БИБЛИОТЕЧКА •КВАНТ•
ВЫПУСК 23

А.Н. КОЛМОГОРОВ
И.Г. ЖУРБЕНКО
А.В. ПРОХОРОВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

МОСКВА
НАУКА • ФИЗМАТЛИТ
1995

ББК 22.17
К60
УДК 519.2 (023)

Серия «Библиотечка "Квант"»
основана в 1980 г.

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.
К60 Введение в теорию вероятностей.— 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Физматлит, 1995.— 176 с.— (Б-чка «Квант»; Вып. 23). ISBN 5-02-014402-9

На простых примерах рассматриваются основные понятия и теоремы теории вероятностей. В основе лежит комбинаторный подход, однако наряду с классическим определением вероятности вводится также и статистическое определение. Подробно анализируется модель случайного блуждания по прямой, описывающая физический процесс одномерного броуновского движения частиц, а также другие примеры. Обсуждаются несложные статистические задачи. Во втором издании книга подверглась переработке, в частности, добавлена глава о предельных теоремах теории вероятностей.

(Изд. 1-е — в 1982 г.)

Для школьников, студентов, преподавателей, лиц, занимающихся самообразованием.

$К\,\dfrac{1602090000-022}{053(02)\,95}\,148\text{-}92$

ББК 22.17

ISBN 5-02-014402-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Открывая этим предисловием второе издание книги в «Библиотечке Квант», мы рассчитываем, что читатель, интересующийся математической наукой о случайном, найдет здесь доступное описание физически реальных случайных явлений и первые строгие математические сведения о теории вероятностей с простейшими комбинаторными расчетами, аксиомами и основными понятиями, а также более сложные вероятностные модели и теоремы, которые дают представление о серьезных аналитических методах.

За время, прошедшее с момента первого издания, не стало Андрея Николаевича Колмогорова, он скончался 20 октября 1987 года в возрасте 84 лет. Андрей Николаевич — инициатор написания этой книги, и мы, его ученики, хотели бы отдать должное памяти великого ученого и педагога.

Андрей Николаевич Колмогоров оказал основополагающее влияние на развитие современной математики, он обладал многообразными научными интересами в области физики, биологии, истории, лингвистики и других дисциплин.

Еще в студенческие годы, начав с преподавания математики и физики в Потылихинской опытно-показательной школе, Андрей Николаевич через всю долгую жизнь пронес интерес к школьной математике. Более 20 лет он отдал физико-математической школе-интернату при Московском университете, теперь носящей его имя, устройству летних математических школ в разных уголках страны, участию в издании журнала «Квант», а также созданию школьных учебных пособий по математике и разработке программ и методологии преподавания математики в школе.

Андрей Николаевич увлеченно руководил школьными кружками по внепрограммным темам, в том числе по теории вероятностей и комбинаторике. Этот интерес отразился и в серии публикаций в журнале «Математика в школе».

В Московском университете в традициях механико-математического факультета Андреем Николаевичем и его учениками проводились на младших курсах просеминары по теории вероятностей, которые служили введением в будущую математическую специализацию. Опыт этих кружков и семинаров и был обобщен в первом издании книги в «Библиотечке Квант».

Последние годы жизни Андрей Николаевич, несмотря на тяжелую болезнь, направлял подготовку нового издания книги, и все перемены в ней осуществлены при его участии. По замыслу Андрея Николаевича необходимо соединять увлекательность и понятность изложения с достаточной логической строгостью. Стиль Колмогорова-педагога прекрасно чувствуется в главе 1, которая полностью написана им самим — именно здесь соединяются интересные физические примеры с простейшими расчетами, за которыми проглядывают глубокие факты теории.

Память об Андрее Николаевиче Колмогорове живет для нынешнего и последующих поколений в его трудах. Эта маленькая книжка является частицей наследия замечательного ученого и педагога.

И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Данная книга рассчитана на читателя, пожелавшего на элементарном уровне ознакомиться с основными понятиями теории вероятностей и составить себе некоторое впечатление о возможных применениях этой области математики, бурное развитие которой приходится на последние десятилетия. Широкое распространение вероятностных методов в самых различных областях науки и техники было связано с тем, что с помощью этих методов удалось получить ответы на многие естественнонаучные задачи, долгое время не поддававшиеся решению. Книга не ставит перед собой цели охватить все возможные применения теории вероятностей, тем более что на элементарном уровне это сделать вообще невозможно. В то же самое время привести интересные примеры использования вероятностных методов в простейших практических ситуациях являлось одной их главных целей книги. В качестве таких примеров достаточно подробно изучаются основные закономерности броуновского движения, проводится исследование процессов гибели и размножения, приводятся некоторые другие примеры. Естественно, что приведенные результаты являются лишь элементарным введением в указанные области науки, позволяющим, тем не менее, составить у читателя чувство близости к современным естественнонаучным проблемам.

В основу данной книги легли материалы лекций и семинаров авторов, неоднократно на протяжении последних 15 лет читавшихся в Московском государственном университете и Физико-математической школе при МГУ.

Изложение основ теории постоянно сопровождается большим количеством примеров и задач, часть которых в зависимости от трудности решается полностью, на остальные даются только ответы.

Книга будет доступна школьникам старших классов, проявляющим интерес к математике и ее применениям. Она может также оказаться полезной студентам младших курсов самых различных специальностей, интересующимся применениями теории вероятностей в своих областях.

Для тех, кто хочет расширить свой кругозор, рекомендуем следующие издания:

Я. Бернулли. Закон больших чисел.— М.: Наука, 1986.

Э. Борель. Вероятность и достоверность: Пер. с фр.— М., Наука, 1969.

М. Глеман, Т. Варга. Вероятность в играх и развлечениях: Пер. с фр.— М., Просвещение, 1979.

Б. Гнеденко, А. Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятностей.— М.: Наука, 1976.

Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас. Вероятность: Пер. с англ.— М.: Мир, 1969.

А. Реньи. Трилогия о математике; Пер. с венг.— М.: Мир, 1980.

В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее применения: Пер. с англ.; Том 1.— М.: Мир, 1967.

А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров

КОМБИНАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Перестановки

Две буквы А и Б можно расположить одну за другой двумя способами:

АБ, БА

Три буквы А, Б и В можно расположить в виде последовательности уже шестью способами:

АБВ, АВБ
БАВ, БВА
ВАБ, ВБА

Для четырех букв получим 24 разных способа их расположения в виде последовательности:

АБВГ, АБГВ, БАВГ, БАГВ
АВБГ, АВГБ, БВАГ, БВГА
АГБВ, АГВБ, БГАВ, БГВА
ВАБГ, ВАГБ, ГАБВ, ГАВБ
ВБАГ, ВБГА, ГБАВ, ГБВА
ВГАБ, ВГБА, ГВАБ, ГВБА

Сколькими способами можно расположить десять букв в виде последовательности? Перебрать все способы расположения здесь было бы трудно. Для ответа на вопрос желательно общее правило, формула, которая позволила бы сразу вычислить число способов расположения n букв в виде последовательности. Число этих способов обозначают $n!$ (n с восклицательным знаком) и называют «n-факториал». Найдем это число. Мы уже видели, что

$$2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24.$$

Каждый способ расположения данного числа букв в последовательности называется *перестановкой*. Очевидно, что вместо букв можно взять цифры или любые другие предметы. Число перестановок четырех предметов равно $4! = 24$. Вообще $n!$ есть число перестановок n предметов (заметим еще, что полагают

$$1! = 1,$$

так как один предмет не с чем «переставлять», из одного предмета можно сформировать только одну «последовательность», в которой этот предмет стоит на первом месте):

$$1! = 1,$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Напрашивается гипотеза: число перестановок n предметов равно произведению первых n натуральных чисел:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1.1)$$

Гипотеза эта верна.

Для доказательства заметим, что в случае перестановки n предметов на первое место можно поставить любой из n предметов. В каждом их этих n случаев остающиеся $n - 1$ предметов можно расположить $(n - 1)!$ способами. Поэтому получим всего $(n - 1)!n$ способов расположения n предметов:

$$n! = (n - 1)!\, n. \qquad (1.2)$$

При помощи формулы (2) получаем последовательно:

$$2! = 1! \cdot 2 = 1 \cdot 2,$$
$$3! = 2! \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$4! = 3! \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4,$$
$$5! = 4! \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ и т. д.}$$

Знакомые с принципом математической индукции могут заметить, что вывод формулы (1.1) из формулы (1.2) использует этот принцип, и провести строгое формальное рассуждение.

Теперь уже нетрудно вычислить число перестановок десяти букв:

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800.$$

§ 2. Вероятность

Семь букв разрезной азбуки А, А, Б, Б, К, У, Ш положены в мешок, откуда их вынимают наудачу и располагают одну за другой в порядке, в котором они появляются. В результате получается слово БАБУШКА.

В какой мере такой факт надо считать удивительным, быть может, заставляющим предполагать, что мы присутствуем при нарочно подстроенном фокусе? Занумеруем наши семь карточек с буквами:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	Б	Б	К	У	Ш

Их можно расположить по порядку

$$7! = 5040$$

способами. Из этих 5040 случаев слово БАБУШКА получится в четырех:

3	1	4	6	7	5	2	4	1	3	6	7	5	2
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А
3	2	4	6	7	5	1	4	2	3	6	7	5	1
Б	А	Б	У	Ш	К	А	Б	А	Б	У	Ш	К	А

Скажем, что из общего числа случаев (5040) четыре случая *благоприятствуют* появлению занимающего нас события (заключающегося в том, что из вынутых букв сложилось слово БАБУШКА). Отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу случаев в подобных задачах называют вероятностью события. В нашем примере вероятность появления слова БАБУШКА есть

$$\frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}.$$

Вероятность эта очень мала, и наше событие действительно очень «маловероятно». Позднее мы узнаем, что подсчитанная нами вероятность имеет такой практический смысл: если много раз производить описанный опыт с буквами, то примерно один раз на 1260 испытаний произойдет наше событие (само собою сложится слово БАБУШКА).

Аналогичный расчет для четырех букв А, А, М, М приводит к результату, что из них случайно будет складываться слово МАМА с вероятностью

$$\frac{4}{4!} = \frac{1}{6}.$$

С такой же вероятностью $1/6$ будет получаться еще каждое из пяти «слов»:

ААММ, АМАМ, АММА, МААМ, ММАА.

Если производить этот опыт с четырьмя буквами, то каждый из описанных шести возможных результатов будет появляться примерно в $1/6$ доле случаев.

§ 3. Равновозможные случаи

Игральная кость — это кубик, на гранях которого обозначено число очков от 1 до 6. Бросив две кости, можно получить сумму очков (на верхних гранях двух костей) от 2 до 12. Можно было бы думать, что в задаче имеется 11 возможных случаев и вероятность появления каждого из них равна $1/11$. Но это не так. Опыт показывает, что, например, сумма 7 появляется много чаще, чем сумма 12. Это и понятно, так как 12 можно получить только в виде

$$6 + 6 = 12,$$

а 7 — многими способами:

$$1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7.$$

При этом мы записываем первым слагаемым число очков на первой кости, а вторым — на второй. Поэтому записи $1 + 6$ и $6 + 1$ указывают на две р а з л и ч н ы е возможности получения суммы 7.

Для подсчета вероятностей здесь приходится рассматривать тридцать шесть случаев, каждый из которых характеризуется определенным числом очков, выпавших на первой кости, и определенным числом очков, выпавших на второй кости:

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	...				
4,1	...				
5,1	...				
6,1	...				

Естественно считать эти тридцать шесть случаев равновозможными. Опыт показывает, что для достаточно правильных (кубических) костей, сделанных из однородного материала, и надлежащих приемов бросания (например, после встряхивания в стаканчике) эти 36 случаев появляются при большом числе повторений примерно одинаково часто.

Для суммы очков на двух костях получаем такие результаты (проверьте !):

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число благоприятствующих случаев	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Уточним определение: *вероятностью называется отношение числа благоприятствующих случаев к общему числу равновозможных.* На вопрос, какие случаи можно считать равновозможными, математика не дает ответа. При бросании костей условия выпадения любой из шести граней представляются нам одинаковыми. Кроме того, представляется естественным считать, что различные комбинации верхних граней двух костей тоже одинаково правдоподобны.

Разделение всех возможных исходов некоторого испытания на исключающие друг друга равновозможные случаи достаточно деликатно. Часто вместо изложенного сейчас «классического» определения вероятности приходится прибегать к другому — «статистическому». Но на первых порах знакомства с теорией вероятностей разумно отнестись с доверием к «классическому» определению. С точки зрения чистой математики тут нет никакой «нестрогости». Подробнее об этом будет сказано в гл. 2.

§ 4. Броуновское движение и задача о блуждании на плоскости

Вычислять вероятности приходится отнюдь не только при решении шуточных задач или задач об игре в кости и карты. На теории вероятностей основаны, в частности, кинетическая теория газов, теория диффузии растворенных в жидкости веществ и взвешенных частиц.

Теория вероятностей объясняет, почему хаотическое, беспорядочное движение отдельных молекул приводит к четким, простым закономерностям движения их больших совокупностей.

Первая возможность экспериментального исследования такого рода соотношений между беспорядочным движением отдельных частиц и закономерным движением их больших совокупностей появилась, когда в 1827 году ботаник Р. Броун открыл явление, которое по его имени названо броуновским движением. Броун наблюдал под микроскопом взвешенную в воде цветочную пыльцу. К своему удивлению, он обнаружил, что взвешенные в воде частицы пыльцы находятся в непрерывном беспорядочном движении, которое не удается прекратить при самом тщательном старании устранить внешние воздействия, способные это движение поддерживать (например, движение воды под влиянием неравномерности температуры и т. п.). Вскоре было обнаружено, что это движение есть общее свойство любых достаточно ме. ких частиц, взвешенных в жидкости. Его интенсивность зависит только от температуры и вязкости жидкости и от размеров частиц (движение тем интенсивнее, чем температура выше, вязкость меньше, а частицы мельче). Каждая частица движется по своей собственной траектории, не похожей на траектории соседних частиц, так что близкие вначале частицы очень быстро становятся удаленными (хотя могут иногда случайно вновь встретиться).

На рис. 1 точками отмечены последовательные положения частицы (гуммигута в воде по классическим опытам Перрена) с промежутками в 30 секунд. Эти последовательные положения соединены прямолинейными отрезками.

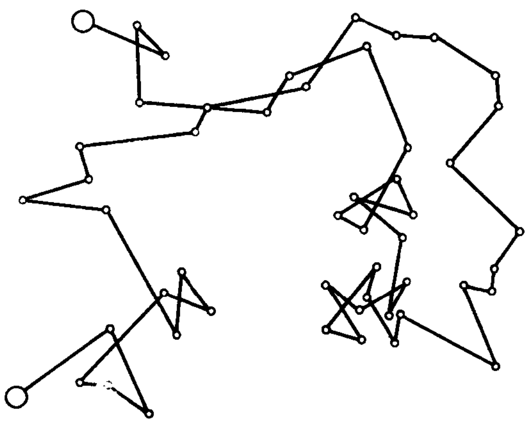


Рис. 1. Блуждание частицы гуммигута с промежутками 30 с

В действительности траектория частицы еще запутаннее. На рис. 2 схематически показано, что траектории трех частиц, которые в начальный момент были очень близки друг к другу, совершенно различны.

Броуновское движение большого числа частиц можно наблюдать, выпустив в тонкий слой воды на плоском стеклышке каплю чернил. При наблюдении простым глазом траектории отдельных чернильных частиц увидеть нельзя. Чернильное пятно будет постепенно расплываться, сохраняя округлую форму. Его окраска будет более интенсивной в центре, к краям же будет ослабевать. Схематически расположение большого числа частиц, подверженных броуновскому движению, через некоторый промежуток времени после того, как все они вышли из ближайшей окрестности

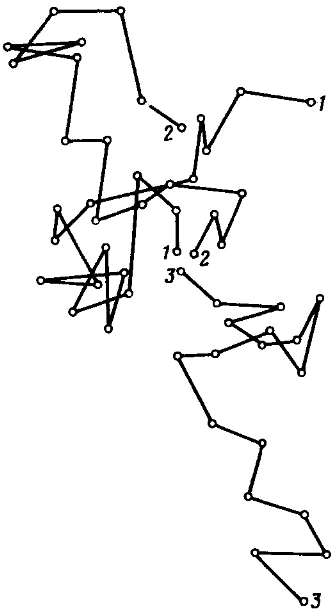


Рис. 2. Три траектории блуждания

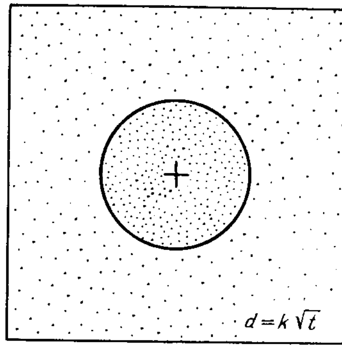


Рис. 3. Положение вышедших из нуля частиц через некоторый промежуток времени

начальной точки, отмеченной крестиком, изображено на рис. 3.

Обозначим через t промежуток времени, прошедший от выхода наших частиц из начальной точки, и через d — диаметр окружности с центром в начальной точке, внутри которой находится половина частиц (рис. 3). Наблюдение показывает, что этот диаметр растет приблизительно пропорционально квадратному корню из промежутка времени t, т. е. изменяется примерно по закону

$$d = k\sqrt{t} \qquad (1.3)$$

(k — некоторая постоянная). Эта закономерность может быть обоснована теоретически средствами теории вероятностей. Сам ее вывод остается за пределами нашей книги, но в причинах того, что диаметр d растет не пропорционально времени (как было бы, если бы частицы разбегались из начальной точки с постоянной скоростью, не меняя направления), а несравненно медленнее, мы сможем разобраться.

Основные черты броуновского движения частицы можно наблюдать на упрощенной модели блуждания частицы по плоскости, разделенной на квадратики. К таким упрощенным моделям при изучении сложных явлений прибегают и в серьезных научных исследованиях.

Будем считать, что наша частица перемещается из квадратика, в котором она находится вначале, в один из четырех соседних квадратиков. Ее путь за восемь шагов может, например, иметь такой вид, как указано на рис. 4.

Из начального положения (рис. 5, *а*) частица может попасть в один из четырех смежных квадратиков, в каждый одним-единственным способом (рис. 5, *б*). За два шага

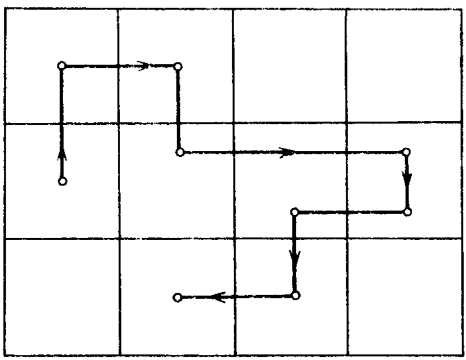


Рис. 4. Блуждание частицы по плоскости

частица может попасть в начальное положение четырьмя способами (выходя в сторону в одном из четырех возможных направлений и возвращаясь обратно), еще в четыре квадрата частица может попасть двумя способами в каждый и в четыре квадрата — одним способом в каждый (рис. 5, *в*). Всего частица может двигаться в течение первых двух шагов шестнадцатью различными способами.

На рис. 5, *г* указан результат аналогичного подсчета для трех шагов. Здесь число различных путей равно уже

$$4 + 4 \cdot 9 + 8 \cdot 3 = 64.$$

На рис. 5, *д* и *е* указано число способов попадания в различные квадраты после четырех и после пяти шагов.

Легко понять, что число различных путей с ростом числа шагов t растет как 4^t:

Число шагов	0	1	2	3	4	5
Число путей	1	4	16	64	256	1024

Если считать, что частица всегда помещается в центре занимаемого ею квадратика, то за t шагов она может

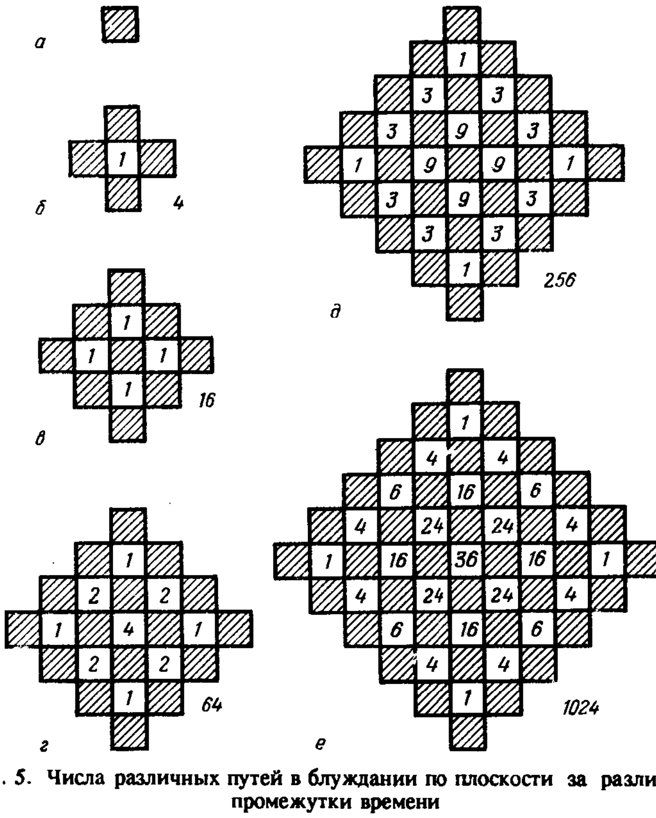


Рис. 5. Числа различных путей в блуждании по плоскости за различные промежутки времени

удалиться от начального положения не более чем на расстояние th, где h — длина стороны квадратиков. Но для этого она должна двигаться прямолинейно. При $t = 5$ это будет только в четырех случаях из 1024. В большинстве же случаев частица окажется в конце пути значительно ближе к своему начальному положению. Например, при $t = 5$ в 400 случаях (почти 40 %) расстояние конечного положения от начального будет равно единице, а еще в 400 случаях это расстояние равно

$$\sqrt{3} = 1,73...$$

Лишь в остающихся немногим более чем 20 % случаях частица уйдет дальше.

Допустим теперь, что при любом t все пути равновозможны. Тогда числа, проставленные на рис. 5, после их деления на 4^t дадут вероятности попадания в соответствующие клетки после t шагов. Обозначив через r расстояние от начального положения, получим при $t = 2$ такую табличку:

r^2	0	2	4
r	0	$\sqrt{2}$	2
Число случаев	4	8	4
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

При $t = 5$ таблица приобретает следующий вид:

r^2	1	5	9	13	17	25
r	1	$\sqrt{5}$	3	$\sqrt{13}$	$\sqrt{17}$	5
Число случаев	400	400	100	80	40	4
Вероятность	$\frac{400}{1024}$	$\frac{400}{1024}$	$\frac{100}{1024}$	$\frac{80}{1024}$	$\frac{40}{1024}$	$\frac{4}{1024}$

Интересно подсчитать среднее значение квадрата расстояния (чертой обозначен переход к среднему значению r):

$$\text{при } t = 2 \quad \overline{r^2} = \frac{8 \cdot 2 + 4 \cdot 4}{16} = 2,$$

$$\text{при } t = 5 \quad \overline{r^2} = 5.$$

Можно показать, что при любом t в нашей задаче $\overline{r^2} = t$. Корень квадратный из среднего значения квадрата (называемый в статистике средним квадратическим) равен $\sqrt{t}$.

На этом мы закончим исследование нашей задачи. Заметим только, что рис. 5, *е* уже обнаруживает большое сходство с рис. 3. Оказывается, что наша модель случайного блуждания отдельной частицы хорошо соответствует наблюдениям, если предположить, что частицы блуждают независимо друг от друга (с точным смыслом выражения «независимые испытания» вы познакомитесь позднее, см. § 1 гл. 4).

§ 5. Блуждание на прямой. Треугольник Паскаля

Рассмотрим еще более простую задачу блуждания на прямой. Пусть в начальный момент времени частица находится в начале координат на прямой L, а затем продвигается или вверх, или вниз на расстояние h (рис. 6). На втором шаге повторяется то же самое и т. д. Итак, за один шаг частица перемещается на расстояние h вверх или вниз. Для того чтобы иметь возможность определить положение частицы после n-го шага, введем горизонтальную ось (ось t на рис. 6) и будем откладывать на ней число шагов. Отметим координаты положения частицы после каждого шага и соединим последовательные положения частицы отрезками, условно изобразив перемещение частицы на каждом шаге.

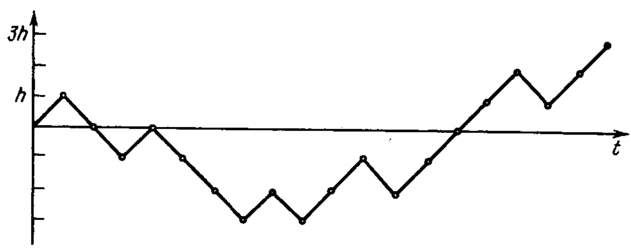


Рис. 6. Развертка во времени случайного блуждания на прямой

На рис. 6 показан возможный график движения («блуждания») частицы.

Легко понять, что число всех возможных способов перемещения частицы за t шагов будет равно

$$2^t = \underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{t \text{ раз}},$$

поскольку на каждом шаге производится выбор из двух возможностей. На рис. 7 подсчитано число способов, которыми можно попасть через t шагов в то или иное положение на прямой L (например, число способов вернуться в начало координат на 2-м, 4-м или 6-м шаге равно, соответственно, 2, 6 и 20).

Случайное блуждание такого рода осуществляется в специальном приборе, который называют *доской Гальтона* в честь известного английского психолога и антрополога Ф. Гальтона (1822—1911). На рис. 8 схематично изображено устройство этого простого прибора. Металлические шарики один за другим попадают в самый верхний канал и устремляются вниз. Наткнувшись на первое препятствие (острие), они должны выбрать путь вправо или влево. На втором этапе при столкновении с одним из двух препятствий происходит такой же выбор. Этот процесс продолжается далее и после последнего ряда препятствий, который имеет номер t, шарик оказывается в одной из секций, на которые разделен самый

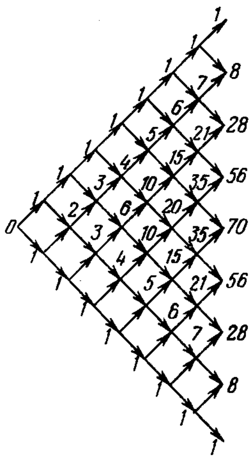


Рис. 7. Подсчет числа траекторий случайного блуждания

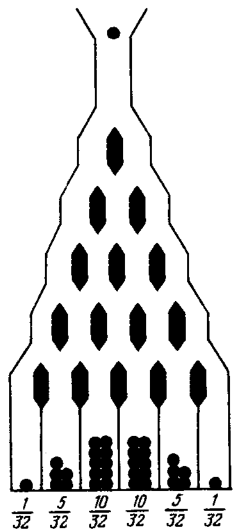


Рис. 8. Доска Гальтона

низ прибора. При тщательной подгонке деталей выбор пути каждого шарика оказывается вполне случайным: любой из 2^t путей равновозможен. Пропустив через прибор большое число шариков, обнаруживают, что доля шариков, попавших в каждую из секций внизу, примерно соответствует рассчитанным вероятностям (на рис. 8 дана иллюстрация для $t = 5$).

Оставим теперь приборы, демонстрирующие физический механизм случайности, и займемся математикой.

Выпишем числа, помещенные в схеме блуждания на рис. 7, в виде таблицы:

	$\to m$ 0	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
$\downarrow$ 0	1									1
n 1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

Здесь цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 по вертикали и горизонтали обозначают номера строк и столбцов (0 — это тоже номер). В правой части стоят суммы чисел в каждой строке.

Закон образования таблицы легко установить: на каждой позиции стоит сумма числа, стоящего в предыдущей строке непосредственно сверху, и числа, стоящего сверху слева. Например,

$$56 = 21 + 35.$$

Отдельно приходится оговорить, что в нулевом столбце и по диагонали стоят единицы. Можно поступить иначе, считать, что таблица продолжается неограниченно влево и вправо, но заполнена там нулями.

Теперь указанное основное правило заполнения таблицы будет действовать без всяких исключений, начиная с первой строки.

Обозначив через C_n^m число, стоящее в таблице на пересечении m-го столбца и n-й строки, можно записать правило заполнения таблицы в виде формулы

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \qquad (1.4)$$

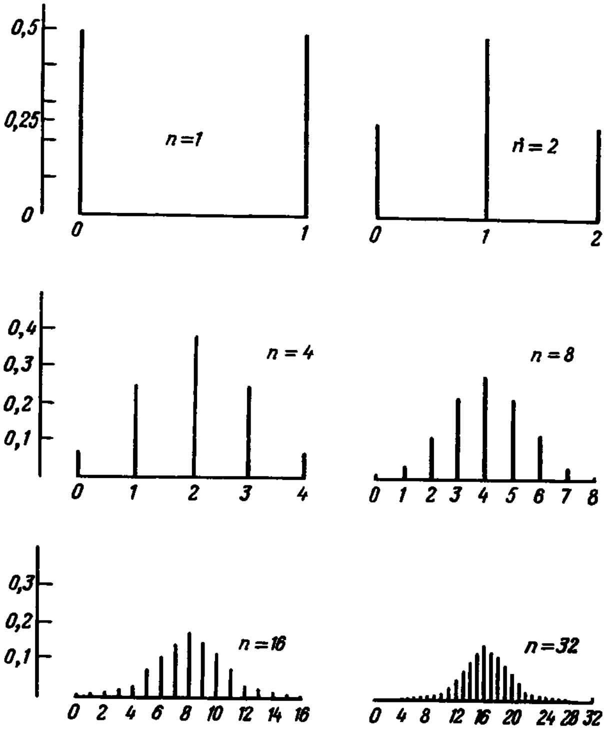
Особо надо задать числа нулевой строки:

$$C_0^m = \begin{cases} 1 \text{ при } m = 0, \\ 0 \text{ при остальных значениях } m. \end{cases}$$

Наша таблица (без заполнения позиций, где все равно стоят нули) называется *треугольником Паскаля* или *арифметическим треугольником*. Легко видеть, что сумма чисел C_n^m в n-й строке таблицы равна 2^n. На с. 22 помещена более полная таблица чисел C_n^m для n, меняющегося от 4 до 20.

Таблица биномиальных коэффициентов

↓m \ →n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	←n / ↓m
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
2	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	2
3	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140	3
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	4
5		1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	5
6			1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	6
7				1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	7
8					1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	8
9						1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	9
10							1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	10
11								1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	11
12									1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	12
13										1	14	105	560	2380	8568	27132	77520	13
14											1	15	120	680	3060	11628	38760	14
15												1	16	136	816	3876	15504	15
16													1	17	153	969	4845	16
17														1	18	171	1140	17
18															1	19	190	18
19																1	20	19
20																	1	20



$$y = P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}$$

Рис. 9. Графики $P_n(m)$

Вернемся к задаче о блуждании на прямой, но изменим ее постановку. Пусть частица движется по прямой и каждую секунду либо делает один шаг вправо на фиксированное расстояние h, либо остается на месте. За n секунд частица сдвинется не более чем на n шагов вправо. Возникает вопрос о том, какое число шагов за n секунд будет наиболее вероятным, если считать все варианты движения равновозможными. Ясно, что случаи 0 шагов и n шагов при большом числе n появятся лишь в виде очень редких исключений.

Учитывая все сказанное выше, легко сообразить, что число способов сделать ровно m шагов вправо за первые n секунд равно здесь C_n^m. Поскольку все способы блуждания при заданном n равновозможны, то вероятность сдвинуться на m шагов за n секунд равна

$$P_n(m) = \frac{C_n^m}{2^n}. \qquad (1.5)$$

На рис. 9 даны графики зависимости вероятностей $P_n(m)$ от m при $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Масштаб по вертикальной оси, где откладываются вероятности $P_n(m)$, на всех графиках сохраняется неизменным. Масштаб по горизонтальной оси выбран постепенно уменьшающимся, так что максимальный возможный пробег частицы везде изображается отрезком одной и той же длины.

Мы видим, что наиболее вероятным везде является *среднее значение* перемещения частицы за n шагов

$$x = \frac{1}{2} n.$$

Большие же отклонения от этого среднего с возрастанием n делаются все более редкими. Можно показать, что *среднее квадратическое отклонение* (корень квадратный из квадрата отклонения) от среднего перемещения равно в этой задаче

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}$$

(сравните с выводом на с. 18 для блуждания на плоскости!). Например, за 10 000 секунд средний пробег частицы будет равен 5000 шагов, а среднее квадратическое отклонение от этого среднего будет лишь 50 шагов. Здесь мы соприкасаемся с одним из фундаментальных предложений теории вероятностей — законом больших чисел. Мы вернемся к этим задачам в гл. 4.

§ 6. Бином Ньютона

Числа C_n^m называются *биномиальными коэффициентами*. При этом имеют в виду их обычное употребление в алгебре, не связанное с теорией вероятностей и задачами о блужданиях. Вам известны формулы

$$(a + b)^0 = 1,$$
$$(a + b)^1 = a + b,$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что числовые коэффициенты взяты из соответствующих строк треугольника Паскаля.

Вычислим еще

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b);$$

для этого надо умножить

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

на a и на b и результаты сложить:

$$\begin{array}{r} a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \qquad\quad \\ + \qquad\quad a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}.$$

Мы видим, что коэффициенты суммы получаются точно по тому же правилу, по какому формировался треугольник Паскаля (см. таблицы на с. 21 и 22).

Возникает гипотеза, что всегда

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + b^n. \quad (1.6)$$

Гипотеза верна. Знакомые с методом математической индукции могут провести строгое доказательство формулы бинома Ньютона (1.6), опираясь на равенство (1.5).

Вероятностное рассуждение в пользу равенства (1.6) приведено в § 1 гл. 4.

§ 7. Биномиальные коэффициенты и число сочетаний

Числом сочетаний из n по m называется число способов выделения из множества, состоящего из n предметов, подмножества, состоящего из m предметов. Например, из множества, состоящего из четырех букв

А, Б, В, Г,

можно выделить шесть различных подмножеств, состоящих каждое из двух букв:

{А, Б}, {А, В}, {А, Г}, {Б, В}, {Б, Г}, {В, Г}.

Оказывается, что число сочетаний из n по m равно соответствующему элементу треугольника Паскаля C_n^m.

Этот факт легко понять, если обратиться к последней задаче о блуждании из § 5. Например, чтобы определить в этой задаче число различных способов, которым эта частица может сделать два шага направо за 4 секунды, надо перебрать все способы выделения из четырех секундных промежутков двух промежутков. Таких способов шесть:

	1	2	3	4
1	+	+		
2	+		+	
3	+			+
4		+	+	
5		+		+
6			+	+

Знакомые с методом математической индукции могут провести общее доказательство, опираясь на равенство (1.5).

§ 8. Формула, выражающая биномиальные коэффициенты через факториалы, и ее применение к вычислению вероятностей

Эта замечательная формула имеет вид

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{1.7}$$

Ее тоже можно доказать при помощи метода математической индукции. Дадим другое, непосредственное доказательство.

Если из n предметов отобраны m, то можно $m!$ способами занумеровать отобранные предметы числами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m.$$

Оставшиеся $n-m$ предметов можно занумеровать числами

$$m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$$

$(n-m)!$ способами. Таким образом, получим

$$m!\,(n-m)!$$

нумераций всего множества из n предметов числами

$$1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Но сам отбор m элементов из n можно произвести C_n^m способами. Таким образом, всего мы получим

$$C_n^m m!\,(n-m)!$$

нумераций полного множества из n элементов. Каждую нумерацию этого множества мы получили ровно один раз. Всего же их n! Поэтому

$$C_n^m m!\,(n-m)! = n!,$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!},$$

что и требовалось доказать.

Чтобы формула (1.7) была верна и при $n = 0$, и при $m = 0$, надо положить

$$0! = 1.$$

Формула (1.7) позволяет вычислять C_n^m в случае больших n и m с помощью таблицы логарифмов факториалов:

Таблица логарифмов факториалов

n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$	n	$\lg n!$
1	0,0000	26	26,6056	51	66,1906	76	111,2754
2	0,3010	27	28,0370	52	67,9066	77	113,1619
3	0,7782	28	29,4841	53	69,6309	78	115,0540
4	1,3802	29	30,9465	54	71,3633	79	116,9516
5	2,0792	30	32,4237	55	73,1037	80	118,8547
6	2,8573	31	33,9150	56	74,8519	81	120,7632
7	3,7024	32	35,4202	57	76,6077	82	122,6770
8	4,6055	33	36,9387	58	78,3712	83	124,5961
9	5,5598	34	38,4702	59	80,1420	84	126,5204
10	6,5598	35	40,0142	60	81,9202	85	128,4498
11	7,6012	36	41,5705	61	83,7055	86	130,3843
12	8,6803	37	43,1387	62	85,4979	87	132,3238
13	9,7943	38	44,7185	63	87,2972	88	134,2683
14	10,9404	39	46,3096	64	89,1034	89	136,2177
15	12,1165	40	47,9116	65	90,9163	90	138,1719
16	13,3206	41	49,5244	66	92,7359	91	140,1310
17	14,5511	42	51,1477	67	94,5619	92	142,0948
18	15,8063	43	52,7811	68	96,3945	93	144,0632
19	17,0851	44	54,4246	69	98,2333	94	146,0364
20	18,3861	45	56,0778	70	100,0784	95	148,0141
21	19,7083	46	57,7406	71	101,9297	96	149,9964
22	21,0508	47	59,4127	72	103,7870	97	151,9831
23	22,4125	48	61,0939	73	105,6503	98	153,9744
24	23,7927	49	62,7841	74	107,5196	99	155,9700
25	25,1906	50	64,4831	75	109,3946	100	157,9700

Вычислим, например, в задаче из § 5 вероятность сделать за 100 секунд ровно 50 шагов. Эта вероятность равна

$$P_{100}(50) = \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = \frac{100!}{2^{100}\,(50!)^2}.$$

Логарифмические вычисления не сложны:

$$\lg 100! = 157{,}9700,$$
$$\lg 2 = 0{,}30103,$$
$$\lg 2^{100} = 30{,}1030,$$
$$\lg 50! = 64{,}4831,$$
$$\lg (50!)^2 = 128{,}9662,$$
$$\lg P_{100}(50) = \bar{2}{,}9008,$$
$$P_{100}(50) = 0{,}0796.$$

§ 9. Формула Стирлинга и ее применение к биномиальным коэффициентам

Дж. Стирлинг предложил (1730 г.) разложение натурального логарифма $n!$ в бесконечный ряд:

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{s_1}{n} - \frac{s_2}{n^3} + \ldots + (-1)^{m+1} \frac{s_m}{n^{2m-1}} + \ldots, \qquad (1.8)$$

где числа s_m могут быть выписаны в явном виде, например,

$$s_1 = 1/12, \; s_2 = 1/360.$$

Ряд этот расходится, однако при любом натуральном m верно равенство

$$\ln n! = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{s_1}{n} - \frac{s_2}{n^3} + \ldots + (-1)^{m+1} \frac{s_m\theta}{n^{2m-1}}, \qquad (1.9)$$

где $0 < \theta < 1$.

Для нас представляют интерес некоторые приближенные следствия последней формулы. Договоримся о полезных обозначениях, которые пригодятся нам и в других параграфах книги. Рассмотрим функции $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$. Тогда

$$f \sim g$$

означает, что $f/g \to 1$ при $n \to \infty$, а

$$f = g + O(h)$$

означает, что $|f - g|/h$ ограничено. Итак, верны следующие формулы:

$$\ln n! \sim n \ln n, \tag{1.10}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + O(\ln n), \tag{1.11}$$

$$\ln n! = n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n} + \frac{\theta}{12n}, \ 0 < \theta < 1, \tag{1.12}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{1.13}$$

Формула (1.13) плоха и приводится лишь как простейшее асимптотическое выражение для n! Мы дадим простое наглядное доказательство формулы (1.9). В процессе доказательства получится оценка остатка $O(\ln n)$.

