

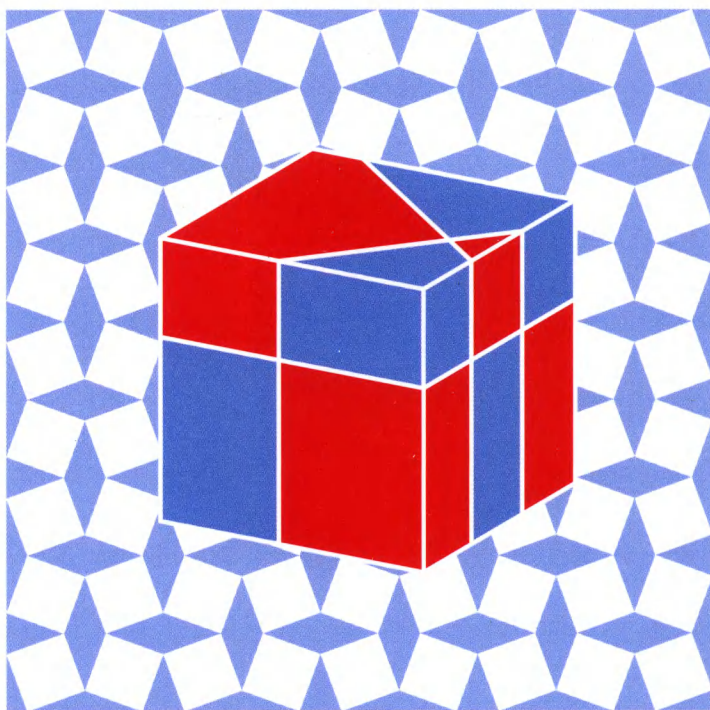


**БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

**выпуск 140**

**В. В. ПРОИЗВОЛОВ**

# **ЗАДАЧИ НА ВЫРОСТ**



БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ» • ВЫПУСК 140



Библиотечка «Квант»

Выпуск 140

---

В. В. Произволов

# Задачи на вырост

Новое издание

Москва  
Издательство МЦНМО

УДК 51(079.1)

ББК 22.1я721

П13

## **Произволов В. В.**

П13      Задачи на вырост / Под ред. А. Д. Блинкова. —  
Новое изд. — М.: МЦНМО, 2022. — 184 с. — (Б-чка  
«Квант»; Вып. 140).

ISBN 978-5-4439-1702-3

Это новое издание книжки В. В. Произволова «Задачи на вырост». Исправлен ряд опечаток и неточностей, допущенных в предыдущем издании (2003 г.). Книжка содержит большое количество авторских задач, придуманных для проведения различных математических олимпиад. Значительная часть из них публиковалась в журнале «Квант». Автор считал эту книжку учебным пособием для любознательных школьников, но она будет интересна и полезна учителям математики, студентам математических факультетов вузов, а также всем любителям математики.

ББК 22.1я721

Учебно-методическое издание

*Вячеслав Викторович Произволов*

**ЗАДАЧИ НА ВЫРОСТ**

В соответствии с Федеральным законом № 436-ФЗ  
от 29 декабря 2010 года издание маркируется знаком 6+.

Подписано в печать 31.01.2022 г. Формат 84×108/32. Гарнитура ITC Charter.  
Печать офсетная. Печ. л. 11,5. Тираж 1500 экз. Заказ № 152

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.  
Тел. (499) 241-08-04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».  
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.  
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru

**ISBN 978-5-4439-1702-3**

© МЦНМО, 2022

© А. В. Дроботова, 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

От составителей . . . . .	4
Предисловие . . . . .	7
§ 1. Задачи на один зубок . . . . .	8
§ 2. Головоломки и задачи по геометрии ножниц . .	15
§ 3. Такая разная математика . . . . .	24
§ 4. Математика на шахматной доске . . . . .	32
§ 5. В поисках угла . . . . .	41
§ 6. Опять геометрия ножниц . . . . .	50
§ 7. Числа и фигуры . . . . .	59
§ 8. Геометрия полна приключений . . . . .	68
§ 9. От задачи к задаче . . . . .	80
§ 10. Лестница задач . . . . .	88
§ 11. «Что я знаю о кругах» . . . . .	96
§ 12. На плоскости и в пространстве . . . . .	105
§ 13. Ваши друзья — задачи . . . . .	118
§ 14. Задачи, которые мы выбираем . . . . .	135
§ 15. Задачи как задачи . . . . .	148
§ 16. Задачи учат думать . . . . .	164
§ 17. Замри — умри — воскресни . . . . .	175

Эта книга является попыткой собрать «под одной крышей» творческое наследие замечательного математика, выдающегося автора задач для школьников Вячеслава Викторовича Произволова (1939–2019). Значительную часть своей жизни Вячеслав Викторович занимался проблемами математического образования и популяризацией математики среди школьников и учителей. В течение многих лет он был членом редколлегии журнала «Квант». В зону его ответственности прежде всего входил раздел «Задачник „Кванта“», но он уделял большое внимание и другим разделам: «„Квант“ для младших школьников» и конкурс решения задач «Математика 6–8». В связи с этим многие задачи, им придуманные, публиковались на страницах журнала.

Много лет подряд В. В. Произволов был членом методической комиссии и жюри Московской математической олимпиады, председателем методической комиссии и жюри Турнира математических боев имени А. П. Савина. Для этих соревнований он также сочинял яркие интересные задачи. Вячеслав Викторович обладал потрясающим математическим и эстетическим вкусом, он умел придумывать задачи разного уровня сложности, поэтому его задачи также можно встретить как в вариантах «Математического праздника», так и в вариантах Международного турнира городов и Всесоюзной олимпиады школьников.

Многие из тех, кому довелось общаться с Вячеславом Викторовичем, отмечали его высокую требовательность

к содержанию задач (как своих, так и задач других авторов). В частности, он говорил: «В задаче должен быть факт!». Его увлеченность, эрудиция и глубокое понимание математики заражало людей, которым посчастливилось работать вместе с ним, способствовало творческому росту молодых коллег. Не случайно многие преподаватели проводили занятия математических кружков, составленные из задач Вячеслава Викторовича, которые так и назывались «Задачи Произволова». Кроме того, его задачи дали пищу для размышлений нескольким авторам статей в «Кванте».

К сожалению, В. В. Произволов был автором только одной книжки — «Задачи на вырост». Впервые она была опубликована в 1995 году в издательстве МИРОС. Второе расширенное ее издание было в 2003 году в «Библиотечке „Квант“». Прошло уже почти 20 лет, многие школьники не знают о ее существовании, а многие учителя не знакомы с творчеством В. В. Произволова, тем более что большое количество задач, им составленных, в ту книжку не вошло. Настоящее издание в двух частях призвано устранить эти пробелы.

Первая часть — это новое издание «Задач на вырост» В. В. Произволова. Исправлен ряд опечаток и неточностей, допущенных в предыдущем издании.

Во вторую часть вошли статьи из журнала «Квант» разных лет, как самого В. В. Произволова, так и других авторов по его задачам. Там же опубликованы задачи Вячеслава Викторовича, не вошедшие в его книжку и не разобранные в статьях. Они разделены по источникам, при этом мы постарались максимально сохранить стиль автора, в частности решение задачи идет сразу после ее условия. Отдельно отметим, что В. В. Произволов, будучи настоящим математиком, «поймав» какую-либо идею, пытался ее развить, поэтому его задачи уместно объединять в «серии». Для того чтобы облегчить преподавателям эту возможность, к ряду задач из этой части

приводятся комментарии, помещенные в конец книги. А открывается вторая часть воспоминаниями А. В. Дроботовой — дочери В. В. Произволова.

Полезного и приятного чтения!

А. Д. Блинков

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

*Мы — мыслящие печи,  
Дыханье наше — дым.  
А сам печник далече  
За облаком седым.*

В. Хлебников

Перед вами задачник открытого типа: текст решения следует непосредственно за формулировкой задачи. Автор не играет с читателем в прятки, и прежде всего это свидетельствует о доверии к своему читателю. Кроме того, такая форма имеет свои преимущества. Если читатель — школьник, то он сам волен выбирать, по отношению к какой задаче быть ему читателем, а по отношению к какой — решателем. Если читатель — учитель, подбирающий материал для занятия школьного математического кружка, то ему не придется тратить время на решение задач.

Впрочем, какую бы форму работы с книгой читатель ни избрал, все равно она потребует активного участия ума и воли. Читатель знает, что наградой за любовь к математике является сама любовь.

Сборник составлен из авторских задач, которые появлялись в разные годы по преимуществу на страницах журнала «Квант». Две трети этих задач по уровню сложности доступны школьникам 7—8 классов, остальные — школьникам старших классов, интересующимся математикой. Во многих случаях, где позволяет тематика, задачам придана занимательная форма.

Осталось сказать:

*В добрый путь!*



---

## ЗАДАЧИ НА ОДИН ЗУБОК

«Задача-одноходовка», или «пятнадцатиминутка», требует одной мысли для ее решения, но эту мысль нужно найти. Не следует огорчаться, если она не приходит в голову в первые 15 минут размышлений, — на то, как быстро будет найден ответ, влияет не только сообразительность, но и темперамент. Можно сказать, что такие задачи способствуют общению между теми, кто заинтересованно относится к математике, ими можно обмениваться на ходу или стоя в вагоне метро, они поднимают эмоциональную атмосферу математического общения.

Решения, предложенные для задач, — как сжатые пружинки, и я надеюсь, что эти пружинки расправятся в сознании читателя.

### Задача 1. Дамы и кавалеры

На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама — с тремя кавалерами. Докажите, что на балу число дам равнялось числу кавалеров.

*Решение.* Определим число различных танцевавших пар.

Если число кавалеров принять за  $k$ , то число пар было равно  $3k$ , так как каждый кавалер танцевал с тремя дамами. Если число дам принять за  $m$ , то число пар было равно  $3m$ , так как каждая дама танцевала с тремя кавалерами. Значит,  $3k = 3m$ , или  $k = m$ .

### Задача 2. Сцепленные параллелограммы

Два параллелограмма расположены так, как показано на рис. 1: они имеют общую вершину, и еще по одной

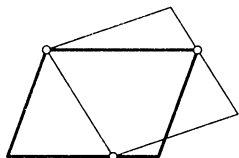


Рис. 1

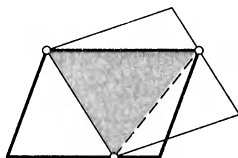


Рис. 2

вершине у каждого из параллелограммов лежит на сторонах другого параллелограмма.

Докажите, что площади параллелограммов равны.

*Решение.* Закрашенный треугольник (рис. 2) составляет половину площади как одного, так и другого параллелограмма. Это означает, что их площади равны.

### Задача 3. Оклейка кубика

Поверхность кубика с ребром 1 можно оклеить шестью бумажными квадратами, каждый из которых имеет площадь 1, — это ясно.

Можно ли поверхность такого кубика целиком оклеить 12 бумажными квадратами, каждый из которых имеет площадь 0,5?

*Ответ:* можно.

*Решение.* В каждой грани кубика проведем две диагонали. Эти 12 диагоналей разделят поверхность кубика на 12 областей, каждая из которых может быть оклеена одним бумажным квадратиком площади 0,5 (для этого его придется перегнуть по диагонали, рис. 3).

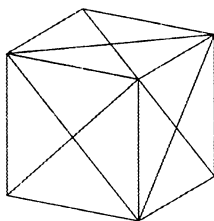


Рис. 3

#### Задача 4. Палочки

На столе лежат три черные палочки разной длины, причем сумма их длин равна 30 см, и пять белых палочек, сумма длин которых тоже равна 30 см. Можно ли распилить те и другие палочки так, чтобы их потом можно было расположить парами и в каждой паре длины палочек были одинаковыми, а цвета разными?

*Ответ:* всегда можно.

*Решение.* Составим из трех черных палочек одну большую палочку длиной 30 см и из пяти белых палочек одну большую палочку длиной 30 см, расположив их друг под другом параллельно (рис. 4). Через места стыков произведем распилы, перпендикулярные направлению палочек, каждый из которых распространяется на обе палочки сразу, — тогда все палочки распадутся на разноцветные пары одинаковой длины.



Рис. 4

#### Задача 5. Признак трапеции

Отрезок, соединивший середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его площадь пополам. Докажите, что этот четырехугольник — трапеция<sup>1</sup>.

*Решение.* Площади треугольников  $BMN$  и  $CMN$  равны (рис. 5). Отсюда следует, в силу условия задачи, что равны площади треугольников  $ABM$  и  $CDM$ . Но тогда равны и высоты этих треугольников, опущенные из вершин  $B$  и  $C$ . А это значит, что  $BC \parallel AD$ , т. е. четырехугольник  $ABCD$  — трапеция.

<sup>1</sup>Условие задачи подразумевает, что параллелограмм является частным случаем трапеции. Именно такой подход был отражен в школьных учебниках под редакцией А. Н. Колмогорова.

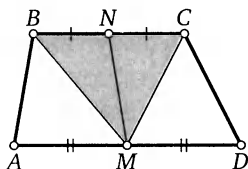


Рис. 5

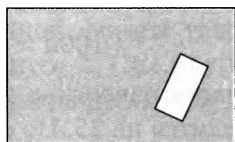


Рис. 6

### Задача 6. Задумано число

Задумано трехзначное число, у которого с любым из трех чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

*Ответ:* 163.

*Решение.* Видно, что число 163 подходит, но для полноты решения необходимо логическое обоснование единственности ответа. Проведите его самостоятельно.

### Задача 7. Прямоугольник с дыркой

В прямоугольнике вырезали дырку прямоугольной формы (рис. 6). Проведите прямую линию, которая делит образовавшуюся фигуру на две части равной площади.

*Решение.* Прямая, проведенная через центр исходного прямоугольника и центр прямоугольника-дырки, делит образовавшуюся фигуру на две части равной площади.

### Задача 8. Найдите числа

Найдите все трехзначные числа, которые равны произведению числа, записываемого двумя их последними цифрами, на число, выражаемое их последней цифрой.

*Ответ:* 125 и 375.

*Решение.* Будем искать число  $\overline{abc}$ . Запишем условие задачи в виде равенства

$$100a + 10b + c = (10b + c)c.$$

Очевидно, что  $c \neq 0$ . Перепишем равенство в виде

$$100a = (10b + c)(c - 1).$$

Левая часть равенства делится на 25, значит, и правая часть делится на 25. Но если  $c - 1$  делится на 5, то  $10b + c$  уже не делится на 5, что невозможно. Значит,  $10b + c$  делится на 25, что возможно, когда это число равно 25 или 75 ( $c \neq 0$ ), т. е. искомые числа — 125 и 375.

### Задача 9. Равные углы

На клетчатой бумаге нарисованы два угла (рис. 7). Докажите, что углы равны.

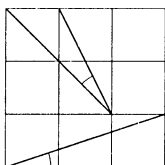


Рис. 7

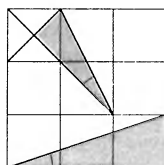


Рис. 8

*Решение.* Равенство углов следует из подобия двух прямоугольных треугольников (рис. 8).

### Задача 10. Набор гирек

Из набора гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 101 г удалили гирьку с массой 19 г. Можно ли остальные гирьки разложить по 50 штук на каждую из чашек весов так, чтобы веса были в равновесии?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Разобьем гирьки на пары: 18 пар гирек 1-го типа: 1 г + 37 г, 2 г + 36 г, ..., 18 г + 20 г (сумма масс в каждой такой паре равна 38) и 32 пары гирек 2-го типа: 38 г + 101 г, 39 г + 100 г, ..., 69 г + 70 г (сумма масс гирек в каждой такой паре будет 139 г). На каждую чашку весов положим по 9 пар гирек 1-го типа и по 16 пар гирек 2-го типа — веса будут в равновесии.

**Задача 11. Перегнутая полоска**

Полоска бумаги прямоугольной формы такова, что ее можно покрыть кругом радиуса 1. Полоску перегнули (рис. 9). Докажите, что и теперь ее можно покрыть кругом радиуса 1.

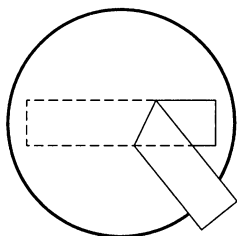


Рис. 9

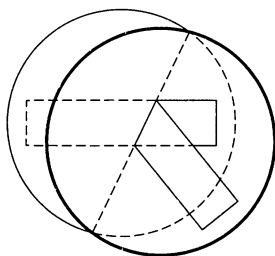


Рис. 10

*Решение.* Если после перегиба полоска не вышла за пределы круга радиуса 1, то этот круг ее покрывает. Если же после перегиба полоска вышла за пределы круга (см. рис. 9), то тогда круг, полученный из первого симметричным отражением относительно прямой, проходящей через линию перегиба полоски, целиком покроеет перегнутую полоску (рис. 10).

**Задача 12. Тринадцать неизвестных**

Тринадцать различных натуральных чисел дают в сумме 92. Найдите эти числа.

*Решение.* Все натуральные числа от 1 до 13 включительно дают в сумме 91. Если в этом наборе чисел 13 заменить на 14, то получим требуемый набор. Всякий другой набор 13 различных натуральных чисел будет обладать суммой, большей 92.

**Задача 13. Девятнадцатиугольник**

Каждый из углов плоского девятнадцатиугольника кратен  $10^\circ$ . Докажите, что у девятнадцатиугольника найдутся две параллельные стороны.

*Решение.* Проведем через какую-либо точку плоскости 18 прямых, разбивающих плоскость на 36 равных углов, так, чтобы одна из этих прямых была параллельна какой-нибудь стороне девятнадцатиугольника. Но тогда в силу условия задачи каждая сторона девятнадцатиугольника будет параллельна одной из 18 прямых. В таком случае у девятнадцатиугольника найдутся две стороны, которые будут параллельны одной и той же из 18 прямых. Естественно, что эти стороны параллельны.

### Задача 14. Цифровой кубик

Каждая грань кубика разделена на четыре квадрата. В каждый из этих квадратов вписано число (рис. 11). При этом число, вписанное в любой из 24 квадратов, в сумме с числами, вписанными в четыре соседних с ним квадрата, всегда дает 13. Могут ли все 24 числа быть целыми?

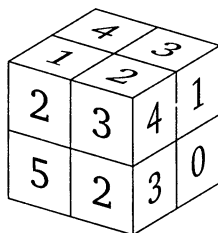


Рис. 11

*Ответ:* не могут.

*Решение.* Найдем сумму всех 24 чисел. Просуммировав каждое число, расположенное в квадрате, с числами в соседних с ним квадратах по всем квадратам, мы получим число  $24 \cdot 13 = 312$ . При этом каждое число, записанное на кубике, суммируется по 5 раз. Значит, сумма всех чисел, записанных на кубике, равна  $312 : 5$ , а потому все слагаемые не могут быть целыми числами.

## ГОЛОВОЛОМКИ И ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ НОЖНИЦ

Отложим в сторону циркуль и возьмем в руки ножницы (хотя бы умозрительные!). Кроить, вырезать, соображать — вот с чем имеешь дело, когда решаешь комбинаторно-геометрические задачи по «геометрии ножниц». Для их решения необходимо и достаточно знать геометрию за 7 класс плюс обладать смекалкой. Итак, посверкивая ножницами и поблескивая смекалкой, приступаем к делу.

### Задача 1. Параллелограмм из треугольников

Два одинаковых бумажных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной из диагоналей, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных треугольников можно сложить параллелограмм.

*Решение.* Треугольники сложим так, чтобы их попарно равные стороны совпали, а четыре вершины, соответствующие четырем вершинам четырехугольника, сошлись в одну точку (рис. 12). Тогда получим четырехугольник с попарно равными противоположными сторонами, т. е. параллелограмм.

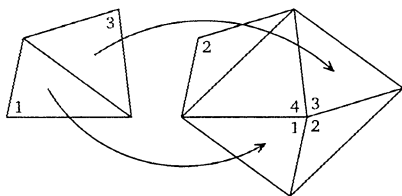


Рис. 12



**Задача 2. Бумажное кольцо**

Из полоски бумаги шириной 1 см склеили цилиндрическое кольцо с длиной окружности 4 см (рис. 13). Можно ли из этого кольца изготовить квадрат, имеющий площадь: а)  $1 \text{ см}^2$ ; б)  $2 \text{ см}^2$ ?

Бумагу разрешается как угодно склеивать, но рвать ее, конечно, нельзя.

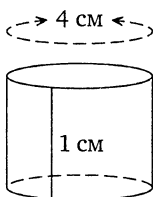


Рис. 13

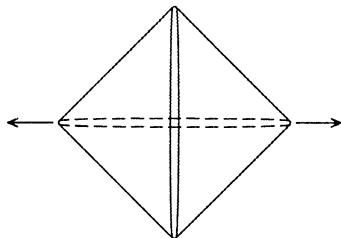


Рис. 14

*Решение.* а) Как получить четырехслойный квадрат площади  $1 \text{ см}^2$ , догадаться несложно.

б) Если же взяться за диаметрально противоположные точки нижнего основания кольца и потянуть в противоположные стороны, то кольцо сложится в двухслойный квадрат с площадью  $2 \text{ см}^2$  (рис. 14). При этом оба края или основания кольца склеятся в диагонали этого квадрата.

**Задача 3. Квадрат и четность**

Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырех прямоугольников.

Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольников, четно.

*Решение.* Заметим, что в каждой вершине квадрата находится вершина какого-либо одного из прямоугольников, а в других точках квадрата могут находиться вершины только двух прямоугольников. Пусть  $n$  — коли-

чество прямоугольников, на которые разрежали квадрат,  $m$  — количество точек квадрата, являющихся вершинами ровно двух прямоугольников. Подсчитаем количество вершин прямоугольников. С одной стороны, оно равно  $4n$ , с другой стороны, оно равно  $4 + 2m$ . Отсюда следует, что  $m = 2(n - 1)$ . Значит, число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольников, четно, ибо оно равно  $m + 4$ .

#### Задача 4. Сложите треугольник

Три одинаковых треугольника разрезаны по различным медианам. Сложите из шести полученных кусков один треугольник.

*Решение.* Решение представлено на рис. 15. Вам нетрудно будет его обосновать.

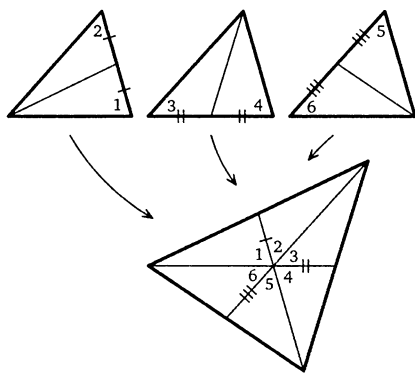


Рис. 15

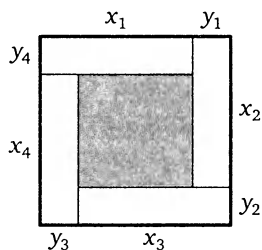


Рис. 16

#### Задача 5. Квадрат в квадрате

Квадрат разбит на 5 прямоугольников так, как изображено на рис. 16. Известно, что площади прямоугольников, прилегающих к границе квадрата, равны. Докажите, что центральный прямоугольник — квадрат.

*Решение.* Пусть  $x_1 > x_2$ , тогда  $y_1 < y_2$ . Поскольку  $x_2 y_1 = x_3 y_2$ , мы получаем, что  $x_2 > x_3$ . Но тогда  $y_2 < y_3$ . Из

равенства  $x_4 y_3 = x_3 y_2$  получаем  $x_3 > x_4$ , и тогда  $y_3 < y_4$ . Снова, поскольку  $x_1 y_4 = x_4 y_3$ , получаем  $x_4 > x_1$  — противоречие с цепочкой неравенств  $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$ . Значит,  $x_1 = x_2$ , а также  $x_2 = x_3 = x_4$ , и центральный прямоугольник — квадрат.

### Задача 6. Признак трапеции

Концы одной стороны четырехугольника соединены с серединой его противоположной стороны. При этом получился треугольник, площадь которого оказалась равной половине площади четырехугольника. Докажите, что исходный четырехугольник — трапеция.

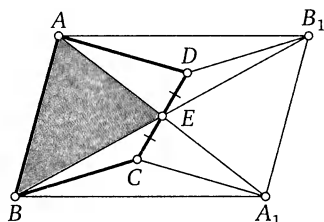


Рис. 17

*Решение.* Симметрично отразим исходный четырехугольник  $ABCD$  относительно точки  $E$  — середины стороны  $CD$  (рис. 17). При этом сумма площадей треугольников  $ABE$  и  $A_1B_1E$  равна половине площади параллелограмма  $ABA_1B_1$ , а также, в силу условия задачи, она равна половине площади шестиугольника  $ABCA_1B_1D$ . Отсюда следует, что точки  $C$  и  $D$  лежат соответственно на отрезках  $BA_1$  и  $AB_1$ , т. е. стороны четырехугольника  $BC$  и  $AD$  параллельны.

### Задача 7. Параллелограмм из четырехугольников

Бумажный выпуклый четырехугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противоположных сторон. Докажите, что из этих частей можно сложить параллелограмм.

*Решение.* Способ, которым можно сложить параллелограмм из четырех кусков, показан на рис. 18. Вам нетрудно будет его обосновать.

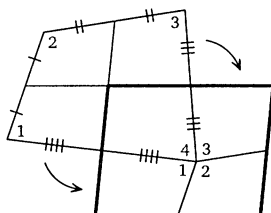


Рис. 18

### Задача 8. Диск с окошками

Круглый диск разделен на 21 сектор; секторы одинаковы; в каждый из них записано число. Во втором диске, укрепленном на одной оси с первым, вырезано 5 окошек так, что при любом повороте второго диска из некоторого начального положения на угол, кратный  $2\pi/21$ , в каждое окошко видно одно из чисел первого диска. Известно, что при любом таком повороте второго диска сумма видимых через окошки чисел равна нулю. Докажите, что сумма всех чисел, написанных на первом диске, равна нулю.

*Решение.* Из некоторого начального положения второго диска, через окошки которого видны 5 чисел, в сумме дающих нуль (рис. 19), повернем его 20 раз по часовой стрелке, каждый раз на угол  $2\pi/21$ . Сумма всех чисел,

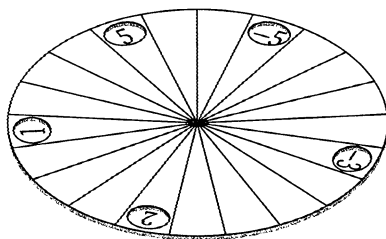


Рис. 19

показавшихся в окошках при всех этих положениях второго диска, будет равна нулю. Но при этом каждое число, написанное на первом диске, появится в окошках ровно 5 раз. Значит, сумма всех чисел, написанных на первом диске, равна нулю.

### **Задача 9. Воткнем булавку**

На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Для этого нужно воткнуть булавку в центр верхнего листа бумаги, ибо этот центр, в силу условия задачи, принадлежит каждому из остальных прямоугольников.

### **Задача 10. Разноцветный кубик**

Каждая грань кубика разделена на четыре квадрата, и каждый квадрат окрашен в один из трех цветов: синий, желтый или красный — так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом может получиться синих, желтых и красных квадратов?

*Решение.* В каждой вершине кубика сойдутся три разноцветных квадрата. Так как всего имеется 24 квадрата, а вершин у кубика 8, то получится ровно по 8 квадратов каждого из трех цветов.

### **Задача 11. Квадрат заданной площади**

Площадь клетки клетчатой бумаги равна  $100 \text{ мм}^2$ . Пользуясь только линейкой и ножницами, вырежьте из клетчатой бумаги квадрат площадью  $80 \text{ мм}^2$ .

*Решение.* Выкройка квадрата нужной площади показана на рис. 20. Пять квадратиков равны по площади

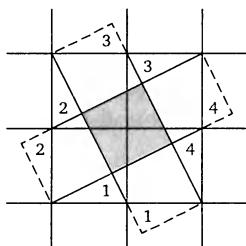


Рис. 20

четырем квадратам клетчатой бумаги:  $5x = 400 \text{ мм}^2$ . Значит,  $x = 80 \text{ мм}^2$ .

### Задача 12. Полосатый квадрат

Квадрат разрезан горизонтальными прямыми на несколько полосок, при этом сумма ширин четных полосок равна сумме ширин нечетных полосок (рис. 21).

Докажите, что сумма площадей частей четных полосок, расположенных выше диагонали квадрата, равна сумме площадей частей нечетных полосок, расположенных ниже диагонали.

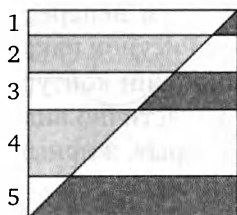


Рис. 21

*Решение.* Сумма площадей всех четных полосок и площади треугольника, расположенного выше диагонали, равна площади квадрата. Поэтому та часть площади квадрата, которую они покрывают дважды, равна той части площади квадрата, которую они вовсе не покрывают. А этим все доказано.

**Задача 13. Оклейка в два слоя**

Поверхность кубика  $1 \times 1 \times 1$  нельзя оклеить целиком полоской бумаги  $1 \times 6$ , не допуская разрывов. Можно ли такой кубик оклеить полоской бумаги  $1 \times 12$  в два слоя?

*Ответ:* можно.

*Решение.* На рис. 22, а показана полоска  $1 \times 12$ , на которой пунктиром намечены линии сгиба. Согнув полоску по этим линиям, получим двуслойную зигзагообразную полоску, изображенную на рис. 22, б, после чего оклеиваем кубик этой полоской так, как показано на рис. 22, в.

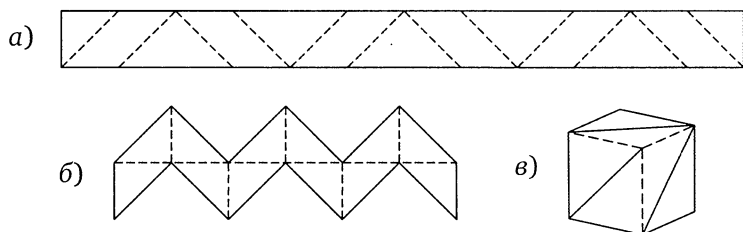


Рис. 22

**Задача 14. Накрытый контур**

На бумаге нарисованы непересекающиеся контуры: 3 жирных и 3 тонких. Рисунок накрыли другим листком бумаги так, что ровно один контур оказался накрытым целиком, а все другие частично видны (рис. 23). Определите, какой контур накрыт: жирный или тонкий.

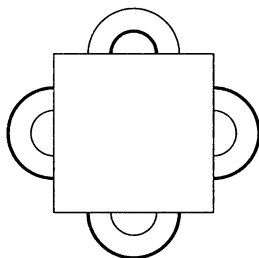


Рис. 23

*Ответ:* жирный.

*Решение.* Действительно, допустим противное: целиком закрыт тонкий контур, и видны части двух других тонких контуров. Но верхняя часть тонкого контура не может быть соединена ни с одной из других выступающих тонких частей, так как тогда невозможно было бы замкнуть окружающий эту часть жирный контур. Значит, верхняя тонкая дуга принадлежит одному тонкому контуру, а остальные три — другому. Но в этом случае три жирные дуги: слева, справа и снизу — также принадлежат одному контуру, следовательно, видны дуги только двух жирных контуров. Получим противоречие с тем, что закрыт целиком только один тонкий контур, а все три жирных контура имеют выступающие части. Значит, закрыт целиком жирный контур, например, так, как на рис. 24.

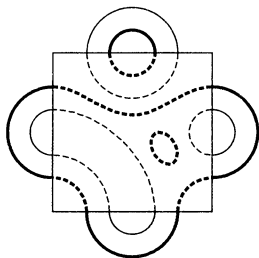


Рис. 24



## ТАКАЯ РАЗНАЯ МАТЕМАТИКА

Тот, кто, преподавая математику, пренебрегает принципом разнообразия и возможной занимательности, умножает сторонников расхожего мнения, что математика — трудный и скучный предмет. Поэтому представители «большой науки», обращаясь к молодому поколению, серьезные идеи нарочито облачают в форму «сочетания приятного с бесполезным». Оживить изложение непростого материала часто помогают одна-две удачно подобранные задачи, в этом смысле задачи подобны витаминам. Хорошая задача будит не только наш разум, но и наши эмоции.

### Задача 1. Стопка тетрадей

Пять тетрадей: синяя, желтая, серая, коричневая и красная — в некотором порядке лежали в стопке. Тетради выкладывают на стол. Сначала верхнюю, потом следующую за ней и т. д. В результате получили две стопки, изображенные на рис. 25. Затем тетради собрали в стопку в прежнем порядке, а потом вновь выложили на стол,



Рис. 25



Рис. 26



снимая также тетради сверху стопки. На этот раз получились две стопки, изображенные на рис. 26. В каком порядке тетради лежали в стопке?

*Решение.* Из рис. 25 следует, что сверху либо красная, либо коричневая тетрадь, а из рис. 26 — что сверху коричневая тетрадь. Зная, что сверху лежала коричневая тетрадь, из рис. 25 получаем, что второй могла быть красная или синяя тетрадь, а из рис. 26 — что ею могла быть только красная или желтая. Отсюда следует, что второй была красная тетрадь. Теперь из рис. 26 следует, что третьей лежала желтая тетрадь, четвертой — серая и пятой — синяя тетрадь.

### Задача 2. Определите площадь

В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые, а стороны  $AB$  и  $BC$  равны. Определите его площадь, если известно, что его высота  $BH = 1$  (рис. 27).

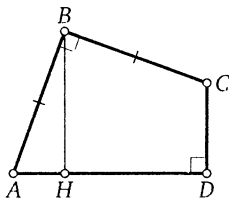


Рис. 27

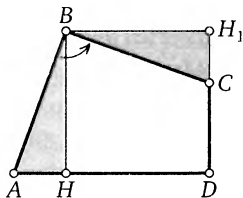


Рис. 28

*Решение.* Если повернуть треугольник  $ABH$  вокруг точки  $B$  на  $90^\circ$  (рис. 28), то четырехугольник  $DNBH_1$  окажется квадратом со стороной 1. Следовательно, он, как и четырехугольник  $ABCD$ , имеет площадь 1.

### Задача 3. Числа в ромбах

Суммы чисел в ромбах (рис. 29) подчиняются некоторой закономерности. Найдите ее и докажите справедливость вашей гипотезы.

