотя после такого объяснения еще остаются некоторые трудности, однако и по их поводу можно сделать определенные суждения.

9. Объяснение уширения линий, предложенное в п. 8, не годится для последнего варианта опыта, где применялась неглазурованная трубка. Внутренний диаметр трубки с толщиной стенки около 1 мм был равен 10 мм. Полюсы магнита могли сдвигаться, оставляя зазор шириной 14 мм. Вместо горелки Бунзена использовалась паяльная лампа, с помощью которой средняя часть трубки нагревалась добела. Это позволило облегчить нагревание трубки с уменьшенным диаметром до одинаковой температуры, которая в данном опыте была выше, чем раньше (п. 7), и линии натрия наблюдались постоянно. В этом случае можно ожидать, что температура паров натрия не зависит от высоты. Для того чтобы еще больше способствовать этому, я непрерывно вращал трубку относительно

ее оси. Теперь линии поглощения имели одинаковую ширину. При включении электромагнита линии поглощения немедленно расширялись по всей длине. Объяснение эффекта, сделанное в п. 8, оказалось несостоятельным.

10. Мне хотелось бы посмотреть, как действует магнитное поле на спектр, испущенный твердым телом. Бунзен и Бар нашли, что окись эрбия обладает в нагретом состоянии замечательным свойством образовывать спектр с яркими линиями. Однако края линий из-за дисперсии были слишком размытыми для проведения наблюдений.

11. Из опытов пп. 3—9 следует довольно вероятный вывод, что расширение линий поглощения, а также линий испускания вызывается действием магнитного поля. Если это так на самом деле, то на свободные колебания атомов, которые приводят к возникновению линейного спектра, должны накладываться колебания с измененным периодом. Я думаю, что из результатов этих опытов следует неизбежный вывод о таком специфическом воздействии магнетизма.

12. Мне казалось, исходя из моих представлений о природе сил, действующих в магнитном поле на атомы, что явления, которые я наблюдал для линейчатых спектров в магнитном поле, не должны иметь места в случае полосатых спектров.

Однако весьма вероятно, что разница между полосатыми и линейчатыми спектрами носит не количественный, а качественный характер. В случае линейчатого спектра молекулы содержат небольшое число атомов и далеко разнесены друг от друга, в случае полосатого спектра состав молекулы более сложный. Последующее исследование показало, что мои представления о причине уширения линейчатого спектра были в основном правильными.

13. Стеклянная трубка, содержащая кусочек иода, закрывалась с обоих концов стеклянными пластинками с параллельными гранями и помещалась между полюсами электромагнита Румкорфа таким же образом, как и фарфоровая трубка в п. 7. При небольшом нагревании иод испарялся и пары лилового цвета заполняли трубку.

Спектр поглощения можно было исследовать с помощью света от электрической дуги. В случае низкой температуры он представлял из себя полосатый спектр. На фоне полос при высокой дисперсии наблюдались в большом количестве тонкие темные линии. В противоположность результатам опыта с парами натрия при включении магнита не наблюдалось никаких изменений в форме темных линий.

Отсутствие эффекта в этом случае указывает на то, что токи конвекции в первом опыте с парами натрия (п. 7) были несущественны. В последнем опыте токи конвекции (наличие которых я считал возможным из-за действия магнитного поля) явно недостаточны, чтобы вызвать изменение спектра. И хотя это не следовало из вида линий поглощения (сравните п. 7), полосатый спектр, подобно линейчатому, очень чувствителен к изменению плотности и температуры.

14. Несмотря на то, что средства наблюдения, которые были в моем распоряжении, позволяли провести только предварительные и приближенные измерения, я считал очень важным определение изменения периода колебаний в магнитном поле.

Расширение линий натрия в обе стороны составляет приблизительно  $1/40$  расстояния между линиями при интенсивности магнитного поля  $10^4$  ед. СГС. Отсюда следует, что в магнитном поле период изменяется на  $1/40\ 000$  своей величины в сторону большего и меньшего значений.

15. Рассуждения, упомянутые в п. 1, которые привели меня к опытам по влиянию магнетизма на излучение, заключались сначала в следующем. Если справедлива гипотеза о том, что вращательное движение эфира продолжается в магнитном поле, то ось вращения ориентируется по направлению действия магнитных сил (Кельвин и Максвелл). Можно представить себе, что излучение света вызвано движением атомов по траекториям (которые для простоты принимаются за окружности) в системе центра масс молекулы. Тогда период обращения будет определяться силами взаимодействия атомов, а отклонения периода в ту или другую сторону будут вызываться возмущающими силами, действующими между эфиром и атомами. Разумеется, что знак отклонения определяется направлением движения относительно силовых линий. Наибольшее отклонение будет в случае, когда плоскость траектории перпендикулярна направлению силовых линий.

16. Позднее этот вопрос для меня несколько прояснился. Я представил себе, как сказывается быстрое вращательное движение одной системы на периоде колебания другой, связанной с ней системы. Лорд Кельвин еще сорок лет назад дал решение следующей задачи. Предположим, что имеется система, состоящая из горизонтально расположенного стержня и нити, закрепленной на его концах, причем стержень может вращаться с постоянной угловой скоростью относительно вертикальной оси, проходящей через его середину. Пусть вторая нить с грузом, который можно рассматривать как материальную точку, закрепляется на середине первой нити. Исследуется такое движение, когда смещение точки от положения равновесия бесконечно мало. Решение становится довольно простым при условии, что угловая скорость вращения велика. Период вращательного движения точки слегка меняется в зависимости от направления вращения. Если теперь вместо двойного маятника рассмотреть излучающий атом, а вместо вращающегося стержня — вращательное движение атома относительно магнитных силовых линий, то связь механической задачи с нашим случаем становится понятной.

Нет необходимости доказывать, что приведенные соображения являются не более как указанием на некоторые аналогии. Однако я привожу их, так как они побудили меня начать опыты.

17. Мне кажется, что изменение периода в магнитном поле объясняется на основе теории проф. Лорентца [1]. Согласно этой теории во всех веществах имеются малые электрически заряженные частицы с определенной массой и все электрические явления зависят от расположения и движения этих «ионов». Их колебания вызывают излучение света, а заряд, конфигурация и движение ионов полностью определяют состояние эфира. Такой ион, движущийся в магнитном поле, испытывает действие механических сил, о которых говорилось выше, и это должно объяснить изменение периода. Я направил свои соображения профессору Лорентцу, и он любезно сообщил мне, каким образом по его теории рассчитать движение иона в магнитном поле. Проф. Лорентц также указал, что если объяснение, которое следует из его теории, правильно, то края спектральных линий должны иметь круговую поляризацию. Величина уширения линий может быть использована для определения отношения заряда и массы частиц, колебания которых согласно теории вызывают излучение света.

Этот чрезвычайно существенный вывод, сделанный проф. Лорентцем по поводу состояния поляризации расширенных спектральных линий в магнитном поле, полностью подтвердился на опыте (п. 20).

18. Теперь мы перейдем к выводу формул, которые описывают движение ионов, колеблющихся в плоскости  $(x, y)$  при наличии однородного магнитного поля  $H$ , направленного параллельно оси  $z$ . Оси выбраны таким образом, что если ось  $x$  направлена на восток, а  $y$  — на север, то ось  $z$  направлена вверх. Пусть  $e$  — положительный заряд иона (в электромагнитной системе), а  $m$  — его масса. Уравнения относительного движения тогда будут иметь вид \*)

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2x + eH \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2y - eH \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Первый член во второй части уравнений выражает упругую силу, возвращающую ион назад в положение равновесия. Второй член описывает силу, действующую на ион со стороны магнитного поля. Эти уравнения удовлетворяются решениями

$$x = ae^{st}, \quad y = \beta e^{st} \quad (2)$$

при условии, что

$$\left. \begin{aligned} m s^2 \alpha &= -k^2 \alpha + eH s \beta, \\ m s^2 \beta &= -k^2 \beta - eH s \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $m$ ,  $k$ ,  $e$  должны рассматриваться как известные величины.

\*) Эти уравнения подобны уравнениям маятника Фуко и, конечно, имеют такое же решение.

Для нас особый интерес представляет выражение для периода колебаний. Если  $H = 0$ , то из (3) следует, что

$$s = i \frac{k}{\sqrt{m}} = i \frac{2\pi}{T}, \text{ или } T = \frac{2\pi \sqrt{m}}{k}. \quad (4)$$

Если  $H$  отличается от нуля, то из (3) следует приближительная формула для  $s$ :

$$s = i \frac{k}{\sqrt{m}} \left( 1 \mp \frac{eH}{2k \sqrt{m}} \right).$$

Отсюда для периода колебания  $T'$  мы имеем

$$T' = \frac{2\pi \sqrt{m}}{k} \left( 1 \pm \frac{eH}{2k \sqrt{m}} \right). \quad (5)$$

Тогда относительное изменение периода представляется как

$$\frac{eH}{2k \sqrt{m}} = \frac{e}{m} \frac{HT}{4\pi}. \quad (6)$$

Частное решение уравнения (1) описывает движение ионов по окружности. Если ион вращается в положительном направлении (положительное направление вращения связывается с движением стрелок часов наблюдателя, местоположение которого определяется направлением силовых линий), то период его движения несколько меньше, чем в случае вращения в отрицательном направлении. В первом случае в формуле (5) надо взять знак минус, во втором случае знак плюс.

Общее решение уравнения (1) показывает, что ионы могут двигаться не только по окружностям, но и по медленно вращающимся эллиптическим орбитам. Очевидно, что в общем случае, когда траектория начального движения иона ориентирована в пространстве произвольным образом, проекция его движения на плоскость  $(x, y)$  имеет такой же характер. Движение в направлении оси  $z$  представляется простыми гармоническими колебаниями, которые независимы от движения в плоскости  $(x, y)$  и не оказывают на него никакого возмущающего действия. Поэтому магнитные силы не влияют на движение по оси  $z$ . Разумеется, такое рассмотрение движения ионов, приводящего к излучению света, нужно считать лишь самым первым приближением теории.

19. Предположим, что плазма помещено в магнитное поле и наблюдатель смотрит на него либо в направлении силовых линий, либо в противоположном направлении.

Предположим также, что наблюдатель может видеть ионы (п. 18), которые находятся во вращательном движении. Те ионы, которые движутся по окружностям, будут испускать свет с круговой поляризацией. Если, например, имеет место вращение в положительном направлении, то период удлинится по сравнению со случаем, когда магнитное поле отсутствует; для вращения в отрицательном направлении период укорачивается. По-видимому, те ионы, которые движутся по направлению силовых линий, будут находиться в стационарном состоянии. Период их движения не будет изменяться. Кроме того, имеются ионы, которые движутся по вращающимся эллиптическим орбитам.

Для того чтобы выяснить, как движение ионов сказывается на состоянии эфира, можно воспользоваться следующим методом, который проф. Лоренц вывел из общей теории. Предположим, что ион  $P$ , положение равновесия которого в молекуле есть  $P_0$ , может одновременно участвовать в двух или более движениях, и пусть вектор  $P_0P$  всегда получается сложением векторов  $P_0P$  для всех компонент движения в данный момент времени. Тогда состояние эфира на расстоянии намного большем, чем  $P_0P$ , будет являться суперпозицией состояний, которые возникали бы для каждого из этих случаев в отдельности.

Отсюда следует, во-первых, что круговое движение ионов приводит к излучению света с круговой поляризацией в направлении оси окружности. Во-вторых, вместо решений в виде эллиптических орбит можно выбрать решения, более

удобные для наших целей. Движение иона до наложения магнитного поля можно разложить на гармоническое колебательное движение по оси  $z$  и два круговых движения (в противоположных направлениях) в плоскости ( $x, y$ ).

Магнитные силы не сказываются в первом движении и изменяют период вращательных движений.

Под действием дифракционной решетки колебания, вызванные движением ионов, сортируются по периодам, что соответствует разложению полного движения на три компоненты. Спектральная линия будет триплетом. Во всяком случае можно ожидать, что линия будет расширяться при наличии магнитного поля и что края линии будут иметь круговую поляризацию \*).

20. Можно считать, что обнаружение последнего эффекта явилось бы определенным подтверждением правильности основных идей теории проф. Лорентца. Для осуществления этой части эксперимента в полюсах электромагнита (п. 2) сверлились сквозные отверстия, на оси которых помещалась дифракционная решетка. Линии натрия наблюдались с помощью окуляра с вертикальным визиром. Между окуляром и дифракционной решеткой помещалась пластинка в четверть волны и николю, который я использовал раньше при исследовании нормального отражения света от полярно намагниченного железного зеркала [2]. Пластинка и николю ориентировались относительно друг друга таким образом, что свет с правой круговой поляризацией гасился. В связи с вышесказанным один край расширенной линии должен иметь правую круговую поляризацию, другой край — левую круговую поляризацию. При повороте анализатора на  $90^\circ$  свет, который ранее гасился, будет проходить, и наоборот. Или же, если наблюдался правый край линии, то при обращении тока в магните становится видимым левый край линии. Перекрестье окуляра устанавливалось на яркой линии. При обращении тока видимая линия смещалась! Опыт можно было повторять произвольное число раз.

21. Предыдущий опыт несколько видоизменялся. При неизменном положении пластинки в четверть волны поворачивался анализатор. Тогда при одном повороте анализатора наблюдаемая линия дважды расширялась и дважды сжималась.

22. Электромагнит поворачивался на  $90^\circ$  в горизонтальной плоскости относительно первоначального положения (п. 20), так что направление силовых линий было перпендикулярно линии, соединяющей щель и дифракционную решетку. Края расширенной линии теперь оказались линейно поляризованными и, насколько позволяла судить применяющаяся аппаратура, плоскость поляризации была перпендикулярна спектральной линии. Объяснение этого явления сразу следует из рассмотрения п. 19. Круговые орбиты ионов, перпендикулярные силовым линиям, наблюдались теперь в плоскости их размещения.

23. опыты пп. 20—22 доказывают, что световые колебания вызываются движением ионов, которое было рассмотрено проф. Лорентцем в его теории электричества. Если произвести измерение расширения линий (п. 14), то с помощью соотношения (6) можно получить отношение  $e/m$ . Оказывается, что  $e/m$  по порядку величины равно  $10^7$  ед. СГС. Разумеется, что этот результат, который следует из теории, является лишь первым приближением.

24. Из опыта п. 20 можно получить сведения о том, является ли вращающийся ион положительным или отрицательным.

Если силовые линии направлены к дифракционной решетке, то оказывается, что свет с правой круговой поляризацией соответствует меньшему периоду. Из этого результата в связи с п. 18 следует, что вращаются положительные ионы или по меньшей мере их орбиты больше, чем у отрицательных ионов.

25. Теперь, когда действие магнитного поля на форму спектральных линий может быть интерпретировано в свете теории проф. Лорентца, дальнейшие исследования этого явления становятся особенно привлекательными. Сейчас уже возникло несколько проблем. Весьма перспективными представляются исследования

---

\*) Впоследствии я увидел, что Стоней пытался объяснить существование дублетов и триплетов в спектре вращением эллиптических орбит «электрона» под действием возмущающих сил.

движения ионов в различных веществах при изменении температуры, давления, а также ингенсивности намагничивания. Дальнейшие исследования дсжны также разрешить вопрос о величине магнитных сил на поверхности Солнца, которые могут воздействовать на спектр.

Эти эксперименты были выполнены в Физической лаборатории в Лейдене. Я многим обязан директору Лаборатории проф. Камерлинг-Оннесу за постоянный интерес к данному исследованию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. L o r e n t z, La Teorie électromagnétique de Maxwell, Leyden, 1892.
2. Z e e m a n, Communications of the Leyden Laboratory, № 15.

### Конструкция и применение интерферометра Фабри — Перо \*)

Описана конструкция интерферометра Фабри — Перо для студенческой лабораторин, а также его возможное применение в трех экспериментах. В первом, основном, эксперименте проводятся некоторые оптические измерения. Во втором опыте с помощью интерферометра измеряется коэффициент преломления газов, в третьем опыте наблюдается эффект Зеемана.

Интерферометр, состоящий из двух параллельных пластин, разделенных воздушным зазором, был впервые предложен Фабри и Перо в 1897 г. Если монохроматический свет от протяженного источника проходит через пластины интерферометра, то на бесконечности образуется ряд концентрических интерференционных колец. Толанский [1] отмечал, что интерферометр Фабри — Перо несомненно является самым удобным из всех интерферометров.

Он применяется для абсолютного измерения длины волны, определения ширин линий, коэффициента преломления газов, изучения сверхтонкой структуры. В последнее время интерферометр Фабри — Перо находит применение при определении температур синтеза по доплеровскому уширению спектральных линий в излучении водородной плазмы.

**Конструкция интерферометра.** На рис. 1 показана конструкция интерферометра Фабри — Перо. В латунном кожухе находятся две стеклянные пластины диаметром 38 мм. Они устанавливаются так, чтобы их поверхности были параллельны трем инваровым прокладкам, помещенным в латунные кольца. Толщины этих трех прокладок должны быть одинаковыми, по крайней мере с точностью до

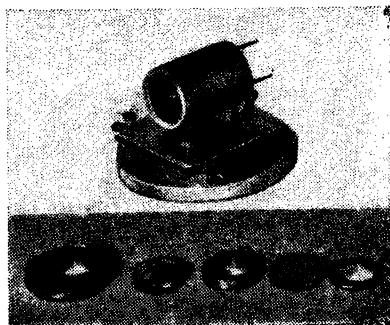


Рис. 1. Изготовленный в мастерской интерферометр Фабри — Перо. Показаны удерживающие кольца, пластины и инваровые прокладки.