Так как

$$\ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n$$

и функция $\ln x$ выпукла вверх, из рис. 10 видно, что разность между $\ln n!$ и $\int_1^n \ln x\, dx$ положительна и меньше

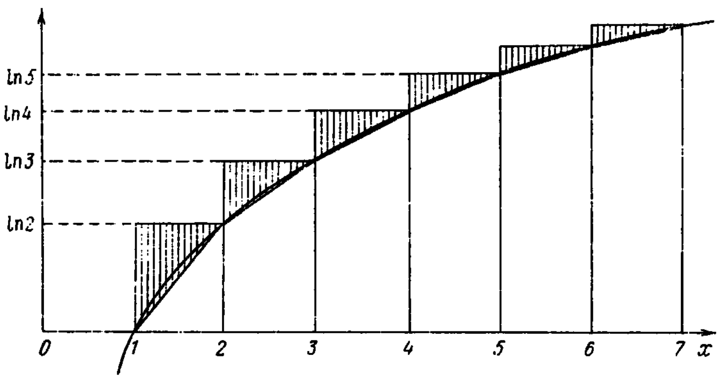


Рис. 10. Схема вычисления интеграла от $\ln x$

суммарной площади заштрихованных треугольников, которая равна $^1/_2 \ln n$. Подсчитав

$$\int_1^n \ln x\, dx = (x \ln x - x)\Big|_1^n = n \ln n - n + 1,$$

получим, что

$$n \ln n - n + 1 < \ln n! < n \ln n - n + \tfrac{1}{2} \ln n + 1.$$

Достаточную точность для расчетов дает формула (1.12) или неравенства, которые выводятся из нее:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} <$$

$$< \ln n! < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n}.$$

Из этого последнего неравенства несложно вывести удобные неравенства для биномиальных коэффициентов C_n^m:

$$A_1\varphi(n, m) \leqslant C_n^m \leqslant A_2\varphi(n, m), \qquad (1.14)$$

где

$$\varphi(n, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{n^{n+1/2}}{m^{m+1/2}(n-m)^{n-m+1/2}},$$

а $\ln A_1 = -\frac{n}{12m(n-m)}$, $\ln A_2 = -\frac{1}{12n}$.

Найдем с помощью формулы (1.12) приближенное значение вероятности $P_n(m)$ при $n = 100$, $m = 50$ в задаче о блуждании (§ 5). Имеем

$$\ln \varphi(100, 50) = 66{,}78634,$$
$$\ln A_1 = -0{,}00333,$$
$$\ln A_2 = -0{,}00083,$$
$$\ln 2^{100} = 69{,}31472.$$

Таким образом,

$$0{,}07952 < P_{100}(50) < 0{,}07972.$$

С помощью таблицы логарифмов факториалов нами было получено значение $P_{100}(50) = 0{,}0796$.

повторены большое число раз в одинаковых условиях. При рассмотрении результатов отдельных испытаний очень трудно найти какие-либо закономерности. Однако в последовательности одинаковых испытаний можно обнаружить устойчивость некоторых средних характеристик. Назовем частотой какого-либо случайного события A в данной серии из n испытаний отношение m/n числа m тех испытаний, в которых событие A наступило, к общему их числу. Наличие у события A при определенных условиях вероятности, равной p, проявляется в том, что почти в каждой достаточно длинной серии испытаний частота события A приблизительно равна p. Устойчивость значений частоты неоднократно подтверждалась специальными экспериментами. В качестве иллюстрации рассмотрим данные по проверке симметричности монеты. Пусть m — это число выпадений «герба» в n испытаниях, так что m/n — частота «герба». В следующей табличке помещены результаты, экспериментально полученные разными исследователями, начиная с XVIII века (их фамилии помещены в левом столбце таблички):

	n	m/n
Бюффон	4 040	0,507
Де Морган	4 092	0,5005
Джевонс	20 480	0,5068
Романовский	80 640	0,4923
Пирсон К.	24 000	0,5005
Феллер	10 000	0,4979

Данные проверки в совокупности показывают, что предположение о равновозможности «герба» и «решки», т. е. о том, что с вероятностью 0,5 появляется любая сторона монеты, находится в согласии с опытом. Это согласие по данным таблички кажется вполне удовлетворительным, однако если для исследования применить специальные вероятностные методы, то вполне возможен вывод, что выпадение «герба» и «решки» в отдельных случаях не одинаково вероятно. Это будет проявлением того факта, что любая реальная монета не является идеально симметричной. И тем не менее представление об абсолютно симметричной монете очень полезно, так как во многих приложениях теории вероятностей такая модель с двумя равновозможными исходами достаточно точно описывает случайные явления, и даже точнее, чем эксперимент с подбрасыванием монеты.

Статистические закономерности такого рода были впервые обнаружены на примере азартных игр, таких как игра в кости, игра в «орел-решку», карточные игры и т. п., т. е. на примере тех испытаний, которые характеризуются равновозможностью исходов. Эти наблюдения открыли путь для статистического подхода к численному определению вероятности, который особенно важен тогда, когда из теоретических соображений, подобных соображениям симметрии, значение вероятности заранее установить нельзя. Например, если некий стрелок при 100 попытках попал в цель 39 раз, то можно думать, что для него вероятность попадания в цель при одном выстреле и при неизменных условиях стрельбы близка к $39/100 = 0{,}39$. Однако, так как у нас заранее нет никаких представлений о том, какова эта вероятность, нам нужно быть уверенными в том, что результаты стрелка устойчивы на протяжении достаточно большого числа попыток поразить цель.

Рассмотрим несколько серий испытаний, проходящих в неизменных условиях, и пусть n_1, n_2, ..., n_s — числа испытаний в каждой серии. Предположим, что в каждом испытании происходит или не происходит событие A, и пусть m_1, m_2, ..., m_s, соответственно, числа испытаний, которые завершаются появлением события A в каждой серии. Тогда m_1/n_1, m_2/n_2, ..., m_s/n_s образуют ряд соответственных частот. Явление статистической устойчивости состоит в том, что частоты, полученные при достаточно больших значениях n_1, n_2, ..., n_s, обнаруживают незначительные отклонения друг от друга или от некоторой средней величины. Например, еще в XVIII веке было замечено, что среди обычной корреспонденции письма без адреса обладают определенной устойчивостью. Данные следующей таблички, собранные по материалам русской почтовой статистики, свидетельствуют о том, что на протяжении нескольких лет на каждый миллион писем приходилось в среднем 25—27 писем без адреса:

Год	Все письма	Письма без адреса
1906	983 000 000	26 112
1907	1 076 000 000	26 977
1908	1 214 000 000	33 515
1909	1 357 000 000	33 643
1910	1 507 000 000	40 101

Приведем также данные о рождаемости в Швеции на 1935 год по материалам Г. Крамера (n — число рождений, m/n — частота рождения мальчика):

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII
n m/n	7280 0,514	6957 0,510	7883 0,510	7884 0,529	7892 0,522	7609 0,518	7585 0,523

Месяцы	VIII	IX	X	XI	XII	За год
n m/n	7393 0,514	7203 0,515	6903 0,509	6552 0,518	7132 0,527	88273 0,517

Несмотря на то что общее число рождений меняется в течение года, частота рождения мальчика довольно устойчиво колеблется около среднего значения 0,517. Такого рода статистические закономерности были замечены довольно давно, еще в XVIII веке, в демографических материалах — при изучении статистики рождаемости, смерти, несчастных случаев и т. д. и ее использовании, например, в страховом деле. Позже, в конце XIX — начале XX веков были обнаружены статистические закономерности в физике, химии, биологии, экономике и других науках. При вероятностном анализе этих данных основанием для количественных оценок вероятности обычно могут служить только сами эти статистические данные.

Итак, по поводу связи вероятности с частотой нужно иметь в виду следующее. При конечном числе n испытаний при неизменных условиях доля числа испытаний m, в которых данное событие появится, т. е. частота события m/n, как правило, мало отличается от вероятности p. И чем больше число испытаний n, тем реже встречаются сколь-нибудь значительные отклонения частоты m/n от вероятности p — *частота отклонений* становится все меньше. Это утверждение о близости частоты и вероятности математически уточняется законом больших чисел в форме теоремы Бернулли, о которой будет рассказано в гл. 4. Проводя большое число наблюдений, мы принимаем частоту за приближенное значение вероятности, существование которой и постулируется на основании результатов наблюдений. Способы оценок неизвестной вероятности по результатам наблюдений будут продемонстрированы на примере задач § 4 гл. 7.

При третьем подходе к определению вероятности — аксиоматическом — вероятности задаются перечислением их свойств. Простейшие свойства вероятности определяются естественными свойствами частоты m/n:

1) $0 \leq m/n \leq 1$;

2) если событие появляется при каждом испытании, т. е. оно достоверно при любом n, то $m = n$ и $m/n = 1$;

3) если m_1 из n испытаний привели к осуществлению события A, а m_2 — к осуществлению события B и при этом ни в одном из n испытаний события A и B не появились одновременно, то частота m/n события, состоящего в появлении либо A, либо B, равна

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}.$$

При изложении теории вероятностей свойства вероятности формулируются в виде аксиом. Ныне принятое аксиоматическое определение вероятности было предложено в 1933 году А. Н. Колмогоровым. Для случаев, которые рассматриваются в книге, вероятность задается как числовая функция $P(A)$ на множестве всех событий, определяемых данным экспериментом, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$;

2) $P(A) = 1$, если A достоверное событие;

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, где событие $A \cup B$ означает осуществление или события A, или события B, причем A и B не могут произойти одновременно. Эти аксиомы в простейших случаях проверяются (см. подробнее в гл. 3), в более сложных случаях служат единственным способом задания вероятностей.

Однако ни аксиомы, ни классический и статистический подходы к определению вероятности не дают исчерпывающего определения реального содержания понятия «вероятности», а являются лишь приближениями ко все более полному его раскрытию. Предположение о том, что при данных условиях для данного события существует вероятность, является гипотезой, которая в каждой отдельной задаче требует проверки и обоснования. Например, имеет смысл говорить о вероятности попадания в цель заданных размеров с заданного расстояния из оружия известного образца стрелком, выбранным «наудачу» из определенного подразделения. Однако было бы бессмысленно говорить о вероятности попадания в цель вообще, если об условиях стрельбы ничего неизвестно.

По числовым значениям вероятностей, определенным классическим или статистическим способом, могут быть вычислены по правилам теории вероятностей новые вероятности. Например, если вероятность выпадения «герба» при одном бросании монеты равна 1/2, то вероятность того, что при четырех «независимых» бросаниях монеты хотя бы раз выпадает «герб», может быть вычислена следующим образом. Вероятность события, состоящего в том, что «герб» не выпадает вовсе при четырех бросаниях, равна $1/2^4$, так как этому событию благоприятствует лишь один исход из общего числа 2^4 равновозможных (в силу симметрии монеты) исходов. Так как оба рассматриваемых события взаимно исключают и взаимно дополняют друг друга, то сумма их вероятностей (это следует из свойств 2 и 3) равна 1. Поэтому искомая вероятность равна $1 - (1/2)^4 = 15/16 = 0{,}9375$. Заметим, что частота этого события в эксперименте из 20 160 бросаний четырех монет, проделанном В. И. Романовским (1912 г.), приняла значение 0,9305. Подробно о правилах вычисления вероятностей мы расскажем в гл. 3.

Очевидно, утверждение, что вероятность какого-либо события весьма близка к единице, имеет гораздо большую практическую ценность, чем утверждение о том, что событие наступает с вероятностью, равной, например, 1/2. Это объясняется тем, что мы интересуемся и стремимся к практически достоверным выводам. К примеру, при 10 бросаниях симметричной монеты появление десяти «гербов» или десяти «решек» очень маловероятно; вероятность этого события равна $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} = 0{,}00098$. Но и утверждение, что «герб» выпадет ровно пять раз, не имеет достаточных оснований, хотя эта вероятность в 252 раза больше предыдущей: $\frac{C_{10}^5}{2^{10}} = \frac{252}{1024} = 0{,}24609$. Более того, утверждая, что «герб» выпадет 4, 5 или 6 раз, мы еще довольно сильно рискуем ошибиться; вероятность этого события равна $\frac{C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6}{2^{10}} = \frac{672}{1024} = 0{,}65625$. Наиболее достоверный прогноз возможен лишь в отношении события, заключающегося в появлении «герба» хотя бы раз, но особой практической ценности утверждение об осуществлении этого события не имеет, так как это событие противоположно очень маловероятному событию, которое состоит в невыпадении «герба» вовсе. Однако увеличение числа испытаний делает прогноз более содержательным и надежным. При 100 бросаниях симметричной монеты уже без практически ощутимого риска можно заранее утверждать, что число выпавших «гербов» будет лежать между 39 и 61: вероятность этого события равна

$$\frac{\sum\limits_{m=39}^{61} C_{100}^{m}}{2^{100}} = 0{,}97876;$$

следовательно, мы можем считать это событие практически достоверным, но при этом отдавать себе отчет в том, что если, например, данный эксперимент производится 100 раз, то в среднем приблизительно в двух случаях мы будем встречаться с событием, противоположным данному, так как вероятность противоположного события равна 0,02124. Для сравнения укажем, что вероятность того, что число «гербов» заключено между 35 и 65, равна 0,99822.

Решение вопроса о практической достоверности, к которому приводит описанный выше расчет, непосредственно связано с вопросом о том, какими вероятностями можно пренебрегать на практике. Этот последний вопрос решается в каждом отдельном случае по-разному и, как правило, за рамками теории вероятностей. В большинстве случаев пренебрегают уже вероятностями 0,05. Если условия практической задачи позволяют такую долю ошибок (в среднем 5 случаев на каждые 100 экспериментов), то мы считаем событие, происходящее с вероятностью 0,95, практически достоверным. В других, более деликатных, случаях принято пренебрегать лишь вероятностями 0,001, а иногда требовать и еще большего приближения вероятности отсутствия ошибки к единице. Эти рассуждения основаны на практической уверенности в том, что если вероятность события очень мала, то при однократном испытании это событие не осуществляется. Примеры подобных рассуждений о практической достоверности будут обсуждаться в гл. 7.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ВЕРОЯТНОСТЯХ

§ 1. Определение вероятности

Рассмотрим испытания со случайными исходами. Пусть при каждом испытании может появиться любой из n равновозможных исходов, и только они. Обозначим соответствующие события символами E_1, E_2, ..., E_n. При бросании монеты могут появиться только два таких события: E_1 — «герб» и E_2 — «решка». При бросании игральной кости могут произойти 6 событий E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, соответствующие выпадению одного, двух, трех, четырех, пяти и шести очков. Если в лотерее имеются 1000 билетов, то при вынимании одного билета имеются 1000 исходов. Такие события, соответствующие взаимоисключающим исходам испытания, называют элементарными событиями.

Любое возможное множество элементарных событий мы будем называть *случайным событием.* Так, например, при бросании игральной кости выпадение четного числа очков, т. е. появление либо грани с двумя очками, либо с четырьмя, либо с шестью, является случайным событием. Точно так же выпадение грани с тремя очками является случайным событием. Появление любого из событий E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, т. е. появление какого-либо числа очков, также является случайным событием. Это случайное событие обладает одной особенностью, оно обязательно наступает и поэтому называется *достоверным событием.*

Пусть A — некоторое случайное событие и оно наступает вместе с одним из m различных элементарных событий при общем числе n возможных. Вероятностью события A называется отношение m/n, отношение числа благоприятствующих событию A элементарных событий к числу всех возможных. Вероятность события A обозначают символом $P(A)$. Таким образом,

$$P(A) = m/n. \tag{3.1}$$

В частности, при любом i $(1 \leq i \leq n)$

$$P(E_i) = 1/n,$$

а для события U, которое происходит всякий раз, когда наступает какое-то из событий E_i (ему благоприятствуют все возможные исходы),

$$P(U) = 1.$$

Событие U является достоверным.

Пример 1. Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 150 выигрышных. Вынимается произвольный (обычно говорят «наугад») билет из 1000. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Различных элементарных событий в этом примере $n = 1000$. Интересующему нас событию A благоприятствуют 150 элементарных событий, т. е. $m = 150$. Таким образом, по определению

$$P(A) = \frac{150}{1000} = \frac{3}{20}.$$

Пример 2. В полученной партии деталей оказалось 200 деталей первого сорта, 100 деталей — второго сорта и 50 деталей — третьего сорта. «Наудачу» вынимается одна из деталей. Чему равны вероятности получить деталь первого, второго или третьего сорта?

В этом примере $n = 350$. Обозначим через A, B, C случайные события, состоящие, соответственно, в получении детали первого, второго или третьего сорта. Легко видеть, что

$$P(A) = \frac{200}{350} = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{100}{350} = \frac{2}{7}, \quad P(C) = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}.$$

Пример 3. Бросается игральная кость. Чему равны вероятности следующих событий: A — выпадает грань с 6 очками, B — выпадает грань с четным числом очков, C — выпадает грань с числом очков, делящимся на 3?

В нашем примере $n = 6$. Событию A благоприятствует только один исход, событию B — три исхода, событию C — два исхода. Таким образом,

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4. Известно, что в школе с 900 учащимися имеются 60 учеников, которые по всем предметам имеют отличные оценки, 180 учеников только по одному предмету имеют хорошую или удовлетворительную оценку, а по остальным отличные, 150 учащихся не имеют ни одной

Понятие объединения распространяется естественным образом на любое число событий A, B, ..., N: событие $A \cup B \cup \ldots \cup N$ состоит из тех и только тех элементарных событий, которые входят в состав хотя бы одного из событий A, B, ..., N. Например, событие A, приведенное только что для иллюстрации объединения двух событий, мы можем записать в виде объединения $A = E_2 \cup E_4 \cup E_6$.

Пересечением (или произведением) двух событий A и B назовем событие, состоящее из тех и только тех элементарных событий, которые входят как в A, так и в B. Такое событие будем обозначать $A \cap B$ или AB.

В примере с бросанием игральной кости пересечение событий A и B осуществляется при единственном исходе E_6. Таким образом, $AB = E_6$.

Понятие пересечения событий распространяется на любое число событий A, B, ..., N. Пересечением событий A, B, ..., N назовем событие $AB \ldots N$, состоящее из тех и только тех элементарных событий, которые входят в состав каждого их событий A, B, ..., N.

Противоположным событием (или дополнением) события A назовем событие $\overline{A}$, состоящее из всех тех элементарных событий, которые не входят в состав A.

В примере с игральной костью событие $\overline{A} = E_1 \cup E_3 \cup E_5$ состоит в выпадении нечетного числа очков; событие $\overline{B} = E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_5$ состоит в выпадении числа очков, не делящегося на 3.

Очень наглядна и полезна геометрическая иллюстрация только что определенных понятий. Представим себе, что каждое элементарное событие изображается точкой на плоскости. Для того чтобы изобразить некоторое событие, нужно взять в рамки точки, соответствующие благоприятствующим элементарным событиям, и заштриховать полученную область. На рис. 11 изображены события A, B, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, AB.

В этом примере общее число элементарных событий равно 36. Подсчитав число точек, находящихся в соответствующих заштрихованных областях, находим, что

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9},$$

$$P(\overline{A}) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}, \qquad P(\overline{B}) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9},$$

$$P(A \cup B) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, \qquad P(AB) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Говорят, что событие A *влечет* за собою событие B и обозначают это символом $A \subset B$ (или $B \supset A$), если все элементарные события, составляющие A, входят и в B (говорят также, что B содержит A, является следствием A, включает A).

Очевидно, что всегда $A \subset A \cup B$, $AB \subset A$ (конечно, и $B \subset A \cup B$, $AB \subset B$).

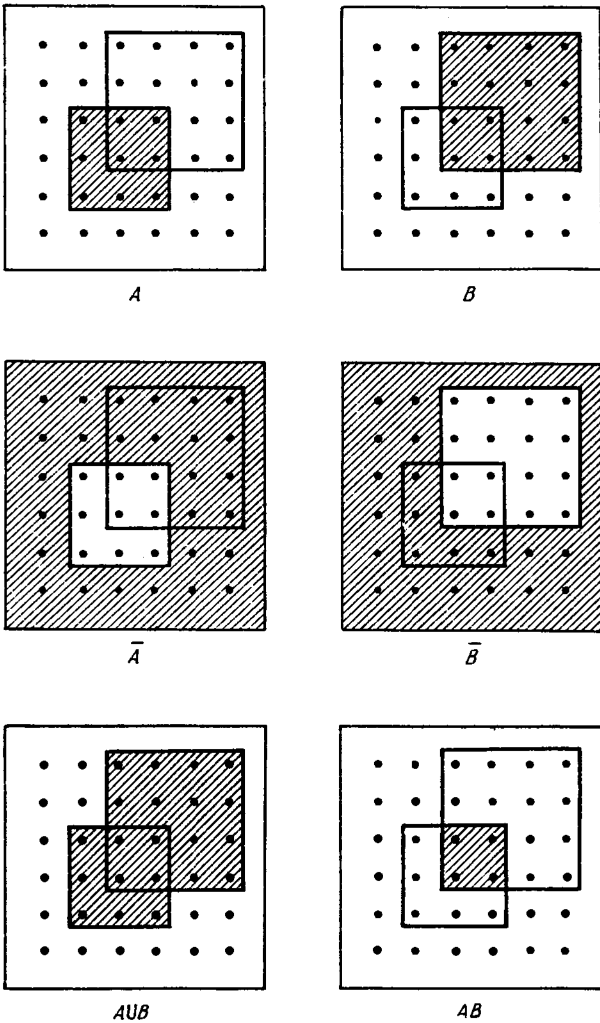


Рис. 11. Геометрическая иллюстрация объединения и пересечения событий

Для операций над событиями часто используют скобки, чтобы показать, в какой последовательности следует производить действия. Например, $(A \cup B)(B \cup C)$ означает, что сначала нужно найти объединение событий A и B, а также B и C, а затем взять пересечение получившихся событий.

Обратим внимание на то, что в том множестве случайных событий, которое мы ввели, операции пересечения событий и нахождения противоположного события выполнимы не всегда. Действительно, если события A и B не содержат общих элементарных событий, то их пересечение при данном нами определении не является событием (оно не состоит из каких-либо элементарных событий). Точно так же, если событие A является достоверным, то противоположное ему событие $\overline{A}$ в множестве случайных событий не определено. Чтобы исключить такие возможности, мы пополним множество случайных событий *невозможным событием*, в которое не входит ни одно из элементарных событий. Иными словами, невозможное событие как множество элементарных событий пусто. Обозначим невозможное событие символом $\varnothing$. Теперь уже можем сказать, что операции пересечения событий и нахождения противоположного события всегда выполнимы. В частности, $\overline{U} = \varnothing$.

Про события A и B говорят, что они *несовместны*, если их пересечение является невозможным событием: $AB = \varnothing$.

Сформулируем теперь главные свойства вероятности.

1. Для каждого случайного события A определена его вероятность $P(A)$, причем $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

2. Для достоверного события U имеет место равенство

$$P(U) = 1.$$

3. Если события A и B несовместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Для противоположных событий A и $\overline{A}$ имеет место равенство

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

5. Для невозможного события $\varnothing$ имеет место равенство $P(\varnothing) = 0$. Для несовместных событий A и B — $P(AB) = 0$.

6. Для произвольных событий A и B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Первые два свойства следуют из определения вероятности случайного события.

Свойство 3 известно под названием *теоремы сложения вероятностей* (для несовместных событий).

Пусть событие A содержит m исходов, а событие B — k исходов. Поскольку, по предположению, события A и B несовместны, то событие $A \cup B$ состоит ровно из $m + k$ исходов. Теперь, по определению,

$$P(A \cup B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n}.$$

Но $P(A) = m/n$, $P(B) = k/n$. Это и доказывает свойство 3.

По определению противоположных событий A и $\overline{A}$ имеем: 1) $A \cup \overline{A} = U$ и 2) A и $\overline{A}$ несовместны. Поэтому в силу свойства 2

$$P(A \cup \overline{A}) = 1,$$

а в силу свойства 3

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

Свойство 4, таким образом, доказано.

Поскольку $P(U) + P(\varnothing) = 1$, то $P(\varnothing) = 1$. Для несовместных событий $AB = \varnothing$ и, следовательно, $P(AB) = 0$. Свойство 5 доказано.

Свойство 6 представляет собой теорему сложения вероятностей в произвольном случае, когда A и B могут быть совместны. Его доказательство следует из представления события $A \cup B$ в виде объединения несовместных событий A и C:

$$A \cup B = A \cup C,$$

где C определяется условием $AC = \varnothing$, $C \cup AB = B$. Используя свойство 3, получаем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(C), \quad P(B) = P(C) + P(AB).$$

Исключая $P(C)$ из двух последних равенств, получаем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Докажем теперь обобщение свойства 3 — теорему сложения вероятностей для произвольного числа несовместных событий. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *попарно несовместны*, т. е. для каждой пары событий A_i и A_j при $i \neq j$ имеет место равенство $A_iA_j = \varnothing$. Тогда

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k) = \\ = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{k-1}) + P(A_k).$$

Действительно, события $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1}$ и A_k несовместны и в сумме дают $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k$. Поэтому в силу свойства 3

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_k) =$$
$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1}) + P(A_k).$$

Но теперь снова события $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-2}$ и A_{k-1} несовместны и в сумме дают $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1}$, поэтому в силу свойства 3

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-2} \cup A_{k-1}) =$$
$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-2}) + P(A_{k-1}).$$

Таким образом,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) =$$
$$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-2}) + P(A_{k-1}) + P(A_k).$$

Повторив проведенные рассуждения еще $k - 3$ раз, мы завершим доказательство обобщенной теоремы сложения.

П р и м е р 1. В зрительном зале кинотеатра имеются 9 рядов, пронумерованных подряд числами от 1 до 9, а в каждом ряду по 9 кресел, также пронумерованных числами от 1 до 9. Зритель наудачу занимает место. Какое из двух событий более вероятно: сумма номеров ряда и мест в ряду окажется четной или нечетной?

Пусть A — событие, состоящее в том, что указанная сумма будет четной. Тогда A распадается на сумму попарно несовместных событий A_2, A_4, A_6, ..., A_{18}, где A_k означает событие, состоящее в том, что сумма номеров ряда и мест оказалась равной k (рис. 12). По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + \ldots + P(A_{18}).$$

Из рис. 12 непосредственным подсчетом получаем

$$P(A_2) = \frac{1}{81}, \quad P(A_4) = \frac{3}{81}, \quad P(A_6) = \frac{5}{81},$$
$$P(A_8) = \frac{7}{81}, \quad P(A_{10}) = \frac{9}{81}, \quad P(A_{12}) = \frac{7}{81},$$
$$P(A_{14}) = \frac{5}{81}, \quad P(A_{16}) = \frac{3}{81}, \quad P(A_{18}) = \frac{1}{81}.$$

Отсюда

$$P(A) = 41/81.$$

Поскольку событие, состоящее в том, что интересующая нас сумма будет нечетной, противоположно событию A, то

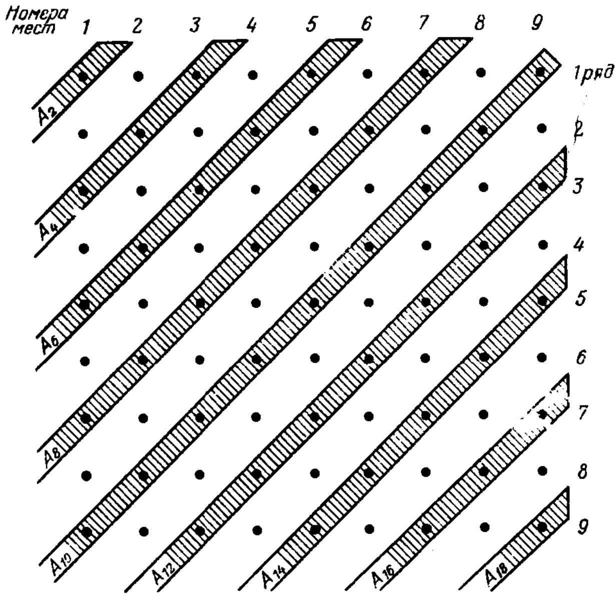


Рис. 12. Иллюстрация к задаче о кинотеатре

его вероятность равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 40/81.$$

Мы видим, таким образом, что $P(A) > P(\overline{A})$.

П р и м е р 2. Имеются три электрические схемы, состоящие каждая из 4 выключателей. Каждый из выключателей с вероятностью 0,5 может быть включен и выключен. Выяснить, для какой из схем, изображенных на рис. 13, вероятность того, что ток будет проходить от точки A к точке B, будет наибольшей.

Под исходом здесь следует понимать состояние всех выключателей. Например, возможен такой исход: первый выключатель включен, второй выключен, третий включен, четвертый выключен. Поскольку выключателей четыре и каждый из них может находиться только в одном их двух допустимых состояний, то всего исходов $2^4 = 16$.

Пусть A обозначает событие, состоящее в том, что схема проводит ток.

Найдем $P(A)$ для схемы I. Для того чтобы схема I проводила ток, необходимо, чтобы все выключатели были включены. Такая возможность только одна. Следовательно, $P(A) = 1/16$.

Для схемы II рассмотрим событие $\overline{A}$, состоящее в том, что схема II ток не проводит. Для этого необходимо, чтобы ни один из выключателей не проводил ток. Событию $\overline{A}$ благоприятствует единственный исход. Таким образом, $P(\overline{A}) = 1/16$ и, значит,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 15/16.$$

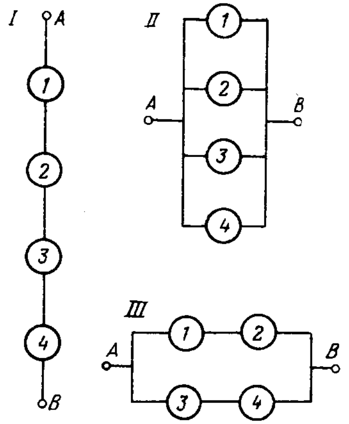


Рис. 13. Электрические схемы к примеру 2

Найдем, наконец, $P(A)$ для схемы III. Событие A мы можем здесь представить в виде объединения попарно несовместных событий A_1, A_2, A_3. Событие A_1 состоит в том, что участок *1* — *2* ток проводит, а участок *3* — *4* ток не проводит. Событие A_2 состоит в том, что участок *3* — *4* ток проводит, а участок *1* — *2* ток не проводит. Событие A_3 состоит в том, что оба участка проводят ток. Очевидно, что события A_1 и A_2 содержат по три элементарных события, а событие A_3 — только одно. Отсюда

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{3 + 3 + 1}{16} = \frac{7}{16}.$$

Итак, самой выгодной схемой, которая с максимальной вероятностью проводит ток, является схема II.

Обобщением свойства 6 на три произвольных события A, B и C служит формула

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - \\ - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Доказательство ее не представляет труда. Обозначим объединение B и C через $D = B \cup C$ и применим свойство 6 к вероятностям $P(A \cup D)$ и $P(B \cup C)$:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(AD),$$

$$P(D) = P(B) + P(C) - P(AC).$$

Тогда имеем

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(AC) - P(AD).$$

Окончательная формула получается из представления:

$$P(AD) = P(A \cap (B \cup C)) = P(AB \cup AC) =$$
$$= P(AB) + P(AC) - P(ABC).$$

Обобщенный вариант теоремы сложения вероятностей для любого числа произвольных событий сформулирован в упражнении 10.

Упражнения

1. Испытание имеет четыре исхода a_1, a_2, a_3, a_4. Перечислить все события. Каково их число?

Ответ: 16.

2. Каков смысл равенств $ABC = A$; $A \cup B \cup C = A$?

Ответ: $A \subset BC$; $A \supset B \cup C$.

3. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$; $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

4. Упростить $(A \cup B)(A \cup \overline{B})$.

Ответ: A.

5. Доказать, что из $A \supset B$ следует неравенство $P(A) \geqslant P(B)$.

6. Какой ответ в примере 1, если в зале 8 рядов, а в каждом ряду 8 мест?

Ответ: Вероятности равны.

7. Игральная кость бросается два раза. Чему равна вероятность того, что сумма очков будет делиться на 3; будет больше 7? Какая из возможных сумм (2, 3, ..., 12) имеет наибольшую вероятность появления при двух бросаниях?

Ответ: 1/3; 5/12; 6/36 — вероятность того, что сумма равна 7.

8. Какая из двух изображенных на рис. 14 электрических схем I и II с большей вероятностью проводит электрический ток?

Ответ: схема II; вероятность для нее равна 21/64.

9. Что вероятнее: при двух бросаниях монеты получить хотя бы раз «герб» или получить подряд два раза «решку»?

Ответ: Более вероятно получить хотя бы раз «герб»; вероятность этого события равна 3/4.

10. Докажите для произвольных событий A_1, A_2, ..., A_n формулу для вероятности события $A = A_1 \cup$

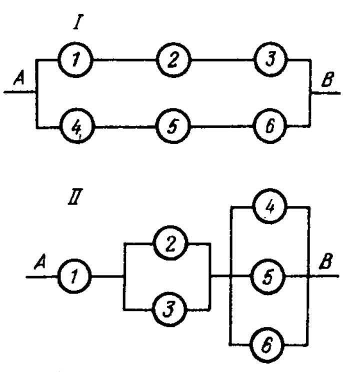


Рис. 14. Электрические схемы к упражнению 8

$\cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, что произойдет хотя бы одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$P(A) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum P(A_iA_j) + \sum P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1, \ldots, A_n)$$

(здесь в правой части в каждой сумме, начиная со второй, суммирование ведется по всем конечным наборам $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots$ таким, что каждое событие A_i входит только один раз в каждое слагаемое суммы).

Указание: Воспользуйтесь методом математической индукции.

11. Пять человек пришли в гости и оставили свои шляпы в гардеробе. Уходя, каждый из гостей взял шляпу «наудачу». Чему равна вероятность того, что каждый из гостей надел чужую шляпу?

Ответ: $1/2! - 1/3! + 1/4! - 1/5! = 11/30$.

§ 3. Элементы комбинаторики

Предварительное знакомство с элементами комбинаторики было начато в гл. 1.

Пусть имеется n элементов (предметов), отличающихся друг от друга какими-либо признаками, например, номерами или индексами. *Размещением* из n элементов по k будем называть любую совокупность элементов из этих n, размещенных в определенном порядке. Различными считаются размещения, в которых или имеются различные элементы, или, если все элементы одни и те же, то различны порядки их расположения.

Пусть для примера: в портфеле имеются такие предметы — ручка (р), карандаш (к), линейка (л), тетрадь (т) и очки (о). Мы просим одного из учащихся достать по очереди два предмета. При этом могут представиться следующие случаи: (р, к), (р, л), (р, т), (р, о), (к, о), (к, р), (к, т), (к, л), (л, р), (л, к), (л, т), (л, о), (т, р), (т, к), (т, л), (т, о), (о, р), (о, к), (о, л), (о, т). На первом месте в скобках выписан предмет, извлеченный из портфеля первым, на втором — извлеченный вторым. Мы выписали все возможные размещения из 5 предметов по 2, их оказалось 20. Часть из этих размещений отличается только порядком элементов, например, первая пара и шестая, вторая и девятая. Некоторые же из них отличаются и элементами — первая пара и вторая, первая и одиннадцатая и т. д.

В приведенном примере было несложно подсчитать число всех возможных размещений путем непосредственного их выписывания. Однако в ряде случаев такое перечисление всех возможных размещений оказывается технически затруднительным или же практически невозможным из-за огромного времени, которое необходимо на эту работу. Естественно поставить вопрос о разыскании общей формулы для числа различных размещений из n элементов по k. Это число обозначается символом A_n^k.

Докажем, что

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

С этой целью разобьем все размещения на n непересекающихся между собой групп. В первую группу включим все размещения, начинающиеся с первого элемента, во вторую — начинающиеся со второго и т. д. Теперь, поскольку в первой группе первый элемент уже фиксирован, мы можем эту группу разбить на $n-1$ подгрупп: в первую подгруппу первой группы мы отнесем те и только те элементы первой группы, у которых второй по порядку элемент будет иметь номер 2. Во второй подгруппе вторым элементом будет элемент с номером 3 и т. д. Эту операцию мы проделаем для каждой группы. В результате мы получим $n(n-1)$ различных подгрупп. Продолжив этот процесс разбиения далее, мы убедимся, что всех размещений будет $n(n-1)\dots(n-k+1)$. Очевидно, что при $k = n$ число различных размещений равно

$$A_n^n = n(n-1)\dots 2\cdot 1.$$

Размещения из n элементов по n называют *перестановками*. Мы ввели перестановки в § 1 гл. 1 и их число совпадает с тем, что обозначено символом $n!$ (n-факториал).

Итак, $A_n^n = n!$ и положим по определению $A_0^0 = 0! = 1$.

Теперь формула для A_n^k может быть записана в иной форме:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещение из n элементов по k, в котором не фиксируется порядок элементов, называется *сочетанием* из n элементов по k. Различными считаются сочетания, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Формула для числа сочетаний, которое мы обозначили символом C_n^k, была найдена в § 8 гл. 1. Здесь же мы выведем эту формулу, пользуясь понятием числа размещений A_n^k.

Рассмотрим все размещения из n элементов по k. Разобьем их на различные группы, в каждой из которых размещения различаются только порядком элементов, но не составом, а две различные группы отличаются хотя бы одним элементом. Очевидно, что число различных размещений равно A_n^k, а число различных групп совпадает с числом C_n^k сочетаний из n элементов по k. Но внутри каждой из групп содержится столько размещений, сколькими способами можно переставить k различных предметов, т. е. A_k^k. Таким образом,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{A_k^k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

По определению

$$C_n^0 = 1.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров использования комбинаторных формул для разыскания вероятностей случайных событий.

П р и м е р 1. Пять друзей живут вместе. Они решили, что утром они будут тянуть жребий — кому из них пойти в магазин, чтобы купить к завтраку свежего хлеба. На одной из пяти бумажек будет стоять буква «x» и тот, кто вытянет талон с этой буквой, должен идти за покупкой. Для кого из друзей вероятность вытянуть талон «x» будет наименьшей: для того, кто тянет жребий первым, вторым, третьим, четвертым или пятым?

Исходом здесь следует назвать любую из 5! перестановок 5 (талонов). Найдем вероятность того, что билет «x» достанется k-му по счету другу. Этому событию благоприятствуют все случаи, в которых талон «x» вытаскивается k-м по счету, а остальные четыре талона могут появляться на любом по счету месте. Это может произойти 4! способами. Таким образом, вероятность вытянуть талон «x» k-му по счету другу равна

$$P_k = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}.$$

Эта вероятность не зависит от k, т. е. от того, каким по порядку очередности вытягивать жребий, так что последний в очереди имеет такую же вероятность вытянуть жребий, как и первый.

Этой задаче можно придать и другие различные, интересные в прикладном отношении формулировки.

П р и м е р 2. В ящике имеются 10 белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 3 из них. Какое соотношение шаров по цвету среди вынутых шаров наиболее вероятно?

Обозначим через $A_{i,j}$ событие, состоящее в том, что среди трех извлеченных шаров i окажутся белыми, а j — черными,

$i + j = 3$. Очевидно, что могут осуществиться такие события: $A_{3,0}$, $A_{2,1}$, $A_{1,2}$, $A_{0,3}$. Так как порядок извлечения шаров нас не интересует, то под элементарным событием следует понимать любое сочетание трех шаров из 15. Тогда событие $A_{3,0}$ состоит из C_{10}^3 элементарных событий (вынимаются какие-то 3 из 10 белых шаров), событие $A_{2,1}$ состоит из $C_{10}^2 C_5^1$ элементарных событий, событие $A_{1,2}$ — из $C_{10}^1 C_5^2$ элементарных событий и $A_{0,3}$ из C_5^3 элементарных событий. Вероятности интересующих нас событий равны

$$P(A_{3,0}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91} \approx 0{,}264,$$

$$P(A_{2,1}) = \frac{C_{10}^2 C_5^1}{C_{15}^3} = \frac{45}{91} \approx 0{,}494,$$

$$P(A_{1,2}) = \frac{C_{10}^1 C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91} \approx 0{,}220,$$

$$P(A_{0,3}) = \frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91} \approx 0{,}022.$$

Таким образом, наиболее вероятно появление двух белых и одного черного шара.

П р и м е р 3. В совокупности из $M + N$ предметов M предметов обладают некоторым свойством A, а N предметов не обладают. Из этой совокупности предметов вынимают наудачу k предметов. Спрашивается: чему равна вероятность того, что будут извлечены m предметов со свойством A и $n = k - m$ предметов, не обладающих этим свойством?

Эта задача играет большую роль в области практического применения математики в демографии, статистике населения, статистическом контроле качества продукции.