*Решение.* Сумма чисел в ромбе всегда равна кубу числа, стоящего на его горизонтальной диагонали. Это лег-

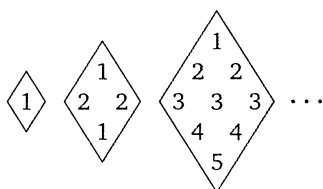


Рис. 29

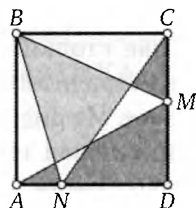


Рис. 30

ко выводится из того, что два числа на одной вертикали и на одинаковом расстоянии от горизонтальной диагонали всегда дают в сумме число, равное удвоенному числу на горизонтальной диагонали.

#### Задача 4. Что больше?

Какая часть площади квадрата больше: темно- или светло-серая (рис. 30)?

*Ответ:* они равны.

*Решение.* Нетрудно заметить, что каждый из треугольников  $ABM$  и  $BCN$  занимает половину площади квадрата  $ABCD$ . Значит, та часть площади квадрата  $ABCD$ , которую они покрывают дважды (светло-серая часть), равна той части площади квадрата  $ABCD$ , которую они вовсе не покрывают (темно-серая часть).

#### Задача 5. Набор гирек

Набор состоит из 30 гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 30 г. Из набора убрали 10 гирек, общая масса которых равна трети общей массы всех гирек. Можно ли оставшиеся гирьки расположить на двух чашках весов по 10 штук на каждой чашке так, чтобы весы оказались в равновесии?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Две гирьки, сумма масс которых равна 31 г, назовем парой. Наш набор распадается на 15 пар. Поскольку убрали только 10 гирек, не менее 5 пар остались нетронутыми. Возьмем 5 нетронутых пар и положим на

одну чашку весов, а остальные оставшиеся гири положим на другую. Весы окажутся в равновесии.

### Задача 6. Квадратное и круглое

В детском кафе стоят одинаковые круглые и одинаковые квадратные столы, на которых лежат одинаковые круглые и одинаковые квадратные салфетки. Известно, что круглый стол можно покрыть четырьмя квадратными салфетками, а квадратный — четырьмя круглыми салфетками.

Докажите, что диаметр круглой салфетки не меньше половины диагонали квадратного стола, а сторона квадратной салфетки не меньше радиуса круглого стола.

*Решение.* В случае квадратного стола и круглых салфеток отметим на столе пять точек: четыре угла и центр (рис. 31). Так как покрывающих салфеток четыре, то хотя бы одна из этих салфеток покрывает сразу две из этих точек. Из попарных расстояний между этими точками наименьшее — между центром и одним из углов. Это половина диагонали стола, поэтому диаметр круглой салфетки не меньше этого расстояния.

Если квадратные салфетки покрывают круглый стол (рис. 32), то они покрывают и его край — окружность. Среди салфеток найдется такая, которая покрывает не меньше четверти этой окружности. Возьмем на этой дуге две точки, отстоящие друг от друга ровно на четверть окружности. Расстояние между ними равно  $R\sqrt{2}$ , а расстояния между точками салфетки не больше диагонали

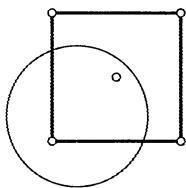


Рис. 31

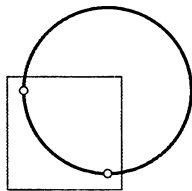


Рис. 32

этой салфетки, т. е.  $a\sqrt{2}$ , где  $a$  — сторона салфетки,  $R$  — радиус стола. Следовательно,  $a \geq R$ .

### Задача 7. Копейки в кошельке

В кошельке 50 монет на сумму 98 копеек. Можно ли с уверенностью утверждать, что деньги из кошелька можно разделить на две равные части?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Нарисуем окружность и разделим ее на 98 равных частей. Затем 50 из 98 точек деления отметим красным цветом так, чтобы 50 дуг с красными концами соответствовали по длине достоинствам 50 монет из кошелька. Легко видеть, что на окружности найдутся две диаметрально противоположные красные точки. Они и определяют разбиение монет на две группы с равными суммами.

### Задача 8. Половина площади

Две диагонали разделили правильный восьмиугольник на две трапеции и прямоугольник. Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади восьмиугольника.

*Решение.* Проведем еще две диагонали восьмиугольника (рис. 33), а в образовавшемся центральном квадрате — его диагонали. В результате восьмиугольник распадется на попарно равные части, из чего видно, что прямоугольник составляет половину его площади.

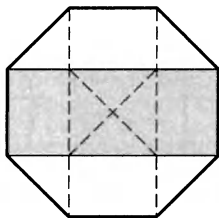


Рис. 33

**Задача 9. Вокруг стола**

Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, сколько и в первый.

*Решение.* Предположим, что все попарные «расстояния» между собеседниками изменились. Пусть собеседники поднялись со своих мест и пошли по часовой стрелке к своим новым местам. Тогда общий путь, пройденный ими, равен целому числу полных обходов вокруг стола (докажите это!). С другой стороны, по предположению все собеседники прошли разные расстояния, что возможно лишь в случае, если один из них остался на месте, второй прошел  $1/12$  полного обхода, третий —  $2/12$  полного обхода и т. д., последний прошел  $11/12$  полного обхода. Сумма этих путей равна  $66/12$ , или  $5,5$  полного обхода, что противоречит тому, что вместе они сделали целое число полных обходов.

**Задача 10. Квадрат на куски**

Квадратный лист бумаги разрезали на 6 кусков в форме выпуклых многоугольников. Пять кусков затерялись, остался один кусок в форме правильного восьмиугольника. Можно ли по одному этому восьмиугольнику восстановить исходный квадрат?

*Решение.* Первый ответ, который приходит в голову: нельзя. Ведь затерялись пять кусков, а остался один! Но правильный ответ противоположен: восстановить исходный квадрат можно! Ввиду того, что потерявшиеся куски бумаги выпуклы, ни один из них не мог примыкать к восьмиугольнику по двум его разным сторонам. Значит, затерявшихся кусков должно быть не меньше числа тех сторон восьмиугольника, которые не проходили по границе листа бумаги. Следовательно, не меньше трех

сторон лежат на границе листа. Но так как лист квадратный, эти три стороны попарно параллельны или перпендикулярны. Значит, это три стороны восьмиугольника, взятые через одну. Теперь мы видим, что наш квадрат получается из восьмиугольника приставлением четырех уголков (и, в частности, на границе листа лежат целых 4 стороны восьмиугольника). Но ведь потерялось 5 кусков!? Значит, один из уголков был как-то разрезан на две части (рис. 34).

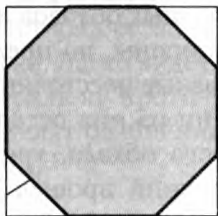


Рис. 34

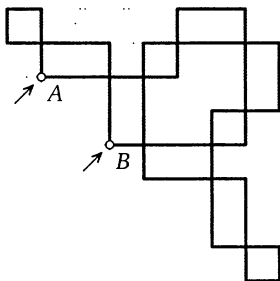


Рис. 35

### Задача 11. Два джентльмена

Два джентльмена одновременно вошли в парк: один в пункте  $A$ , а другой — в пункте  $B$  (рис. 35). Каждый решил обойти этот хорошо знакомый им парк, пройдя ровно по одному разу по каждой дорожке. Докажите, что если они все время будут двигаться с одинаковыми скоростями, то непременно встретятся.

*Решение.* Будем считать, что сторону квадратной ячейки каждый джентльмен проходит за одну минуту. Заметим, что если первый джентльмен входит в парк по дорожке  $AD$  (рис. 36), то выходит из парка по дорожке  $CA$ , и наоборот; аналогично если второй джентльмен входит в парк по дорожке  $BE$ , то выходит по дорожке  $CB$ , и наоборот.

Если первый джентльмен пошел по  $AC$ , а второй по  $BC$ , то через две минуты они встретятся в точке  $C$ . Если

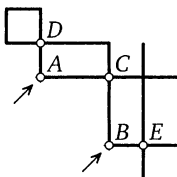


Рис. 36

первый джентльмен пошел по  $AD$ , а второй по  $BC$ , то второй обязан идти к точке  $D$ , поскольку в противном случае он не сможет туда попасть, не проходя дважды по одной дорожке, и тогда джентльмены встретятся в точке  $D$  через 5 минут после входа в парк. Маршруты, начинающиеся с  $AD$  и  $BE$ , обратны маршрутам первого случая, и джентльмены встречаются в точке  $C$  за две минуты до выхода из парка, а маршруты, начинающиеся с  $AC$  и  $BE$ , обратны маршрутам второго случая, и встреча произойдет за 5 минут до выхода джентльменов из парка.

### Задача 12. Тройка чисел

Целые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $ab + bc + ca = 0$ . Докажите, что число  $abc$  может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

*Решение.* Покажем, что если числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  не имеют общего делителя, то число  $abc$  является полным квадратом. Пусть  $p$  — простое число и  $c$  делится на  $p^n$ , тогда из равенства  $ab = -c(a + b)$  следует, что одно из чисел  $a$  и  $b$  делится на  $p^n$ , а второе не делится на  $p$ ; значит,  $abc$  делится на  $p^{2n}$ . Аналогично рассуждая про делители чисел  $a$  и  $b$ , получаем, что любое простое число входит в произведение  $abc$  в четной степени. Если у чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  есть общий делитель, то он войдет в произведение в кубе.



---

## МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Не только в шахматы, шашки или... домино можно играть на шахматной доске — на ней можно играть в математику. К такой игре я и приглашаю читателя.

### Задача 1. Из угла в угол

Шахматный конь начинает свой маршрут из левого нижнего угла доски, а кончает его в правом верхнем. Может ли конь при этом побывать на всех полях доски в точности по одному разу?

*Ответ:* не может.

*Решение.* При каждом ходе конь меняет цвет поля. Так как начальное и конечное поля одного цвета, то конь сделает четное число ходов. Но это противоречит тому, что коню надо сделать 63 хода, чтобы побывать на каждом поле.

### Задача 2. Лишняя фигура

На шахматной доске расставлено 15 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура. Докажите, что с доски можно убрать одну фигуру так, что оставшиеся фигуры будут вновь удовлетворять тому же требованию: в каждом горизонтальном ряду и в каждом вертикальном ряду стоит хотя бы одна фигура.

*Решение.* Если среди 15 фигур найдется такая фигура, что и в вертикальном, и в горизонтальном рядах клеток, в которых она стоит, есть еще по одной фигуре, то эту фигуру можно убрать. Тогда оставшиеся 14 фигур будут удо-

влетворять нужному требованию. Допустим, что такая фигура не найдется. Тогда для каждой из 15 фигур можно указать либо горизонтальный, либо вертикальный ряд, в котором она стоит в одиночестве. Это означает, что в сумме найдутся 15 горизонтальных и вертикальных рядов, в каждом из которых стоит по одной фигуре. Но так как всего таких рядов 16, то либо все горизонтальные, либо все вертикальные ряды таковы, что в них стоит по одной фигуре. Это означает, что на доске стоит только 8 фигур, — противоречие с условием задачи. Итак, фигура, которую можно убрать, найдется. На рис. 37 показано расположение 14 фигур, доказывающее, что в условии задачи число 15 нельзя заменить на 14.

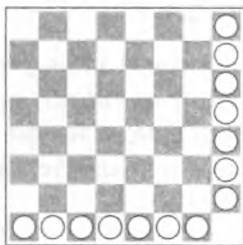


Рис. 37

### Задача 3. Костяшки домино

Все поля шахматной доски покрыли 32 костяшками домино. При этом каждая костяшка покрыла в точности два поля. Некоторые из этих костяшек расположились горизонтально, некоторые вертикально. Верно ли, что при любом покрытии шахматной доски 32 костяшками домино получится четное число вертикально расположенных и четное число горизонтально расположенных костяшек?

*Ответ:* верно.

*Решение.* Так как в сумме у нас вертикально и горизонтально расположенных костяшек 32, достаточно убедиться в том, что четным будет число костяшек, распо-

ложенных вертикально. Для этого окрасим горизонтальные ряды полей шахматной доски через один в синий цвет. Каждая вертикальная костяшка покрывает одно поле на какой-либо синей полосе.

Число вертикальных костяшек, которые покрывают по одному полю на любой фиксированной синей полосе, должно быть четным. Значит, общее число вертикально расположенных костяшек четно.

#### Задача 4. Кони на доске

Какое наибольшее число полей можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было пройти ровно двумя ходами коня?

*Ответ:* 8.

*Решение.* На отмеченные поля поставим коней. Самый левый конь отстоит от самого правого на два хода, как и самый верхний от самого нижнего. Отсюда следует, что все кони находятся в квадрате  $5 \times 5$  клеток и их не больше восьми (рис. 38).

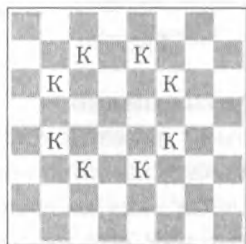


Рис. 38

#### Задача 5. Хорошо, что пополам!

Шахматную доску покрыли 32 костяшками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костяшек покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом одни костяшки покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку

ниже ее. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костяшек будет поровну.

*Решение.* Количество костяшек домино, лежащих целиком ниже диагонали, равно 12, поскольку их количество равно количеству черных полей доски под диагональю, отмеченных на рис. 39. Эти костяшки покрывают 9 белых полей, лежащих внутри ступенчатой фигуры, и, следовательно, 3 поля вне ее. Значит, остальные 4 белых поля между фигурой и диагональю покрываются костяшками, каждая из которых покрывает и диагональную клетку.

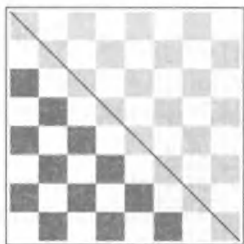


Рис. 39

	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3
	2		2		2		2
1	3	1	3	1	3	1	3

Рис. 40

### Задача 6. Восемь ладей

На шахматной доске расставлено 8 ладей так, что никакие две из них не бьют друг друга. Докажите, что на черных клетках доски стоит четное число ладей.

*Решение.* В черных клетках вертикальных рядов с нечетными номерами поставим цифру 1, в остальные черные клетки поставим цифру 2. В белые клетки горизонтальных рядов с нечетными номерами поставим цифру 3 (рис. 40). Пусть на полях 1-го типа стоят  $n$  ладей, на полях 2-го типа —  $m$  ладей, на полях 3-го типа —  $k$  ладей. В силу условия задачи на полях 1-го и 3-го типов вместе стоит 4 ладьи:  $n + k = 4$ . На полях 2-го и 3-го типов вместе стоит тоже 4 ладьи:  $m + k = 4$ . Отсюда следует, что  $n = m$ , и, значит, число ладей на черных полях равно  $2n$ .

**Задача 7. Считай монеты**

На каждую клетку шахматной доски положили по несколько монет так, что суммы на каждых двух клетках, имеющих общую сторону, отличаются на копейку. Известно также, что на одной из клеток лежит 3 копейки, а на другой — 17 копеек. Какую сумму составляют монеты, лежащие на обеих диагоналях?

*Решение.* Заметим, что условия задачи выполнимы лишь в том случае, если указанные суммы в 3 и 17 копеек лежат в противоположных углах шахматной доски. Тогда заполнение доски производится однозначно (рис. 41), и искомая сумма равна 160 копейкам.

3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13	14	15
9	10	11	12	13	14	15	16
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 41

**Задача 8. Равенство сумм**

На шахматной доске горизонтали и вертикали пронумерованы числами от 1 до 8. На ней расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Для каждой ладьи вычислим произведение номеров горизонтали и вертикали, на которых она стоит. Возьмем сумму этих произведений. Докажите, что для расстановки ладей, центрально-симметричной данной, полученная аналогичным способом сумма равна первоначальной.

*Решение.* Пусть ладья, стоящая на 1-й горизонтали, стоит на вертикали с номером  $a_1$ , ладья, стоящая на 2-й горизонтали, стоит на вертикали с номером  $a_2$  и т. д., ладья, стоящая на 8-й горизонтали, стоит на вертикали

с номером  $a_8$ . Сумма произведений номеров горизонталей и вертикалей равна  $1a_1 + 2a_2 + \dots + 8a_8$ , а для центрально-симметричного расположения ладей такая сумма равна

$$8(9 - a_1) + 7(9 - a_2) + \dots + 1(9 - a_8).$$

Разность этих чисел равна

$$9(a_1 + a_2 + \dots + a_8) - 9(8 + 7 + \dots + 1).$$

Но сумма номеров вертикалей равна сумме целых чисел от 1 до 8. Следовательно, эта разность равна нулю.

### Задача 9. Парадокс избытка

На шахматной доске расположены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не меньше двух фигур.

а) Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фигуре?

б) Исследуйте этот же вопрос в случае, когда на каждой горизонтали и вертикали первоначально стоят ровно две фигуры.

Ответ: а) не всегда; б) всегда.

Решение. Если на всех 28 крайних клетках доски расставить 28 фигур, то из них нельзя выбрать 8 фигур с требуемым свойством (рис. 42).

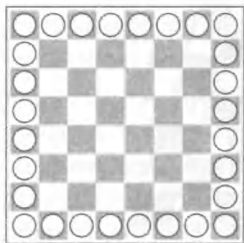


Рис. 42

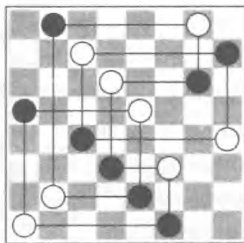


Рис. 43

б) Из 16 фигур выберем 8 фигур с требуемым свойством. Все фигуры на шахматной доске соединим замкнутыми ломаными линиями, звенья которых параллельны сторонам доски. В каждой ломаной оставим все фигуры через одну по обходу ломаной (рис. 43).

### Задача 10. Косая доска

Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

*Решение.* Поскольку середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, его средние линии в точке пересечения делятся пополам. Применяя это соображение к образовавшимся четырехугольникам, получим то же утверждение для их средних линий и т. д., так что каждый из отрезков, соединяющих точки деления на противоположных сторонах данного выпуклого четырехугольника, оказывается разбитым на восемь равных частей. Рассмотрим теперь «удвоенную клетку» разбиения (размером  $2 \times 2$ ; на рис. 44 обведена). То, что суммы площадей черных и белых полей этой «удвоенной клетки» равны, очевидно (площади соответ-

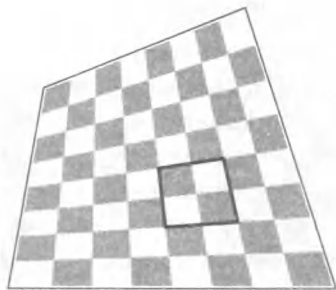


Рис. 44

ствующих черных и белых треугольников с общей вершиной и попарно равными основаниями одинаковы). Из этого замечания следует утверждение задачи.

### Задача 11. Найдется жук

На каждой клетке шахматной доски сидит по жуку. Жуки взлетели и снова сели в клетки шахматной доски. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.) Докажите, что найдется жук, который вернулся на прежнее место или перелетел на соседнюю клетку.

*Решение.* При доказательстве мы будем пользоваться «шахматным» расстоянием между клетками доски: *расстоянием между клетками  $A$  и  $B$  назовем наименьшее число ходов, которое потребуется шахматному королю, чтобы пройти из  $A$  в  $B$ .* Из условия задачи вытекает, что расстояния между жуками после перелета не увеличиваются.

Прямоугольник, образованный клетками доски, будем называть *инвариантным*, если любой жук из этого прямоугольника перелетает в клетку этого же прямоугольника. Например, вся доска является инвариантным прямоугольником. Рассмотрим инвариантный прямоугольник с наименьшим числом клеток и докажем, что его размеры, как вертикальный, так и горизонтальный, не превышают двух. Тогда ясно, что любой жук из этого прямоугольника либо останется на месте, либо перелетит в соседнюю клетку.

Предположим противное: наименьший инвариантный прямоугольник  $\Pi$  имеет размеры  $a \times b$ , где  $a \geq b$  и  $a > 2$ . Докажем, что в этом случае внутри него можно выбрать еще меньший инвариантный прямоугольник.

Разберем сначала случай  $a > b$ . Назовем *границей* прямоугольника две крайние полосы длины  $b$ , а оставшую-



ся часть назовем *внутренностью* (рис. 45, а). Заметим, что расстояние от любой внутренней клетки до любой другой клетки прямоугольника  $\Pi$  не больше, чем  $a - 2$ . Если жуки из всех внутренних клеток перелетели во внутренние клетки, то прямоугольник, составленный из внутренних клеток, будет инвариантным, что и требовалось. Пусть теперь жук из некоторой внутренней клетки  $A$  перелетел в граничную клетку  $B$ . Рассмотрим прямоугольник  $M$ , составленный из тех клеток прямоугольника  $\Pi$ , расстояние от которых до клетки  $B$  не больше, чем  $a - 2$ . Поскольку все жуки прямоугольника  $\Pi$  находились на расстоянии не большем чем  $a - 2$  от клетки  $A$ , то все они перелетели в прямоугольник  $M$ . Поэтому прямоугольник  $M$  является инвариантным прямоугольником. Так как он содержит меньше клеток, чем  $\Pi$ , то и в этом случае все доказано.

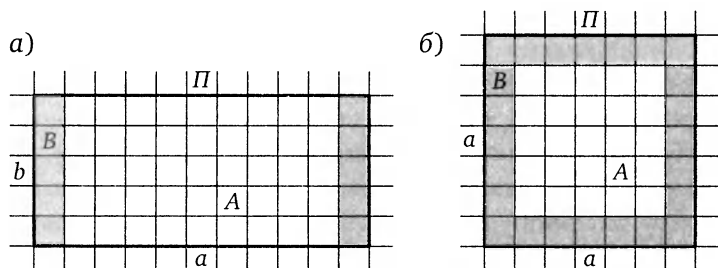


Рис. 45

Осталось разобрать случай  $a = b > 2$ . В этом случае границей назовем край этого квадрата, а внутренностью все остальные клетки квадрата (рис. 45, б). Дальше проходят те же рассуждения, что и выше.

## В ПОИСКАХ УГЛА

Многоликость основных геометрических понятий раскрывается в задачах: вдруг на время привычное становится непривычным, а знакомое — незнакомым. Тогда выясняется, что никакое понятие не живет отдельно от других, а обнаруживает свои свойства через них и вместе с ними. Сказанное в полной мере относится к понятию угла, которое оживает и обнаруживает себя во взаимосвязи и столкновении с другими понятиями в конкретных геометрических ситуациях и композициях.

### Задача 1. Постоянство угла

На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекла границу полосы в четырех точках (рис. 46). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом в  $45^\circ$ .

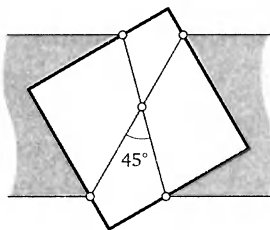


Рис. 46

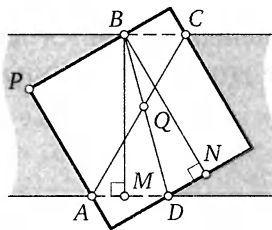


Рис. 47

*Решение.* Прямоугольные треугольники  $BMD$  и  $BND$  равны, так как  $BM = BN$  (рис. 47), а значит,  $\angle ADB =$

$= \angle BDN$ . Аналогично  $\angle PAC = \angle CAD$ . Но тогда  $\angle QAD + \angle QDA = 135^\circ$ , так как  $\angle PAD + \angle NDA = 270^\circ$ . Значит, третий угол в треугольнике  $AQD$ , т. е. угол  $AQD$ , равен  $45^\circ$ .

### Задача 2. Равенство углов

В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точка  $N$  — середина стороны  $CD$ ,  $P$  — точка пересечения отрезков  $DM$  и  $BN$  (рис. 48). Докажите, что угол  $MAN$  равен углу  $BPM$ .

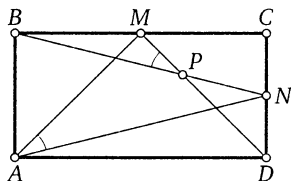


Рис. 48

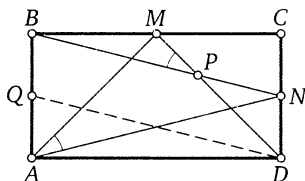


Рис. 49

*Решение.* Пусть точка  $Q$  — середина стороны  $AB$  (рис. 49); тогда  $\angle QDM = \angle MAN$  и  $\angle QDM = \angle BPM$ , а значит,  $\angle MAN = \angle BPM$ .

### Задача 3. Найдите угол

Два луча, выпущенные из вершин равностороннего треугольника, разрезали его на четыре части (рис. 50). При этом оказалось, что площадь закрашенного треугольника равняется площади четырехугольника. Найдите угол между этими лучами.

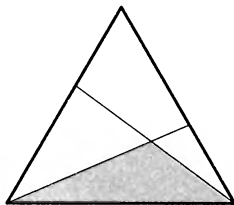


Рис. 50

*Решение.* У треугольников  $AMC$  и  $BNC$  (рис. 51) равные площади,  $AC = BC$  и  $\angle MCA = \angle NBC$ . Отсюда следует, что названные треугольники равны и один из них повернут относительно другого на  $120^\circ$ . Значит, угол между лучами равен  $120^\circ$ .

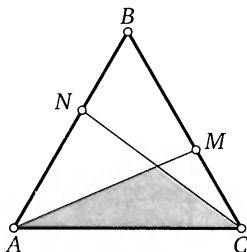


Рис. 51

#### Задача 4. Всегда равносторонний

В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ ,  $AM$  и  $CN$  — его высоты, а  $Q$  — середина стороны  $AC$ . Докажите, что треугольник  $MNQ$  равносторонний.

*Решение.* Так как  $AM$  и  $CN$  — высоты, то точки  $M$  и  $N$  лежат на полуокружности с диаметром  $AC$  и центром в точке  $Q$  (рис. 52). Следовательно, отрезки  $QM$  и  $QN$  равны как радиусы этой окружности. Угол  $NAM$  равен  $30^\circ$  как второй острый угол прямоугольного треугольника  $AMB$  с углом  $ABM$ , равным  $60^\circ$ . Угол  $NQM$  опирается на ту же дугу, что и угол  $NAM$ , но является центральным

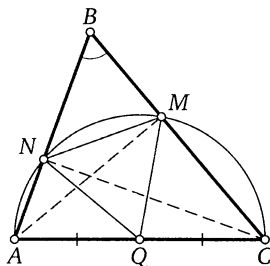


Рис. 52

и потому вдвое больше его, т. е. он равняется  $60^\circ$ . Из этих утверждений следует, что треугольник  $MNQ$  равносторонний.

### Задача 5. Опять сорок пять

В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катетах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM = CB$  и  $MB = CN$ . Докажите, что угол между отрезками  $AN$  и  $CM$  равен  $45^\circ$  (рис. 53).

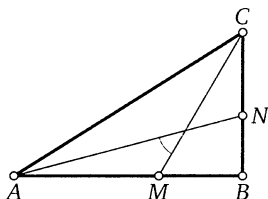


Рис. 53

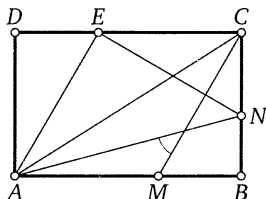


Рис. 54

*Решение.* Рассмотрим прямоугольник  $ABCD$  (рис. 54) и в нем отрезок  $AE$ , параллельный отрезку  $CM$  (точка  $E$  лежит на стороне  $CD$ ). Если соединить отрезком точки  $E$  и  $N$ , то полученный прямоугольный треугольник  $ECN$  будет равен треугольнику  $ADE$  (по катетам), следовательно, равны их гипотенузы  $AE$  и  $EN$ . Углы  $DEA$  и  $CEN$  в сумме составляют прямой угол, следовательно, угол  $AEN$  прямой и треугольник  $AEN$  равнобедренный прямоугольный. Значит, угол  $EAN$  равен  $45^\circ$ , а он равен углу между отрезками  $AN$  и  $CM$ .

### Задача 6. Сумма углов

От квадрата отрезали прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма углов, под которыми видна из трех оставшихся вершин его гипотенуза, равна  $90^\circ$  (рис. 55).

*Решение.* Так как углы  $NAD$  и  $MBA$  равны, а также углы  $MCD$  и  $NBC$  равны, то сумма углов при вершинах  $A$ ,  $B$  и  $C$  равна углу  $ABC$ , т. е.  $90^\circ$ .

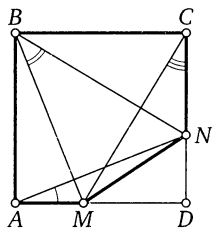


Рис. 55

### Задача 7. Пересечение квадратов

Два квадрата в пересечении дают восьмиугольник (рис. 56). Две диагонали этого восьмиугольника делят его на четыре четырехугольника. Докажите, что эти диагонали перпендикулярны.

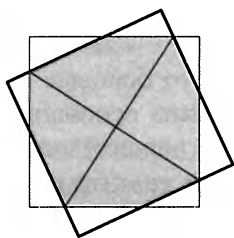


Рис. 56

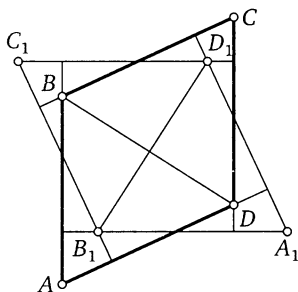


Рис. 57

*Решение.* Рассмотрим два параллелограмма:  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$  (рис. 57). Стороны  $AB$  и  $CD$  перпендикулярны сторонам  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$ , а стороны  $BC$  и  $DA$  — сторонам  $B_1C_1$  и  $D_1A_1$ . Кроме того, высоты этих параллелограммов соответственно равны и перпендикулярны, откуда следует, что эти параллелограммы равны и их диагонали (отрезки, указанные в условии задачи) перпендикулярны.

### Задача 8. Углы в четырехугольнике

В четырехугольнике  $ABCD$  сумма углов  $ABD$  и  $BDC$  равняется  $180^\circ$ , а стороны  $AD$  и  $BC$  равны (рис. 58). Дока-

жите, что углы при вершинах  $A$  и  $C$  такого четырехугольника равны.

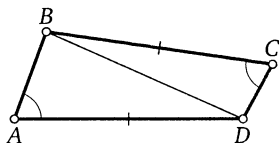


Рис. 58

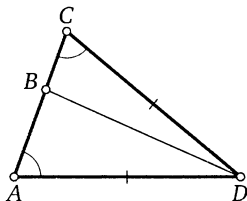


Рис. 59

*Решение.* Разрежем четырехугольник по диагонали  $BD$  и, перевернув треугольник  $BCD$ , вновь приложим его к диагонали  $BD$  (рис. 59). Получился равнобедренный треугольник  $ADC$  ( $AD = DC$ ), поэтому угол  $A$  равен углу  $C$ .

### Задача 9. Две трапеции

Имеются две трапеции такие, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой. Докажите, что обе трапеции — параллелограммы<sup>1</sup>.

*Решение.* Покажем, что в любой трапеции, не являющейся параллелограммом, разность боковых сторон меньше разности оснований. В самом деле, если  $E$  — такая точка на большем основании  $CD$  трапеции  $ABCD$ , что  $ABCE$  — параллелограмм (рис. 60), то  $CD - AB = DE \geq$

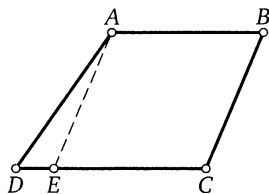


Рис. 60

<sup>1</sup>Условие задачи подразумевает, что параллелограмм является частным случаем трапеции. Именно такой подход был отражен в школьных учебниках под редакцией А. Н. Колмогорова.

$\geq |AC - AE| = |AD - BC|$ , так как каждая сторона в треугольнике больше модуля разности двух других сторон. Равенство возможно лишь тогда, когда  $ABCD$  — параллелограмм. Отсюда следует утверждение задачи.

### Задача 10. Треугольник в ромбе

В ромбе  $ABCD$  угол  $A$  равен  $60^\circ$ , точка  $N$  лежит на стороне  $AD$ , а точка  $M$  — на стороне  $CD$ . Докажите, что если один из углов треугольника  $BMN$  равен  $60^\circ$ , то и остальные углы тоже равны  $60^\circ$ .

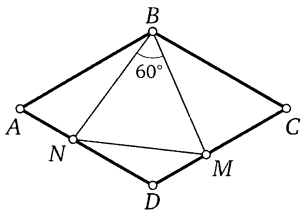


Рис. 61

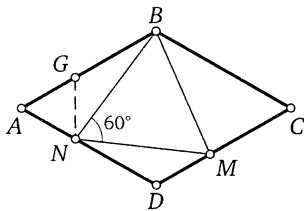


Рис. 62

*Решение.* Если  $\angle MBN = 60^\circ$  (рис. 61), то треугольник  $ABN$  равен треугольнику  $DBM$ , так как  $AB = DB$ ,  $\angle BAN = \angle BDM$ , а углы  $ABN$  и  $DBM$  равны как дополняющие до  $60^\circ$  угол  $NBD$ . Поэтому  $BN = BM$  и треугольник  $BMN$  равносторонний.

Пусть теперь  $\angle BNM = 60^\circ$ . Отложим на стороне  $AB$  отрезок  $AG = AN$  (рис. 62) и докажем, что треугольники  $GBN$  и  $DNM$  равны. В самом деле,  $BG = DN$ ,  $\angle BGN = \angle NDM = 120^\circ$ , а равенство углов  $GBN$  и  $MND$  следует из равенств  $\angle BND = \angle BAN + \angle GBN = \angle BNM + \angle MND$ ,  $\angle BAN = \angle BNM = 60^\circ$ . Итак,  $BN = NM$ , что и требовалось.

### Задача 11. Равносторонние треугольники

Равносторонние треугольники  $ABC$  и  $PQR$  расположены так, что вершина  $C$  лежит на стороне  $PQ$ , а вершина  $R$  — на стороне  $AB$  (рис. 63). Докажите, что четырехугольник  $ABPQ$  — трапеция.