\*) W. A. H i l t o n, Amer. J. Phys. 30, 724 (1962).

половины длины световой волны. Крепежные кольца жестко фиксируют каждую пластину относительно инваровых прокладок. Окончательная регулировка пластин осуществляется с помощью трех латунных винтов, которые поджимают одну из крепежных колец. На пластины наносился слой алюминия путем испарения [2]. Для этого использовалось оборудование лаборатории проф. Р. Хьюза из Арканзасского университета. Толщина алюминиевого покрытия такова, что приблизительно 90% падающего света отражается, а около 10% света проходит или поглощается. Оптическая система для наблюдения резких интерференционных колец (рис. 2) состоит

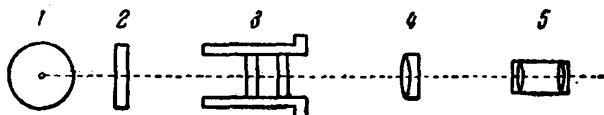


Рис. 2. Расположение аппаратуры для наблюдения интерференционной картины с помощью интерферометра Фабри — Перо.

из источника света 1, фильтра 2, интерферометра 3, ахроматической линзы 4 и окуляра 5. Общая стоимость прибора складывается из стоимости стеклянных пластин — 140 долларов, латуни — 15 долларов, а также из затрат на изготовление кожуха, крепежных колец, прокладок, алюминиевого покрытия и т. д.

**Теория.** Пусть  $M_n$  есть порядок интерференции кольца с номером  $n$  (нумерация ведется от центра интерференционной картины),  $t$  — расстояние между пластинами,  $\lambda$  — длина волны света между пластинами,  $\varphi$  — угловой радиус  $n$ -го кольца, сфокусированного на экран в фокальной плоскости ахроматической линзы [3], и  $\vartheta_n$  — угловой диаметр  $n$ -го кольца, равный  $2\varphi$ . Тогда

$$2t \cos \varphi = M_n \lambda \quad (1)$$

и

$$M_n = (2t/\lambda) \cos \varphi.$$

Если  $\varphi$  мало, то

$$\cos \varphi \approx [1 - \varphi^2/2] = [1 - \vartheta_n^2/8]. \quad (2)$$

Если  $d_n$  обозначает линейный диаметр  $n$ -го кольца, а  $f$  — фокусное расстояние линзы, с помощью которой получается изображение на фотографической пленке или в фокальной плоскости измерительного микроскопа, то

$$\vartheta_n = d_n/f$$

и

$$M_n = (2t/\lambda) [1 - d_n^2/8f^2]. \quad (3)$$

В таблице приведены диаметры колец, полученные с помощью измерительного микроскопа в случае, когда используется линза с фокусным расстоянием 61,8 см, а пластины разнесены на 1,04 см.



## Диаметры колец, наблюдаемые с помощью интерферометра Фабри — Перо

Номер кольца	$d_n, \text{ см}$	$d_n^2, \text{ см}^2$	$d_n^2 - d_{n-1}^2, \text{ см}^2$
1	0,6275	0,3937	0,78825
2	1,0872	1,1820	0,81174
3	1,4120	1,9937	0,77881
4	1,6651	2,7725	0,81392
5	1,8938	3,5864	0,78662
6	2,0911	4,3727	0,77748
7	2,2694	5,1502	0,80782
8	2,4409	5,9580	0,79122
9	2,5960	6,7392	0,78122
10	2,7483	7,5532	0,81394
			В среднем 0,795488

В таблице приведены данные, характеризующие постоянство величины  $d_n^2 - d_{n-1}^2$ . В измерениях в качестве источника использовалась линия 5461 Å спектра ртутной лампы.

Теперь можно определить изменение длины волны, соответствующее сдвигу на одно кольцо [4]. Если  $d_n$  и  $d'_n$  представляют линейные диаметры  $n$ -го кольца для длин волн  $\lambda$  и  $\lambda + \Delta\lambda$ , то, разрешая уравнение (3) относительно  $\lambda$ , мы получим

$$\lambda = (2t/M_n) [1 - d_n^2/8f^2], \quad (4)$$

$$\lambda + \Delta\lambda = (2t/M_n) [1 - d_n'^2/8f^2]. \quad (5)$$

Вычитая (4) из (5), имеем

$$\Delta\lambda = \lambda (d_n^2 - d_n'^2)/8f^2. \quad (6)$$

При этом учитывается, что  $\lambda \approx 2t/M_n$ , как следует из формулы (1). Поэтому величина  $\Delta\lambda$ , соответствующая сдвигу на одно кольцо, может быть получена при подстановке в формулу (6) средней величины  $d_n^2 - d_{n-1}^2$  из таблицы:

$$\Delta\lambda = (5460,74) (0,795488)/(8) (61,8)^2 = 0,142 \text{ Å}.$$

В качестве монохроматического источника использовалась зеленая линия спектра ртути. Фокусное расстояние линзы, которая применялась в приборе, равнялось 61,8 см. Если за интерферометром Фабри — Перо поместить спектрограф и сфотографировать некоторую линию спектра, а также сателлит (сопровождать его линию), то с помощью формулы (6) можно вычислить разность их длин волн  $\Delta\lambda$ . Такие вычисления требуются в экспериментах по наблюдению эффекта Зеемана.

**Измерение коэффициента преломления газа.** Аппаратура для измерения коэффициента преломления газов представлена на рис. 3. Интерферометр Фабри — Перо 3 помещается в вакуумную камеру 4, на торцах которой имеются плоские стеклянные пластинки, через

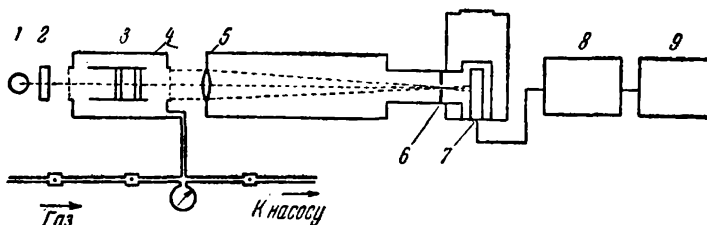


Рис. 3. Расположение оборудования при измерении коэффициента преломления в газе.

которые может проходить монохроматический свет, полученный источником 1 и фильтром 2. Интерференционная картина фокусируется на малую кольцевую диафрагму 6 с помощью ахроматической линзы 5. Из камеры откачивается воздух и после достижения вакуума в нее медленно напускается исследуемый газ (воздух,  $\text{CO}_2$  и т. д.).

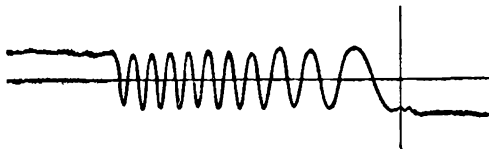


Рис. 4. Регистрация тока фотоумножителя при медленном заполнении воздухом вакуумной камеры и пространства между пластинами интерферометра.

Такая как длина оптического пути между пластинами интерферометра изменяется, то интерференционные максимумы и минимумы проходят через диафрагму и регистрируются фотоумножителем 7, ток которого усиливается усилителем постоянного тока 8 и подается на записывающее устройство 9. Интерференционная картина показана на рис. 4.

Коэффициент преломления газа можно вычислить с помощью соотношения

$$n = c/v = \nu\lambda/\nu\lambda' = \lambda/(\lambda - N\Delta\lambda), \quad (7)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме,  $v$  — скорость света в газе,  $\nu$  — частота света,  $\lambda$  — длина волны в вакууме,  $\lambda'$  — длина волны в газе,  $N$  — число интерференционных максимумов, проходящих через маленькую кольцевую диафрагму при натекании газа в камеру, а  $\Delta\lambda$  — изменение длины волны, соответствующее сдвигу на одно кольцо. Если  $\Delta\lambda$  равно  $0,142 \text{ \AA}$ , а  $N$  для воздуха в соответствии с рис. 4 составляет 10,5 колец, то коэффициент преломления для воздуха при температуре  $23 \text{ }^\circ\text{C}$  и давлении  $74,3 \text{ см рт. ст.}$  оказывается равным

$$n = 5460,74 / [(5460,74) - (10,5)(0,142)] = 1,000302,$$

что соответствует справочным данным.

**Изучение эффекта Зеемана.** Интерферометр Фабри — Перо можно использовать для наблюдения и регистрации эффекта Зеемана. Схема установки изображена на рис. 5. Между полюсами магнита помещается спектральная лампа, заполненная неоном. Интерференционные кольца фокусируются на щель спектрографа. На рис. 6

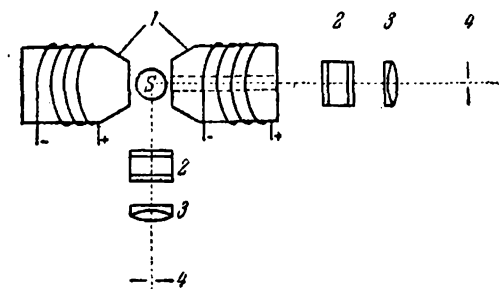


Рис. 5. Размещение магнита и интерферометра Фабри — Перо для наблюдения эффекта Зеемана: 1 — электромагнит, S — лампа, 2 — интерферометр, 3 — линза, 4 — щель спектрографа.



Рис. 6. Фотография линии 5400 Å в спектре неона, демонстрирующая эффект Зеемана.

представлены результаты двух экспозиций с линией неона 5400 Å. Справа — линия, снятая в отсутствие магнитного поля. Слева показано расщепление линии 5400 Å в достаточно сильном магнитном поле на две линии с круговой поляризацией.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Tolansky, An Introduction to Interferometry, Longmans Green and Company, New York, 1955, p. 128.
2. S. Tolansky, High Resolution Spectroscopy, Pitman Publishing Corporation, New York, 1947, p. 128.
3. F. A. Jenkins, H. E. White, Fundamentals of Optics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1957, 3rd ed., p. 274.
4. J. K. Robertson, J. Opt. Soc. Amer. 9, 611 (1924).

### Работа 4.4. ЯДЕРНЫЙ МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС И ЭЛЕКТРОННЫЙ ПАРАМАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС

#### Ядерная индукция \*)

Если поместить вещество в постоянное магнитное поле, то можно ожидать появления слабой парамагнитной поляризации ядерных магнитных моментов при условии, что система находится в тепловом равновесии или по крайней мере приближается к этому состоянию. Если на постоянное магнитное поле, направленное по оси  $z$ , наложить осциллирующее магнитное поле в направлении оси  $x$ , то вектор поляризации, первоначально параллельный постоянному полю, будет прецессировать относительно этого направления, причем размах прецессии умень-

\*) F. Bloch, W. W. Hansen, M. Packard, Phys. Rev. 69, 127 (1946).

шается, когда частота осциллирующего поля приближается к ларморовской частоте. Поэтому можно ожидать, что в области частот, близких к этой магнитной резонансной частоте, в приемной катушке, параллельной оси  $y$ , будет наводиться осциллирующее напряжение. Простые вычисления показывают, что при разумных размерах аппаратуры мощность сигнала с приемной катушки будет существенно больше, чем мощность тепловых шумов в рабочей полосе частот.

Мы обнаружили этот новый эффект, когда в качестве исследуемого вещества применяли воду при комнатной температуре и наблюдали сигнал в катушке, наведенный вращением протонных моментов. В некоторых опытах, чтобы ускорить установление теплового равновесия, применялись парамагнитные катализаторы.

Наведенное напряжение с помощью обычной электроники выводилось на экран осциллографа. Результаты наблюдений находились в соответствии с ожидаемым эффектом. Измерения, проведенные для двух частот  $\nu$ , показали, что значения  $z$ -компоненты поля  $H$ , при которых наблюдается эффект, таковы, что отношение  $H/\nu$  является постоянным. В пределах нашей экспериментальной ошибки эта величина находится в согласии с величиной  $g$  для протонов, определенной Келлогом, Раби, Рамзаем и Захарисом \*). Мы продумали различные области плодотворного использования этого эффекта. Детальное описание опыта будет опубликовано в ближайшее время.

### Резонансное поглощение ядерными магнитными моментами в твердых телах \*\*)

В хорошо известном методе магнитного резонанса, который применяется для определения магнитных моментов ядер в молекулярных пучках [1], возникают переходы между уровнями энергии, которые соответствуют различным ориентациям ядерного спина в сильно постоянном магнитном поле. Мы наблюдали, что и в твердом веществе, содержащем протоны (парафин), происходит поглощение энергии высокочастотного поля из-за таких переходов. В этом случае имеются два уровня, расстояние между которыми в соответствии с формулой  $h\nu = 2\mu H$  отвечает частоте  $\nu$ , приблизительно равной  $30 \text{ Мгц}$  при нашем значении магнитного поля. Хотя при комнатной температуре  $h\nu/kT \approx 10^{-5}$ , разница в заселенности этих двух уровней весьма незначительна, число ядер, участвующих в этом процессе, настолько велико, что при тепловом равновесии можно ожидать измеримый эффект. Если предположить, что единственные локальные поля, имеющие значение, обусловлены магнитными моментами соседних ядер, то можно показать, что мнимая часть магнитной проницаемости в резонансе должна быть порядка  $h\nu/kT$ . Отсутствие в этом выражении ядерного момента и расстояния между ядрами можно объяснить тем, что влияние этих факторов на сечение поглощения в расчете на одно ядро и плотности ядер компенсируется их влиянием на ширину наблюдаемого резонанса.

Решающее значение здесь имеет время, которое требуется для установления теплового равновесия между спинами и решеткой. Различие в заселенности двух уровней необходимо для поглощения. Это следует из соотношения между поглощением и вынужденным излучением. Кроме того, даже в том случае, когда время релаксации очень мало, поглощение энергии высокочастотного поля будет более или менее быстро (в зависимости от интенсивности высокочастотного поля) приводить к выравниванию заселенности уровней.

Желая иметь большое время релаксации (несколько часов), мы использовали такое слабое осциллирующее магнитное поле, что поглощение существовало в течение часов, независимо от времени релаксации, если тепловое равновесие уже достигнуто.

---

\*) J. M. B. Kellogg, I. I. Rabi, N. F. Ramsey, J. R. Zacharias, Phys. Rev. 56, 738 (1929).

\*\*) E. M. Purcell, H. C. Torrey, R. V. Pound, Phys. Rev. 69, 37 (1946).

Резонатор представлял собой короткий отрезок коаксиальной линии, нагруженной которой служила емкость конечной пластины. Он был настроен на резонанс при частоте приблизительно 30 Мгц. Вход и выход его были снабжены витками связи. Индуктивная часть полости резонатора заполнялась 850 см<sup>3</sup> парафина, который в ходе эксперимента находился при комнатной температуре. Резонатор помещался в зазор большого магнита для исследования космических лучей Физической лаборатории в Гарварде. Мощность высокочастотного излучения, которая вводилась в резонатор, находилась на уровне 10<sup>-11</sup> вт. Высокочастотное магнитное поле в полости резонатора было перпендикулярно направлению постоянного поля. Выход объемного резонатора балансировался по фазе и амплитуде по отношению к другой части выходного сигнала генератора. Остаточный сигнал после усиления и детектирования измерялся микроамперметром.

При сбалансированной высокочастотной схеме мы медленно меняли постоянное магнитное поле. При этом наблюдался чрезвычайно острый пик резонансного поглощения. Показание выходного прибора в максимуме поглощения примерно в 20 раз превышало величину флуктуаций, связанных с шумом, нестабильностью частоты, и т. д.

Поглощение уменьшило выход на 0,4 процента и, так как добротность  $Q$  нагруженного резонатора составляла 670, мнимая часть магнитной проницаемости парафина в резонансе, как и ожидалось, оказалась равной  $3 \cdot 10^{-9}$ .

Резонанс наступил при поле 7100 э и частоте 29,8 Мгц, в соответствии с нашей предварительной грубой калибровкой. Мы не производили точного измерения поля и частоты. Величина магнитного момента протона, которая следует из приведенных чисел, составляет 2,75 ядерных магнетонов, что находится в удовлетворительном согласии с величиной 2,7896, полученной по методу молекулярных пучков.

Полная ширина резонанса на половине высоты равна приблизительно 10 э. Эта ширина может быть частично связана с неоднородностями магнитного поля, которые имели такой же порядок величины. Ширина из-за локальных полей от соседних ядер по оценкам составляла около 4 э.

Время релаксации было, по-видимому, меньше, чем время установления резонансной величины магнитного поля (около 1 минуты). Типы связей спина с решеткой, которые были введены Валлером [2], оказались в несколько сотен раз слабее, чем это необходимо для объяснения столь малого времени релаксации.

Этот метод можно усовершенствовать как по чувствительности, так и по точности. В частности, кажется возможным увеличение чувствительности в несколько сотен раз при изменении способа обнаружения эффекта. По-видимому, метод можно использовать для точного измерения магнитных моментов (точнее, гиромангнитных отношений) наименее распространенных ядер. Метод позволяет также исследовать интересный вопрос о связи спина с решеткой. Между прочим, метод можно применить для калибровки магнитного поля, так как необходимая для этих целей аппаратура весьма проста. Использование высокочастотного поля с вращающейся компонентой дало бы возможность расширить применения метода и определить знак момента.