Исход этого испытания состоит в появлении любых k предметов из числа $M + N$. Поскольку нас не интересует порядок появления этих предметов, общее число различных элементарных событий равно C_{M+N}^k. Очевидно, что $0 \leqslant m \leqslant M$ или $0 \leqslant m \leqslant n$ и $0 \leqslant n \leqslant N$, в ином случае вероятность появления интересующего нас события равна 0. Извлечь m предметов со свойством A можно C_M^m различными способами. Но каждый способ извлечения m предметов со свойством A может сочетаться с любым способом извлечения n предметов, не обладающих этим свойством. Следовательно, общее число благоприятствующих исходов равно $C_M^m \cdot C_N^n$, а искомая вероятность равна

$$\frac{C_M^m \cdot C_N^m}{C_{M+N}^{m+n}}.$$

Пример 4. Имеются N ячеек и n частиц. Частицы «наудачу» размещаются по ячейкам. Найти вероятность каждого из возможных размещений.

Эта задача представляет значительный интерес для ряда важных проблем физики, химии, биологии, техники. В зависимости от специфического существа проблемы слово «наудачу» имеет различный смысл. Мы расскажем о трех различных подходах, разработанных в физике и приведших к статистикам Максвелла — Больцмана, Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака.

а) Статистика Максвелла — Больцмана. Предположим, что все частицы и все ячейки различны и каждая из n частиц с вероятностью $1/N$ может попасть в любую ячейку независимо от других частиц. Число всевозможных различных расположений частиц по ячейкам, как легко понять, равно N^n. Найдем теперь вероятность того, что в первой ячейке окажутся n_1 частиц, во второй — n_2, в N-й — n_N. Понятно, что некоторые из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$ могут оказаться нулями. На формулу для числа сочетаний из n элементов по m можно смотреть как на размещение n элементов по двум ячейкам ($N = 2$), причем $n_1 = m$ и $n_2 = n - m$. Повторив почти дословно рассуждения, проведенные нами при выводе формулы для числа сочетаний, мы получаем, что число всех возможных различных способов размещения n элементов по N ячейкам, при котором в первую из них попадает n_1 элементов, во вторую — n_2 элементов и, наконец, в N-ю — n_N элементов ($n_N = n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{N-1}$), равно

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_N!}.$$

Теперь ясно, что вероятность указанного размещения равна

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_N) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_N!\, N^n}.$$

Рассмотрим эту задачу при $n \leqslant N$ и найдем вероятность того, что в *определенных* ячейках окажется по одной частице, а остальные будут пусты. Искомая вероятность, как это вытекает из формулы, равна

$$p_1 = \frac{n!}{N^n}.$$

Вероятность того, что произвольные ячейки содержат по одной частице, больше в C_N^n раз и, таким образом, эта вероятность равна

$$p_2 = C_N^n p = \frac{N!}{N^n (N-n)!}.$$

б) Статистика Бозе — Эйнштейна. Предположим, что частицы неразличимы между собой. Тогда размещения отличаются не номерами частиц, а числом частиц, попавших в каждую ячейку. Число исходов в статистике Бозе — Эйнштейна, как мы сейчас покажем, равно C_{N+n-1}^n. Этот результат имеет простое и изящное комбинаторное решение.

Расположим в один ряд $N+1$ вертикальную черточку и n точек; именно, имеется в виду, что $N-1$ черточка и n точек расположены в произвольном порядке между двумя крайними черточками. Каждый промежуток между двумя соседними черточками будем рассматривать как ячейку, а точки — как частицы (всего ячеек N; если две черточки стоят рядом, то соответствующая ячейка считается пустой). Две крайние черточки оставим неподвижными, а $N-1$ внутреннюю черточку и n точек станем переставлять всеми возможными способами. Общее число возможных перестановок черточек и точек равно $(N+n-1)!$, однако среди них имеются тождественные. В самом деле, различными перестановками мы считали, во-первых, те, в которых меняются местами черточки, и, таким образом, мы считали каждое размещение $(N-1)!$ раз. Во-вторых, мы считали различными сами точки и тем самым каждое размещение мы считали $n!$ раз. Поэтому число различных размещений частиц по ячейкам для статистики Бозе — Эйнштейна равно

$$\frac{(N+n-1)!}{(N-1)!n!} = C_{N+n-1}^n.$$

Рассмотрим теперь вероятности p_1 и p_2 для статистики Бозе — Эйнштейна. Вероятность попадания в *заданные* n ячеек ($n < N$) по одной частице равна

$$p_1 = \frac{1}{C_{N+n-1}^n} = \frac{n!\,(N-1)!}{(N+n-1)!}.$$

Вероятность попадания в произвольные n ячеек по одной частице равна

$$p_2 = \frac{C_N^n}{C_{N+n-1}^n} = \frac{N!\,(N-1)!}{(N+n-1)!\,(N-n)!}.$$

в) Статистика Ферми — Дирака. В этой статистике не только устранена индивидуальность частиц, но и предполагается, что в каждой ячейке может находиться не более одной частицы. Общее число различных размещений n частиц по N ячейкам ($n \leq N$) равно C_N^n (это число уже определялось при расчете вероятности p_2 в случае а)).

Вероятности p_1 и p_2 в статистике Ферми — Дирака равны

$$p_1 = \frac{1}{C_N^n} = \frac{n!\,(N-n)!}{N!}, \quad p_2 = 1.$$

Упражнения

1. Найдите вероятность того, что два лица A и B окажутся рядом, если они рассаживаются вместе с 15 остальными произвольным образом в ряд, насчитывающий 17 мест?

Ответ: $\dfrac{2!16!}{17!} = 2/17$.

2. n девочек и n мальчиков рассаживаются произвольным образом в ряду из $2n$ мест. Какова вероятность того, что никакие две девочки не окажутся рядом; что все девочки будут сидеть рядом?

Ответ: $\dfrac{2\,(n!)^2}{(2n)!}$, $\dfrac{(n+1)\,(n!)^2}{(2n)!}$.

3. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи (белую и черную), каждую в свою клетку. Что вероятнее: побьют эти ладьи друг друга или нет?

Ответ: вероятнее, что не побьют; вероятность этого равна $\dfrac{64 \cdot 49}{64 \cdot 63} = 49/63$.

§ 4. Условные вероятности и независимость; теорема умножения вероятностей

При решении вероятностных задач часто возникает необходимость определить вероятность события в ситуации, когда о нем имеются некоторые дополнительные сведения. Обычная постановка проблемы при этом такова: нужно найти вероятность события A после того, как стало известно, что некоторое событие B произошло; иными словами, известно, что имел место некоторый исход, благоприятствующий событию B. Так, если нам нужно определить вероятность того, что число очков при бросании игральной кости будет четным, а нам стало известно, что выпало число очков, меньшее 4; это означает, что наступлению интересующего нас события благоприятствует только один из трех возможных исходов.

Предположим, что из общего числа N возможных исходов m исходов благоприятствуют наступлению события B, а событию AB благоприятствуют k исходов. Пусть событие B наступило.

Условной вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется отношение числа тех благоприятствующих A исходов, которые благоприятствуют и B, к числу всех исходов, благоприятствующих B. Эту вероятность будем обозначать символом $P(A/B)$. Тогда по определению

$$P(A/B) = k/m.$$

Если B — невозможное событие, то будем считать, что вероятность $P(A/B)$ не определена.

Заметим, что

$$P(A/B) = \frac{k/n}{m/n},$$

но $P(AB) = k/n$, $P(B) = m/n$. Поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Мы получили важное соотношение, позволяющее вычислять условную вероятность $P(A/B)$ по вероятностям $P(AB)$ и $P(B)$ (последние вероятности естественно назвать *безусловными*). Заметим, что полученная формула служит определением условной вероятности и в общем случае.

Пример 1. Трое ваших приятелей живут в каких-то из домов с номерами от 1 до 50. В каждом из этих домов по 100 квартир с номерами от 1 до 100. Где живет каждый из ваших приятелей, вы точно не знаете. Вам известно лишь, что а) номер квартиры первого оканчивается на 3; б) номер дома второго делится на 5, а номер его квартиры — на 2; в) сумма номеров квартиры и дома третьего равна 100.

В каком из этих случаев вероятность попасть в нужную вам квартиру с первого раза наибольшая?

Обозначим через A событие: номер квартиры оканчивается на 3. Ясно, что число всевозможных элементарных событий, благоприятствующих A, будет $50 \cdot 10 = 500$.

Пусть B — событие, состоящее в том, что номер дома делится на 5, а номер квартиры — на 2. Очевидно, что и B состоит из $10 \cdot 50 = 500$ элементарных событий.

Далее, C — событие, для которого сумма номера дома и номера квартиры равна 100. Для C имеется 50 элементарных событий.

Наконец, D — событие, состоящее в том, что с первого захода удается попасть в нужную квартиру.

Искомые вероятности равны

$$P(D/A) = \frac{1}{500}, \ P(D/B) = \frac{1}{500}, \ P(D/C) = \frac{1}{50}.$$

Для сравнения приведем безусловную вероятность события D:

$$P(D) = \frac{1}{5\,000}.$$

Сформулируем здесь свойства условных вероятностей, подобные свойствам безусловных вероятностей из § 2.

1. Всегда $0 \leqslant P(A/B) \leqslant 1$, причем $P(A/B) = 0$, если AB — невозможное событие, и $P(A/B) = 1$, если $A \supset B$.

2. Если $C = A \cup B$ и $AB = \varnothing$, то для любого события

$$P(A/D) + P(B/D) = P(C/D).$$

Эта теорема сложения вероятностей распространяется и на случай, когда $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$, $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, k$:

$$P(A/D) = P(A_1/D) + P(A_2/D) + \ldots + P(A_k/D).$$

3. Если $\overline{A}$ — событие, противоположное A, то

$$P(\overline{A}/B) = 1 - P(A/B).$$

Выписанные свойства доказываются точно так же, как и аналогичные свойства для безусловных вероятностей. Доказательство этих свойств может стать для вас хорошим упражнением.

П р и м е р 2. Электрические схемы, о которых речь пойдет дальше, собраны из элементов, которые могут в момент включения с вероятностью 0,5 проводить ток и с вероятностью 0,5 не проводить ток. Состояние каждого из элементов не влияет на состояние других.

а) Известно, что цепь (рис. 15) проводит ток. Какова вероятность того, что элемент *1* проводит ток? Какова вероятность того, что элемент *2* проводит ток? Какая из вероятностей больше?

б) Известно, что цепь (рис. 16) проводит ток. Чему равны вероятности того, что ток проводят участки I, II и III?

в) Известно, что цепь (рис. 17) не проводит ток. Каковы вероятности того, что ток не проводят участки I, II и III?

Р е ш е н и е. а) Поскольку в цепи имеются 5 элементов и каждый из них может находиться в одном из двух

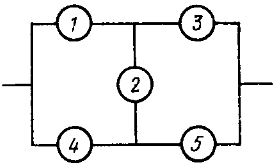


Рис. 15. Электрическая схема к примеру 2

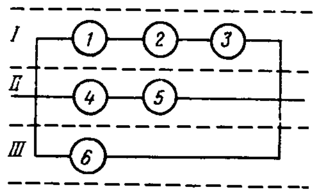


Рис. 16. Электрическая схема к примеру 2

состояний, то цепь может находиться в $2^5 = 32$ состояниях. Введем обозначения: A_1 — событие, состоящее в том, что элемент *1* проводит ток; A_2 — событие, состоящее в том, что элемент *2* проводит ток; B — вся цепь проводит ток.

Из всех 32 возможных состояний элементов цепи в 16 она проводит ток. В этом легко убедиться, выписав все

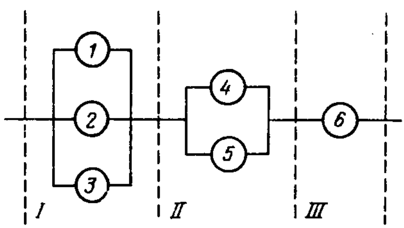


Рис. 17. Электрическая схема к примеру 2

возможные состояния. В следующей ниже табличке буква *п* обозначает слово «проводит», буква *н* — слово «не проводит»; место буквы означает номер элемента, знак «+» означает, что цепь проводит, а знак «—» — что цепь не проводит ток.

ппппп +	(1 +)
С одной буквой *н* все проводят	(5 +)
нппнп —, *ппнпн* —	(2—)
Все остальные с двумя буквами *н* проводят	(8 +)
пнпнн +, *нннпп* +	(2 +)
Все остальные с тремя буквами *н* не проводят	(8—)
С четырьмя буквами *н* все не проводят	(5—)
ннннн—	(1—)

Таким образом, $P(B) = 0{,}5$. Далее находим, что $P(A_1B) = 11/32$ и $P(A_2B) = 9/32$. Отсюда находим, что

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{11/32}{16/32} = \frac{11}{16},$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{9}{16}.$$

б) Введем следующие обозначения событий: A_1 — участок I проводит ток, A_2 — участок II проводит ток, A_3 — участок III проводит ток, B — цепь проводит ток. Легко подсчитать $P(\bar{B})$, т. е. вероятность того, что цепь не проводит ток. Для этого нужно, чтобы ни один из участков не проводил ток. Из 64 возможных исходов 21 благоприятствует этому событию. Таким образом, $P(B) = 43/64$.

Так как A_1 влечет за собой B, то $A_1B = A_1$. Но событию A_1 благоприятствуют ровно 8 исходов — элементы *1*, *2*, *3* проводят ток, а элементы *4*, *5*, *6* могут находиться в любых состояниях (а таких состояний всего 8). Таким образом, $P(A_1B) = 8/64$. Подобным же способом убеждаемся в том, что $P(A_2B) = 16/64$ и $P(A_3B) = 32/64$.

Следовательно,

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{8}{43},$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{16}{43},$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3B)}{P(B)} = \frac{32}{43}.$$

Решение задачи в) ничем не отличается от решения задачи б), только повсюду следует заменить слово «проводит» на слово «не проводит». Искомые вероятности оказываются равными соответственно 8/43, 16/43, 32/43.

В теории вероятностей очень важную роль играет понятие *независимости* случайных событий.

Событие A называется *независимым* от события B, если имеет место равенство $P(A/B) = P(A)$, т. е. если условная вероятность события A при условии, что событие B произошло, совпадает с безусловной вероятностью события A.

Приведем некоторые примеры.

П р и м е р 3. Из колоды карт вынимают наудачу карту. Чему равна вероятность того, что эта карта окажется тузом? Если в колоде 36 карт, то легко видеть, что искомая вероятность равна $4/36 = 1/9$. Итак, вероятность события A равна

1/9. Предположим теперь, что произошло событие B, состоящее в том, что вынутая карта оказалась черной. Чему равна условная вероятность вынуть туз при этом дополнительном условии? Легко видеть, что теперь у нас имеются только 18 возможностей и из них 2 благоприятствуют событию A. Таким образом, условная вероятность события A при условии, что B наступило, равна безусловной вероятности. Событие A не зависит от события B.

Пример 4. В классе 4 ученика, имеющих неудовлетворительные оценки по предметам A, B и C. Первый ученик имеет неудовлетворительную оценку по предмету A, второй — по предмету B, третий — по предмету C, а четвертый — по всем этим трем предметам. Директор школы знает, что у этих четырех учеников неудовлетворительные оценки по предметам A, B и C, но не знает, у какого ученика, по какому предмету. Во время перемены он встречает одного из учеников и говорит ему: «Когда же ты исправишься по предмету A?» Ясно, что какой бы предмет он ни назвал, он скажет правильно только с вероятностью 0,5:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5.$$

Пусть теперь нам стало известно, что директор угадал: действительно, у этого ученика имеется неудовлетворительная оценка по предмету A. Тогда директор добавляет: «Тебе нужно исправить твои оценки и по предмету B». С какой вероятностью директор не ошибается и на этот раз? Легко подсчитать, что

$$P(B/A) = P(C/A) = P(A/B) = P(A/C) = P(B/C) = 0{,}5.$$

Мы видим, что и в этом примере события A, B, C, состоящие в том, что наудачу спрошенный из этих четырех учеников имеет неудовлетворительную оценку по предмету A (соответственно по предмету B и C), таковы, что каждая пара из этих событий является независимой.

Пусть события A и B не являются невозможными. Докажем, что в этом случае событие A не зависит от B, и событие B не зависит от A. Иными словами, докажем, что свойство независимости случайных событий является взаимным.

Пусть $P(A/B) = P(A)$ и $P(B) > 0$. Мы имеем в силу определения независимости и определения условной вероятности следующие равенства:

$$P(A/B) = P(A), \quad P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

откуда $P(AB) = P(A)P(B)$. Но по определению $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, если $P(A) > 0$. Поскольку в нашем случае $P(AB) = P(A)P(B)$, то

$$P(B/A) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Из проведенного доказательства вытекает важное следствие: для независимых событий A и B имеет место теорема умножения вероятностей

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Нетрудно доказать и обратное утверждение: если $P(AB) = P(A)P(B)$, то события A и B независимы. Очевидно, что свойство независимости, выражаемое последней формулой, имеет бóльшую применимость, поскольку включает случай $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Теорема умножения вероятностей для произвольных событий имеет вид

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Обобщим понятие независимости на любое число событий.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности* (или *взаимно независимыми*), если для любого s, $2 \leqslant s \leqslant n$, и произвольного набора событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_s}$ выполняется теорема умножения вероятностей в виде

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_s}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_s}).$$

Заметим, что в примере 4 с учениками события A, B и C в совокупности уже не являются независимыми (проверьте это!).

П р и м е р 5. Игральная кость бросается два раза. Рассмотрим событие A — при первом бросании выпало 6 очков и событие B — при втором бросании выпало нечетное число очков. Докажем, что события A и B независимы.

В нашем опыте имеются 36 различных элементарных событий. Из них шесть следующих благоприятствуют событию A: (6,1), (6,2), (6,3), (6,5), (6,6).

Событие B включает 18 элементарных событий, поскольку каждое выпадение нечетного числа очков при втором бросании может сочетаться с любым из шести возможных исходов первого бросания. Событие AB будет содержать только следующие три элементарные события: (6,1), (6,3), (6,5). Таким образом,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

и

$$P(AB) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B),$$

что и требовалось доказать.

Нетрудно показать, что при n бросаниях игральной кости события, связанные с отдельными бросаниями, будут независимы в совокупности. Доказательство проводится аналогично проведенному рассуждению для случая двух бросаний.

Мы перейдем теперь к выводу простой, но важной формулы, носящей наименование формулы полной вероятности, которая связывает безусловную и условную вероятности некоторого события.

Пусть для событий A, B_1, B_2, ..., B_k определены и отличны от нуля следующие вероятности: $P(B_1)$, $P(B_2)$, ..., $P(B_k)$ и $P(A/B_1)$, $P(A/B_2)$, ..., $P(A/B_k)$. Пусть далее нам известно, что $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ и что события B_i попарно несовместны. Можно ли по этим данным найти вероятность события A и, если можно, то как? Ответ на этот вопрос и дает формула полной вероятности.

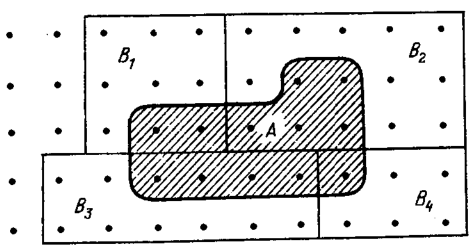


Рис. 18. К выводу формулы полной вероятности

Прежде всего заметим, что имеет место равенство

$$A = A(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k) = AB_1 \cup AB_2 \cup \ldots \cup AB_k.$$

Это равенство хорошо иллюстрируется на рис. 18, схематизирующем ситуацию для случая четырех событий B_1, B_2, B_3, B_4.

Из несовместности событий B_i вытекает несовместность событий AB_i. Следовательно, можно воспользоваться теоремой сложения вероятностей:

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + ... + P(AB_k).$$

Но при любом i $(1 \leqslant i \leqslant k)$

$$P(AB_i) = P(B_i)\, P(A/B_i),$$

поэтому

$$P(A) = P(B_1)\, P(A/B_1) + \\ + P(B_2)\, P(A/B_2) + ... + P(B_k)\, P(A/B_k).$$

Это и есть формула полной вероятности.

Пример 6. Партия деталей содержит 20 % деталей, изготовленных заводом I, 30 % — заводом II 50 % — заводом III. Для завода I вероятность выпуска бракованной детали равна 0,05, для завода II — 0,01, для завода III — 0,06. Чему равна вероятность того, что наудачу взятая из партии деталь окажется бракованной?

Введем следующие события: A — выбранная деталь оказывается бракованной, B_1, B_2, B_3 — деталь изготовлена соответственно заводом I, II, III. Нам известны вероятности:

$$P(B_1) = 0{,}2,\ \ P(B_2) = 0{,}3,\ \ P(B_3) = 0{,}5,$$
$$P(A/B_1) = 0{,}05,\ \ P(A/B_2) = 0{,}01,\ \ P(A/B_3) = 0{,}06.$$

По формуле полной вероятности находим, что

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 + 0{,}5 \cdot 0{,}06 = 0{,}043.$$

Простым следствием формулы полной вероятности является так называемая теорема Байеса:

Пусть события B_i попарно несовместны и $A \subset \subset B_1 \cup ... \cup B_k$, тогда

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\, P(A/B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{k} P(B_j)\, P(A/B_j)}.$$

В самом деле, из теоремы умножения вероятностей

$$P(AB) = P(B/A)\, P(A),$$
$$P(AB) = P(A/B)\, P(B)$$

следует формула (*формула Байеса*)

$$P(B/A) = \frac{P(B)\,P(A/B)}{P(A)}.$$

Подставим в эту формулу выражение для $P(A)$ по формуле полной вероятности и положим $B \equiv B_j$, и тогда получим утверждение теоремы Байеса.

Значение этой теоремы, открытой Т. Байесом в 1763 году, заключается в том, что она связывает вероятности $P(B_j/A)$ событий B_j после наступления события A с вероятностями $P(B_j)$ до наступления A. В статистических применениях события B_i часто называют «гипотезами», вероятности $P(B_j)$ — «априорными» (от лат. a priori — до опыта) вероятностями гипотез B_j, а вероятности $P(B_j/A)$ — «апостериорными» (от лат. a posteriori — после опыта) вероятностями гипотез B_j после наступления события A.

Проиллюстрируем теорему Байеса на материале примера 7.

П р и м е р 7. Пусть выполнены условия примера 6. Наудачу выбранная деталь из партии оказалась бракованной. Чему равна вероятность, что она была изготовлена заводом I, заводом II, заводом III?

Будем придерживаться обозначений примера 6. Нам необходимо найти вероятности $P(B_1/A)$, $P(B_2/A)$, $P(B_3/A)$. По теореме Байеса

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\,P(A/B_1)}{\sum\limits_{j=1}^{3} P(B_j)\,P(A/B_j)} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{0{,}043} \approx 0{,}233,$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}3\cdot 0{,}01}{0{,}043} \approx 0{,}070,$$

$$P(B_3/A) = \frac{0{,}5\cdot 0{,}06}{0{,}043} \approx 0{,}698.$$

Итак, вероятность того, что бракованная деталь принадлежит заводу III, в десять раз больше, чем та же вероятность для завода II, и в три раза больше, чем та же вероятность для завода I.

Упражнения

1. При каком условии вероятнее угадать результат бросания двух игральных костей: если известно, что сумма очков равна 7 или если она равна 10?

Ответ: если сумма равна 10, то вероятность любого результата равна 1/3; если сумма равна 7, то вероятность равна 1/6.

2. Может ли быть верна формула

$$P\{(A_1 \cup A_2)/B\} = P\{A_1/B\} + P\{A_2/B\},$$

если A_1A_2 — не пустое событие?

Ответ: Может. Например, если $B = \overline{A_1A_2}$.

3. Имеются четыре урны со следующим составом шаров: 1-я урна — 5 белых и 5 черных; 2-я урна — 1 белый и 2 черных; 3-я урна — 2 белых и 5 черных; 4-я урна — 3 белых и 7 черных. Наудачу выбирается урна и из нее один шар. Чему равна вероятность того, что он окажется черным?

Ответ: $\frac{1}{4}(1/2 + 2/3 + 5/7 + 7/10) = 271/420$.

4. Имеются три схемы с ненадежными элементами (рис. 19). Наудачу выбирается произвольная из них. Какова вероятность того, что она проводит ток?

Ответ: $\frac{1}{3}(1/8 + 5/8 + 7/8) = 13/24$.

5. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 1/4, выжить с вероятностью 1/4, разделиться на две с вероятностью 1/2. В следующий промежуток времени с каждой амебой происходит то же самое. Сколько амеб и с какими вероятностями будут существовать к концу второго промежутка времени?

Ответ: если при $t = 0$ число амеб было равно 1, то число амеб к концу второго промежутка будет 0, 1, 2, 3, 4 с вероятностями 11/32, 4/32, 9/32, 4/32, 4/32.

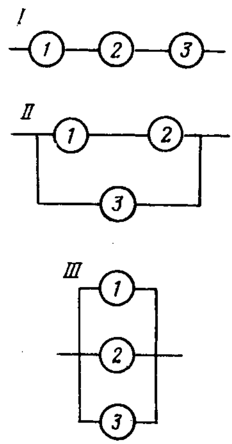


Рис. 19. Электрические схемы к упражнению 4

6. Игрок A называет число 0 с вероятностью p_1 и число 1 с вероятностью $1 - p_1 = q_1$. Игрок B независимо от A называет те же числа с вероятностями, соответственно, p_2 и $1 - p_2 = q_2$. Если сумма чисел четная (точнее, 0 или 2), то выигрывает игрок A; если же сумма нечетная (именно 1), то выигрывает B. Каковы вероятности выигрыша для каждого из игроков? Если A знает p_2, то как ему следует выбирать p_1, чтобы добиться максимальной вероятности выигрыша?

Ответ: Вероятности выигрыша: $p_1p_2 + q_1q_2$ — для игрока A; $p_1q_2 + p_2q_1$ — для игрока B; $p_1 = 1$, если $p_2 > 0{,}5$; $p_1 = 0$, если $p_2 < 0{,}5$; при $p_2 = 0{,}5$ вероятность выигрыша игрока A равна 0,5 при любом p_1.

7. У мальчика в левом кармане три конфеты «Белочка» и одна конфета «Маска», а в правом — две «Белочки» и две «Маски». Он достал две конфеты из одного кармана и оказалось, что одна из них «Белочка», а другая «Маска». Чему равны вероятности того, что он достал конфеты из левого кармана, из правого кармана?

Ответ: 3/4, 4/7.

8. Докажите обобщение теоремы умножения вероятностей:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}),$$

$$P(A_1 \ldots A_n/C) = P(A_1/C)\,P(A_2/A_1C) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}C).$$

9. Докажите обобщение формулы полной вероятности:

$$P(A/C) = P(B_1/C)\,P(A/B_1C) + \ldots + P(B_k/C)\,P(A/B_kC).$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 1. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли

В самом начале формирования основных понятий теории вероятностей выяснилась фундаментальная роль одной математической модели, изученной известным швейцарским математиком Я. Бернулли (1654—1705). Эта модель состоит в следующем: производятся последовательные испытания, в каждом из которых вероятность наступления определенного события A одна и та же и равна p. Испытания предполагаются независимыми; в это вкладывается следующий смысл: события A и $\bar{A}$ в каждом из испытаний являются независимыми от событий A и $\bar{A}$ в других испытаниях (предшествующих или последующих). Последовательность таких независимых испытаний с двумя исходами носит название последовательности *испытаний Бернулли*.

Задача состоит в следующем: в последовательности n испытаний Бернулли, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p, найти вероятность того, что событие A наступит ровно m раз.

Заметим сначала, что в каждом испытании нас интересуют два исхода — наступление и ненаступление события A (по традиции — «удача» и «неудача»). Вероятность ненаступления события A (наступления события $\bar{A}$) в определенном испытании равна

$$q = 1 - p.$$

Вероятность того, что событие A наступит в определенных m испытаниях и не наступит в определенных $n - m$ испытаниях, в силу теоремы умножения вероятностей для независимых событий равна

$$p^m q^{n-m}.$$

Но m испытаний, в которых происходит событие A, может быть выбрано из n возможных испытаний C_n^m способами.

Поэтому, в силу теоремы сложения вероятностей, искомая вероятность, которую мы будем обозначать символом $P_n(m)$, равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4.1}$$

Эта вероятность называется *биномиальной*; формулу (4.1) мы будем называть здесь *формулой Бернулли.*

Формула Бернулли дает, в частности, вероятность того, что событие A произойдет во всех n испытаниях, и она равна

$$P_n(n) = p^n;$$

вероятность того, что A не произойдет ни разу, равна

$$P_n(0) = q^n.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В семье 10 детей. Считая для упрощения, что вероятность рождения мальчика равна 0,5, найдем вероятность того, что в семье имеются 0, 1, 2, ..., 10 мальчиков. Заметим, что в силу равенства $C_n^m = C_n^{n-m}$ и предположения $p = q = 0{,}5$ имеют место равенства $P_n(m) = P_n(n-m)$. Таким образом,

$$P_{10}(0) = P_{10}(10) = C_{10}^0 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024},$$

$$P_{10}(1) = P_{10}(9) = C_{10}^1 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(2) = P_{10}(8) = C_{10}^2 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{45}{1024},$$

$$P_{10}(3) = P_{10}(7) = C_{10}^3 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024},$$

$$P_{10}(4) = P_{10}(6) = C_{10}^4 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{210}{1024},$$

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{252}{1024}.$$

Мы видим, таким образом, что с вероятностью, близкой к 0,25, в многодетной семье с десятью детьми мальчиков и девочек будет поровну. Вероятность же того, что в семье будут только мальчики или только девочки, очень мала — чуть меньше одной пятисотой. С вероятностью $672/1024 = 21/32 \approx 2/3$ в столь многодетных семьях будет четыре мальчика и шесть девочек, или пять мальчиков и пять девочек, или шесть мальчиков и четыре девочки.

П р и м е р 2. На испытательный стенд поставлены 100 конденсаторов. Известно, что вероятность пробоя конденсатора до истечения 10 000 часов равна 0,01. Чему равны вероятности того, что за 10 000 часов откажут 0, 1, 2, 3 конденсатора?

Согласно формуле (4.1) имеем

$$P_{100}(0) = 0{,}99^{100} = 0{,}3660,$$
$$P_{100}(1) = 100 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99^{99} = 0{,}3697,$$
$$P_{100}(2) = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}01^2 \cdot 0{,}99^{98} = 0{,}1848,$$
$$P_{100}(3) = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{97} = 0{,}0185.$$

Вероятность того, что во время испытаний будут пробои более чем у трех конденсаторов, невелика:

$$1 - [P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3)] = 0{,}0185.$$

П р и м е р 3. Известно, что в некотором городе за определенный период родилось 400 детей. Чему равна вероятность того, что число родившихся мальчиков оказалось больше 180 и меньше 220, если вероятность появления мальчика при каждом рождении равна 0,5?

Нам нужно найти вероятность того, что число родившихся мальчиков будет равно или 181, или 182, или 183, ..., или 219. Искомая вероятность равна

$$\sum_{m=181}^{219} P_{400}(m) = \sum_{m=181}^{219} C_{400}^m \cdot \frac{1}{2^{400}}.$$

Если граничные значения 180 и 220 желательно включить в интересующую нас группу событий, то нужно к полученной сумме прибавить и вероятности двух этих событий:

$$\sum_{m=180}^{220} C_{400}^m \cdot \frac{1}{2^{400}}.$$

Однако эти вероятности отличаются друг от друга очень мало, поскольку

$$P_{400}(180) = P_{400}(220) \approx 0{,}005.$$

П р и м е р 4. Два шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии первым игроком равна 2/3, вероятность выигрыша каждой отдельной партии вторым игроком равна 1/3 (ничьи не считаются). Чему равны вероятности выигрыша всей игры первым игроком, выигрыша всей игры вторым игроком, общего ничейного результата?

Для того чтобы игру выиграл первый игрок, ему необходимо выиграть 6, 7, 8, 9 или 10 партий. Вероятность этого в силу формулы Бернулли и формулы сложения вероятностей равна

$$P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) =$$

$$= \frac{2^6}{3^{10}} \cdot [210 + 240 + 180 + 80 + 16] = \frac{2^6 \cdot 242}{3^9} \approx 0{,}7869.$$

Вероятность ничейного результата равна

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{7 \cdot 2^7}{3^8} \approx 0{,}1366.$$

Вероятность выигрыша игры вторым игроком равна

$$P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{10} + C_{10}^1 \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 + C_{10}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^8 +$$

$$+ C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7 + C_{10}^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1507}{3^9} \approx 0{,}0765.$$

Мы видим, что, хотя первый игрок выигрывает каждую отдельную партию с вероятностью вдвое большей, чем второй игрок, всю игру он выигрывает с вероятностью более чем в десять раз большей, чем второй игрок. Для второго игрока вероятность сведения игры вничью почти вдвое больше, чем вероятность ее выигрыша.

Рассмотрим событие E_m, состоящее в том, что событие A появилось m раз в n независимых испытаниях. Обратим внимание на то, что события E_0, E_1, ..., E_n являются несовместными событиями и вдобавок в сумме составляют достоверное событие. Следовательно, так как событие E_m происходит с вероятностью $P_n(m)$, то

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1.$$

Заметим, что с другой стороны для каждого испытания имеет место равенство $p + q = 1$ и

$$(p + q)^n = 1.$$

Из сравнения левых частей двух выше написанных равенств находим, что

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{4.2}$$

Мы получили частный случай формулы *бинома Ньютона.*

Рассуждения настоящего параграфа, как мог заметить внимательный читатель, по существу не связаны с классическим определением вероятности. Рассматриваются испытания с двумя взаимоисключающими исходами, имеющими вероятности p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, и $q = 1 - p$, не обязательно равные друг другу. Даже в случае $p = q = 1/2$ мы с помощью формулы Бернулли приходим к испытаниям с элементарными событиями $E_0, \ldots, E_n$, которым соответствуют различные вероятности $P_n(m) = C_n^m 2^{-n}$. Таким образом, вероятностью отдельного элементарного события может быть любое неотрицательное число, не большее 1, которое удовлетворяет требованиям, выделенным нами в § 2 гл. 3 в качестве основных свойств вероятности. В данных здесь примерах мы уже не можем находить вероятности по соображениям симметрии, а должны прибегать к их статистическому определению (см. гл. 2).

Исследуем теперь вероятность $P_n(m)$ как функцию целочисленного аргумента m. Примеры в § 5, 6 гл. 1 и в данном параграфе наводят на мысль, что сначала при возрастании аргумента m функция $P_n(m)$ возрастает, зачем достигает максимального значения и после этого начинает убывать. Докажем, что это действительно так. С этой целью рассмотрим отношение

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}\, p^{m+1} q^{n-m-1} : \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}. \tag{4.3}$$

Очевидно, что вероятность $P_n(m+1)$ будет больше, равна или меньше вероятности $P_n(m)$ в зависимости от того, будет ли отношение $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$ больше, равно или меньше 1. В частности, $P_n(m+1)$ будет больше, чем $P_n(m)$, если

$$\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} > 1,$$

т. е. если

$$m < np - q.$$

Таким образом, $P_n(m)$ возрастает при увеличении m от 0 до целой части числа $np - q$.

Если

$$\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} = 1,$$

т. е., если $m = np - q$ (это равенство возможно только тогда, когда $np - q$ есть целое неотрицательное число), то

$$P_n(m) = P_n(m+1).$$

Наконец, $P_n(m) > P_n(m+1)$, если

$$\frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} < 1,$$

т. е., если $m > np - q$.

Теперь поведение функции $P_n(m)$ мы выяснили полностью: она возрастает, пока m остается меньшим $np - q$, затем достигает максимума и для m, больших $np - q$, убывает. Если обозначить через m^* значение m, соответствующее максимальной вероятности, то будет верно неравенство

$$np - q \leqslant m^* \leqslant np + p.$$

Поскольку числа $np - q$ и $np + p$ отличаются на 1, то либо m^* равно единственному целому числу, заключенному в пределах

$$np - q < m^* < np + p,$$

либо имеются два целых числа m_1^* и m_2^* такие, что

$$m_1^* = np - q, \quad m_2^* = np + p.$$

Таким образом, если величина $np - q$ является целой, то имеются два максимальных значения вероятности, именно, $P_n(np - q) = P_n(np + p)$. Если же $np - q$ — нецелое число, то имеется единственное максимальное значение $P_n(m)$ при m, равном целому числу m^*, большему $np - q$ и меньшему $np + p$.

Пример 5. Вероятность события A равна 3/5. Найти наиболее вероятное число появлений события A, если число испытаний равно 19, 21.

При $n = 19$ находим

$$np - q = 19\cdot\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 11.$$

Таким образом, максимальная вероятность достигается для двух значений m, равных 11 и 12. Эта вероятность равна

$$P_{19}(11) = P_{19}(12) = 0{,}1797.$$

При $n = 21$ максимальная вероятность достигается только для одного значения m, поскольку $np - q = 21 \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = 12 + \frac{2}{5}$ не является целым числом. Самое вероятное значение m равно 13. Вероятность его появления равна

$$P_{21}(13) = 0{,}1742.$$

Упражнения

1. Воспользовавшись рассуждениями, проведенными при выводе формулы Бернулли, доказать формулу бинома Ньютона ($a > 0$ и $b > 0$):

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + b^n.$$

2. В урне 9 белых и 1 красный шар. Какова вероятность того, что при 10 извлеченных (с возвращением каждого вынутого шара) будет извлечен хотя бы раз красный шар? Сколько раз нужно производить извлечение, чтобы вероятность получить хотя бы раз красный шар была не меньше 0,9?

Ответ: $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \approx 0{,}6513$; $\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}9} \approx 22$.

3. Пользуясь вероятностными соображениями, доказать формулу $C_n^k = C_n^{n-k}$.

4. Вычислить вероятности выпадения герба при числе бросаний монеты $n = 5$, 10, 15. Построить соответствующие графики, отложив m/n (m — число выпадений герба) по оси Ox, а по оси — Oy — вероятности соответствующих значений m. Что можно сказать о том, как меняются вероятности при увеличении n?

Ответ: см. рис. 20.

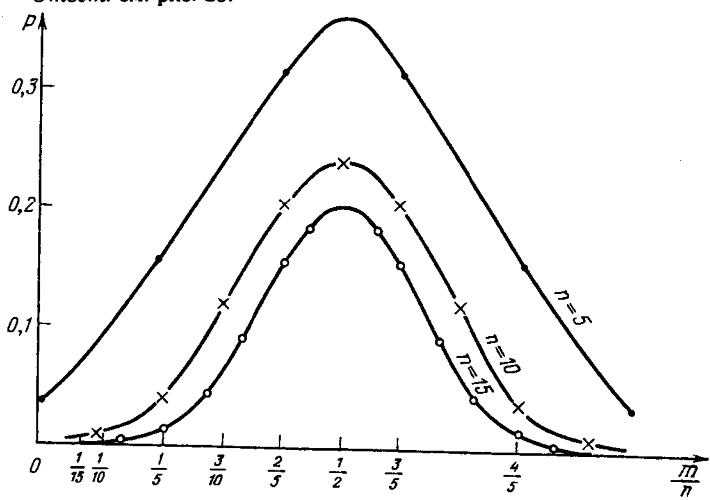


Рис. 20. График вероятностей выпадения гербов при числе бросаний $n = 5$, 10, 15

§ 2. Теорема Бернулли

Мы можем теперь сформулировать и доказать одну из важнейших теорем теории вероятностей, выведенную Я. Бернулли и опубликованную в сочинении «Искусство предположений» уже после его кончины, в 1713 году.

Задача, которая привела к теореме, получившей наименование закона больших чисел, очень естественна и может быть описана так.

В каждом из n независимых испытаний Бернулли с одной и той же вероятностью p может появиться некоторое событие A. В предыдущем параграфе мы установили, что наиболее вероятное число появлений события A в n испытаниях близко к np. Нельзя ли высказать несколько более определенное суждение относительно числа появлений A во всей совокупности этих испытаний? Оказывается, можно. Обозначим с этой целью через μ число появлений события A во всех n испытаниях и рассмотрим разность $\mu/n - p$ между частотой μ/n события A и его вероятностью p. Величина этой разности, естественно, зависит от случая, поскольку μ может принять любое целочисленное значение от 0 до n. Однако, как мы увидим, чем больше n, тем реже эта разность сможет значительно отклониться от нуля. Более того, какое бы малое положительное число ε мы ни взяли, например, 0,0001 или 0,000001, при достаточно большом n разность $\mu/n - p$ по абсолютной величине окажется с большой вероятностью меньше, чем ε.