*Решение.* Так как  $\angle RAC = \angle RQC$ , то около четырехугольника  $ARCQ$  (см. рис. 63) можно описать окружность. Но тогда  $\angle CRQ = \angle CAQ$ . Аналогично  $\angle CBP = \angle CRP$ . Значит,  $\angle CAQ + \angle CBP = 60^\circ$ . Отсюда следует, что  $\angle PBR + \angle RAQ = 180^\circ$ , и, следовательно,  $AQ \parallel BP$ .

### Задача 12. На клетчатой бумаге

На клетчатой бумаге отмечены три узла  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Угол  $ABC$  равен  $45^\circ$ , а на отрезках  $AB$  и  $BC$  нет узлов, кроме их концов. Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

*Решение.* Пусть  $BA \geq BC$ , тогда на луче  $BA$  возьмем такую точку  $D$ , что отрезок  $CD$  перпендикулярен и равен  $BC$ . Тогда точка  $D$  тоже является узлом клетчатой бумаги. Точка  $D$  по условию не может лежать внутри отрезка  $BA$ , значит, узел  $A$  лежит на отрезке  $BD$ , при этом  $BA > AD$ . Но тогда точка  $E$  отрезка  $BA$ , такая, что  $EA = AD$ , тоже является узлом, что противоречит условию. Значит, точка  $D$  совпадает с  $A$  и треугольник  $ABC$  прямоугольный.

### Задача 13. В равнобедренном треугольнике

На боковой стороне  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $AN = MN$  и  $\angle BAM = \angle NAC$  (рис. 64). Докажите, что  $\angle MAC = 60^\circ$ .

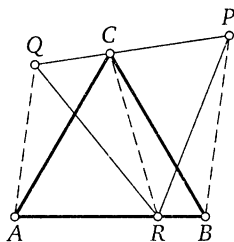


Рис. 63

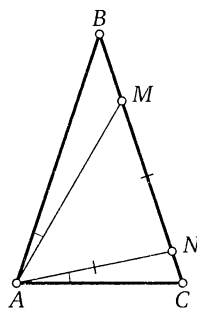


Рис. 64

*Решение.* Запишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned}\angle MAC &= \angle AMN + \angle NAC = 2\angle NAC + \angle ABM = \\ &= 2\angle NAC + 180^\circ - 2(\angle NAC + \angle MAC).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\angle MAC = 180^\circ - 2\angle MAC, \quad \text{или} \quad \angle MAC = 60^\circ.$$

#### **Задача 14. Средний угол**

Из центра окружности выходят  $n$  радиусов, концы которых делят ее на  $n$  равных дуг. Некоторые радиусы синие, остальные красные. Подсчитаем сумму углов «красный радиус — синий радиус» (каждый угол вычисляется от красного радиуса к синему против часовой стрелки) и разделим ее на общее число всех таких углов. Докажите, что полученная величина «среднего угла» равна  $180^\circ$ .

*Решение.* При повороте окружности на любой угол столько красных радиусов перейдут в синие, сколько синих радиусов перейдут в красные. Значит, сумма всех углов «красный радиус — синий радиус» будет равна сумме всех углов «синий радиус — красный радиус», так как эти суммы будут состоять из одних и тех же слагаемых. Но общая сумма всех названных углов (и «красно-синих», и «сине-красных») равна  $360^\circ \cdot k \cdot m$ , где  $k$  — число красных радиусов, а  $m$  — число синих. Значит, сумма всех углов «красный радиус — синий радиус» равна  $180^\circ \cdot k \cdot m$ , а «средний угол» равен  $180^\circ$ .

## ОПЯТЬ ГЕОМЕТРИЯ НОЖНИЦ

Кроить, резать, клеить и, безусловно, соображать необходимо, решая задачи по «геометрии ножниц». Тот элемент нестандартности, который присутствует в них, возбуждает свежий интерес и желание их решать. А наглядность и минимум знаний, достаточных для их решения, позволяют предлагать эти задачи школьникам 6—8 классов.

### Задача 1. Кубическая коробка

Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты площадью 1 каждый. Разрежьте коробку на три куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат площадью 5.

*Решение.* Сначала развернем коробку на плоскость, сделав соответствующие разрезы, а потом ототрежем два треугольника (рис. 65). Приставив их к оставшейся части, получаем нужный квадрат.

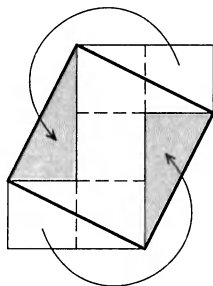


Рис. 65

**Задача 2. Суммы периметров**

Два взаимно перпендикулярных отрезка разделили квадрат на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма периметров любых двух несоседних из них равна сумме периметров двух других (рис. 66).

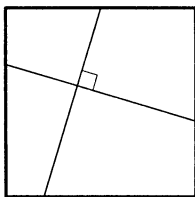


Рис. 66

*Решение.* Один из разделяющих отрезков перенесем параллельно себе так, чтобы он прошел через центр квадрата; при этом сумма периметров несоседних четырехугольников останется прежней. То же самое сделаем со вторым отрезком. Но два отрезка, взаимно перпендикулярные и проходящие через центр квадрата, делят его на четыре равных четырехугольника. Теперь рассуждение легко закончить самостоятельно.

**Задача 3. Можно или нельзя?**

Имеется кубик и шесть одинаковых крестообразных фигур, вырезанных из бумаги (рис. 67). Площадь каждой бумажной фигуры равна площади одной грани кубика.

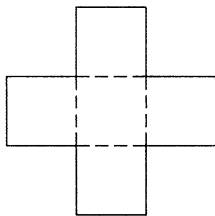


Рис. 67

Можно ли этими кусками бумаги целиком оклеить поверхность кубика?

*Ответ:* можно.

*Решение.* На каждую грань кубика наклеивается одна из фигур так, как показано на рис. 68, а затем все уголки загибаются (рис. 69).

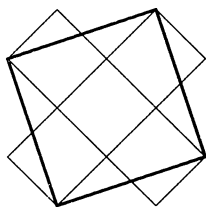


Рис. 68

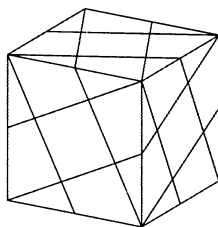


Рис. 69

#### Задача 4. Один лишний

Правильный треугольник  $ABC$  полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник  $ABC$  можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками.

*Решение.* Возьмем в треугольнике  $ABC$  шесть точек — вершины и середины сторон. Хотя бы две из них должны накрываться одним из пяти меньших треугольников, следовательно, стороны такого треугольника не меньше половины стороны треугольника  $ABC$ . Поэтому каждый из четырех правильных треугольников, на которые средние линии разбивают треугольник  $ABC$ , можно покрыть одним из данных пяти треугольников.

#### Задача 5. Бумажный тетраэдр

Правильный тетраэдр склеили из бумаги. Можно ли его разрезать так, чтобы получилось бумажное цилиндрическое кольцо, высота которого равна половине ребра тетраэдра?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Разрезы производим по четырем высотам граней тетраэдра, как показано на рис. 70.

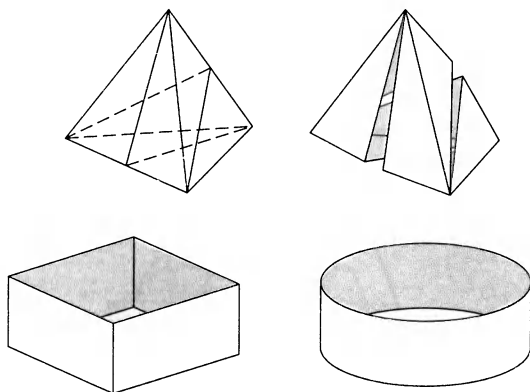


Рис. 70

### Задача 6. Три треугольника

Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольных куска. Площадь одного из них оказалась равной полусумме площадей двух других кусков. Как относятся площади полученных кусков?

*Решение.* Как бы мы ни разрезали прямоугольник на три треугольника, площадь одного из них будет равна половине площади прямоугольника. Если мы обозначим площадь прямоугольника через  $S$ , а площадь того треугольника, о котором говорится в условии, через  $x$ , то площади двух других треугольников будут составлять  $S/2$  и  $S/2 - x$ . По условию  $x = [S/2 + (S/2 - x)]/2$ . Следовательно,  $3x = S$ ,  $x = S/3$ ,  $S/2 - x = S/6$ . Таким образом, площади треугольников относятся как  $S/6 : S/3 : S/2 = 1 : 2 : 3$ .

### Задача 7. Половина площади четырехугольника

Выпуклый четырехугольник распался на четыре треугольника, когда точку пересечения его средних линий соединили со всеми вершинами. Докажите, что сумма

площадей двух несоседних треугольников равна половине площади четырехугольника.

*Решение.* Разрежем четырехугольник по средним линиям и сложим полученные четырехугольники так, чтобы вершины исходного четырехугольника слились в одну точку, а в итоге получился параллелограмм (рис. 71). В параллелограмме сумма площадей закрашенных треугольников равна половине его площади.

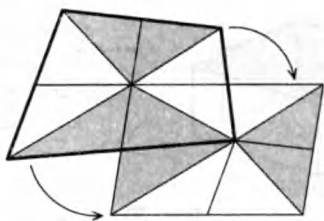


Рис. 71

### Задача 8. В два слоя

На листе бумаги размером  $3 \times 4$  сделали надрезы так, что он при этом не распался, но им стало возможно оклеить кубик  $1 \times 1 \times 1$  в два слоя. Как это сделали?

*Решение.* Вот один из вариантов решения. Разрежем прямоугольный лист  $3 \times 4$  так, как показано на рис. 72, и, перегнув бумагу в нужных местах, положим закрашенные прямоугольники на белые. В результате получим двухслойную развертку куба.

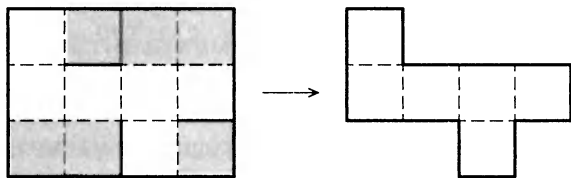


Рис. 72

**Задача 9. Треугольник в шестиугольнике**

Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Взяв три вершины шестиугольника через одну, получим треугольник. Докажите, что площадь этого треугольника равна половине площади шестиугольника.

*Решение.* На рис. 73 показано, как шестиугольник разрезается на три параллелограмма. При этом половина площади каждого параллелограмма принадлежит треугольнику.

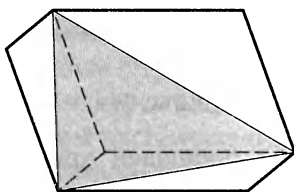


Рис. 73

**Задача 10. Клетчатый кубик**

Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из двадцати четырех полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

*Решение.* Разрежем поверхность кубика по красным линиям. Если при этом она распадется на две или больше частей, то это значит, что на поверхности кубика есть замкнутые линии, состоящие только из красных отрезков. Если кубик не распался на части (всего один кусок), то будем отрезать квадратики по синим линиям. Чтобы разрезать весь кусок из 24 квадратики на отдельные квадратики, необходимо сделать не меньше 23 разрезов, но у нас всего 22 синих отрезка. Следовательно, предположение о том, что после разрезания по красным отрезкам кубик не распался на части, неверно.



**Задача 11. Равенство площадей**

В выпуклом четырехугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рис. 74. Докажите, что площадь закрашенного четырехугольника равна сумме площадей закрашенных треугольников.

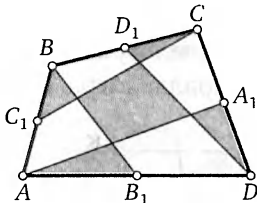


Рис. 74

*Решение.* Сумма площадей треугольников  $AA_1D$  и  $CC_1B$  равна половине площади четырехугольника  $ABCD$ . Аналогично сумма площадей треугольников  $BB_1A$  и  $DD_1C$  равна половине площади четырехугольника  $ABCD$ . Значит, сумма площадей четырех упомянутых треугольников равна площади четырехугольника  $ABCD$ . Поэтому та часть площади, которую эти треугольники покрывают дважды (а это закрашенные треугольники), равна той части площади, которую они вовсе не покрывают (а это закрашенный четырехугольник).

**Задача 12. Параллелограмм для цилиндров**

Два разных цилиндра имеют одинаковую боковую поверхность, равную 100, а произведение их высот меньше 100. Докажите, что можно вырезать из бумаги параллелограмм площадью 100, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндра.

*Решение.* Вырежем параллелограмм площадью 100, одна высота которого равна высоте первого цилиндра, а вторая — высоте второго цилиндра. Таким параллелограммом можно оклеить боковую поверхность любого из двух цилиндров (рис. 75).

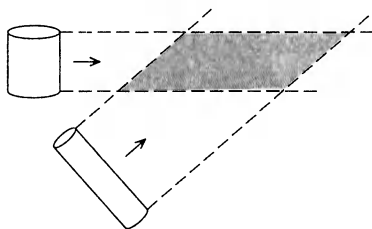


Рис. 75

### Задача 13. Девять карточек

Из девяти одинаковых квадратных карточек сначала сложили квадрат, а потом пирамиду (рис. 76). Оказалось, что при этом всякие две карточки, которые имели две общие вершины в первом расположении, сохранили одну из них общей (ту же самую) и во втором расположении. Покажите, как это было сделано.

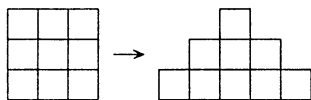


Рис. 76

*Решение.* Без слов отсылаем вас к рис. 77. Обратите внимание на то, что при последней процедуре «перекладывания» три карточки перевортываются и обращаются к нам «изнанкой».

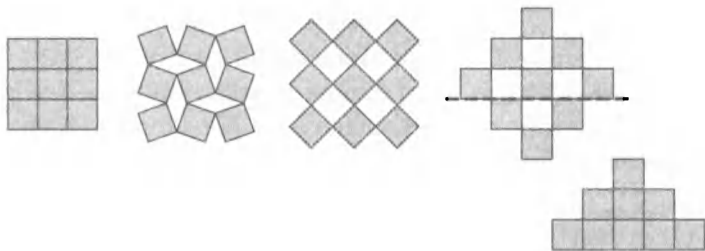


Рис. 77

**Задача 14. Лист фанеры**

Лист фанеры размером  $10 \times 10$  дм распилили на 20 прямоугольников, стороны которых составляют целое число дециметров. Оказалось, что общая длина пропилов равна 100 дм. Докажите, что у каждого из этих прямоугольников найдется сторона длиной 1 дм.

*Решение.* Заметим сначала, что площадь прямоугольника не меньше чем  $p - 1$  ( $p$  — полупериметр прямоугольника), если каждая его сторона не меньше 1. Действительно, если  $a$  — бо́льшая сторона прямоугольника, то  $p \geq a + 1$ . Умножив обе части неравенства на число  $a - 1$ , получим неравенство

$$pa - p \geq a^2 - 1.$$

Оно равносильно неравенству

$$a(p - a) \geq p - 1,$$

где в левой части стоит площадь прямоугольника, а в правой — указанная оценка. Заметьте, что неравенство превращается в равенство только в том случае, если меньшая сторона прямоугольника равна 1.

Из того, что сумма площадей прямоугольников равна  $100 \text{ дм}^2$ , следует, что сумма их полупериметров не больше 120 дм, а сумма периметров не больше 240 дм и равняется 240 дм, если в каждом прямоугольнике меньшая сторона равна 1 дм. Но сумма периметров прямоугольников действительно равна 240 дм, поскольку она равна сумме периметра листа фанеры (40 дм) и удвоенной длины пропилов (200 дм).

---

## ЧИСЛА И ФИГУРЫ

Числа и фигуры не существуют в математике порознь. Самым ярким примером из истории математики, подтверждающим этот факт, является открытие иррационального числа. Оно было сделано благодаря внимательному отношению к фигуре — квадрату: оказалось, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.

### Задача 1. Такой был год!

Докажите, что число<sup>1</sup>  $1992!! - 1991!!$  делится на 1993.

*Решение.* Поскольку

$$1992!! = (1993 - 1)(1993 - 3)(1993 - 5) \cdot \dots \cdot (1993 - 1991),$$

остаток от деления этого числа на 1993 равен остатку от деления произведения

$$(-1)(-3)(-5)\dots(-1991) = (-1)^{1992/2}1991!! = 1991!!$$

на 1993. Следовательно,  $1992!! - 1991!!$  делится нацело на 1993.

### Задача 2. Круглые промокашки

На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса произвольной формы. Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ею можно накрыть кляксу на этом куске, не выходя за

---

<sup>1</sup>Двойным восклицательным знаком после натурального числа  $N$  принято обозначать произведение всех натуральных чисел, не превосходящих  $N$  и имеющих ту же четность, что и  $N$ . Например,  $9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$ ,  $10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$ .

его пределы. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для любых двух из данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков.

*Решение.* С каждым куском бумаги свяжем свой отрезок  $[R_1, R_2]$  на прямой, где  $R_1$  — наименьший радиус подходящей для этого куска промокашки из набора, а  $R_2$  — наибольший радиус подходящей промокашки. Заметим, что всякая промокашка из набора промежуточного радиуса  $R$ ,  $R_1 < R < R_2$ , тоже является подходящей для этого куска. Из условия задачи следует, что все такие отрезки имеют общую точку. Действительно, самый правый из их левых концов  $\bar{R}$  принадлежит всем отрезкам. Поэтому промокашка радиусом  $\bar{R}$  из набора является подходящей для всех кусков.

### Задача 3. Сумма квадратов

Среди первых 100 натуральных чисел взяты 50 чисел таких, что их сумма равна 2525, а сумма никаких двух из них не равна 101. Найдите сумму квадратов выбранных чисел.

*Решение.* Для начала заметим, что сумма выбранных чисел равна половине суммы всех натуральных чисел от 1 до 100. Покажем, что сумма квадратов выбранных чисел равна половине суммы квадратов всех натуральных чисел от 1 до 100, т. е. равна 169 175. В самом деле, если  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  — выбранные числа, а  $b_1, b_2, \dots, b_{50}$  — остальные натуральные числа, не превосходящие 100, то

$$\begin{aligned} b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{50}^2 &= \\ &= (101 - a_1)^2 + (101 - a_2)^2 + \dots + (101 - a_{50})^2 = \\ &= 50 \cdot 101^2 - 2 \cdot 101(a_1 + a_2 + \dots + a_{50}) + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2 = \\ &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{50}^2. \end{aligned}$$

Итак, сумма квадратов наших чисел равна 169 175. Докажите самостоятельно, что среди первых 100 натуральных чисел можно многими способами выбрать 50 чисел, удовлетворяющих условию задачи.

#### Задача 4. Равнобедренный треугольник

Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания треугольника — четное число.

*Решение.* Параллельно перенесем данный треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC$ , так, чтобы вершина  $A$  попала в начало координат. Тогда координаты  $(b_1, b_2)$  и  $(c_1, c_2)$  вершин  $B$  и  $C$  останутся целыми. Из равенства  $AB^2 = BC^2$ , записанного в координатах:

$$b_1^2 + b_2^2 = (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2,$$

вытекает, что

$$AC^2 = c_1^2 + c_2^2 = 2(b_1c_1 + b_2c_2),$$

т. е. квадрат основания  $AC$  — четное число.

#### Задача 5. Всегда ли это возможно?

На плоскости заданы несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

*Ответ:* не всегда.

*Решение.* На рис. 78 изображены шесть отрезков, концы которых нельзя соединить требуемым образом. В самом деле, каждый из шести концов коротких отрезков может быть соединен лишь с концом «своего» длинного отрезка, а поскольку свободных концов у ломаной должно остаться два, то у одного из коротких отрезков оба его конца должны быть соединены отрезками с концами

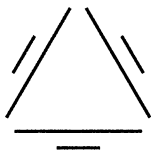


Рис. 78

длинного. В результате получится замкнутая ломаная из четырех звеньев — противоречие.

### Задача 6. Найдите сумму

Найдите сумму

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}.$$

Ответ:  $1 - 1/n!$ .

Решение. Получить ответ совсем легко, если представить  $k$ -е слагаемое в виде

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} &= \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = 1 - \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

### Задача 7. Сколько входит — столько выходит

На плоскости даны несколько точек. Для некоторых пар  $(A; B)$  этих точек взяты векторы  $\overrightarrow{AB}$ , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна нулевому вектору.

Решение. Запишем каждый из векторов в виде разности

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

где  $O$  — произвольная фиксированная точка плоскости.

Составив сумму всех таких разностей, получаем, что в силу условия задачи в нее каждый вектор войдет со знаком плюс столько же раз, сколько со знаком минус. Значит, вся сумма равна нулевому вектору.

### Задача 8. Две трети массы

101 гирька расположена по окружности. Масса каждой из гирек — натуральное число, а их общая масса равна 300 г. Докажите, что из этого набора можно выбрать одну или несколько гирек, расположенных подряд, с общей массой 200 г.

*Решение.* Отметим на окружности 300 точек, разбивающих ее на 300 равных частей, и каждой гирьке массой  $m$  поставим в соответствие дугу из  $m$  таких частей. Концы этих дуг (расположенных по окружности в том же порядке, что и гирьки) назовем красными точками, остальные  $300 - 101 = 199$  точек — черными. Рассмотрим все равносторонние треугольники, вписанные в окружность, у которых одна из вершин красная. Если бы у каждого из них две другие вершины оказались черными, то всего черных точек было бы не менее  $2 \cdot 101 = 202$ . Поэтому найдется равносторонний треугольник, у которого две вершины красные. Большая дуга с концами в этих красных вершинах соответствует гирькам, в сумме имеющим массу 200 г, меньшая — гирькам, имеющим массу 100 г.

### Задача 9. Через раз

Два одинаковых равносторонних треугольника расположены так, что в пересечении образуют шестиугольник. Докажите, что сумма длин трех попарно несмежных сторон шестиугольника равна сумме длин трех остальных его сторон.

*Решение.* Все треугольники 1, 2, 3, 4, 5, 6 подобны (рис. 79). Поэтому для того чтобы доказать, что сумма трех попарно несмежных сторон шестиугольника равна сумме трех остальных его сторон, достаточно доказать,



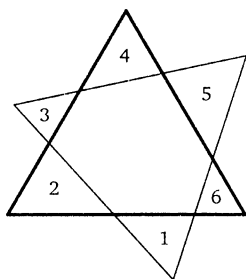


Рис. 79

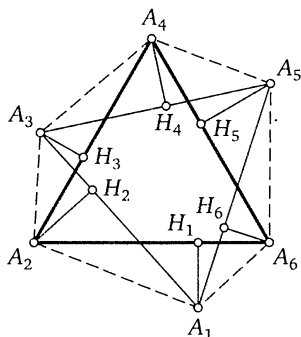


Рис. 80

что сумма высот в треугольниках 1, 3 и 5, опущенных на стороны шестиугольника, равна сумме такого рода высот в треугольниках 2, 4 и 6. Для этого заметим, что сумма площадей треугольников  $A_1A_2A_3$ ,  $A_3A_4A_5$  и  $A_5A_6A_1$  (рис. 80) равна сумме площадей треугольников  $A_2A_3A_4$ ,  $A_4A_5A_6$  и  $A_6A_1A_2$ , так как каждая из этих сумм с прибавкой площади равностороннего треугольника дает площадь шестиугольника  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Но тогда ввиду равенства оснований у шести названных треугольников имеем равенство сумм их высот:

$$A_1H_1 + A_3H_3 + A_5H_5 = A_2H_2 + A_4H_4 + A_6H_6,$$

откуда непосредственно следует утверждение задачи.

### Задача 10. Радикалы под радикалами

Докажите, что для любого натурального  $n > 1$  справедливо неравенство

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3.$$

*Решение.* Пусть  $a_k = \sqrt{k\sqrt{(k+1)\ldots\sqrt{n}}}$  для  $2 \leq k \leq n$ . Тогда ввиду известного неравенства  $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$  можно

записать последовательные неравенства:

$$a_n = \sqrt{n} < \frac{1}{2} + \frac{n}{2},$$

$$a_{n-1} = \sqrt{(n-1)\sqrt{n}} < \sqrt{(n-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)} < \frac{1}{4} + \frac{n}{4} + \frac{n-1}{2},$$

$$a_{n-2} = \sqrt{(n-2)\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}} < \sqrt{(n-2)a_{n-1}} < \\ < \frac{1}{8} + \frac{n}{8} + \frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{2},$$

.....

$$a_2 = \sqrt{2\sqrt{3\ldots\sqrt{n}}} < \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{3}{4} + \frac{2}{2}.$$

Но методом математической индукции легко доказывается равенство

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Ввиду этого можно записать последнее неравенство:

$$a_2 < 3 - \frac{n+1}{2^{n-1}} < 3,$$

что и требовалось доказать.

### Задача 11. Сетка из треугольников

Прямые трех направлений разрезают всю плоскость на бесконечное число равных равносторонних треугольников (рис. 81). Найдется ли на плоскости квадрат, вершины которого являются точками пересечения этих прямых?

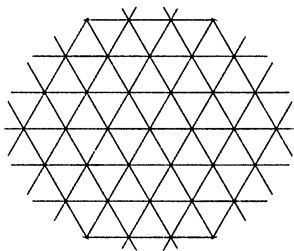


Рис. 81

*Ответ:* не найдется.

*Решение.* Предположим, что такой квадрат нашелся, а длина его стороны равна  $l$  при условии, что сторона равностороннего треугольника разбиения равна 1. Тогда в силу теоремы косинусов квадрат стороны и квадрат диагонали квадрата представятся в виде

$$l^2 = a^2 + b^2 - ab, \quad 2l^2 = c^2 + d^2 - cd,$$

где  $a, b, c, d$  — натуральные числа или ноль (длины сторон треугольников, проходящих по линиям сетки). Тогда

$$\frac{c^2 + d^2 - cd}{a^2 + b^2 - ab} = 2,$$

но это противоречит тому, что выражение  $u^2 + v^2 - uv$  (при натуральных  $u$  и  $v$ ) в разложении на множители может содержать множитель 2 лишь в четной степени. Последнее обстоятельство вы легко докажете сами.

### Задача 12. Сумма модулей

Натуральные числа от 1 до  $2n$  разбиты на две группы по  $n$  чисел в каждой. Пусть  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  — числа первой группы в порядке возрастания,  $b_1 > b_2 > \dots > b_n$  — числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

*Решение.* Заметим, что из двух чисел  $a_k$  и  $b_k$  одно всегда не превосходит  $n$ , а другое больше  $n$ . Действительно, если, например,  $a_k \leq n$  и  $b_k \leq n$ , то и все числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и  $b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$  не превосходят  $n$ . Тогда всего мы получаем

$$k + (n - k + 1) = n + 1$$

различных натуральных чисел, не превосходящих  $n$ , что невозможно. Аналогично доказывается, что оба числа  $a_k$  и  $b_k$  не могут быть больше  $n$ .

Таким образом, каждое из слагаемых  $|a_k - b_k|$  в нашей сумме равно разности числа, большего  $n$ , и числа,

не превосходящего  $n$ . Раскрывая модули и переставляя слагаемые, получим

$$\begin{aligned} |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = \\ = (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + n) - (1 + 2 + \dots + n) = n^2. \end{aligned}$$

## ГЕОМЕТРИЯ ПОЛНА ПРИКЛЮЧЕНИЙ

Геометрия полна приключений, потому что за каждой задачей скрывается приключение мысли. Решить задачу — это значит пережить приключение. Конечно, если задача вам понравилась. Я приглашаю читателя принять участие в некоторых подобных «приключениях».

### Задача 1. Ищите площадь

В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$  углы  $ABC$  и  $CDE$  равны по  $90^\circ$ , каждая из сторон  $BC$ ,  $CD$  и  $AE$  равна 1 и сумма сторон  $AB$  и  $DE$  равна 1 (рис. 82). Докажите, что площадь пятиугольника равна 1.

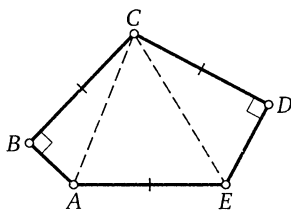


Рис. 82

*Решение.* Разрежем пятиугольник по диагоналям  $AC$  и  $CE$ . Получили три треугольника  $ACE$ ,  $ABC$  и  $EDC$ . Из двух последних составим один треугольник, приложив их друг к другу равными сторонами. Площадь его равна  $1/2$  (высота — 1, основание — 1), и он равен треугольнику  $ACE$  по трем сторонам. Значит, площадь пятиугольника равна 1, что и требовалось доказать.

### Задача 2. Правильный треугольник

Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из нее опущены перпендикуляры на все стороны треугольника. Три из образовавшихся шести треугольников через один закрасим (рис. 83). Докажите, что сумма площадей закрашенных треугольников равна сумме площадей незакрашенных треугольников.

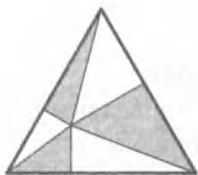


Рис. 83

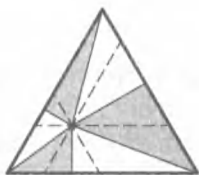


Рис. 84

*Решение.* Через общую вершину шести треугольников проведем прямые, параллельные всем сторонам равностороннего треугольника (рис. 84). В результате равносторонний треугольник распадется на шесть пар равных треугольников так, что в каждой паре один закрашен, а другой нет.

### Задача 3. Граница розетки

Через фиксированную точку плоскости проходят несколько окружностей радиуса 1 так, что круги, ими ограниченные, в своем объединении образуют розетку, содержащую внутри себя эту фиксированную точку (рис. 85). Определите длину границы этой розетки.

*Решение.* Проведем окружность радиусом 2 с центром в фиксированной точке  $O$ , о которой говорится в условии; длина этой окружности, т. е.  $4\pi$ , как раз и равна длине границы розетки. В самом деле, граница розетки распадается на дуги окружностей радиуса 1, а длина каждой такой дуги равна длине ее проекции из центра  $O$  на окружность радиуса 2 (рис. 86).

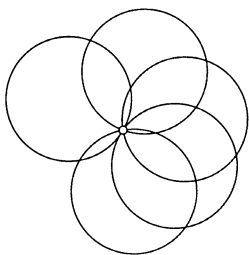


Рис. 85

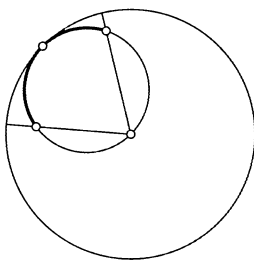


Рис. 86

#### Задача 4. Черно-белый квадрат

Через точку внутри квадрата проведены прямые, параллельные его сторонам и диагоналям (рис. 87). Части, на которые квадрат оказался разрезанным, через одну закрашены. Докажите, что площадь закрашенных частей равна половине площади квадрата.

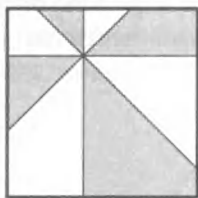


Рис. 87

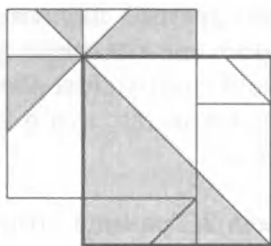


Рис. 88

*Решение.* На рис. 88 показано, что из кусков квадрата можно сложить квадрат так, что под диагональю будут находиться только закрашенные куски, а над диагональю — незашрашенные.

#### Задача 5. Неравенство в треугольнике

Внутри треугольника отмечена точка  $M$ . Пусть  $L$  — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку  $M$  с вершинами, а  $l$  — длина наименьшего из отрезков,

соединяющих точку  $M$  с серединами сторон треугольника. Докажите, что  $L \geq 2l$ .

*Решение.* Соединим точку  $M$  со всеми вершинами и серединами сторон треугольника  $ABC$  (рис. 89). Если хотя бы один из отрезков  $AM$ ,  $BM$ ,  $CM$  будет не менее чем вдвое больше хотя бы одного из отрезков  $MP$ ,  $MR$ ,  $MQ$ , то и максимальный из отрезков, соединяющих точку  $M$  с вершинами, будет не менее чем вдвое больше минимального отрезка, соединяющего эту точку с серединами сторон. Выберем из углов  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMA$  тот, который не меньше  $120^\circ$ . Пусть это будет угол  $AMC$ , тогда сумма углов  $MAP$  и  $MPC$  не больше  $60^\circ$ . Приставим теперь треугольник  $MCP$  к треугольнику  $AMP$  так, чтобы сторона  $PC$  совпала со стороной  $PA$  (рис. 90). Вершина  $M$  попадет в точку  $M_1$ . Получится треугольник  $M_1AM$ . При этом угол  $M_1AM$  не больше  $60^\circ$ . Следовательно, один из углов  $AM_1M$  и  $AMM_1$  не меньше  $60^\circ$ . Пусть это угол  $AM_1M$ . Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, поэтому  $AM \geq MM_1 = 2MP$ . Значит,  $L \geq 2l$ .

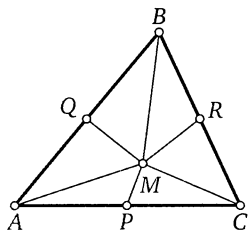


Рис. 89

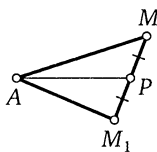


Рис. 90

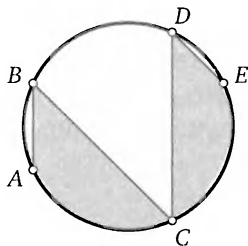


Рис. 91

### Задача 6. Зигзаг в круге

У ломаной  $ABCDE$  все вершины лежат на окружности (рис. 91). Углы в вершинах  $B$ ,  $C$  и  $D$  равны по  $45^\circ$ . Докажите, что площадь закрашенной части круга равна половине его площади.

*Решение.* Проведем в круге еще четыре отрезка:  $AD$ ,  $EF$  — равный и параллельный  $AB$ ,  $FC$  — равный  $DE$  и



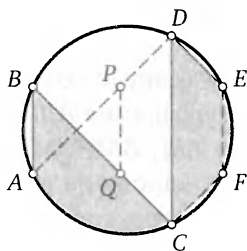


Рис. 92

$PQ$  — равный и параллельный  $EF$  (рис. 92). Круг разбился на пять пар равных частей, причем в каждой паре одна часть закрашена, а другая нет.