Эффект, который здесь описан, пытались обнаружить ранее Гортер и Броер. Их эксперимент описан в статье [3], которая встретила нам во время проведения данной работы. В действительности они искали скорее дисперсию, а не поглощение в LiCl и KF. Отрицательный результат их опыта можно объяснить, по-видимому, одной из следующих причин: а) приложенное переменное поле могло быть слишком сильным, а время релаксации настолько большим, что тепловое равновесие нарушалось прежде, чем эффект можно было наблюдать, б) при низких температурах, которые были нужны в их опыте для получения заметного изменения проницаемости, время релаксации могло быть столь большим, что тепловое равновесие никогда не наступало.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Rabi, Zacharias, Kusch, Phys. Rev. 53, 318 (1938).
2. I. Waller, Zs. Phys. 79, 370 (1932).
3. Gorter, Broer, Physica 9, 591 (1942).

## Простые опыты по электронному спиновому резонансу в слабых магнитных полях \*)

В физических лабораториях для студентов последнего курса обычно имеется установка для определения отношения  $e/m$  в скрещенных полях. Можно легко изготовить простую аппаратуру для наблюдения электронного спинового резонанса, если использовать катушки Гельмгольца \*\*) из этой установки. С такой аппаратурой можно выполнить ряд опытов по программе студенческих лабораторий.

В качестве резонансного детектора используется пороговый усилитель с частотой 20 Мгц на одной лампе 6АК5, аналогичный детектору для ЯМР [1]. Анодное напряжение этой лампы без дальнейшего усиления подавалось непосредственно на осциллограф. Образец

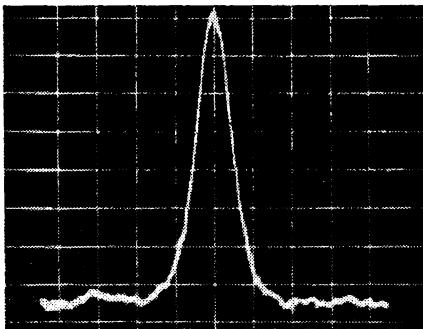


Рис. 1. Осциллограмма резонанса в DPPH при частоте 19,1 Мгц.

весом в несколько сотен миллиграмм поликристаллического DPPH (1,1-дифенил-2-пикрил гидразин — химическое соединение со свободным радикалом, которое обычно используется в подобных опытах), помещенный в катушку с осциллирующим полем, дает низкочастотный сигнал, легко наблюдаемый на экране осциллографа с вертикальной чувствительностью 20 мв/см. Фотография сигнала, который был получен с помощью описанной аппаратуры на DPPH при частоте 19,1 Мгц, приведена на рис. 1. Как показывает опыт, образец весом 100 мг будет давать почти такое же отношение сигнала к шуму. Для наблюдения резонанса с помощью осциллографа магнитное поле модулируется звуковой частотой (обычно 60 гц). Для этого на постоянный

ток катушки Гельмгольца накладывается составляющая звуковой частоты. Подобная аппаратура является упрощенным вариантом некоторых радиочастотных спектрометров со-слабым магнитным полем [2, 3].

Для того чтобы устранить нежелательную модуляцию тока катушки частотой 60 гц, был изготовлен простой регулируемый источник питания. Он состоит из мощного эмиттерного повторителя, через который проходит ток до 1 а, питающий катушки Гельмгольца  $L$  (соответствующее магнитное поле до 10 гс). Пульсации не превышают 10 мв. Потребление тока от батареи из трех элементов для карманного фонаря не превышает 20 ма при максимальном токе катушки. Элементы можно заменить источником тока на основе диода Зенера. Схема источника питания представлена на рис. 2.

Эта аппаратура может быть непосредственно использована в качестве магнитометра. Например, с ее помощью можно осуществить измерение магнитного поля Земли и получить распределение поля по оси катушки Гельмгольца. В этом опыте вместо измерения частоты используется прямое вычисление резонансного поля  $H_0$ , исходя из размеров катушки и величины тока, так же, как и в эксперименте по определению  $e/m$ . Для измерения магнитного поля Земли  $H_0$  ось катушек Гельмгольца ориентируется параллельно этому полю. Измеряется ток катушки в резонансе (для двух направлений тока) при неизменной частоте генератора. Разность полей, вычисленная из этих измерений, соответствует удвоенной величине поля Земли.

\*) А. В. Grossberg, Amer. J. Phys. 39, 927 (1962).

\*\*) Катушки Гельмгольца, которые использовались в этих опытах, имели радиус 10 см, количество витков на катушку — 120, сопротивление при последовательном включении — 3 ом.

Возможна точная установка поля  $H_0$ , если задать небольшую модуляцию и изменять ток в катушке, пока на осциллографе (при 120  $\mu\text{c}$ ) не получится минимальный сигнал.

Воспроизводимость показаний магнитометра лучше, чем 2 процента. Поэтому имеется возможность провести измерения почти постоянно магнитного поля по оси катушек Гельмгольца. В каждой из точек на оси, отстоящих друг от друга на расстоянии 0,5  $\text{cm}$ , изменением тока катушки при постоянной частоте генератора устанавливается поле  $H_0$ . По мере того, как DPPH-зонд перемещается от средней точки катушки, ток постепенно будет увеличиваться. Из этих измерений тока можно получить распределение аксиального поля, созданного постоянным током катушки. Затем изменение поля можно сравнить с теоретическим выражением [4].

Для того чтобы определить величину  $g$  по измерениям DPPH-резонанса, необходимо измерить частоту генератора. Для этой цели можно использовать калиброванный радиоприемник или измеритель частоты типа ВС-221. Величина  $g$  вычисляется по формуле для резонанса

$$g = hf/H_0\beta,$$

где  $h$  — постоянная Планка, а  $\beta$  — магнетон Бора. Разумеется, необходимо ввести поправку, которая учитывает магнитное поле Земли. Если ось катушки Гельмгольца направлена параллельно  $H_0$  и величина  $H_0$  определяется усреднением результатов измерений для двух направлений тока катушки, то эта поправка учитывается автоматически. При частотах генератора, меньших 10  $\text{Mc}$ , с помощью описанной аппаратуры можно наблюдать интересный эффект сдвига величины  $g$ .

Однако недостаточно высокое отношение сигнала к шуму препятствует проведению точных измерений величины этого сдвига, а при частотах около 3,5  $\text{Mc}$  становится трудно вообще разрешить резонанс.

Ширина резонанса для DPPH в точках наибольшего наклона резонансной кривой может быть найдена измерением приращения поля между точками с максимальными сигналами.

Предполагая, что форма линии представляется в лорентцевском виде, можно показать, что ширина кривой на половине высоты в 1,73 раза больше найденной ширины. Определенную таким образом ширину можно затем сравнить с результатами измерений при высоких полях (2,7  $\text{gc}$ ).

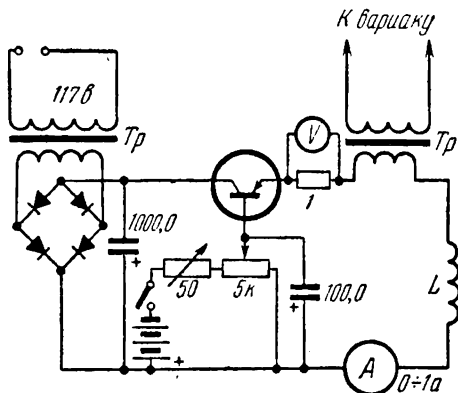


Рис. 2. Схема электрического питания. Величина тока в катушке  $L$  определяется по падению напряжения на эталонном манганиновом сопротивлении в 1  $\text{om}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. G. Marcleу, Amer. J. Phys. **29**, 451 (1961).
2. R. G. Marcleу, Amer. J. Phys. **29**, 492 (1961).
3. M. A. Garstens, L. S. Singer, A. H. Ryan, Phys. Rev. **96**, 53 (1954).
4. J. R. Reitz, F. J. Milford, Foundations of Electromagnetic Theory; Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1960, Chap. 8, p. 156.

## Простой микроволновый резонансный спектрометр \*)

Рассмотрена сравнительно простая и недорогая аппаратура для наблюдения электронного парамагнитного резонанса, предназначенная для студенческих лабораторий. При некоторых усовершенствованиях ее можно использовать в исследовательских целях.

**Введение.** Очень часто сложность и высокая стоимость оборудования в быстро развивающихся областях современной физики служат препятствием для постановки большого числа важных опытов даже в самых хороших учебных лабораториях. К этим опытам

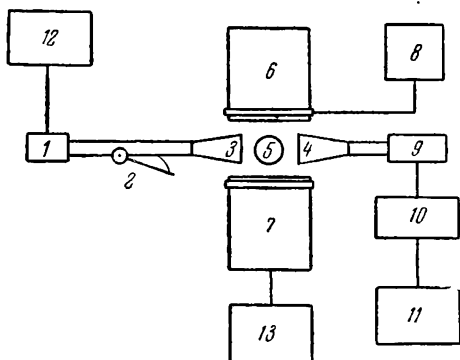


Рис. 3. Блок-схема установки, в которой используются рупоры: 1 — клизотрон, 2 — аттенюатор, 3, 4 — излучающий и приемный рупоры, 5 — образец, 6, 7 — полюсы магнита, 8 — варнак для модуляции магнитного поля, 9 — детектор, 10 — усилитель, 11 — осциллограф, 12, 13 — источники питания.

из-за сложности и весьма значительной стоимости обычно относят опыты по наблюдению электронного парамагнитного резонанса, которые поэтому редко входят в программу выпускных курсов. Как правило, в опытах по парамагнитному резонансу используется волновод с настроенной полностью, который является довольно сложной системой и требует чувствительной настройки. Однако мы построили две «плоские» резонансные системы, которые обладают достаточной чувствительностью и вполне могут быть использованы

для измерений, в которых не требуется высокая точность. Мы наблюдали парамагнитный резонанс в нескольких солях меди и также в дифенилпикрилгидразине (DPPH) со свободным радикалом. Пределы чувствительности определялись с помощью DPPH.

**Аппаратура.** Микроволновая система была собрана в лаборатории из стандартных волноводов и фланцев, которые изготавливаются промышленностью. В качестве генератора колебаний использовался отражательный клизотрон 723 А/В [1] со стандартным гнездом для волновода и держателем; частота колебаний клизотрона составляет приблизительно 10 000 Мгц.

Для детектирования применялся 1N23-кристалл в керамическом патроне с держателем. В ходе эксперимента клизотрон и детектор соединялись двумя различными способами. В одном случае (рис. 3) держатель клизотрона подсоединялся к секции волновода с аттенюатором ножевого типа. В свою очередь волновод сочленялся с рупором, имеющим прямоугольное сечение. Излучение этого

\*) E. S. Cravlin, J. A. Cowen, Amer. J. Phys. 27, 566 (1959).



рупора принималось другим рупором с такими же размерами (рис. 4), который соединялся с волноводом, имевшим внутри кристаллический детектор. В другом случае рупор заменялся секцией волновода, имеющей щель в 0,25 дюйма и длиной 1,5 дюйма, прорезанную на узкой стороне. На рис. 5 представлена фотография микроволновой системы.

Для питания клистрона использовался источник напряжения TVN-7BL [1].

Отражательный клистрон 723 А/В работает при напряжении 300 в со средним током пучка 22 ма, а генерация колебаний обеспечивается при напряжении на его отражателе 0—300 в, отрицательном по отношению к катоду. Поэтому такой удобный и простой источник питания совершенно достаточен для работы. Подобные приборы выпускаются также и промышленностью.

Выходной сигнал детектора поступал на усилитель с обратной связью в виде двойного Т-моста [1] и наблюдался на осциллографе. Этот усилитель обладал широкой полосой и всегда использовался без выпрямительных диодов и измерительных цепей. Другой усилитель (рис. 6), имеющий более простую конструкцию и также пригодный для работы, обладает меньшей чувствительностью, но лучше воспроизводит форму сигнала.

Для работы клистрона необходим магнит, который создает магнитное поле от 3000 до 4000 гс в полюсном зазоре размером не

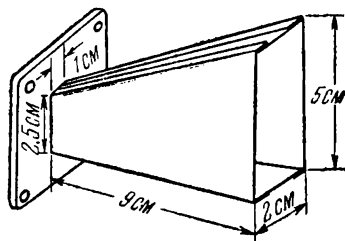


Рис. 4. Размеры рупора; изготовленного из медного листа. Пайка осуществлялась мягким припоем.



Рис. 5. Фотография аппаратуры для двух вариантов установки.

менее 3,0 см. Минимальный зазор определяется меньшим из двух размеров поперечного сечения микроволновых рупоров. Магнит, который использовался в этом опыте, имеет полюсные наконечники с радиусом 11 см и зазор 5 см. Он был сконструирован и изготовлен в Мичиганском университете. В том случае, когда подобный магнит нельзя приобрести или нет средств для его изготовления, не составляет большого труда сделать весьма недорогой магнит с нужными свойствами из старого сердечника для трансформатора [2]. В любом

случае для наблюдения сигнала магнитное поле необходимо модулировать с частотой 60 гц в диапазоне 100 гс. Для этой цели можно использовать катушку, на которую подается напряжение от вариака (рис. 3).

**Метод и результаты.** Микроволновая система ориентируется в зазоре таким образом, чтобы микроволновое магнитное поле было перпендикулярно магнитному полю электромагнита, а образец (в держателе из стирофома, полистирола, тефлона или просто из дерева) помещался в промежутке между двумя рупорами. Так как рупоры имеют импедансы, относительно хорошо согласованные со «свободным пространством», то никакого согласования в системе

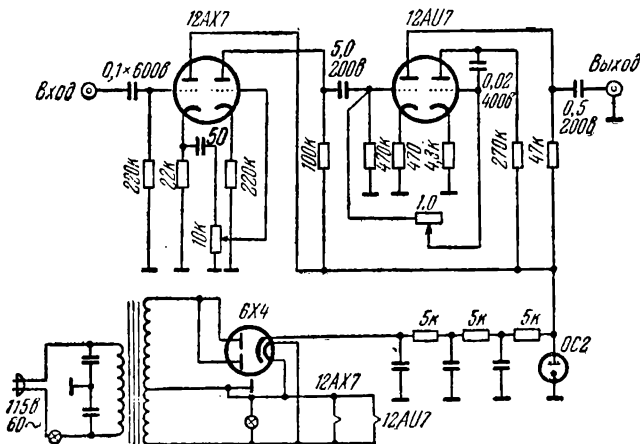


Рис. 6. Схема широкополосного усилителя.

не требуется. Однако второй рупор будет образовывать стоячие волны, и лучший результат получится, если образец будет размещен в антиноде стоячей волны \*).

На рис. 7 представлены фотографии, полученные с помощью описанной установки для различных образцов и усилителей. Минимальный вес образца, при котором сигнал можно было зарегистрировать, составлял 20 мг. Если большой монокристалл (например, кристалл сульфата меди весом в несколько граммов) поворачивать относительно некоторого определенного положения, то можно наблюдать анизотропию резонансных линий.

На рис. 8 представлена парамагнитная линия поглощения для DPPH, полученная с помощью микроволновой системы при условии

\*) Многие свойства электромагнитных волн можно продемонстрировать с помощью подобной системы из двух рупоров. Можно с успехом наблюдать поляризацию, ослабление, поглощение веществом, отражение от металлических поверхностей и стоячие волны, отражение от диэлектрического экрана и направленное действие антенны (рупора).

замены рупоров секцией волновода со щелями. Опыт производился с тем же образцом весом 20 мг, что и на рис. 7, в. Образец помещался в маленький цилиндр, изготовленный из тефлонового стержня. Та часть щели, которая не была занята образцом, должна закрываться фольгой для уменьшения потерь. Из сравнения рис. 7, в

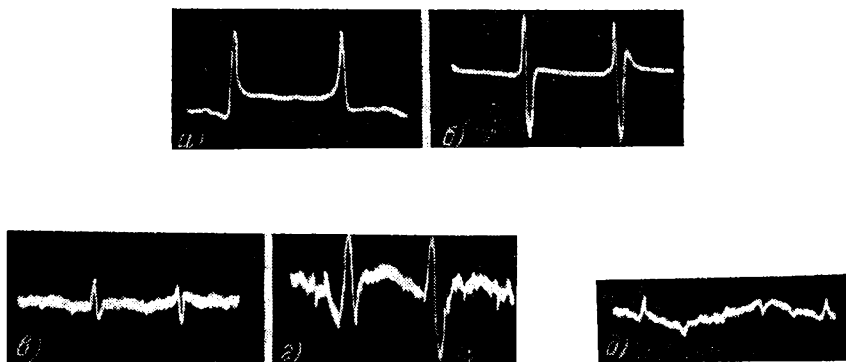


Рис. 7. Результаты, полученные с помощью системы, в которой используются рупоры: а) большой образец DPPH и усилитель, изображенный на рис. 6, б) тот же образец и усилитель с двойной T-связью, в) образец 20 мг DPPH при условиях (б), г) образец из сульфата меди, условия (б), д) образец из нитрата меди, условия (б).

и 8, б следует, что волновод с щелью обладает большей чувствительностью; однако это имеет место только для веществ с сильными парамагнитными свойствами, таких как DPPH. Весьма трудно получить заметный сигнал поглощения для таких веществ, как сульфат меди или нитрат меди, так как практически невозможно



Рис. 8. Результат, полученный при использовании секции волновода с прорезью: а) образец DPPH весом 20 мг и усилитель (рис. 6), б) образец DPPH в 20 мг и усилитель с двойной T-связью.