Сам Я. Бернулли своей теоремой (или *Главным предложением*, как он ее называл) отвечал на вопрос, каково должно быть число испытаний, чтобы отношение числа удачных относительно события A испытаний к числу всех испытаний лежало бы в заданных пределах с вероятностью в данное число c раз ($c = 1000, 10\,000, 100\,000$) превосходящей вероятность противоположного события. Доказательство Бернулли возникло из наблюдений за простейшими свойствами биномиальных коэффициентов и основано на сравнении сумм биномиальных вероятностей, соответствующих двум вышеуказанным противоположным событиям.

Дадим теперь современную формулировку этого утверждения и его доказательство.

Закон больших чисел (теорема Бернулли). *Если вероятность наступления некоторого случайного события A в последовательности n независимых испытаний постоянна и равна p, то, каково бы ни было положительное число ε, с вероятностью,* *сколь угодно близкой к 1, при достаточно большом n разность $\mu/n - p$ по абсолютной величине окажется меньше, чем ε.*

Это утверждение можно записать следующим образом: каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, при достаточно большом n имеет место неравенство

$$P\{|\mu/n - p| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \eta. \tag{4.4}$$

В начале доказательства теоремы Бернулли вычислим следующие суммы:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m), \quad \sum_{m=0}^{n} mP_n(m), \quad \sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m).$$

Значение первой суммы уже было вычислено в предыдущем параграфе. Оказалось, что

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = 1. \tag{4.5}$$

Теперь

$$\sum_{m=0}^{n} mP_n(m) = \sum_{m=1}^{n} mP_n(m) = \sum_{m=1}^{n} m\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{n!}{(m-1)!\,(n-m)!}p^m q^{n-m} =$$

$$= np\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}p^{m-1} q^{n-m} =$$

$$= np\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1}p^{m-1}q^{n-m} = np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}p^{k}q^{(n-1)-k} = np.$$

Последнее равенство написано на основании равенства (4.5), где значение n заменено на $n-1$. Итак

$$\sum_{m=0}^{n} mP_n(m) = np. \tag{4.6}$$

Далее

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) = \sum_{m=1}^{n} m(m-1+1)P_n(m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} mP_n(m) + \sum_{m=1}^{n} m(m-1)P_n(m).$$

Первая сумма правой части нам известна (равенство (4.6)), поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) = np + \sum_{m=1}^{n} m(m-1)\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m} =$$

$$= np + \sum_{m=2}^{n} m(m-1)\frac{n!}{m!\,(n-m)!}p^m q^{n-m} =$$

$$= np + n(n-1)p^2\sum_{m=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(m-2)!\,(n-m)!}p^{m-2}q^{n-m} =$$

$$= np + n(n-1)p^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!\,(n-2-k)!}p^k q^{n-2-k} =$$

$$= np + n(n-1)p^2 = n^2p^2 + np(1-p) = n^2p^2 + npq.$$

Здесь равенство

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-2)!}{k!\,(n-2-k)!}p^k q^{n-k-2} = 1$$

написано на основании формулы (2) для $n-2$ вместо n. Таким образом,

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 P_n(m) = n^2p^2 + npq. \tag{4.7}$$

Заметим теперь, что случайные события $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon$ и $\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon$ противоположны, а потому

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 1 - P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\}.$$

В силу теоремы сложения вероятностей

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right\} = \sum P_n(m),$$

где сумма распространена на те значения m, для которых $\left|\frac{m}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon$. Но для этих значений m

$$\frac{\left(\frac{m}{n} - p\right)^2}{\varepsilon^2} \geqslant 1,$$

и поэтому

$$P\left(\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\sum\frac{\left(\frac{m}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}P_n(m),$$

где сумма по-прежнему распространена на те m, для которых $\left|\frac{m}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$. Очевидно, что эта сумма может быть только увеличена, если ее распространить на все значения m от 0 до n. Следовательно, используя равенства (4.5), (4.6), (4.7), получаем

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant\sum_{m=0}^{n}\frac{\left(\frac{m}{n}-p\right)^2}{\varepsilon^2}P_n(m)=$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{m=0}^{n}(m-np)^2P_n(m)=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left[\sum_{m=0}^{n}m^2P_n(m)-\right.$$

$$\left.-2np\sum_{m=0}^{n}mP_n(m)+n^2p^2\sum_{m=0}^{n}P_n(m)\right]=$$

$$=\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left[npq+n^2p^2-2n^2p^2+n^2p^2\right]=\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Теперь

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1-P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right\}\geqslant1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (4.8)$$

Отсюда видно, что для любого положительного ε мы можем сделать вероятность $P\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}$ сколь угодно близкой к 1. Теорема Бернулли доказана.

Свою теорему Я. Бернулли сопроводил численными иллюстрациями. Рассмотрим один из его примеров.

Пример 1. Задача Бернулли. В урне перемешаны белые и черные шары. Доля белых шаров в урне равна 3/5, доля черных — 2/5, так что вероятность вынуть из урны белый шар равна 3/5, а черный шар — 2/5. Производятся испытания, состоящие в выборе шара из урны, причем каждый раз вынутый шар возвращается назад в урну. Обозначим вероятность события

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon$$

через P при выбранных $p = 3/5$ и $\varepsilon = 1/50$ и μ — числе вынутых белых шаров. По заданному числу c Бернулли определяет такое n, при котором

$$\frac{P}{1 - P} > c$$

или

$$P > 1 - \frac{1}{c + 1}.$$

Согласно вычислениям Бернулли для значений $c = 1000$, 10 000, 100 000 получаются следующие значения необходимого числа испытаний n : 25 550, 31 258, 39 966. Полученные оценки числа n сильно завышены. Более удовлетворительное приближение для числа испытаний в этой задаче можно получить с помощью приближенной формулы Муавра — Лапласа (см. § 5).

Пример 2. В примере 3 предыдущего параграфа мы вычисляли вероятность того, что среди 400 родившихся детей число родившихся мальчиков отклонится от наиболее вероятного своего значения $np = 200$ не более чем на 20. Эта вероятность была представлена в виде суммы. Теперь мы можем оценить эту сумму. Действительно, поскольку $n = 400$, $p = 0{,}5$, то

$$P = P\{|\mu - np| < 20\} = P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \frac{20}{n}\right\} = P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \frac{1}{20}\right\}.$$

Согласно неравенству (4.8)

$$P \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{1}{4 \cdot 400 \cdot (1/20)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Если число рождений $n = 10\,000$, то вероятность того, что число родившихся мальчиков отклонится от $np = 5000$ не более чем на 10 %, согласно неравенству (4.8) будет больше, чем 0,99.

Упражнения

1. Пояснить графики упражнения 4 к § 1 с позиций теоремы Бернулли.

2. Велика ли вероятность того, что при 6000 бросаниях игральной кости «шестерка» выпадет не более 500 раз? Дать оценку сверху этой вероятности.

Ответ: $\frac{1}{6^{6000}} \sum_{k=0}^{500} C_{6000}^k 5^{6000-k} < \frac{(1/6)\cdot(5/6)}{(1/12)^2 \cdot 6000} = \frac{1}{300}$.

3. При каких p и q оценка, используемая при доказательстве теоремы Бернулли, при данных n и ε будет самой далекой от 1?

Ответ: при $p = q = 0{,}5$.

§ 3. Теорема Пуассона

В этом и следующих параграфах мы перейдем к доказательству предельных теорем для биномиальных вероятностей, в которых выводятся приближенные варианты формулы Бернулли при $n \to \infty$. Эти приближенные соотношения будут рассматриваться как удобные формулы для вычисления вероятностей $P_n(m)$ при больших значениях n, однако их роль в теории вероятностей этим далеко не исчерпывается.

Рассмотрим сначала тот случай, когда значение p близко к 0, значение q соответственно близко к 1, а n велико (случай p, близкого к 1, рассматривается аналогичным образом). Отвлекаясь от вывода $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ в формуле Бернулли как вероятности m удач в n испытаниях Бернулли, предположим, что p меняется в зависимости от n так, что $p = p(n)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, а $n \cdot p(n)$ стремится к некоторому конечному действительному числу $\lambda > 0$. В этих условиях верна следующая теорема, которая была доказана и опубликована французским математиком С. Пуассоном в 1873 году.

Теорема Пуассона. *Если $p(n) \to 0$ при $n \to \infty$, а $n \cdot p(n) \to \lambda$, где $\lambda > 0$, то для любого m при $n \to \infty$*

$$C_n^m p^m q^{n-m} \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Проведем доказательство теоремы, сосредоточив внимание на принципиальных моментах и не стремясь к исчерпывающей строгости в математических выкладках.

Рассмотрим для фиксированных значений n и m отношение $\dfrac{P_n(m+1)}{P_n(m)}$ и воспроизведем формулу (4.3):

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}. \tag{4.9}$$

Очевидно, что для любого фиксированного k, $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\frac{P_n(k)}{P_n(0)} = \frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} \cdot \frac{P_n(k-1)}{P_n(k-2)} \cdots \frac{P_n(2)}{P_n(1)} \cdot \frac{P_n(1)}{P_n(0)} =$$

$$= \prod_{m=0}^{k-1} \frac{P_n(m+1)}{P_n(m)}; \tag{4.10}$$

здесь $P_n(0) = q^n$.

Имеем из (4.9)

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n\left(1-\frac{m}{n}\right)p}{(m+1)(1-p)} = \frac{np\left(1-\frac{m}{n}\right)}{(m+1)(1-p)}.$$

Возьмем $\lambda = np$, откуда $p = \lambda/n$ и

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{\lambda}{m+1}\cdot\frac{1-\frac{m}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Фиксируем λ и будем считать, что p мало, а n велико (скажем, $p = 0{,}01$, $n = 100$, $\lambda = 1$). Тогда можно записать приближенное равенство при $n \to \infty$

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} \sim \frac{\lambda}{m+1} \tag{4.11}$$

и

$$P_n(0) = (1-p)^n = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \sim e^{-\lambda} \tag{4.12}$$

(последняя приближенная формула есть следствие известного замечательного предельного соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$).

Возвращаясь к формуле (4.10), получаем, используя (4.11),

$$\frac{P_n(k)}{P_n(0)} \sim \prod_{m=0}^{k-1}\frac{\lambda}{m+1} = \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$

и используя (4.12)

$$P_n(k) \sim e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4.13}$$

Формула (4.13) называется приближенной *формулой Пуассона* для биномиальной вероятности.

Для вычисления вероятностей с помощью формулы (4.13) можно пользоваться таблицей функции e^x или таблицей логарифмов факториалов.

Пример 1. Рассмотрим схему испытаний Бернулли с $n = 100$, $p = 0{,}01$, $m = 5$. Тогда

$$\log_{10} C_{100}^5 (0{,}01)^5 (0{,}99)^{95} = -2{,}5380$$

и

$$P_{100}(5) = 0{,}0029.$$

Поскольку $\lambda = 1$, имеем

$$\log_{10}\left(e^{-1}\frac{1}{5!}\right) = -2{,}5135$$

и

$$e^{-1}\frac{1}{5!} = 0{,}0031.$$

П р и м е р 2. Задача о днях рождения. Найдем вероятность того, что в группе школьников из 500 человек ровно k родились в один определенный день, скажем, 1 июня. Если считать, что каждый из 500 школьников выбран случайно, а в году 365 дней, то можно использовать схему испытаний Бернулли с $n = 500$ и $p = 1/365$. Тогда искомая вероятность будет определяться по формуле Бернулли:

$$P_{500}(k) = C_{500}^{k}(1/365)^{k}(364/365)^{500-k},$$

а соответствующее приближение по теореме Пуассона:

$$\Pi(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

при $\lambda = 55/365 = 1{,}3699$. Биномиальные вероятности и соответствующие приближения для разных k приведены для сравнения в следующей табличке:

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_{500}(k)$	0,2537	0,3484	0,2388	0,1089	0,0372	0,0101	0,0023
$\Pi(k)$	0,2541	0,3481	0,2385	0,1089	0,0373	0,0102	0,0023

Упражнения

1. Доказать неравенство

$$\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{k}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} < P_n(k) < \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

У к а з а н и е: используйте оценку для $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$:

$$(n-k+1)^k < A_n^k < n^k.$$

2. Доказать, что отношение $P_n(k)/\Pi(k)$ при изменении k сначала растет, достигает максимального значения, когда k есть наибольшее целое, не превосходящее $\lambda + 1$, а затем убывает $\left(\Pi(k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}\right)$.

3. Книга объемом 500 страниц содержит 500 опечаток. Считая, что любая буква может быть набрана неправильно с одной и той же вероятностью, найти вероятность того, что на заданной странице не более двух опечаток.

Ответ: $e^{-1}\sum_{k=0}^{2} 1/k! = 0{,}12.$

§ 4. Приближенные формулы для вероятностей в случайном блуждании на прямой

В этом параграфе мы выведем приближенную формулу для биномиальной вероятности

$$P_n(m) = C_n^m \frac{1}{2^n}, \qquad (4.14)$$

которая в формуле Бернулли соответствует случаю, когда $p = q = 1/2$; схему испытаний Бернулли с $p = q = 1/2$ мы будем называть *симметричной*. Вспомним, что вероятность (4.14) впервые появилась в § 5 гл. 1 при математическом описании модели случайного блуждания на прямой как вероятность сделать m шагов за первые n моментов времени (см. формулу (1.5)). Там же было описано устройство доски Гальтона — физического прибора, в котором осуществляется случайное блуждание на прямой, а стало быть, и симметричная схема испытаний Бернулли. Теоретическим источником для доски Гальтона служит арифметический треугольник Паскаля: ожидаемое число шариков в каждой секции доски Гальтона предсказывается с помощью чисел

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots,\ C_n^m,\ \ldots,\ C_n^n,$$

составляющих n-й ряд треугольника Паскаля, или же при делении каждого числа на их сумму 2^n с помощью биномиальных вероятностей $P_n(m) = C_n^m 2^{-n}$. Найдем для этой ситуации приближенные формулы. Для удобства опустим здесь индекс n у вероятности: $P(m) = P_n(m)$.

Рассмотрим случай, когда значение m^*, соответствующее максимальной вероятности $P_n(m)$, единственное. Предположим для этого, что n четное, т. е. что $n_1 = n/2$ — целое число. Тогда $m^* = n_1$ и $P(n_1)$ — максимальная вероятность.

Положим $m = n_1 + l$ и исследуем, как меняется отношение $\frac{P(n_1 + l)}{P(n_1)}$ с ростом n_1. С этой целью представим это отношение при фиксированных l и n_1 в виде произведения (как это делалось при выводе формулы Пуассона в § 3)

$$\frac{P(n_1+l)}{P(n_1)} = \frac{P(n_1+l)}{P(n_1+l-1)} \cdot \frac{P(n_1+l-1)}{P(n_1+l-2)} \cdots \frac{P(n_1+2)}{P(n_1+1)} \cdot \frac{P(n_1+1)}{P(n_1)} =$$

$$= \prod_{k=0}^{l-1} \frac{P(n_1+k+1)}{P(n_1+k)}.$$

Перейдем в этом равенстве к натуральным логарифмам:

$$\ln \frac{P(n_1+l)}{P(n_1)} = \sum_{k=0}^{l-1} \ln \frac{P(n_1+k+1)}{P(n_1+k)}. \tag{4.15}$$

Для удобства последующих выкладок введем функцию $f(k) = \ln P(n_1+k)$ и обозначим $\Delta f_k = f(k+1) - f(k)$. Тогда равенство (4.15) можно записать так:

$$f(l) - f(0) = \sum_{k=0}^{l-1} \Delta f_k. \tag{4.16}$$

Для вычисления Δf_k найдем отношение $\dfrac{P(n_1+k+1)}{P(n_1+k)}$. Из формулы (4.3)

$$\frac{P(l+1)}{P(l)} = \frac{n-l}{l+1} \cdot \frac{p}{q}$$

при $n = 2n_1$, $p = q = 1/2$, $l = n_1 + k$ получаем

$$\frac{P(n_1+k+1)}{P(n_1+k)} = \frac{n_1-k}{n_1+k+1}.$$

Тогда

$$\Delta f_k = \ln\left(1 - \frac{k}{n_1}\right) - \ln\left(1 - \frac{k+1}{n_1}\right).$$

Рассмотрим далее наряду с функцией $f(k)$ функцию $h(k) = -k^2/n_1$ и пусть $\delta(k) = \Delta f_k - \Delta h_k$. Имеем

$$\Delta h_k = h(k+1) - h(k) = -\frac{2k+1}{n_1}.$$

Возвращаясь к равенству (4.16), получаем

$$f(l) - f(0) = \sum_{k=0}^{l-1} \Delta f_k = \sum_{k=0}^{l-1} \Delta h_k + \sum_{k=0}^{l-1} \delta(k).$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{l-1} \Delta h_k = h(l) - h(0) = -\frac{l^2}{n_1}$$

и

$$f(l) - f(0) = -\frac{l^2}{n_1} + \sum_{k=0}^{l-1} \delta(k).$$

Таким образом, получаем для отношения $\frac{P(n_1+l)}{P(n_1)}$ формулу

$$\ln \frac{P(n_1+l)}{P(n_1)} = -\frac{l^2}{n_1} + R(l)$$

или

$$P(n_1+l) = P(n_1)e^{-\frac{l^2}{n_1} + R(l)}, \qquad (4.17)$$

где $R(l) = \sum_{k=0}^{l-1} \delta(k)$,

$$\delta(k) = \left[\ln\left(1 - \frac{k}{n_1}\right) + \frac{k}{n_1}\right] - \left[\ln\left(1 + \frac{k+1}{n_1}\right) - \frac{k+1}{n_1}\right].$$

Аккуратная оценка $R(l)$ требует привлечения дополнительных сведений из анализа. Для того чтобы не осложнять изложение, укажем здесь лишь то, что $|R(l)| \to 0$ при $n \to \infty$ так, что $e^{R(l)} \sim 1 + \frac{C}{\sqrt{n}}$ при $l \leqslant n_1/2$, где C — некоторая постоянная.

Найденная нами формула

$$P(n_1+l) \sim P(n_1)\, e^{-l^2/n_1} \left(1 + \frac{C}{\sqrt{n}}\right)$$

показывает, как с удалением от наиболее вероятного значения n_1 убывают биномиальные вероятности в сравнении с $P(n_1)$. Аналогичная формула получается для $P(n_1 - m)$.

Из формулы Стирлинга (см. § 9 гл. 1) при больших $n = 2n_1$ получаем

$$P(n_1) = C_{2n_1}^{n_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n_1} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n_1}}$$

и

$$P(n_1+l) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n_1}}\, e^{-l^2/n_1} \left(1 + \frac{C}{\sqrt{n}}\right).$$

Итак, для любого $0 \leqslant m \leqslant n$, $|m - n/2| \leqslant n_1/4$

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}}\, e^{-\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 / \frac{n}{2}} \left(1 + \frac{C}{\sqrt{n/2}}\right). \qquad (4.18)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Эта функция определена при всех действительных x; является четной: $\varphi(x) = \varphi(-x)$; достигает максимального значения при $x = 0$, равного $1/\sqrt{2\pi}$; и ее значения стремятся к 0 при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Используя функцию $\varphi(x)$, можно переписать соотношение (4.18) в виде

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{n/4}} \varphi\left(\frac{m - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}}\right)\left(1 + \frac{C}{\sqrt{n/2}}\right). \qquad (4.19)$$

Последнее приближенное равенство означает, что, если на графике $P_n(m)$, изображающем вероятность $P_n(m) = C_n^m 2^{-n}$ как функцию m, преобразовать шкалу на оси Ox так, что каждая точка m, $m = 0, \ldots, n$, перейдет в точку $x_l = \left(m - \frac{n}{2}\right)/\sqrt{\frac{n}{4}}$, то ординаты $P_n(m)$ преобразуются в значения, близкие к $\frac{1}{\sqrt{\pi/4}} \varphi(x_m)$, причем расстояния между соседними точками x_m будут равны $1/\sqrt{\frac{n}{4}}$. Действительно,

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \left(\frac{m + 1 - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} - \frac{m - \frac{n}{2}}{\sqrt{n/4}} = \frac{1}{\sqrt{n/4}}\right).$$

Для доски Гальтона этот вывод будет иметь следующее практическое значение: если число рядов иголок, которые предстоит преодолеть шарикам, очень велико, а расстояния между секциями ящичков, куда попадают шарики, мало, то верхняя граница уровня шариков в ящичках хорошо описывается кривой $\varphi(x)$. Иллюстрацию этого феномена см. на рис. 9 и на рис. 20. Если на рис. 9 провести кривые, огибающие графики $P_n(m)$ сверху, то мы получим приближенно графики указанной функции, причем с ростом n приближение становится лучше. На рис. 21 дано пространственное изображение для значений $n = 4, 6, \ldots, 40$ графиков биномиальных вероятностей $P_n(m)$, которые отнесены к точкам $n_1 + m$, т. е. $P_n(n_1 + m)$. Такое распределение можно назвать «центрированным» биномиальным распределением, поскольку центром распределения является точка «нуль». Изображение этого распределения при n, возрастающем от 4 до 40, надлежит сравнить с аналогично построенным на рис. 22 пространственным графиком функции

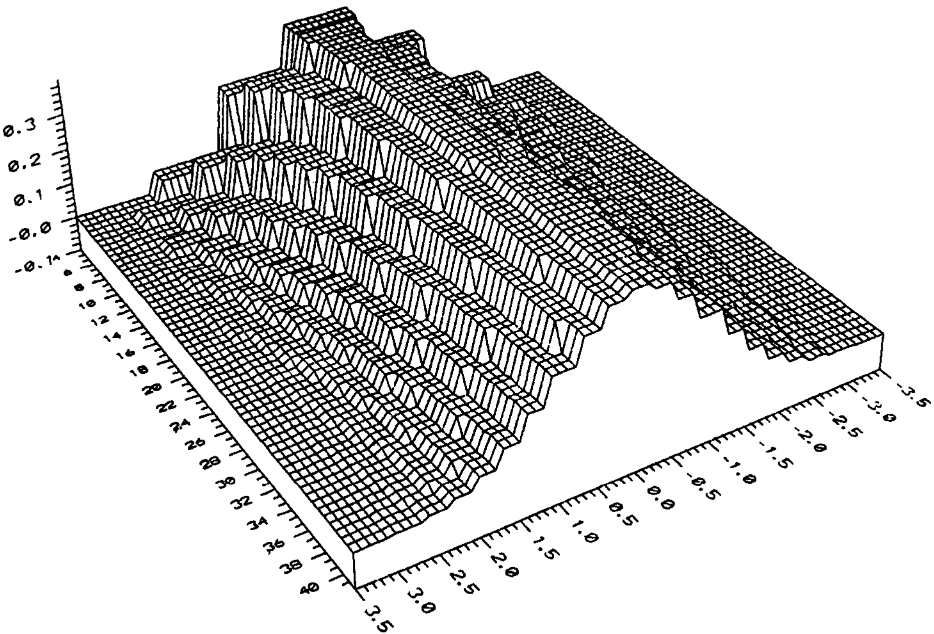


Рис. 21. Графики вероятностей $P_n(m)$ для $n = 4, 6, 8, \ldots, 40$

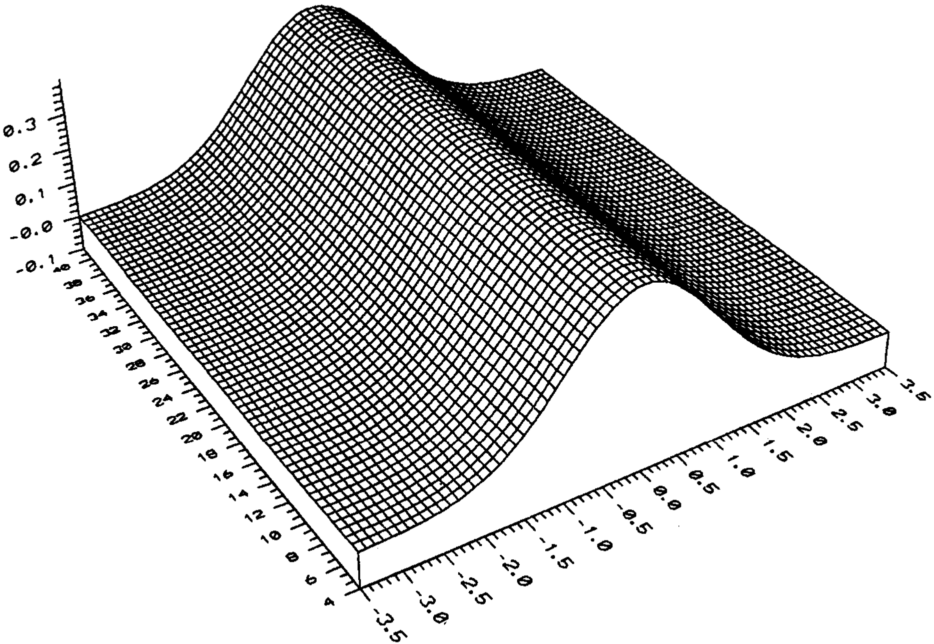


Рис. 22. Пространственное изображение плотности нормального распределения

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (плотностью нормального распределения — см. с. 90).

В заключение вернемся к рассуждению о характеристиках случайного блуждания частицы на прямой, помещенному в конце § 5 гл. 1. Там речь идет о характеристиках блуждания: среднем значении пробега и среднем квадратическом отклонении от среднего пробега. Первая из них совпадает с наиболее вероятным значением $n/2$, а вторая со значением $\sqrt{n/4}$; обе эти характеристики входят в полученную нами приближенную формулу (4.19).

§ 5. Теорема Муавра — Лапласа

Приближенная формула для симметричного биномиального распределения (с $p = 1/2$)

$$P_n(m) = C_n^m 2^{-n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{n}{2}}} e^{-\frac{2\left(m-\frac{n}{2}\right)^2}{n}} \quad \text{при} \quad n \to \infty \qquad (4.20)$$

была доказана английским математиком А. Муавром в 1730 году. Если n фиксировано, то справа в приведенной формуле стоят значения функции $ae^{-\left(\frac{x-b}{c}\right)^2}$ (a, b, c — постоянные) в точках $x = m$. Основным средством доказательства приближенной формулы (4.20) была формула Стирлинга, которую Муавр доказал независимо. Как установлено, в работах Муавра получена также приближенная формула для $P_n(m)$ и в общем случае. В последующем французским математиком П. С. Лапласом (1812 г.) была строго доказана для общего случая $0 < p < 1$ формула

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}},$$

которая при $p = 1/2$ включает в себя формулу (4.20).

Если положить $x_m = \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ и вновь рассмотреть функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

то последняя формула приобретает вид

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi(x_m).$$

Дадим теперь строгую формулировку.

Т е о р е м а М у а в р а — Л а п л а с а. *Пусть* $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ *и пусть* m *таково, что* $|m - np| \leq \Delta_n$, *где при* $n \to \infty$ $\dfrac{\Delta_n}{(npq)^{2/3}} \to 0$. *Тогда равномерно для всех таких* m

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}} \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.21}$$

Доказательство теоремы главным образом основано на формуле Стирлинга, с помощью которой выводятся приближенные формулы для C_n^m (см. формулу (1.14))

$$A_1\psi(n, m) \leq C_n^m \leq A_2\psi(n, m),$$

$$\ln A_1 = -\frac{1}{12m} - \frac{1}{12(n-m)}, \quad \ln A_2 = \frac{1}{12n},$$

$$\psi(n, m) = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\ \frac{n^n}{m^m (n-m)^{n-m}}.$$

С помощью этой формулы получаем неравенства для $P_n(m)$:

$$A_1\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m} < P_n(m) <$$

$$< A_2\sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}$$

Рассмотрим выражение

$$F = \ln\left[\left(\frac{np}{m}\right)^m\left(\frac{nq}{n-m}\right)^{n-m}\right] =$$

$$= -(np + \delta)\ln\left(1 + \frac{\delta}{np}\right) - (nq + \delta)\ln\left(1 - \frac{\delta}{np}\right),$$

где $\delta = m - np$.

Дальнейшее доказательство основано на возможности приближенного представления функций $\ln(1 + t)$ в виде многочленов по степеням t при целых $r > 0$ для $|t| \leq 1$:

$$\ln(1 + t) \sim a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_r t^r.$$

Эти представления возникают при выполнении условий теоремы из так называемых рядов Тейлора для указанных функций. Эту чисто аналитическую часть доказательства мы здесь сократим, так как она уведет нас в сторону от основной цели настоящей главы.

Ограничиваясь в разложении логарифмов значением $r = 3$, получаем при $|\delta| \leq np$ и $|\delta| \leq nq$

$$F \sim -\frac{\delta^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+\frac{\delta^3}{6n^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)$$

и $F \sim -\dfrac{\delta^2}{2npq}$ при δ, малом по сравнению с $n^{2/3}$ $\left(\dfrac{\delta^3}{n^{2/3}} \to 0\right.$ при $\left. n \to \infty\right)$. Таким образом, при $n \to \infty$ $\ln A_1 \sim 1$, $\ln A_2 \sim 1$, $\ln\sqrt{\dfrac{n}{2\pi m(n-m)}} \sim \ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}}$ и наконец

$$P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{\delta^2}{2npq}}, \quad \text{где} \quad \delta = m - np.$$

Используя (4.21), можно получить приближение для суммы биномиальных вероятностей вида $\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m)$, которая выражает вероятность того, что число удач в n испытаниях Бернулли находится в пределах m_1 и m_2 $(m_1 < m_2)$. Это приближение устанавливает так называемая *интегральная предельная теорема Муавра — Лапласа*:

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}\,dx, \quad a = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \tag{4.22}$$

Разность между левой и правой частями в соотношении (4.22) стремится при $n \to \infty$ к нулю равномерно относительно a и b при постоянном значении $0 < p < 1$.*

Для того чтобы убедиться в справедливости формулы (4.22), проведем следующие правдоподобные рассуждения.

Основываясь на формуле Муавра — Лапласа (4.21), запишем приближенное соотношение для суммы:

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \sim \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}. \tag{4.23}$$

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ и обозначение $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Тогда правую часть (4.23) можно представить в виде суммы $\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$. Значениям m_1, $m_1 + 1$, $m_1 + 2$, ..., $m_2 - 1$, m_2 будут соответствовать точки

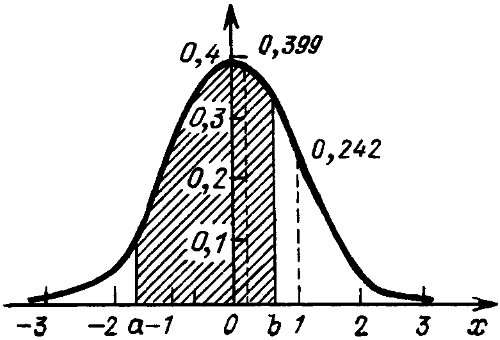


Рис. 23. График плотности нормального распределения $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Заштрихованная площадь численно равна $\int_a^b \varphi(x)\,dx$

$a = x_{m_1}$, $x_{m_1+1}, \ldots, x_{m_2-1}$, $b = x_{m_2}$, при этом расстояние между соседними точками x_m будет одинаковым для всех m:

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m = \frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} - \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

С учетом этого формула (4.23) получит новый вид

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \sim \sum \varphi(x_m)\,\Delta x_m, \tag{4.24}$$

где сумма в правой части берется по точкам x_m разбиения интервала $[a, b]$. Поскольку $\Delta x_m \to 0$ при $n \to \infty$, то сумма в (4.24) может быть интерпретирована как интегральная сумма интеграла от функции $\varphi(x)$ $[a, b]$:

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \sim \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{4.25}$$

(Отметим, что здесь мы не затрагиваем проблему существования интеграла как конечного предела интегральных сумм, не зависящую от разбиения.)

Определенный интеграл в правой части (4.25), как обычно, выражает площадь фигуры, ограниченной снизу осью Ox, сверху графиком функции $\varphi(x)$, а слева и справа вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно (рис. 23).

Интеграл, входящий в правую часть приближенных формул, принято выражать через функцию

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx,$$

которая численно равна площади фигуры под кривой $\varphi(x)$ на полупрямой $(-\infty, t]$. Очевидно, что

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Подробные таблицы функции $\Phi(t)$ имеются во многих учебниках и справочниках по теории вероятностей и математической статистике. Функция $\Phi(t)$ непрерывна, ее значения при $t \to -\infty$ довольно быстро приближаются к 0, а при $t \to \infty$ приближаются к 1. Значения $\Phi(t)$ для значений аргумента t и $-t$ связаны равенством $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$.

Приведем здесь несколько значений функции $\Phi(t)$:

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$\Phi(t)$	0,500	0,691	0,841	0,933	0,977	0,994	0,999

(Читатель может использовать эту табличку для вычисления приближенных значений вероятностей в упражнениях 2 § 2 гл. 4 и 4, 5 § 2 гл. 6.) Функция $\varphi(x)$ называется *плотностью нормального распределения*, а $\Phi(x)$ — *функцией нормального распределения* (см. об этом в Заключении на с. 173).

П р и м е р 1. С помощью интегральной формулы (4.25) можно оценить вероятность заданного отклонения частоты удачи m/n в n испытаниях Бернулли от вероятности p:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = \sum_{\left\{m:\left|\frac{m}{n}-p\right| \leq \varepsilon\right\}} P_n(m) \qquad (4.26)$$

для произвольного положительного числа ε; суммирование в правой части (4.25) осуществляется по всем m, для которых $\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon$ или, что то же самое, $\left|\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right| \leq \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$. По интегральной предельной теореме Муавра — Лапласа правая часть (4.26) при больших n приближенно равна интегралу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-x^2/2}\,dx, \quad t = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Отсюда, в частности, вытекает основной результат теоремы Бернулли. Поскольку

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \sim \Phi(t) - \Phi(-t), \qquad (4.27)$$

а $t_n = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}} \to \infty$ при $n \to \infty$, то в силу свойств функции $\Phi(t)$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \to 1.$$

Если переписать формулу (4.27) в виде

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant t\sqrt{\frac{pq}{n}}\right\} \sim \Phi(t) - \Phi(-t), \qquad (4.28)$$

то можно сделать вывод о том, что, как правило, отклонения частоты удачи от вероятности удачи в схеме испытаний Бернулли имеют порядок $1/\sqrt{n}$.

В гл. 2 был рассмотрен пример с бросанием монеты 100 раз: при $n = 100$ и $p = q = {}^1/_2$

$$P(35 \leqslant m \leqslant 65) = 0{,}99822$$

или

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0{,}15\right) = 0{,}99822.$$

Пользуясь формулой (4.28), получаем из равенства $\Phi(t) - \Phi(-t) = 0{,}99822$, что $\Phi(t) = 0{,}99911$, и из таблицы функции $\Phi(t)$, что $t = 3{,}125$, и поэтому

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant 0{,}1563\right\} \sim 0{,}99822.$$

П р и м е р 2. Вернемся к задаче Бернулли, поставленной в примере 1 § 2. Ответим на вопрос, сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0,999 частота удачи отличалась от $p = 3/5$ менее чем на $1/50$.

Применим теорему Муавра — Лапласа и воспользуемся формулой (4.28) из примера 1. Положим $\varepsilon = 1/50$ и $\Phi(t) - \Phi(-t) = 0{,}999$. Поскольку $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$, то $2\Phi(t) - 1 = 0{,}999$ и $\Phi(t) = 0{,}9995$. Из таблицы значений $\Phi(t)$ получаем значение $t = 3{,}29$, откуда $n > 6494$.

Хотя полученный результат и является приближенным, однако здесь n по порядку значительно меньше того значения 25 550, которое получено с помощью теоремы Бернулли (см. пример 1 в § 2). Следует, однако, представлять себе, что погрешность в интегральной теореме Муавра — Лапласа имеет порядок $1/\sqrt{n}$.

ГЛАВА 5

СИММЕТРИЧНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ

§ 1. Описание случайного блуждания

В этой главе мы более подробно рассмотрим задачи, которые возникают в схеме случайного блуждания. Как уже было отмечено в гл. 1 (см. с. 19 — 24), эта математическая модель подсказана и оправдана физическими приложениями — она служит для простейшего, приближенного описания одномерного физического процесса броуновского движения и диффузии материальной частицы, которая совершает случайные перемещения под действием большого числа столкновений с молекулами. Физический смысл имеет лишь предельный случай — непрерывное движение, однако дискретная схема случайного блуждания приводит к результатам, которые остаются справедливыми и в своей предельной форме.

Представим себе, что некоторая частица (подвижная точка) перемещается в дискретные моменты времени по целым точкам числовой прямой, расположенной вертикально. Будем считать, что в начальный момент времени $n = 0$ частица находится в начале отсчета, а в каждый следующий момент времени $n = 1, 2, 3, \ldots$ она совершает перемещение на единицу вверх или на единицу вниз. Так, например, в момент $n = 1$ частица оказывается в точках $+1$ или -1; если в момент времени n частица занимала положение y, то в следующий момент времени $n + 1$ она оказывается в точках с координатами $y + 1$ или $y - 1$ независимо от того, как осуществлялось ее движение до момента n. Предположим, что движение частицы вверх и вниз на один шаг равновозможно, т. е. происходит с вероятностями $1/2$ каждое. Тогда говорят, что частица совершает простое симметричное случайное блуждание на прямой. Рассмотрим график случайного блуждания в пространственно-временной системе координат, где ось абсцисс выступает в роли оси времени, а ось ординат по-прежнему служит для указания положения частицы. Отметим точки, соответствующие положению частицы в каждый момент времени, соединим ближайшие точки прямолинейными отрезками. Тогда любой возможный исход последовательных перемещений частицы будет графически изображаться ломаной с вершинами в точках с абсциссами 1, 2, 3, ... и целочисленными ординатами. Полученный график и есть траектория движения частицы. На рис. 24 изображена траектория движения частицы, занимающей за время $n = 41$ последовательные положения: 0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, —1, 0, —1, —2, —1, —2, —3, —4, —5, —4, —3, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 7. При фиксированном времени наблюдения n

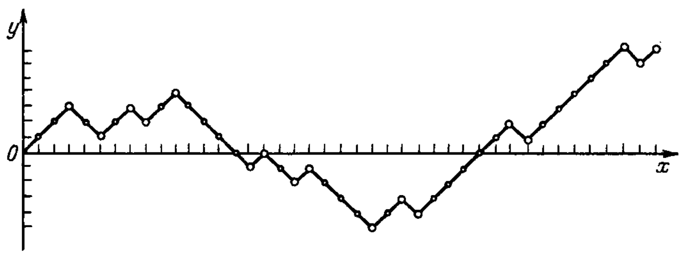


Рис. 24. Траектория движения частицы

в качестве множества возможных событий (исходов) естественно выбрать множество всех траекторий длины n, начинающихся в начале координат. Так как их общее число равно 2^n и все они равновозможны, то каждой траектории приписывается вероятность 2^{-n}. Таким образом, в симметричном случайном блуждании любое событие, состоящее в достижении частицей некоторого множества точек на прямой, имеет вероятность, пропорциональную числу траекторий, заканчивающихся в точках этого множества. Поэтому при подсчете вероятностей тех или иных событий мы будем пользоваться комбинаторными формулами § 5 гл. 1.

В этой главе будут рассмотрены задачи, типичные для случайных блужданий,— задача первого достижения частицей некоторого уровня, задача возвращения частицы в начало координат, задача о времени пребывания частицы на положительной части прямой и т. п. На примере симметричного одномерного случайного блуждания будут продемонстрированы совершенно неожиданные, противоречащие, на первый взгляд, здравому смыслу свойства случайных блужданий. Эти закономерности случайных блужданий на прямой имеют чисто комбинаторную природу и остаются справедливыми для случайных блужданий гораздо более общего вида.

§ 2. Комбинаторные основы

Траектория частицы графически представляется ломаной с вершинами в точках с целочисленными координатами, при этом координатами своих вершин каждая траектория определяется однозначно. Такие траектории мы будем называть *путями* из начала координат, и в этом параграфе будем заниматься подсчетом числа путей, обладающих определенными свойствами. Обозначим $L(x, y)$ число всех путей, ведущих из начала координат в точку (x, y). Очевидно, в соответствии с вычислениями в § 5 гл. 1, в случае, когда x и y имеют одинаковую четность и $y \leqslant x$,

$$L(x, y) = C_x^{(x+y)/2} \tag{5.1}$$

(в других случаях полагаем просто $L(x, y) = 0$). Очевидно также, что число путей из точки (x_0, y_0) в точку (x, y), где $0 < x_0 < x$, $y_0 \leqslant x_0$, $y \leqslant x$, $x_0 + y_0$ и $x + y$ четны, равно числу путей из начала координат в точку $(x - x_0, \ y - y_0)$, т. е. равно $L(x - x_0, \ y - y_0)$.