### Задача 7. Отношение площадей

Вокруг прямоугольника описан четырехугольник так, что две противоположные вершины прямоугольника являются серединами двух противоположных сторон четырехугольника (рис. 93). Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади четырехугольника.

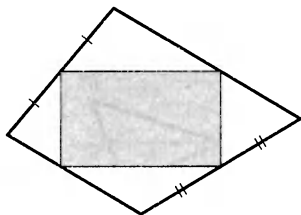


Рис. 93

*Решение.* Перегнем наш четырехугольник по сторонам прямоугольника так, чтобы «выступающие» уголки четырехугольника оказались внутри прямоугольника (рис. 94). Из равенства  $AX = BX$  следует, что точки  $A$  и  $B$  переходят в одну и ту же точку  $E$ , а из равенства  $DQ = CQ$  — что точки  $C$  и  $D$  переходят в некоторую точку  $F$ . Из равенства углов  $EPQ$  и  $DPQ$  следует, что точка  $F$

лежит на прямой  $PE$ , а из равенства углов  $BYX$  и  $XYE$  — что точка  $F$  лежит на прямой  $YE$ . Если прямые  $PE$  и  $YE$  не совпадают, то точка  $F$  совпадает с точкой  $E$  пересечения этих прямых (рис. 95, а). Если же прямые  $PE$  и  $YE$  совпадают, то получаем расположение, показанное на рис. 95, б. В обоих случаях уголки без перекрытий накрывают весь прямоугольник, а отсюда следует утверждение задачи.

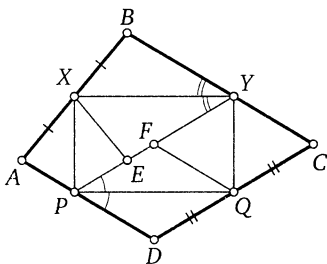


Рис. 94

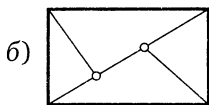
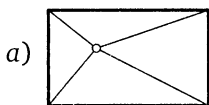


Рис. 95

### Задача 8. Два квадрата

Два квадрата расположены так, что две соседние вершины первого квадрата находятся на соседних сторонах второго, а одна из вершин второго квадрата лежит на стороне первого (рис. 96). Докажите, что отрезок, соединяющий две общие точки границ квадратов, проходит через центр первого квадрата.

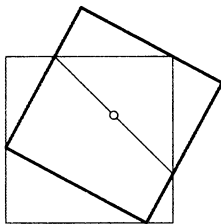


Рис. 96

*Решение.* Нетрудно заметить, что пунктирный прямоугольник, описанный около первого квадрата, сам явля-

ется квадратом (рис. 97). Поэтому высоты подобных прямоугольных треугольников  $MB_1C$  и  $CC_1N$ , опущенные на их гипотенузы, равны. Но тогда и сами эти треугольники равны, а значит, равны и их катеты:  $MB_1 = CC_1$ ,  $B_1C = C_1N$ . Но тогда  $ND_1 = MB_1$ , откуда следует, что отрезок  $MN$  проходит через центр первого квадрата.

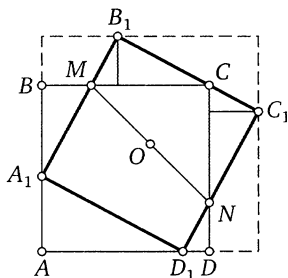


Рис. 97

### Задача 9. Два угольника

Два равнобедренных угольника приложены друг к другу так, как показано на рис. 98, а. Контур, который они при этом образовали, представляет собой невыпуклый четырехугольник. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами квадрата.

*Решение.* Прямоугольные треугольники  $ACM$  и  $BMD$  (см. рис. 98, б) равны по двум катетам, следовательно,  $AC = BD$ . Отрезок  $BM$  — высота треугольника  $ABD$  и, так

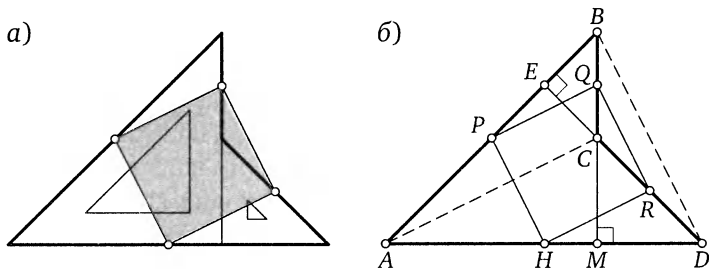


Рис. 98

как углы  $BAM$  и  $DCM$  равны по  $45^\circ$ , то  $DE$  — также высота этого треугольника. Следовательно,  $C$  — точка пересечения высот, поэтому прямые  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны. Так как  $PQ$  и  $QR$  — средние линии в треугольниках  $ABC$  и  $BCD$ , то эти отрезки равны и перпендикулярны<sup>1</sup>. Значит, в параллелограмме  $PQRH$  смежные стороны  $PQ$  и  $QR$  равны и перпендикулярны, т. е.  $PQRH$  — квадрат.

### Задача 10. Квадрат внутри квадрата

Внутри квадрата расположен меньший квадрат. Вершины квадратов соединили так, как показано на рис. 99; при этом образовались четыре четырехугольника. Докажите, что суммы площадей противоположных четырехугольников равны.

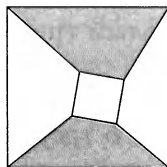


Рис. 99

*Решение.* Задача допускает различные решения. Одно из них основано на том, что при параллельном переносе внутреннего квадрата в вертикальном или горизонтальном направлении сумма площадей противоположных четырехугольников остается неизменной.

### Задача 11. Сечение тетраэдра

Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что его периметр не меньше удвоенного ребра тетраэдра.

<sup>1</sup>Равенство и перпендикулярность отрезков  $AC$  и  $BD$  можно доказать иначе. При повороте с центром  $M$  на  $90^\circ$ , например, по часовой стрелке образами точек  $A$  и  $C$  являются точки  $B$  и  $D$  соответственно, поэтому образом отрезка  $AC$  является отрезок  $BD$ .

*Решение.* Развертка правильного тетраэдра изображена на рис. 100. При развертке контур четырехугольного сечения превратился в ломаную линию  $MN$ . Так как длина ломаной, соединяющей концы отрезка, не меньше длины отрезка, то длина ломаной  $MN$  не меньше удвоенного ребра. Равенство достигается лишь в случае, когда сечение параллельно двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

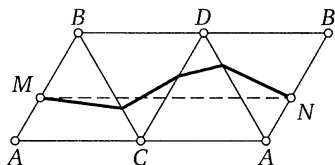


Рис. 100

### Задача 12. Черно-белый треугольник

Через точку  $O$  внутри равностороннего треугольника проведены прямые, проходящие через его вершины. В результате получились 6 треугольников, три из которых через один закрашили. Докажите, что если сумма площадей закрашенных треугольников равна половине площади равностороннего треугольника, то точка  $O$  лежит на одной из медиан этого треугольника.

*Решение.* Примем сторону равностороннего треугольника равной 2 и обозначим длины отрезков  $AC_1$ ,  $BA_1$  и  $CB_1$  через  $1+a$ ,  $1+b$  и  $1+c$  соответственно. Тогда длины отрезков  $C_1B$ ,  $A_1C$  и  $B_1A$  равны  $1-a$ ,  $1-b$ ,  $1-c$  соответственно (рис. 101). Заметим, что сумма площадей треугольников  $ABB_1$ ,  $BCC_1$  и  $CAA_1$  равна полутора площадям треугольника  $ABC$ . Если обозначить высоту треугольника  $ABC$  через  $h$ , то это равенство можно записать следующим образом:  $0,5h(1-a) + 0,5h(1-b) + 0,5h(1-c) = 1,5h$ , или  $a+b+c=0$ .

С другой стороны, отношение площадей треугольников  $AOC$  и  $BOC$  равно  $(1+a):(1-a)$ , так как у них общее основание  $OC$ , а высоты относятся как  $(1+a):(1-a)$ .

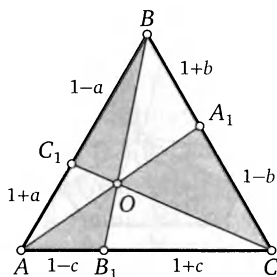


Рис. 101

Аналогично отношение площадей треугольников  $AOB$  и  $AOC$  равно  $(1+b):(1-b)$ , а отношение площадей треугольников  $BOC$  и  $AOB$  равно  $(1+c):(1-c)$ . Перемножим эти отношения и заметим, что площадь каждого из трех треугольников  $AOB$ ,  $AOC$  и  $BOC$  по одному разу встречается в числителе и в знаменателе, т. е. это произведение равно 1. Отсюда следует<sup>1</sup>, что

$$(1+a)(1+b)(1+c) = (1-a)(1-b)(1-c).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим  $(a+b+c) + abc = 0$ . Но  $a+b+c=0$ , следовательно,  $abc=0$ . Это означает, что хотя бы одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  равно 0, т. е. точка  $O$  лежит на одной из медиан.

### Задача 13. Выпуклый шестиугольник

Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

*Решение.* Пусть  $ABCDEF$  — данный шестиугольник,  $M_1, M_2, \dots, M_6$  — середины его сторон (рис. 102). Отрезки  $M_1M_4$  и  $M_2M_5$  делят площадь шестиугольника пополам. Поэтому четырехугольники  $PM_1BM_2$  и  $PM_4EM_5$ , где  $P$  — точка пересечения отрезков  $M_1M_4$  и  $M_2M_5$ , равновелики.

<sup>1</sup>Это равенство также можно получить, используя теорему Чевы.

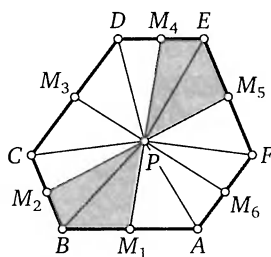


Рис. 102

Площади четырехугольников  $PABC$  и  $PDEF$  вдвое больше площадей четырехугольников  $PM_1BM_2$  и  $PM_4EM_5$  соответственно и поэтому они также равны между собой. Отсюда следует, что ломаная  $M_3PM_6$  делит площадь шестиугольника пополам, как и отрезок  $M_3M_6$ . А это значит, что точка  $P$  лежит на отрезке  $M_3M_6$ , что и требовалось доказать.

#### Задача 14. Восьмиугольник на части

Правильный восьмиугольник разделен диагоналями на части, как показано на рис. 103. Докажите, что суммы площадей фигур с одним и тем же номером равны друг другу.

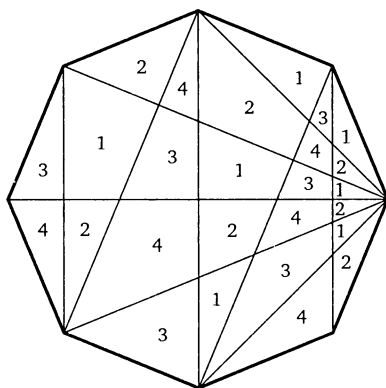


Рис. 103

*Решение.* Глядя на рис. 103, нетрудно заметить, что сумма площадей 3-кусов и 4-кусов равна половине площади восьмиугольника, точно так же общая площадь 4-кусов и 2-кусов равна половине всей площади и общая площадь 3-кусов и 1-кусов равна половине всей площади. Отсюда следует, что площадь 3-кусов равна площади 2-кусов, а площадь 1-кусов равна площади 4-кусов. С другой стороны, проведя дополнительные линии, как показано на рис. 104, мы разобьем 1-куски на девять многоугольников и 2-куски на девять точно таких же многоугольников. Значит, площадь 1-кусов равна площади 2-кусов. Поэтому площадь кусков каждого вида равна четверти площади восьмиугольника.

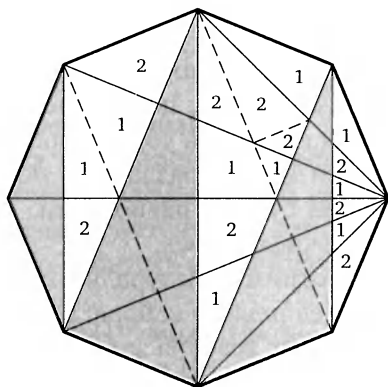


Рис. 104

Для демонстрации этой задачи можно заранее, используя фломастеры или цветные карандаши, изготовить плакат. Правильный восьмиугольник, раскрашенный в четыре цвета, выглядит весьма красиво!



---

## ОТ ЗАДАЧИ К ЗАДАЧЕ

Все жанры хороши, кроме скучного. Думаю, что это высказывание вполне можно отнести и к математическим задачам. Я надеюсь, что читателю, разбирающему эти задачи, не придется скучать. Разве что иногда будет трудновато, но ведь трудно — это не скучно.

### Задача 1. Нечетное число гирек

Набор состоит из гирек с целочисленными массами. Известно, что если из набора убрать любую из гирек, то оставшиеся гирьки можно разложить по двум чашкам весов так, что весы будут в равновесии. Докажите, что в наборе нечетное число гирек.

*Решение.* Рассмотрим  $K$  натуральных чисел, выражающих массы  $K$  гирек нашего набора. Если любое из этих чисел убрать, то в силу условия задачи сумма остальных будет четным числом. Значит, все  $K$  чисел имеют одинаковую четность. Если все они нечетны, то число  $K$  нечетно, так как сумма чисел без любого одного из них четна. Во втором случае, когда все  $K$  чисел четны, сократим их на наибольшую возможную степень двойки и, повторив предыдущие рассуждения для полученного нового набора чисел, убедимся, что опять  $K$  — нечетное число.

### Задача 2. Особая точка

Точку  $Q$  в треугольнике соединили с вершинами. Оказалось, что образовавшиеся при этом углы подчиняются неравенствам  $\angle 1 \geq \angle 2$ ,  $\angle 3 \geq \angle 4$ ,  $\angle 5 \geq \angle 6$  (рис. 105). До-

кажите, что точка  $Q$  — центр вписанной в треугольник окружности.

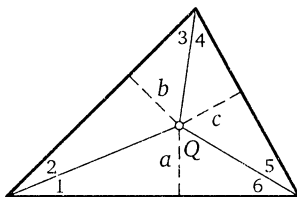


Рис. 105

*Решение.* Для перпендикуляров  $a$ ,  $b$  и  $c$ , опущенных из точки  $Q$  на стороны треугольника, достаточно доказать равенство  $a = b = c$ . Из неравенства  $\angle 1 \geq \angle 2$  следует, что  $a \geq b$ ; из неравенства  $\angle 3 \geq \angle 4$  следует, что  $b \geq c$ ; из неравенства  $\angle 5 \geq \angle 6$  следует, что  $c \geq a$ . Из полученной цепочки неравенств следует требуемое равенство  $a = b = c$ .

### Задача 3. Сумма произведений

Составляется произведение 10 попарно различных натуральных сомножителей, каждый из которых меньше 21 и никакие два из которых не дают в сумме 21. Найдите сумму всевозможных таких произведений.

*Ответ:*  $21^{10}$ .

*Решение.* Число  $21^{10}$  можно записать в виде произведения:  $21^{10} = (1 + 20)(2 + 19)\dots(10 + 11)$ . Если раскрыть скобки в этом произведении, то получится сумма  $2^{10}$  слагаемых, представляющих собой все возможные произведения, оговоренные в условии задачи.

### Задача 4. Треугольники в треугольнике

На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$ , а на катетах — точки  $P$  и  $Q$  так, что  $MC = AC$ ,  $BN = AB$ ,  $PM \parallel AN$ , а  $QN \parallel AM$  (рис. 106). При этом отрезок  $PQ$  пересекает  $AM$  и  $AN$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $AKT$  равна сумме площадей треугольников  $PMK$  и  $TNQ$ .

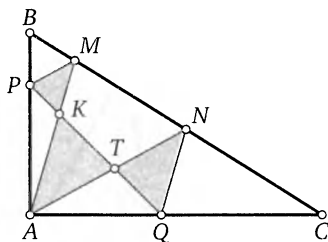


Рис. 106

*Решение.* Сначала заметим, что  $MN = AP = AQ = a + b - c$ , где  $a = AC$ ,  $b = AB$ ,  $c = BC$ . Затем обратим внимание на то, что сумма перпендикуляров, опущенных из точки  $N$  на  $AC$  и из точки  $M$  на  $AB$ , тоже равна  $a + b - c$ . Отсюда следует, что площадь треугольника  $APQ$  равна сумме площадей треугольников  $APM$  и  $ANQ$ . Значит, площадь треугольника  $AKT$  равна сумме площадей треугольников  $PMK$  и  $TNQ$ .

### Задача 5. Числа в таблице

В таблице  $n \times n$  расставлены в произвольном порядке все натуральные числа от 1 до  $n^2$ . В каждой строке таблицы берется наибольшая из разностей между числами в соседних клетках строки, а полученные таким образом  $n$  чисел суммируются. Такого же рода сумма определяется для столбцов таблицы. Докажите, что хотя бы одна из двух сумм не меньше  $n^2$ .

*Решение.* Пусть  $k$  — наибольшее из  $n$  наименьших чисел в строках таблицы,  $m$  — наибольшее из  $n$  наименьших чисел в ее столбцах; будем считать для определенности, что  $k \leq m$ . В каждой строке найдется число, не превосходящее  $k$ , и число, большее  $k$  (иначе нашлась бы строка, в которой все числа не больше  $k$ , самого  $k$  в ней быть не может, а тогда было бы  $m < k$ ).

Возьмем в  $i$ -й строке пару соседних чисел  $a_i$  и  $b_i$ , для которой  $a_i \leq k < b_i$  (так как все числа строки больше  $k$

быть не могут, хотя бы у одного из таких есть сосед, не превосходящий  $k$ ).

Покажем, что

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) \geq n^2.$$

Действительно, все  $b_i$  различны и по построению больше  $k$ , значит,

$$\sum_{i=1}^n b_i \geq \sum_{i=1}^n (k + i) = kn + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Кроме того, все  $a_i$  различны и по построению не превосходят  $k$ , значит,

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n (k + 1 - i) = kn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) &= \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i \geq \\ &\geq kn + \frac{n(n+1)}{2} - \left( kn - \frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{n(n+1) + n(n-1)}{2} = n^2. \end{aligned}$$

Поскольку сумма максимальных в разностей в строках не меньше, чем сумма

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n),$$

то и она окажется не меньше  $n^2$ .

### Задача 6. Постоянство периметра

Два равносторонних треугольника образуют в пересечении шестиугольник. После того как каждый треугольник подвергся параллельному переносу, они вновь образовали в пересечении шестиугольник (рис. 107). Докажите, что первый и второй шестиугольники обладают равными периметрами.

*Решение.* Сумма периметров шести треугольников, окаймляющих первый шестиугольник, равна сумме периметров шести треугольников, окаймляющих второй

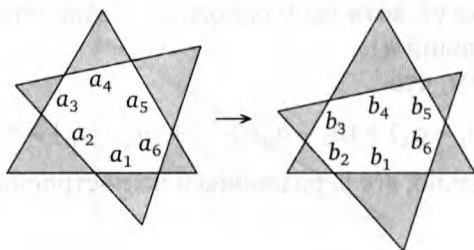


Рис. 107

шестиугольник, ибо каждая из этих сумм равна сумме периметров двух равносторонних треугольников, т. е. можно записать

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6.$$

Все 12 окаймляющих треугольников подобны, а поэтому найдется такой единый коэффициент  $k$ , что  $p_i = ka_i$  и  $q_j = kb_j$ . Подставив эти выражения в предыдущее равенство для сумм периметров, получаем

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6.$$

### Задача 7. Выход в пространство

На плоскости расположены три горизонтальных отрезка разной длины. Для каждой пары отрезков возьмем точку пересечения двух прямых, одна из которых проходит через их левые концы, а другая — через правые. Докажите, что три полученные точки лежат на одной прямой (рис. 108).

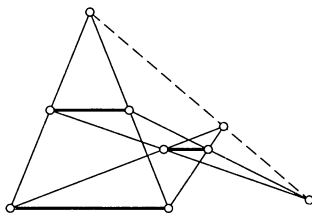


Рис. 108

*Решение.* К плоскости  $\alpha$ , в которой лежат три отрезка, восставим три перпендикуляра, имеющие своими основаниями середины трех отрезков и соответственно равные им по длине. Плоскость  $\beta$ , проходящая через свободные концы перпендикуляров, пересекается с плоскостью  $\alpha$  по прямой, на которой лежат три точки, указанные в условии задачи.

### Задача 8. Треугольник Паскаля

Треугольником Паскаля называется числовой треугольник

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

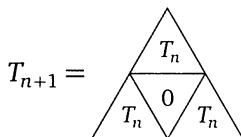
в котором по боковым сторонам стоят единицы, а каждое число внутри равно сумме двух чисел, стоящих над ним в ближайшей строке сверху. Докажите, что в каждой строке треугольника Паскаля количество нечетных чисел равно какой-либо натуральной степени двойки.

*Решение.* Заменяя в треугольнике Паскаля каждое четное число на 0, а каждое нечетное на 1, получим 2-треугольник (треугольник Паскаля по модулю 2):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Нужно доказать, что число единиц в каждой строке 2-треугольника является степенью двойки. Пусть  $T_n$  — это 2-треугольник из  $2^n$  строк, тогда по индукции легко показать, что  $T_{n+1}$  (2-треугольник из  $2^{n+1}$  строк) имеет такую

структуру:



Для доказательства утверждения задачи еще раз применим индукцию: из структуры  $T_{n+1}$  видно, что число единиц в  $k$ -й строке, где  $2^n < k \leq 2^{n+1}$ , равно удвоенному числу единиц в строке с номером  $k - 2^n$ . Поэтому если по предположению индукции число единиц в строке с номером  $k - 2^n$  равнялось степени двойки, то в  $k$ -й строке число единиц также равняется степени двойки.

### Задача 9. Оклейка куба

Из бумаги вырезан многоугольник площади 6, которым можно оклеить поверхность куба с ребром 1. Докажите, что у многоугольника найдутся два угла по  $270^\circ$  каждый.

*Решение.* Оклеим куб бумажным многоугольником. Множество точек на поверхности куба, в которые перешла граница многоугольника, будет представлять собой фигуру, состоящую из отрезков, не содержащую замкнутых контуров (дерево), а значит, у него будут хотя бы две концевые точки. Эти две концевые точки обязаны приходиться на вершины куба. Следовательно, при развертке многоугольника на плоскость в этих двух точках многоугольника углы будут по  $270^\circ$ .

### Задача 10. Квадрат числа

Докажите, что число  $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$  является квадратом целого числа.

*Решение.* Легко проверить тождество

$$n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n^2 + n + 1)^2,$$

из которого следует, что число в условии задачи равно

$$(1994^2 + 1995)^2.$$

**Задача 11. Строго пополам**

Через прямую, содержащую середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, проведена секущая плоскость. Докажите, что эта плоскость рассекает тетраэдр на части равного объема.

*Решение.* Итак, через указанную прямую  $l$  проведена плоскость  $\alpha$ . Секущая плоскость, параллельная названным в условии скрещивающимся ребрам тетраэдра, пересекает его по параллелограмму. Так как прямая  $l$  пересекает этот параллелограмм в точке пересечения его диагоналей, то плоскость  $\alpha$  рассекает параллелограмм на две части равной площади. Таким образом, в силу принципа Кавальери плоскость разделяет тетраэдр на части равного объема.



## ЛЕСТНИЦА ЗАДАЧ

Каждая задача является ступенькой лестницы в царство математики. Основные законы этого царства мы изучаем в школе, и просто удивительно, что их — немногих — хватает на то, чтобы решать столь разнообразные и непохожие друг на друга задачам. В этом состоит поразительная особенность математики.

### Задача 1. Симметричное число

Извлеките квадратный корень из натурального числа 12345678987654321.

*Ответ:* 111 111 111.

*Решение.* В самом деле,  $11^2 = 121$ ,  $111^2 = 12\,321$  и т. д. до числа  $111\,111\,111^2$ , равного числу в условии задачи.

### Задача 2. Равенство углов

В параллелограмме  $ABCD$  взята такая точка  $Q$ , что  $\angle ABQ = \angle ADQ$  (рис. 109). Докажите, что  $\angle DAQ = \angle DCQ$ .

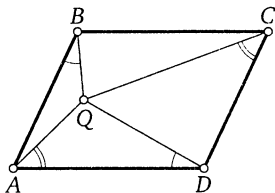


Рис. 109

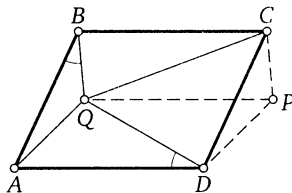


Рис. 110

*Решение.* Возьмем такую точку  $P$ , что отрезок  $QP$  равен и параллелен  $BC$  (рис. 110). Тогда можно заметить,

что  $\angle ABQ = \angle DCP$ ,  $\angle ABQ = \angle PQD$ , откуда следует, что  $\angle PQD = \angle DCP$ . Значит, около четырехугольника  $DQCP$  можно описать окружность и  $\angle QCD = \angle QPD$ . Но  $\angle QPD = \angle DAQ$ , а это значит, что  $\angle QCD = \angle DAQ$ .

### Задача 3. Родственные многоугольники

Существуют ли два многоугольника, у которых все вершины общие, но при этом нет ни одной общей стороны?

*Ответ:* существуют.

*Решение.* На рис. 111 показаны два пятиугольника (один жирной линией, а другой — тонкой), у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны.

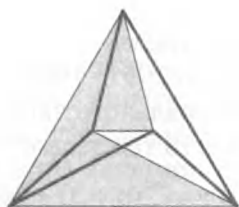


Рис. 111

### Задача 4. Пифагор поможет

На гипотенузе  $AC$  равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  взяты такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle MBN = 45^\circ$  (рис. 112). Докажите, что  $MN^2 = AM^2 + NC^2$ .

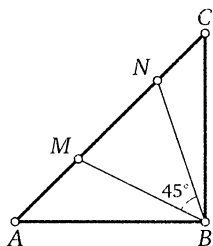


Рис. 112

*Решение.* В силу условий задачи найдется точка  $P$ , одновременно симметричная точке  $A$  относительно  $MB$  и точке  $C$  относительно  $NB$  (рис. 113). Тогда треугольник  $MPN$  прямоугольный, т. е.  $PM^2 + PN^2 = MN^2$ . А значит,  $AM^2 + NC^2 = MN^2$ .

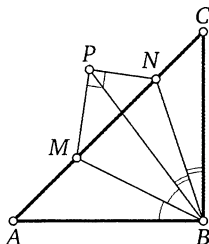


Рис. 113

### Задача 5. Квадрат числа

Докажите, что число  $1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16$  является квадратом натурального числа.

*Решение.* Имеет место тождество

$$(n-3)(n-1)(n+1)(n+3) + 16 = (n^2 - 5)^2.$$

Отсюда следует числовое равенство

$$1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16 = (1994^2 - 5)^2.$$

### Задача 6. Последовательность квадратов

Существует ли такая бесконечная последовательность квадратов натуральных чисел, что для всякого натурального  $n$  сумма первых  $n$  членов последовательности тоже является квадратом натурального числа?

*Ответ:* существует.

*Решение.* Пусть  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 4$ , и для  $n \geq 2$  положим  $a_{n+1} = a_n + a_n^2/2$ . По индукции легко доказывается равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = (1 + a_n)^2.$$

Последовательность  $a_1^2, a_2^2, \dots$  — искомая. Первые члены последовательности таковы:  $3^2, 4^2, 12^2, 84^2, \dots$

**Задача 7. Суммы модулей**

Произвольные  $m + k$  различных чисел разбили на две группы из  $m$  и  $k$  чисел и в каждой группе расположили их в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m; \quad b_1 < b_2 < \dots < b_k.$$

Затем те же  $m + k$  чисел снова разбили на две группы из  $m$  и  $k$  чисел и в каждой группе опять расположили в порядке возрастания:

$$c_1 < c_2 < \dots < c_m; \quad d_1 < d_2 < \dots < d_k.$$

Докажите равенство

$$\begin{aligned} |a_1 - c_1| + |a_2 - c_2| + \dots + |a_m - c_m| = \\ = |b_1 - d_1| + |b_2 - d_2| + \dots + |b_k - d_k|. \end{aligned}$$

*Решение.* Исходное множество из  $n = m + k$  действительных чисел запишем в порядке возрастания:  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Нам удобно будет представить его в двух экземплярах: на прямой  $y = 0$  и прямой  $y = 1$  расположим по  $n$  точек с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — получим множество  $M_0$  на прямой  $y = 0$  и множество  $M_1$  на прямой  $y = 1$ . Пользуясь тем, что ординаты точек зафиксированы, и указывая только их абсциссы, множество  $M_0$  представим как  $M_0 = A \cup B$ , где  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ;  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ . Множество  $M_1$  представим как  $M_1 = C \cup D$ , где  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ ;  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ . Для всякого  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , точку  $a_i \in M_0$  соединим с точкой  $c_i \in M_1$  красным отрезком, получим  $m$  красных отрезков. Для всякого  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , точку  $b_j \in M_0$  соединим с точкой  $d_j \in M_1$  синим отрезком, получим  $k$  синих отрезков.

Из условия задачи следует, что никакие два красных отрезка не пересекаются и никакие два синих отрезка не пересекаются. Назовем это свойство отрезков свойством непересекаемости. Каждый из  $n$  отрезков сделаем направленным отрезком, взяв на нем направление по следующему правилу: всякий красный вектор  $\vec{v}_i$  имеет

неотрицательную проекцию на ось  $Ox$ , а всякий синий вектор  $\vec{u}_j$  — неположительную проекцию на ось  $Ox$ . В результате получим  $m$  красных векторов  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$  и  $k$  синих векторов  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ . Отметим, что  $|\text{Пр}_{Ox} \vec{v}_i| = |a_i - c_i|$  при  $1 \leq i \leq m$  и  $|\text{Пр}_{Ox} \vec{u}_j| = |b_j - d_j|$  при  $1 \leq j \leq k$ . Следовательно, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно доказать, что сумма проекций всех красных и синих векторов на ось  $Ox$  равна нулю.

Докажем сначала, что концы двух разноцветных векторов непременно имеют неравные абсциссы. Предположим противное: пусть концы векторов  $\vec{v}_i$  и  $\vec{u}_j$  имеют равные абсциссы  $x_s$  (рис. 114). Обозначим через  $P$  множество точек из  $M_1$  с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Через  $Q$  обозначим множество точек из  $M_0$  с абсциссами  $x_1, x_2, \dots, x_{s-1}$ . Рассмотрим все векторы обоих цветов, которые имеют либо конец, либо начало в множестве  $P$ , таких векторов  $s$  штук. В силу свойства непересекаемости каждый из них имеет либо начало, либо конец в множестве  $Q$ . Но это невозможно, так как  $|P| = s$ , а  $|Q| = s - 1$ .

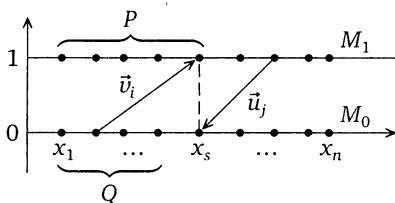


Рис. 114

Можно заключить, что проекции концов всех  $n$  векторов на ось  $Ox$  дают множество  $M_0$  и проекции их начал — тоже множество  $M_0$  (доказывается аналогично). Значит, сумма проекций на  $Ox$  всех векторов равна нулю, что и требовалось доказать.

### Задача 8. Ребра тетраэдра

Докажите, что из шести ребер любого тетраэдра можно сложить два треугольника.

*Решение.* Пусть  $AB$  — самое длинное ребро тетраэдра  $ABCD$  (или одно из таковых, если их несколько). Тогда сумма длин четырех ребер, смежных с ним, более чем в два раза больше длины  $AB$ . Значит, верно хотя бы одно из двух неравенств:  $AB < AC + AD$ ,  $AB < BC + BD$ .

Предположим для определенности, что верно первое неравенство, в этом случае из ребер  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  можно сложить треугольник. Второй треугольник из трех оставшихся ребер уже задан в грани тетраэдра  $BCD$ .

### Задача 9. Ломаная на кубе

На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия, при этом на каждой грани куба находится хотя бы одно звено этой ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше чем  $3\sqrt{2}$ .

*Решение.* Занумеруем звенья ломаной в произвольном порядке:  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Пусть  $a_i$  и  $b_i$  — проекции звена  $l_i$  на стороны той грани куба, в которой оно расположено,  $1 \leq i \leq n$ . Так как ломаная замкнутая, то суммы проекций ее звеньев на любое ребро куба не меньше 2, а значит,  $\sum a_i + \sum b_i \geq 6$ . Теперь уложим последовательно звенья ломаной на плоскость  $(a, b)$  так, чтобы получилась плоская ломаная с соответственно теми же проекциями звеньев и притом монотонно возрастающая (рис. 115). Начало плоской ломаной в точке  $O$ , а конец в точке  $M$ , сумма

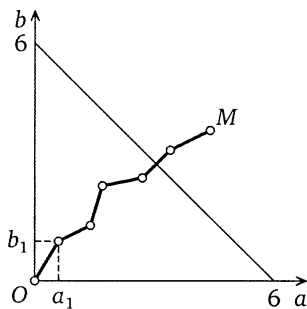


Рис. 115

координат которой не меньше 6. Значит, точка  $M$  находится не ниже прямой  $a + b = 6$ . Но так как расстояние от  $O$  до прямой  $a + b = 6$  есть  $3\sqrt{2}$ , то длина ломаной не меньше  $3\sqrt{2}$ .

Оценка  $3\sqrt{2}$  является точной, так как периметр шестиугольного сечения куба, перпендикулярного его диагонали, в точности равен  $3\sqrt{2}$ .

### Задача 10. Числовая сумма

Найдите сумму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Ответ:  $\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$ .

*Решение.* Равенство непосредственно доказывается методом математической индукции.

### Задача 11. Многогранник

В каждой вершине выпуклого многогранника сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

*Решение.* Каждой вершине многогранника припишем сферу, которая проходит через нее и через три вершины, соединенные с ней ребрами. Сколько вершин у многогранника, столько будет и приписанных сфер, хотя некоторые из них могут совпадать.