ввести достаточно большой образец через маленькую щель в волноводе. Поэтому более универсальным из этих двух методов является первый метод.

**Обсуждение.** В этой статье кратко описана простая микроволновая система, пригодная для ознакомления с электронным парамагнитным резонансом. Наиболее пригоден для измерений образец DPPH (который может быть синтезирован любым химиком-органиком), так как DPPH обладает интенсивной узкой резонансной

линией и для него известно точное значение величины  $g$ . В сочетании с пороговым усилителем для протонного резонанса [3], который позволяет точно определить магнитное поле, возможна довольно хорошая калибровка качающегося поля. Затем можно определить анизотропию резонансных линий, величины  $g$ , ширину линии и получить, таким образом, хорошее представление о физике парамагнитного резонанса.

Добавление настроенного передающего резонатора и соответствующего согласующего устройства делает прибор очень полезным элементом исследовательской аппаратуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. C. G. Montgomery, *Technique of Microwave Measurements*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1947.
2. S. Broersma, *Amer. J. Phys.* **24**, 500 (1956).
3. J. A. Cowen, W. H. Tantilla, *Amer. J. Phys.* **26**, 381 (1958).

### **Демонстрация ядерного магнитного резонанса в кобальте с помощью прибора, измеряющего уменьшение сеточного тока лампы \*)**

Ядерное магнитное резонансное (ЯМР) поглощение в ферромагнитных материалах проявляется в огромной степени по сравнению с ЯМР во всех других веществах. Несомненно, что самое интенсивное ЯМР поглощение, о котором до сих пор сообщалось, имеет место для ядер  $\text{Co}^{59}$  [1, 2]. При комнатной температуре внутреннее магнитное поле для ядра кобальта достигает приблизительно 210 кэс. Ядра прецессируют в этом поле с частотой 213,1 Мгц. Кобальтовый образец в высокочастотном поле будет поглощать энергию генератора, работающего при этой частоте. При этом не нужно никакого внешнего магнитного поля; сильное внешнее поле будет в действительности только разрушать резонанс.

Все, что требуется для наблюдения резонанса, — это некоторое количество порошкообразного кобальта и маломощный высокочастотный генератор, снабженный прибором для измерения сеточного тока [3]. Обычно настроенная LC-цепочка генератора не нагружена и сеточный ток лампы довольно велик. Когда энергия поглощается из настроенного контура соседним резонансным контуром, то наблюдается спад сеточного тока. Для этой цели нужно воспользоваться частотомером. Искривленный конец настроенного шупа прибора следует поместить прямо против дна сосуда с кобальтом. Если генератор настроен точно на частоту 213,1 Мгц, то будет наблюдаться небольшой спад сеточного тока. В этом случае поглощающим «резонансным контуром» является система атомов  $\text{Co}^{59}$ .

Резонанс на частоте 213,1 Мгц возникает на ядрах атомов, размещенных в распространенной гранцентрированной кубической решетке. В менее распространенной гексагональной решетке ядра атомов упакованы более плотно, что приводит к несколько большему магнитному полю. Поэтому резонанс проявляется при частоте 221 Мгц [4]. Если маленький образец кобальта поместить внутрь закругленного конца шупа, то спад тока, обусловленный поглощением при частоте 213,1 Мгц, проявляется гораздо сильнее и появляется возможность его наблюдения.

Имеются также более слабые резонансы, но для их наблюдения требуется дополнительная аппаратура. С помощью измерителя спада сеточного тока модели GD-1B можно регистрировать резонанс 213,1 Мгц.

---

\*) R. J. Blume, *Amer. J. Phys.* **31**, 58 (1963).

Как правило, измеритель спада сеточного тока слабо связан с исследуемой целью, для того чтобы избежать нарушения взаимной настройки. Соответственным образом калибруется шкала частот. Если приближать кобальт к щупу, то наряду с эффектом резонансного поглощения, имеющего ядерное происхождение, имеют место два других сильных эффекта. Во-первых, дополнительная паразитная емкость уменьшает частоту генерации от 5 до 10% по сравнению с частотой, указанной на шкале. Поэтому для получения генерации с частотой 213,1 Мгц при наличии кобальта необходимо устанавливать несколько большую частоту по лимбу. Реальная частота может быть измерена с помощью обычных методов [5]. Во-вторых, омическая нагрузка генератора уменьшает амплитуду высокочастотных колебаний. Поэтому если поднести близко слишком большое количество кобальта, то может произойти срыв генерации. Наибольшая чувствительность к ЯМР получается тогда, когда генератор едва выдерживает нагрузку.

С помощью описанного метода можно наблюдать резонанс лишь в кобальте. Образец, который использовался в этой работе, имел зернистость 300 меш, содержание кобальта не менее 98%, никеля 0,6%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. C. Gossard, A. M. Portis, Phys. Rev. Letters **3**, 164 (1959).
2. A. M. Portis, A. C. Gossard, J. Appl. Phys. **31**, 205S (1960).
3. Смотрите одно из последних изданий Radio Amateur's Handbook, American Radio Relay League, West Hartford, Connecticut.
4. R. Street, D. S. Rodbell, W. L. Roth, Phys. Rev. **121**, 84 (1961).
5. F. E. Terman, J. M. Pettit, Electronic Measurements, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952, Chap. 5.

#### Работа 4.5. ОПТИЧЕСКАЯ НАКАЧКА\*)

**Введение.** Метод выстраивания спинов атома, названный «оптической накачкой», через несколько лет после своего открытия привлек усиленное внимание физиков из-за возможности его использования в целом ряде исследований, включая чрезвычайно точные измерения расщеплений атомной сверхтонкой структуры [1—4], явлений, возникающих в процессах соударений и других возмущений атомных энергетических уровней [1, 2, 5, 6], создание компактных высокоточных стандартов частоты и чувствительных точных магнитометров [7, 8], получение свободных поляризованных электронов [9]. Так как развитие метода оптической накачки опередило развитие техники атомных и молекулярных пучков, то это дает основание полагать, что оптическая накачка играет ведущую роль в развитии наших знаний в области атомных и ядерных моментов. Этот метод открывает исключительно простые возможности для измерения сверхтонкого расщепления энергий и ядерных спинов некоторых атомов.

Нам кажется, что этот изящный метод измерений, требующий относительно простого оборудования, может быть с успехом использован в ряде лабораторных работ для студентов-физиков последнего курса и аспирантов первого года обучения. В частности, может

---

\*) R. L. Zafra, Amer. J. Phys. **28**, 646 (1960).

быть легко измерена зависимость частоты прецессии магнитного диполя от величины магнитного поля, проведена прямая демонстрация эффекта Зеемана и, возможно самое главное, наглядно продемонстрирована концепция спиновых моментов количества движения для электрона. В этой статье мы проведем полуколичественное описание процесса оптической накачки и затем опишем

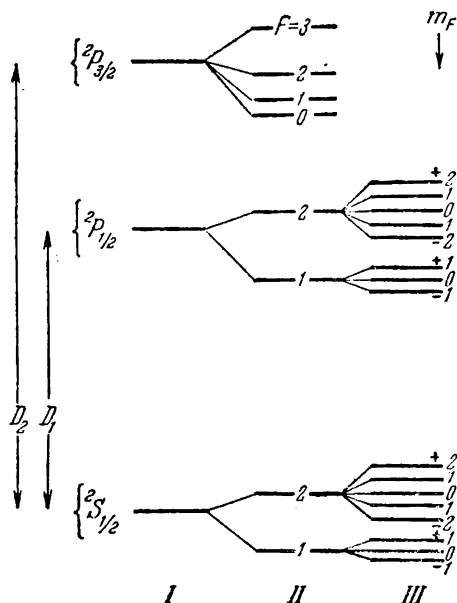


Рис. 1. Схема расщепления энергетических уровней атома щелочного металла, имеющего ядерный спин  $3/2$ , возникающих вследствие различных взаимодействий, которые добавляются к модели Бора. *I* — тонкая структура: добавление электронного спина, *II* — сверхтонкая структура: добавление ядерного спина, *III* — зеемановское расщепление сверхтонкой структуры в слабом магнитном поле. Расстояния между энергетическими уровнями указаны не в масштабе. Для простоты не показано зеемановское расщепление  ${}^2P_{3/2}$  состояния.

и полный электронный спин  $S$  равен  $1/2$ , то возможны два значения полного момента количества движения для электронов, а именно  $J = 3/2, 1/2$ . Эти два состояния с различными полными моментами из-за спин-орбитального взаимодействия отличаются по энергии относительно основного состояния и образуют известный дублет в спектре щелочных металлов (рис. 1, столбец *I*). Однако из-за существования ядерного спина основное состояние и все другие уровни энергии будут дополнительно расщепляться на ряд подуровней — состояний сверхтонкой структуры (рис. 1, столбец *II*). Каждое из этих состояний слегка отличается по энергии из-за взаимодействий электрона с ядерным магнитным дипольным момен-

аппаратуру, пригодную для проведения некоторых из указанных выше опытов.

**Основные положения.** Употребление слова «накачка», определяющего название процесса, не предусматривает никакого перемещения вещества и характеризует «накачку» ориентаций спинов атомов из равновесного распределения по магнитным подуровням в неравновесное распределение, в котором преобладающая часть спинов выстроена в данном направлении.

Для простоты ограничимся атомами щелочных металлов, основное состояние которых  ${}^2S_{1/2}$ . Энергия переходов из первого возбужденного состояния в основное состояние достаточна для излучения в оптическом диапазоне. Так как первое возбужденное состояние есть  $P$ -состояние (орбитальный момент количества движения  $L = 1$ )

том и электрическим квадрупольным моментом. Различие в энергиях, приводящее к сверхтонкой структуре, возникает из-за зависимости энергии взаимодействия от возможных, разрешенных квантовомеханическими законами, ориентаций ядерного момента количества движения относительно полного момента количества движения для электронов. В соответствии с правилами квантования эти разрешенные комбинации таковы, что полный момент количества движения  $F$  принимает значения  $F = I + J, I + J - 1, \dots, I - J$ . Дальнейшее расщепление уровней (зеemanовское расщепление уровней сверхтонкой структуры) может быть осуществлено наложением слабого внешнего магнитного поля (рис. 1, столбец III). Это расщепление, возникающее из-за того, что различным ориентациям данного  $F$  во внешнем поле  $H$  соответствуют разные энергии, пропорциональные величине поля  $H$ , если ограничиваться слабыми полями.

Возможны только те ориентации  $F$ , которые дают проекции  $m_F$  на направление  $H$ , равные  $m_F = F, F - 1, \dots, -F$ . Все уровни для основного и первого возбужденного состояния атома щелочного металла с ядерным спином показаны на рис. 1. Переходы между уровнями с различными  $F$ , так называемые сверхтонкие переходы, будут сопровождаться поглощением или испусканием магнитного дипольного излучения, при этом возможные изменения  $F$  равны  $\Delta F = 0, \pm 1$ . Переходы между уровнями с различными  $m_F$  при постоянном  $F$ , включающие зеemanовские переходы, возможны только при условии  $\Delta m_F = 0, \pm 1$ .

Теперь можно понять принцип оптической накачки. Пусть газ из свободных атомов рубидия (для изотопа  $\text{Rb}^{87} I = 3/2$ ) находится в слабом магнитном поле, приводящем к зеemanовскому расщеплению сверхтонкой структуры. Рассмотрим действие пучка резонансного излучения с круговой поляризацией, проходящего через газ. По причинам, которые станут понятными позже, ограничимся уровнем дублета  $D_1$ , который соответствует более низкой энергии резонансного излучения. Это излучение будет легко поглощаться, при этом атом переходит в возбужденное состояние  $2P_{1/2}$ . Но если свет имеет левую круговую поляризацию (моменты количества движения всех фотонов параллельны направлению распространения), то поглощение фотона будет приводить к увеличению момента количества движения на единицу при условии, что свет распространяется в направлении вектора внешнего магнитного поля. Этот процесс иллюстрирует рис. 2, где различные зеemanовские

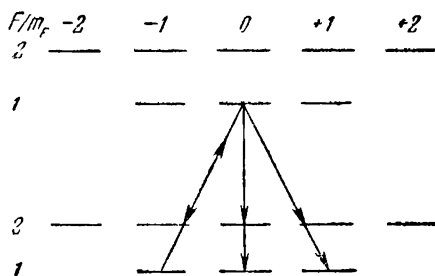


Рис. 2. Возможные переходы для атома, находящегося в подсостоянии с  $F = 1, m_F = -1$  основного состояния, при поглощении фотона с моментом количества движения, равным  $+1$ .

уровни для основного состояния и состояния  ${}^2P_{1/2}$  изображены несколько иначе, чем на рис. 1.

Поглощение кванта излучения  $D_1$  атомом, скажем, на подуровне с  $F = 1$  и  $m_F = -1$  может перевести его только на подуровень с  $m_F = 0$  в возбужденном состоянии  ${}^2P_{1/2}$ . (Доплеровское уширение резонансной радиации обычно приводит к тому, что становятся возможными переходы на сверхтонкие уровни возбужденных состояний с  $F = 2$  или 1. Правила отбора для дипольного излучения разрешают с одинаковой вероятностью обратные переходы в основное состояние для  $\Delta m_F = 0, \pm 1$ , поэтому с вероятностью  $2/3$  атом возвращается в основное состояние с большей проекцией спина относительно исходной оси, чем первоначально. Атом может поглощать свет и излучать снова и снова. Если нет причин, которые приводят к релаксации заселенности различных  $m_F$ -уровней, то очевидно, что со временем будет осуществлена «накачка» атомов на уровень основного состояния с  $F = 2, m_F = 2$  и спины всех атомов оказываются ориентированы одинаковым образом. Больше того, когда атом находится в этом состоянии, то он не может больше поглощать  $D_1$ -излучение, поэтому пары должны со временем стать прозрачными по отношению к  $D_1$ -излучению.

Однако в действительности процессы столкновений различных атомов друг с другом и стенками контейнера, в котором содержится газ, вызывают сильное перемешивание различных  $m_F$ -уровней как в основном, так и в возбужденном состояниях, что приводит к нарушению идеальной ситуации, которая рассматривалась ранее. Теперь нам ясны причины, по которым мы исключили из рассмотрения  $D_2$ -радиацию [10]. Если бы мы допустили  $D_2$ -радиацию, то был бы возможен переход из основного подсостояния с  $m_F = +2$  в возбужденное состояние с  ${}^2P_{3/2}$  и  $m_F = +3$ . Это привело бы к появлению «утечки» поляризации в образце, по крайней мере в том смысле, что время процессов релаксации оказывается иногда меньшим по сравнению со средним временем жизни возбужденного состояния. На самом деле в ходе эксперимента могут встретиться трудности в получении заметной поляризации, несмотря на то, что  $D_2$ -радиация устраняется из падающего пучка введенным соответствующих фильтров.

Кроме этого, можно получить сигнал резонанса большей амплитуды, если принять меры к ослаблению процессов релаксации: а) использовать в качестве «буферного» газа благородные газы, такие как аргон или неон (которые сами имеют незначительную тенденцию создавать деполяризацию при столкновениях), для того чтобы сильно увеличить время диффузии щелочных атомов к стенкам камеры \*), б) увеличить интенсивность падающего света для

---

\*) Присутствие буферного газа в надлежащем интервале давлений, приводящее также к уменьшению доплеровского уширения резонансных сигналов, является важной особенностью при проведении измерений расщепления энергетических уровней с большой точностью (см. [1, 2, 5, 11, 12]).



уменьшения времени накачки по сравнению со средним временем релаксации, в) для покрытия стенок можно использовать различные материалы, обычно тяжелые парафиноподобные углеводороды, такие как эйкозан или дотриаконтан, которые, как и благородные газы [13—15], не вызывают деполяризации при столкновении.

Формальное выражение, представляющее процесс оптической накачки, состоит из ряда совместных дифференциальных уравнений, определяющих скорость накачки в каждое из подсостояний из всех других возможных подсостояний. Общее выражение для системы, имеющей  $n$  подсостояний в основном состоянии, определяется  $n$  уравнениями

$$\dot{P}_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n (b_{kj} + \omega_{kj}) P_k + \sum_{i=1}^n (b_{ik} + \omega_{ik}) P_i, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где  $P_k$  — вероятность нахождения в  $k$ -м подсостоянии (таким образом,  $\sum_k P_k = 1$ , т. е. вероятность пребывания в каком-либо подсостоянии равна единице),  $b_{ij}$  определяет вероятность перехода за единицу времени из подсостояния  $i$  в подсостояние  $j$  основного состояния при поглощении и последующем испускании фотона,  $\omega_{ij}$  — вероятность перехода за единицу времени из соответствующего основного состояния из-за имеющихся механизмов релаксации. Таким образом, для данного состояния  $k$  первая сумма с правой стороны равенства определяет скорость переходов из состояния  $k$  во все другие состояния при  $j \neq k$  из-за испускания фотона и механизма релаксации, вторая сумма представляет скорость перехода в состояние  $k$  из всех других состояний  $i \neq k$ , вызванных теми же причинами.

Если предположить, что на возбужденные состояния не действует никакой механизм релаксации, то можно непосредственно определить величины  $b_{ij}$  с помощью стандартных формул для электрического дипольного возбуждения [16]. Общее решение уравнения (1) было получено [7, 10] при двух крайних допущениях: 1) не происходит никакого смешивания возбужденных и основных состояний и 2) эти состояния полностью смешиваются.