Все подсчеты в этом параграфе и вычисление вероятностей в следующих параграфах будут основаны на одном замечательном и чрезвычайно простом результате, носящем название «принципа отражения».

Принцип отражения. *Пусть A и B — точки с целочисленными координатами* (x_0, y_0) *и* (x, y), $0 < x_0 < x$, $y_0 > 0$, $y > 0$, *и A' — точка* $(x_0, -y_0)$, *симметричная точке A относительно оси абсцисс. Тогда число тех путей из A в B, которые касаются или пересекают ось абсцисс, равно числу всех путей, ведущих из точки A' в точку B.*

Доказательство. Сопоставим каждому пути из A в B, который касается или пересекает ось абсцисс, путь из A' в B следующим образом (рис. 25): если путь из A в B попадает на ось абсцисс впервые в точке C, то участок $A'C$ пути $A'B$ построим по симметрии как отражение участка AC относительно оси абсцисс (на рисунке новый участок пути изображен штрихом) и сохраним для пути $A'B$ без изменения участок CB. Очевидно, что указанное соответствие между путями из A в B, попадающими на ось абсцисс, и отраженными путями из A' в B взаимно однозначно, что и доказывает лемму.

Это утверждение значительно облегчает вычисление числа путей, обладающих некоторыми нужными свойствами. Будем называть пути положительными, если их вершины лежат строго выше оси абсцисс, и неотрицательными, если

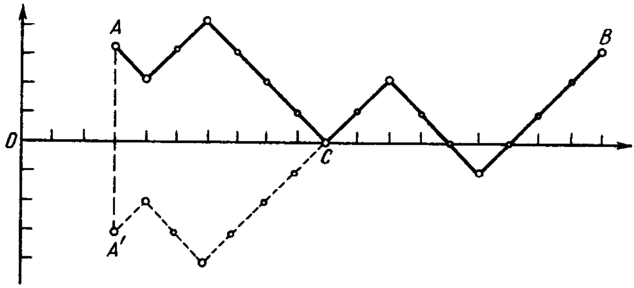


Рис. 25. Принцип отражения

их вершины не опускаются ниже оси абсцисс. Аналогично определяются отрицательные и неположительные пути.

З а д а ч а 1. *Найти число положительных путей из начала координат в точку* (x, y), $0 < y \leqslant x$.

Пусть $L(x, y)$ — *число всех путей из* $(0,0)$ *в* (x, y). Все положительные пути проходят через точку $(1, 1)$ (рис. 26).

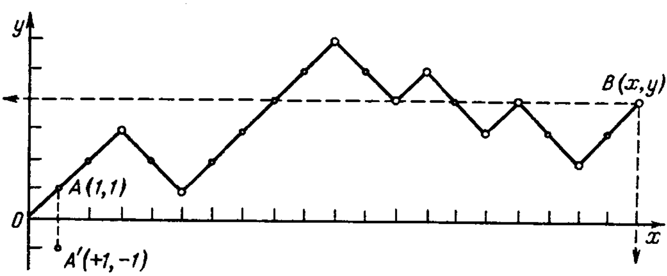


Рис. 26. Подсчет числа положительных траекторий

Поэтому искомое число совпадает с числом положительных путей из $(1, 1)$ в (x, y), а это число равно разности между числом всех путей из точки $(1, 1)$ в (x, y) и числом путей из $(1, 1)$ в (x, y), касающихся или пересекающих ось абсцисс, или разности между числом всех путей из $(1, 1)$ в (x, y) и числом всех путей из $(1, -1)$ в (x, y), т. е. равно

$L(x-1, y-1) - L(x-1, y+1)$. Теперь легко проверить, что

$$L(x-1, y-1) - L(x-1, y+1) = C_{x-1}^{(x+y/2)-1} - C_{x-1}^{(x+y)/2} =$$

$$= C_x^{(x+y)/2}\left(\frac{x+y}{2x} - \frac{x-y}{2x}\right) = \frac{y}{x} C_x^{(x+y)/2} = \frac{y}{x} L(x, y).$$

По симметрии заключаем, что число отрицательных путей в точку $(x, -y)$, $y > 0$, также равно $\frac{y}{x} L(x, y)$.

П р и м е р 1. Задача 1 известна как «теорема о баллотировке» в комбинаторном анализе. Исторически первое ее использование связано с именами Уайтворта (1878 г.) и Бертрана (1881 г.), решивших так называемую баллотировочную задачу. Если два кандидата R и S получили на выборах соответственно r и s, $r > s$, голосов, то каковы шансы, что кандидат R в течение всех выборов был по количеству голосов впереди S? Очевидно, что постановка задачи предполагает выполненной следующую несколько наивную процедуру подсчета голосов: каждый выборщик отдает свой голос или кандидату R, или S с вероятностью $1/2$; последовательно опрашиваются все выборщики и на каждом шаге подсчитывается разность голосов, поданных за R и за S; после опроса $(r+s)$-го выборщика эта разность должна быть равна $r - s$. Таким образом, речь идет о подсчете числа положительных путей из $(0, 0)$ в точку $(r+s, r-s)$. В соответствии с ответом в задаче 1 это число равно

$$\frac{r-s}{r+s} L(r+s, r-s).$$

Тогда шансы на устойчивый перевес кандидата R над S в течение выборов измеряются отношением этого числа к $L(r+s, r-s)$, т. е. величиной $\frac{r-s}{r+s}$.

П р и м е р 2. Та же задача, но с более понятным нам сюжетом, звучит так. Два шахматиста, имея равные шансы на успешный результат в каждой партии (ничьи не засчитываются), играют матч из 10 партий. Матч заканчивается победой определенного игрока со счетом 6 : 4. Каковы шансы на то, что победитель матча после каждой партии был впереди по числу очков? Очевидным образом, используя задачу 1 и рассуждения предыдущего примера, получаем, что вероятность этого события равна $\frac{6-4}{6+4} = 0{,}2$.

Нам понадобится еще один важный результат, представляющий собой утверждение, двойственное утверждению задачи 1. Будем рассматривать все пути из $(0, 0)$ в (x, y), обладающие тем свойством, что ординаты всех промежуточных вершин меньше y, и будем называть такие пути *путями, впервые достигающими уровень (положение) y в момент x* (или *путями первого достижения y*).

З а д а ч а 2. *Доказать, что число путей, выходящих из начала координат и впервые достигающих уровень y, $y > 0$, в момент x, равно* $\frac{y}{x} L(x, y)$.

Рассмотрим все пути, удовлетворяющие условию, и будем проходить каждый такой путь в обратном направлении. Для этого выберем новую систему координат с началом в точке (x, y) и осями, которые параллельны и противоположно направлены соответствующим осям исходной системы координат. Очевидно, что «обращенный» путь удовлетворяет условию задачи 1, т. е. является положительным путем из нового начала в точку с координатами (x, y) в новой системе (рис. 23). Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между двумя типами путей. Используя результат задачи 1, получаем утверждение.

По симметрии, число путей, впервые достигающих уровень $-y$, $y > 0$, равно $\frac{y}{x} L(x, y)$.

Докажем в заключение одно простое следствие «принципа отражения», которое будет полезно в последующих рассуждениях.

З а д а ч а 3. *Найти число положительных путей, выходящих из начала координат и заканчивающихся в точках с абсциссой $x > 1$.*

Мы должны найти число всех путей, ведущих из $(0, 0)$ в множество M точек (x, y), имеющих одинаковую абсциссу x и ординаты $y > 0$. Все такие пути необходимо проходят через точку $(1, 1)$. Число путей из $(1, 1)$ в M равно $\sum\limits_{y=y_0}^{x} L(x-1, y-1)$, а число путей из $(1, -1)$ в M равно $\sum\limits_{y=y_0}^{x-2} L(x-1, y+1)$, где $y_0 = 2$ при x четном и $y_0 = 1$ при x нечётном. Тогда по «принципу отражения» число путей из $(0, 0)$ в точки множества M равно

$$\sum_{y=y_0}^{x} L(x-1, y-1) - \sum_{y=y_0}^{x-2} L(x-1, y+1) =$$

$$= L(x-1, y_0-1) + \sum_{y=y_0+2}^{x} L(x-1, y-1) -$$

$$- \sum_{y=y_0}^{x-2} L(x-1, y+1) - L(x-1, y_0-1) =$$

$$= \begin{cases} C_{x-1}^{x/2}, & x \text{ четно}, \\ C_{x-1}^{(x-1)/2}, & x \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Как *следствие* получаем, что общее *число положительных и отрицательных путей, выходящих из начала координат и заканчивающихся в точках с абсциссой x, равно*

$$\begin{aligned} 2C_{2n-1}^{n} = C_{2n}^{n} \quad &\text{при} \quad x = 2n, \\ 2C_{2n}^{n} \quad &\text{при} \quad x = 2n+1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Упражнения

1. Покажите, что число положительных путей из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ равно $\frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}$.

2. Покажите, что число неотрицательных путей из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$ равно $\frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

3. Покажите, что число неотрицательных путей длины $2n$ равно C_{2n}^{n}.

4. Докажите, что число путей первого достижения точки y в момент $2n - y$ равно разности между числом путей из $(0, 0)$ в $(2n - y, y)$ и удвоенным числом путей из $(0, 0)$ в $(2n - y - 1, y + 1)$.

5. Докажите, что число путей из $(0, 0)$ в точку (x, y_0), $y_0 > 0$, которые лежат выше прямой $y = -y_1$, $y_1 > 0$, равно

$$L(x, y_0) - L(x, y_0 + 2y_1).$$

(Используйте принцип отражения применительно к прямой $y = -y_1$.)

6. Докажите, что число путей из $(0, 0)$ в (x, y_0), $y_0 > 0$, которые лежат ниже прямой $y = y_2$, $y_2 > y_0$, равно

$$L(x, y_0) - L(x, 2y_2 - y_0).$$

(Используйте задачу 5.)

§ 3. Задача о возвращении частицы в начало координат

Этот и последующие параграфы посвящены собственно симметричному случайному блужданию на прямой. Основываясь только на комбинаторных свойствах путей (только на принципе отражения), мы получим некоторые глубокие и неожиданные закономерности поведения блуждающей частицы. Наши предсказания, в первую очередь, будут относиться к возвращению частицы в исходное положение и достижению ею некоторого уровня. При решении задачи о возвращении будем рассматривать пути, соединяющие начало координат с точками $(x, 0)$, где $x = 2n$, так как возвращение частицы в нуль может происходить только в четные моменты времени. Событие, состоящее в том, что возвращение в нуль произошло на $2n$-м шаге, связано лишь с первыми $2n$ перемещениями частицы. В силу симметрии все 2^{2n} возможные траектории длины $2n$ оказываются равновозможными. Поэтому вероятности возвращения вычисляются подсчетом соответствующих путей на отрезке от 0 до $2n$.

Пусть u_{2n} — вероятность возвращения частицы в 0 в момент $2n$. Так как число путей, соединяющих точки $(0,0)$ и $(2n, 0)$, равно $L(2n, 0) = C_{2n}^n$ (см. формулу (5.1)), то

$$u_{2n} = C_{2n}^n\, 2^{-2n}. \tag{5.4}$$

Пусть f_{2n} — вероятность первого возвращения в нуль в момент $2n$. Для определения f_{2n} мы найдем соотношение, связывающее f_{2n} с вероятностью u_{2n}: при $n \geqslant 1$

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}. \tag{5.5}$$

Пусть событие A_{2n} состоит в том, что путь до момента $2n$ включительно нигде не обращается в нуль. По задаче 3 в § 2 $P(A_{2n}) = u_{2n}$. Пусть событие B состоит в том, что в момент $2n$ имеет место возвращение в нуль. Тогда событие $A_{2n-2} \cap B$ означает, что первое возвращение в нуль произошло в момент времени $2n$, и поэтому $P(A_{2n-2} \cap B) = f_{2n}$. Очевидно, что

$$(A_{2n-2} \cap B) \cup (A_{2n-2} \cap \overline{B}) = A_{2n-2},$$

где $\overline{B}$ — дополнение события B. Так как события, стоящие в скобках, несовместны, и $A_{2n-2} \cap \overline{B} = A_{2n}$, то

$$P(A_{n-2} \cap B) + P(A_{2n}) = P(A_{2n-2}),$$

что и приводит к соотношению (5.5). Подставляя в (5.5) выражение (5.4) для u_{2n}, получаем, что при $n \geqslant 1$

$$f_{2n} = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^n\, 2^{-2n+1} \tag{5.6}$$

$\left(\text{или } f_{2n} = \frac{1}{2n} u_{2n-2}\right)$.

Соотношение (5.5) можно также доказать как простое комбинаторное тождество, если вероятности f_{2n} в виде (5.6) вычислить, непосредственно применяя задачу 1 в § 2 (см. упражнение 1).

Используя формулу (5.6), нетрудно проверить, что вероятности первого возвращения в нуль, например, на 2-м, 4-м, 6-м шагах, равны соответственно

$$f_2 = 0{,}5, \quad f_4 = 0{,}125, \quad f_6 = 0{,}0625.$$

Вычисление f_{2n} для небольших значений n удобно производить, используя табличку значений вероятностей u_{2n}:

n	1	2	3	4	5
u_{2n}	0,5	0,375	0,3125	0,2734	0,2461
n	6	7	8	9	10
u_{2n}	0,2265	0,2095	0,1964	0,1855	0,1762

Для больших значений n можно вычислять f_{2n} приближенно, пользуясь таблицами логарифмов (см. с. 27) или формулой Стирлинга. По формуле Стирлинга (см. с. 29) при больших n

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

откуда

$$C_{2n}^n \sim 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Поэтому

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \text{и} \quad f_{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}.$$

Интересно узнать, каковы шансы на возвращение частицы в нуль за некоторое конечное время. Например, вероятность вернуться в нуль за 2 шага равна $f_2 = 0{,}5$, за 4 шага $f_2 + f_4 = 0{,}626$, за 6 шагов $f_2 + f_4 + f_6 = 0{,}6875$ и т. д. Очевидно, что вероятность возвращения частицы в нуль за время $2n$ равна

$$f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n}.$$

По формуле (5.5) получаем, что

$$f_2 + \ldots + f_{2n} = (1 - u_2) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n}) = 1 - u_{2n}, \quad (5.7)$$

т. е. u_{2n} — вероятность противоположного события. Пользуясь приближенным значением u_{2n} при больших n, можно вычислить, например, вероятность возвращения за 100 шагов — 0,9202, за 1000 шагов — 0,9748, за 10 000 шагов — 0,9920. Заметно, что с ростом n вероятности u_{2n} стремятся к 0, а вероятности $\sum_{k=1}^{n} f_{2k}$ возрастают и приближаются к 1. Какова же вероятность того, что частица когда-либо вернется в начало координат? До сих пор мы рассматривали вероятности в конечном множестве возможных событий, а для корректного определения интересующей нас вероятности необходимо рассматривать бесконечное множество траекторий. Для того чтобы не выходить за рамки конечной схемы, мы упростим решение задачи и предположим, что событие, заключающееся в том, что частица рано или поздно вернется в нуль, имеет определенную вероятность, которую мы обозначим через f. Тогда

$$f = f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} + \ldots \tag{5.8}$$

Теперь мы можем доказать замечательный результат о возвратности симметричного случайного блуждания на прямой.

Теорема. *Возвращение частицы в нуль происходит с вероятностью* 1.

Доказательство. Из формул (5.6), (5.5) и (5.8) имеем

$$f = (1 - u_2) + (u_2 - u_4) + (u_4 - u_6) + \ldots + = 1.$$

Таким образом, возвращение частицы в нуль является событием с вероятностью 1. Оказывается, однако, что момента возвращения приходится ждать слишком долго. Для того чтобы в этом убедиться, найдем среднее значение периода времени до возвращения частицы в нуль. Так как каждому значению $2n$ времени ожидания соответствует вероятность f_{2n}, то среднее время ожидания возвращения частицы, если время наблюдения не превосходит некоторого момента $2N$, равно

$$\sum_{n=1}^{N} 2nf_{2n} + 2Nu_{2N}. \tag{5.9}$$

Последнее слагаемое в этой сумме соответствует случаю, когда за время $2N$ частица ни разу не вернется в нуль $\left(\sum_{n=1}^{N} f_{2n} + u_{2N} = 1, \text{ см. } (5.5)\right)$. Очевидно, что большим значениям N соответствуют довольно большие значения выражения (5.9). Оценим значение выражения

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nf_{2n}.$$

Так как при $n \to \infty$ $f_{2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}$ и $2nf_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2nf_{2n}$ расходится *) и, следовательно, среднее значение времени возвращения бесконечно.

Итак, частица обязательно вернется в начало координат и, стало быть, побывает там бесконечное число раз, но (среднее) время ожидания даже первого возвращения бесконечно. Можно ли утверждать, что начало координат — единственная точка, которая обладает таким свойством? Ответ на поставленный вопрос дает решение задачи о первом достижении некоторого уровня.

По задаче 2 в § 2 вероятность того, что точка с ординатой $y > 0$ будет впервые достигнута при абсциссе x, равна

$$g_x^{(y)} = \frac{y}{x} C_x^{(x+y)/2} \cdot 2^{-x}, \qquad (5.10)$$

$0 < y \leq x$. Так как $x + y$ четно, положим $x + y = 2n$ и перепишем (5.10), выразив x через $2n$:

$$g_{2n-y}^{(y)} = \frac{y}{2n-y} C_{2n-y}^{n} \cdot 2^{-2n+y}. \qquad (5.11)$$

Положим в (5:11) $y = 1$ и получим $g_{2n-1}^{(1)} = \frac{1}{2n-1} \times$ $\times\, C_{2n-1}^{n} \cdot 2^{-2n+1}$ — вероятность первого достижения прямой $y = 1$ в момент $2n - 1$. Как следует из формулы (2),

$$g_{2n-1}^{(1)} = f_{2n}. \qquad (5.12)$$

Это соответствие между вероятностями первого достижения точки с ординатой 1 и первого возвращения в нуль позволяет применить доказанную теорему к решению задачи о первом достижении.

С вероятностью 1 *частица достигает уровня* 1.

По симметрии, тот же вывод справедлив в отношении первого достижения уровня —1.

Теперь интуиция подсказывает, что подобное утверждение может быть сформулировано для любого уровня y; план точного доказательства см. в задачах 5 и 6.

Общий итог параграфа таков: с вероятностью 1 блуждающая частица бесконечное число раз пересекает любой

*) Ряд расходится (сумма бесконечна), если расходится последовательность конечных частичных сумм.

постоянный уровень, в частности, бесконечное число раз возвращается в исходное положение, но среднее время ожидания этих событий бесконечно.

Упражнения

1. Используя задачу 1 в § 2 для подсчета числа положительных и отрицательных путей, соединяющих точки (0, 0)) и ($2n$, 0), найдите вероятность f_{2n}.

2. В сберегательный банк стоят в очереди $2n$ человек. Каждый из них с вероятностью 1/2 вносит 10 рублей или с вероятностью 1/2 берет 10 рублей. В начальный момент времени в банке денег нет. Найдите вероятность того, что ни один из тех, кто хочет взять деньги, не будет ждать? Докажите, что эта вероятность равна u_{2n}, и найдите ее точные и приближенные значения для $n = 4, 5, 6$.

3. Опираясь на упражнение 2 из § 2, найдите, что

$$g^{(y)}_{2n-y} = C^{n}_{2n-y}\cdot 2^{-2n+y} - C^{n}_{2n-y-1}\cdot 2^{-2n+y+1}. \qquad (5.13)$$

4. Покажите, что вероятность достижения точки ($2n - m$, m), равная $C^{n}_{2n-m}\cdot 2^{-2n+m}$, может быть представлена в виде суммы

$$\sum_{y=m}^{n} g^{(y)}_{2n-y}. \qquad (5.14)$$

5. Докажите формулу

$$g^{(y+1)}_{2n-(y+1)} = \sum_{k=y}^{n-1} g^{(y)}_{2k-y}\, g^{(1)}_{2n-2k-1}, \qquad (5.15)$$

связывающую вероятности первого достижения уровней y и $y + 1$.

6. В следствии из основной теоремы доказано, что $g^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} g^{(1)}_{2n-1} = 1$. Докажите, что частица с вероятностью 1 достигнет любого уровня y, т. е., что $g^{(y)} = \sum_{n=y}^{\infty} g^{(y)}_{2n-y} = 1$. (Доказательство проведите методом математической индукции, используя формулу (5.12) и формулу изменения порядка суммирования

$$\sum_{n=y+1}^{\infty}\ \sum_{v=y}^{n-1} = \sum_{v=y}^{\infty}\ \sum_{n-v=1}^{\infty}.)$$

7. Покажите, что частица, начинающая блуждание из любой точки с ординатой y, с вероятностью 1 попадет в нуль.

8. Пусть в случайном блуждании на прямой участвуют две частицы, которые перемещаются независимо друг от друга и в одни и те же моменты времени. Используя вывод о том, что частица с вероятностью 1 достигает любого положения на прямой, докажите, что вероятность встречи частиц равна 1, если начальное расстояние между ними четно, и равна 0, если начальное расстояние нечетно.

§ 4. Задача о числе возвращений в начало координат

Мы доказали, что симметричное случайное блуждание бесконечное число раз возвращается в исходное положение. После того как произошло первое возвращение, мы проводим время в ожидании второго возвращения, и, хотя оно достоверно, ждать нам приходится в среднем столь же долго, как и первого возвращения. В этом параграфе мы ответим на вопросы о том, как с увеличением продолжительности наблюдения растет число возвращений и как «тянется» время ожидания m-го возвращения.

Докажем утверждение. *Вероятность того, что в момент $2n$ имеет место m-е возвращение в нуль, равна*

$$f_{2n}^{(m)} = \frac{m}{2n - m} C_{2n-m}^{n} \cdot 2^{-2n+m}. \tag{5.16}$$

Сравнение (5.16) с формулой (5.11) позволяет высказать утверждение иначе: вероятность m-го возвращения в начало координат на $2n$-м шаге равна вероятности первого достижения точки с ординатой m на $(2n - m)$-м шаге, т. е.

$$f_{2n}^{(m)} = g_{2n-m}^{(m)}. \tag{5.17}$$

Это утверждение справедливо во всяком случае при $m = 1$ (см. (5.12)). Новая формулировка подсказывает способ доказательства.

Установим взаимно однозначное соответствие между путями, впервые достигающими точки m в момент $2n - m$, и всеми неположительными путями, для которых точка $(2n, 0)$ является точкой последнего m-го возвращения в нуль. Для этого рассмотрим произвольный путь первого достижения m и проведем через точки первого достижения уровней 1, 2, ..., m прямые с угловым коэффициентом -1 до пересечения с осью абсцисс (рис. 27). Полученные m точек на оси абсцисс будут вершинами некоторого неположительного пути длины $2n$ и будут указывать моменты возвращения этого пути в начало координат. С помощью обратного построения любой неположительный путь длины $2n$, имеющий ровно m вершин на оси абсцисс и последнюю в точке $2n$, преобразуется в некоторый путь, впервые достигающий точки m в момент $2n - m$. Из соответствия двух множеств путей следует, что число неположительных путей с m-м возвращением в нуль в момент $2n$ равно

$$\frac{m}{2n - m} C_{2n-m}^{m} = 2^{2n-m} g_{2n-m}^{(m)}.$$

Каждый такой путь точками возвращения делится на m участков. Отображая произвольным образом эти участки относительно оси абсцисс, мы получим все пути с m вершинами на оси абсцисс. Число их будет, очевидно, в 2^m раз больше числа неположительных путей и поэтому будет

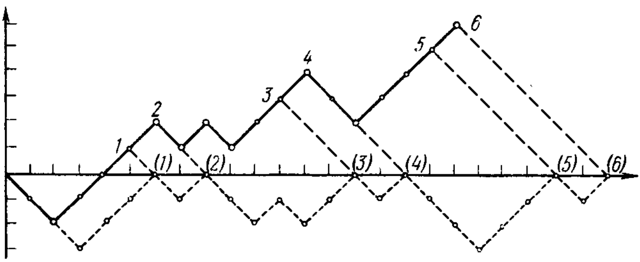


Рис. 27. Взаимно-однозначное соответствие между путями первого достижения точки m в момент $2n - m$ и путями с m-возвращением в нуль в момент $2n$

равно $2^{2n}g_{2n-m}^{(m)}$. Разделив это число на 2^{2n} — общее число путей длины $2n$,— получим вероятность (5.16).

Найдем теперь вероятность m возвращений в течение всего промежутка времени от 0 до $2n$. Рассмотрим все пути длины $2n$, которые m раз возвращаются в нуль. Существуют две возможности: последнее m-е возвращение происходит или в момент $2n$, или в некоторый момент $2\nu < 2m$. Во втором случае каждый путь точкой 2ν последнего m-го возвращения делится на два участка, причем на участке от 2ν до $2n$ возвращений в нуль нет. По задаче 3 в § 2 (см. следствие) участок пути от 2ν до $2n$ можно выбрать числом способов, равным числу всех путей, соединяющих точки $(2\nu, 0)$ и $(2n, 0)$. Поэтому все участки от момента последнего возвращения можно без ущерба заменить участками, которые имеют возвращение в нуль по крайней мере в момент $2n$. Следовательно, число путей длины $2n$, имеющих ровно m возвращений, равно числу путей, которые имеют самое меньшее m возвращений в нуль и последнее — в момент $2n$. Таким образом, мы свели задачу к подсчету общего числа путей, имеющих m, $m + 1$, ..., n возвращений в нуль в момент $2n$. Переходя к вероятностям, получаем, что вероятность m возвращений равна

$$h_{2n}^{(m)} = f_{2n}^{(m)} + f_{2n}^{(m+1)} + \ldots + f_{2n}^{(n)}$$

или

$$h_{2n}^{(m)} = g_{2n-m}^{(m)} + g_{2n-(m+1)}^{(m+1)} + \ldots + g_{n}^{(n)},$$

где слагаемые справа — это вероятности первого достижения точек m, $m+1$, ..., n в моменты $2n-m$, $2n-m-1$, ..., n соответственно. Так как при $k = m, m+1, ..., n-1$

$$g^{(k)}_{2n-k} = C^{n}_{2n-k}\cdot 2^{-2n+k} - C^{n}_{2n-k-1}\cdot 2^{-2n+k+1}$$

и $g^{(n)}_{n} = C^{n}_{n}\cdot 2^{-n}$ (см. упражнение 3 § 3), то

$$h^{(m)}_{2n} = C^{n}_{2n-m}\cdot 2^{-2n+m},$$

т. е. $h^{(m)}_{2n}$ равна вероятности достижения точки m в момент $2n-m$ (см. упражнение 4 § 3). Итак, *вероятность того, что за время $2n$ произойдет ровно m возвращений в нуль, равна*

$$h^{(m)}_{2n} = C^{n}_{2n-m}\cdot 2^{-(2n-m)}. \tag{5.18}$$

Заметим, что в (5.16) и (5.18) «новых» вероятностей не появилось; найденные вероятности совпали со значениями вероятностей, полученных в предыдущих параграфах.

Простой проверкой доказывается следующее следствие.

При $m = 0$ и $m = 1$ вероятности $h^{(m)}_{2n}$ равны u_{2n}; при $m > 1$ вероятности $h^{(m)}_{2n}$ строго убывают:

$$h^{(0)}_{2n} = h^{(1)}_{2n} > h^{(2)}_{2n} > \ldots > h^{(n)}_{2n}. \tag{5.19}$$

Для проверки формулы (5.19) достаточно показать, что $h^{(m)}_{2n} > h^{(m-1)}_{2n}$ при $m > 1$.

Неравенства (5.19) неопровержимо свидетельствуют, что каково бы ни было время случайного блуждания, наиболее вероятно либо отсутствие возвращений, либо ровно одно возвращение, чем любое другое их число. Обычно ожидается, что число возвращений пропорционально времени блуждания. Но это представление опровергается наблюдением и расчетом — число возвращений растет с ростом $2n$ как $\sqrt{2n}$. Пути возвращаются в начало координат очень редко, и чем продолжительнее время блуждания, тем реже возвращается частица в исходное положение. Чтобы в этом убедиться, вычислим среднее число возвращений за фиксированное время $2n$:

$$\mu = \sum_{m=0}^{n} m h^{(m)}_{2n}.$$

Используем соотношения

$$\sum_{m=0}^{n} h^{(m)}_{2n} = 1, \quad (n-m)\, h^{(m)}_{2n} = \frac{2n-m}{2}\, h^{(m+1)}_{2n}.$$

Проведем выкладки по вычислению μ:

$$n-\mu=\sum_{m=0}^{n}(n-m)\,h_{2n}^{(m)}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{2n-m}{2}\,h_{2n}^{(m+1)}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}h_{2n}^{(m+1)}-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\,h_{2n}^{(m+1)}=$$

$$=\frac{2n+1}{2}\left(1-h_{2n}^{(0)}\right)-\frac{1}{2}\mu.$$

Отсюда

$$\mu=\frac{2n+1}{2}u_{2n}-1.$$

Так как при больших значениях n

$$u_{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

то

$$\mu\sim\frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, с увеличением продолжительности блуждания относительное число возвращений убывает, а периоды между возвращениями возрастают по длине. Так, например, за 10 000 шагов частица побывает в нуле в среднем около 40 раз, за 1 000 000 шагов — около 400 раз, а за 100 000 000 шагов — около 4000 раз. Соответственно, среднее время между возвращениями будет меняться от 250 к 2500 и далее до 25 000. Мы уже говорили о том, что рост среднего времени между соседними возвращениями не зависит от номера возвращения. Теперь, используя то, что число возвращений растет в среднем как $\sqrt{n}$, можно сделать вывод о том, что среднее время от начала блуждания до m-го возвращения в начало координат растет как m^2. Это заключение может быть уточнено в форме «предельной» теоремы (см. упражнение 2).

Так как приблизительно в половине моментов возвращения в нуль частица переходит с одной на другую половину прямой, то полученные здесь выводы непосредственно касаются продолжительности времени пребывания частицы на положительной и отрицательной сторонах прямой. К точной формулировке результата мы переходим в следующем параграфе.

Упражнения

1. Показать, что

$$u_{2n} = f_{2n} + f_{2n}^{(2)} + \ldots + f_{2n}^{(n)}.$$

2. Используя асимптотические соотношения

$$\ln C_k^l \sim -l \ln \frac{l}{k} - (k-l) \ln \frac{k-l}{k} + \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\dfrac{l(k-l)}{k}}}$$

при $l \to \infty$ и $k - l \to \infty$ (это следствие формулы Стирлинга, см. § 9 гл. 1) и

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha - \frac{\alpha^2}{2}$$

при $|\alpha| < 1$ (первые два члена разложения функции в ряд Тейлора), докажите, что при $n \to \infty$

$$f_{2n}^{(m)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{m}{(2n-m)^{3/2}}\, e^{-m^2/2(2n-m)}.$$

Тогда вероятность $\sum\limits_{n=m}^{m+N} f_{2n}^{(m)}$ того, что m возвращений в начало координат произойдет за время от $2m$ до $2m + 2N$, можно представить как интегральную сумму для интеграла Римана от функции

$$\psi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-3/2} e^{-1/2y}$$

в пределах от 0 до $2N/m^2$. Отсюда можно заключить, что вероятность того, что m-е возвращение произойдет до момента αm^2 ($\alpha > 0$ — произвольное действительное число), стремится при возрастании m к интегралу

$$\int_0^\alpha \psi(y)\, dy,$$

т. е. время до m-го возвращения растет с ростом m как m^2. (Для вычисления последнего интеграла удобно использовать равенство

$$\int_0^\alpha \psi(y)\, dy = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

так как значения функции $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$ можно найти в любом учебнике по теории вероятностей в таблицах функции нормального распределения; см. также § 5 гл. 4.)

§ 5. Закон арксинуса

Мы установили важнейшее свойство симметричного случайного блуждания — периоды между последовательными возвращениями частицы в нуль оказываются необычайно длинными. Мы убедились в этом, используя различные подходы, и теперь нам предстоит ответить на вопрос о том, как долго частица будет в течение блуждания находиться выше или ниже оси абсцисс. Естественное, с точки зрения здравого смысла, предположение о том, что относительное время, которое частица проводит выше оси абсцисс, близко к 1/2, не подтверждается экспериментом. Оказывается, что для этой доли времени значения, близкие к 1/2, наименее вероятны, и значительную часть времени частица проводит в какой-либо одной полуплоскости. Эти парадоксальные закономерности перехода частицы с положительной стороны прямой на отрицательную и наоборот раскрываются теоремой, получившей название «закона арксинуса».

Докажем предварительно следующий простой результат: при $n \geqslant 1$

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}. \tag{5.20}$$

Для доказательства рассмотрим все пути длиной $2n$, которые возвращаются в момент $2n$ в нуль. Формула (5.20) является вариантом формулы полной вероятности (см. с. 63). В самом деле, пусть событие A_{2n} соответствует любому пути из $(0, 0)$ в $(2n, 0)$, а событие B_{2k} — пути с первым возвращением в нуль в момент $2k$, $k = 1, \dots, n$; при этом события B_{2k} несовместны и $A_{2n} \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_{2k}$. Тогда

$$P(A_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} P(B_{2k})\, P(A_{2n}/B_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} P(B_{2k})\, P(A_{2n-2k})$$

в силу того, что $P(A_{2n}/B_{2k}) = P(A_{2n-2k})$. Так как $P(A_{2n}) = u_{2n}$, $P(B_{2k}) = f_{2k}$, получаем (5.20).

Обозначим через $p_{2k,2n}$ вероятность того, что в течение времени от 0 до $2n$ путь частицы неотрицателен $2k$ единиц времени и неположителен $2n - 2k$ единиц времени. Удобно говорить, что частица проводит на положительной стороне время от n до $n + 1$, если соответствующий отрезок пути лежит выше оси x. Докажем теперь основное утверждение:

при $n \geqslant 1$ и $0 \leqslant k \leqslant n$

$$p_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{5.21}$$

Пусть $A_{2k,2n}$ — событие, состоящее в том, что частица за период времени от 0 до $2n$ проводит $2k$ единиц времени на положительной стороне и $2n - 2k$ — на отрицательной стороне. Пусть B_{2r}^{+} и B_{2r}^{-} — события, состоящие в том, что частица впервые возвращается в нуль в момент $2r$, оставаясь до этого соответственно на положительной или отрицательной стороне. Очевидно, что $P(A_{2k,2n}) = p_{2k,2n}$ и $P(B^+_{2r}) = P(B^-_{2r}) = {}^1/_2 f_{2r}$. По формуле полной вероятности

$$P(A_{2k,2n}) = \sum_r P(B^+_{2r})\, P(A_{2k,2n}/B^+_{2r}) + \sum_r P(B^-_{2r})\, P(A_{2k,2n}/B^-_{2r});$$

так как

$$P(A_{2k,2n}/B^+_{2r}) = P(A_{2k-2r,2n-2r}),$$

$$P(A_{2k,2n}/B^-_{2r}) = P(A_{2k,2n-2r}),$$

то

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}p_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}p_{2k,2n-2r}. \qquad (5.22)$$

В случае, когда $k = 0$ или $k = n$, равенство (5.21) тривиально, так как искомая вероятность равна u_{2n}. Полученное тождество рассматривается при всех n и $0 < k < n - 1$. Выведем (5.21) из (5.22) методом математической индукции по n. Легко видеть, что при $n = 1$ соотношение тривиально. Предположим, что при всех $m \leqslant n - 1$

$$p_{2k,2m} = u_{2k}u_{2m-2k}$$

и, в частности,

$$p_{2k-2r,2n-2r} = u_{2n-2k}u_{2k-2r},$$
$$p_{2k,2n-2r} = u_{2k}u_{2n-2k-2r}. \qquad (5.23)$$

Тогда из (5.22) и (5.23) получаем

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2n-2r} + \frac{1}{2}u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2n-2k-2r}.$$

Пользуясь формулой (5.20), находим окончательно

$$p_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}u_{2k} + \frac{1}{2}u_{2k}u_{2n-2k} = u_{2k}u_{2n-2k}.$$

Соотношение (5.21) определяет удивительное свойство, присущее блужданию частицы. Интуиция подсказывает, что доли времени, проводимые частицей выше и ниже оси абсцисс, примерно одинаковы и близки к 1/2. Для проверки произведем подсчеты с помощью формулы (5.21) для случая $n = 10$. Вероятности $p_{2k,2n}$ даны в следующей табличке:

k	0	1	2	3	4	5
$p_{2k,2n}$	0,1762	0,0927	0,0736	0,0655	0,0617	0,0606
k	10	9	8	7	6	5

убедиться в том, что *)

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\right) \quad \text{или} \quad \int_0^x f(y)\,dy = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}.$$

Пользуясь только формулой Стирлинга, можно утверждать, что при больших n

$$p_{2k,2n} \sim \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

с хорошим приближением, если только k не очень близко к 0 или n. Зададимся некоторым α, $0 < \alpha < 1$, и сравним две величины

$$\sum_{k/n \leqslant \alpha} p_{2k,2n} \quad \text{и} \quad \int_0^\alpha f(x)\,dx.$$

Обозначим $x_k = k/n$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = 1/n$, тогда

$$\sum_{k/n \leqslant \alpha} p_{2k,2n} \sim \sum_{x_k \leqslant \alpha} \Delta x_k f(x_k).$$

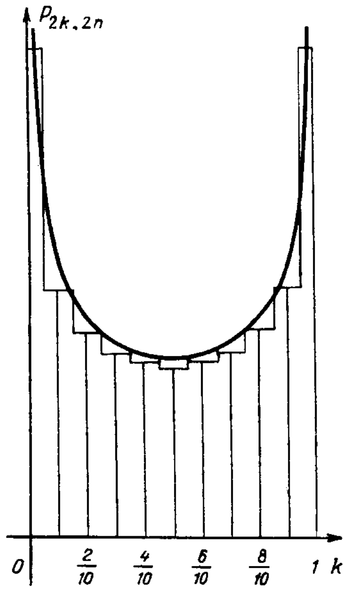


Рис. 28. Закон арксинуса

Правая часть при $n \to \infty$ или при $\Delta x_k \to 0$ стремится к величине площади фигуры, ограниченной осью x, кривой $f(x)$ и вертикальными прямыми $x = 0$ и $x = \alpha$. Эта площадь по определению выражается интегралом

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\alpha}.$$

Таким образом, мы пришли к теореме, которая широко известна как «закон арксинуса».

Закон арксинуса. *Вероятность того, что доля времени, проводимого частицей на положительной*

---

*) Для этого достаточно вспомнить, что производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ находится по формуле $y' = f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$, а производная функции $y = 1/f(x)$ — по формуле

$$y' = -\frac{1}{[f(x)]^2} f'(x).$$

части, не превосходит α, $0 < \alpha < 1$, *стремится к* $(2/\pi)\arcsin\sqrt{\alpha}$ *при* $n \to \infty$.

Пользуясь таблицами синуса, можно вычислить, например,

$$\sum_{k/n < 0{,}0062} p_{2k,2n} \approx 0{,}05,$$

$$\sum_{k/n < 0{,}0245} p_{2k,2n} \approx 0{,}1,$$

$$\sum_{k/n < 0{,}1464} p_{2k,2n} \approx 0{,}25.$$

Так, например, за время $n = 1000$ частица с вероятностью 0,1 остается на одной стороне более чем 993 момента времени и с вероятностью 0,2 — больше чем 975 моментов времени.

Пример. Представим себе, что два человека играют в «орла и решку», поочередно подбрасывая правильную монету и выигрывая всякий раз при выпадении «орла» («герба»). Последовательность результатов отдельных партий (последовательность выигрышей и проигрышей) геометрически будет представляться графиком симметричного случайного блуждания. Положение графика выше оси абсцисс соответствует ситуации, при которой один из игроков лидирует: достижение графиком оси абсцисс интерпретируется как суммарный ничейный результат и т. п. Результаты § 4 и 5 применительно к описанной ситуации говорят о том, что с ростом числа сыгранных партий «ничьи» становятся все реже и реже, соответственно уменьшается относительное число смен лидерства и, таким образом, бóльшую часть времени лидирует один из игроков. В игре, состоящей из 1000 партий, среднее число ничьих равно 12, из них приблизительно половина будет соответствовать действительной смене лидерства. Как показывают предыдущие расчеты, по закону арксинуса не реже чем в одном случае из десяти один игрок будет за все время находиться в выигрыше более чем в 975 партиях из 1000.

Упражнения

1. Доказать, что вероятность того, что последнее возвращение в нуль для траектории длины $2n$ произойдет в момент $2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, равна $u_{2k}u_{2n-2k}$.