Покажем, что сферы, приписанные соседним вершинам, т. е. вершинам, являющимся концами одного ребра, обязательно совпадают. Пусть  $AB$  — ребро многогранника, а  $S_A$  и  $S_B$  — сферы, приписанные вершинам  $A$  и  $B$ . Заметим, что две окружности, описанные около двух граней, стороной которых является ребро  $AB$ , должны лежать как на сфере  $S_A$ , так и на сфере  $S_B$ . А это значит, что сферы  $S_A$  и  $S_B$  совпадают.

Если бы среди приписанных вершинам сфер нашлись несовпадающие, то нашлись бы несовпадающие сферы, приписанные соседним вершинам. Но этого не может быть, как показано выше. Значит, все приписанные сферы совпадают и являются сферой, описанной вокруг многогранника.



## «ЧТО Я ЗНАЮ О КРУГАХ»

Окружность и круг являются персонажами многих математических задач начиная со времен «квадратуры круга». Новые нестандартные задачи с ними возникают и по сей день, что показывает неисчерпаемость основных геометрических понятий. Воистину — у кольца нет конца.

### Задача 1. Симметричные точки

На окружности с центром  $O$  расположены точки  $A$  и  $B$ . Точка  $P$  находится на меньшей из дуг  $AB$ , точки  $Q$  и  $R$  симметричны точке  $P$  относительно прямых  $OA$  и  $OB$  соответственно, точка  $P'$  — точка пересечения отрезков  $AR$  и  $BQ$ . Докажите, что точки  $P$  и  $P'$  симметричны относительно прямой  $AB$ .

*Решение.* Углы  $PAB$  и  $BAR$  опираются на равные дуги  $BP$  и  $BR$  и поэтому равны. Аналогично  $\angle PBA = \angle QBA$  (рис. 116). Следовательно, равны треугольники  $APB$  и  $AP'B$ , а так как  $P$  и  $P'$  лежат по разные стороны от  $AB$ , то они симметричны относительно  $AB$ .

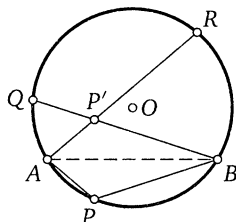


Рис. 116

**Задача 2. Параллельные звенья**

Окружность разбита  $2n$  точками на равные дуги. Докажите, что у любой замкнутой ломаной линии с вершинами во всех этих точках есть два параллельных звена.

*Решение.* Обозначим  $2n$  точек деления числами  $0, 1, \dots, 2n - 1$  последовательно. Условимся писать  $a \equiv b$ , если числа  $a$  и  $b$  дают одинаковые остатки при делении на  $2n$ , и говорить, что  $a$  и  $b$  равны по модулю  $2n$ . Заметим, что если  $i, j$  и  $k, l$  — две пары из чисел на окружности и  $i + j \equiv k + l$ , то отрезки  $ij$  и  $kl$  параллельны.

Предположим, что существует замкнутая  $2n$ -звенная ломаная без параллельных звеньев, т. е. некоторая перестановка  $i_1, i_2, \dots, i_{2n}$  чисел  $0, 1, \dots, 2n - 1$ , для которой все попарные суммы  $i_1 + i_2, i_2 + i_3, \dots, i_{2n-1} + i_{2n}, i_{2n} + i_1$  различны по модулю  $2n$ . Тогда этот набор тоже является некоторой перестановкой чисел  $0, 1, \dots, 2n - 1$ , а его сумма должна быть равна (по модулю  $2n$ ) сумме

$$S = 0 + 1 + \dots + (2n - 1) = (2n - 1)n.$$

С другой стороны, сумма чисел набора, очевидно, равна

$$2(i_1 + i_2 + \dots + i_{2n}) = 2S$$

по модулю  $2n$ . Но  $2S = 2n(2n - 1) \equiv 0$ , а  $S$  не делится на  $2n$  (поскольку  $2n - 1$  не делится на 2).

Полученное противоречие показывает, что такой замкнутой ломаной не существует.

**Задача 3. Равные хорды**

а) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены 5 хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?

б) 100 точек, делящие окружность на 100 равных дуг, попарно соединены 50 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.

*Ответ:* а) не обязательно.

*Решение.* а) На рис. 117 показано такое соединение 10 точек 5 хордами, при котором все они имеют различные длины.

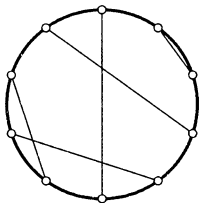


Рис. 117

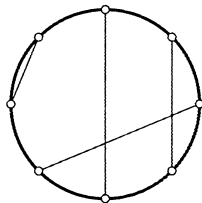


Рис. 118

б) Пусть  $2n$  точек, разбивающих окружность на  $2n$  равных дуг, попарно соединены  $n$  хордами. Выведем необходимые условия того, что все эти хорды имеют разные длины, и проверим, что число  $n = 50$  этому условию не удовлетворяет.

Занумеруем проведенные хорды числами  $1, 2, \dots, n$ . Примем длину дуги между двумя соседними точками за 1, тогда длина  $l_i$  меньшей из двух дуг, соединяющих концы  $i$ -й хорды — натуральное число, не большее  $n$  (длины полуокружности). Если длины всех хорд различны, то и числа  $l_1, l_2, \dots, l_n$  различны, поэтому среди них встречаются по разу все числа от 1 до  $n$ . Назовем  $i$ -ю хорду четной, если  $l_i$  — четное число, и нечетной в противном случае. Количество четных хорд обозначим через  $k$ . Оно, очевидно, равно количеству четных чисел, не больших  $n$ . Покажем, что  $k$  — обязательно четное число, т. е.  $k = 2m$ , тогда  $n = 4m$  или  $n = 4m + 1$ .

С этой целью окрасим поочередно данные точки в красный и черный цвет. Ясно, что любая из четных хорд соединяет точки одного цвета, а любая из  $n - k$  нечетных хорд — точки различных цветов. Поэтому ровно  $n - k$  из  $n$  красных точек служат концами нечетных хорд, а остальные  $k$  должны быть попарно соединены между собой четными хордами. Значит,  $k$  — четное число.

Итак, при  $n = 4t + 2$  (в частности, при  $n = 50$ ) и при  $n = 4t + 3$  требуемого соединения не существует. Рисунки 117 и 118 показывают, что при  $n = 4t$  и  $n = 4t + 1$  оно может существовать (на рисунках  $t = 1$ ).

#### Задача 4. Вращающийся радиус

Радиус круга с центром  $O$  равномерно вращается, поворачиваясь за одну секунду на угол, равный  $360^\circ/n$  (где  $n$  — натуральное число, большее 3). В начальный момент радиус занимал положение  $OM_0$ , через секунду — положение  $OM_1$ , еще через 2 секунды после этого — положение  $OM_2$ , еще через 3 секунды после этого — положение  $OM_3$  и т. д., еще через  $n - 1$  секунду — положение  $OM_{n-1}$ .

а) Докажите, что если  $n$  — степень числа 2, то радиусы  $OM_0, OM_1, \dots, OM_{n-1}$  делят круг на  $n$  равных секторов.

б) Возможно ли это при других значениях  $n$ ?

*Решение.* Докажем, что радиусы  $OM_0, OM_1, \dots, OM_{n-1}$  делят круг на  $n$  равных секторов в том и только в том случае, когда  $n = 2^k$  ( $k$  — натуральное число; на рис. 119 изображен случай  $k = 3$ ).

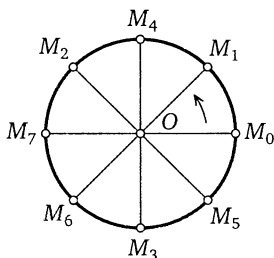


Рис. 119

Поскольку все точки  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  попадают в вершины правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $O$ , для того чтобы  $n$  радиусов  $OM_0, OM_1, \dots, OM_{n-1}$  делили круг на равные секторы, необходимо и достаточно, чтобы никакие два из этих радиусов  $OM_i$  и  $OM_j$  не совпадали, т. е. суммарный угол  $\varphi_{ij}$  от  $OM_i$  до  $OM_j$  (отсчитываемый

при вращении радиуса) не был кратен  $360^\circ = \alpha n$ , где  $\alpha = 360^\circ/n$ .

Угол от  $OM_0$  до  $OM_j$  равен

$$\alpha(1 + 2 + \dots + j) = \frac{\alpha j(j+1)}{2},$$

поэтому угол  $\varphi_{ij}$  от  $OM_i$  до  $OM_j$ , где  $0 \leq i < j \leq n-1$ , равен

$$\varphi_{ij} = \frac{\alpha j(j+1)}{2} - \frac{\alpha i(i+1)}{2} = \frac{\alpha(j-i)(j+i+1)}{2},$$

т. е. радиусы  $OM_i$  и  $OM_j$  совпадают, если и только если

$$\frac{\varphi_{ij}}{n\alpha} = \frac{(j-i)(j+i+1)}{2n}$$

является целым числом.

Отдельно докажем а) достаточность и б) необходимость условия  $n = 2^k$  для того, чтобы  $(j-i)(j+i+1)$  не делилось на  $2n$  ни при каких  $0 \leq i < j \leq n-1$ .

а) Если  $n = 2^k$ , то, поскольку  $j-i$  и  $j+i+1$  — числа разной четности,  $j-i < n = 2^k$  и  $j+i+1 < 2^{k+1}$ , произведение  $(j-i)(j+i+1)$  не делится на  $2^{k+1} = 2n$ .

б) Пусть  $n$  — не степень двойки:  $n = 2^{m-1}(2q+1)$ , где  $m$  и  $q$  — натуральные числа. Предъявим  $i$  и  $j$ , при которых  $(j-i)(j+i+1)$  делится на  $2n = 2^m(2q+1)$ . Если  $2^{m-1} > q$ , полагаем

$$\begin{cases} j+i+1 = 2^m, \\ j-i = 2q+1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} j = 2^{m-1} + q < n, \\ i = 2^{m-1} - q - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Если  $2^{m-1} \leq q$ , полагаем

$$\begin{cases} j+i+1 = 2q+1, \\ j-i = 2^m, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} j = q + 2^{m-1} < n, \\ i = q - 2^{m-1} \geq 0. \end{cases}$$

Этим завершено доказательство.

### Задача 5. Криволинейные треугольники

Окружность отсекает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги

окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, прилегающие к противоположным углам квадрата, в синий цвет, два других — в красный. Докажите, что: а) суммы красных и синих дуг равны; б) суммы периметров красных и синих треугольников равны.

*Решение.* а) Проведем в окружности диаметры, параллельные сторонам квадрата. Они делят пополам дуги, находящиеся вне квадрата (рис. 120). Чтобы получить сумму красных дуг, нужно из двух четвертей окружности вычесть по половине от каждой выступающей за квадрат дуги; точно так же получается сумма синих дуг.

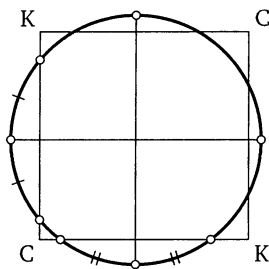


Рис. 120

б) С учетом утверждения а) нам достаточно доказать, что сумма длин красных отрезков сторон квадрата, выступающих за окружность, равна сумме длин синих отрезков. Диаметры, которые мы рассмотрели в решении задачи а), делят пополам хорды, отсекаемые на сторонах квадрата окружностью. При этом внутри каждой пары вертикальных углов, определяемых этими диаметрами, заключена половина периметра квадрата. Следовательно, и сумма длин красных уголков, и сумма длин синих уголков равны полупериметру квадрата минус полусумма хорд.

Верно и несколько более сильное утверждение: сумма горизонтальных красных отрезков равна сумме горизонтальных синих отрезков и аналогично для вертикальных.

Кроме того, квадрат в условии задачи можно заменить на прямоугольник.

### Задача 6. Диаметральные точки

На окружности отмечены  $3k$  точек, разделяющих ее на  $3k$  дуг, из которых  $k$  дуг имеют длину 1, еще  $k$  дуг — длину 2 и остальные  $k$  дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

*Решение.* Нам удобно будет излагать доказательство в форме от противного. Предположим, что каждая точка, диаметрально противоположная одной из отмеченных на окружности  $3k$  черных точек, не является отмеченной; назовем эти  $3k$  точек красными. Тогда  $6k$  черных и красных точек делят окружность на  $6k$  дуг длины 1.

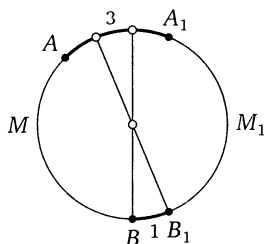


Рис. 121

Отметим особенность расположения дуг длины 3 и дуг длины 1, о которых говорится в условии. Они располагаются на окружности полярными парами: каждой дуге длины 3 противоположна дуга длины 1 (рис. 121). Если  $k$  нечетно, то найдется такая полярная пара дуг длины 3 и 1, что на дуге  $AMB$  столько же дуг длины 3, сколько и на дуге  $A_1M_1B_1$ . Но тогда на дуге  $AMB$  столько же дуг длины 1, сколько и на дуге  $A_1M_1B_1$ , ввиду парности их расположения с дугами длины 3. Значит, суммарная длина, которая остается на дуге  $AMB$  для дуг длины 2, такая же, что и на дуге  $A_1M_1B_1$ . Последнее означает, что на

$AMB$  и на  $A_1M_1B_1$  имеется по одинаковому количеству дуг длины 2, но это противоречит тому, что дуг длины 2 на окружности нечетное число.

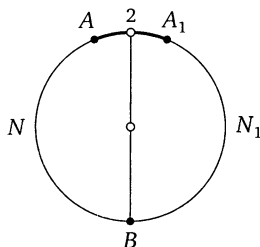


Рис. 122

Если число  $k$  четное, то найдется такая дуга длины 2, что на  $ANB$  столько же дуг длины 3, что и на  $A_1N_1B_1$  (рис. 122). Значит, на  $ANB$  столько же дуг длины 1, сколько и на  $A_1N_1B_1$ . Но тогда дуг длины 2 на  $ANB$  столько же, сколько на  $A_1N_1B_1$ . Последнее противоречит четности общего количества дуг длины 2 на окружности.

### Задача 7. Черные секторы

В круге расположены  $k$  черных секторов, угол каждого из которых меньше  $180^\circ / (k^2 - k + 1)$ . Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.

*Решение.* Нужно показать, что существует поворот круга на такой угол  $\varphi$ , что при этом всякий черный радиус перейдет в белый. Можно считать, что окружность нашего круга имеет длину  $L = k^2 - k + 1$ . Тогда каждый черный сектор высекает на ней дугу, длина которой меньше, чем 0,5. Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_k$  — средние точки этих  $k$  черных дуг. Каждая пара этих точек разбивает окружность на две дуги, так что всего таких дуг будет  $k(k-1)$ . Длины этих дуг отметим на числовом отрезке  $[0, L]$  вместе с концами отрезка, так что всего будет  $k^2 - k + 2$  отмеченных точек. Среди них найдутся две



такие соседние точки  $M$  и  $N$ , что  $MN \geq 1$ . Пусть  $S$  — расстояние от точки  $O$  до середины отрезка  $MN$ . Теперь повернем круг на такой угол  $\varphi$ , что каждая точка его окружности пройдет путь  $S$ ; при этом каждый черный радиус перейдет в белый радиус.

Утверждение задачи, вообще говоря, не сохранится, если углы всех  $k$  секторов взять по величине равными  $180^\circ / (k^2 - k + 1)$ . Опровергающий пример для  $k = 4$  показан на рис. 123. Самостоятельно убедитесь, что при любом повороте черные секторы не спрячутся в белую часть круга ( $L = 13$ , а каждая из четырех черных дуг имеет длину 0,5). Поиск опровергающих примеров для других значений  $k$  (например,  $k = 10$ ) выводит нас за пределы элементарной математики, поскольку сопрягается с теорией конечных проективных плоскостей.

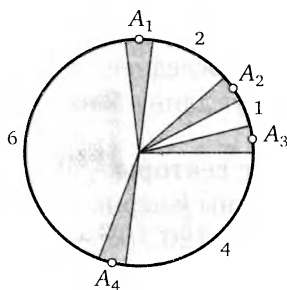


Рис. 123

## НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Естественность и оригинальность — вот два свойства, которые особенно ценны в задачах. Кажется, что они друг другу противоречат, и все же, когда они сливаются воедино, это создает эффект математической красоты. Я надеюсь, что среди предложенных здесь задач читатель обнаружит те, на которых лежит печать красоты.

### Задача 1. Равнобедренные угольники

Два чертежных равнобедренных угольника положили один на другой так, что вершины прямых углов оказались на гипотенузах (рис. 124). Рассмотрим четырехугольник с вершинами в вершинах острых углов. Докажите, что отрезок, соединяющий прямые углы угольников, делит площадь указанного четырехугольника пополам.

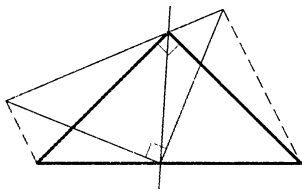


Рис. 124

*Решение.* Воспользуемся утверждением, что площадь четырехугольника равна произведению диагоналей, умноженному на половину синуса угла между ними. В четырехугольниках, на которые разрезается большой

четырехугольник, диагонали попарно перпендикулярны, поэтому углы между ними равны, равны и их длины. Из приведенного утверждения следует, что площади этих четырехугольников равны.

### Задача 2. Прямоугольные карточки

На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (т. е. каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).

а) Пусть каждая карточка имеет размеры  $1 \times 2$  клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя.)

б) Остается ли это утверждение верным, если карточки могут иметь произвольные размеры?

*Ответ:* б) нет.

*Решение.* а) Рассмотрим произвольную клетку. Пусть ее покрывают карточки  $A_0$  и  $A_1$ . Карточка  $A_1$  покрывает еще одну клетку, которая покрыта также карточкой  $A_2$  ( $A_2$  может, вообще говоря, совпасть с  $A_0$ ). Аналогично карточка  $A_2$  покрывает еще одну клетку, которую покрывает также карточка  $A_3$ , и т. д. Если очередную карточку получить нельзя, мы обрываем эту цепочку.

Ясно, что это произойдет в том случае, когда цепочка карточек замкнется, т. е. когда очередная карточка окажется одной из уже выбранных. Понятно, что такой карточкой будет карточка  $A_0$ , поскольку в противном случае какая-то клетка оказалась бы покрытой трижды. Нетрудно видеть, что в полученной цепочке число карточек четно (убедитесь в этом!). Раскрасим все карточки цепочки в два цвета: с четными номерами в один цвет, с нечетными — в другой. Легко видеть, что наше множество клеток оказывается покрытым карточками каждого цвета в один слой.

С оставшимися непокрытыми клетками поступим аналогично, пока все клетки исходного прямоугольника не будут покрыты карточками разных цветов. Этим утверждение доказано.

б) Соответствующий пример изображен на рис. 125: прямоугольный лист размером  $3 \times 2$  клетки покрыт в два слоя четырьмя карточками размером  $1 \times 2$ , одной карточкой  $1 \times 3$  и одной карточкой размером  $1 \times 1$  (на рис. 125 карточка размером  $1 \times 1$  отмечена одной точкой). Непосредственно проверяется, что это покрытие шестью карточками нельзя расслоить на два однослойных покрытия.

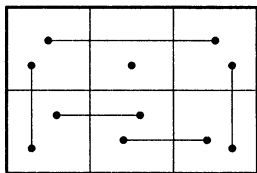


Рис. 125

### Задача 3. Число и площадь

а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

б) Правильный  $4k$ -угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы  $k$  прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны  $4k$ -угольника равна 1.

Ответ: в) сумма площадей всех прямоугольников разбиения равна  $k$ .

Решение. Примеры простейших разрезов правильного восьмиугольника на параллелограммы показаны на рис. 126. Для доказательства утверждения представим правильный восьмиугольник как пересечение двух квадратов  $P$  и  $Q$ . Пусть для определенности у квадрата  $P$  две

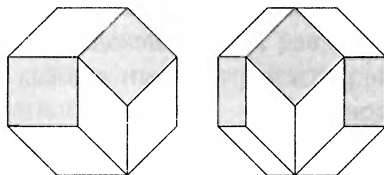


Рис. 126

стороны вертикальны, две горизонтальны (рис. 127). Будем строить из параллелограммов разбиения «дорожку», начинающуюся от левой стороны квадрата  $P$ , так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по вертикальной стороне или ее части. Ясно, что последний параллелограмм этой дорожки будет примыкать к правой стороне квадрата  $P$ . Такого же рода дорожка соединяет нижнюю сторону квадрата  $P$  с верхней. (Мы будем называть такие две дорожки перпендикулярными.) Общий параллелограмм этих двух дорожек является прямоугольником, так как его стороны параллельны сторонам квадрата  $P$ . Второй прямоугольник получим, повторив это построение для квадрата  $Q$ .

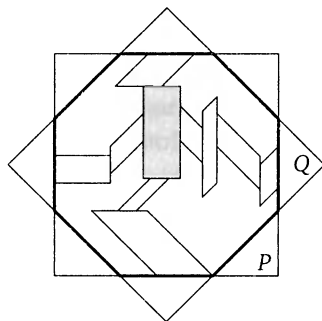


Рис. 127

б) Правильный  $4k$ -угольник является пересечением  $k$  одинаковых квадратов, каждый из которых даст свою пару перпендикулярных дорожек, а каждая пара таких

дорожек дает прямоугольник. Итого мы получим  $k$  прямоугольников.

в) Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение удовлетворяло следующему требованию: любые его два параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону. При этом стороны каждого параллелограмма нового разбиения будут параллельны сторонам содержащего его параллелограмма старого разбиения. Поэтому объединение всех новых прямоугольников совпадает с объединением всех старых прямоугольников, а значит, достаточно решить задачу для нового разбиения.

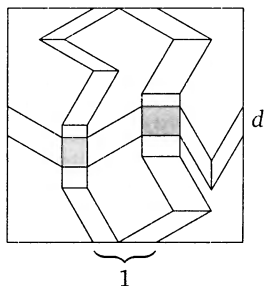


Рис. 128

Рассмотрим любую дорожку  $d$  (рис. 128). Каждые два ее соседних параллелограмма имеют целую общую сторону, длину которой назовем шириной дорожки. Таким образом, длина одной из сторон каждого прямоугольника, входящего в дорожку  $d$ , равна ее ширине, а сумма длин их вторых сторон равна суммарной ширине всех дорожек, перпендикулярных  $d$ , т. е. единице — длине стороны  $4k$ -угольника. Следовательно, общая площадь всех прямоугольников дорожки численно равна ее ширине.

Возьмем теперь один из  $k$  квадратов, дающих в пересечении  $4k$ -угольник. Сумма площадей всех прямоугольников, принадлежащих дорожкам, соединяющим две

противоположные стороны квадрата, численно равна сумме ширин этих дорожек, т. е. 1. А поскольку каждый прямоугольник разбиения получается как пересечение двух перпендикулярных дорожек (в соответствующем квадрате), сумма площадей всех прямоугольников равна числу квадратов  $k$ .

Докажите самостоятельно, что если правильный  $4k$ -угольник разрезан на минимальное возможное число параллелограммов (в этом случае все они будут ромбами), то среди них найдутся ровно  $k$  одинаковых квадратов.

Выведите следствие: правильный восьмиугольник нельзя разрезать на параллелограммы равной площади.

#### **Задача 4. Разрезание шестиугольника**

Каждая диагональ центрально-симметричного шестиугольника, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум его сторонам. Шестиугольник разрезан на  $N$  параллелограммов равной площади. Докажите, что  $N$  делится на 3.

*Решение.* Большие диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке и делят его на 6 равновеликих треугольников. Пусть  $S$  — площадь каждого из этих треугольников, а  $P$  — площадь каждого из  $N$  параллелограммов, на которые разбит шестиугольник, тогда  $N \cdot P = 6S$ . Отметим все параллелограммы, у которых есть стороны, параллельные двум противоположным сторонам шестиугольника. Нетрудно доказать, что суммарная площадь отмеченных параллелограммов равна  $4S$ , а их число равно  $4S/P$ . Но в силу равенства  $N \cdot P = 6S$  можно записать  $4S/P = 2N/3$ , а значит,  $N$  делится на 3.

#### **Задача 5. Черно-белая фигура**

Выпуклая фигура имеет четыре оси симметрии (углы между соседними осями составляют  $45^\circ$ ). Через внутреннюю точку фигуры проведены четыре параллельные

этим осям прямые, которые делят фигуру на восемь частей, закрашенных через одну (рис. 129). Докажите, что сумма площадей закрашенных частей равна сумме площадей белых частей фигуры.

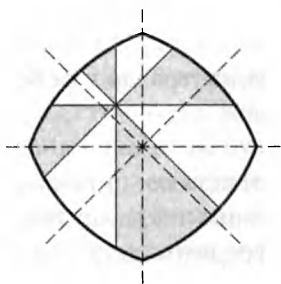


Рис. 129

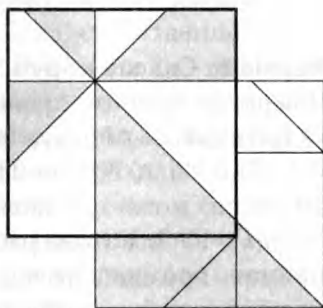


Рис. 130

*Решение.* Для доказательства равенства площадей воспользуемся методом равносоставленности. Доказательство для случая, когда наша фигура — квадрат, следует из рис. 130. На нем видно, как из закрашенных частей можно составить одну половинку нового квадрата, а из белых — другую.

Теперь решим задачу в общем виде. Вокруг нашей фигуры опишем квадрат с теми же осями симметрии (рис. 131). В силу предыдущего достаточно доказать равенство площадей закрашенных и белых частей в каемке между квадратом и фигурой. Разрезанием и симметрич-

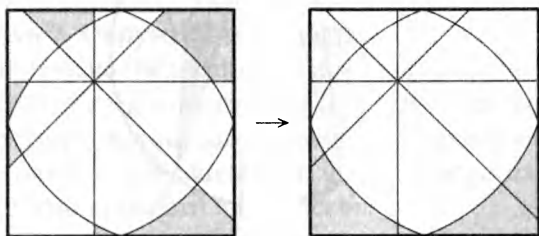


Рис. 131



ным отражением нетрудно составить из частей этой каемки такую же каемку, половина которой будет закрашенной, а половина — белой (рис. 131). Приведенное доказательство можно демонстрировать на разрезной бумажной модели.

### Задача 6. Сквозь обруч

Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протащить сквозь обруч диаметра:

а) 1; б) 0,95; в) 0,9; г) 0,85?

Ответ: а) можно; б) можно; в) можно; г) нельзя.

Решение. а) Для этого расположим тетраэдр так, чтобы прямая, проходящая через середины двух его скрепляющихся ребер, была перпендикулярна плоскости окружности (обруча) и проходила через ее центр.

б) Покажем, что тетраэдр можно протащить сквозь окружность диаметра  $3\sqrt{11} < 0,95$ . Это диаметр окружности, проходящей через вершину тетраэдра и середины двух ребер основания.

Наденем такую окружность на вершину  $A$  тетраэдра  $ABCD$  и продвинем ее так, чтобы она прошла через вершину  $B$  и середины  $M$  и  $N$  ребер  $AC$  и  $AD$  (рис. 132). После этого будем поворачивать окружность вокруг оси

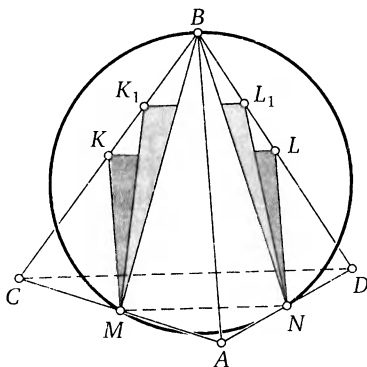


Рис. 132

$MN$  за вершину  $B$ . Плоскость окружности будет пересекать тетраэдр по трапеции  $MNL_1K_1$ . Диаметр описанной около этой трапеции окружности равен  $NK_1/\sin \angle NMK_1$ . Нетрудно подсчитать, что при вращении он уменьшается ( $NK_1$  уменьшается, а  $\sin \angle NMK_1$  растет). Поэтому окружность можно поворачивать беспрепятственно, пока она не попадет в плоскость  $MNLK$ , где  $K$  и  $L$  — середины ребер  $BC$  и  $BD$ . Теперь ее можно снять с тетраэдра через ребро  $CD$  точно так же, как мы надели ее через  $AB$  (осью вращения при этом будет прямая  $MK$  или  $NL$ ).

в) Поступаем примерно так же, как в случае б), но точки  $M$  и  $N$  берем на расстояниях  $AM = AN = 1/3$  от вершины  $A$  (на тех же ребрах). Тогда диаметр окружности, описанной около треугольника  $BMN$ , равен  $14/9\sqrt{3} < 0,9$ . Последовательность протаскивания чуть-чуть изменяется: после того как в результате вращения вокруг  $MN$  плоскость окружности станет параллельной ребру  $AB$ , окружность нужно параллельно перенести так, чтобы она коснулась ребер  $CA$  и  $CB$  в точках, отстоящих от вершины  $C$  на расстояние  $1/3$ , а затем «обратным порядком» снимать окружность через  $CD$ .

г) Равносторонний треугольник со стороной 1 нельзя протащить через окружность, диаметр которой меньше высоты этого треугольника, т. е. меньше  $\sqrt{3}/2 > 0,85$ . Но тогда тем более сквозь окружность диаметра 0,85 нельзя протащить тетраэдр, все грани которого — такие равносторонние треугольники.

### Задача 7. Окружности и сферы

а) На плоскости расположено четыре круга так: первый касается второго в точке  $A$ , второй — третьего в точке  $B$ , третий — четвертого в точке  $C$ , а четвертый — первого в точке  $D$ . Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность.

б) В пространстве расположены четыре шара так, что первый касается второго в точке  $A$ , второй — третьего

в точке  $B$ , третий — четвертого в точке  $C$ , четвертый — первого в точке  $D$ . Докажите, что через четыре названные точки можно провести окружность.

в) В пространстве расположены четыре шара так, что каждый касается трех других. Докажите, что шесть точек касания принадлежат одной сфере или одной плоскости.

*Решение.* а) Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  — отрезки общих касательных (рис. 133). Из равенств  $\angle A_1AD = \angle D_1DA$ ,  $\angle D_1DC = \angle C_1CD$ ,  $\angle B_1BC = \angle C_1CB$  и  $\angle A_1AB = \angle B_1BA$  следует, что  $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$ ; значит, около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

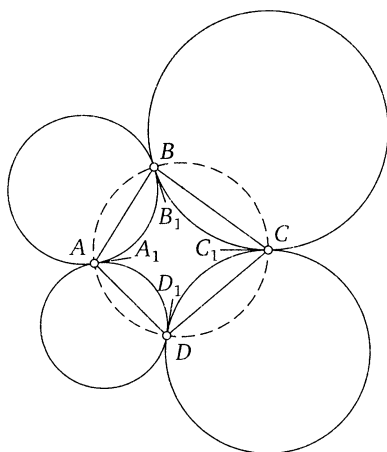


Рис. 133

б) Если центры шаров лежат в одной плоскости, то и все точки касания лежат в этой плоскости, так что в этом случае задача сводится к задаче а).

Если же центры  $O_1, O_2, O_3, O_4$  не лежат в одной плоскости, то проведем плоскость через три точки касания, например  $A, B, C$ , и докажем, что четвертая точка  $D$  принадлежит этой плоскости.

Пусть  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — расстояния от точек  $O_1, O_2, O_3, O_4$  до плоскости  $ABC$ , а  $R_1, R_2, R_3, R_4$  — радиусы сфер. Ясно,

что

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{h_2}{h_3} = \frac{R_2}{R_3}, \quad \frac{h_3}{h_4} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Перемножая эти отношения, получаем

$$\frac{h_1}{h_4} = \frac{R_1}{R_4} = \frac{O_1 D}{O_4 D},$$

что и означает принадлежность точки  $D$  плоскости  $ABC$ .

Таким образом, плоскость  $ABC$  пересекает шары по четырем кругам, касающимся друг друга в точках  $A, B, C, D$  так, как сказано в пункте а). Из этого следует утверждение задачи б).

в) Пусть  $A$  — точка касания первого и второго,  $B$  — первого и третьего,  $C$  — первого и четвертого,  $D$  — второго и третьего,  $E$  — второго и четвертого,  $F$  — третьего и четвертого шаров.

В пункте б) мы доказали, что точки  $A, C, F, D$  лежат на одной окружности. Точки  $A, E, F$  и  $B$  обладают тем же свойством. У этих двух четверок точек есть две общие точки:  $A$  и  $F$ . Поэтому эти четверки лежат на двух окружностях, находящихся или в одной плоскости (которая и будет искомой), или в разных плоскостях и имеющих при этом общую хорду  $AF$  (в этом случае через эти окружности можно провести сферу).

### Задача 8. Произвольный многоугольник

Рассматривается произвольный многоугольник (не обязательно выпуклый).

а) Всегда ли найдется хорда многоугольника, которая делит его на равновеликие части?

б) Докажите, что любой многоугольник можно разделить некоторой хордой на части, площадь каждой из которых не меньше  $1/3$  площади многоугольника.

(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику.)

Ответ: а) не всегда.

*Решение.* а) На рис. 134 изображен многоугольник, никакая хорда которого не делит его на равновеликие части.

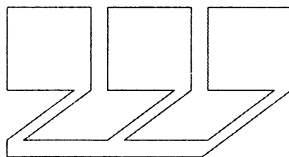


Рис. 134

б) Будем считать, что рассматриваемый многоугольник  $S$  имеет площадь 1. Если у него имеется диагональ, которая делит его на две части, площадь каждой из которых не меньше  $1/3$ , то все доказано. Пусть такой диагонали нет. Многоугольник  $S$  можно разделить диагоналями на треугольники с вершинами в вершинах многоугольника — это хорошо известный факт. Можно показать, что среди этих треугольников найдется такой треугольник  $T$ , что если его вырезать, то  $S$  распадется на три (или меньше) многоугольника  $M_1, M_2, M_3$ , каждый из которых имеет площадь меньше  $1/3$ . Заметим, что каждый из многоугольников  $M_1, M_2, M_3$  вместе с  $T$  имеет площадь больше  $1/3$ . Теперь нетрудно убедиться, что через любую вершину треугольника  $T$  можно провести хорду многоугольника  $S$ , которая разделит его на две части с площадями не меньше  $1/3$ . Такова схема доказательства этого пункта задачи.