Прежде чем описывать методы обнаружения результирующей поляризации в образце и методы наблюдения зеемановских переходов и переходов в сверхтонкой структуре, мы хотели бы отметить, что для получения оптической накачки нет необходимости в магнитном поле, так как направление распространения света в круговой поляризации само по себе определяет ось квантования. При рассмотрении этого вопроса мы выбрали такие условия, когда имелось магнитное поле. Это было сделано для того, чтобы дать наиболее простое описание явления, и этот случай почти всегда встречается в эксперименте. Очевидно, что при отсутствии магнитного поля невозможно наблюдать зеемановские переходы, так как все  $m_F$ -уровни вырождаются по энергии, хотя вырождение по

моменту количества движения не имеет места. Однако в этом случае ориентация образца все же может быть наблюдаема по переходам в сверхтонкой структуре.

Обнаружение явления оптической накачки может быть осуществлено весьма простыми средствами [17], так как сам световой поток, с помощью которого происходит накачка, покажет, что накачка имеет место. Раньше отмечалось, что пары будут становиться до определенной степени прозрачными к резонансному излучению, когда проходит достаточно большое время (обычно несколько десятков миллисекунд), чтобы возникла неравновесная заселенность более высоких  $m_F$ -подсостояний. Если теперь по каким-либо причинам это новое распределение заселенности будет нарушено, то поглощение пара снова возрастет. Проще всего это можно сделать, обратив внешнее магнитное поле и соответственно связанные с ним атомные спины [17]. Тогда наиболее заселенными станут состояния с отрицательными значениями  $m_F$  относительно оси, определяемой направлением светового потока, и при осуществлении обратной накачки в состояния с положительными значениями  $m_F$  возникает сильное поглощение света. В качестве детектора оптической накачки может использоваться обычный связанный с осциллографом фотоумножитель, осуществляющий мониторинг интенсивности проходящего света. Хотя этот метод достаточен для обнаружения эффекта ориентации атомных спинов, с его помощью нельзя получать информацию о многих интересных явлениях. Если же на образец наложить высокочастотное поле с частотой, приводящей к зеемановским или сверхтонким переходам, то на время действия сигнала поглощение света в образце будет снова увеличиваться, после чего поглощение немедленно начнет уменьшаться до тех пор, пока не восстановится максимальная заселенность верхних  $m_F$ -состояний под влиянием резонансного излучения. Оптический метод определения частот зеемановских и сверхтонких переходов, который стал возможен благодаря оптической накачке, имеет значительное преимущество перед экспериментами с атомными пучками или другими методами резонансной техники, а также превосходит их по простоте осуществления.

Здесь приведено краткое рассмотрение только самых основных характеристик оптической накачки. В имеющейся литературе содержится много детальных теоретических работ и описаний специальных применений техники оптической накачки, а также подробно приводятся возможные усовершенствования аппаратуры, которая будет в общих чертах представлена в следующем разделе статьи. Однако нам хочется подчеркнуть, что аппаратура в том виде, в котором она будет описана далее, вполне пригодна для иллюстрации ряда фундаментальных концепций современной атомной физики.

**Экспериментальная аппаратура.** Схема необходимой аппаратуры представлена на рис. 3. Наиболее просто эксперименты по оптической накачке можно осуществить с натрием и рубидием. Накачка

рубидия затрудняется отсутствием интенсивных световых источников, но, с другой стороны, здесь имеются и некоторые преимущества по сравнению с Na. Они заключаются в следующем: а) низкая температура точки плавления Rb ( $39^\circ\text{C}$ ), позволяющая получать достаточно высокое давление паров для успешной накачки при  $35\text{--}45^\circ\text{C}$ , по сравнению со  $100\text{--}140^\circ\text{C}$  для Na, б) большое разделение  $D_1$ - и  $D_2$ -линий ( $7947\text{ \AA}$  и  $7800\text{ \AA}$  соответственно), позволяющее сравнительно просто и эффективно устранить  $D_2$ -линию, применяя интерференционные фильтры. В дальнейшем мы будем рассматривать систему накачки Rb, хотя, разумеется, основные элементы системы для накачки Na будут теми же.

#### Общие сведения об аппаратуре.

По-видимому, наиболее подходящими источниками резонансного излучения, которые изготавливаются промышленностью, являются лампы Osram (1 на рис. 3). Они запускаются переменным напряжением  $220\text{ в}$ , но после прогрева для устранения пульсаций яркости лампы  $60\text{ гц}$  нужно питать постоянным током. Эти лампы могут хорошо работать при напряжениях постоянного тока от  $24$  до  $30\text{ в}$ . Наилучшее качество света получается тогда, когда ток лампы несколько меньше максимального тока, равного  $1,5\text{ а}$ . Колбы ламп не следует при работе устанавливать в вертикальном положении, как рекомендуется в инструкции изготовителя. В некоторых колбах низкочастотные пульсации проявляются даже при подключении к сети постоянного тока. Оказывается, что частота и амплитуда этих пульсаций являются функцией температуры колбы и при низких температурах имеется тенденция к ухудшению работы лампы. Для облегчения контроля за температурой можно снять внешний вакуумный кожух. Часто это является достаточным для улучшения работы лампы. Для создания оптимальных температурных условий можно применить ванну из нагретого силиконового масла, куда помещается лампа без кожуха. Во всяком случае, эта мера обычно приводит к увеличению выхода резонансного света в несколько раз. Температура и ток лампы должны поддерживаться ниже того уровня, когда свет начинает приобретать белый оттенок. Наилучшим является такой режим работы, когда свет лампы имеет однородный малиновый оттенок.

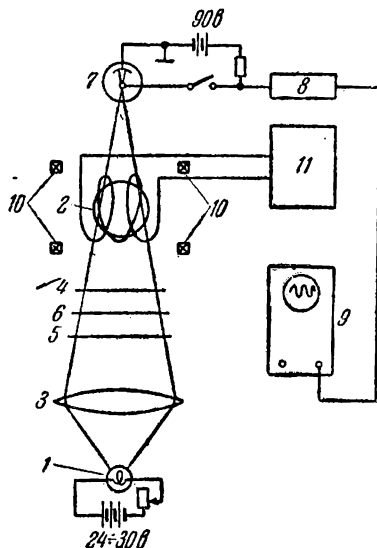


Рис. 3. Схема аппаратуры для оптической накачки. Не показана стартовая цепь питания лампы переменным током.

Для фокусировки света на резонансную колбу 2 подходит почти любая линза 3. Так как для устранения  $D_2$ -линии нужно использовать интерференционный фильтр 4, то угловая расходимость светового пучка должна быть достаточно малой (меньше  $8^\circ$  для половинного угла). Оптимальные условия, если исходить из потерь световой мощности и малой расходимости пучка, получаются при использовании короткофокусной линзы с диаметром 2 или 3 дюйма, когда лампа помещается приблизительно в ее фокусе.

Поляризатор для получения круговой поляризации состоит из линейного поляризатора 5 и пластинки в четверть волны 6 толщиной, соответствующей длине волны Na или Rb.

Мы временно отложим обсуждение устройства резонансной колбы и перейдем к детектору. Он состоит из обычного фотоумножителя 7, например RCA1P40, или любого другого с достаточно большим усилением и малым темновым током. Система детектирования должна быть защищена от внешних источников света, особенно от комнатного освещения, где проявляются значительные пульсации 60 гц. Сигнал от фотоумножителя подается с помощью экранированного кабеля на предусилитель 8 с малыми шумами типа Tektronix-122 или -123, имеющий коэффициент усиления около 100. Выход усилителя связан с осциллографом 9, который должен иметь чувствительность не менее 0,1 *в/см* для предусилителя с коэффициентом усиления, равным 100.

Система катушек Гельмгольца 10, имеющих диаметр 15 или 16 дюймов, создает достаточно однородное поле для получения узких резонансных линий. В зависимости от конкретного вида распределения магнитного поля иногда желательно помещать вторую пару катушек Гельмгольца под прямым углом к первой, чтобы компенсировать заметные поперечные компоненты поля. Можно поступить иначе, расположив всю аппаратуру таким образом, чтобы ее ось совпадала с направлением внешнего магнитного поля. Достаточно иметь поле в один или два гаусса, чтобы получить широкие резонансы в удобной области частот. Однако в общем случае этого поля недостаточно, чтобы разрешить отдельные зеемановские переходы, возникающие из-за нелинейных членов в выражении для зависимости зеемановского расщепления от поля. Можно наблюдать резонансы, расположив аппаратуру по направлению магнитного поля Земли, однако мы рекомендуем использовать внешнее магнитное поле, чтобы увеличить возможности установки.

Если в опыте используется Rb, то для нагревания резонансной колбы удобнее всего обдувать ее потоком теплого воздуха, имеющего малую скорость. Нагреватели, воздуходувки и т. д. не следует располагать поблизости от резонансной колбы, чтобы избежать модуляции или искажения магнитного поля. Часто бывает так, что для наблюдения хорошего резонансного сигнала достаточно иметь пары Rb при комнатной температуре, хотя для колбы, которая не использовалась в течение некоторого времени, или для новой

колбы, иногда требуется предварительное нагревание по меньшей мере до 50—60 °С. При работе с новыми колбами часто не получался удовлетворительный резонанс, если не наносить Rb на стенки колбы и не прогревать колбу в слабом пламени. Нанесение Rb только на горлышко колбы часто бывает недостаточно. Указанный способ недопустим, если на стенках колбы имеется покрытие.

**Резонансные колбы.** Наиболее удобными являются сферические колбы емкостью 200—300 см<sup>3</sup>, так как они достаточно велики, чтобы обеспечить большие времена диффузии до стенок, и достаточно малы, чтобы получить необходимое однородное поле  $H$  в объеме колбы, не используя чрезмерно больших катушек Гельмгольца. Следует избегать работы с колбами, размеры которых намного больше, чем средняя длина взаимодействия резонансного излучения, проходящего через них.

Само изготовление резонансных колб достаточно просто, однако весьма утомительно и может потребовать некоторого опыта. Колбы до подсоединения к вакуумной системе для откачки должны быть очищены с помощью хромовой кислоты или какого-либо другого очищающего раствора, тщательно промыты и высушены. Откачка должна производиться до давления не выше чем  $5 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст. с непрерывным прогревом в течение суток при температуре 250—300 °С. Для этой цели можно использовать маленькую печь из асбестового картона с электрической нагревательной обмоткой. Свободные щелочные металлы можно получить, если восстанавливать их хлориды при нагревании в вакууме с высокодисперсным металлическим кальцием [18], однако этот метод является весьма трудоемким и не всегда приводит к хорошим результатам. Проще ввести чистый металл в вакуумную систему.

Металлический Rb обычно поставляется в запаянных ампулах. После того как ампула открывается, Rb можно хранить в толуоле, который, будучи очень летучим веществом, легко откачивается, когда образец находится в вакуумируемой системе. Маленький кусочек металла помещается в узкий отводной канал резонансной колбы и затем при давлении  $10^{-2}$  или  $10^{-3}$  мм рт. ст. осуществляется предварительная перегонка для избавления от летучих примесей [17]. Откачка и нагревание колбы продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто наиболее низкое возможное давление. После этого колба охлаждается и на ее внутренней поверхности дистиллируется тонкий видимый слой Rb. Если используется колба с покрытием стенок, то вещество покрытия должно перегоняться из другого отводного канала в колбу, прежде чем будет введен туда Rb. В том случае, когда должен применяться буферный газ, он впускается в колбу при давлении от 2 до 5 мм рт. ст. после введения Rb. Допускается использование газа только спектральной чистоты. После того как колба запаяется и отсоединяется от вакуумной системы, поверхность стенок при

небольшом нагревании должна быть очищена, насколько это возможно, от видимой пленки Rb.

**Детектирование.** Высокочастотный или микроволновый сигнал нужной частоты (сигнал-генератор 11, рис. 3), приложенный к колбе, в которой осуществлена оптическая накачка, будет вызывать зеэмановские и сверхтонкие переходы между различными уровнями энергии. Резонансная частота зависит от имеющегося магнитного поля и от конкретного перехода, который должен наблюдаться. Формулы, с помощью которых можно рассчитать зеэмановское расщепление сверхтонких уровней ( $\Delta F = 0, \Delta m_F = \pm 1$ ) и сверхтонкое расщепление уровня ( $\Delta F = \pm 1$ ) для слабых магнитных полей, можно найти в любом стандартном пособии по структуре атома. Частоты зеэмановских переходов при поле 1—2 гс лежат в интервале от нескольких сотен килогерц до нескольких мегагерц, частоты сверхтонких переходов — в интервале нескольких сотен мегагерц. Если в опыте не используется регистрирующее устройство с большой постоянной времени, например самописец, то в этом случае очень удобно фиксировать частоту и периодически изменять магнитное поле относительно резонансного значения с тем, чтобы

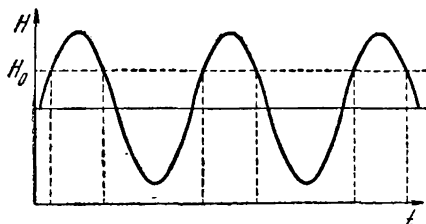


Рис. 4.

получить непрерывную серию резонансных сигналов и наблюдать их на осциллографе. Удобнее всего иметь «качающееся» поле с частотой 60 гц. Следует избегать более высокой частоты, если в наличии нет источника света с интенсивностью, превышающей обычные средние значения, который обеспечит быструю вторичную накачку. Вполне достаточно иметь модуляции магнитного поля в несколько процентов. В том случае, когда магнитное поле от постоянного тока является очень однородным, можно допустить еще меньшие модуляции амплитуды и использовать даже наводки от сети переменного тока 60 гц в лаборатории.

Достаточное для зеэмановского резонанса поле может быть получено с помощью спирали диаметром 10 см, состоящей из 5 или 6 витков проволоки, которая окружает колбу и располагается под прямым углом к оптической оси. Генератор, используемый для питания, должен создавать падение напряжения приблизительно в 0,5 в (измеренное ламповым вольтметром) на углеродном сопротивлении 100 ом, включенном последовательно с катушкой.

В случае резонанса сигнал будет наблюдаться на развертке осциллографа в виде пиков, превышающих по амплитуде шумы не менее чем в 100 раз при оптимальных условиях работы и имеющих частоту повторения 120 *имп/сек*, так как за каждый полный цикл поле дважды проходит через резонансную частоту. Расстояние между последовательными парами пиков на развертке осциллографа будет изменяться при изменении либо постоянного магнитного поля, либо частоты. В действительности пики в каждой из пар могут быть слиты друг с другом. Тогда частота повторения пиков составит 60 *имп/сек*.

Причину этого явления легко выяснить с помощью рис. 4. Штриховая линия на рис. 4 определяет поле  $H_0$ , приводящее к резонансу при фиксированной частоте высокочастотного сигнала. Сплошная прямая задает величину постоянного магнитного поля, а синусоидальная линия представляет наложенное качающееся поле. Когда линия качающегося поля пересекает линию  $H_0$ , имеет место резонанс. Если изменить величину постоянного поля, то качающееся поле на рис. 4 также переместится и будет пересекать линию  $H_0$  в другие моменты времени. Можно провести подобное же рассмотрение, если фиксировать постоянное магнитное поле и медленно изменять частоту.

Естественный рубидий состоит из смеси двух изотопов  $Rb^{85}$  и  $Rb^{87}$  с ядерными спинами  $5/2$  и  $3/2$  соответственно при соотношении весов 72% к 28%. Таким образом, каждый из этих изотопов имеет различные зеемановские и сверхтонкие структуры. Если амплитуда качающегося поля слишком велика, то наложение этих резонансов на осциллографе может привести к некоторой путанице. Кроме того, в высокочастотном сигнале могут присутствовать высокочастотные гармоники, что будет приводить к резонансам при нескольких значениях магнитных полей.

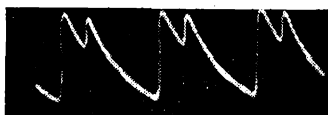


Рис. 5.

Форма типичного сигнала зеемановского резонанса в  $Rb$  при непрерывной развертке осциллографа и частоте модуляции поля 60 *гц* представлена на рис. 5. Характер соседних близко расположенных пиков объясняется с помощью рис. 4. Нарастание сигналов характеризует уменьшение интенсивности света, экспоненциальный спад каждого из сигналов определяется временем, необходимым для очередной накачки образца. В данном случае внешнее магнитное поле достаточно слабое и резонанс существенно расширен из-за неоднородностей поля. Поэтому отдельные частоты зеема-

новских переходов между различными  $m_F$ -уровнями не разрешаются, хотя в принципе это вполне возможно.

**Заключение.** Мы описали в общих чертах основные положения теории оптической накачки и привели конструктивные характеристики аппаратуры, пригодной для наблюдения зеемановского расщепления сверхтонких уровней и частот сверхтонких переходов. Слегка усложнив аппаратуру, можно провести несколько других интересных экспериментов, некоторые из которых будут упомянуты в дальнейшем.

Кроме зеемановских резонансных частот и резонансных частот сверхтонкой структуры для ограниченного числа атомов, допускающих оптическую накачку, можно наблюдать резонансы и для других атомов и свободных электронов, если применить метод «вторичной» оптической накачки [9, 19—21]. Если в парах щелочного элемента, который подвергся оптической накачке, имеется примесь атомов некоторых посторонних элементов, то они будут приобретать некоторую ориентацию из-за столкновений с ориентированными щелочными атомами, при которых происходит обмен спинами. При резонансе ориентация посторонних атомов будет нарушена. Ее восстановление будет происходить при последующих столкновениях с атомами щелочных металлов, пока система не придет в положение равновесия. В этот интервал времени, пока равновесие не достигнуто, наблюдается уменьшенная прозрачность щелочных паров к резонансному излучению. Таким образом, щелочная система не только ориентирует атомы посторонних элементов, но и позволяет осуществить наблюдение за нарушением их ориентации при подаче высокочастотного резонансного сигнала.