2. Найти число путей из начала координат в точку $(2n, 0)$ таких, что $2k$ вершин лежат не ниже оси x, а остальные — ниже ($k = 0, 1, \ldots, n$). Доказать, что это число не зависит от k и равно $\dfrac{1}{n+1} C_{2n}^{n}$.

3. Говорят, что траектория длины n с ординатами $y_0 = 0, y_1, \ldots, y_n$ имеет *первый максимум* y_k в момент k, если $y_k > y_0$, $y_k > y_1, \ldots, y_k > y_{k-1}$ и $y_k \geq y_{k+1}, \ldots, y_k \geq y_n$. Доказать утверждение, носящее название «второй закон арксинуса»: вероятность того, что траектория длины $2n$ имеет первый максимум в моменты $2k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ или $2k + 1$ $(k = 0, \ldots, n - 1)$, равна $p_{2k, 2n}$.

§ 6. О симметричном случайном блуждании на плоскости и в пространстве

В гл. 1 было рассказано о случайном блуждании на плоскости. Предполагалось, что частица выходит из начала координат (0, 0) и перемещается по точкам плоскости с целочисленными координатами. При этом за один шаг частица перемещается из точки (x, y) с вероятностями 1/4 в одну из четырех смежных точек $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$, $(x, y - 1)$ независимо от того, где находилась частица до точки (x, y). Аналогично можно определить симметричное блуждание в трехмерном пространстве: частица перемещается из точки (x, y, z) за один шаг в одну из шести точек $(x + 1, y, z)$, $(x - 1, y, z)$, $(x, y + 1, z)$, $(x, y - 1, z)$, $(x, y, z + 1)$, $(x, y, z - 1)$ с вероятностями 1/6. В § 3 мы разрешили вопрос о возвратности симметричного блуждания на прямой. Рассмотрим эту же задачу на плоскости и в пространстве. Покажем, что двумерное случайное блуждание возвратно, а трехмерное, вообще говоря, невозвратно.

Введем снова вероятности u_{2n} и f_{2n}. Как и раньше, u_{2n} — вероятность возвращения частицы в исходное положение в момент $2n$, а f_{2n} — вероятность первого возвращения в момент $2n$. Оказывается, что в случае двух и трех измерений остается справедливым соотношение

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}, \qquad n \geq 1, \tag{5.24}$$

между u_{2n} и f_{2n} (это легко проверить, используя соображения при выводе этой формулы в одномерном случае).

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что на плоскости $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$, а в пространстве $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} < 1$. Вспомним, что в одномерном случае в то время как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ сходится к 1, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ расходится. Это поведение рядов есть проявление общей закономерности, которая будет доказана в гл. 7

(см. § 2), и состоит в том, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$ тогда и только тогда, когда $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} = \infty$; иными словами, *вероятность возвращения в начало координат равна* 1 *или меньше* 1 *в зависимости от того, расходится или сходится ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$. Например, если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ сходится, т. е. $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} = s < \infty$, то, суммируя обе части соотношения (5.24) по $n \geqslant 1$, получаем слева

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} - u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} - 1,$$

так как $u_0 = 1$, и справа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}}. \tag{5.25}$$

Поэтому $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1 - \frac{1}{s} < 1$. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$. В этом параграфе мы только воспользуемся этим утверждением, а доказательство отложим до § 2 гл. 7. Исследуем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ в двумерном и трехмерном случае и на этой основе сделаем заключение о возвратности соответствующего блуждания.

Найдем u_{2n} в двумерном случае. Общее число путей из начала координат длины $2n$ равно 4^{2n}. Для того чтобы в момент $2n$ частица оказалась снова в начале координат, число перемещений вверх должно быть равно числу перемещений вниз, а число перемещений вправо — числу перемещений влево. Поэтому, если k — число перемещений вверх, то число перемещений вниз равно k, а число перемещений вправо, так же как и число перемещений влево, равно $n-k$. Так как при этом последовательность перемещений вверх, вниз, вправо, влево произвольна, то искомое число путей равно

$$\frac{(2n)!}{k!k!\,(n-k)!\,(n-k)!} = C_{2n}^n\,(C_n^k)^2. \qquad (5.26)$$

Поскольку k может принимать значения от 0 до n, то общее число путей, заканчивающихся в момент $2n$ в начале координат, равно

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!\,(n-k)!\,(n-k)!} = C_{2n}^n \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2. \qquad (5.27)$$

Так как $\sum\limits_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n$, то это число равно $(C_{2n}^n)^2$. Таким образом,

$$u_{2n} = 4^{-2n}\,(C_{2n}^n)^2. \qquad (5.28)$$

Еще раз воспользуемся приближенным представлением C_{2n}^n при больших n по формуле Стирлинга. Получаем

$$u_{2n} \sim 4^{-2n} 2^{4n} \frac{1}{\pi n} = \frac{1}{\pi n},$$

откуда следует, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ расходится. Поэтому, используя соображения, относящиеся к соотношению (5.25), заключаем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1$, т. е. блуждание возвратно.

В трехмерном случае вероятность возвращения в начало координат в момент $2n$ равна по аналогии с (5.26) — (5.28)

$$u_{2n} = 6^{-2n} \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \frac{(2n)!}{i!i!j!j!\,(n-i-j)!\,(n-i-j)!} =$$

$$= 2^{-2n} C_{2n}^n \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \left[3^{-n} \frac{n!}{i!j!\,(n-i-j)!}\right]^2. \qquad (5.29)$$

Выражения $C_n(i, j) = \dfrac{n!}{i!j!\,(n-i-j)!}$ являются коэффициентами в так называемом триномиальном разложении

$$(a+b+c)^n = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} C_n(i, j)\, a^i b^j c^{n-i-j}.$$

Полагая в этом разложении $a = b = c = 1$, получаем

$$3^n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} C_n(i, j),$$

или

$$1 = \sum_{0 \leq i+j \leq n} 3^{-n} C_n(i, j).$$

Поэтому

$$\sum_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_n(i, j)]^2 \leq \max_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_n(i, j)]$$

и

$$u_{2n} \leq (2^{-2n} C_{2n}^n) \max_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_n(i, j)]. \qquad (5.30)$$

Вероятности $3^{-n} C_n(i, j)$ достигают своего максимального значения

при $i = j = \frac{n}{3}$, если n делится на 3,

при $i = j = \frac{n-1}{3}$, если $n - 1$ делится на 3,

при $i = j = \frac{n+1}{3}$, если $n + 1$ делится на 3.

Во всех трех случаях, используя формулу Стирлинга, получаем, что при больших n

$$\max_{0 \leq i+j \leq n} [3^{-n} C_n(i, j)] \sim c/n \ (c \text{ — постоянная}).$$

Так как $2^{-2n} C_{2n}^n \sim 1/\sqrt{\pi n}$, то u_{2n} в (5.29) по порядку не превосходит $1/n^{3/2}$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ сходится к конечному пределу, и, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} < 1$, т. е. симметричное блуждание в трехмерном пространстве невозвратно (вероятность $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ вычислена и оказалась близкой к 0,35). Таким образом, замечательное свойство возвратности одномерного симметричного случайного блуждания сохраняется в двумерном случае и утрачивается при большем числе измерений.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Понятие случайной величины

В обыденной жизни и в научных исследованиях часто приходится встречаться с такими ситуациями, когда интересующая нас величина принимает различные значения в зависимости от случайных обстоятельств. К примеру, на вопрос, сколько вызовов поступит в справочную телефонную службу в течение ближайшего часа, нельзя дать строго определенного ответа, поскольку число вызовов за фиксированный промежуток времени подвержено случайным колебаниям ото дня ко дню. Точно так же нет возможности указать заранее число уличных происшествий в течение предстоящих суток в каком-либо населенном пункте. В подобных ситуациях говорят о случайных величинах, имея в виду их значения, которые могут быть различны в зависимости от случая.

Что нужно знать о случайной величине, чтобы иметь о ней исчерпывающие сведения? В первую очередь, очевидно, перечень тех значений, которые она может принимать. Однако этого недостаточно, поскольку легко представить себе величины, которые принимают одни и те же значения, но с разными вероятностями. Пусть для примера имеются два стрелка A и B, которые могут при каждом выстреле по мишени выбить 0, 1 и 2 очка. Этих сведений, конечно, недостаточно, чтобы охарактеризовать меткость стрелков. Если же сообщить вероятности, с которыми каждый из них выбивает то или иное число очков (см. таблицу), то такая характеристика уже возможна: видно, что стрелок A лучше, поскольку он чаще выбивает наибольшее число очков и реже выбивает минимальное число очков.

	Число очков		
	0	1	2
стрелок A	0,01	0,19	0,80
стрелок B	0,05	0,25	0,70

Таким образом, для задания случайной величины нужно знать ее значения и вероятности, с которыми эти значения принимаются. Назовем *случайной величиной* любую числовую функцию, определенную на множестве исходов некоторого случайного испытания. Пусть все возможные элементарные события исчерпываются множеством $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Тогда любая числовая функция $\xi(E)$ является случайной величиной. При таком определении на случайные величины распространяются все правила действий с обычными функциями: их можно складывать, перемножать и т. д.

П р и м е р 1. Пусть имеются шесть элементарных событий E_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, вероятности которых равны между собой. Определим на этом множестве следующие случайные величины:

а) $\xi_1(E_1) = 1$, $\xi_1(E_2) = 2$, $\xi_1(E_3) = 3$,
$\xi_1(E_4) = 4$, $\xi_1(E_5) = 5$, $\xi_1(E_6) = 6$;

б) $\xi_2(E_1) = 1$, $\xi_2(E_2) = 4$, $\xi_2(E_3) = 9$,
$\xi_2(E_4) = 16$, $\xi_2(E_5) = 25$, $\xi_2(E_6) = 36$;

в) $\xi_3(E_1) = 1$, $\xi_3(E_2) = 0$, $\xi_3(E_3) = 1$,
$\xi_3(E_4) = 0$, $\xi_3(E_5) = 1$, $\xi_3(E_6) = 0$;

г) $\xi_4(E_1) = 0$, $\xi_4(E_2) = 0$, $\xi_4(E_3) = 1$,
$\xi_4(E_4) = 0$, $\xi_4(E_5) = 0$, $\xi_4(E_6) = 1$;

д) $\xi_5(E_1) = -1$, $\xi_5(E_2) = 1$, $\xi_5(E_3) = -1$,
$\xi_5(E_4) = 1$, $\xi_5(E_5) = -1$, $\xi_5(E_6) = 1$.

Сумма случайных величин ξ_1 и ξ_2 дает новую случайную величину η, которая определяется из равенства

$$\eta(E_i) = \xi_1(E_i) + \xi_2(E_i).$$

Следовательно,

$$\eta(E_1) = 2,\quad \eta(E_2) = 6,\quad \eta(E_3) = 12,$$
$$\eta(E_4) = 20,\quad \eta(E_5) = 30,\quad \eta(E_6) = 42.$$

Из определения случайной величины, используя основные свойства вероятностей, мы можем найти те вероятности, с которыми случайная величина принимает любые из возможных своих значений. Для любого значения a случайной величины ξ обозначим через B_a событие, состоящее из всех тех элементарных событий E_i, для которых $\xi(E_i)$ принимает значение a, т. е.

$$B_a = \bigcup E_i,$$

где суммируются те E_i, для которых $E_i \in B_a$. Тогда вероятность того, что ξ примет значение a, определяется как

$$P\{\xi = a\} = P(B_a) = \sum_{E_i \in B_a} P(E_i).$$

В примерах 1 в) и 1 г) мы можем записать такие равенства:

$$P\{\xi_3 = 0\} = 0{,}5; \;\; P\{\xi_3 = 1\} = 0{,}5$$

и

$$P\{\xi_4 = 0\} = \frac{2}{3}; \quad P\{\xi_4 = 1\} = \frac{1}{3},$$

а в примере 1 д):

$$P\{\xi_5 = -1\} = 0{,}5; \;\; P\{\xi_5 = 1\} = 0{,}5.$$

Совокупность всех различных значений, которые может принимать случайная величина ξ, и вероятностей, с которыми она их принимает, называют *распределением вероятностей случайной величины* ξ. В примерах 1 а) и 1 б) распределения вероятностей определены сразу. Для примеров 1 в), 1 г) и 1 д) распределения только что выписаны.

Пример 2. Выделим один важный класс случайных величин. Заметим сначала, что в примерах 1 в) и 1 г) приведены случайные величины ξ_3 и ξ_4, которые принимают только два значения 1 и 0. В одном случае (пример 1 в)) значением 1 выделено событие «осуществился исход с нечетным номером», в другом случае (пример 1 г)) — событие «осуществился исход, номер которого равен 3». Пусть теперь B — некоторое случайное событие. Определим случайную величину $\chi_B(E)$ посредством равенства

$$\chi_B(E_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } E_i \in B, \\ 0, & \text{если } E_i \in \overline{B}. \end{cases}$$

Эту величину называют *индикатором* (или *характеристической функцией*) события B, поскольку функция однозначно определяет соответствующее событие.

Рассмотрение индикатора случайного события полезно, в частности, тем, что оно позволяет свести операции над событиями к соответствующим действиям над индикаторами событий. Легко проверить, что случайные величины $\chi_A(E)$ и $\chi_B(E)$ удовлетворяют следующим свойствам:

$$\chi_A(E) \cdot \chi_B(E) = \chi_{AB}(E),$$

$$\chi_A(E) + \chi_B(E) - \chi_{AB}(E) = \chi_{A \cup B}(E),$$

$$1 - \chi_A(E) = \chi_{\overline{A}}(E).$$

П р и м е р 3. Рассмотрим эксперимент, состоящий из 10 бросаний «правильной» монеты, и предположим, что все исходы этого эксперимента равновозможны, а поскольку их всего 2^{10}, то им приписаны вероятности $1/2^{10}$. Введем случайные величины $\chi_k(E)$ — число «гербов» при k-м бросании монеты, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Очевидно, что χ_k в зависимости от исходов E_i принимает только два значения 1 и 0, т. е. является индикатором события «герб» при k-м бросании монеты. Рассмотрим случайную величину ξ, определенную на множестве E_i, $i = 1, \ldots, 2^{10}$ и равную числу выпавших «гербов» при десяти бросаниях монеты. Какие значения принимает случайная величина ξ и с какими вероятностями?

Из определения ясно, что ξ может принимать любые целые значения от 0 до 10 с вероятностями:

$$P\{\xi = 0\} = \frac{1}{2^{10}}, \quad P\{\xi = 1\} = \frac{C_{10}^{1}}{2^{10}}, \ldots,$$

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_{10}^{m}}{2^{10}}, \ldots, P\{\xi = 10\} = \frac{C_{10}^{10}}{2^{10}} = \frac{1}{2^{10}}.$$

Очевидно, что сумма этих вероятностей равна 1, так как $\sum\limits_{m=0}^{10} C_{10}^{m} = 2^{10}$. Такое распределение уже появлялось в § 1 гл. 4 в связи с формулой Бернулли в схеме независимых испытаний с двумя исходами и носит название *биномиального распределения*.

Нам здесь важно отметить, что ξ можно представить в виде суммы случайных величин

$$\xi = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_{10},$$

хотя это обстоятельство и не облегчает вычисление вероятностей $P\{\xi = m\}$.

Последний пример поучителен еще и тем, что в нем рассмотрена ситуация, когда одновременно задана целая совокупность случайных величин $\chi_1, \ldots, \chi_{10}$ и можно говорить о их *совместном распределении*, а именно об осуществлении с вероятностью $P\{\chi_1 = a_1, \ldots, \chi_{10} = a_{10}\}$ события, заключающегося в том, что случайная величина χ_1 принимает значение a_1, случайная величина χ_2 — значение a_2 и т. д., случайная величина χ_{10} — значение a_{10}, где a_i равны либо 1, либо 0.

Две случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если для любых значений a и b этих величин имеют место равенства

$$P\{\xi = a, \eta = b\} = P\{\xi = a\}\cdot P\{\xi = b\}.$$

Пример 4. Пусть случайная величина ξ равна числу очков, выпавшему при первом бросании игральной кости, а η — числу очков, выпавшему при втором ее бросании. Докажем, что случайные величины ξ и η независимы при условии, что все исходы двух бросаний кости равновозможны.

Действительно, всего при двух бросаниях кости возможны 36 исходов. Обозначим их через E_{ij}, i, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, где i — число очков, выпавших при первом бросании кости, а j — при втором. Очевидно, что $\xi(E_{ij}) = i$ при любом j, а $\eta(E_{ij}) = j$ при любом i. Событие E_{ij} в нашем случае совпадает с событием $\{\xi = i, \eta = j\}$, и вероятность его равна $1/36$. Событие $\{\xi = i\}$ включает шесть равновероятных исходов E_{ij}, $j = 1, ..., 6$. Поэтому величина ξ принимает каждое из своих возможных значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 с вероятностью $1/6$. То же самое можно сказать и о величине η. Таким образом, при любом i и j

$$P\{\xi = i, \eta = j\} = P\{\xi = i\}\cdot P\{\eta = j\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Аналогично определяется *независимость в совокупности* случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n$ (или иначе *взаимная независимость*):

$$P\{\xi_1 = a_1, ..., \xi_n = a_n\} = P\{\xi_1 = a_1\}...P\{\xi_n = a_n\}$$

для всех наборов значений $a_1, ..., a_n$ случайных величин $\xi_1, ..., \xi_n$. Можно проверить, что в примере 3 случайные величины $\xi_1, ..., \xi_{10}$ взаимно независимы.

В заключение параграфа отметим, что схему Бернулли независимых испытаний с двумя исходами можно равносильным образом определить как совокупность взаимно независимых случайных величин — индикаторов одного и того же события в последовательных испытаниях (иллюстрацией служит пример 3).

Упражнения

1. Сколько всего существует различных индикаторов для данного множества событий $E_1, E_2, ..., E_n$?

Ответ: 2^n.

2. На плоскости xOy заданы 100 точек с целочисленными координатами от 1 до 10. Можно ли с помощью комбинаций одних лишь функций

от одной переменной (от x или y отдельно), определенных в точках 1, 2, ..., 10, задать индикатор произвольного множества из этих точек?

Ответ: можно.

3. Доказать, что при двух бросаниях монеты с равновозможными исходами случайная величина, равная числу выпадений герба при бросании в первый раз, не зависит от числа выпадений герба во второй раз.

4. Доказать, что случайные величины, равные числу очков, выпавших при бросании игральной кости в первый и третий раз, независимы при условии равновозможности исходов трех бросаний.

5. Четыре станка расположены на одной прямой, расстояния между каждыми двумя соседними станками одинаковы и равны a. Рабочий обслуживает эти станки и переходит от того станка, на котором им была закончена работа, к любому из четырех с равными вероятностями. Спрашивается, какое распределение имеет длина совершаемого им каждый раз перехода?

Ответ: $P_0 = 1/4$, $P_a = 3/8$, $P_{2a} = 1/4$, $P_{3a} = 1/8$.

§ 2. Математическое ожидание случайной величины

Полная характеристика случайной величины дается ее распределением вероятностей. Однако исключительно полезны некоторые постоянные числовые характеристики случайной величины, дающие представление о ее свойствах. Среди таких характеристик особенно большую роль играет математическое ожидание. Оно определяется по распределению случайной величины. Начнем изложение со следующего примера.

П р и м е р 1. Предположим, что на вечере в некоторой школе проводится беспроигрышная лотерея. Каждому участнику, пусть их число N, при входе предлагают лотерейный билет. Организаторы лотереи приготовили выигрыши следующим образом: выигрыш ценою a_i рублей выпадает на N_i билетов, $i = 1, ..., s$, $N_1 + N_2 + ... + N_s = N$. Какова цена участия в лотерее для каждого гостя школьного вечера? Пусть a — цена билета. Тогда, очевидно, что для вычисления a нужно использовать следующее соотношение, в котором слева и справа находится полная сумма денег, собранных организаторами лотереи:

$$aN = a_1N_1 + a_2N_2 + ... + a_sN_s.$$

Тогда

$$a = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{s} a_iN_i = \sum_{i=1}^{s} a_i\cdot\frac{N_i}{N}.$$

Справа в последнем равенстве стоит величина среднего выигрыша, поскольку $p_i = N_i/N$ естественно интерпретировать как вероятность вытянуть билет с выигрышем a_i.

Понятно, что выигрыш в лотерее есть случайная величина, а a_i — значения этой случайной величины. Таким образом, цена билета должна быть равна среднему выигрышу

$$a = \sum_{i=1}^{s} a_i p_i,$$

т. е. среднему значению случайной величины — выигрыша в лотерее.

Аналогичные задачи по подсчету среднего значения случайной величины возникают в очень многих теоретических и прикладных задачах.

Пусть случайная величина ξ принимает значения

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

соответственно с вероятностями

$$p_1, p_2, \ldots, p_m,$$

т. е. $p_i = P\{\xi = x_i\}$.

Сумма значений случайной величины, умноженных на соответствующие вероятности, называется *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины и обозначается символом $M\xi$:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{m} x_k p_k.$$

Понятие математического ожидания возникло в теории вероятностей довольно давно, впервые в работах Паскаля, Ферма, Гюйгенса в середине XVII века. Термин «математическое ожидание» связан, по-видимому, с представлением о среднем или наиболее ожидаемом выигрыше и его математическом выражении в теории азартных игр.

Пример 2. Вероятность появления события A в испытании равна $p = P(A)$. Спрашивается, чему равно математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании?

Рассмотрим индикатор события A — случайную величину χ_A, равную 1, если событие A наступило, и равную 0, если оно не наступило. Величина χ_A как раз и равна числу наступлений события A в одном испытании, причем

$$P\{\chi_A = 1\} = p \quad \text{и} \quad P\{\chi_A = 0\} = 1 - p = q.$$

Теперь ясно, что математическое ожидание равно

$$M\chi_A = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p = P(A).$$

П р и м е р 3. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Чему равно математическое ожидание числа появлений события A в n испытаниях?

В рассматриваемой схеме Бернулли обозначим через μ_n число появлений события A. Эта случайная величина имеет биномиальное распределение:

$$P\{\mu_n = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Согласно определению, математическое ожидание μ_n равно

$$M\mu_n = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

В § 2 гл. 4 при доказательстве теоремы Бернулли было обнаружено, что

$$M\mu_n = np.$$

В примере 5 мы выведем это равенство из общих свойств математических ожиданий.

П р и м е р 4. Станки расположены по кругу; расстояние между соседними станками равно a, число станков равно n. Мастер обслуживает станки в порядке возникновения требований, двигаясь по часовой стрелке по кругу. Вероятность возникновения требования об обслуживании для каждого станка одна и та же и равна $1/n$. Найти среднюю длину перехода, который должен сделать мастер. В начальный момент времени мастер находится у станка с номером 0.

Требование об обслуживании может возникнуть на любом станке, поэтому мастеру потребуется сделать путь ξ, длина которого может равняться $0, a, 2a, \ldots, (n-1)a$. Математическое ожидание длины перехода равно

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n-1} ka \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{2}(n-1).$$

Перечислим простые свойства математического ожидания, которые следуют из определения: пусть c — постоянная величина, тогда

$$Mc = c,$$

$$Mc\xi = cM\xi,$$

$$M(\xi + c) = M\xi + c.$$

Предоставляем читателю возможность доказать это в качестве упражнения.

Очень часто возникает необходимость вычислять среднее значение суммы случайных величин, когда известны средние значения каждого из слагаемых.

Математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

Действительно, пусть x_i и y_j значения случайных величин ξ и η соответственно, тогда

$$M(\xi + \eta) = \sum_i \sum_j (x_i + y_i) P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$
$$= \sum_i \sum_j x_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} + \sum_i \sum_j y_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$
$$= \sum_i x_i \sum_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} + \sum_j y_j \sum_i P\{\xi = x_i, \eta = y_i\} =$$
$$= \sum_i x_i P\{\xi = x_i\} + \sum_j y_j P\{\eta = y_j\} = M\xi + M\eta.$$

Этот результат обобщается на сумму любого конечного числа слагаемых:

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = M\xi_1 + M(\xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n) =$$
$$= M\xi_1 + M\xi_2 + M(\xi_3 + \ldots + \xi_n) = \ldots$$
$$\ldots = M\xi_1 + M\xi_2 + M\xi_3 + \ldots + M\xi_n.$$

П р и м е р 5. Вернемся к вычислению математического ожидания в примере 3. Пусть χ_k обозначает число появлений события A в k-м испытании. Тогда очевидно, что $\mu_n = \chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_n$ и

$$M\mu_n = M\chi_1 + M\chi_2 + \ldots + M\chi_n.$$

Но из примера 2 мы знаем, что $M\chi_k = p$, поэтому

$$M\mu_n = np.$$

П р и м е р 6. На двух столах положены по две коробки с фантами. Коробки внешне абсолютно одинаковы. На первом столе в одной коробке имеется один фант, а в другой — 7 фантов. На втором столе в одной коробке имеются 2 фанта, а в другой — 5 фантов. Ребенок сначала выбирает стол, а затем наудачу берет коробку с этого стола. После того как коробка выбрана, игра начинается сначала и повторяется n раз. Какой стол лучше выбирать, чтобы в среднем за n игр получить большее число фантов?

Пусть ξ_k — число фантов, которое получит ребенок в k-й раз, если он берет коробку с первого стола, а η_k — число фантов, которое он получит, если возьмет коробку со второго стола. Если ребенок будет систематически брать коробки с первого стола, то он получит $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ фантов, а если он станет каждый раз выбирать коробку со второго стола, то он получит $\eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_n$ фантов. Подсчитаем математические ожидания числа вынутых фантов. Так как $M\xi_k = 1\cdot\frac{1}{2} + 7\cdot\frac{1}{2} = 4$, а $M\eta_k = 2\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} = 3{,}5$, то за n раз в среднем ребенок с первого стола получит $4n$, а со второго — только $3{,}5n$ фантов.

Вопрос, который мы разрешили для суммы случайных величин, возникает и для произведений: можно ли выразить среднее значение произведения двух случайных величин через средние значения сомножителей? Оказывается, что при дополнительном условии независимости сомножителей имеет место следующая простая теорема.

Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин ξ *и* η *равно произведению математических ожиданий сомножителей*:

$$M\xi\eta = M\xi\cdot M\eta.$$

Для доказательства рассмотрим независимые случайные величины ξ и η со значениями x_i и y_j соответственно. Для каждой пары (x_i, y_j) вероятность того, что будут выполнены одновременно два события $\{\xi = x_i\}$ и $\{\eta = y_j\}$, равна произведению вероятностей каждого из этих событий:

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = P\{\xi = x_i\}\cdot P\{\eta = y_j\}.$$

Очевидно, что мы можем написать следующую цепочку равенств:

$$M\xi\eta = \sum_i\sum_j x_i y_j P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} =$$
$$= \sum_i\sum_j x_i y_j P\{\xi = x_i\}P\{\eta = y_j\} =$$
$$= \left(\sum_i x_i P\{\xi = x_i\}\right)\left(\sum_j y_j P\{\eta = y_j\}\right) = M\xi\cdot M\eta.$$

П р и м е р 7. По проводнику, сопротивление которого зависит от случайных обстоятельств (изменения тепловых условий, влажности, состояния окружающей среды и т. д.), течет электрический ток, сила которого также зависит от случая. Известно, что среднее значение сопротивления R проводника равно 25 Ом, а средняя сила тока $I = 6$ А. Требуется подсчитать среднее значение электродвижущей силы E, если известно, что сопротивление и сила тока независимы.

Согласно закону Ома

$$E = RI.$$

Так как по условию задачи $MR = 25$ Ом, $MI = 6$ А, то $ME = 25 \cdot 6 = 150$ В.

Упражнения

1. Пусть E_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ — исход бросания двух костей, причем $P(E_{ij}) = 1/36$. Пусть $\xi = \xi(E_{ij})$ — случайная величина, равная числу очков при бросании первой кости, а $\eta = \eta(E_{ij})$ — случайная величина, равная числу очков, выпавших при бросании второй кости. Доказать, что $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

2. Бросается или кость с обычными числами очков (0, 1, 2, 4, 5, 6) на гранях, или кость, на гранях которой обозначены числа очков (1, 1, 1, 4, 4, 4). Какой костью лучше играть, чтобы при трех бросаниях вероятность набрать в сумме не меньше 9 очков была большей?

Указание. Докажите, что распределения сумм S_1 и S_2 для первой и второй кости симметричны — одно относительно 9, другое — относительно 7,5. Полезно сравнить математические ожидания.

Ответ: первой, поскольку для нее $P\{S_1 \geqslant 9\} > 0{,}5$, тогда как $P\{S_2 \geqslant 9\} < 0{,}5$.

3. Пусть при игре в спортлото «5 из 36» вы заранее знаете, что при 5, 4, 3 угаданных вами номерах вы получаете выигрыш соответственно 10 000, 175, 8 руб. Аналогично пусть в спортлото «6 из 49» вам заранее известны выигрыши: 10 000, 2730, 42, 3 руб. Какая их этих игр оказывается более выгодной для игрока, если он собирается играть достаточно много раз?

Ответ: «5 из 36»; математическое ожидание выигрыша в этом случае при одной игре ≈ 20 коп., в спортлото «6 из 49» это математическое ожидание ≈ 14 коп.

§ 3. Дисперсия случайной величины

Для общего представления о распределении случайной величины важно знать не только ее математическое ожидание, но и разброс возможных ее значений относительно этого среднего значения. Типичный пример, который может прояснить положение дел, представляет собой распределение случайных ошибок измерения. Пусть ω — величина ошибки, допущенной при измерении. Если при измерении не допускаются систематические ошибки, связанные с особенностями наблюдателя и измерительного прибора, то математическое ожидание (среднее значение) ошибки измерения равно 0. Равенство $M\omega = 0$ позволяет нам утверждать, что ошибки положительного и отрицательного знака в среднем уравновешивают друг друга, но не дает ответа на важный вопрос: будут ли ошибки измерения малы по абсолютной величине и, следовательно, результаты измерений будут близки к измеряемой величине и на каждый из них можно уверенно рассчитывать, или же довольно часто будут встречаться большие ошибки того или иного знака?

В теории вероятностей для измерения разброса значений случайной величины около среднего значения используют понятие *дисперсии* (дисперсия в переводе с латинского — «рассеяние»). Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $M\xi$:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Из определения следуют простейшие свойства дисперсии (здесь c — постоянная величина):

$$D\xi \geqslant 0,$$

$$Dc = 0,$$

$$Dc\xi = c^2 D\xi,$$

$$D(\xi + c) = D\xi.$$

Для определения дисперсии можно использовать другую формулу, а именно

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M[\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2] =$$
$$= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

П р и м е р 1. Вычислим дисперсию случайной величины χ_A — индикатора случайного события A. Пусть

$$P\{\chi_A = 1\} = p, \quad P\{\chi_A = 0\} = 1 - p = q.$$

Тогда, как доказано выше в примере 2 § 2, $M\chi_A = p$. Найдем $M\chi_A^2$. Легко видеть, что χ_A^2 имеет точно такое же распределение, как и χ_A:

$$P\{\chi_A^2 = 1\} = p, \quad P\{\chi_A^2 = 0\} = q.$$

Поэтому

$$D\chi_A = M\chi_A^2 - (M\chi_A^2)^2 = p - p^2 = pq.$$

Для дальнейшего нам важно следующее свойство дисперсии.

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_n.$$

Действительно,

$$[\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - (M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n)]^2 =$$
$$= [(\xi_1 - M\xi_1) + \ldots + (\xi_n - M\xi_n)]^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k)^2 + \sum_{i \neq j} (\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j).$$

Отсюда, вычисляя математическое ожидание для самой левой и самой правой частей равенства, получаем

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + \sum_{i \neq j} M\,[(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)].$$

Слагаемые во второй сумме приведем к другому виду:

$$M\,[(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)] =$$
$$= M\,[\xi_i\xi_j - \xi_i M\xi_j - \xi_j M\xi_i + M\xi_i \cdot M\xi_j] =$$
$$= M\xi_i\xi_j - M\xi_i M\xi_j - M\xi_j M\xi_i + M\xi_i M\xi_j =$$
$$= M\xi_i \cdot \xi_j - M\xi_i M\xi_j$$

(при вычислении мы пользовались простейшими свойствами математического ожидания). Но по предположению при $i \neq j$ величины ξ_i и ξ_j независимы. По свойству математического ожидания произведения независимых случайных величин

$$M\xi_i\xi_j = M\xi_i M\xi_j,$$

поэтому все слагаемые во второй сумме равны нулю и

$$D\sum_{k=1}^{n} \xi_k = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что при доказательстве этого свойства использовалась лишь попарная независимость случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_k$, но не взаимная независимость.

Пример 2. Найти дисперсию числа μ_n появлений события A в схеме n испытаний Бернулли.

Мы знаем, что

$$P\{\mu_n = m\} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$

и $M\mu_n = np$, поэтому дисперсия μ_n по определению должна быть записана в виде

$$D\mu_n = \sum_{m=0}^{n} (m - np)^2 C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

Однако гораздо проще вычислить дисперсию с помощью только что доказанного свойства. В самом деле, $\mu_n = \chi_1 + \ldots + \chi_n$, где случайная величина χ_k есть число появлений события A в испытании с номером k, т. е. χ_k — индикатор A. Но $D\chi_k = pq$ (см. пример 1). Таким образом,

$$D\mu_n = npq.$$

Упражнения

1. Монета бросается наудачу 5 раз. Пусть ξ — число выпадений герба, а η — длина максимальной серии (выпавших подряд) гербов. Найти распределения величин ξ и η, а также их математические ожидания и дисперсии.

Ответ:

i	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = i)$ $P(\eta = i)$	1/32 1/32	5/32 12/32	10/32 11/32	10/32 5/32	5/32 2/32	1/32 1/32

$$M\xi = 5/2; \qquad D\xi = 5/4;$$
$$M\eta = 31/16; \qquad D\eta = 303/256.$$

2. Бросаются две игральные кости. Пусть x — число очков, выпавших на первой кости, а y — число очков, выпавших на второй. Найти распределения x и $z = \max(x, y)$, а также Mx, Dx, Mz и Dz.

Ответ:

i	1	2	3	4	5	6
$P(x = i)$ $P(z = i)$	1/6 1/36	1/6 3/36	1/6 5/36	1/6 7/36	1/6 9/36	1/6 11/36

$$Mx = 7/2; \qquad Dx = 35/12;$$
$$Mz = 161/36; \qquad Dz = 2555/1296.$$

3. Предлагается трижды бросить или игральную кость (1, 2, 3, 4, 5, 6) или кость (1, 1, 1, 6, 6, 6). Какой костью лучше играть, чтобы с большей вероятностью набрать в сумме не менее 15 очков? Найти для обеих костей математические ожидания и дисперсии суммы числа выпавших очков.

Ответ: второй. $MS_1 = MS_2 = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$; $DS_1 = 3 \cdot 35/12 = 8{,}75$; $DS_2 = 3 \cdot 6{,}25 = 18{,}75$.

4. Доказать, что $M\xi < \sqrt{M\xi^2}$.

§ 4. Закон больших чисел, теорема Чебышёва

Мы возвращаемся теперь к проблеме, решению которой служила доказанная в § 2 гл. 4 теорема Бернулли. Оказывается, что важный предельный результат, названный законом больших чисел в форме Бернулли, допускает широкое обобщение. Мы познакомим вас с замечательной теоремой, принадлежащей одному из крупнейших математиков XIX века П. Л. Чебышёву (1821—1894). Теорема Чебышёва интересна не только широтой условий применимости, но и исключительно простой идеей доказательства. В основе последующих рассуждений лежит неравенство, доказанное П. Л. Чебышёвым и позднее нашедшее многочисленные приложения как в теории вероятностей, так и в других математических дисциплинах.

Неравенство Чебышёва. *Если случайная величина* ξ *имеет конечное математическое ожидание* $M\xi$ *и конечную дисперсию* $D\xi$, *то при любом положительном* α *имеет место неравенство*

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \alpha\} \leqslant D\xi/\alpha^2.$$

Для доказательства предположим, что x_i — возможные значения случайной величины ξ и $p_i = P\{\xi = x_i\}$ — соответствующие вероятности. По определению

$$D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i.$$

Если в этой сумме мы отбросим все слагаемые, для которых $|x_i - M\xi| < \alpha$, и сохраним лишь те, для которых $|x_i - M\xi| \geqslant \alpha$, то от этого сумма может только уменьшиться. Следовательно,

$$D\xi \geqslant \sum_{|x_i - M\xi| \geqslant \alpha} (x_i - M\xi^2)\, p_i,$$

где сумма распространяется на те значения i, для которых

$$|x_i - M\xi| \geqslant \alpha.$$

Сумму, стоящую справа, мы уменьшим еще больше, если все множители $(x_i - M\xi)^2$ заменим их минимальным значением α^2:

$$D\xi \geqslant \alpha^2 \sum_{|x_i - M\xi| \geqslant \alpha} p_i.$$

Но

$$P\{|\xi - M\xi| \geqslant \alpha\} = \sum_{|x_i - M\xi| \geqslant \alpha} p_i,$$

откуда

$$D\xi \geqslant \alpha^2 P\{|\xi - M\xi| \geqslant \alpha\}.$$

Последнее неравенство и есть *неравенство Чебышёва.*

Рассмотрим теперь случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с известными математическими ожиданиями $M\xi_1, M\xi_2, \ldots$ $\ldots, M\xi_n$ и образуем новые случайные величины η, которые совпадают с арифметическими средними величин ξ, именно:

$$\eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n).$$

Пользуясь свойствами математических ожиданий, вычислим

$$M\eta_n = \frac{M(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{n} = \frac{M\xi_1 + \ldots + M\xi_n}{n}.$$

Рассмотрим теперь при разных n случайные величины η_n:

$$\eta_1 = \xi_1,\ \eta_2 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2},\ \ldots,\ \eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$$

и соответствующие математические ожидания

$$M\eta_1,\ M\eta_2,\ \ldots,\ M\eta_n.$$

Оказывается, что с увеличением значения n η_n становится близким к $M\eta_n$. Однако поскольку η_n — случайные величины, а $M\eta_n$ — числа, то утверждение о том, что с ростом n величины η_n стремятся к $M\eta_n$, имеет вероятностный характер. Это утверждение о предельном поведении арифметических средних случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ в наиболее общей форме и носит название закона больших чисел. Теперь мы переходим к доказательству закона больших чисел в форме Чебышёва.

Закон больших чисел (теорема Чебышёва). *Пусть при любом n имеются попарно независимые случайные величины*

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$$

с математическими ожиданиями $M\xi_k$ и дисперсиями $D\xi_k$, ограниченными одной и той же постоянной величиной c:

$$D\xi_k \leqslant c, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Тогда при любом $\alpha > 0$ и $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + \ldots + M\xi_n}{n}\right| < \alpha\right\} \to 1.$$

Доказательство. Используем обозначение

$$\eta_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$$

и выпишем неравенство Чебышёва для случайной величины η_n при любом $\alpha > 0$:

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| \geqslant \alpha\} \leqslant \frac{D\eta_n}{\alpha^2}.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. В силу того, что для попарно независимых случайных величин $D\sum_k \xi_k = \sum_k D\xi_k$, имеем

$$D\eta_n = \frac{D(\xi_1 + \ldots + \xi_n)}{n^2} = \frac{D\xi_1 + \ldots + D\xi_n}{n^2}.$$

В силу условия $D\xi_k \leqslant c$

$$D\eta_n \leqslant \frac{cn}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

Теперь очевидно, что $D\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| \geqslant \alpha\} \to 0.$$

Переходя от неравенства $\{|\eta_n - M\eta_n| \geqslant \alpha\}$ к противоположному неравенству $\{|\eta_n - M\eta_n| < \alpha\}$, получаем

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| < \alpha\} > 1 - \frac{c}{n\alpha^2}$$

и при $n \to \infty$

$$P\{|\eta_n - M\eta_n| < \alpha\} \to 1.$$

Теорема доказана; кроме того, выяснено, как быстро вероятность $P\{|\eta_n - M\eta_n| < \alpha\}$ приближается к 1 при возрастании n.

Подчеркнем, что закон больших чисел выявляет вероятностный смысл математического ожидания. *Если в условиях теоремы Чебышёва предположить, что $M\xi_k = a$ при всех k, то теорема Чебышёва приобретает особенно простую форму: при $n \to \infty$ и любом $\alpha > 0$*

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) - a\right| < \alpha\right\} \to 1.$$

Этому следствию из теоремы Чебышёва можно дать такую интерпретацию. Предположим, что n наблюдателей измеряют величину a без систематической ошибки, так что допускаемые ими погрешности сравнимы по величине; тогда при большом числе измерений арифметическое среднее их результатов с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, будет произвольно мало отличаться от измеряемой величины. В этом рассуждении можно увидеть обоснование принципа среднего арифметического, широко используемого в экспериментальных науках.