### Задача 9. Сумма углов

На смежных сторонах  $AF$  и  $EF$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  со стороной 1 отмечены такие точки  $M_1$  и  $M_2$ , что  $FM_1 + FM_2 = 1$ . Докажите, что сумма углов, под которыми виден отрезок  $M_1M_2$  из вершин  $A, B, C, D$  и  $E$ , равна  $120^\circ$ .

*Решение.* В правильный шестиугольник  $ABCDEF$  можно вписать правильный шестиугольник  $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ .

Легко убедиться, что сумма углов, под которыми из вершины  $F$  видны отрезки  $M_1M_6$ ,  $M_6M_5$ ,  $M_5M_4$ ,  $M_4M_3$ ,  $M_3M_2$ , равна  $120^\circ$ ; с другой стороны, названные углы соответственно равны углам, составляющим искомую сумму.

### Задача 10. Красные и синие

Взятые на окружности  $2n$  точек делят ее на  $2n$  равных дуг. Из этих точек  $n$  — синие, а остальные  $n$  — красные. Докажите, что сумма длин всевозможных хорд с синими концами равна сумме длин всевозможных хорд с красными концами.

*Решение.* Доказать больше бывает легче, чем доказать меньше. Докажем больше: если найдется ровно  $k$  хорд длиной  $l$  с синими концами, то найдется ровно  $k$  хорд длиной  $l$  с красными концами. Для этого повернем нашу окружность на такой угол  $\varphi$ , чтобы каждая ее точка описала дугу, стягиваемую хордой длиной  $l$ . Тогда ровно  $k$  синих точек перейдут в синие точки, а остальные синие точки перейдут в красные. Значит, найдется ровно  $k$  красных точек, которые перейдут в красные. Последнее означает, что будет ровно  $k$  хорд длиной  $l$  с красными концами. Этим все доказано.

---

## ВАШИ ДРУЗЬЯ — ЗАДАЧИ

Очень трудно учиться плохо, гораздо легче учиться хорошо. Тому, кто тянется к математике, добиваясь ее дружбы, она платит взаимностью.

В математике есть нечто, вызывающее человеческий восторг. Достояна удивления та неотвратимость, с которой из простых и понятных первоначальных ее положений вытекают разнообразные и далеко простирающиеся следствия. При этом логические цепочки, соединяющие первые со вторыми, украшают математику подобно тому, как гирлянды украшают новогоднюю елку. А узоры из уравнений и фигур не уступают по красоте и причудливости узорам на морозном стекле. Математика не оставляет людей равнодушными. Одни с ней дружат, другие — враждуют. Подружитесь с математикой!

### Задача 1. Календарное уравнение

а) Найдутся ли натуральные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , удовлетворяющие равенству

$$28x + 30y + 31z = 365 ?$$

б) Неотрицательные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют равенству

$$28x + 30y + 31z = 365.$$

Докажите, что

$$x + y + z = 12.$$

*Решение.* а) Достаточно вспомнить календарь, чтобы утвердительно ответить на вопрос. В обычном году 365 дней, при этом 28 дней только в одном месяце ( $x = 1$ ),

по 30 дней в четырех месяцах ( $y = 4$ ) и по 31 дню в семи месяцах ( $z = 7$ ). Но уравнение имеет и другие решения:  $x = 0$ ,  $y = 7$ ,  $z = 5$  и  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 9$ .

б) Допустим, что  $x + y + z \leq 11$ . Тогда

$$28x + 30y + 31z \leq 11 \cdot 31 = 341.$$

Значит,  $x + y + z \geq 11$ . Допустим, что  $x + y + z \geq 13$ . Но тогда мы получим

$$28x + 30y + 31z \geq 13 \cdot 28 = 364,$$

при этом равенство возникает только в случае  $x = 13$ ,  $y = z = 0$ , во всех остальных случаях

$$28x + 30y + 31z \geq 366.$$

Осталось заключить, что

$$x + y + z = 12.$$

### Задача 2. Сложите квадрат

На клетчатой бумаге нарисован шестиугольник (рис. 135). Разрежьте его на три части, из которых можно сложить квадрат.

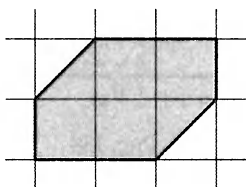


Рис. 135

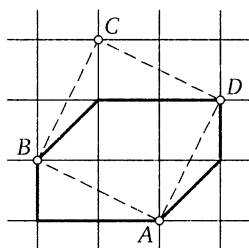


Рис. 136

*Решение.* На рис. 136 показано нужное разрезание и способ сложения квадрата  $ABCD$ .

### Задача 3. Лжецы и правдецы

На острове живут лжецы и правдецы. Лжецы говорят только ложь, а правдецы — только правду. Некоторые



жители заявили, что на острове нечетное число лжецов, а остальные заявили, что на острове четное число правдецов. Может ли число жителей острова быть нечетным?

*Ответ:* не может.

*Решение.* Оба заявления не могут быть правдой, так как среди заявлявших были лжецы. Но оба заявления не могут быть и ложью, так как среди заявлявших были правдецы. Значит, одно заявление является ложным, а другое правдивым. Это означает, что либо на острове четное число лжецов и четное число правдецов, либо нечетное число лжецов и нечетное число правдецов. В обоих случаях число жителей острова четно.

#### Задача 4. Середины сторон

На сторонах треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$ ,  $\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A$  и  $\angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B$  (рис. 137). Докажите, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон треугольника  $ABC$ .

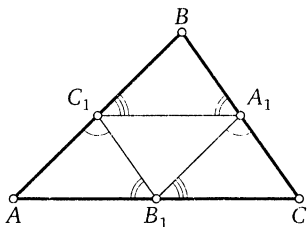


Рис. 137

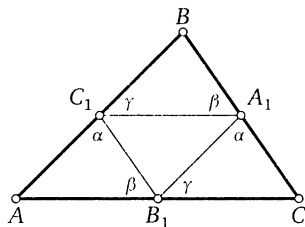


Рис. 138

*Решение.* Пусть

$$\begin{aligned} \angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C = \alpha, \quad \angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A = \beta \\ \text{и} \quad \angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B = \gamma \end{aligned}$$

(рис. 138). Если сложить все углы треугольников  $AB_1C_1$ ,  $BA_1C_1$  и  $CB_1A_1$  и вычесть из них углы треугольника  $ABC$ , то получим  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$ , т. е.  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ . Теперь, учтя, что  $\angle BA_1C = \alpha + \beta + \angle B_1A_1C_1 = 180^\circ$ , полу-

чаем, что  $\angle B_1 A_1 C_1 = \gamma$ . Аналогично получим два других равенства:

$$\angle C_1 B_1 A_1 = \alpha, \quad \angle B_1 C_1 A_1 = \beta.$$

Отсюда следует, что треугольник  $A_1 B_1 C_1$  является треугольником средних линий в треугольнике  $ABC$ .

### Задача 5. Набор гирек

Сто гирек поставлены в ряд. Известно, что массы любых двух соседних гирек отличаются на 1 г. Докажите, что гирьки можно разложить на две чашки весов по 50 штук на каждую так, что весы будут в равновесии.

*Решение.* Разобьем гирьки на 50 пар так, что в каждой паре будут соседние гирьки. Возьмем 25 пар (любых), для каждой из них гирьку меньшей массы положим на левую чашку весов, а гирьку большей массы — на правую. Для остальных 25 пар поступим наоборот: гирьки меньшей массы из каждой пары положим на правую чашку весов, а большей — на левую. После этого весы будут в равновесии.

### Задача 6. Четвертая степень

Шесть целых чисел удовлетворяют равенствам

$$a + b + c = 0 \quad \text{и} \quad x + y + z = 0.$$

Докажите, что выражение

$$(xyc^2 + yza^2 + zxb^2)(abz^2 + bcx^2 + cay^2)$$

является четвертой степенью целого числа.

*Решение.* Непосредственно проверяются равенства

$$xyc^2 + yza^2 + zxb^2 = abz^2 + bcx^2 + cay^2 = -(xb - ya)^2.$$

Отсюда следует, что выражение из условия задачи равно  $(xb - ya)^4$ .

**Задача 7. Квадрат на прямоугольники**

Квадрат со стороной 1 разрезан на несколько прямоугольников. В каждом прямоугольнике отмечена одна сторона. Докажите, что сумма длин отмеченных сторон не меньше 1.

*Решение.* Две стороны исходного квадрата будем считать горизонтальными, а две другие — вертикальными. В соответствии с условием задачи у каждого прямоугольника отмечена одна сторона, либо горизонтальная, либо вертикальная. Если всякая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, пересекает хотя бы одну отмеченную сторону, то ясно, что сумма длин отмеченных сторон не меньше стороны квадрата. Если же найдется горизонтальная прямая, пересекающая квадрат, но не пересекающая ни одну из отмеченных сторон, то у всех прямоугольников, которые она пересекает, отмеченными оказались горизонтальные стороны. Сумма их длин равна 1, поэтому сумма длин всех отмеченных сторон не меньше 1.

**Задача 8. Трехзначные числа**

Три трехзначных числа, в записи которых участвуют все цифры, кроме нуля, дают в сумме 1665. В каждом числе первую цифру поменяли местами с последней и получили три новых трехзначных числа. Чему равна сумма новых чисел?

*Ответ:* искомая сумма равна 1665.

*Решение.* Сумма последних цифр трех исходных чисел равна 5, 15 или 25. Но 5 и 25 исключаются, так как они не представимы в виде суммы трех различных цифр (от 1 до 9), значит, остается 15. Следовательно, и сумма средних цифр, и сумма первых цифр также равны 15. Теперь ясно, что, сделав перестановку цифр, мы снова получим три числа, сумма которых равна 1665.

Напоследок предъявим тройку чисел (одну из возможных), удовлетворяющую условиям задачи: 159, 672, 834.

**Задача 9. Постройте точки**

На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  задана точка  $B_1$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  постройте такие точки  $C_1$  и  $A_1$  соответственно, чтобы площади треугольников  $AC_1B_1$ ,  $BA_1C_1$  и  $CB_1A_1$  были равны (рис. 139).

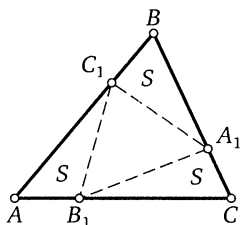


Рис. 139

*Решение.* На стороне  $BC$  построим такую точку  $M$ , что отрезок  $B_1M$  параллелен  $AB$ , на стороне  $AB$  — такую точку  $C_1$ , что отрезок  $MC_1$  параллелен  $AC$ , на стороне  $AC$  — такую точку  $N$ , что отрезок  $C_1N$  параллелен  $BC$ , и на стороне  $BC$  — такую точку  $A_1$ , что отрезок  $NA_1$  параллелен  $AB$  (рис. 140).

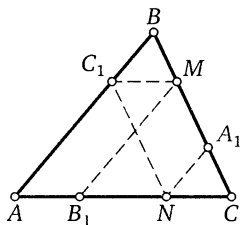


Рис. 140

Докажем, что площади треугольников  $AC_1B_1$ ,  $BA_1C_1$  и  $CB_1A_1$  равны. Площади параллелограммов  $AC_1MB_1$  и  $BA_1NC_1$  равны, так как каждый из них равен величине параллелограмма  $C_1MCN$ . Значит, треугольники  $AC_1B_1$  и  $BA_1C_1$ , занимая половину площадей равновеликих параллелограммов  $AC_1MB_1$  и  $BA_1NC_1$ , равновелики. Аналогично проверяем равновеликость других пар треугольников.

**Задача 10. Покрытие из квадратов**

Красный квадрат площадью 1 покрывают 100 белых квадратов, площадь каждого из которых равна 1. При этом стороны каждого белого квадрата параллельны сторонам красного. Всегда ли можно удалить 1 белый квадрат так, что остальные все еще будут покрывать целиком красный квадрат?

*Ответ:* не всегда.

*Решение.* Покажем, что удалить требуемым образом белый квадрат удастся не всегда. Для этого построим специальное покрытие красного квадрата из 100 белых квадратов. Диагональ  $AC$  красного квадрата  $ABCD$  разобьем на 100 равных отрезков, концы которых последовательно обозначим числами 1, 2, ..., 101 (точка  $A$  обозначена числом 1, точка  $C$  — числом 101). Заметим, что для каждой пары точек  $K$  и  $K + 1$  ( $1 \leq K \leq 100$ ) существуют ровно два квадрата площади 1, стороны которых параллельны сторонам красного квадрата и проходят через точки  $K$  и  $K + 1$ , причем один из этих квадратов содержит вершину  $B$  и не содержит  $D$ , а другой, наоборот, содержит  $D$  и не содержит  $B$ .

Если  $K$  нечетно, то в качестве белого квадрата возьмем тот квадрат, который содержит  $B$ , а если  $K$  четно, то тот квадрат, который содержит  $D$ .

Набранные таким образом 100 белых квадратов покрывают целиком красный квадрат, но если удалить любой из них, то часть красного квадрата окажется непокрытой. В самом деле, если удалить белый квадрат, стороны которого проходят через точки  $K$  и  $K + 1$ , то отрезок диагонали с концами  $K$  и  $K + 1$  покрыт не будет.

**Задача 11. Одно из трех**

Числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yx + zx) + 4xyz = 0,5.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно 0,5.

*Решение.* Заметим, что

$$\begin{aligned}x + y + z - 2(xy + yz + zx) + 4xyz - 0,5 = \\ = 0,5(2x - 1)(2y - 1)(2z - 1) = 0.\end{aligned}$$

Значит, хотя бы одно из выражений в скобках равно 0, а одно из чисел  $x$ ,  $y$  или  $z$  равно 0,5.

### Задача 12. Синие и красные числа

Некоторые из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{200}$  будем считать синими, а остальные — красными. Если стереть все красные числа, то останутся все натуральные числа от 1 до 100, записанные в порядке возрастания. Если же стереть все синие числа, то останутся все натуральные числа от 100 до 1, записанные в порядке убывания. Докажите, что среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  содержатся все натуральные числа от 1 до 100 включительно.

*Решение.* Предположим, что среди  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  содержится  $k$  синих чисел и соответственно  $100 - k$  красных чисел. Тогда эти  $k$  синих чисел суть числа от 1 до  $k$  включительно, а  $100 - k$  красных чисел — числа от  $k + 1$  до 100 включительно (идущие в обратном порядке). Значит, все числа от 1 до 100 налицо.

### Задача 13. На шахматной доске

На шахматной доске размером  $11 \times 11$  белых клеток на одну больше, чем черных. На черных клетках стоят 11 ладей. Докажите, что среди них есть две ладьи, которые бьют друг друга.

*Решение.* Допустим на минуту, что никакие из 11 ладей не бьют друг друга. Тогда в каждом вертикальном ряду клеток и в каждом горизонтальном ряду клеток стоит по одной ладье. Значит, в вертикальных рядах с нечетными номерами стоит ровно шесть ладей. Но в таком случае эти шесть ладей стоят в пяти горизонтальных рядах с четными номерами. Следовательно, в одном из этих

пяти горизонтальных рядов найдутся две ладьи, которые и бьют друг друга.

#### Задача 14. Равенство площадей

На стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  взята точка  $M$ , а на сторонах  $AB$  и  $CD$  — такие точки  $P$  и  $Q$ , что отрезок  $PM$  параллелен диагонали  $BD$ , а отрезок  $QM$  параллелен диагонали  $AC$  (рис. 141). Докажите, что площади треугольников  $PMB$  и  $QMC$  равны.

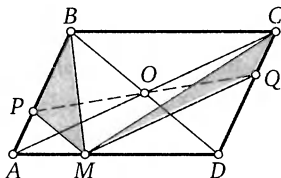


Рис. 141

*Решение.* Сначала заметим, что точки  $P$  и  $Q$  симметричны относительно центра параллелограмма  $O$ . Ясно, что площадь треугольника  $PMB$  равна площади треугольника  $OPM$ , а площадь треугольника  $QCM$  равна площади треугольника  $OQM$ . Но площади треугольников  $OPM$  и  $OQM$  равны. Значит, равны и площади треугольников  $PMB$  и  $QMC$ .

#### Задача 15. Не больше нуля

Докажите неравенство

$$(x^2 + y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(y^2 + z^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 + x^2) \leq 0.$$

*Решение.* Достаточно убедиться, что сумма любых двух слагаемых в левой части неравенства не превосходит нуля. В самом деле (для первых двух слагаемых),

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) + (x^2 - y^2)(y^2 + z^2)(z^2 - x^2) &= \\ &= -2y^2(x^2 - z^2)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Аналогичные неравенства выполнены для любой пары слагаемых.

**Задача 16. Таблица чисел**

В таблице

$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	$y_2$	$y_3$
$z_1$	$z_2$	$z_3$

суммы чисел в каждой строке и в каждом столбце одинаковы. Докажите равенство

$$x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3.$$

*Решение.* Пусть  $a$  — сумма чисел строки (или столбца) таблицы. Выразим элементы третьей строки и третьего столбца через остальные элементы таблицы:

$$x_3 = a - x_1 - x_2, \quad y_3 = a - y_1 - y_2,$$

$$z_1 = a - x_1 - y_1, \quad z_2 = a - x_2 - y_2,$$

$$z_3 = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 - a.$$

Подставив эти выражения в равенство и раскрыв скобки, убеждаемся непосредственно в его справедливости.

**Задача 17. Круги в треугольнике**

В равностороннем треугольнике расположены 9 попарно непересекающихся кругов радиуса 1. Докажите, что в этом треугольнике можно расположить 10 кругов радиуса 1 так, чтобы они попарно не пересекались.

*Решение.* Докажем предварительно следующее утверждение: если в правильном шестиугольнике расположены 6 точек, расстояние между любыми двумя из которых больше  $r$ , то сторона шестиугольника больше  $r$ . Для доказательства опишем окружность около шестиугольника и проведем в ней 6 радиусов через точки множества. Возьмем один из 6 секторов, на которые при этом разбился круг, с углом не больше  $60^\circ$ . Раз у такого сектора



на радиусах находится по точке, расстояние между которыми больше  $r$ , то радиус сектора тоже больше  $r$ . Значит, сторона шестиугольника больше  $r$ .

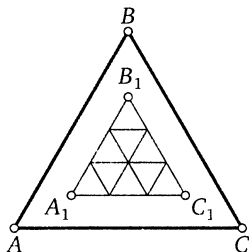


Рис. 142

Теперь докажем утверждение задачи. В равностороннем треугольнике  $ABC$  возьмем треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы его стороны отстояли на 1 от сторон треугольника  $ABC$  (рис. 142). Линиями, параллельными сторонам, разрежем треугольник  $A_1B_1C_1$  на 9 равных равносторонних треугольничков. Возможны два случая: первый — в каждом из 9 треугольничков находится по одному центру 9 кругов; второй — в каком-то из 9 треугольничков оказались два центра. В первом случае, применив вспомогательное утверждение к шестиугольнику (треугольнику  $A_1B_1C_1$  без угловых треугольничков), заключаем, что треть стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  больше 2, а сторона больше 6. Во втором случае заключаем то же самое: сторона треугольника  $A_1B_1C_1$  больше 6. Тогда остается заметить, что 10 кругов радиуса 1 с центрами в вершинах треугольничков, на которые разбит треугольник  $A_1B_1C_1$ , попарно не пересекаются и лежат внутри треугольника  $ABC$ .

### Задача 18. Кубы

а) В сферу вписаны несколько кубов, при этом каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все кубы имеют общую вершину.

б) Четыре куба расположены в пространстве так, что каждые три из них имеют общую вершину. Верно ли, что все четыре обязаны иметь общую вершину?

*Ответ:* б) неверно.

*Решение.* а) Пусть в сферу вписаны кубы  $K_1, K_2, \dots, K_n$  ( $n > 3$ ). Заметим сначала, что если два куба вписаны в сферу и имеют общую вершину, то они имеют общую диагональ, которая является диаметром сферы. При этом если два куба имеют две общие диагонали, то они совпадают.

По условию задачи кубы  $K_1, K_2$  и  $K_3$  имеют общую вершину, а значит, они имеют общую диагональ  $d_1$  с одним из концов в этой вершине. Кубы  $K_2, K_3$  и  $K_4$  тоже имеют общую диагональ  $d_2$ . Если диагонали  $d_1$  и  $d_2$  совпали, то все четыре куба имеют одну общую диагональ (а значит, целых две общие вершины). Если же  $d_1$  и  $d_2$  не совпали, то кубы  $K_2$  и  $K_3$  имеют две общие диагонали  $d_1$  и  $d_2$ , а значит, кубы  $K_2$  и  $K_3$  совпадают, и тогда по условию кубы  $K_1, K_2, K_3$  и  $K_4$  имеют общую вершину.

Приведенное рассуждение можно считать первым шагом индукции, но переход от  $n$  к  $n + 1$  проводится точно так же.

б) Возьмем вспомогательный куб и впишем в него вспомогательный правильный тетраэдр с вершинами в вершинах куба. Четыре нужных нам куба получаются, когда мы симметрично отразим вспомогательный куб относительно каждой из четырех граней вспомогательного тетраэдра. Каждые три из этих кубов имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

### Задача 19. Равные суммы

Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части. Докажите, что в каждой части можно взять по 100 чисел с равными суммами.

*Решение.* Так как обе части бесконечны, то найдется бесконечное число таких пар последовательных нату-

ральных чисел, что меньшее число в каждой паре принадлежит первой части, а большее — второй. Точно так же найдется бесконечное число таких пар последовательных натуральных чисел, что большее число в каждой паре принадлежит первой части, а меньшее — второй.

Ввиду этого ясно, что найдутся такие 50 пар первого типа и 50 пар второго типа, что никакие две пары не пересекаются. Итого имеем 200 натуральных чисел, 100 из которых принадлежат первой части, а другие 100 — второй, при этом их суммы равны.

### Задача 20. Равенства кратных

Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $ab + bc = ca$ . Докажите равенства

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(c, a)$$

(НОК — наименьшее общее кратное).

*Решение.* Докажем, что наименьшее общее кратное трех чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  равно наименьшему общему кратному любых двух из них, например чисел  $a$  и  $b$ :  $\text{НОК}(a, b, c) = \text{НОК}(a, b)$ . Этого будет достаточно. Очевидно, что число  $c$  является делителем произведения  $ab$ . Для нашей цели достаточно доказать, что число  $c$  является делителем числа  $\text{НОК}(a, b)$ . Пусть  $p^m$  — сомножитель в разложении числа  $c$  на простые множители,  $p^n$  — сомножитель в разложении числа  $a$ , а  $p^k$  — сомножитель в разложении числа  $b$ , при этом  $n + k \geq m$ . Предположим, что  $\max(n, k) < m$ . В равенстве  $ab = c(a - b)$  число  $p$  входит в разложение левой части в степени  $n + k$ , а в разложение правой части — в степени  $m + \min(n, k)$ . Но  $n + k = \max(n, k) + \min(n, k) < m + \min(n, k)$ , и мы получили противоречие. Значит,  $\max(n, k) \geq m$ , и все доказано.

Дополнительно получим следствие из утверждения задачи. Сначала вспомним, что для любой пары натуральных чисел  $x$  и  $y$  справедливо равенство

$$\text{НОК}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, y) = xy.$$

Тогда следствие выглядит так: если натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют равенству  $ab + bc = ca$ , то имеет место равенство

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = \text{НОД}(c, a).$$

### Задача 21. Суммы радиусов

Точка внутри равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из нее опущены перпендикуляры на его стороны. Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников, закрашенные через один (рис. 143). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в незакрашенные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в закрашенные треугольники.

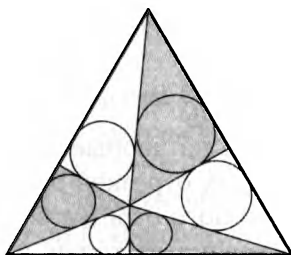


Рис. 143

*Решение.* Доказательство опирается на два вспомогательных утверждения.

1. Диаметр вписанной в прямоугольный треугольник окружности равен сумме длин катетов минус длина гипотенузы.

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 144.

2. Сумма длин катетов незакрашенных треугольников, лежащих на сторонах равностороннего треугольника, равна сумме длин катетов закрашенных треугольников, лежащих на тех же сторонах.

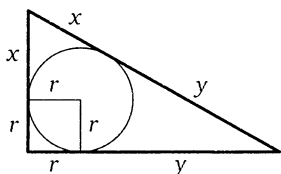


Рис. 144

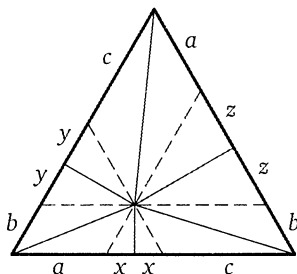


Рис. 145

Справедливость этого утверждения легко усмотреть из рисунка 145.

Теперь, применив первое вспомогательное утверждение к закрашенным и незакрашенным треугольникам с учетом второго вспомогательного утверждения, мы получаем требуемое.

### Задача 22. Две суммы

Отрезок  $AB$  разбит на черные и белые отрезки так, что сумма длин черных отрезков равна сумме длин белых. Для каждого черного отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки  $A$  до его середины и все такие произведения суммируем. Для каждого белого отрезка берем произведение его длины на расстояние от точки  $B$  до его середины и все такие произведения тоже суммируем. Докажите, что полученные суммы равны.

*Решение.* Нужно доказать, что «черная» сумма равна «белой» сумме. Построим такой параллелограмм  $PAQB$ , что его стороны  $PA$  и  $QB$  равны и перпендикулярны диагонали  $AB$  (рис. 146). Каждое слагаемое «черной» суммы равно площади темно-серой трапеции, построенной над соответствующим черным отрезком, а каждое слагаемое «белой» суммы равно площади светло-серой трапеции, построенной под соответствующим белым отрезком.

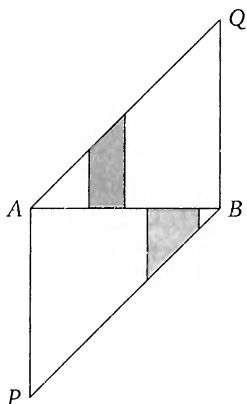


Рис. 146

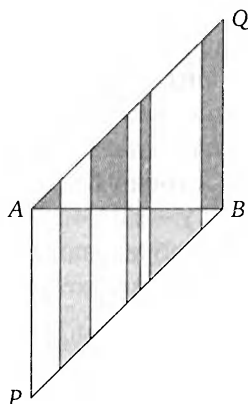


Рис. 147

Значит, нужно доказать, что сумма площадей темно-серых трапеций равна сумме площадей светло-серых трапеций.

Разрежем параллелограмм  $PAQB$  на вертикальные полосы, одни из которых содержат темно-серые трапеции, а другие — светло-серые (рис. 147). Объединение полос (параллелограммов), содержащих темно-серые трапеции, назовем фигурой  $F$ . В силу условия задачи площадь фигуры  $F$  равна половине площади параллелограмма  $PAQB$ .

Площадь треугольника  $ABQ$  тоже равна половине площади  $PAQB$ . Значит, та часть площади параллелограмма  $PAQB$ , которая покрыта треугольником  $ABQ$  и фигурой  $F$  дважды (это все темно-серые трапеции), равна той части площади параллелограмма  $PAQB$ , которая не покрыта ими вовсе (это все светло-серые трапеции).

### Задача 23. Суммы произведений

В таблице размера  $n \times n$  ( $n \geq 3$ ) в каждой строке и в каждом столбце ровно в трех клетках записаны числа, остальные клетки пустые. При этом сумма чисел в каж-

дой строке и в каждом столбце одна и та же. Докажите, что сумма произведений чисел, стоящих строках, равна сумме произведений чисел, стоящих в столбцах.

*Решение.* Каждая из интересующих нас сумм  $S_1$  и  $S_2$  состоит из  $n$  слагаемых вида  $xyz$ , где  $x + y + z = h$ ; при этом  $h$  постоянно для всех слагаемых. Можно записать  $xyz = (h - y - z)(h - x - z)(h - x - y)$ . Совершив элементарные преобразования с этим равенством, мы получим новое равенство, которое позволит нам решить задачу:

$$6xyz = h^3 - 3h(x^2 + y^2 + z^2) + 2(x^3 + y^3 + z^3). \quad (*)$$

Обозначим через  $A$  сумму квадратов всех чисел нашей таблицы, а через  $B$  — сумму кубов этих чисел. В силу равенства (\*) можно записать

$$6S_1 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

а также

$$6S_2 = nh^3 - 3hA + 2B,$$

откуда и следует требуемое равенство:

$$S_1 = S_2.$$

---

## ЗАДАЧИ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

Нельзя (да и не нужно) решать все задачи, которые накопила математика. Поэтому приходится выбирать, опираясь на признаки привлекательности и поучительности, занимательности и сложности, которые замечаешь в задачах. При этом проверяются и вырабатываются вкус и математическая культура. Одним словом, скажи мне, какие задачи ты решаешь, и я скажу, какой ты математик.

### Задача 1. В углу доски

На шахматной доске отмечаются два таких поля, что конь с одного из них может пройти на другое не меньше чем за 4 хода, а король — не меньше чем за  $N$  ходов. Какое наименьшее значение может принять  $N$ ?

*Ответ:*  $N = 1$ .

*Решение.* Два поля в углу доски (рис. 148) обладают тем свойством, что конь может пройти с одного на другое за четыре хода, а король — за один.

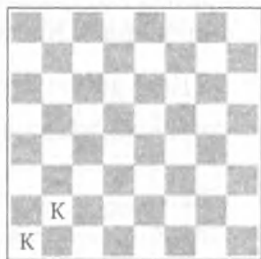


Рис. 148



**Задача 2. Зигзаг в круге**

У ломаной  $ABCDE$  все вершины лежат на окружности (рис. 149). Углы в вершинах  $B$ ,  $C$  и  $D$  равны по  $45^\circ$ . Докажите, что  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$ .

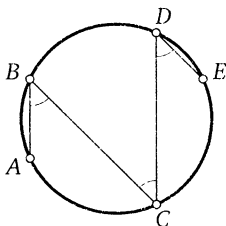


Рис. 149

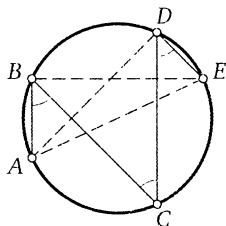


Рис. 150

*Решение.* Заметив, что  $AE$  — диаметр окружности (см. рис. 150), можем написать равенства

$$AB^2 + BE^2 = AE^2$$

и

$$AD^2 + DE^2 = AE^2.$$

После этого, учитывая, что  $BE = CD$  и  $AD = BC$ , окончательно запишем требуемое равенство:  $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$ .

**Задача 3. Точный квадрат**

Докажите, что число

$$1996^2 + 1994 \cdot 1995 \cdot 1997 \cdot 1998$$

является точным квадратом натурального числа.

*Решение.* Нетрудно проверить тождество

$$n^2 + (n-2)(n-1)(n+1)(n+2) = (n^2 - 2)^2,$$

из которого следует, что число, указанное в условии, равно  $(1996^2 - 2)^2$ .

**Задача 4. Шесть точек**

Укажите такие шесть точек на плоскости, каждые пять из которых можно покрыть двумя квадратами с диа-

гоналями, равными 1, но все шесть нельзя покрыть двумя кругами диаметром 1.

*Решение.* Расположим на плоскости единичный квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и отметим в нем четыре вершины и две точки внутри: правее центра на 0,1 и ниже центра на 0,1. Легко убедиться, что любые пять точек можно покрыть двумя квадратами с диагональю 1. Далее заметим, что кругом диаметром 1 нельзя покрыть три вершины квадрата, поскольку тогда круг должен покрыть диагональ. Следовательно, каждый круг должен покрывать по две вершины квадрата. Пусть, например, один круг покрывает две левые вершины, другой — две правые. Тогда правая и левая стороны совпадают с диаметрами кругов и отмеченная точка ниже центра останется непокрытой. При покрытии верхней и нижней пар вершин непокрытой остается точка правее центра.

### Задача 5. На клетчатой бумаге

Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются узлами клетчатой бумаги. Может ли угол  $ABC$  быть равным  $30^\circ$ ?

*Ответ:* не может.

*Решение.* Прежде всего заметим, что площадь треугольника  $ABC$ , которую мы обозначим  $S$ , является рациональным числом, так как она получается вычитанием из площади прямоугольника площадей нескольких треугольников (рис. 151), а их площади рациональны (мы считаем площадь одной клетки равной 1). С другой сто-

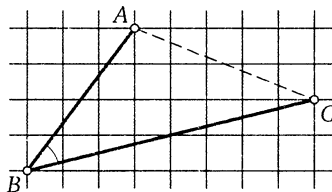


Рис. 151

роны,

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC,$$

а в силу теоремы косинусов

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC.$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \angle ABC = \frac{4S}{AB^2 + BC^2 - AC^2}.$$

Значит,  $\operatorname{tg} \angle ABC$  — рациональное число, и  $\angle ABC \neq 30^\circ$ . По этой же причине он не может быть равным и  $60^\circ$ , а значит, в частности, не существует равностороннего треугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги.

### Задача 6. Сумма углов

На стороне  $AC$  равностороннего треугольника  $ABC$  взята такая точка  $M_0$ , что  $4AM_0 = AC$ . Точки  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  делят сторону  $BC$  на четыре равные части. Докажите, что сумма углов, под которыми отрезок  $AM_0$  виден из точек  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ , равна  $30^\circ$  (рис. 152).

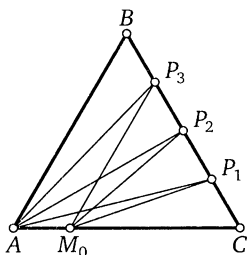


Рис. 152

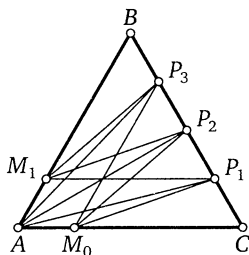


Рис. 153

*Решение.* Возьмем на стороне  $AB$  такую точку  $M_1$ , что  $4AM_1 = AB$  (рис. 153). Отрезок  $AM_1$  виден из точек  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  под теми же углами, что и отрезок  $AM_0$ , так как картина симметричная. Значит, сумма углов, под которыми из точек  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  виден отрезок  $M_0M_1$ , равна удвоенной искомой сумме углов. Найдём величину этой удвоенной суммы.