В щелочную систему вместо посторонних атомов можно ввести свободные электроны и определить резонансную частоту  $\nu_S$  их переходов с переворотом спина и далее с помощью соотношения

$$g_S = h\nu_S / \mu_0 H$$
 найти гиромагнитное отношение  $g_S$ . В формуле  $\mu_0$  — магнетон Бора,

$H$  — приложенное магнитное поле. Так как  $H$  трудно определить с нужной точностью, то  $\nu_S$  можно сравнить с частотой зеемановского резонанса в щелочи, чередуя наблюдения этих двух резонансных сигналов при одном и том же поле. Таким



Рис. 6.

образом,  $g_S$  определяется в единицах  $g$ -фактора для щелочного атома, величина которого может быть вычислена с хорошей точностью, что позволяет найти значение  $g_S$  [9]. Свободные электроны можно легко получить, подавая импульсы напряжения длительностью в несколько миллисекунд и модулированные частотой в несколько мегагерц на настроенную резонансную катушку, которая располагается на выступающем горлышке резонансной колбы. Еще проще подать импульсы на электрод, впаянный в стенку колбы. В кратковременном разряде, который создается в буферном газе, образуется много



свободных электронов. Для наблюдения электронного резонанса надо так синхронизовать импульсы, создающие ионизацию, с частотой качающегося магнитного поля, чтобы промежуток времени между этими импульсами и моментами времени, когда поле принимает значения, соответствующие электронному резонансу, составлял по меньшей мере несколько миллисекунд. При этих условиях система из атомов щелочных элементов и электронов придет в равновесие и будет наблюдаться слабый сигнал электронного резонанса (который приблизительно в 10—100 раз меньше, чем сигнал от резонанса для щелочных атомов). Такой резонанс показан на рис. 6. Отрицательные пики большой амплитуды вызваны ионизирующими импульсами, длительность которых 3 мсек, а частота следования 60 гц. Наклон линии, на которую накладывается сигнал электронного резонанса, вызван медленным увеличением прозрачности газа при накачке, следующей за ионизационным импульсом, который приводит к нарушению ориентации спинов. С помощью этого метода, используя весьма грубую установку, можно получить три значащие цифры в отношении  $g$ -факторов.

Приложив некоторые усилия, можно добиться и большей точности измерений.

В настоящее время появились работы [22], в которых описываются дальнейшее развитие и применения метода оптической накачки. Нам хотелось бы еще раз отметить простоту основных положений теории метода и применяемой аппаратуры и то, что эта техника позволяет провести демонстрации основных концепций квантования момента количества движения, векторного сложения моментов количества движения и соответствующих магнитных моментов в применении к атомным структурам. Эти демонстрации становятся особенно убедительными, если аппаратура позволяет проводить наблюдения спина свободного электрона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M. Arditi, T. R. Carver, Phys. Rev. **109**, 1012 (1958); **112**, 449 (1958).
2. E. C. Beatty, P. L. Bender, A. R. Chi, Phys. Rev. **112**, 450 (1958).
3. P. L. Bender, E. C. Beatty, Phys. Rev. Letters **1**, 311 (1958).
4. L. W. Anderson, F. M. Pipkin, J. C. Baird, Phys. Rev. **116**, 87 (1959); Phys. Rev. Letters **4**, 69 (1960).
5. M. Arditi, J. phys. radium **19**, 873 (1958).
6. H. Margeneau, P. Fontana, J. Klein, Phys. Rev. **115**, 87 (1959).
7. W. E. Bell, A. L. Bloom, Phys. Rev. **107**, 1559 (1957).
8. P. Franken, F. D. Colgrove, Proceedings of the Ann Arbor Conference on Optical Pumping (University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1959), p. 119.
9. H. G. Dehmelt, Phys. Rev. **109**, 381 (1958).
10. W. Franzen, A. G. Emslie, Phys. Rev. **108**, 1453 (1957).
11. R. H. Dicke, Phys. Rev. **89**, 472 (1953).
12. F. Hartman, M. Rambosson, J. Brossel, A. Kastler, Compt. rend. **246**, 1522 (1958).

13. H. G. Robinson, E. S. Ensberg, H. G. Dehmelt, Bull. Amer. Phys. Soc. **3**, 9 (1958).
14. W. Franzen, Phys. Rev. **115**, 850 (1959).
15. W. B. Hawkins, W. R. Bennett, L. Y. Chow, H. Robinson, Bull. Amer. Phys. Soc. **3**, 372 (1958).
16. E. U. Condon, G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press, New York, 1935.
17. H. G. Dehmelt, Phys. Rev. **105**, 1487 (1957).
18. J. Strong, Procedures in Experimental Physics, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1938, Chap. 13.
19. R. Novick, W. W. Holloway, Bull. Amer. Phys. Soc. **3**, 371 (1958).
20. N. Knable, W. W. Holloway, R. Novick, Bull. Amer. Phys. Soc. **4**, 259 (1959).
21. P. Franken, R. Sands, J. Hobart, Phys. Rev. Letters **1**, 52 (1958).
22. Proceedings of the Ann Arbor Conference on Optical Pumping, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1959.

## ПРИЛОЖЕНИЯ К РАБОТАМ 4.4 и 4.5 (библиография оригинальных и обзорных работ и книг)

### ОБЩЕЕ ЗАМЕЧАНИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Приводимая ниже библиография имеет целью облегчить студентам и преподавателям переход от учебной литературы к специальным статьям. Библиография отнюдь не претендует на полноту. Она несколько отличается от библиографии оригинала: исключены некоторые ссылки на труднодоступную литературу и добавлены ссылки на работы, более доступные нашему читателю, в частности, на обзоры, помещенные в журнале «Успехи физических наук». Кроме того, в тех случаях, когда источник переведен на русский язык, в ссылке указан перевод.

Буквой Э обозначены работы, написанные на элементарном уровне, пригодные для использования в общем курсе физики. Буквой П обозначены работы промежуточного уровня, буквой В — работы более высокого уровня, пригодные для выпускников и аспирантов. Звездочкой обозначены работы, особенно рекомендуемые для предварительного знакомства с предметом.

### П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

#### Ядерный магнитный резонанс (ЯМР) и электронный парамагнитный резонанс (ЭПР)

Начало быстрого развития исследований в этой области относится к середине сороковых годов. В 1962 г. было опубликовано более 500 работ по ЯМР и ЭПР, а полное число работ, появившихся за четверть века (1945—1970), огромно.

Первые успешные работы по ЭПР были опубликованы в 1945 и 1946 гг. Е. К. Завойским, а также Каммероу и Холлидеем, а по ЯМР в 1946 г. Парселлом, Паундом и Торреем, а также Блохом, Хансеном и Паккардом. В этих опытах, выполненных с большими образцами вещества, были использованы методы, разработанные ранее для опытов с молекулярными и атомными пучками. Резонансным работам предшествовали также нерезонансные измерения поглощения и исследования переходных релаксационных явлений в парамагнитных образцах.

#### Первые работы

- 1(П). E. M. Purcell, H. C. Torrey and R. V. Pound, «Resonance Absorption by Nuclear Magnetic Moments in a Solid», Phys. Rev. **69**, 37 (1946). F. Bloch, W. W. Hansen and M. Packard, «Nuclear Induction», Phys. Rev. **69**, 127 (1946).

Краткое описание первых успешных опытов по ЯМР.

- \*2(Э). F. Bloch, «The Principle of Nuclear Induction», Science **118**, 425 (1953). E. M. Purcell, «Research in Nuclear Magnetism», Science **118**, 431 (1953).

Нобелевские лекции о ранних работах по ЯМР и его применениям.

- 3(П). К. Г ор т е р, «Парамагнитная релаксация», перев. с англ., ИЛ, 1949.  
Обзор ранних работ голландских исследователей по нерезонансному поглощению и парамагнитной релаксации.
- 4(П). Е. З а в о й с к и й, «Спиновый магнитный резонанс в области дециметровых волн», J. Phys. USSR **10**, 197 (1946). R. L. С u m m е r о w, D. H a l l i d a y, «Paramagnetic Losses in Two Manganous Salts», Phys. Rev. **70**, 433 (1946). D. M. S. B a g g u l e y, J. H. E. G r i f f i t s, «Paramagnetic Resonance and Magnetic Energy Levels in Chrom Alum», Nature **160**, 532 (1947).
- Первые сообщения о микроволновых наблюдениях ЭПР.
- 5(В). Н. Р а м з е й, «Молекулярные пучки», перев. с англ., ИЛ, 1960, Ф. Б л о х, «Ядерный магнетизм», УФН **56**, 3, 427 (1955).
- Рассмотрены нерезонансные и резонансные измерения с пучками и теория.

### Вводные работы

- \*6(Э). Е. М. P u r c e l l, «Nuclear Magnetism», Amer. J. Phys. **22**, 1 (1954).  
Элементарное и весьма ясное обсуждение явлений ЯМР.
- \*7(Э). G. E. P a k e, «Magnetic Resonance», Sci. Amer. **199**, № 2, 58 (Aug. 1958).  
Элементарное введение в ЯМР.
- \*8(В). G. E. P a k e, «Fundamentals of NMR Absorption», Amer. J. Phys. **18**, 438 (1950); **18**, 473 (1950).  
Краткое введение в ЯМР.
- \*9(В). G. E. P a k e, «Nuclear Magnetic Resonance», In Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press Inc., New York, 1956), Suppl. 2.  
Превосходное общее введение в ЯМР.
- \*10(Э). E. L. H a h n, «Free Nuclear Induction», Phys. Today **6**, 4 (Nov. 1953).  
Спиновое эхо, изложение на элементарном уровне.
- 11(В). С. K i k u c h i and R. D. S p e n c e, «Microwave Methods in Physics», Amer. J. Phys. **18**, 167 (1950).  
Краткое введение в ЭПР.
- 12(В). В. B l e a n e y and K. W. S t e v e n s, «Paramagnetic Resonance», Rept. Progr. Phys. **16**, 108 (1953).  
Введение в теорию и методы ЭПР, применение к изучению редкоземельных элементов и ионов группы железа.
- 13(В). В. С. Г р е ч и ш к и н и Н. Е. А й н б е н д е р, «Ядерный спиновый резонанс», УФН, **80**, вып. 4, 597 (1963).
- \*14(П). D. I. V o l e f, «Acoustic Techniques in Magnetic Resonance», Science **136**, 359 (1962).  
Обзор применений акустики к изучению магнитного резонанса.
- 15(В). А. А л ь т ш у л л е р и Б. М. К о з ы р е в, «Электронный парамагнитный резонанс», УФН **63**, вып. 3, 532 (1957).

### Монографии

- 16(П). С. В. В о н с о в с к и й, «Магнетизм», «Наука», 1971.
- \*17(Э). Я. Г. Д о р ф м а н, «Магнитные свойства и строение вещества», Гостехиздат, 1955.
- 18(П). Э. Р. Э н д р ю, «Ядерный магнитный резонанс», перев. с англ., ИЛ, 1957.
- \*19(П). Н. Р а м з е й, «Моменты и статистика ядер», III глава из книги Э. С е г р е, «Экспериментальная ядерная физика», т. 1, Москва, ИЛ, 1955.

- 20(П). В. Горди, «Радиоспектроскопия», перев. с англ., Гостехиздат, 1955.
- \*21(П). Д. Инграм, «Спектроскопия на высоких и сверхвысоких частотах», перев. с англ., ИЛ, 1959.
- 22(В). А. Альтшуллер и Б. М. Козырев, «Электронный парамагнитный резонанс», Физматгиз, 1961.
- 23(В). Д. Инграм, «Электронный парамагнитный резонанс в свободных радикалах», перев. с англ. ИЛ, 1961.

В обеих книгах рассмотрены практические аспекты экспериментальных методов.

- 24(В). А. Абрагам, «Ядерный магнетизм», перев. с англ., ИЛ, 1963.  
Наиболее полное изложение ЯМР.
- 25(П). Д. Робертс, «Ядерный магнитный резонанс», перев. с англ., ИЛ, 1961.
- 26(В). У. Лоу, «Парамагнитный резонанс», ИЛ, 1962.
- 27(Э). Чарлз Пул, «Техника ЭПР спектроскопии», перев. с англ., «Мир», 1970, 557 стр.

Книга может служить пособием для читателей, которые приступают к экспериментам с ЭПР и не имеют специальной подготовки в области физической и схемной электроники.

- 28(В). «Парамагнитный резонанс 1944—1969», «Наука», 1971, Тр. Всесоюзной конференции, посвященной 25-летию открытия ЭПР Е. К. Завойским.

Книга отражает современное состояние проблемы и состоит из докладов, часть которых имеет обзорный характер.

- \*29(В). Д. Э. Пейк, «Парамагнитный резонанс», перев. с англ., «Мир», 1965,

#### Теория и специальные проблемы

- 30(В). F. Bloch, «Nuclear Induction», Phys. Rev. **70**, 460 (1946).  
Вывод феноменологических уравнений движения для вектора намагниченности.
- 31(В). N. Bloembergen, E. M. Purcell and R. V. Pound, «Relaxation Effects in Nuclear Magnetic Resonance Absorption», Phys. Rev. **73**, 679 (1948).  
Влияние теплового движения на ширину резонансных линий и время релаксации.
- 32(В). D. Pines and C. P. Slichter, «Relaxation Times in Magnetic Resonance», Phys. Rev. **100**, 1014 (1955).  
Применение простых моделей случайного блуждания к вопросам ширины линии и времени релаксации.
- 33(В). Supplement to Vol. VI, Series X of Nuovo Cimento, P, 808ff (1957).  
Лекции, читанные в Варенне на конференции по магнетизму, в том числе теории ЭПР и ЯМР и ядерного магнетизма в твердых телах и жидкостях.
- 34(В). E. L. Hahn, «Spin Echoes», Phys. Rev. **80**, 580 (1950). H. Y. Carr and E. M. Purcell, «Effects of Diffusion on Free Precession in NMR Experiments», Phys. Rev. **94**, 630 (1954).

Наглядные схемы образования спинового эха и улучшенные методы измерения коэффициентов диффузии.

- \*35(П). E. M. Purcell and R. V. Pound, «A Nuclear Spin System at Negative Temperature», Phys. Rev. **81**, 279 (1951).

Классические опыты, демонстрирующие отрицательную спиновую температуру.

- 36(В). A. Abragam and W. G. Proctor, «Spin Temperature», Phys. Rev. **109**, 1441 (1958).

Обсуждение спиновой температуры и «спиновых калориметрических» опытов при отрицательных температурах.

- 37(B). L. C. Hebel, Jr., «Spin Temperature and Nuclear Relaxation in Solids», In Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press Inc., New York, 1963), Vol. 15, pp. 409—502.

Детальный обзор исследований по спиновой температуре.

- 38(П). G. Feher, «Electron Nuclear Double Resonance (ENDOR) Experiments», Physica 24, 580 (1958).

Элементарный обзор методов ENDOR.

- 39(B). J. C. Raich and R. H. Good, «Discussion of Quadrupole Precession», Amer. J. Phys. 31, 356 (1963).

Классическое и квантовомеханическое рассмотрение квадрупольных явлений.

- 40(B). J. Rothstein, «Nuclear Spin Echo Experiments and the Foundations of Statistical Mechanics», Amer. J. Phys. 25, 510 (1957).

Рассмотрение спинового эха и необратимости.

## Применения

### А. В ядерной физике

- 41(П). F. Bloch, A. C. Graves, M. E. Packard and R. W. Spence, «Spin and Magnetic Moment of Tritium», Phys. Rev. 71, 373—551 (1947).  
T. Coffin, R. L. Garwin, S. Penman, L. M. Lederman and A. M. Sachs, «Magnetic Moment of the Free Muon», Phys. Rev. 109, 973 (1958).

Определение момента мюона методом магнитного резонанса. См. также А. О. Вайсенберг, «Мюон», «Наука», 1964.

- 42(П). C. D. Jeffries, «Dynamic Nuclear Orientation», In Progress in Cryogenics, edited by K. Mendelssohn (Academic Press, Inc., New York, 1961), Vol. 3, pp. 131—173. R. H. Webb, «Steady State Polarization via Electronic Transitions», Amer. J. Phys. 29, 428 (1961).

Обзор методов динамической ядерной поляризации. Подробная библиография.

### Б. В химической физике

- 43(П). Р. Ричардс, «Ядерный магнитный резонанс», УФН 83, 2, 299—356 (1964).

Обзор применений и возможностей методов ЯМР в химии и химической физике.

- 44(B). H. S. Gutowsky, D. W. McCall and C. P. Slichter, «NMR Multiplets in Liquids», J. Chem. Phys. 21, 279 (1953).

Рассмотрено расщепление спектральных линий от взаимодействия типа  $A_{12}M_{12}$ .

- 45(B). W. A. Anderson, «NMR Spectra of Some Hydrocarbons», Phys. Rev. 102, 151 (1956).

Первые примеры связи сигналов ЯМР высокого разрешения со строением молекул.