Теорема Бернулли, доказанная в § 2 гл. 4, является частным случаем теоремы Чебышева. Действительно, *если случайные величины принимают только два значения* 1 *и* 0 *с вероятностями* p *и* $q = 1 - p$ *соответственно (схема Бернулли), то справедлив закон больших чисел в форме Бернулли*:

$$P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| > \alpha\right\} \to 1,$$

где $\alpha > 0$, а $\frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ — частота значения 1. Эта теорема о неограниченном сближении частоты наступления некоторого события с вероятностью этого события при возрастании числа испытаний явилась исторически первой формой закона больших чисел и послужила основой для статистического определения вероятности.

В заключение этого параграфа заметим, что теоремы о законе больших чисел выражают общий принцип, в силу которого при довольно широких условиях совместное воздействие большого числа случайных величин оказывается почти постоянным. Здесь заложено обоснование многих законов физики, экономики и других областей, которые имеют дело с явлениями массового характера.

Упражнения

1. Монета кидается 1600 раз. Велики ли вероятности получить при этом выпадение герба а) более 1200 раз; б) более 900 раз?

Ответ: оценка по неравенству Чебышёва дает а) менее 1/800; б) менее 0,02.

2. Частица пролетает сквозь поглощающий экран с вероятностью 0,01. Чему равно математическое ожидание чисел пролетевших сквозь него частиц, если их было выпущено 100? Велика ли вероятность того, что сквозь экран пролетит более 11 частиц?

Ответ: математическое ожидание числа пролетевших частиц равно 1; по неравенству Чебышёва искомая вероятность не превосходит 0,0099.

§ 5. Производящие функции

Будем рассматривать случайные величины, принимающие только целые неотрицательные значения. Пусть случайная величина X принимает значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ и пусть $p_k = P\{X = k\}$. Определим *производя-*

щую функцию случайной величины X как функцию переменной s:

$$f_X(s) = \sum_k p_k s^k, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1$$

(здесь и далее подразумевается, что суммирование производится по всем значениям k случайной величины X). Легко видеть, что в нашем случае, когда X принимает конечное число значений $0 \leqslant k \leqslant n$, то $f_X(s)$ представляет собой многочлен степени не выше n, коэффициентами при степенях которого служат соответствующие вероятности p_k. Приведем некоторые очевидные свойства функции $f_X(s)$. Так, $f_X(0) = P\{X = 0\}$, и если эта величина меньше 1, то $f_X(s)$ — строго возрастающая функция при $0 \leqslant s \leqslant 1$. В точке $s = 1$ выполняется равенство $f_X(1) = \sum_k p_k = 1$. Выразим далее математическое ожидание MX и дисперсию DX случайной величины X через производящую функцию $f_X(s)$. Вычислим производную функции $f_X(s)$ при $s = 1$:

$$f_X'(1) = \sum_k P(X = k) \cdot k = MX;$$

другими словами, первая производная производящей функции в точке $s = 1$ равна математическому ожиданию случайной величины X. Вычислим вторую производную

$$f_X''(1) = \sum_k P(X = k) \cdot k(k-1) =$$

$$= \sum_k P(X) k^2 - MX = MX^2 - MX.$$

Учитывая

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

получим

$$DX = f_X''(1) - (f_X'(1))^2 + f_X'(1).$$

Вероятности $P(X = k)$ можно выразить через производные производящей функции, вычисленные в точке $s = 0$. В самом деле,

$$f_X(0) = P(X = 0),$$

точно так же

$$f_X'(0) = P(X = 1).$$

Вычисляя производную k-го порядка производящей функции при $s = 0$, получим

$$f^{(k)}(0) = k!\, P(X = k)$$

или

$$P(X = k) = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Таким образом, через производные производящей функции в точке $s = 0$ и $s = 1$ можно вычислить все основные характеристики случайной величины X.

Рассмотрим теперь наряду с X случайную величину Y, также принимающую целые неотрицательные значения. Вычислим производящую функцию суммы $X + Y$ двух независимых случайных величин X и Y:

$$f_{X+Y}(s) =$$

$$= \sum_k P(X + Y = k)\, s^k = \sum_k \sum_l P(X = l)\, P(Y = k - l)\, s^l s^{k-l} =$$

$$= \sum_l P(X = l)\, s^l \sum_m P(Y = m)\, s^m = f_X(s)\, f_Y(s),$$

так как

$$P\{X + Y = k\} = \sum_{l=0}^{k} P\{X = l,\ Y = k - l\}$$

и в силу независимости X и Y

$$P\{X = l,\ Y = k - l\} = P\{X = l\}\, P\{Y = k - l\}$$

при любых k и l. Таким образом, *производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций этих величин.*

Производящие функции будут применены в дальнейшем к решению комбинаторных задач и выводу «предельных» теорем в гл. 7 и 8.

Замечание. Производящая функция в математическом анализе определяется для любой последовательности действительных чисел, которая может и не быть конечной:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots$$

В любом случае производящая функция может быть формально записана в виде

$$f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

для $0 \leqslant s \leqslant 1$. Но возникает вопрос (который не возникал для конечных последовательностей $a_0, a_1, \dots, a_n$): при каких s эта функция имеет конечные значения? Например, очевидно, что в случае, когда $a_k = 1$ при всех k, то значение

$$f(1) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$$

бесконечно. В ситуации, которая для нас представляет интерес, $\sum_k a_k \leqslant 1$, поэтому можно сравнить $f(s)$ с геометрической прогрессией со знаменателем s при $0 \leqslant s < 1$:

$$f(s) = \sum_k a_k s^k \leqslant \sum_k s^k = \frac{1}{1-s}$$

и сделать вывод, что $f(s)$ имеет конечные значения для всех рассматриваемых значений s, за исключением $s = 1$. Однако, если $\sum_k a_k = 1$, то $f(s)$ при $s = 1$ также конечна:

$$f(1) = \sum_k a_k = 1.$$

Например, пусть $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ и $a_k = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, тогда

$$\sum_k a_k = p \sum_k q^k = p \cdot \frac{1}{1-q} = 1$$

и

$$f(s) = \sum_k a_k s^k = p \sum_k (qs)^k = \frac{p}{1-qs}.$$

Упражнения

1. Найти производящую функцию для случайной величины ξ в примере 3 § 1 данной главы.

Ответ: $\frac{1}{2^{10}}(1+s)^{10}$.

2. Найти производящую функцию случайной величины χ_A — индикатора некоторого случайного события A, вероятность наступления которого равна $P(A)$.

Ответ: $ps + q$, где $p = P(A)$, $q = 1 - p$.

3. Найти производящую функцию случайной величины μ_n из примера 3 § 2.

Ответ: $(ps + q)^n$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ: СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ ВЫВОДЫ

§ 1. Испытания Бернулли

Мы возвратимся в этой главе к одной из важнейших моделей теории вероятностей — схеме Бернулли независимых испытаний с двумя исходами, которая была введена в § 5 гл. 3. Обычно один из исходов условно называют «удачей» (событие A), а другой — «неудачей» (событие $\bar{A}$). Предполагается, что в каждом испытании «удача» происходит с одной и той же вероятностью p, $0 < p < 1$, а «неудача»— с вероятностью $q = 1 - p$. Используя понятие случайной величины (см. § 1 гл. 5), можно дать равносильное определение схемы Бернулли в терминах случайных величин. Именно, рассмотрим последовательность случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, каждая из которых принимает лишь два значения 1 и 0. Пусть $\{X_i = 1\} = A$, $\{X_i = 0\} = \bar{A}$, тогда

$$P\{X_i = 1\} = p,\ P\{X_i = 0\} = q.$$

Таким образом, случайные величины X_i можно назвать характеристическими функциями (индикаторами) события A в каждом испытании с соответствующим номером $i = 1, ..., n$. Предположим также, что случайные величины $X_1, ..., X_n$ взаимно независимы. Тогда говорят, что последовательность $X_1, ..., X_n$ задает схему Бернулли независимых испытаний.

Число удач в n испытаниях Бернулли выражается случайной величиной S_n, равной сумме $X_1, ..., X_n$:

$$S_n = X_1 + ... + X_n.$$

Эта случайная величина имеет биномиальное распределение, т. е.

$$P\{S_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m},\ \ m = 0, ..., n;$$

ее математическое ожидание — среднее число «удач»— равно $MS_n = np$, а дисперсия равна $DS_n = npq$ (см. § 2 гл. 5).

Очевидно, что последовательность $Y_1, \ldots, Y_n$, где Y_i взаимно независимы и принимают значения $+1$ («удача») и -1 («неудача») с вероятностями

$$p = P\{Y_i = 1\}, \quad q = P\{Y_i = -1\},$$

также представляет собой схему Бернулли, притом случайные величины Y_i и X_i связаны соотношением

$$Y_i = 2X_i - 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В этом случае сумма $S_n' = Y_1 + \ldots + Y_n$ имеет смысл разности между числом «удач» и числом «неудач» в n испытаниях: $S_n' = 2S_n - n = S_n - (n - S_n)$. Так как $\{S_n = m\} = \{S_n' = 2m - n\}$, то распределение случайной величины S_n' находится по распределению S_n и определяется формулой ($n + k$ четно)

$$P\{S_n' = k\} = C_n^{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}, \quad k = -n, \ldots, 0, \ldots, n. \tag{7.1}$$

Математическое ожидание и дисперсия S_n' равны соответственно

$$MS_n' = n(p - q), \quad DS_n' = 4npq$$

(см. задачу 1).

Согласно закону больших чисел при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \to 0, \tag{7.2}$$

$$P\left\{\left|\frac{S_n'}{n} - (p - q)\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \tag{7.3}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

В последующих параграфах будут изучены представляющие несомненный практический интерес задачи, которые ставятся в рамках схемы Бернулли. Параграфы 2 и 3 посвящены случайным блужданиям на прямой, а параграф 4 — простейшим статистическим задачам, возникающим в схеме Бернулли.

§ 2. Случайное блуждание на прямой, соответствующее схеме Бернулли

Рассмотрим случайное блуждание, которое порождается схемой испытаний Бернулли. Предположим, что частица выходит из начала координат и через единицу времени перемещается на единицу вверх с вероятностью

p, $0 < p < 1$, или на единицу вниз с вероятностью $q = 1 - p$. В каждый последующий момент времени повторяется та же история независимо от предыдущего положения частицы. Таким образом, за время n частица проходит некоторый путь, который можно так же, как в гл. 4 (см. § 1), изобразить графически. Всего путей движения частицы за время n будет 2^n, однако теперь эти пути нельзя считать равновозможными.

Последовательность перемещений частицы за время n может быть рассмотрена как последовательность n независимых испытаний с двумя исходами (движение вверх на единицу —«1», движение вниз на единицу —«—1»), т. е. как схема Бернулли. Рассмотрим n взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, каждая из которых принимает значения $+1$ и -1 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. Тогда каждой последовательности значений этих величин, например, $1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, \ldots, 1$, будет соответствовать определенная траектория движения частицы. Удобнее описывать путь частицы не самими X_i, а их последовательно вычисленными суммами:

$$S_0 = 0,$$

$$S_i = X_1 + \ldots + X_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7.4}$$

Значение каждой суммы S_n будет характеризовать положение частицы в момент времени n. Так, например, событие $\{S_n = y\}$ означает, что частица в момент n находится в точке с ординатой y. Траектория движения частицы за время n однозначно описывается набором $S_0, S_1, \ldots, S_n$, и, наоборот, последовательность случайных величин $S_0, S_1, \ldots, S_n$, определенных по формулам (7.4), интерпретируется как траектория некоторой блуждающей частицы.

Как следует из § 1, случайная величина S_n имеет распределение

$$P\{S_n = k\} = C_n^{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2} \tag{7.5}$$

(n и k должны иметь одинаковую четность). Эта формула дает вероятность достижения блуждающей частицей точки с ординатой k в момент n. При $p = q = 1/2$

$$P\{S_n = k\} = C_n^{(n+k)/2} 2^{-n};$$

этот случай, соответствующий *симметричному* случайному блужданию, был подробно рассмотрен в гл. 5.

Перейдем непосредственно к решению задачи о возвращении частицы в начало координат в случайном блуждании, задаваемом схемой Бернулли. Интуитивно ясно, что в силу несимметрии задачи начало координат уже не будет играть ту роль, которую оно играло в симметричном случае, и поведение частицы будет зависеть от соотношения вероятностей p и q.

Вновь введем вероятности u_{2n} — вероятность возвращения в нуль в момент $2n$ и f_{2n} — вероятность *первого* возвращения в нуль в момент $2n$:

$$u_{2n} = P\{S_{2n} = 0\},$$

$$f_{2n} = P\{S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n-2} \neq 0, S_{2n} = 0\}.$$

Нам необходимо определить величину $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$ вероятности вернуться когда-либо в начало координат. Так же как и в симметричном случае (см. формулу (5.20)), по формуле полной вероятности

$$u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2k} u_{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} f_{2n-2k} u_{2k}, \quad n \geqslant 1, \tag{7.6}$$

где $u_0 = 1$, $f_0 = 0$. Вероятности u_{2n} легко находятся из формулы (5) при $k = 0$ и n, замененном на $2n$:

$$u_{2n} = C_{2n}^{n} p^n q^n$$

(при $p = q = 1/2$ получаем знакомую величину $u_{2n} = C_{2n}^{n} 2^{-2n}$). Найдем вероятности f_{2n} и f с помощью производящих функций.

Замечание о производящих функциях. Для дальнейшего нам будет полезно переформулировать более общим образом одно важнейшее свойство производящих функций. Рассмотрим две числовые последовательности $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ и новую последовательность $\{c_n\}$:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — производящие функции числовых последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ соответственно. Тогда производящая функция $f(z)$ последовательности $\{c_n\}$ выражается формулой

$$f(z) = f_1(z) f_2(z),$$

т. е. равна произведению производящих функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Ясно, что это не что иное, как свойство производящих функций суммы независимых случайных величин (см. с. 138). Однако в данном случае последовательности $\{a_i\}$, $\{b_j\}$

функции $(1-x)^{-m}$ по степеням x:

$$(1-x)^{-m}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!}x^n \tag{7.8}$$

при $|x|<1$ и любом $m>0$. Получим

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}(4pqz^2)^n=(1-4pqz^2)^{-1/2}$$

при $4pqz^2<1$. Легко видеть, что

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}f_{2n}=\lim_{z\to 1}F(z)=1-\frac{1}{\lim\limits_{z\to 1}U(z)}.$$

Отсюда $f=1$, если $U(z)\to\infty$ при $z\to 1$, что равносильно расходимости ряда $\sum u_{2n}=\infty$, и $f<1$, если $U(z)<\infty$, т. е. ряд $\sum u_{2n}$ сходится, $U(1)=\sum u_{2n}<\infty$. Таким образом, получено общее утверждение, верное не только для случайного блуждания на прямой, но и в евклидовых пространствах любой размерности (см. § 6 гл. 5).

Вероятность f меньше или равна 1 *в зависимости от того, сходится или расходится ряд* $\sum u_{2n}$.

Из (7.7) получаем, что

$$F(z)=1-(1-4pqz^2)^{1/2}$$

при $|z|\leqslant 1$. Поэтому $f=1-(1-4pq)^{1/2}$. Так как $1-4pq=(p-q)^2$, то окончательно имеем

$$f=1-|p-q|$$

и приходим к выводу, что вероятность возвращения когда-либо в начало координат

$$f=1 \text{ при } p=q=1/2,\quad f<1 \text{ при } p\neq q.$$

Таким образом, случайное блуждание на прямой, соответствующее схеме Бернулли, возвратно тогда и только тогда, когда $p=q=1/2$, т. е. только в симметричном случае.

Для того чтобы уяснить, что же происходит с траекториями частицы при $p>q$ или $p<q$, обратимся к закону больших чисел. Итак, траектория частицы задается последовательностью величин S_0, S_1, ... S_n. Перепишем соотношение (7.3) следующим образом:

$$P\{|S_n-n(p-q)|>n\varepsilon\}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{7.9}$$

Проведем для случая $p>q$ на графике случайного блуждания две прямые, $n(p-q-\varepsilon)$ и $n(p-q+\varepsilon)$

(рис. 29). Тогда из соотношения (7.9) можно сделать вывод, что траектория частицы пролегает в среднем вдоль прямой $n(p-q)$ и для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n точка с координатой S_n (положение частицы в момент n) будет с большой вероятностью лежать в вертикальном интервале с концами $n(p-q-\varepsilon)$ и $n(p-q+\varepsilon)$. Это утверждение можно уточнить: оказывается, что *почти все* траектории ведут себя подобным образом, т. е. с вероятностью 1 ордината

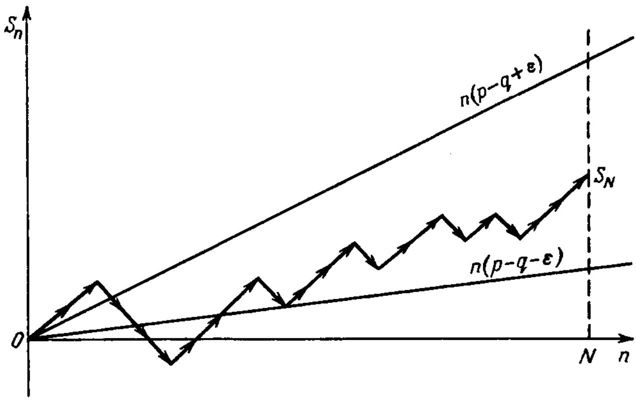


Рис. 29. Траектория несимметричного блуждания

блуждающей частицы в момент n будет находиться в указанных пределах. Кроме того, можно уточнить сами границы, в которых с вероятностью 1 оказывается блуждающая частица. Эти возможные уточнения следуют из двух замечательных теорем теории вероятностей — усиленного закона больших чисел и закона повторного логарифма, которые для своего доказательства требуют более сложного аппарата и поэтому остаются за пределами нашей книги.

Таким образом, при $p > q$ существует постоянный снос частицы вверх, при $p < q$ — вниз, и лишь в симметричном случае частица бесконечное число раз возвращается в начальное положение.

§ 3. Задача о разорении

Рассмотрим еще одну задачу, естественным образом возникающую в схеме случайного блуждания. Предположим, что частица, выходящая из начала координат, блуждает на ограниченном интервале оси, а на границах этого интервала исчезает и блуждание прекращается. Пусть, например, при достижении частицей прямых $y = -a$ или $y = b$, a, $b > 0$, она исчезает (говорят обычно, что в точках $y = -a$, $y = b$ находятся *поглощающие* экраны) (рис. 30, *а*). Какова вероятность того, что частица исчезнет в точке $y = -a$ раньше, чем она достигнет точки $y = b$? Этот

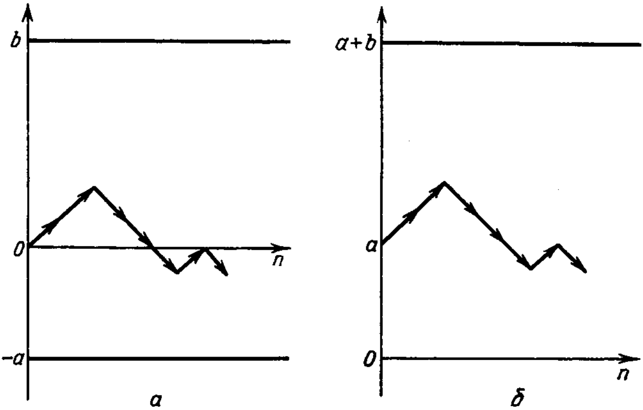


Рис. 30. Иллюстрация к задаче о разорении

вопрос (или ему противоположный) представляется в сформулированной задаче наиболее интересным. При $a = \infty$ или $b = \infty$ мы уже рассматривали эту задачу в симметричном случайном блуждании (задача первого достижения). Мы увидим, что такое, на первый взгляд несложное, видоизменение задачи приводит к новым содержательным результатам. Очевидно, что описанное нами блуждание равносильно блужданию, выходящему из точки $y = a$ и имеющему границы в точках $y = 0$ и $y = a + b$ (рис. 30, *б*). Это последнее блуждание с граничными точками 0 и $a + b$ мы и рассмотрим. Обозначим через q_a вероятность того, что частица, выходящая из точки $y = a$, достигнет прямой $y = 0$ ранее, чем прямой $y = a + b$. Однако корректно определить эту вероятность можно лишь в множестве возможных событий, которое образовано бесконечным множеством траекторий, выходящих из точки a. Мы обойдем эту трудность так же, как в § 3 гл. 5, а именно, ограничимся рассмотрением множества возможных исходов, соответствующего n испытаниям Бернулли или соответственно n перемещениям частицы, и введем вероятность $q_{n,a}$ достижения частицей точки 0 до момента времени n. Вероятности $q_{n,a}$ с ростом n убывают и имеют предел, который мы и называем вероятностью q_a. Аналогично можно рассмотреть вероятность p_a достижения частицей прямой $y = a + b$ раньше, чем прямой $y = 0$. Будет показано, что $p_a + q_a = 1$, тем самым исключается необходимость рассмотрения бесконечного блуждания.

В результате первого испытания частица попадает в точку $a + 1$ при $X_1 = 1$ с вероятностью p, $0 < p < 1$, или в точку $a - 1$ при $X_1 = -1$ с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда по формуле полной вероятности

$$q_a = p \cdot q_{a+1} + q \cdot q_{a-1}. \tag{7.10}$$

Это основное соотношение для нахождения вероятности q_a. При этом очевидно, что $q_0 = 1$ и $q_{a+b} = 0$. Перепишем соотношение (7.10) в более удобной форме

$$q\,(q_a - q_{a-1}) = p\,(q_{a+1} - q_a) \tag{7.11}$$

и рассмотрим два случая в зависимости от значений p и q.

1) Пусть $p = q = \frac{1}{2}$. Имеем при любом a

$$q_a - q_{a-1} = q_{a+1} - q_a = \Delta,$$

где Δ — подлежащая определению постоянная. Ясно, что величины q_a образуют арифметическую прогрессию с разностью Δ, так что

$$q_a = q_0 + a\Delta.$$

В силу того, что $q_0 = 1$, $q_{a+b} = 0$, имеем $0 = 1 + (a + b)\,\Delta$, откуда $\Delta = -\dfrac{1}{a+b}$. Таким образом, искомая вероятность равна

$$q_a = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b}. \tag{7.12}$$

Аналогичным образом, составляя соотношение для вероятности p_a, можно вывести, что она равна

$$p_a = \frac{a}{a+b}$$

и, следовательно, $p_a + q_a = 1$.

2) Пусть $p \neq q$. Обозначим $q/p = \lambda$. Имеем из (7.11)

$$q_{a+1} - q_a = \lambda\,(q_a - q_{a-1})$$

и поэтому

$$q_{a+1} - q_a = \lambda^a\,(q_1 - q_0).$$

Суммируем обе части по a от 1 до произвольного a_0:

$$\sum_{a=1}^{a_0} (q_{a+1} - q_a) = \sum_{a=1}^{a_0} \lambda^a (q_1 - q_0)$$

и после сокращения и подсчета суммы геометрической прогрессии $\sum_{a=1}^{a_0} \lambda^a$ получаем

$$q_1 - q_{a_0+1} = (q_0 - q_1) \frac{\lambda(1 - \lambda^{a_0})}{1 - \lambda}. \tag{7.13}$$

Учитывая, что $q_0 = 1$ и $q_{a+b} = 0$, находим из (7.13)

$$q_1 = \frac{\lambda - \lambda^{a+b}}{1 - \lambda^{a+b}}$$

и

$$q_a = q_1 \frac{1 - \lambda^a}{1 - \lambda} - \frac{\lambda - \lambda^a}{1 - \lambda}.$$

Окончательно

$$q_a = \frac{\lambda^a - \lambda^{a+b}}{1 - \lambda^{a+b}}. \tag{7.14}$$

Заменяя в этой формуле p на q, q на p, a на b, получаем

$$p_a = \frac{1 - \lambda^a}{1 - \lambda^{a+b}}.$$

Снова $p_a + q_a = 1$.

Мы проведем интерпретацию полученных результатов в других терминах. Только что решенная задача имеет широкую известность как классическая *задача о разорении игрока*. Традиционная постановка этой задачи такова. Представим себе, что два игрока, имея начальные капиталы a и b, играют в игру «орел и решка» или в какую-нибудь ей подобную. При этом игрок с капиталом a выигрывает в каждой партии с вероятностью p и проигрывает с вероятностью q, $p + q = 1$ (предполагаем, что ничьи исключены, см., впрочем, упражнение 5). При выигрыше он увеличивает свой капитал на 1, при проигрыше капитал его становится на 1 меньше. После некоторого числа партий может оказаться, что игрок проиграет весь свой капитал a или на руках у этого игрока будет вся сумма денег $a + b$. Эта ситуация и называется разорением либо первого, либо второго игрока. Если частица, выходя из точки a, достигает нуля, то разорен игрок с капиталом a, если частица достигает точки $a + b$, то разорен игрок с капиталом b. Поэтому вероятность q_a называется *вероятностью разорения*. Итак, как мы установили, вероятность разорения игрока с капиталом a в случае одинаковых возможностей на выигрыш в каждой партии ($p = q$) равна $q_a = \frac{b}{a+b}$, в случае неодинаковых возможностей ($p \neq q$) равна $q_a = \frac{\lambda^a - \lambda^{a+b}}{1 - \lambda^{a+b}}$. Приводимая здесь табличка показывает, что в случае $p = q = 1/2$ бо́льшие шансы на разорение имеет игрок с меньшим капиталом, и его шансы на разорение тем более увеличиваются, если он менее искусен (или менее везуч) в игре.

p	q	a	b	q_a
0,5	0,5	50	50	0,5
0,5	0,5	90	10	0,1
0,45	0,55	90	10	0,866
0,6	0,4	10	90	0,017

Рассмотрим, однако, ситуацию, когда игрок, для которого результаты отдельных партий более благоприятны, играет с более богатым противником (как, например, в последней строке таблички). Разберем крайний случай, когда у игрока с начальным капиталом a соперник «бесконечно» богат, т. е. $b = \infty$, но при этом $p > q$. В формуле (7.14) перейдем к пределу при $b \to \infty$. Тогда, так как $\lambda = \frac{q}{p} < 1$, то

$$q_a \to \lambda^a = \left(\frac{q}{p}\right)^a$$

и вероятность выигрыша игрока с капиталом a стремится к величине

$$1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Таким образом, игрок с капиталом a имеет неплохие шансы на выигрыш, несмотря на то, что его соперник бесконечно богат. Напротив, при $p \leqslant q$ $p_a \to 0$.

Интересно дополнить наши выводы замечанием о средней продолжительности игры до разорения одного из соперников. Понятно, что продолжительность игры представляет собой случайную величину, распределение которой зависит как от соотношения p и q, так и от соотношения a и b. Математическое ожидание продолжительности игры вычисляется несколько более сложным образом, чем вероятность разорения, и поэтому мы лишь укажем, что оно равно при $p = q = ½$ произведению $a \cdot b$, а при $p \neq q$ оно равно

$$\frac{a}{q-p} - \frac{a+b}{q-p} \cdot \frac{1-\lambda^a}{1-\lambda^{a+b}}.$$

Подсчеты по этим формулам показывают, что продолжительность игры обычно гораздо больше, чем мы могли бы предположить заранее. При равных шансах на выигрыш в каждой партии длительность игры пропорциональна капиталам игроков. Если игра более благоприятна для одного из игроков, то длительность игры в среднем может уменьшиться. Так, например, для указанных в табличке случаев игра продолжается в среднем 2500, 900, 766, 441 партий соответственно. Игра более искусного игрока ($p > q$) с бесконечно богатым соперником с положительной вероятностью может вообще не иметь конца.

§ 4. Статистические выводы

Все задачи, которые до сих пор нами решались, были отмечены тем общим характерным свойством, что в них принималась некоторая вероятностная модель и в рамках этой модели по вероятностям элементарных исходов вычисляли вероятности других, более сложных событий. Так, в схеме испытаний Бернулли мы по вероятности «удачи» p предсказывали суммарное число удач в n испытаниях, т. е. находили для каждого значения m числа удач S_n соответствующую ему вероятность

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{7.15}$$

Эта простая задача является типичной для теории вероятностей. В данном параграфе мы будем решать задачи, в определенном смысле обратные. Задачи, обратные задачам теории вероятностей, очень важны для приложений, они составляют содержание математической статистики. Типичной для математической статистики применительно к схеме Бернулли является следующая задача. Предположим, что вероятность «удачи» p заранее неизвестна и нужно определить ее по наблюдениям за исходами испытаний, которые и представляют собой статистические данные.

П р и м е р. Рассмотрим стандартную схему «случайного выбора с возвращением». Пусть имеется некоторый сосуд (урна) с шарами двух цветов — белого и черного. Шары в урне хорошо перемешаны и доля белых шаров равна p, $0 < p < 1$. Предположим, что значение p неизвестно и мы должны поставить эксперимент по определению p. Будем последовательно выбирать шары из урны «наудачу» по одному, каждый раз возвращая шар в урну и перемешивая шары в урне перед новым извлечением. В результате получим случайную выборку некоторого фиксированного объема. При этом результаты отдельных извлечений будут взаимно независимы. При известном p и указанных условиях эксперимента вероятность получить m белых шаров в выборке объема n равна вероятности m удач (извлечение белого шара из урны — удача) в n испытаниях Бернулли с вероятностью удачи p. В рассматриваемом случае значение p неизвестно, но известно соотношение белых и черных шаров в выборке. Интуиция подсказывает, что если выборка достаточно представительна, то доля белых шаров в выборке должна быть близка к p.

Схема выбора с возвращением является частным случаем схемы Бернулли независимых испытаний. Частота «удачи» в n испытаниях (в примере — доля белых шаров в выборке) есть случайная величина S_n/n со значениями m/n, где $m = 0, 1, \ldots, n$. При этом из формулы (7.15) следует, что

$$P\left\{\frac{S_n}{n} = \frac{m}{n}\right\} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Математическое ожидание случайной величины S_n/n равно

$$M\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} MS_n = \frac{1}{n} np = p, \tag{7.16}$$

а ее дисперсия равна

$$D\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2} DS_n = \frac{1}{n^2} np(1 - p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Следовательно, среднее значение частоты успеха есть неизвестная вероятность успеха p, а дисперсия частоты, т. е. мера рассеяния значений частоты около p, стремится к нулю при $n \to \infty$ как $1/n$. Таким образом, производя многократно случайный выбор объема n с возвращением из урны, мы можем рассчитывать, что частоты белых шаров в выборках будут группироваться около p и с ростом n отклонения m/n от p будут в среднем уменьшаться, т. е. доля белых шаров в выборке будет приблизительно соответствовать доле белых шаров в урне: $(m/n) \sim p$. Из закона больших чисел для схемы Бернулли следует, что при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \to 0 \qquad (7.17)$$

(см. (7.2)), иными словами, вероятности любых наперед заданных отклонений S_n/n от p с ростом n делаются сколь угодно малыми. Из этих рассуждений естественно сделать вывод, что частота S_n/n является достаточно хорошей *оценкой* неизвестной вероятности p (в математической статистике оценки p со свойством (7.16) называются *несмещенными*, а со свойством (7.17) — *состоятельными*).

На практике, однако, редко удается осуществить случайный выбор с возвращением и приходится использовать другой выборочный способ определения p — случайный выбор без возвращения, см. по этому поводу задачу 9.

Доводы в пользу частоты S_n/n как оценки неизвестной вероятности удачи можно дополнить следующим рассуждением. О значении p нам известно только то, что $0 \leqslant p \leqslant 1$. Напротив, значение S_n/n известно по результатам n испытаний, при этом ясно, что этому значению m/n соответствует вероятность $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, зависящая от неизвестного p. Рассмотрим при фиксированном m выражение $P_n(p) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ как функцию от p, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Будем «перебирать» возможные значения p и сравнивать соответствующие им значения $P_n(p)$ по величине. Идея этой процедуры состоит в том, чтобы выбрать в качестве «истинного» то значение p, для которого выражение $P_n(p)$ принимает максимально возможное значение при фиксированном m. «Выбор» p можно осуществить следующим образом. Так как биномиальный коэффициент C_n^m не зависит от p, рассмотрим вместо $P_n(p)$ функцию $L(p) = p^m (1-p)^{n-m}$, $0 \leqslant p \leqslant 1$. Эта функция обращается в нуль в точках $p = 0$ и $p = 1$, выпукла, неотрицательна и имеет максимум в точке $p^* = m/n$, $0 < p^* < 1$ (в последнем легко убедиться, приравнивая производную $L'(p)$ нулю и решая полученное уравнение). Итак, наибольшему значению $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ отвечает значение p, равное m/n. Этот простой, замечательный принцип, называемый *принципом максимального правдоподобия*, восходит еще к К. Гауссу, знаменитому немецкому математику XIX века, и оказывается полезным в более сложных задачах.

Наши выводы имеют важное, но в большей степени теоретическое значение, так как вопрос о точности оценивания неизвестной вероятности с помощью частоты решен лишь принципиально, а в каждом конкретном случае отклонения частоты от вероятности могут быть значительными. Более практичен метод оценивания неизвестной вероятности в схеме Бернулли, при котором указывается не одно, а целый интервал подходящих значений p, называемый *доверительным интервалом*. Мы ограничимся для иллюстрации построением «грубого» доверительного интервала для p на основе неравенства Чебышёва.

По неравенству Чебышёва

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2},$$

так как $p(1-p) \leqslant 1/4$. Зададимся числом α, $0 < \alpha < 1$, и найдем $\varepsilon > 0$ из уравнения

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 1 - \alpha.$$

Заменяя ε на $1/2\sqrt{n\alpha}$, получаем

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right\} \geqslant 1 - \alpha$$

или

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right\} < \alpha. \tag{7.18}$$

Итак, с вероятностью, превосходящей $1 - \alpha$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$$

или ему равносильное

$$\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}} \leqslant p \leqslant \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}.$$

Интервал с границами $\bar{p} = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$, $\bar{\bar{p}} = \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$ называется доверительным интервалом для p с *уровнем значимости* α. Смысл его применения заключается в том, что, доверяясь проведенному расчету, мы утверждаем, что неизвестная вероятность p принадлежит интервалу $[\bar{p}, \bar{\bar{p}}]$, а вероятность возможной ошибки, имеющей место, если этот интервал не накрывает истинное значение p, не превосходит α. Другими словами, при использовании доверительного интервала уровня значимости α для оценки p мы будем ошибаться в среднем в доле случаев, не превосходящей α (α задается заранее). Приведем для примера доверительные интервалы для $\alpha = 0{,}05$ и значения частоты 0,6 при разных значениях n:

n	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$
100	0,38	0,82
1000	0,529	0,671
10000	0,578	0,622

Мы видим, что с ростом n доверительный интервал сужается. Если уменьшить α, например взять $\alpha = 0{,}01$, то для тех же данных при $n = 1000$ получим доверительный интервал $[0{,}442,\ 0{,}758]$. Этот доверительный интервал шире того, который соответствует уровню $\alpha = 0{,}05$, что является логичным следствием гарантированного уменьшения доли ошибочных решений.

Часто в этой же ситуации возникает проблема проверки гипотезы о том, что неизвестная вероятность p равна заданному числу p_0. Эту гипотезу, анализируя результаты эксперимента, можно принять, т. е. посчитать не противоречащей статистическим данным, или отклонить. Можно указать такую процедуру проверки гипотезы $p = p_0$: если $p_0 \in [\bar{p}, \bar{\bar{p}}]$, где $[\bar{p}, \bar{\bar{p}}]$ доверительный интервал с уровнем значимости α, то гипотеза $p = p_0$ принимается, если же $p_0 \notin [\bar{p}, \bar{\bar{p}}]$, то эта гипотеза отклоняется. При этом можно отклонить верную гипотезу, слишком полагаясь на «неудачные» в некотором смысле результаты эксперимента. Вероятность такой ошибки нам известна, вернее, нами задана заранее при построении доверительного интервала, и она не превосходит α. Если, например, $n = 1000$, $p_0 = 0{,}5$, $\alpha = 0{,}05$, то, отвергая гипотезу о том, что $p = 0{,}5$, на основании того, что $0{,}5 \notin [0{,}529,\ 0{,}671]$ (см. табличку), мы ошибаемся в среднем менее чем в 5 случаях из 100.

Еще одна интересная задача возникает при необходимости различения двух гипотез о неизвестной вероятности p. Пусть заранее известно, что или $p = p_1$, или $p = p_2$, где p_1 и p_2 — заданные числа, $0 < p_1 < p_2 < 1$.

Пример. Рассмотрим урновую схему и предположим, что доля белых шаров в урне неизвестна. Пусть $p_1 = 0{,}2$ и $p_2 = 0{,}8$. Необходимо экспериментальным путем определить, какое из двух значений p_1 и p_2 больше соответствует p. Для наглядности договоримся называть урну с $p = p_1$ урной I, а урну с $p = p_2$ — урной II. Вытаскиваем из урны один шар и, если этот шар белый, то считаем, что он вынут из урны II, если же черный, то из урны I. При этом можно ошибиться в указании номера урны. Вероятность одной из ошибок равна вероятности вынуть белый шар из урны I, т. е. равна 0,2. Вероятность другой ошибки (вероятность извлечь черный шар из урны II) также равна 0,2. Вероятности ошибок можно уменьшить. Для этого извлечем из урны три шара с возвращением так, чтобы результаты испытаний были независимы. Если среди трех вынутых шаров белые шары составляют большинство, т. е. 2 или 3 белых шара, то будем считать, что это урна II, в противоположном случае — урна I. Очевидно, что вероятность ошибки при этом равна вероятности вытащить 3 или 2 белых шара из урны I, т. е. равна

$$C_3^3 p_1^3 (1-p_1)^0 + C_3^2 p_1^2 (1-p_1)^1 = 0{,}104.$$

По сравнению с первоначальной процедурой проверки вероятность ошибки уменьшилась почти в два раза. При увеличении объема выборки вероятности ошибок в различении двух гипотез продолжают уменьшаться. Если среди пяти выбранных шаров большинство белые, то мы принимаем гипотезу $p = 0{,}8$ (урна II) и убеждаемся в том, что вероятность ошибки равна

$$C_5^5 p_1^5 + C_5^4 p_1^4 (1-p_1)^1 + C_5^3 p_1^3 (1-p_1)^2 = 0{,}058.$$

При объеме выборки 7 вероятность ошибки равна 0,033, и мы различаем две гипотезы (две урны) с вероятностями ошибок, которые во всяком случае меньше 0,05. Таким образом, придерживаясь принятого правила или, как говорят статистики, критерия проверки, мы будем ошибаться в среднем меньше, чем в пяти случаях из ста.

Поясним мотивы наших действий следующим рассуждением. Рассмотрим случайное блуждание, соответствующее схеме случайного выбора: частица выходит из начала координат и перемещается на единицу вверх при извлечении белого шара и остается на том же уровне при извлечении черного. Траектория движения частицы описывается величиной S_n — числом белых шаров в выборке объема n. Так как $p = p_1$ или $p = p_2$, то в соответствии с законом больших чисел траектория случайного блуждания должна пролегать или в направлении прямой $y = np_1$, или в направлении прямой $y = np_2$, так что при больших n отклонения S_n от $np_1 = MS_n$ при $p = p_1$ или от $np_2 = MS_n$ при $p = p_2$ в среднем малы. При фиксированном n можно задать некоторое (критическое) значение $\bar{y}_n$, $np_1 < \bar{y}_n < np_2$, такое, чтобы при $S_n \leq \bar{y}_n$ принимать гипотезу $p = p_1$, а при $S_n > \bar{y}_n$ принимать гипотезу $p = p_2$. Значение $\bar{y}_n$ должно быть назначено из соображений минимальности ошибочных решений. Можно поступить иначе: задать два числа $\bar{y}_n$ и $\bar{\bar{y}}_n$ ($np_1 < \bar{y}_n < \bar{\bar{y}}_n < np_2$) и последовательно для каждого n проверять, какое из трех неравенств $S_n \leqslant \bar{y}_n$, $S_n \geqslant \bar{\bar{y}}_n$, $\bar{y}_n < S_n < \bar{\bar{y}}_n$ имеет место. В первом случае принимается гипотеза $p = p_1$, во втором — гипотеза $p = p_2$, и на этом эксперимент по определению p прекращается. В третьем же случае наблюдения продолжаются. При таком подходе число шаров в выборке не фиксируется заранее, а является случайным, зависящим от значений S_n. Границы $\bar{y}_n$, $\bar{\bar{y}}_n$ также определяются ограничениями на возможные ошибки. В этом случае задача проверки гипотез имеет непосредственное отношение к задаче о разорении, но в более сложной постановке, чем мы рассматривали в § 3.