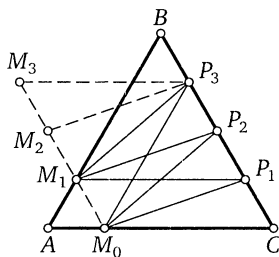


Рис. 154

На  $M_0P_3$  как на основании построим равносторонний треугольник  $M_0P_3M_3$  и возьмем точку  $M_2$ , которая вместе с точкой  $M_1$  делит его сторону  $M_0M_3$  на три равные части (рис. 154). Замечаем, что  $\angle M_3P_3M_2 = \angle M_1P_1M_0$  и  $\angle M_2P_3M_1 = \angle M_1P_2M_0$ . Значит, удвоенная сумма равна величине угла  $M_0P_3M_3$ , т. е.  $60^\circ$ . Искомая сумма равна  $30^\circ$ .

### Задача 7. На одной прямой

На плоскости расположены  $n$  точек. Для любого из  $n$  чисел  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1} - 1$  среди этих точек найдется такая пара, что расстояние между ними равно этому числу. Докажите, что все  $n$  точек лежат на одной прямой.

*Решение.* Пары точек, на которых реализуются указанные в условии расстояния, соединим  $n$  отрезками. По индукции несложно доказать, что либо все эти отрезки, либо какая-то их часть составляют замкнутую ломаную линию  $L$ .

Естественно, что длина наибольшего звена ломаной  $L$  не больше суммы длин остальных ее звеньев. Но среди чисел  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1} - 1$  только одно не больше суммы всех предыдущих, а именно  $2^{n-1} - 1$ . Значит, ломаная  $L$  будет иметь  $n$  звеньев с длинами  $1, 2, 4, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1} - 1$ . Так как длина наибольшего звена ломаной равна сумме длин остальных ее звеньев, то все они будут лежать на этом наибольшем звене (ломаная получилась вырожденной), а все  $n$  точек лежат на одной прямой.

**Задача 8. Бронзовые гири**

Десять железных гирек попарно различных масс стоят по кругу. Между каждыми двумя соседними железными гирьками ставим бронзовую гирьку, масса которой равна модулю разности масс этих железных гирек. Докажите, что десять бронзовых гирек можно разложить на две чашки весов так, что весы будут в равновесии.

*Решение.* Пусть  $m_1, m_2, \dots, m_{10}$  — массы железных гирек по часовой стрелке, начиная с некоторой. Можно записать очевидное равенство

$$(m_1 - m_2) + (m_2 - m_3) + \dots + (m_9 - m_{10}) + (m_{10} - m_1) = 0.$$

В этом равенстве одни выражения в скобках положительны, а другие отрицательны. Положительные выражения оставим в левой части, а отрицательные перенесем в правую часть. Получим новое равенство, которое и будет соответствовать равновесному разложению бронзовых гирек на левой и правой чашках весов.

**Задача 9. Параллелограмм в параллелограмме**

В выпуклый четырехугольник вписан параллелограмм, вершины которого делят стороны четырехугольника в постоянном отношении  $1 : 2$  (считая по часовой стрелке). Докажите, что исходный четырехугольник тоже является параллелограммом.

*Решение.* Пусть  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — вершины параллелограмма, лежащие на сторонах  $AB, BC, CD$  и  $DA$  четырехугольника  $ABCD$ . Обозначим через  $A_2, B_2, C_2, D_2$  середины отрезков  $A_1B, B_1C, C_1D$  и  $D_1A$  соответственно, и пусть  $O$  — центр параллелограмма. Отрезок  $A_1D_2$  параллелен диагонали  $BD$  и втрое короче ее, то же верно и для отрезка  $B_2C_1$ , поэтому  $A_1B_2C_1D_2$  — параллелограмм. Его центр симметрии совпадает с серединой отрезка  $A_1C_1$ , т. е. с  $O$ . При симметрии относительно  $O$  точка  $B_2$  перейдет в  $D_2$ , а  $B_1$  — в  $D_1$ , поэтому отрезок  $B_1B_2$  параллелен  $D_1D_2$ , т. е.  $AD$  параллелен  $BC$ . Аналогично доказы-

вадается, что  $AB$  параллелен  $CD$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм.

### Задача 10. Числа на круге

Круг разделен радиусами на  $2n$  равных секторов, из которых какие-то  $n$  белые, а остальные  $n$  — серые. В белые секторы, начиная с некоторого, по ходу часовой стрелки последовательно вписаны все натуральные числа от 1 до  $n$ . В серые секторы, начиная с некоторого, против хода часовой стрелки тоже последовательно вписаны все числа от 1 до  $n$ . Докажите, что найдется полукруг, в секторы которого вписаны все числа от 1 до  $n$ .

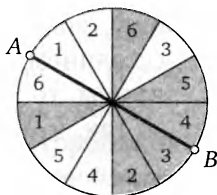


Рис. 155

*Решение.* Нужно доказать, что найдется диаметр  $AB$ , разделяющий сразу все пары одинаковых чисел (рис. 155). Условимся называть серыми числа, стоящие в серых секторах, и белыми — стоящие в белых секторах. Расстоянием между двумя числами  $a$  и  $b$  назовем количество чисел, расположенных на меньшей дуге между числами  $a$  и  $b$ . Числа, вписанные в секторы, разбиваются на пары равных. Выберем ту пару равных чисел, расстояние между которыми наименьшее (если таких пар несколько, выберем любую из них). Пусть для определенности выбранная пара — серая единица и белая единица, причем меньшая дуга  $\omega$  между ними идет от серой единицы к белой по часовой стрелке. На дуге  $\omega$  либо нет чисел (т. е. две единицы стоят рядом), либо все числа одного цвета, иначе расстояние между серым и белым числами  $n$  было

бы меньше, чем расстояние между единицами. Пусть все числа на этой дуге (если они есть) белые (случай, когда они серые, аналогичен). Проведем диаметр, отделяющий белую единицу от числа, следующего за ней против часовой стрелки; покажем, что этот диаметр искомый. Действительно, рассмотрим полукруг, содержащий белую единицу. Прочтем белые числа, записанные в этом полукруге, начиная с единицы, по часовой стрелке — это числа  $1, 2, \dots, l$  ( $l$  — некоторое число). Прочтем теперь серые числа. Поскольку на дуге  $\omega$  нет серых чисел, это будут числа  $n, n-1, \dots, n-m$  ( $m$  — некоторое число). Так как всего в полукруге  $n$  чисел, то в нем записаны все числа от 1 до  $n$  по одному разу.

Мы разобрали ситуацию, когда пара разноцветных чисел с наименьшим расстоянием представлена единицами. Если же это не единицы, то можно устроить циклическую перенумерацию так, чтобы они стали единицами.

### **Задача 11. Многогранник**

В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся три ребра. Одна грань многогранника красная, остальные — синие. Известно, что любая синяя грань является многоугольником, около которого можно описать окружность. Докажите, что и красная грань является многоугольником, около которого можно описать окружность.

*Решение.* Проведя для синих граней рассуждение, аналогичное решению задачи 11 из § 10, докажем, что около этого многогранника можно описать сферу.

Плоскость, которой принадлежит красная грань, пересекает сферу  $S$  по окружности, являющейся описанной окружностью для красной грани.

### **Задача 12. Разрезание трапеции**

Докажите, что любой четырехугольник можно разрезать на три трапеции.

*Решение.* Если четырехугольник является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется просто, как показано на рис. 156.



Рис. 156

Если же четырехугольник  $ABCD$  (выпуклый или невыпуклый) не является параллелограммом или трапецией, то разрезание осуществляется следующим образом.

Пусть  $B$  — наибольший внутренний угол данного четырехугольника  $ABCD$ . Проведем разрез  $BM$  из вершины  $B$ , параллельный стороне  $AD$  (точка  $M$  попадет внутрь четырехугольника). Из точки  $M$  проведем разрезы  $MN$  и  $MK$ , параллельные сторонам  $BC$  и  $CD$  соответственно (рис. 157). После этого необходимое разрезание налицо.

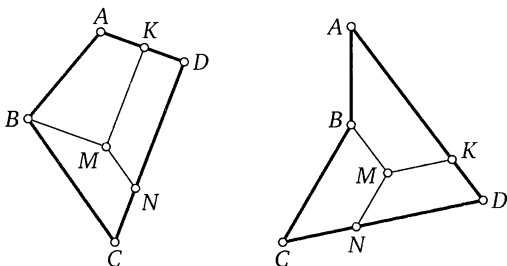


Рис. 157

### Задача 13. Последний прыжок

На числовой прямой отмечены точки с координатами  $1, 2, 3, \dots, 2n$ . Блоха начинает прыгать из точки 1 и через  $2n$  прыжков, побывав во всех отмеченных точках, возвращается в исходный пункт. Известно, что сумма длин всех прыжков, за исключением последнего, равна  $n(2n - 1)$ . Докажите, что длина последнего прыжка блохи равна  $n$ .



*Решение.* Натуральные числа от 1 до  $2n$  расставим в той последовательности, в какой в них попадает блоха:

$$x_1, x_2, \dots, x_{2n}. \quad (1)$$

Общая длина всех прыжков представляется циклической суммой, оценка сверху для которой такая:

$$\begin{aligned} & |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_1| \leq \\ & \leq 2(2n + 2n - 1 + \dots + n + 1) - 2(n + n - 1 + \dots + 2 + 1) = 2n^2. \end{aligned}$$

В силу этого и условия задачи длина последнего прыжка блохи не превосходит  $n$ , т. е.  $|x_{2n} - x_1| \leq n$ , или  $x_{2n} \leq n + 1$ . Нам нужно доказать, что  $x_{2n} = n + 1$ .

Допустим противное, т. е. предположим, что  $x_{2n} \leq n$ . Но тогда в последовательности (1) найдутся два соседних члена  $x_i$  и  $x_{i+1}$ , каждый из которых больше  $n$ . Перестроим последовательность (1):

$$x_1, x_2, \dots, x_i, x_{2n}, x_{2n-1}, \dots, x_{i+1}. \quad (2)$$

Циклическая сумма  $S$  для последовательности (2) удовлетворяет оценке сверху:

$$|x_1 - x_2| + \dots + |x_i - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n-1}| + \dots + |x_{i+1} - x_1| \leq 2n^2.$$

В то же время

$$S = n(2n - 1) - |x_i - x_{i+1}| + |x_i - x_{2n}| + |x_{i+1} - x_1|.$$

Оценив последнее выражение для  $S$ , легко заключить, что  $S > 2n^2$ , и мы получаем противоречие. Значит,  $x_{2n} = n + 1$ .

#### Задача 14. Одно из них

Для чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  нашлись два таких различных натуральных числа  $m$  и  $n$ , что  $a^m + b^m + c^m = 0$  и  $a^n + b^n + c^n = 0$ . Докажите, что  $abc = 0$ .

*Решение.* Пусть числа  $m$  и  $n$  нечетны и  $abc \neq 0$ . Тогда условия можно переписать в виде

$$x^n + y^n = z^n, \quad x^m + y^m = z^m, \quad \text{где } x, y, z > 0.$$

Если  $x = y$ , то  $2^m = 2^n$ .

Пусть  $x > y$ ,  $n > m$ . Положим  $y/x = t < 1$ . Тогда

$$(1 + t^n)^m = (1 + t^m)^n.$$

Но  $0 < t < 1$ , поэтому

$$\begin{aligned} 1 + t^m &> 1 + t^n, \\ (1 + t^m)^n &> (1 + t^n)^m. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает равенство  $abc = 0$ .

*Замечание.* Используя свойства функции  $y = x^\alpha$ , где  $\alpha > 1$ , нетрудно доказать следующий результат, более сильный, чем утверждение задачи.

*Предложение.* Пусть

$$\begin{aligned} a^m + b^m + c^m + d^m &= 0, \\ a^n + b^n + c^n + d^n &= 0, \end{aligned}$$

где  $m \neq n$ . Тогда числа  $a, b, c, d$  можно разбить на пары вида  $(k, -k), (l, -l)$ .

### Задача 15. На сфере

Через точку внутри сферы проведены три попарно перпендикулярные плоскости, которые рассекли сферу на 8 криволинейных треугольников. Эти треугольники закрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета (рис. 158). Докажите, что площадь черной части сферы равна площади ее белой части.

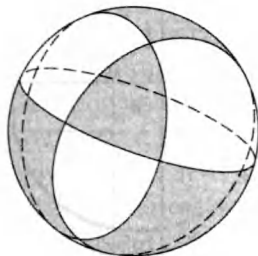


Рис. 158

*Решение.* Докажем равноставленность черной и белой частей сферы, тем самым будет доказана их равновеликость. Обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  плоскости, рассекающие сферу, а через  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  и  $\bar{\gamma}$  — плоскости, соответственно симметричные им относительно центра сферы. Эти шесть плоскостей рассекают сферу на попарно равные куски так, что в каждой паре один кусок белый, а другой черный. Однако этот факт легко услышать, но труднее увидеть.

Чтобы увидеть было легче, будем следовать принципу постепенности. Между плоскостями  $\alpha$  и  $\bar{\alpha}$ , которые будем считать горизонтальными, расположен сферический пояс, выше и ниже которого располагаются две сферические шапки. Заметим, что плоскости  $\beta$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\gamma$  и  $\bar{\gamma}$  разрезают эти шапки на части так, что каждая белая часть одной шапки симметрична черной части другой шапки относительно горизонтальной плоскости  $\pi$ , проходящей через центр сферы.

Осталось разобраться со сферическим поясом. Для этого воспроизведем на рисунке сечение сферы плоскостью  $\pi$ , на котором показаны следы секущих плоскостей и следы черных и белых кусков сферического пояса (рис. 159). Одинаковым номерам соответствуют следы тех кусков, которые симметричны и имеют разные цвета.

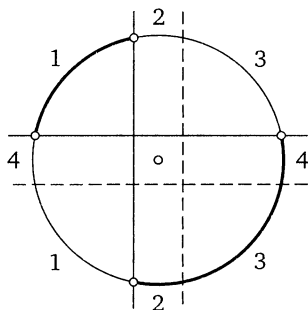


Рис. 159

Напоследок заметим, что объектом утверждения задачи может выступать не только сфера, но и любая поверхность выпуклого тела, имеющего три попарно перпендикулярные плоскости симметрии (например, эллипсоид или правильный октаэдр; случай с октаэдром особенно интересен, поскольку у него существуют различные попарно перпендикулярные тройки плоскостей симметрии). Но в указанном смысле также любопытен и случай с обыкновенным кубом (рис. 160).

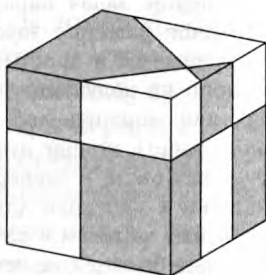


Рис. 160

## ЗАДАЧИ КАК ЗАДАЧИ

Математике нельзя научиться, наблюдая, как это делает сосед. Активное обучение математике предполагает решение задач нарастающей трудности, ибо постоянное решение задач привычной трудности превращается в простые упражнения. Если задача упорно не получается, то можно смотреть в потолок или морщить лоб гармошкой (это не противопоказано!), но еще лучше с карандашом и блокнотом пробовать и экспериментировать: проводить оценки и проверки для частных значений, делать эскизные чертежи в разных ракурсах и т. п. «Мой карандаш бывает еще остроумней моей головы», — признавался Леонард Эйлер.

### Задача 1. Пять углов

На клетчатой бумаге нарисованы пять углов (рис. 161). Найдите их сумму.

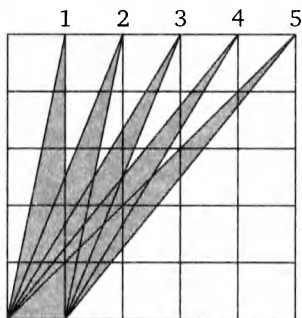


Рис. 161

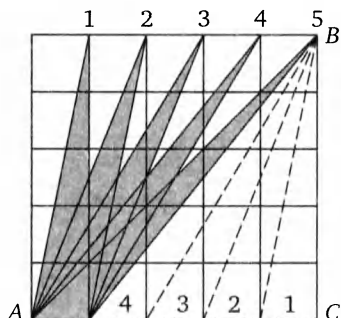


Рис. 162

*Решение.* Угол  $ABC$  составляется из пяти углов, соответственно равных углам в условии задачи (рис. 162). Поэтому искомая сумма равна  $45^\circ$ .

### Задача 2. Замкнутая ломаная

Замкнутая ломаная линия на плоскости такова, что каждые два ее звена имеют ровно одну общую точку. Докажите, что число ее звеньев нечетно.

*Решение.* В случае, когда ломаная имеет три звена, все ясно. Пусть теперь  $A_1, A_2, A_3, A_4$  — четыре последовательные вершины ломаной. По условию звенья  $A_1A_2$  и  $A_3A_4$  пересекаются, поэтому точки  $A_1$  и  $A_4$  лежат по одну сторону от прямой  $A_2A_3$ . Теперь пойдем по ломаной из вершины  $A_4$  в вершину  $A_5$  и далее. На каждом шаге мы будем пересекать прямую  $A_2A_3$ . Чтобы попасть в вершину  $A_1$ , расположенную с той же стороны от прямой  $A_2A_3$ , что и вершина  $A_4$ , мы должны будем пройти четное число звеньев. Кроме них наша ломаная имеет еще три звена:  $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4$ . Поэтому общее число ее звеньев нечетно.

### Задача 3. Перпендикулярность отрезков

На сторонах квадрата  $ABCD$  со стороной 1 взяты такие точки  $P, Q, M, N$ , что  $AP + AN + CQ + CM = 2$  (рис. 163). Докажите, что отрезок  $PM$  перпендикулярен отрезку  $QN$ .

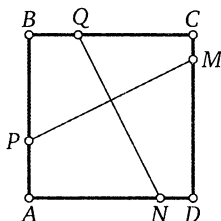


Рис. 163

*Решение.* Повернем квадрат на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг точки  $A$ . Тогда точка  $B$  перейдет в  $D$ ,  $C$  — в  $C_1$ ,

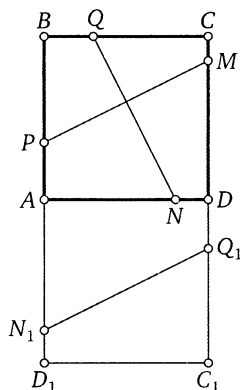


Рис. 164

$D$  — в  $D_1$ ,  $Q$  — в  $Q_1$ ,  $N$  — в  $N_1$  (рис. 164). Ясно, что  $AN = AN_1$ ,  $CQ = C_1Q_1$ . Тогда  $PN_1 = AP + AN_1 = AP + AN = 2 - (CM + CQ) = CC_1 - (CM + C_1Q_1) = MQ_1$ . Отсюда следует, что  $PMQ_1N_1$  — параллелограмм. Поэтому отрезок  $PM$  параллелен  $N_1Q_1$ , и, следовательно,  $PM$  перпендикулярен  $QN$ .

#### Задача 4. Хорды круга

В круге провели несколько хорд так, что каждая хорда проходит через середину какой-либо другой из проведенных хорд. Докажите, что все эти хорды являются диаметрами круга.

*Решение.* Возьмем хорду  $a$ , наиболее удаленную от центра круга  $O$ , и пусть точка  $A$  — ее середина. По условию на хорде  $a$  имеется точка  $B$ , являющаяся серединой одной из проведенных хорд  $b$ . Значит,  $OB \geq OA$  как наклонная, но, с другой стороны,  $OB \leq OA$  в силу выбора хорды  $a$ . Поэтому  $OB = OA$ , т. е. точки  $A$  и  $B$  совпадают. Так как середины хорд  $a$  и  $b$  совпадают, они являются диаметрами. Но раз диаметром является хорда, наиболее удаленная от центра  $O$ , то и все проведенные хорды являются диаметрами.

**Задача 5. Три числа**

Числа  $x, y, z$  удовлетворяют равенству

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = xyz.$$

Докажите, что среди них есть два числа, сумма которых равна нулю.

*Решение.* Из тождества

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = (x + y)(y + z)(z + x) + xyz$$

с учетом условия задачи следует, что

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 0.$$

Значит, какое-то из выражений в скобках обращается в нуль.

**Задача 6. Еще один**

В равностороннем треугольнике расположены пять попарно непересекающихся кругов радиуса 1. Докажите, что в этом треугольнике можно расположить шесть кругов радиуса 1 так, чтобы они попарно не пересекались.

*Решение.* Внутри равностороннего треугольника  $\Delta$  возьмем другой равносторонний треугольник  $\Delta_1$  так, что стороны  $\Delta_1$  будут отстоять на расстояние 1 от соответствующих параллельных им сторон  $\Delta$  (рис. 165).

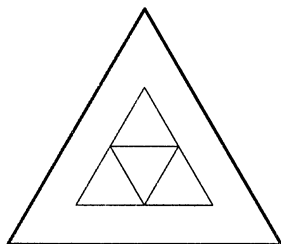


Рис. 165

Средние линии разрезают  $\Delta_1$  на четыре треугольника. Так как центры пяти кругов принадлежат  $\Delta_1$ , то найдутся



два центра, которые принадлежат одному из указанных четырех треугольников. Значит, половина стороны треугольника  $\Delta_1$  больше 2, ибо расстояние между любыми двумя центрами пяти кругов больше 2. Сторона треугольника  $\Delta_1$  больше 4, шесть кругов радиуса 1 с центрами в вершинах  $\Delta_1$  и в серединах его сторон попарно не пересекаются и расположены внутри  $\Delta$ .

### Задача 7. Числа на кубике

На каждой грани кубика написано число. Для всяких двух смежных граней найдем модуль разности написанных на них чисел. Докажите, что 12 полученных чисел можно разбить на две группы по 6 чисел в каждой с равными суммами.

*Решение.* Возьмем четыре вершины куба  $A, B, C$  и  $D$ , никакие две из которых не являются концами одного ребра. Рассмотрим числа  $a \geq b \geq c$  на трех гранях с вершиной  $A$  и числа  $d \geq e \geq f$ , написанные на трех гранях с вершиной  $B$ . Парам граней с вершиной  $A$  соответствуют числа  $a - b, b - c, a - c$ , а парам граней с вершиной  $B$  — числа  $d - e, e - f, d - f$ . Разобьем эти 6 чисел на две тройки

$$\{a - b, b - c, d - f\}, \{a - c, d - e, e - f\}$$

с равными суммами  $a - c + d - f$ . Такую же процедуру повторим для вершин  $C$  и  $D$ . Объединив тройки по две, получим две шестерки с равными суммами.

### Задача 8. Составим прямоугольник

Квадрат  $2 \times 2$  разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые закрашены в черный и белый цвет в шахматном порядке. При этом оказалось, что общая площадь черных прямоугольников равна общей площади белых прямоугольников. Докажите, что из черных прямоугольников можно сложить прямоугольник  $1 \times 2$ .

*Решение.* Прямые разрежали квадрат на четные и нечетные вертикальные и горизонтальные полосы. Переставим все вертикальные полосы так, чтобы все нечетные из них были подряд слева, а все четные подряд справа. После чего все горизонтальные полосы переставим так, чтобы все нечетные были сверху, а все четные снизу (рис. 166). В результате мы пришли к ситуации, когда квадрат  $2 \times 2$  разрезан на четыре прямоугольника и общая площадь двух черных из них равна общей площади двух белых. Тогда из двух черных прямоугольников в силу условия задачи можно сложить один прямоугольник размером  $1 \times 2$ . В этом легко убедиться самостоятельно.

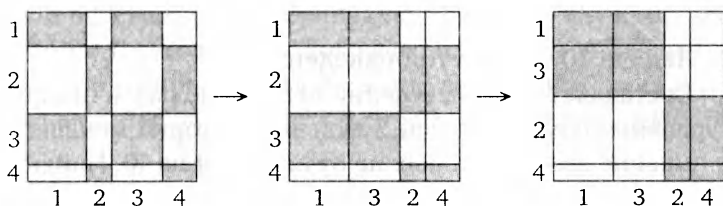


Рис. 166

### Задача 9. Что больше?

Правильный девятиугольник разрезан диагоналями на белые и закрашенные треугольники (рис. 167). Определите, какая часть площади больше: белая или закрашенная.

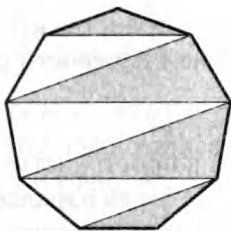


Рис. 167

*Решение.* Дополнительные диагонали разрезают девятиугольник на попарно равные белые и закрашенные треугольники (рис. 168), лишь для закрашенного треугольника 7 не найдется пары. Значит, закрашенная часть площади больше.

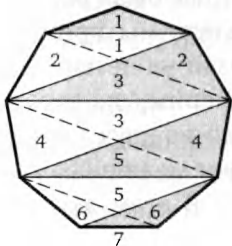


Рис. 168

### Задача 10. Сумма произведений

Составляется произведение 10 попарно различных натуральных сомножителей, каждый из которых меньше 21 и никакие два из которых не отличаются на 10. Найдите сумму всевозможных таких произведений.

*Решение.* Число  $\frac{30!!}{10!!}$  можно записать в виде произведения  $\frac{30!!}{10!!} = (1 + 11)(2 + 12) \dots (10 + 20)$ . Если раскрыть скобки в этом произведении, то получится сумма  $2^{10}$  слагаемых, представляющих собой все возможные произведения, оговоренные в условии задачи.

### Задача 11. Куб и плоскость

Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

*Ответ:* да, существует.

*Решение.* Возьмем в пространстве произвольный куб с длиной ребра 7. На четырех параллельных ребрах куба  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  возьмем по одной точке: на  $AA_1$  точку  $A$ ; на  $BB_1$  — такую точку  $K$ , что  $BK = 1$ ; на  $CC_1$  — такую

точку  $M$ , что  $CM = 3$ ; на  $DD_1$  — такую точку  $N$ , что  $DN = 2$ . Нетрудно проверить, что отрезки  $AM$  и  $KN$  пересекаются. Значит, точки  $A$ ,  $K$ ,  $M$  и  $N$  лежат в одной плоскости  $\pi$ . Восемь вершин куба проектируются на прямую, перпендикулярную плоскости  $\pi$ , в восьмерку равноотстоящих точек. Применив принцип подобия, получаем положительный ответ на вопрос задачи.

### Задача 12. Квадраты расстояний

Около равностороннего треугольника описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до сторон треугольника равна квадрату его высоты.

*Решение.* Рассмотрим точку  $X$ , лежащую на окружности, и опустим из нее перпендикуляры  $XA_1$ ,  $XB_1$  и  $XC_1$  на стороны треугольника. Докажем, что точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой. В самом деле,  $\angle AXC_1 = \angle CXA_1$ , так как  $\angle AXC = \angle C_1XA_1 = 120^\circ$  (рис. 169). Но  $\angle AXC_1 =$

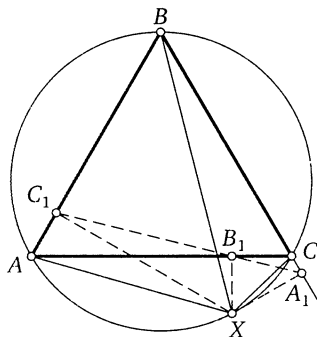


Рис. 169

$= \angle AB_1C_1$  и  $\angle CXA_1 = \angle CB_1A_1$ , так как около четырехугольников  $AXB_1C_1$  и  $CA_1XB_1$  можно описать окружности. Значит,  $\angle AB_1C_1 = \angle A_1B_1C$  и точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  лежат на одной прямой. Так как

$$S_{A_1XC_1} = S_{C_1XB_1} + S_{B_1XA_1},$$

а углы  $C_1XB_1$  и  $B_1XA_1$  равны по  $60^\circ$ , получаем, что

$$XC_1 \cdot XA_1 = XC_1 \cdot XB_1 + XB_1 \cdot XA_1. \quad (1)$$

Далее, видно, что  $S_{AXB} + S_{BXC} - S_{AXC} = S_{ABC}$ , и если сторону треугольника  $ABC$  принять за 1, а его высоту обозначить за  $H$ , то отсюда следует, что

$$XC_1 + XA_1 - XB_1 = H. \quad (2)$$

Возведя в квадрат равенство (2), получим

$$XC_1^2 + XA_1^2 + XB_1^2 + 2XC_1 \cdot XA_1 - 2XC_1 \cdot XB_1 - 2XA_1 \cdot XB_1 = H^2.$$

Но с учетом равенства (1) можно окончательно записать

$$XC_1^2 + XA_1^2 + XB_1^2 = H^2,$$

что и требовалось доказать.

### Задача 13. Геометрическое место точек

Три попарно скрещивающихся ребра куба принадлежат трем прямым. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

*Решение.* Здесь нам удобно будет прибегнуть к методу координат. Начало координат расположим в одной из вершин куба, не принадлежащих ребрам из условия задачи, а оси координат пустим по трем его ребрам; при этом длину ребра куба примем за 1 (рис. 170). Приравнявая

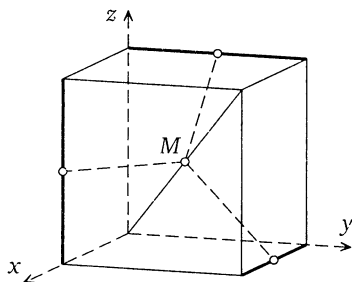


Рис. 170

квадраты расстояний от точки  $M(x, y, z)$  до трех прямых, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} z^2 - x^2 = 2y - 2x, \\ y^2 - z^2 = 2x - 2z, \\ x^2 - y^2 = 2z - 2y. \end{cases}$$

Заметим, что  $x$ ,  $y$  и  $z$  одного знака. Не умаляя общности, можно считать, что  $x \geq y \geq z$ , тогда во всех случаях, кроме  $x = y = z$ , получим противоречие. Таким образом, искомым геометрическим местом точек является прямая, содержащая свободную диагональ куба (диагональ, не имеющую общих точек с тремя попарно скрещивающимися ребрами).

#### Задача 14. Клетчатый квадрат

Квадрат клетчатой бумаги, состоящий из  $n \times n$  клеток, разрезан на  $2n$  прямоугольников. При этом каждый прямоугольник расположен либо целиком ниже, либо целиком выше ступенчатой ломаной, разделяющей квадрат (рис. 171). Докажите, что найдется клетка клетчатой бумаги, являющаяся одним из названных прямоугольников.

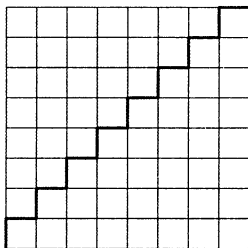


Рис. 171

*Решение.* Ступенчатая ломаная разрезает квадрат на два ступенчатых треугольника  $T_1$  и  $T_2$ , при этом основание  $T_1$  состоит из  $n$  клеток, а основание  $T_2$  — из  $n - 1$

клетки. В силу условия задачи один из них разрезан на  $m$ , а другой — на  $k$  прямоугольников, причем  $m + k = 2n$ .

Пока что фиксируем внимание на отдельно взятом ступенчатом треугольнике  $T$ , в основании которого  $s$  клеток (рис. 172). Так как при разрезании  $T$  на прямоугольники любые две точки из набора  $A_1, A_2, \dots, A_s$  должны принадлежать разным прямоугольникам, можно заключить, что  $T$  нельзя разрезать на менее чем  $s$  прямоугольников.

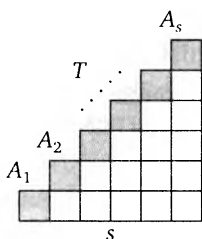


Рис. 172

Разберем далее тот случай, когда  $T$  разрезан в точности на  $s$  прямоугольников; тогда каждая из точек  $A_1, A_2, \dots, A_s$  принадлежит только одному из них и, более того, каждая из  $s$  закрашенных клеток принадлежит целиком только одному из  $s$  прямоугольников. Незакрашенных клеток, примыкающих по сторонам к закрашенным, на единицу меньше, чем закрашенных, поэтому хотя бы один из  $s$  прямоугольников не выйдет за пределы своей закрашенной клетки, т. е. будет с ней совпадать.

Возвращаясь к ступенчатым треугольникам  $T_1$  и  $T_2$ , можно сказать, что  $m \geq n$ ,  $k \geq n - 1$ . Но так как  $m + k = 2n$ , то либо  $m = n$ , либо  $k = n - 1$ . Значит, либо в  $T_1$ , либо в  $T_2$  найдется прямоугольник, совпадающий с клеткой клетчатой бумаги.

### Задача 15. Площади четырехугольников

Окружность пересекает стороны прямоугольника в восьми точках, которые последовательно занумерованы.

Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами в точках с нечетными номерами равна площади четырехугольника с вершинами в точках с четными номерами (рис. 173).

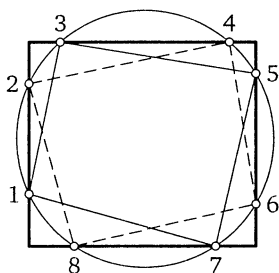


Рис. 173

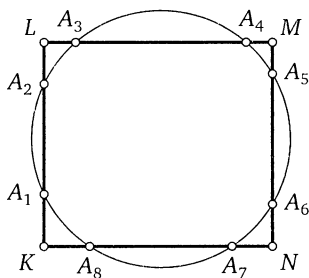


Рис. 174

*Решение.* Сначала запишем вспомогательное равенство для отрезков горизонтальных сторон прямоугольника  $KLMN$ , выступающих за пределы окружности (рис. 174):

$$LA_3 + NA_7 = MA_4 + KA_8.$$

Это равенство следует хотя бы из того, что трапеция  $A_8A_3A_4A_7$  равнобедренная. Аналогично получаем другое вспомогательное равенство для отрезков вертикальных сторон:

$$KA_1 + MA_5 = LA_2 + NA_6.$$

Третье вспомогательное равенство получим, если приравняем произведения левых и произведения правых частей первых двух.