- 46(B). J. G. Powles, «Nuclear Magnetism in Pure Liquids», Rept. Progr. Phys. 22, 433 (1959).

Обзор спин-спиновых взаимодействий в жидкостях.

### В. В физике твердого тела

- 47(B). «Электронный парамагнитный резонанс в твердых телах». сб. статей, ИЛ, 1962.

- 48(П). С. В. Вонсовский, «Магнетизм и электропроводность металлов», УФН 76, 3, 467—497 (1962).

Обзор теории магнитных и электрических свойств металлов.

49(В). П. Ф. Щеголев, «Изучение электронной структуры металлов с помощью ЯМР», УФН 72, 2, 267—290 (1962).

Обзор работ по чистым металлам.

50(В). Л. Д. Богомолова, В. Н. Лазуркин, П. В. Чепелева, «Электронный парамагнитный резонанс в кремнии и германии», УФН 83, 3, 433—502 (1964).

Подробный обзор работ до 1963 г.

51(В). Г. Е. Раке, «Nuclear Resonance Absorption in Hydrated Crystals: Fine Structure of the Proton Line», J. Chem. Phys. 16, 327 (1948).

Простые примеры дипольных взаимодействий в твердых телах.

52(В). R. T. Shumacher, T. R. Carver and C. P. Slichter, «Measurement of the Spin Paramagnetism of Conduction Electrons», Phys. Rev. 95, 1089 (1954).

Красное измерение электронной спиновой восприимчивости совместно с опытами в ЭПР и ЯМР.

53(В). W. D. Knight, «Electron Paramagnetism and NMR in Metals», In Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press Inc., New York, 1956), Vol. 2, pp. 93—136.

54(В). D. W. McCall and R. W. Hamming, «Nuclear Magnetic Resonance in Crystals», Acta Cryst. 12, 81 (1959).

Анализ строения кристаллов в ЯМР.

55(П). G. Feher and A. F. Kip, «Electron Spin Resonance Absorption in Metals. I. Experimentals», Phys. Rev. 98, 337 (1955).

ЭПР в различных металлах между 4°K и комнатной температурой.

56(В). D. M. S. Baggeley and J. Owen, «Microwave Properties of Solids», Rept. Progr. in Phys. 20, 304 (1957).

Обзор применений метода ЭПР к изучению металлов и ферромагнетиков.

57(А). G. Vemskii, «Studies of the Electronic Structure of Covalent Semiconductors by EPR», Amer. J. Phys. 30, 902 (1962).

Обзор роли ЭПР в изучении неоднородностей в кремнии и электронов проводимости в InSb.

58(В). G. W. Ludwig and H. H. Woodbury, «Electron Spin Resonance in Semiconductors», In Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press Inc., New York, 1962), Vol. 13, pp. 223—304.

- Обзор, содержащий большое количество данных.

59(В). H. S. Jarrett, «Electron Spin Resonance Spectroscopy in Molecular Solids», In Solid State Physics, edited by F. Seitz and D. Turnbull (Academic Press Inc., New York, 1963), Vol. 14, pp. 215—341.

60(В). G. A. Wootton, «Relaxation in Diluted Paramagnetic Salts at Very Low Temperatures», Adv. Electron. Electron Phys. 15, 163 (1961).

Краткий обзор спиновой релаксации парамагнитных ионов в парамагнитных солях.

### Г. Физика низких температур

61(П). W. M. Fairbank, W. B. Ard and G. K. Walters, «Fermi Degeneracy in Liquid He<sup>3</sup> Below 1°K» Phys. Rev. 95, 566 (1954).

Измерения ЯМР и ядерной спиновой восприимчивости в жидком He<sup>3</sup>.

62(В). L. C. Hebel and C. P. Slichter, «Nuclear Spin Relaxation in Normal and Superconducting Aluminum», Phys. Rev. 113, 1504 (1959).

Ранние подтверждения теории Бардина — Купера — Шриффера методом ЯМР.

## Д. Геофизика, археология

- 63(Э). L. J. Cahill and J. A. Van Allen, «High Altitude Measurements of the Earth's Magnetic Field with a Proton Precession Magnetometer», J. Geophys. Res. **61**, 547 (1956).
- 64(П). G. S. Waters and P. D. Francis, «A Nuclear Magnetometer», J. Sci. Instr. **35**, 88 (1958).

Подробное описание ядерного магнитометра на транзисторах.

- 65(Э). M. J. Aitken, «Physics and Archaeology» (Interscience Publishers, Inc., New York, 1961).

В 3 и 4 главах рассмотрено использование протонных магнитометров в археологических поисках.

- 66(П). А. Н. Козлов, «Цезиевый магнитометр», сб. «Геофизическая аппаратура», «Наука», вып. 25, 1965.
- 67(П). Н. М. Померанцев, В. М. Рыжков, Г. В. Скродский, «Квантовая магнитометрия», сб. «Геофизическая аппаратура», «Наука», выпуски 33 и 34, 1967.
- 68(Э). Л. Л. Мясников, «Квантовая электроника на судах», «Судостроение», 1966.
- 69(Э). В. Б. Кудрявцев, А. П. Тищенко, Н. М. Тищенко, «Прецизионные преобразователи электрических сигналов и угловых перемещений на принципах квантовой магнитометрии», «Энергия», б-ка по автоматике, 1971.

## Е. Биофизика

- 70(П). В. Commoner et al., «Biological Activity of Free Radicals», Science **126**, 57 (1957).

Исследование роли свободных радикалов в биологических процессах с помощью ЭПР.

## Демонстрации и опыты

Магнитный резонанс принадлежит к явлениям, которые легко показать на лекции и в учебной лаборатории.

Приведенная ниже литература описывает различные модели резонансных явлений, простую аппаратуру и ряд доступных образцов и опытов. Ссылки, посвященные генераторам, отобраны из большого числа опубликованных работ. Много работ о различного рода резонансных детекторах, источниках питания магнитов и регуляторах тока опубликовано в American Journal of Physics.

Мостовые схемы и генераторы рассмотрены также в книге Эндрю (см. 18(П)). Наиболее простая демонстрация резонанса приведена в работе Блюма (80(Э)).

- 71(Э). R. A. Fowler and H. S. Story, «Mechanical Analog of Magnetic Resonance», Amer. J. Phys. **29**, 709 (1961).

Для демонстрации резонансных переходов использован маятник Максвелла.

- 72(Э). J. P. Heller, «An Unmixing Demonstration», Amer. J. Phys. **28**, 348 (1960).

Описан опыт с обратным током жидкости, который может быть использован в качестве аналога при обсуждении возникновения и затухания спинового эха.

- 73(Э). J. J. Hill, «A Magnetic Resonance Demonstration Model», Amer. J. Phys. **31**, 446 (1963).

Двумерная модель, в которой использован полосовой магнит в соединении с маятником кручения и магнитными полями постоянного и переменного токов.

- 74(Э). R. G. Marley, «Nuclear Magnetic Resonance Absorption Apparatus», Amer. J. Phys. **29**, 451 (1961).

Описан простой детектор на одной лампе.



75(Э). R. G. Marcleу, «Apparatus for EPR at Low Fields», Amer. J. Phys. **29**, 492 (1961).

Генератор для ЭПР на 300 Мгц.

76(П). A. B. Grossberg, «Simple EPR Experiments at Low Magnetic Fields», Amer. J. Phys. **30**, 927 (1962).

Описаны опыты, в которых использован генератор из предыдущей работы.

77(П). J. A. Cowen and W. H. Tantilla, «Versatile Magnetic Resonance Spectrometer», Amer. J. Phys. **27**, 566 (1959).

Простой генератор и различные опыты для студенческой лаборатории.

78 (П). E. S. Gravlin and J. A. Cowen, «Simple Microwave Resonance Spectrometer», Amer. J. Phys. **27**, 566 (1959).

Недорогая аппаратура для работ с ЭПР.

79(П). R. C. LaForse, «Spectrometer for the Frequency Range 100 to 300 Mc», Rev. Sci. Instr. **32**, 1387 (1961).

Генератор для демонстрации ЯМР на  $Co^{59}$  в ферромагнитном кобальте.

80(Э). R. J. Blume, «Demonstration of Nuclear Magnetic Resonance in Cobalt with a 'Grid Dip' Meter», Amer. J. Phys. **31**, 58 (1962).

Исключительно простая демонстрация ЯМР.

81(П). F. N. H. Robinson, «Nuclear Resonance Absorption Circuit», J. Sci. Instr. **36**, 481 (1959).

Конструкция и анализ простой и чувствительной аппаратуры ЯМР.

82(П). C. H. Dutcher, Jr., and T. A. Scott, «Frequency Modulated, Low Level, rf Spectrometer for Nuclear Resonance», Rev. Sci. Instr. **32**, 457 (1961).

Спектрометр для изучения квадрупольного резонанса.

83(П). K. E. Weber and J. E. Todd, «Single Tube Nuclear Quadrupole Spectrometer for Chlorine and Nitrogen», Rev. Sci. Instr. **33**, 390 (1962).

Супер-регенеративный детектор с разверткой частоты, пригодный для наблюдения ядерного квадрупольного резонанса на ядрах  $Cl^{35}$  и  $Cl^{37}$  в радиоактивном дихлорбензоле.

84(П). R. V. Pound and W. D. Knight, «A Radiofrequency Spectrograph and Simple Magnetic-Field Meter», Rev. Sci. Instr. **21**, 219 (1950).

Первое применение автоматического контроля уровня высокочастотных колебаний самовозбуждающегося генератора для изучения ЯМР.

85(П). K. N. Karig and J. W. McGrath, «Wide rf Level rf Unit for an NMR Spectrometer», Rev. Sci. Instr. **30**, 272 (1959).

Описан Q-метр с хорошей частотной стабильностью и его применение к изучению спин-решеточной релаксации.

86(П). I. J. Lowe and D. E. Barnal, «Radio-Frequency Bridge for Pulsed Nuclear Magnetic Resonance», Rev. Sci. Instr. **34**, 143 (1963).

Симметричный мост для импульсных измерений ЯМР в образцах с малыми временами релаксации.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### Мазеры (микроволновые и оптические) и оптическая накачка

Мазером называется устройство, состоящее из вещества, обладающего тем свойством, что из двух уровней энергии тот, у которого энергия выше, имеет большую заселенность. Это вещество помещено в соответствующий резонатор с большим значением добротности  $Q$ . Такая система является генератором когерентного излучения на частоте, общей для разности энергии обоих уровней и частоты резонатора. Слово *maser* является сокращением названия такого прибора: «Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation».

По мере расширения области частот, на которых работают мазеры, было предложено заменить слово Microwave словом Molecular. Слово лазер и оптический мазер являются синонимами. L означает Light в качестве первого слова написанной выше английской фразе.

Область оптических мазеров быстро развивается, и в настоящее время имеется огромная литература научного и технологического характера. Цель нашей библиографии обратить внимание, главным образом, на работы, касающиеся основных физических идей, а не на технологические подробности или применения.

Изучение на любом уровне всех этих работ требует понимания основ квантовой теории и вообще современной физики.

#### Физические основы

- 1(П). В. Гейтлер, «Квантовая теория излучения», перев. с англ., ИЛ, 1956.  
2(П). Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, «Теория поля», «Наука», 1960.  
\*3(В). Е. Кондон и Г. Шортли, «Теория атомных спектров», перев. с англ., ИЛ, 1949.

Классическая книга по атомным спектрам.

- \*4(В). А. Митчел и М. Земанский, «Резонансное излучение и возбужденные атомы», перев. с англ., ОНТИ, 1937.

Книга в целом окажет большую помощь всем интересующимся проблемами оптических мазеров и оптической накачки.

- 5(В). Прингсхейм, «Флуоресценция и фосфоресценция», перев. с англ., ИЛ, 1951.

Книга содержит большое число экспериментальных данных. Часть книги может быть использована на промежуточном уровне изучения.

- 6(В). Д. Слэтер, «Электронная структура молекул», перев. с англ., «Мир», 1965.

- 7(В). Д. Слэтер, «Диэлектрики, полупроводники металлов», перев. с англ., «Мир», 1969.

- 8(В). К. Гортер, «Радиоспектроскопия», УФН 53, 4, 546 (1955).

Обзор полученных до 1953 г. результатов.

- \*9(П). Г. Таунс и А. Шавлов, «Радиоспектроскопия», ИЛ, 1959.

Подробное изложение микроволновой спектроскопии газов. Рассмотрены проблемы атомных стандартов частоты и мазеров на молекулярных пучках.

- \*10(В). Г. Копферман, «Ядерные моменты», ИЛ, 1960.

Введению в теорию оптической накачки предшествует ясное рассмотрение оптических и радиочастотных методов. Раздел 24 книги посвящен двойному резонансу.

- \*11(П). Н. Рамзей, «Молекулярные пучки», перев. с англ., ИЛ, 1960.

Эта книга, подобно предыдущей, является хорошим источником для тех, кто интересуется оптической накачкой с мазерами на атомных пучках.

- \*12(П). Д. Э. Пейк, «Парамагнитный резонанс», перев. с англ., «Мир», 1965.

В главе 3 рассмотрены поля в кристаллах и эффективный спиновый гамильтониан. Эта тема имеет непосредственное отношение к микроволновым твердотельным мазерам.

#### Работы, связанные с историей проблемы

Для физики мазер является прибором, в котором практически использованы давно известные фундаментальные физические законы.

Реализация потенциальных возможностей, скрытых в этих законах, явилась делом нескольких последних десятилетий. Прежде всего было показано, что обратная заселенность уровней в некотором веществе, обеспечивающая стимулированное излучение, совместно с соответствующей полостью может образовать молекулярный генератор. В последние 10—15 лет было открыто множество разнообразных рабочих систем (вещество и резонаторы).

Теория оптической накачки делится на две большие области. Первая область — это оптическое резонансное излучение, рассмотренное в работе 4(В). Вторая область связана с магнитным резонансом, особенно с молекулярными пучками, см. ссылки 10(В) и 11(П). Приведенные ссылки не претендуют на полноту.

13(П). A. Einstein, «Zur Quanten Theorie der Strahlung», Physik Zs. 18, 121 (1917).

14(В). R. Ladenburg and H. Koppfermann, «Untersuch über die Anomale Dispersion Angeregter Case», Zs. Physik 48, 15, 26, 51 (1928).

Экспериментально показано существование отрицательного дисперсионного эффекта, вызванного стимулированным излучением. См. также R. Ladenburg, Dispersion in Electrically Excited Gases, Rev. Mod. Phys. 5, 243 (1933).

15(В). F. Bitter, «The Optical Detection of Radio Frequency Resonance», Phys. Rev. 76, 833 (1949).

Первое указание на то, что радиочастотные переходы можно наблюдать оптическими методами. Ожидаемый эффект очень мал. См. также M. H. L. Prowse, Phys. Rev. 77, 136 (1950).

16(В). J. Brossel and A. Kastler, «La Detection de la Resonance Magnétique des Niveaux Excité: L'Effet de Depolarisation des Radiations de Resonance Optique et de Fluorescence», Comp. Rend. 229, 1213 (1949).

Предложение использовать метод двойного резонанса для наблюдения радиочастотных переходов в возбужденных состояниях.

17(В). A. Kastler, «Quelques Suggestions Concernant la Production Optique et la Detection Optique D'une Inegalite de Population des Niveaux de Quantification Spatiale des Atomes. Application a l'Experience de Stern et Gerlach et la Resonance Magnetique», J. Phys. Radium 11, 255 (1950).

Предложен метод оптической накачки.

18(В). W. E. Lamb, Jr., and R. C. Retherford, «Fine Structure of the Hydrogen Atom. Part I», Phys. Rev. 79, 549 (1950). См. русский перевод: УФН 45, 553 (1951).

В приложении к этой статье содержится указание на возможность получения обратной заселенности и отрицательного поглощения методом газового разряда.

19(П). J. Weber, «Amplification of Microwave Radiation by Substances not in Thermal Equilibrium», Transactions of IRE, PG on Electron Devices, 3, 1 (1953).

Рассмотрена возможность усиления микроволн в средах с обращенной заселенностью.

\*20(П). J. P. Gordon, H. J. Zeiger and C. H. Townes, «Molecular Microwave Oscillator and New Hyperfine Structure in the Microwave Spectrum of  $\text{NH}_3$ », Phys. Rev. 95, 282L (1954).

Микроволновый мазер с молекулярным пучком. Это первый работающий мазер и первое устройство, в котором используется и стимулированная эмиссия, и радиатор для получения когерентного излучения из некогерентно возбужденных молекул.

21(П). Н. Г. Басов и А. М. Прохоров, «Возможный метод получения активных молекул для молекулярных генераторов», ЖЭТФ 28, 249 (1955).

Изложена идея мазера с тремя уровнями на молекулярном пучке.

\*22(В). N. Bloembergen, «Proposal for a New Type Solid State Maser», Phys. Rev. 104, 324 (1956).

В этой краткой заметке о трехуровневом микроволновом мазере в парамагнитном твердом теле изложена основа теории микроволновых твердотельных мазеров.

- \*23(В). A. L. Schawlow and C. H. Townes, «Infrared and Optical Masers», Phys. Rev. 112, 1940 (1958).

Показано, что при использовании отражателей в виде параллельных пластин в качестве полости и накачки с помощью некогерентного света можно создать оптические мазеры в газах и твердых телах.

- 24(П). A. Javan, «Possibility of Negative Temperature in Gas Discharges», Phys. Rev. Letters 3, 87 (1959).