На практике задачу различения двух гипотез о вероятности «удачи» в схеме Бернулли решают, например, следующим образом. Пусть α и β — два малых числа, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Для проверки гипотез $p = p_1$ и $p = p_2$, $p_1 < p_2$, производится n независимых испытаний и подсчитывается число «удач» m. Тогда

если $m > \bar{m}_n$, то принимается гипотеза $p = p_2$,

если $m \leqslant \bar{m}_n$, то принимается гипотеза $p = p_1$,

Здесь $\bar{m}_n$ — *критическое* значение m, подлежащее определению. Вероятность ошибочного отклонения верной гипотезы $p = p_1$ равна

$$P_n(\bar{m}_n, p_1) = \sum_{m=\bar{m}_n+1}^{n} C_n^m p_1^m (1 - p_1)^{n-m},$$

а вероятность ошибочного принятия неверной гипотезы $p = p_1$ равна

$$Q_n(\bar{m}_n, p_2) = \sum_{m=0}^{\bar{m}_n} C_n^m p_2^m (1 - p_2)^{n-m}.$$

Спрашивается, каково наименьшее число испытаний, при котором возможно различение двух гипотез с вероятностями ошибок, не превосходящими заданных чисел α и β. Наименьшее значение n и соответствующее ему значение $\bar{m}_n$ удовлетворяют неравенствам

$$P_n(\bar{m}_n, p_1) \leqslant \alpha, \quad Q_n(\bar{m}_n, p_2) \leqslant \beta. \tag{7.19}$$

При решении практических задач использовать неравенства (7.19) для нахождения n и $\overline{m}_n$ не представляется возможным, но можно воспользоваться специальными таблицами, в которых указываются пары $(n, \overline{m}_n)$ для употребительных значений p_1, p_2, α, β. В следующей табличке указаны результаты решения задачи о различении гипотез для $\alpha = \beta = 0{,}05$:

p_1	p_2	n	$\overline{m}_n$
0,1	0,5	13	3
0,3	0,5	67	26
0,1	0,2	135	19
0,05	0,1	248	21

Если число испытаний не фиксировать заранее, а определять в ходе эксперимента, действуя по указанной выше схеме: на каждом шаге или принимать одну из гипотез, или продолжать наблюдения, то число испытаний при тех же ограничениях на вероятности ошибок удается сократить в среднем почти вдвое.

Упражнения

1. Покажите, что случайная величина Y_k с распределением $P\{Y_k = 1\} = p$, $P\{Y_k = -1\} = q$ имеет математическое ожидание $MY_k = p - q$ и дисперсию $DY_k = 4pq$. Пользуясь свойствами математических ожиданий и дисперсий, докажите, что

$$M(Y_1 + \ldots + Y_n) = n(p - q),\ D(Y_1 + \ldots + Y_n) = 4npq.$$

2. Докажите, что в случайном блуждании, соответствующем схеме Бернулли с вероятностями p и q, вероятность $u_{n,y}$ того, что в момент n частица будет находиться в точке с ординатой $y > 0$, равна

$$u_{n,y} = C_n^{(n+y)/2} p^{(n+y)/2} q^{(n-y)/2}$$

(n и y имеют одинаковую четность).

3. Докажите, что вероятность первого возвращения в начало координат в момент $2n$, введенная в § 2 (см. 7.6), равна

$$f_{2n} = \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1} p^n q^n.$$

4. Рассмотрим симметричное случайное блуждание, начинающееся в точке с ординатой $z > 0$. Если частица исчезает (поглощается) в точке 0, то докажите, что вероятность $q_{n,y}(z)$ достижения частицей точки с ординатой y в момент n равна

$$q_{n,y}(z) = u_{n,y-z} - u_{n,y+z},$$

где $u_{n,y}$ определено в упражнении 2. Если частица исчезает в двух точках 0 и $a > 0$, то

$$q_{n,y}(z) = \sum_k (u_{n,y-z-zka} - u_{n,y+z}),$$

где суммирование происходит по всем отрицательным и положительным k. (Используйте принцип отражения, см. § 2 гл. 5.)

5. В задаче о разорении (§ 3) предположим, что частица перемещается в положительном направлении, отрицательном направлении или остается на месте соответственно с вероятностями p, q и r, $p+q+r=1$ (это обобщение на игровом языке означает, что результатом отдельной партии с вероятностью $r>0$ может быть ничья). Докажите, что вероятность разорения q_a по-прежнему задается формулой (7.13), т. е.

$$q_a = \frac{\lambda^{a+b} - \lambda^a}{\lambda^{a+b} - 1},$$

где $\lambda = q/p$.

6. Покажите, что математическое ожидание и дисперсия частоты «удачи» в схеме Бернулли равны

$$M\frac{S_n}{n} = p \quad \text{и} \quad D\frac{S_n}{n} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

7. Докажите, что функция $L(p) = p^m q^{n-m}$ достигает максимума в точке $p = m/n$.

8. Рассмотрим урновую схему, введенную в примере § 4. Пусть N — общее число шаров, M — число белых шаров, так что $p = M/N$ — доля белых шаров. Для оценки неизвестного значения p проводится «случайный выбор без возвращения». Докажите, что вероятность получения m белых шаров в выборке объема n равна

$$\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

9. В условиях упражнения 8 пусть случайная величина S_n есть число белых шаров в выборке без возвращения. Частоту появления белого шара в выборке S_n/n можно использовать в качестве оценки $p = M/N$. Докажите, что

$$M\frac{S_n}{n} = p.$$

10. При 100 бросаниях монеты «герб» появляется 70 раз. Проверьте, согласуются ли эти данные с представлением о симметрии монеты ($p = 0{,}5$). Постройте для этого доверительный интервал с уровнем значимости 0,5.

ГЛАВА 8

ПРОЦЕССЫ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ

§ 1. Общая постановка задачи

Общепринято, что фамилия в семье сохраняется по мужской линии. Пусть p_0, p_1, p_2, ... — вероятности того, что отец имеет соответственно 0, 1, 2, ... сыновей, пусть с теми же вероятностями каждый из них имеет своих сыновей и т. д. Какова вероятность того, что мужская линия выродится к r-му поколению. Эта задача решена была Гальтоном и Ватсоном в 1874 году, которые по ее поводу писали: «Исчезновение фамилий лиц, которые занимали видное положение в истории,— это факт, неоднократно отмечавшийся в прошлом; по этому поводу строились различные догадки... Слишком многочисленны были примеры фамилий, которые, будучи распространенными, становились редкими или даже совсем исчезали».

Аналогичная задача возникает при рассмотрении цепной ядерной реакции. Нейтрон, находящийся в куске «ядерного горючего», в любой момент может столкнуться с атомным ядром. В результате такого столкновения может произойти расщепление ядра. В процессе расщепления могут появиться различные частицы, в том числе случайное число новых нейтронов со случайными энергиями и направлениями движения. Очевидно, вероятность столкновения нейтрона с ядром зависит от геометрических размеров данного куска «ядерного горючего». Опять возникает задача определения вероятности того, что данный нейтрон в n-м поколении будет иметь N потомков. Какова вероятность, что N с ростом n будет неограниченно возрастать (ядерный взрыв), или N будет находиться в некоторых фиксированных пределах (управляемая ядерная реакция), или $N = 0$ (прекращение реакции).

Аналогичные задачи возникают при рассмотрении вопросов размножения простейших одноклеточных организмов, при размножении вирусов и бактерий (задача эпидемиологии), при изучении различных химических реакций и т. д.

Часто рассматривают процессы гибели и размножения частиц нескольких взаимосвязанных типов. Типичным примером является изменение численности популяции зайцев и волков в некоторой местности. Чрезмерное увеличение численности зайцев приводит к ускоренному росту популяции волков, но заметное увеличение численности волков ведет к снижению численности зайцев.

Отвлекаясь от описанных выше природных явлений, сформулируем следующую задачу. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ имеется одна частица, которая к моменту $t = 1$ может произвести с определенными вероятностями некоторое число частиц того же вида. Каждая из образовавшихся частиц независимо с теми же вероятностями за единицу времени опять может произвести некоторое число частиц того же вида и т. д. Пусть z_0, z_1, ... означает последовательность случайных величин, равных числу частиц в моменты времени $t = 0$, $t = 1$, ... Мы всегда будем полагать $z_0 = 1$. Заметим, что соответствующие свойства процесса при $z_0 \neq 1$ легко получить, так как мы предположили, что процессы, начинающиеся от различных первоначальных частиц, развиваются независимо.

Итак, мы будем интерпретировать z_n как число частиц популяции в n-м поколении: $z_0 = 1$, распределение вероятностей z_1 определяется числами $P\{z_1 = k\} = p_k < 1$, $k = 0, 1, 2, ..., K$, $\sum p_k = 1$, где p_k — вероятность того, что в следующем поколении одной фиксированной частицы будет ровно k частиц. Мы предполагаем, что этот же вероятностный закон размножения действует в любом поколении для каждой из частиц независимым образом. Другими словами, условное распределение z_{n+1} при условии, что $z_n = k$, определяется из предположения, что различные частицы размножаются независимо. Таким образом, z_{n+1} распределена как сумма k независимых случайных величин, каждая из которых распределена так же, как z_1. Если $z_n = 0$, то с вероятностью 1 выполняется $z_{n+1} = 0$.

Определив так процесс, мы хотим знать его свойства: распределение вероятностей величины z_n, ее математическое ожидание, дисперсию; вероятность того, что случайная последовательность z_0, z_1, ... обращается в нуль; поведение этой последовательности в случае, когда она не сходится к нулю. В процессе наших рассуждений мы будем придерживаться определенной нами абстрактной модели, хотя за ней могут стоять конкретные процессы в физике, биологии, химии, генетике и других областях науки.

§ 2. Производящая функция величины z_n

Воспользуемся определением и простейшими свойствами производящих функций, введенных в главе 5, § 4.

В дальнейшем будем обозначать производящую функцию случайной величины z_n через $f_n(s)$, производящую функцию z_1 для кратности будем обозначать $f(s)$. Между производящими функциями величин z_n справедливо следующее соотношение:

$$f_{n+1}(s) = \sum_m P(z_{n+1} = m) s^m =$$
$$= \sum_m \sum_k P(z_n = k) P(z_{n+1} = m/z_n = k) =$$
$$= \sum_k P(z_n = k) \sum_m P(z_{n+1} = m/z_n = k) s^m.$$

Числа потомков от каждой из k частиц независимы друг от друга по определению, поэтому при условии $z_n = k$ распределение величины z_{n+1} является суммой независимых случайных величин, каждая из которых распределена как z_1 и, следовательно, имеет производящую функцию $[f_1(s)]^k$, т. е.

$$\sum_m P(z_{n+1} = m/z_n = k) s^m = [f_1(s)]^k, \ k = 0, 1, \dots$$

Отсюда получаем

$$f_{n+1}(s) = \sum_k P(z_n = k) [f_1(s)]^k,$$

что по определению производящей функции величины z_n равно

$$f_{n+1}(s) = f_n(f_1(s)) = f_n(f(s)). \tag{8.1}$$

На основании последней формулы получим

$$f_2(s) = f(f(s)), \ f_3(s) = f(f(f(s))), \dots$$

вообще

$$f_n(s) = f(f \dots f(s) \dots), \tag{8.2}$$

т. е. производящая функция $f_n(s)$ величины z_n равна n-кратной итерации производящей функции $f(s)$ величины z_1.

Напомним некоторые нужные нам здесь свойства производящей функции $f(s)$. Так как $f(0) = P\{X = 0\}$, то в предположении $P\{X = 0\} < 1$ функция $f(s)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$ является строго возрастающей, выпуклой вниз функцией.

При $s = 1$ имеет место равенство $f(1) = 1$. Далее, если MX и DX, соответственно, математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, то

$$MX = f_X'(1), \quad DX = f_X''(1) - (f_X'(1))^2 + f_X'(1).$$

§ 3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины z_n

Обозначим

$$Mz_1 = f'(1) = m, \; Dz_1 = \sigma^2 = f''(1) + m - m^2.$$

Дифференцируя (8.1) в точке $s = 1$, найдем математическое ожидание

$$f_{n+1}'(1) = f_n'(f(1))\, f'(1) = f_n'(1)\cdot m,$$

откуда по индукции получаем

$$Mz_n = f_n'(1) = m^n, \; n = 0, 1, \ldots \tag{8.3}$$

Продифференцировав еще раз, получим

$$f_{n+1}''(1) = f_n''(1)\,[f'(1)]^2 + f_n'(1)\, f''(1) =$$
$$= f_n''(1)\, m^2 + m^n (\sigma^2 + m^2 - m),$$

откуда следует

$$f_n''(1) = \sigma^2 m^{n-1}(m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1) + m^{2n} - m^n$$

или

$$Dz_n = \sigma^2 m^{n-1}(m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1). \tag{8.4}$$

Формулы (8.3), (8.4) дают нам явный вид математического ожидания и дисперсии числа потомков n-го поколения через известные математическое ожидание и дисперсию числа потомков от одной частицы.

§ 4. Вероятность вырождения

Рассмотрим теперь задачу о вероятности вырождения потомства одной первоначальной частицы, например, вероятности вырождения фамилии, или вероятности затухания цепной ядерной реакции, порожденной отдельным нейтроном, и т. д. На языке последовательности z_n вырождение означает, что $z_n = 0$, начиная с некоторого номера n, при этом, если $z_n = 0$, то по определению $z_m = 0$ для всех $m > n$ с вероятностью единица. Другими словами, мы имеем дело с последовательностью вложенных друг в друга событий

$$\{z_n = 0\} \subset \{z_{n+1} = 0\} \subset \{z_{n+2} = 0\} \subset \ldots$$

Найдем предел

$$q = \lim_{n\to\infty} P\{z_n = 0\},$$

который и будем называть вероятностью вырождения последовательности z_n.

Теорема. *Если $m = Mz_1 \leqslant 1$, то вероятность вырождения равна 1. Если $m > 1$, то вероятность вырождения равна единственному неотрицательному решению уравнения*

$$s = f(s),$$

меньшему единицы.

Доказательство. Очевидно, ввиду вложенности событий $\{z_n = 0\} \subset \{z_{n+1} = 0\}$ справедливо

$$0 \leqslant P\{z_n = 0\} \leqslant P\{z_{n+1} = 0\} \leqslant P\{z_{n+2} = 0\} \leqslant \ldots \leqslant 1,$$

т. е. мы имеем неубывающую ограниченную последовательность $P\{z_n = 0\}$, следовательно, существует предел q. Из определения производящей функции последовательности z_n следует

$$P\{z_n = 0\} = f_n(0),$$

а также

$$f_{n+1}(0) = f(f_n(0)).$$

Но так как

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(0) = q,$$

то справедливо

$$q = f(q). \tag{8.5}$$

Если $m = f'(1) \leqslant 1$, то в силу выпуклости вниз функции $f(s)$

$$f(s) > s \text{ при } 0 < s < 1.$$

Отсюда следует, что в этом случае единственным решением уравнения (1) будет $q = 1$.

Если $m = f'(1) > 1$, то в некоторой окрестности точки $s = 1$ для $s < 1$ будет выполняться $f(s) < s$, в то же время $f(0) \geqslant 0$, следовательно, уравнение (1) имеет решение в полуинтервале $[0, 1)$. К тому же, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)$ не может равняться единице, так как это означало бы, что в некоторой окрестности точки 1 функция $f_n(0)$ убывает ввиду $f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$, а это невозможно (см. начало доказательства теоремы). Следовательно, искомое q является единственным решением уравнения (8.5) в полуинтервале $[0, 1)$. Теорема доказана.

Доказательство приведенной выше теоремы было основано на свойствах итераций функции $f(s)$, оно наглядно иллюстрируется графиками рис. 31, 32.

Значение $f(0)$ есть ордината пересечения графика $f(s)$ с осью ординат. Значение $f_2(0) = f(f(0))$ можно получить,

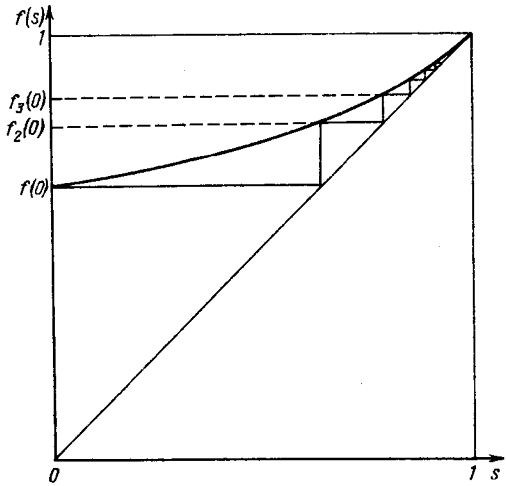


Рис. 31. График функции $f(s)$ при $m < 1$ с изображением графического способа отыскания итераций

$$f_2(0) = f(f(0)), \quad f_3(0) = f(f_2(0)), \ldots$$

проведя горизонтальную прямую на высоте $f(0)$ до пересечения с диагональю квадрата с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и восставив затем к ней перпендикуляр из этой точки до пересечения с графиком $f(s)$. Точно так же получаются последующие итерации функции $f(s)$: $f_3(0) = f(f_2(0))$ и т. д.

В виде небольшого отступления заметим, что приведенная процедура дает очень удобный способ отыскания приближенных значений решения уравнения $f(s) = s$. Любое уравнение может быть сведено к такому виду, и для приближенного отыскания корня после этого нужно лишь многократное повторение вычислений функции $f(s)$. Это довольно часто используется на практике при отыскании численных решений уравнений. Читателю полезно будет самому подробнее ознакомиться с предлагаемым методом и убедиться, что при решении таких уравнений могут быть «устойчивые» и «неустойчивые» решения. К какому из корней приведут последовательные итерации, зависит от начального значения s_0 или того, в область притяжения какого из корней попадает начальное приближение. Легко

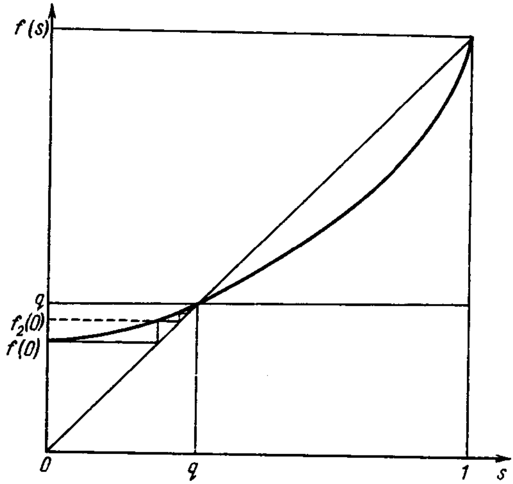


Рис. 32. График функции $f(s)$ при $m > 1$ с изображением графического способа отыскания итераций

$$f_2(0) = f(f(0)), \quad f_3(0) = f(f_2(0)), \ldots$$

заметить, что в устойчивых корнях $|f'(q)| \leqslant 1$ (рис. 33), в неустойчивых корнях $|f'(q)| > 1$, хотя практически любой неустойчивый корень может быть переведен в устойчивый путем линейного преобразования.

В случае задачи о вырождении фамилий обычно считают, что вероятности $p_k = P\{z_1 = k\}$ рождения в семье k мальчиков образуют геометрическую прогрессию $p_k = bc^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, 0 < b, b \leqslant 1 - c$, а $p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \ldots$ В таком случае производящая функция $f(s)$ вычисляется следующим образом:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}.$$

Математическое ожидание числа мальчиков будет

$$m = Mz_1 = f'(1) = \frac{b}{(1-c)^2}.$$

Уравнение $s = f(s)$ имеет неотрицательный корень

$$s_0 = \frac{1-b-c}{c(1-c)}.$$

Этот корень равен 1, если $m = 1$; если $m \neq 1$, то это единственный неотрицательный корень. Если $m > 1$, то вероятность вырождения $q = s_0$.

По данным А. Лотка вероятности вырождения потомства мужских линий хорошо приближаются геометрической

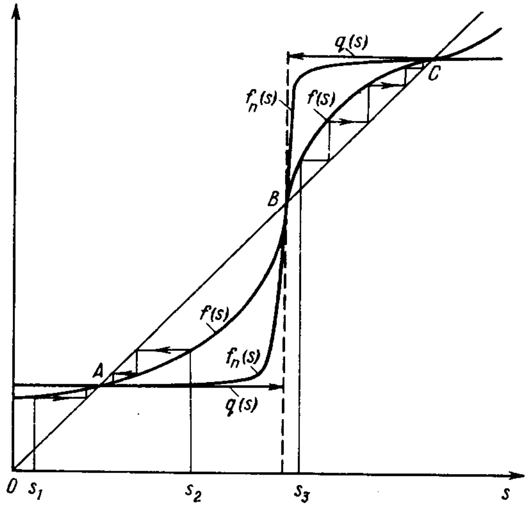


Рис. 33. Графики функций $f(s)$, ее n-кратной итерации $f_n(s)$ и предельной функции $q(s)$ в общем случае. A и C — устойчивые корни, B — неустойчивый. Начальные точки s_1 и s_2 попадают в область притяжения корня A, точка s_3 — область притяжения корня C

прогрессией с $b = 0{,}2126$, $c = 0{,}5893$, $p_0 = 0{,}4825$. В этом случае вероятность вырождения $q \doteq 0{,}819$. Естественно, что величины b, c подсчитываются статистически по данным переписей населения и могут меняться для разных географических областей. Приведенные данные основывались на переписи 1920 года в Америке. Эти величины даже для одной и той же местности могут со временем меняться. Изучением таких явлений занимается наука демография.

§ 5. Предельное поведение z_n

Мы уже выяснили в предыдущем параграфе, что при $n \to \infty$, $m \leq 1$

$$\lim_{n\to\infty} P(z_n = 0) = 1,$$

т. е. с вероятностью единица в этом случае потомство одной частицы вырождается, когда число поколений $n \to \infty$. При этом при $m < 1$ математическое ожидание числа потомков

$$Mz_n = m^n \to 0$$

и дисперсия

$$Dz_n = \sigma^2 m^{n-1} (m^{n-1} + m^{n-2} + \ldots + 1) = \frac{\sigma^2 m^{n-1} (m^n - 1)}{m - 1} \to 0.$$

В то же самое время при $m = 1$ математическое ожидание и дисперсия числа потомков

$$Mz_n = 1,$$
$$Dz_n = n\sigma^2$$

к нулю вообще не стремятся, несмотря на то, что z_n вырождается с вероятностью единица. Это означает, что, несмотря на достоверность вырождения, с ростом n исчезающе малые вероятности больших флуктуаций все время остаются. Другими словами, «типичная траектория» числа потомков при $m = 1$ довольно долго блуждает вне нуля и может при этом подниматься достаточно высоко, но, тем не менее, с вероятностью 1 рано или поздно обрывается в нуле.

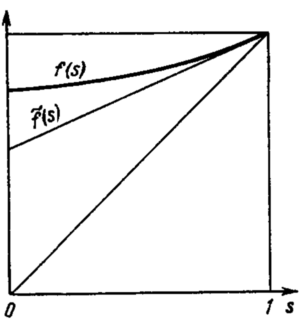


Рис. 34. Функция $f(s)$ и ее приближение $\tilde{f}(s)$

Найдем оценку вероятности $P(z_n > 0)$ при $m < 1$. Очевидно,

$$P(z_n > 0) = 1 - P(z_n = 0) = 1 - f_n(0).$$

Рассмотрим приближение функции $f(s)$ (рис. 34)

$$\tilde{f}(s) = 1 + m(s - 1).$$

Функция $\tilde{f}(s)$ — линейная и она совпадает с $f(s)$ в точке 1 точно так же, как и ее производная. Очевидно,

$$\tilde{f}(s) \leq f(s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

и n-я итерация функции $\tilde{f}(s)$ будет меньше n-й итерации функции $f(s)$:

$$\tilde{f}_n(0) \leq f_n(0)$$

или

$$1 - f_n(0) \leq 1 - \tilde{f}_n(0),$$

но из вида $\tilde{f}(s)$ непосредственно следует

$$1 - \tilde{f}(0) = m, \; 1 - \tilde{f}_2(0) = m^2,$$
$$1 - \tilde{f}_3(0) = m^3, \; 1 - \tilde{f}_n(0) = m^n.$$

Таким образом, в случае $m < 1$ $P(z_n > 0) = 1 - f_n(0) \leq m^n$, т. е. вероятность выживания убывает как геометрическая прогрессия. В случае $m = 1$ эта вероятность убывает значительно медленнее: можно показать, что в этом случае

$$P(z_n > 0) \sim \frac{2}{nf''(1)}.$$

Из рис. 31 для $f(s)$ с $m = 1$ видно, что это убывание происходит гораздо медленнее, но строгое доказательство этого факта тут мы не приводим.

В случае $m > 1$, как мы уже установили, вероятность вырождения $\lim\limits_{n\to\infty} P(z_n = 0) = q < 1$, в то же самое время при

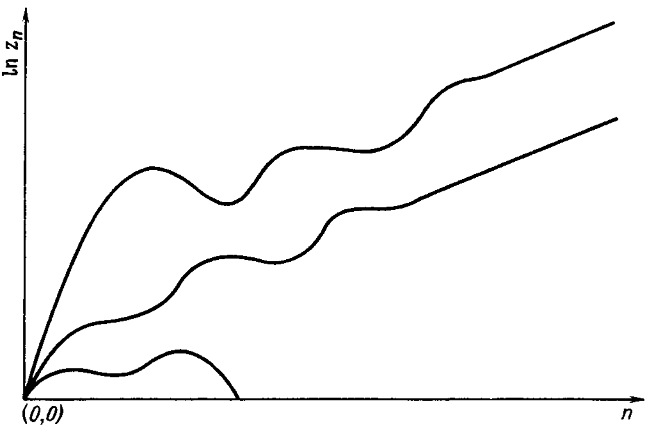


Рис. 35. Три реализации $\ln z_n$ при $m > 1$

любом $k > 0$ вероятность фиксированного числа k потомков стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} P(z_n = k) = 0. \qquad (8.6)$$

В самом деле, как видно из рис. 32, 33, при любом $s < 1$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = q,$$

но это было бы невозможно при невыполнении равенства (8.6). Функция $f_n(s)$ является полиномом от s с неотрицательными коэффициентами, и невыполнение (8.6) означало бы, что $f_n(s)$ при достаточно больших n возрастает быстрее, чем $\frac{1}{2} p_k s^k$, $0 \leq s < 1$, где $p_k = \lim\limits_{n\to\infty} P(z_n = k) > 0$, и не могло бы в пределе совпадать с постоянной q. Математическое ожидание z_n при $m > 1$ $Mz_n = m^n \to \infty$, дисперсия $Dz_n = \dfrac{\sigma^2 m^{n-1}(m^n - 1)}{m - 1} \to \infty$.

Таким образом, последовательность z_n при $m > 1$ с вероятностью q обращается в нуль и с вероятностью $1 - q$ стремится к бесконечности. Типичная траектория последовательности z_n при $m > 1$ совершает при малых n колебания и может с вероятностью q обратиться в нуль, но если она достигла достаточно больших значений, то она возрастает со скоростью m^n (рис. 35).

Упражнения

1. Вернитесь к упражнению 5 в § 4 главы 3, решив поставленную задачу с помощью производящих функций. Найдите распределение вероятностей числа амеб к концу трех промежутков времени.

2. Найти вероятность вырождения раньше 5-го шага, если $P(z_1 = 0) = 0{,}5$; $P(z_1 = 2) = 0{,}5$.

Ответ:

$$P(z_4 = 0) = f_4(0) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\right)^2\right) = 0{,}7417.$$

3. Найти вероятность выживания до 100-го шага включительно, если $P(z_1 = 0) = 0{,}5$; $P(z_2 = 2) = 0{,}5$.

Ответ: $P(z_{100} > 0) \approx 0{,}02$.

4. Найти оценку вероятности выживания до 10-го шага включительно, если $P(z_1 = 0) = 0{,}9$; $P(z_2 = 2) = 0{,}1$.

Ответ: $P(z_{10} > 0) < 1{,}02 \cdot 10^{-7}$.

5. Найти вероятность выживания до 3-го шага включительно, если $P(z_1 = 0) = 0{,}9$; $P(z_1 = 2) = 0{,}1$.

Ответ: $P(z_3 > 0) = 0{,}0038$.

6. Найти оценку для вероятности, отыскиваемой в предыдущем упражнении.

Ответ: $P(z_3 > 0) < 0{,}008$.

7. Найти вероятность выживания до 3-го шага включительно, если $P(z_1 = 0) = 0{,}1$; $P(z_1 = 2) = 0{,}9$. Найти предельную вероятность выживания.

Сравните численные ответы всех предыдущих задач.

Ответ: $P(z_3 > 0) = 0{,}8893$, $\lim\limits_{n \to \infty} P(z_n > 0) = 0{,}8888$.

8. Найти вероятность вырождения до 5-го шага, если в начальный момент было пять частиц, а каждая частица исчезает с вероятностью $P = 0{,}5$ и делится на две частицы с вероятностью $P = 0{,}5$.

Ответ: $P(z_4 = 0/z_0 = 5) = f_4^5(0) = 0{,}1096$.

Указание: воспользоваться тем, что производящая функция суммы независимых случайных величин равна произведению производящих функций.

9. Найти вероятность выживания до 100-го шага включительно, если в начальный момент было 100 частиц, $z_0 = 100$, а вероятность исчезновения для каждой частицы $P = 0{,}5$ и деления на две частицы $P = 0{,}5$.

Ответ:

$$P(z_{100} > 0/z_0 = 100) = 1 - f_{100}^{100}(0) \approx 1 - \left(1 - \frac{2}{100}\right)^{100} = 0{,}8674.$$

10. Найти оценку вероятности выживания до 10-го шага включительно, если в начальный момент было 100 частиц, вероятность исчезновения каждой частицы 0,9 и деления на две частицы 0,1.

Ответ: $P(z_{10} > 0/z_0 = 100) = 1 - f_{10}^{100}(0) < 1 - (1 - m^{10})^{100} = 1{,}024 \cdot 10^{-5}$.

11. Найти вероятность выживания до 3-го шага включительно, если в начальный момент имеется 10 частиц (1000 частиц), а вероятность исчезновения для одной частицы 0,9, деления на две частицы 0,1.

Ответ: $P(z_3 > 0/z_0 = 10) = 0{,}037$; $P(z_3 > 0/z_0 = 1000) = 0{,}978$.

12. То же, что в упражнении 9, но в начальный момент имеется один миллион частиц (десять миллионов частиц).

Ответ: $P(z_{10} > 0/z_0 = 1\,000\,000) < 0{,}097$; $P(z_{10} > 0/z_0 = 10\,000\,000) < 0{,}64$.

13. Найти вероятность выживания до 3-го шага включительно, если в начальный момент имеется 10 частиц (1 частица), а вероятность исчезновения для каждой частицы 0,1, деления на две частицы — 0,9. Сравните численные ответы всех предыдущих задач. Дайте «физические» объяснения полученным результатам.

Ответ: $P(z_3 > 0/z_0 = 10) = 1 - f_3^{10}(0) = 1 - 2{,}76 \cdot 10^{-10}$; $P(z_3 > 0/z_0 = 1) = 1 - 0{,}1107 = 0{,}8893$.

14. Найти итерационный метод приближенного извлечения квадратного корня из числа. Можно ли достигнуть в итерационном процессе сходимости к искомому корню более быстрой, чем геометрическая прогрессия?

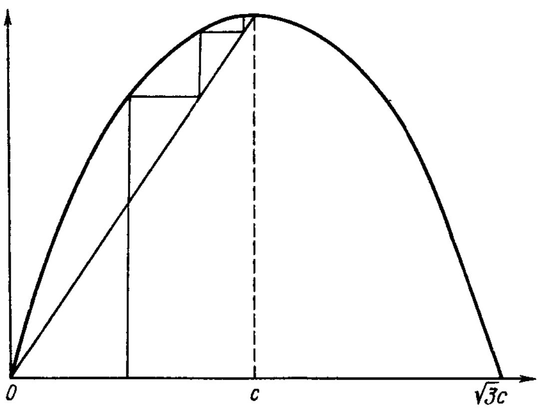


Рис. 36. Итерационный метод отыскания корня

Указание: извлечение квадратного корня из числа c^2 равносильно численному решению уравнения (рис. 36) $-x^2 + c^2 = 0$ или

$$-\frac{x^2}{2c^2} + \frac{x}{2} + x = x.$$

Последнее уравнение имеет корень c, при этом производная функция в левой части в точке c равна нулю, что приводит к скорости сходимости в итерационном процессе более быстрой, чем геометрическая прогрессия. В качестве примера приведем несколько итераций, последовательно приближающих $c = 1{,}414213562 \ldots$ для $c^2 = 2$:

$$x_0 = 1;\ \ x_1 = 1{,}25;\ \ x_2 = 1{,}387;$$

$$x_3 = 1{,}413417;\ \ x_4 = 1{,}41421289;\ \ x_5 = 1{,}414213563.$$

Естественно, что существуют и другие итерационные последовательности, сходящиеся к c. Скорость сходимости в приведенном примере та же, что и у итерационного процесса, приводящего к отысканию корня $x = 0$ уравнения $x^2 = x$, к которому наше уравнение сводится путем линейной замены. Для последнего же уравнения скорость сходимости итерационного процесса, очевидно, будет $x_n = x_0^{(2^n)}$, $|x_0| < 1$, что превосходит скорость сходимости геометрической прогрессии.

15. Провести аналогично задаче 13 исследование итерационного процесса

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c^2/x_n}{2},$$

известного как древневавилонский способ извлечения квадратного корня из c^2. Дать объяснение, почему итерационные методы особенно удобны для современных ЭВМ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассказали в этой небольшой книге об основных понятиях и некоторых классических результатах теории вероятностей, стараясь выдержать по возможности более простую форму, но в то же время сделать изложение достаточно полным и строгим. Мы стремились при выводе формул и доказательстве утверждений ограничиться комбинаторными методами, производящими функциями и формулой Стирлинга. Основные понятия теории вероятностей формировались, начиная с середины XVII века, в трудах Паскаля, Ферма, Гюйгенса, Галилея и др., посвященных решению многочисленных игровых задач. В те времена были уже известны и использовались теоремы сложения и умножения вероятностей, понятие условной вероятности, формула полной вероятности, было введено математическое ожидание. Вершиной этого периода явилось творчество Якова Бернулли. В его «Искусстве предположений», изданном посмертно в 1713 году, рассматривалась последовательность независимых испытаний с двумя исходами, было выведено биномиальное распределение, появились производящие функции, решалась задача о разорении игрока, но главное — была обоснована принципиальная возможность статистического подхода к вероятности. Знаменитая теорема Бернулли, установившая, что при большом числе независимых испытаний частота события, как правило, мало отличается от его вероятности, положила начало предельным теоремам теории вероятностей. Среди этих теорем первыми нужно назвать теоремы Муавра — Лапласа о предельном распределении отклонения частоты события от его вероятности.

Согласно формуле Бернулли вероятность m удач в n испытаниях Бернулли равна (см. § 2 гл. 4) при любом $0 < p < 1$ $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, а в симметричной схеме Бернулли с $p = 1/2$ $P_n(m) = C_n^m 2^{-n}$. Для не очень больших значений n можно непосредственно вычислять факториалы и степени, входящие в правые части выписанных формул, или пользоваться специальными таблицами (например, таблицей для логарифмов факториалов, помещенной на с. 27).

При больших n и формулы Бернулли мало пригодны для непосредственного вычисления. Так, если $n = 100$, $m = 50$, то для вычисления $P_{100}(50)$ необходимо найти C_{100}^{50} и 2^{-100}. Еще более затруднительно вычисление вероятностей вида $\sum_{m=35}^{65} P_{100}(m)$.

Теорема Муавра — Лапласа и теорема Пуассона облегчают эти задачи, предлагая приближенные формулы, подсчет по которым производится с помощью таблиц функций

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\, du \quad \text{и} \quad \Pi(m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Конечно, возможности современных компьютеров несколько принижают вычислительную ценность этих приближенных формул, поскольку возрастает роль чисто комбинаторных численных приемов, с легкостью совершаемых на компьютерах. Однако настоящая ценность предельных теорем Муавра—Лапласа и Пуассона вовсе не в вычислительном отношении, а в их принципиальной роли в теории вероятностей. Для выяснения этой роли необходимо показать, что пределы биномиальных вероятностей в указанных теоремах сами определяют распределения вероятностей.

Укажем вероятностный смысл правой части $\Phi(t_2) - \Phi(t_1)$ интегральной формулы Муавра—Лапласа (см. § 5 гл. 4): $\sum_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-x^2/2}\, dx = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$.

Существуют случайные величины, распределение вероятностей для которых задается с помощью неотрицательной функции $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, следующим образом: для любого интервала (t_1, t_2) на прямой вероятность того, что случайная величина примет значения из этого интервала, равна интегралу $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt$, причем $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = 1$. Функция $\varphi(t)$ с указанными свойствами называется *плотностью вероятности*, а распределение такой случайной величины обычно называется непрерывным распределением. Распределение с плотностью $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ называется *нормальным распределением*, а функция $\Phi(t)$ называется *функцией нормального распределения*, и поэтому разность $\Phi(t_2) - \Phi(t_1)$ есть вероятность случайной величине с нормальным распределением принять значение из интервала (t_1, t_2). Это распределение часто называют также *гауссовским* по имени Гаусса, который приблизительно в то же время, что и Лаплас, получил его как распределение ошибок наблюдения в задачах астрономии и геодезии. Работы Лапласа и Гаусса по теории ошибок обнаружили, что распределение суммарной ошибки, полученной сложением большого числа незначительных случайных ошибок, при довольно общих условиях будет приближенно нормальным распределением. Таким образом, асимптотическая формула Муавра — Лапласа оказалась следствием достаточно универсального вероятностного закона. Роль, которую нормальное распределение играет в теории вероятностей и ее приложениях, определяется центральной предельной теоремой. Говорят, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ удовлетворяют *центральной предельной теореме*, если при любых действительных числах α и β для суммы $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ при $n \to \infty$ справедливо

$$P\left\{\alpha \leqslant \frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} \leqslant \beta\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-u^2/2}\, du.$$

Эта формула справедлива при очень широких условиях, налагаемых на $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Теорема Муавра — Лапласа представляет собой вариант центральной предельной теоремы для взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, принимающих два значения 1 и 0 с вероятностями $P\{X_i = 1\} = p$, $P\{X_i = 0\} = q$, $p + q = 1$. Возвращаясь к теореме Муавра — Лапласа, отметим, что приближение для биномиальной вероятности, предлагаемое в ней, тем лучше, чем ближе p к $1/2$, тогда как для значений p, близких к 0 или 1, разумнее пользоваться приближенной формулой Пуассона

$$P_n(m) \sim e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}, \quad \lambda = np$$

(см. § 3 гл. 4). Числа $\Pi(m) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}$ для любого $\lambda > 0$ неотрицательны и в сумме по всем m, принимающим значения из счетного множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$, составляют 1. Поэтому они могут быть взяты в качестве распределения некоторой случайной величины, принимающей целые неотрицательные значения 0, 1, 2, ... Это распределение называется распределением Пуассона (пример распределения случайной величины, принимающей счетное число значений). Оба предельных распределения — нормальное и Пуассона выводят нас за пределы книги.

Научно-популярное издание

КОЛМОГОРОВ Андрей Николаевич
ЖУРБЕНКО Игорь Георгиевич
ПРОХОРОВ Александр Владимирович

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Библиотечка «Квант», выпуск 23

Заведующий редакцией *Н. А. Носова*
Редактор *О. В. Салецкая*
Обложка художника *Б. М. Рябышева*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, О. М. Карпова*

ИБ № 41089

Сдано в набор 08.06.92. Подписано к печати 25.05.95.
Формат 84 × 108/32. Бумага книжно-журн.
Гарнитура таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,24. Усл. кр.-отт. 9,74.
Уч.-изд. л. 9,23. Тираж 3000 экз. Заказ № 262. С-021.

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
РАН
117071 Москва, Ленинский проспект, 15

Новосибирская типография № 4 РАН
630077 Новосибирск 77, Станиславского, 25