Рассмотрена возможность получения обращенной заселенности в газовом разряде.

- \*25(П). Т. Н. Маман, «Stimulated Optical Radiation in Ruby», Nature 187, 493 (1960).

Сообщение об уменьшении времени жизни и сужении ширины линии, указывающих на стимулированное оптическое излучение в кристалле рубина.

- \*26(П). R. J. Collins, D. F. Nelson, A. L. Schawlow, W. Bond, C. G. B. Garrett and W. Kaiser, «Coherence Narrowing, Directionality and Relaxation Oscillations in the Light Emission from Ruby», Phys. Rev. Letters 5, 303 (1960).

Исследована пространственная когерентность и направленность излучения на выходе прибора.

- \*27(П). A. Javan, W. R. Bennett and D. R. Herriott, «Population Inversion and Conditions Optical Maser Oscillations in a Gas Discharge Containing a He — Ne Mixture», Phys. Rev. Letters 6, 106 (1961).

Оптический мазер для длины волны 1,15 мкм.

- \*28(В). A. G. Fox, Tingye Li, «Resonant Modes in a Maser Interferometer», Bell Syst. Tech. J. 40, 453 (1961).

Определены нормальные моды распределения электрического поля на зеркалах интерферометра Фабри — Перо и дифракционные потери нормальных мод. Работа является большим достижением в понимании резонансных мод в полости оптического мазера.

- 29(В). M. I. Nathan, W. P. Dumke, G. Burns, G. H. Dill, Jr., and G. Lasher, «Stimulated Emission of Radiation from GaAs p — n Junctions», Appl. Phys. Letters 1, 62 (1962). R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys and R. O. Carlson, «Coherent Light Emission from GaAs Junctions», Phys. Rev. Letters 9, 366 (1962). T. M. Quist, R. H. Rediker, R. J. Keyes, W. E. Krug, B. Lax, A. L. McWhorter and H. J. Zeiger, «Semiconductor Maser of GaAs», Appl. Phys. Letters 1, 91 (1962).

Действие оптического мазера, основанного на линии испускания полупроводникового перехода.

## Книги, сборники статей

- 30(П). Д. Р. Зингер, «Мазеры», перев. с англ., ИЛ, 1961.

Введение в микроволновые мазеры.

- 31(П). А. Шавлов, «Оптические инфракрасные лазеры», УФН 84, 303 (1964).

- 32(В). А. Вейлстеке, «Основы теории квантовых усилителей и генераторов», перев. с англ., ИЛ, 1963.

Около половины книги посвящено изложению тех разделов квантовой механики и статистической физики, которые используются в теории мазеров.

- 33(Э). Б. Ландьел, «Лазеры», перев. с англ., «Мир», 1964.

Книга вводного характера, обзор полученных до 1962 г. результатов.

- 34(П). Беннетт, «Газовые лазеры». О. Хивенс, «Лазеры на твердых веществах», перев. с англ., «Мир», 1964.

- 35(П). А. В. Елецкий, Б. М. Смирнов, «Газовые лазеры», Атомиздат, 1971.

36(Э). В. Ф а й н, Я. П. Х а н и я, «Квантовая радиофизика», «Советское радио», 1965.

В книге изложена элементарная теория квантовых усилителей и генераторов и дан обзор экспериментальных данных.

37(В). Дж. Б и р н б а у м, «Оптические квантовые генераторы», перев. с англ., «Советское радио», 1967.

Обзор полученных до 1964 г. результатов. Книга снабжена весьма полной библиографией.

38(Э). Е. Ф. И щ е н к о, Ю. М. К л и м к о в, «Оптические квантовые генераторы», «Советское радио», 1968.

Книга написана для широкого круга читателей без специальной подготовки.

39(В). «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», перев. с англ. и франц., «Мир», 1966.

Лекции в летней школе теоретической физики Гренобльского университета, прочитанные в 1964 г.

40(В). «Лазеры», сб. статей, ИЛ, 1963. «Оптические квантовые генераторы», сб. статей, «Мир», 1966. «Газовые лазеры», сб. статей, «Мир», 1968. «Оптические лазеры», сб. статей, изд. Казанского ун-та, 1964.

В этих четырех сборниках переводных статей собрана обширная обзорная и оригинальная литература по квантовой радиофизике оптического диапазона.

41(В). «Квантовая электроника», сб. статей под ред. Н. Г. Басова, «Советское радио», 1971, №№ 1, 2 и 3.

42(П). Г. Х и р д, «Измерения лазерных параметров (экспериментальные методы оптической квантовой электроники)», перев. с англ., «Мир», 1970.

Практическое экспериментальное руководство по методам измерения характеристик оптических квантовых генераторов всех типов.

43(В). Ф. Б е р т е н, «Основы квантовой электроники», том 2, перев. с франц., «Мир» 1971.

Этот том посвящен теории квантовой электроники, понимаемой в широком смысле. В нем рассмотрены ядерный и парамагнитный резонанс, резонансное рассеяние света, оптическая накачка атомов, теория ширины линий, лазеры, теория шумов.

44(В). А. Л. М и к а э л я н, М. Л. Т е р - М и к а э л я н, Ю. Г. Т у р к о в, «Оптические квантовые генераторы на твердом теле», «Советское радио», 1967.

45(В). Л. А л л е н и С. Д ж о н с, «Основы физики газовых лазеров», перев. с англ., «Наука», 1970.

46(П). «Квантовая электроника — маленькая энциклопедия», под ред. С. А. Ахманова, М. Е. Жаботинского, Д. Н. Клышко, А. Н. Ораевского, А. В. Францессона, С. М. Шапиро, «Советская энциклопедия», 1969.

Третья часть книги отведена пяти обзорам (квантовая электроника, квантовые стандарты частоты и времени, квантовые усилители СВЧ, лазеры, нелинейная оптика). Остальная часть книги содержит 260 кратких статей справочного характера.

47(Э). В. А. Д ь я к о в, «Введение в квантовую электронику», «Энергия», 1969.

48(П). А. L. S c h a w l o w, W. H. F r e e m a n, «Laser and Light», San. Francisco, 1969.

В этой книге собраны все статьи по квантовой оптике, опубликованные за последние годы в журнале «Scientific American».

## Обзоры

49(Э). А. Л. Б л ю м, «Оптическая накачка». А. Ш а в л о в, «Успехи в создании оптических мазеров», сб. «Над чем думают физики», вып. 5, перев. с англ.

Элементарное введение в предмет.

50(П). А. Ш а в л о в «Современные оптические квантовые генераторы», перев. с англ., УФН 81, 4, 745 (1963).

Популярный обзор экспериментальных результатов.

51(В). Г. В. С к р о ц к и й и Т. Г. И з ю м о в а, «Оптическая ориентация атомов и ее применение», УФН 73, 423 (1961).

Обзор данных, полученных до 1960 г.

52(П). В. Р. Б е н н е т, «Газовые оптические квантовые генераторы», перев. с англ., УФН 81, 1, 119 (1963).

Обзор работ, выполненных в течение первого года после открытия газовых лазеров.

53(П). О. С. Х и в е н с, «Оптические квантовые генераторы», перев. с англ., УФН 81, 3, 507 (1963).

Краткое описание идей, лежащих в основе оптических мазеров.

54(Э). А. М. П р о х о р о в, «Квантовая электроника», «Природа», № 5, 37 (1965).

55(Э). А. М. П р о х о р о в, «Из истории квантовых генераторов», «Наука и жизнь», № 3, 1965.

Часть нобелевской лекции, прочитанной автором 11 декабря 1964 г. в Стокгольме.

56(Э). Н. Г. Б а с о в, «Полупроводниковые квантовые генераторы», «Природа», № 5, 42 (1965).

\*57(П). А. K a s t l e r, «Optical Methods of Atomic Orientation and of Magnetic Resonance». J. Opt. Soc. Amer. 47, 460 (1957).

Очень ясный обзор явлений двойного резонанса и оптической накачки.

58(П). Г. М. З в е р е в, Н. В. К а р л о в, Л. С. К о р н и е н к о, А. А. М а - н е н к о в, А. М. П р о х о р о в. «Применение парамагнитных кристаллов в квантовой электронике», УФН 77, 1, 61 (1962).

Обзор использования парамагнитных кристаллов в квантовых приборах для радио- и оптической областей спектра.

## Н е л и н е й н ы е о п т и ч е с к и е я в л е н и я

59(В). Р. А. F r a n k e n, А. Е. H i l l, С. W. P e t e r s and G. W e i n r e i c h, «Generation of Optical Harmonics», Phys. Rev. Letters 7, 118 (1961).

Сообщение о генерации оптических гармоник в кварце.

60(В). Р. А. F r a n k e n and J. F. W a r d, «Optical Harmonics and Non-Linear Phenomena», Rev. Mod. Phys. 35, 23 (1963).

Обзор работ, выполненных до 1962 г.

61(В). N. B l o e m b e r g e n, «Wave Propagation in Non-Linear Electromagnetic Media», Proc. IEEE 51, 124 (1963).

Обсуждается вопрос о стимулированном рамановском рассеянии интенсивного света в раман-активных веществах.

62(П). Н. Б л о м б е р г е н, «Нелинейная оптика», «Мир», 1966.

Написанная автором, выполнившим важнейшие исследования по нелинейной оптике, книга отражает состояние проблемы до конца 1964 г.

63(Э). Ю. Л. К л и м о н т о в и ч, «Квантовые генераторы света и нелинейная оптика», «Просвещение», 1966.

## С п е к т р о с к о п и я п е р е к р ы в а ю щ и х с я у р о в н е й

Спектроскопия излучения, возникающего при перекрывании различных уровней энергии под действием магнитного поля, представляет собой точный и относительно простой метод изучения поляризации излучения резонансной флуоресценции. Педагогически это прекрасный пример интерференционных

явлений в квантовой механике. Мы приводим ссылки на соответствующие работы по историческим соображениям: исследователи, занимавшиеся оптической накачкой, сделали первые работы и в этой области, которую можно рассматривать как резонансный метод при нулевой частоте. Следует заметить, что интерференционные явления в нулевых и слабых полях (частный случай перекрывания уровней) были изучены весьма подробно.

- \*64(П). F. D. Colegrove, P. A. Franken, R. R. Lewis and R. H. Sands, «Novel Method of Spectroscopy with Application to Precision Fine Structure Measurements», Phys. Rev. Letters **3**, 420 (1959).

Пересечение уровней в He.

- 65(П). P. A. Franken, «Interference Effects in the Resonance Fluorescence of Crossed Excited Atomic States», Phys. Rev. **121**, 508 (1961).

Описание опыта и его физических основ.

- 66(П). M. F. Rose and R. L. Carovillano, «Coherence Effects in Resonance Fluorescence», Phys. Rev. **122**, 1185 (1961).

Подробное изложение теории.

### Разные работы, применения мазеров

- 67(Э). H. Lyons, «Atomic Clocks», Sci. Amer. **196**, № 2, 71 (Feb. 1957).

Рассмотрены различные стандарты частоты, в том числе мазер. См. также 46 (П), статью о стандартах частоты и времени.

- 68(П). D. Kleppner, H. M. Goldenberg and N. F. Ramsey, «Properties of the Hydrogen Maser», Appl. Opt. **1**, 55 (1962).

Рассмотрены свойства водородного мазера и экспериментальные подробности. Полное теоретическое рассмотрение см. «Theory of the Hydrogen Maser», Phys. Rev. **126**, 603 (1962).

- 69(П). H. E. D. Scovil and E. O. Schulz-DuBois, «Three Level Masers as Heat Engines», Phys. Rev. Letters **2**, 262 (1959).

Мазер с тремя уровнями можно рассматривать как тепловую машину с предельным КПД цикла Карно.

- 70(В). R. P. Feynman, F. L. Vernon and R. W. Hellwarth, «Geometrical Representation of the Schrodinger Equation for Solving Maser Problems», J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).

- \*71(В). T. H. Maïman, «Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids I. Theoretical Considerations», and T. H. Maïman, R. H. Hoskins, I. J. D'Haenens, C. K. Asawa and V. Evtuhov, «Stimulated Optical Emission in Fluorescent Solids II. Spectroscopy and Stimulated Emission», Phys. Rev. **123**, 1145, 1151 (1961).

Пример связи между оптической спектроскопией и оптическими мазерами. В качестве вещества используется рубин.

- 72(В). F. J. McClung and R. W. Hellwarth, «Giant Optical Pulsations from Ruby», J. Appl. Phys. **33**, 828 (1962).

В результате временного ухудшения добротности  $Q$  резонансной полости достигнута очень большая обратная заселенность и соответственно большая выходная мощность оптического мазера.

- 73(П). G. Fioçio and E. Thompson, «Thompson Scattering of Optical Radiation from an Electron Beam», Phys. Rev. Letters **10**, 89 (1963).

Используя доплеровское смещение рассеянного света от лазерного источника, можно измерить распределение атомов или электронов по скорости. В этой работе описано рассеяние света на электронах.

- \*74(П). J. P. Cedarholm, G. F. Bland, B. L. Havens and C. H. Townes, «New Experimental Test of Special Relativity», Phys. Rev. Letter 1, 342 (1958).

С помощью двух микроволновых мазерсв выполнен весьма точный опыт типа опыта Майкельсона — Морлея. Показано, что максимальное значение возможной «скорости относительно эфира» меньше 1/1000 скорости движения Земли по орбите.

- \*75(П). T. S. Jaseja, A. Javan and C. H. Townes, «Frequency Stability of He—Ne Masers and Measurements of Length», Phys. Rev. Letters 10, 165 (1963).

В высокой степени монохроматические и стабильные оптические мазеры дают возможность точных измерений длины и тем самым и наблюдения релятивистских эффектов. См. также T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murgaу and C. H. Townes, Phys. Rev. 133, A1221 (1964).

- 76(П). «Оптические квантовые генераторы. Новейшие исследования и применение оптической квантовой электроники», сб. статей, перев. с англ., под ред. Ф. В. Бункина, «Мир», 1966.
- 77(П). В. В. Григорьянц, М. Е. Жаботинский, В. Ф. Золин, «Квантовые стандарты частоты», «Наука», 1968.
- 78(П). В. Вэли, «Сейсмические измерения с помощью лазера», УФН 103, вып. 1, 127 (1971).
- 79(П). У. Кок, «Лазеры и голография (введение в когерентную оптику)», перев., с англ., «Мир», 1971.

### Опыты и приборы

- \*80(В). L. Robert, DeZafra, «Optical Pumping», Amer. J. Phys. 28, 646 (1960).

Краткий обзор основных идей оптической накачки, за которым следует описание приборов для наблюдения накачки в Rb, пригодных для работ студентов старших курсов или аспирантов.

С весьма простой аппаратурой можно наблюдать оптическую накачку  $He^1$  в  $^3S_1$ -метастабильное состояние.

- \*81(В). F. D. Colegrove and P. A. Franken, «Optical Pumping of Helium in the  $^3S_1$  Metastable State», Phys. Rev. 119, 680 (1960).

Рассмотрена теория и экспериментальные методы оптической накачки He в  $^3S_1$ -метастабильное состояние.

При наличии магнита с помощью аппаратуры, описанной в 81(В), можно выполнить опыты с пересекающимися уровнями.

Создание микроволнового мазера требует относительно большой и дорогостоящей аппаратуры. При наличии аппаратуры для электронного парамагнитного резонанса многие проблемы упрощаются.

Для демонстраций, требующих большой мощности излучения, наиболее пригодным является твердотельный оптический мазер. Такие установки могут быть созданы без слишком больших затруднений; они могут быть даже приобретены целиком и являются коммерчески доступными. По-видимому, наиболее удобным для целей преподавания является газовый оптический мазер. Он дает возможность демонстрировать дифракционные и интерференционные явления большой группе студентов. Многие лабораторные опыты и демонстрация, которые в прежние времена казались трудными и требовали экспериментального искусства, с помощью оптических мазеров удаются с замечательной легкостью. Обычный газовый оптический мазер с внешними зеркалами описан в работе:

- 82(П). W. W. Rigrod, H. Kogelnik, D. J. Brangauio, D. R. Herriot, «Gaseous Optical Maser with External Concave Mirrors», J. Appl. Phys. 33, 743 (1962).
- \*83(П). D. Dutton, M. Givens and R. E. Hopkins, «Some Demonstration Experiments in Optics Using a Gas Laser», Amer. J. Phys. 32, № 4, 355 (1964).

Простые опыты по геометрической и физической оптике, пригодные благодаря большой интенсивности света от лазера для показа в аудитории.



## ТАБЛИЦА

для замены указанных в тексте электронных устройств  
отечественными с близкими параметрами

Устройства, указанные в тексте	Отечественные
Катодно-лучевая трубка ЗВР1А Германиевый диод 1N34AL Генератор синусоидальных колебаний Туннельный диод 1N3720 Осциллограф Неоновая лампа NE-2 Транзисторы 2N1303 2N1305 2N1302 2N1304 Отражательный клистрон 723 А/В Диод 1N23 Фотоэлемент Ferranti GRD-7 Фотоэлемент 929	Катодно-лучевая трубка ЗЛО1К или 13ЛО37 Германиевый диод Д-13 Генератор Г4-18 Туннельный диод АИ201Е Осциллограф С1-20 или СИ-1 Неоновая лампа ТН-0,2 ГТ308В ГТ308Б П502В КТ604А Отражательный клистрон К-29 Диод Д-602-А Фотоэлемент 2Д2С Фотоэлемент Ф-4