Обозначив через  $a$  длину горизонтальной стороны прямоугольника  $KLMN$ , а через  $b$  — длину его вертикальной стороны, запишем основное равенство:

$$\begin{aligned} LA_3(b - KA_1) + NA_7(b - MA_5) + KA_1(a - NA_7) + \\ + MA_5(a - LA_3) = MA_4(b - NA_6) + KA_8(b - LA_2) + \\ + LA_2(a - MA_4) + NA_6(a - KA_8). \end{aligned}$$



Это равенство непосредственно следует из трех вспомогательных равенств. Оно означает, что сумма площадей четырех прямоугольных треугольников  $LA_1A_3$ ,  $NA_5A_7$ ,  $KA_7A_1$  и  $MA_3A_5$  равна сумме площадей треугольников  $MA_6A_4$ ,  $KA_2A_8$ ,  $LA_4A_2$  и  $NA_8A_6$ . Но в таком случае площади четырехугольников  $A_1A_3A_5A_7$  и  $A_2A_4A_6A_8$  равны.

### Задача 16. Общая вершина

а) Несколько треугольников расположены на плоскости так, что каждые четыре из них имеют общую вершину. Докажите, что все треугольники имеют общую вершину.

б) Несколько прямоугольников расположены на плоскости так, что каждые три из них имеют общую вершину. Докажите, что все прямоугольники имеют общую вершину.

*Решение.* а) Пусть на плоскости расположены треугольники  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ( $n \geq 5$ ), каждые четыре из которых имеют общую вершину. Сначала положим  $n = 5$ . Из треугольников  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$  можно составить четыре четверки, содержащие треугольник  $T_1$ . Каждая такая четверка треугольников имеет общую вершину, и эта точка является вершиной треугольника  $T_1$ . Но у  $T_1$  лишь три вершины, и, значит, есть такая его вершина, которая является общей для двух из четырех четверок. Очевидно, что эта избранная вершина треугольника  $T_1$  является вершиной всех пяти треугольников.

Подобные рассуждения первого шага индукции проходят без изменений и для индуктивного перехода от  $n$  к  $n + 1$ .

В то же время нужно заметить, что в утверждении пункта а) слова «каждые четыре» нельзя заменить на «каждые три». В самом деле, четыре вершины квадрата являются вершинами четырех треугольников, каждые три из которых имеют общую вершину, но все четыре общей вершины не имеют.

б) Предварительно сделаем два элементарных геометрических замечания. Первое: четыре различные точки на плоскости, из которых каждые три являются вершинами прямоугольного треугольника, все вместе являются вершинами прямоугольника. Второе: два прямоугольника, имеющие три общие вершины, совпадают.

Теперь рассмотрим расположение прямоугольников  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ( $n \geq 4$ ), каждые три из которых имеют общую вершину. Сначала положим  $n = 4$ . Допустим, что прямоугольники  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$  не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют: точки  $A, B, C$  и  $D$  являются общими вершинами для всевозможных троек наших прямоугольников. Тогда всякие три из этих точек являются вершинами одного из прямоугольников, и в силу предварительных замечаний  $ABCD$  — это прямоугольник, который совпадает с каждым из четырех прямоугольников  $P_1, P_2, P_3$  и  $P_4$ . Налицо противоречие с допущением.

Разберем случай  $n = 5$ : допустим, что прямоугольники  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  не имеют общей вершины, хотя каждые три из них общую вершину имеют. Но тогда в силу доказанного каждые четыре из них имеют общую вершину. В этом случае точки  $A, B, C, D$  и  $E$  являются общими вершинами для всевозможных четверок прямоугольников. При этом каждые четыре из этих точек являются вершинами одного прямоугольника. Но таких пяти различных точек на плоскости существовать не может, значит, две из этих точек совпадают. Тогда эти совпавшие точки являются общей вершиной для всех пяти прямоугольников — противоречие. Индуктивный переход от  $n$  к  $n + 1$  реализуется так же, как переход от 4 к 5.

### Задача 17. Модули

Все натуральные числа от 1 до  $2n$  записаны в такой последовательности  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ , что

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1| = 2n^2.$$

Докажите, что

$$|a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| = n^2.$$

*Решение.* Для произвольной расстановки натуральных чисел от 1 до  $2n$  в последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  обозначим

$$S = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| + |a_{2n} - a_1|.$$

В результате раскрытия модуля в любом слагаемом этой суммы получим два натуральных числа — одно с плюсом, другое с минусом. Для того чтобы сумма  $S$  достигла наибольшего возможного значения, необходимо и достаточно, чтобы числа от 1 до  $n$  получали минусы, а числа от  $n + 1$  до  $2n$  — плюсы. Тогда

$$S = 2[(2n + 2n - 1 + \dots + n + 1) - (n + n - 1 + \dots + 1)] = 2n^2.$$

Значит, каждое слагаемое суммы модулей — это модуль разности двух натуральных чисел, одно из которых больше  $n$ , а другое не превосходит  $n$ . Но тогда

$$\begin{aligned} |a_1 - a_2| + |a_3 - a_4| + \dots + |a_{2n-1} - a_{2n}| &= \\ &= (2n + 2n - 1 + \dots + n + 1) - (n + n - 1 + \dots + 1) = n^2. \end{aligned}$$

### Задача 18. Углы поворотов

Из точки на плоскости выходят  $n$  красных и  $n$  синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до  $n$ . В порядке нумерации каждый красный вектор поворачивается по часовой стрелке и занимает положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов все красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.

*Решение.* Можно считать, что все векторы имеют единичную длину, а их концы располагаются на окружности  $Q$  единичного радиуса. Таким образом, на окружности  $Q$

имеется  $n$  синих и  $n$  красных точек, при этом красные точки как-то занумерованы числами от 1 до  $n$ .

Пусть  $C$  — синяя точка, в которую переходит  $n$ -я красная точка. Ближайшую к  $C$  по часовой стрелке точку (из отмеченных  $2n$  точек) обозначим буквой  $K$ . Уясним для себя, что  $K$  — красная точка. Предположение о том, что  $K$  может быть синей точкой, приводит к противоречию с тем, что в точку  $C$  переходит  $n$ -я красная точка.

Каждая красная точка при переходе в синюю вычерчивает на окружности  $Q$  дугу поворота. Легко заметить, что дуга  $CK$  (от точки  $C$  к точке  $K$  по часовой стрелке) не является частью никакой дуги поворота при исходной нумерации красных точек. Но решающее свойство дуги  $CK$  состоит в том, что она не является частью никакой дуги поворота при всякой нумерации красных точек.

Чтобы в этом убедиться, развернем дугу  $CK$ , на которой находятся все отмеченные точки, в виде прямолинейного отрезка  $KC$  (точка  $K$  — левый конец, точка  $C$  — правый). При этом всякая дуга поворота при исходной нумерации красных точек превратится в вектор, идущий слева направо из красной точки в синюю. Так что левее всякой точки отрезка  $KC$  находится красных точек не меньше, чем синих. Из этого факта следует решающее свойство дуги  $CK$ , о котором сказано выше.

Поэтому можно заключить, что при всякой нумерации красных точек любая дуга поворота будет представляться вектором на отрезке  $KC$ , идущим слева направо из красной точки в синюю. Сумма длин таких векторов всегда равна разности суммы координат синих точек и суммы координат красных точек.

Но постоянство суммы длин векторов равносильно постоянству суммы углов поворотов.

## ЗАДАЧИ УЧАТ ДУМАТЬ

Не влезая в воду, нельзя научиться плавать. Точно так же, не погружаясь в задачи, нельзя научиться думать самостоятельно. Помимо прочего, математика учит честности перед собой и другими, ибо, отвечая на какой-либо вопрос, нельзя отвертеться разговорами вокруг да около. А наличие честности — необходимое условие для правильных мыслей. Наконец, нужно сказать, что, решая задачи, мы учимся не только доказывать истину, но и догадываться о ней, а умение догадываться — обязательная часть содержательного мышления.

### Задача 1. Минимальный периметр

Докажите, что среди выпуклых четырехугольников с данными длинами диагоналей и данным углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

*Решение.* Треугольник  $ABC$  параллельно перенесем так, чтобы точка  $B$  заняла положение точки  $D$  (рис. 175).

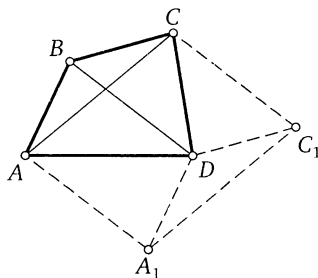


Рис. 175

Заметим, что параллелограмм  $ACC_1A_1$  будет одинаков для всех рассматриваемых четырехугольников  $ABCD$  и что сумма расстояний от точки  $D$  до его вершин и есть периметр четырехугольника  $ABCD$ . Эта сумма будет минимальной, когда точка  $D$  является точкой пересечения диагоналей параллелограмма  $ACC_1A_1$ . В таком случае исходный четырехугольник  $ABCD$  должен быть параллелограммом.

### Задача 2. Точки внутри угла

Внутри угла  $POQ$  находятся две такие точки  $M$  и  $N$ , что  $\angle MOP = \angle NOQ$  (рис. 176). На прямой  $OP$  берется такая точка  $A$ , что сумма расстояний от нее до  $M$  и  $N$  минимальна. На прямой  $OQ$  берется такая точка  $B$ , что сумма расстояний от нее до  $M$  и  $N$  минимальна. Докажите, что  $AM + AN = BM + BN$ .

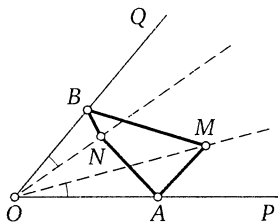


Рис. 176

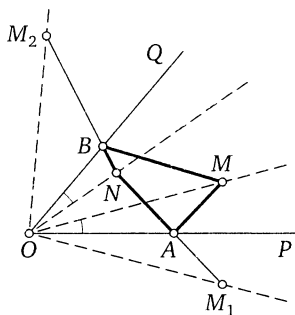


Рис. 177

*Решение.* Пусть точка  $M_1$  симметрична точке  $M$  относительно прямой  $OP$ , а  $M_2$  симметрична  $M$  относительно  $OQ$  (рис. 177).

Тогда  $A$  и  $B$  лежат на отрезках  $NM_1$  и  $NM_2$  соответственно, и достаточно доказать равенство этих отрезков. Оно следует из того, что  $M_1$  и  $M_2$  симметричны относительно прямой  $ON$  ( $OM_1 = OM_2$  и  $\angle M_1ON = \angle M_2ON$ ).

**Задача 3. Точный квадрат**

Докажите, что число

$$1994 \cdot 1995 \cdot 1996 \cdot 1998 \cdot 1999 \cdot 2000 + 36$$

является квадратом натурального числа.

*Решение.* Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36 = n^2(n^2 - 7)^2.$$

Отсюда следует, что число из условия задачи равно

$$1997^2(1997^2 - 7)^2.$$

**Задача 4. Равенство площадей**

Три отрезка  $C_1A_2$ ,  $C_2B_1$  и  $A_1B_2$  с концами на сторонах треугольника  $ABC$  параллельны его сторонам и проходят через точку  $P$  (рис. 178). Докажите, что площади треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равны.

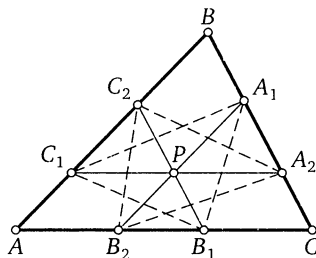


Рис. 178

*Решение.* Площади треугольников  $A_1B_1P$  и  $A_2B_1P$  равны (по общему основанию и равным высотам), площади треугольников  $A_2B_2P$  и  $A_2B_1P$  равны по той же причине. Значит, равны площади треугольников  $A_1B_1P$  и  $A_2B_2P$ . Аналогично убеждаемся, что треугольники  $B_1C_1P$  и  $B_2C_2P$  имеют равные площади и что треугольники  $C_1A_1P$  и  $C_2A_2P$  тоже равновелики. Значит, треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равновелики.

**Задача 5. Тонкие и жирные**

Концы пяти параллельных хорд делят окружность на 10 равных дуг (рис. 179). Хорды через одну — тонкие, через одну — жирные. Докажите, что сумма длин тонких хорд равна сумме длин жирных хорд.

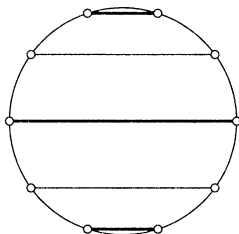


Рис. 179

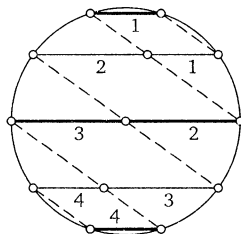


Рис. 180

*Решение.* На рис. 180 показано, как пунктирные хорды разрезают тонкие и жирные хорды на попарно равные куски, из чего следует утверждение задачи. Тот же метод проходит для общего случая, когда число дуг равно  $2k$ , при этом достаточно требовать, чтобы дуги были равны не все подряд, а только через одну.

**Задача 6. Квадрат — на квадраты**

Квадрат разрезан на 36 квадратов. Площадь одного из квадратов отлична от 1, а площадь каждого из остальных равна 1. Найдите площадь исходного квадрата.

*Решение.* К одной из сторон исходного квадрата прилегают лишь квадраты площади 1, поэтому длина стороны исходного квадрата — целое число  $n$ . Точно так же длина стороны квадрата, площадь которого отлична от 1, — целое число  $k$ . Тогда можно записать уравнение:  $n^2 - k^2 = 35$ . С учетом того, что  $k \neq 1$ , получим систему

$$\begin{cases} n + k = 35, \\ n - k = 1. \end{cases}$$

Значит,  $n = 18$  и площадь исходного квадрата равна  $18^2$ .



**Задача 7. Круг — пополам**

Докажите, что среди всех ломаных, разрезающих круг на две части равной площади, наименьшую длину имеет диаметр круга.

*Решение.* Рассмотрим произвольную ломаную  $L$  с концами  $A$  и  $B$  на границе круга, разрезающую его на две части равной площади. Центральнo-симметрично отразим  $L$  относительно центра круга  $O$  и получим ломаную  $L_1$  с концами  $A_1$  и  $B_1$  (рис. 181). Пусть  $M$  — первая точка пересечения (от  $A$  к  $B$ ) ломаной  $L$  с  $L_1$  и при этом участок  $L$  от  $A$  до  $M$  не длиннее участка  $L_1$  от  $B_1$  до  $M$ . Тогда центрально-симметричная ломаная  $AMNA_1$  не длиннее  $L$  и делит площадь круга пополам. Но диаметр  $AA_1$  не длиннее ломаной  $AMNA_1$ . Двойное равенство получается только тогда, когда ломаная  $L$  совпадает с диаметром.

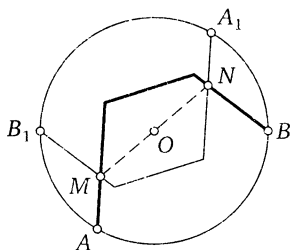


Рис. 181

**Задача 8. Постоянство угла**

На сторонах равностороннего треугольника  $ABC$  с длиной стороны 1 находятся такие точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$ , что  $AM + AN = CP + CQ = 1$  (рис. 182). Докажите, что угол между прямыми  $MQ$  и  $PN$  равен  $60^\circ$ .

*Решение.* Возьмем такую точку  $F$ , что  $FMQN$  — параллелограмм, и построим равносторонний треугольник  $A_1B_1C$ , взяв точки  $A_1, B_1$  на лучах  $CA, CB$  соответственно, так, что  $F$  лежит на  $A_1B_1$  (рис. 183). Тогда  $\angle FNP$  равен искомому углу. Но  $FA_1 + A_1N = PC + CN = FB_1 + B_1P$ . Значит, точки  $F$ ,  $N$  и  $P$  делят стороны равносторонне-

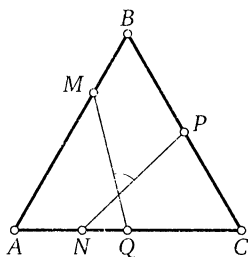


Рис. 182

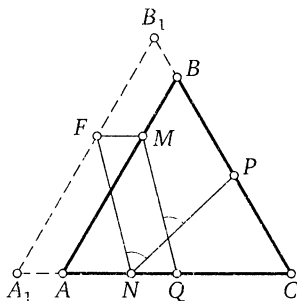


Рис. 183

го треугольника  $A_1B_1C$  в одном и том же отношении, считая, например, по часовой стрелке. Следовательно, треугольник  $FNP$  также равносторонний, а угол  $FNP$  равен  $60^\circ$ .

### Задача 9. Натуральный ряд

Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные — другой.

*Решение.* Для удобства изложения будем считать числа одной части красными, а другой — синими.

Докажем, что любая пара чисел вида  $(n, n + 2)$  одноцветна. Допустим противное: нашлось такое красное число  $n$ , что число  $n + 2$  синее. Тогда возьмем такое синее число  $m$  ( $m > n + 2$ ), что число  $m + 1$  красное, а также такое синее число  $k$  ( $k > m$ ), что число  $k + 1$  красное. В этом случае тройка красных чисел  $(n, m + 1, k + 1)$  в сумме дает красное число  $n + m + k + 2$ . Но тройка синих чисел  $(n + 2, m, k)$  в сумме дает синее число  $n + m + k + 2$ ; получено противоречие.

Теперь можно заключить, что все нечетные числа одноцветны, а также что все четные числа одноцветны. Но все натуральные числа не являются одноцветными. Зна-

чит, нечетные числа имеют один цвет (например, красный), а четные — другой (например, синий).

Напоследок можно отметить, что в условии задачи слова «любая тройка чисел» правомерно заменить на слова «любые  $2k + 1$  чисел» — утверждение при этом останется в силе.

### Задача 10. Конечные множества

а) Множества  $A$  и  $B$  на прямой содержат по  $n$  точек. Если все тройки точек из множества  $A$  занумеровать в каком-либо порядке, то все тройки точек из множества  $B$  можно занумеровать в таком порядке, что всякие две тройки точек из  $A$  и  $B$ , имеющие одинаковые номера, будут равны (существует движение прямой, переводящее одну тройку в другую). Докажите, что множества  $A$  и  $B$  равны (в том же смысле).

б) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «тройки точек» заменить на «пары точек»?

*Ответ:* б) не сохранит.

*Решение.* а) Нужно доказать, что множества  $A$  и  $B$  равны или, как еще говорят, изометричны. Сначала отметим, что список расстояний между всевозможными парами точек из множества  $A$ , в котором  $n(n + 1)/2$  чисел, совпадает с подобным списком для множества  $B$ , — это непосредственно вытекает из условия задачи. Отсюда можно заключить, что диаметры множеств  $A$  и  $B$  равны. Поэтому множества  $A$  и  $B$  можно разместить на одном отрезке  $I$ , концы которого принадлежат как  $A$ , так и  $B$ .

Теперь нужно доказать, что множества  $A$  и  $B$  либо совпадут, либо будут симметричны относительно точки  $Q$ , которая является серединой отрезка  $I$ .

Рассмотрим возможное взаиморасположение точек множества  $A$  и множества  $B$  на отрезке  $I$  с концами  $\alpha$  и  $\beta$ . Если  $\gamma \in A$ , то либо  $\gamma \in B$ , либо точка, симметричная точке  $\gamma$  относительно  $Q$ , принадлежит  $B$ , так как по условию для тройки точек  $(\alpha, \beta, \gamma)$  из множества  $A$  в множестве  $B$

имеется равная тройка точек. Если две точки  $\gamma$  и  $\delta$ , симметричные относительно  $Q$ , принадлежат множеству  $A$ , то обе они принадлежат и множеству  $B$ .

Пусть  $C = A \cup B$ . В множестве  $C$  выделим максимальное подмножество  $C_1$ , симметричное относительно точки  $Q$ . Пусть  $C_0 = C \setminus C_1$ . Заметим, что множества  $A_1 = A \setminus B$  и  $B_1 = B \setminus A$  не пересекаются и симметричны относительно точки  $Q$ . Если множество  $A_1$  (а значит, и  $B_1$ ) пустое, то  $A$  совпадает с  $B$ . Если множество  $C_0$  пустое, то  $A$  симметрично  $B$  относительно  $Q$ . Ввиду этого достаточно убедиться, что хотя бы одно из двух множеств  $C_0$  и  $A_1$  обязательно является пустым.

Допустим противное: ни  $C_0$ , ни  $A_1$  пустыми не являются. Из определений этих множеств и проведенного анализа следует, что полный список (с учетом кратностей) расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит  $C_0$ , а другая  $A_1$ , совпадает с полным списком расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит  $C_0$ , а другая  $B_1$  (обдумайте детально это умозаключение!).

Но максимальное расстояние между точками множества  $C_0$  и точками множества  $A_1$  не равно максимальному расстоянию между точками  $C_0$  и точками  $B_1$ ! Что бы в этом удостовериться, каждое из названных множеств удобно представить двумя точками: крайней левой и крайней правой. При этом нужно вспомнить, что  $A_1$  и  $B_1$  симметричны относительно точки  $Q$ , а  $C_0$  строго асимметрично относительно  $Q$ .

Значит, противоречие получено и утверждение доказано.

б) Приведем пример двух множеств  $A$  и  $B$ , каждое из которых состоит из 9 точек. При этом полный список расстояний между точками множества  $A$  (из 36 чисел) совпадает с аналогичным списком множества  $B$ , но эти множества не равны (не изометричны). Множество  $A$  задается словом *abaabbab*, множество  $B$  — словом *abbabaab*

(буква в слове — расстояние между соседними точками множества). При  $a = 1$  и  $b = 2$  множества  $A$  и  $B$  представлены на рис. 184.

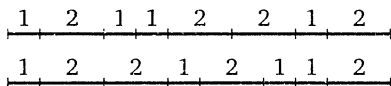


Рис. 184

Остается открытым вопрос: изменится ли ответ этого пункта, если все расстояния в множестве  $A$  различны?

### Задача 11. Квадраты чисел

Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ . Докажите, что каждое из четырех чисел  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  и  $ab + bc + ca$  является квадратом.

*Решение.* Можно записать

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca, \quad (*)$$

или иначе:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca).$$

Значит, число  $ab + bc + ca$  является квадратом.

Равенство (\*) можно истолковать как квадратное уравнение относительно  $c$ .

Поэтому

$$c = (a + b) \pm 2\sqrt{ab}.$$

Значит, число  $ab$  является квадратом. Точно так же убеждаемся, что числа  $bc$  и  $ca$  тоже являются квадратами.

### Задача 12. Середины дуг

На окружности находятся  $n$  красных и  $n$  синих точек, которые разделяют ее на  $2n$  равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.

*Решение.* Пусть точка  $A$  — произвольная синяя точка на окружности. Возможны два случая.

В первом случае точка  $B$ , диаметрально противоположная точке  $A$ , тоже является синей. Тогда среди хорд, перпендикулярных диаметру  $AB$ , найдется хорда  $CD$  с красными концами. Иначе получилось бы, что синих точек на окружности больше, чем красных. В таком случае дуга  $CAD$  имеет красные концы, а точка  $A$  является серединой этой дуги.

Во втором случае точка  $B$ , диаметрально противоположная точке  $A$ , является красной точкой. Из условия следует, что найдется хорда с синими концами  $MN$ , перпендикулярная диаметру  $AB$ . Но тогда ввиду баланса синих и красных точек на окружности найдется хорда  $CD$  с красными концами, перпендикулярная диаметру  $AB$ . Это означает, что дуга  $CAD$  имеет красные концы, а точка  $A$  является ее серединой.

### Задача 13. Числа в таблице

Таблица размером  $n \times n$  заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо в каждой строке, либо в каждом столбце.

*Решение.* В доказательстве будем опираться на факт дискретной непрерывности устройства нашей таблицы. Это означает, что если в какой-либо строке таблицы присутствуют два числа  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), то любое промежуточное натуральное число  $c$ ,  $a \leq c \leq b$ , тоже присутствует в этой строке. Естественно, что такое замечание справедливо и для столбцов.

В каждой строке возьмем минимальное число и из полученных  $n$  чисел выберем максимальное число  $M$ . Пусть  $M$  является минимальным числом  $k$ -й строки.

Убедимся в том, что число  $M$  присутствует либо в каждой строке, либо в каждом столбце.

Допустим, что в  $i$ -й строке отсутствует число  $M$ . Но тогда все числа  $i$ -й строки меньше  $M$ . Возьмем произвольный столбец и покажем, что в нем присутствует число  $M$ . На пересечении этого столбца и  $i$ -й строки стоит число  $a$ , меньшее  $M$ . На пересечении этого столбца и  $k$ -й строки стоит число  $b$ , не меньшее  $M$ . Следовательно, число  $M$ ,  $a < M \leq b$ , непременно присутствует в избранном столбце, а значит, и в любом столбце.

---

## ЗАМРИ — УМРИ — ВОСКРЕСНИ

Это заклинание из известной детской игры полезно произносить каждому, кто собирается решать хорошую математическую задачу. Решающий такую задачу проходит через несколько стадий: от концентрации внимания до глубокого погружения в ее условие и обстоятельства — к первым проблескам мысли и надежды на успешное решение. Решение задачи — это не только умственная, но и волевая деятельность, для этого нужен бойцовский дух и хорошая спортивная злость. Прекрасный и яростный мир математических задач постоянно возобновляется и пополняется, и это свидетельство того, что математика — живая наука.

### Задача 1. Король на доске

Шахматный король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу и вернувшись последним ходом на исходное поле. Докажите, что король сделал четное число диагональных ходов.

*Решение.* Диагональным ходом король переходит с поля какого-нибудь цвета на поле того же цвета. Пусть из 32 ходов, когда король ступал на черное поле,  $k$  ходов были диагональными, т. е. король  $k$  раз ходил с черного поля на черное. Значит,  $32 - k$  раз король ходил с белого поля на черное. Но так как король ходил с белого поля ровно 32 раза, то из них он ходил ровно  $k$  раз с белого поля на белое. Итак, король ходил с поля на поле того же цвета  $2k$  раз.



**Задача 2. Бильярд**

На бильярдном столе  $ABCD$  расположены два шара  $P$  и  $Q$  так, что  $\angle PAB = \angle QAD$ . Если ударить шар  $P$  так, чтобы он, отскочив от борта  $AB$ , столкнулся с шаром  $Q$ , то он пройдет путь  $PMQ$ ; если же ударить шар  $P$  так, чтобы он, отскочив от борта  $AD$ , столкнулся с шаром  $Q$ , то он пройдет путь  $PNQ$  (рис. 185). Докажите, что длина пути  $PMQ$  равна длине пути  $PNQ$ .

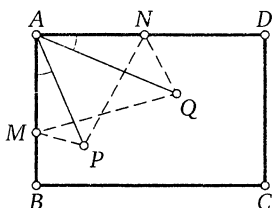


Рис. 185

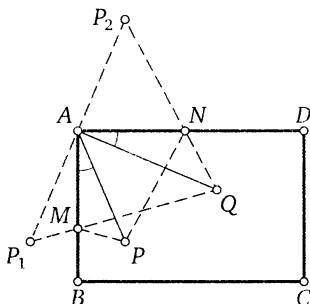


Рис. 186

*Решение.* Отразив точку  $P$  симметрично относительно бортов  $AB$  и  $AD$ , получаем точки  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 186). Длина пути  $PMQ$  равен длине отрезка  $QP_1$ , а длина пути  $PNQ$  — длине отрезка  $QP_2$ . Но отрезки  $QP_1$  и  $QP_2$  равны как гипотенузы двух равных прямоугольных треугольников  $QAP_1$  и  $QAP_2$ .

**Задача 3. Такой шестиугольник**

В выпуклом шестиугольнике  $AC_1BA_1CB_1$  известно, что

$$AB_1 = AC_1, \quad BC_1 = BA_1, \quad CA_1 = CB_1$$

и

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1.$$

Докажите, что площадь треугольника  $ABC$  равна половине площади шестиугольника.

*Решение.* Можно заметить, что  $\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 360^\circ$ . Из треугольников  $A_1BC$ ,  $B_1CA$  и  $C_1AB$  можно сложить

треугольник, равный треугольнику  $ABC$  (при этом вершины  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  совместятся). Это означает, что утверждение задачи справедливо.

#### Задача 4. Шахматная позиция

Шахматная позиция такова, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали стоит нечетное число фигур. Докажите, что на черных клетках доски стоит четное число фигур.

*Решение.* На черных полях вертикальных рядов доски с нечетными номерами ставим букву  $A$ , на остальных черных полях ставим букву  $B$ . На белых полях горизон-

	$B$		$B$		$B$		$B$
$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$
	$B$		$B$		$B$		$B$
$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$
	$B$		$B$		$B$		$B$
$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$
	$B$		$B$		$B$		$B$
$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$	$A$	$C$

Рис. 187

тальных рядов с нечетными номерами ставим букву  $C$  (рис. 187). Пусть число фигур, стоящих на  $A$ -полях, равно  $n$ , на  $B$ -полях —  $m$  и на  $C$ -полях —  $k$ . В силу условия задачи  $n + k$  и  $m + k$  являются четными (в каждом горизонтальном ряду, где проставлены буквы  $A$  и  $C$ , число фигур нечетно, а рядов 4; аналогичное утверждение верно для вертикальных рядов). Но тогда число  $n + m$  также четное, т. е. на черных полях стоит четное число фигур.

#### Задача 5. Две хорды

Окружность с помощью  $n^2$  точек делится на  $n^2$  равных дуг. Среди этих точек  $n$  красные, а еще  $n$  синие. Докажите, что найдутся две равные хорды, у одной из которых концы красные, а у другой синие.

*Решение.* Примем длину окружности за  $n^2$  единиц. Тогда длина любой дуги с концами в точках деления может принимать лишь одно из  $n^2 - 1$  возможных значений: 1, 2, ...,  $n^2 - 1$ .

Рассмотрим всевозможные дуги, у которых концы разноцветные и при этом направление от красного конца по дуге к синему концу идет по часовой стрелке. Таких дуг ровно  $n^2$ . Но тогда среди них найдутся две дуги  $\widehat{AB}$  и  $\widehat{CD}$  равной длины. В таком случае хорда  $AC$  с красными концами равна хорде  $BD$  с синими концами.

### Задача 6. Скромное обаяние числовых тождеств

Докажите, что при любых целых  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражение

$$(a-b)(c-b)^3 + (b-c)(a-c)^3 + (c-a)(b-a)^3$$

является квадратом целого числа.

*Решение.* Из числового тождества

$$\begin{aligned} xy^3 + yz^3 + zx^3 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \\ = (x+y+z)(xy^2 + yz^2 + zx^2 - xyz) \end{aligned}$$

следует, что заданное выражение равно

$$(a-b)^2(b-c)^2 + (b-c)^2(c-a)^2 + (c-a)^2(a-b)^2.$$

Теперь, применив другое тождество

$$\begin{aligned} (a-b)^2(b-c)^2 + (b-c)^2(c-a)^2 + (c-a)^2(a-b)^2 = \\ = [(a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (c-a)(a-b)]^2, \end{aligned}$$

завершаем доказательство утверждения.

### Задача 7. Отмеченные фигуры

В некоторых клетках шахматной доски стоят фигуры. Известно, что на каждой горизонтали стоит хотя бы одна фигура, причем на разных горизонталях — разное число фигур. Докажите, что всегда можно отметить восемь фигур так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояла ровно одна отмеченная фигура.

*Решение.* Из условия следует, что на некоторой горизонтали стоит ровно одна фигура, на некоторой другой — ровно две фигуры и т. д., наконец, некоторая горизонталь заполнена 8 фигурами. Пронумеруем горизонтали в соответствии с количеством стоящих на них фигур. Отметим на первой горизонтали ее единственную фигуру. Поскольку на второй горизонтали стоят две фигуры, хотя бы одну из них можно отметить. Так как на третьей горизонтали стоят три фигуры, то хотя бы одну из них можно отметить, и т. д. до восьмой отмеченной фигуры.

### Задача 8. Четырехугольник и окружность

Окружность и четырехугольник расположены так, что внутри четырехугольника оказались четыре отдельные дуги окружности (рис. 188). При этом известно, что суммы длин противоположных дуг равны. Докажите, что около четырехугольника можно описать окружность.

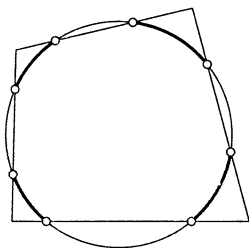


Рис. 188

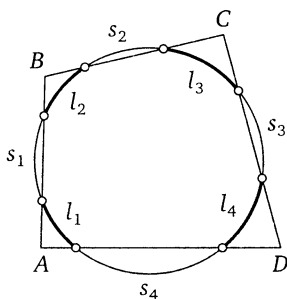


Рис. 189

*Решение.* Обозначим угловые величины дуг так, как показано на рис. 189, и учтем, что они пропорциональны их длинам. Угол  $DAB$  измеряется как

$$0,5(l_2 + s_2 + l_3 + s_3 + l_4 - l_1).$$

Угол  $BCD$  измеряется как

$$0,5(l_2 + s_1 + l_1 + s_4 + l_4 - l_3).$$

Сумма углов  $DAB$  и  $BCD$  измеряется как

$$0,5(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_2 + l_4.$$

Аналогично сумма углов  $ABC$  и  $CDA$  измеряется как

$$0,5(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_1 + l_3.$$

Но по условию задачи эти суммы равны, и, следовательно, около четырехугольника можно описать окружность.

### Задача 9. Равные многоугольники

Окружность делится  $2n$  красными и  $2n$  черными точками на  $4n$  равных дуг. Докажите, что найдутся два равных  $(n + 1)$ -угольника, у одного из которых все вершины красные, а у другого — черные.

*Решение.* Рассмотрим все повороты окружности на углы  $k\varphi$ , где  $\varphi = 2\pi/4n$ ,  $1 \leq k \leq 2n$ . Достаточно доказать, что найдется такое  $k$ , что при повороте на угол  $k\varphi$  не менее  $n + 1$  черных точек перейдут в красные точки. Предположим противное: пусть при любом  $k$  не менее  $n$  черных точек перейдет в черные же точки. Тогда получится не менее чем  $n(2n - 1) + n/2$  всевозможных пар черных точек. В то же время точное число различных пар черных точек  $C_{2n}^2 = n(2n - 1)$ . Отсюда следует, что  $n(2n - 1) + n/2 \leq n(2n - 1)$ . Из этого противоречия вытекает требуемое утверждение.

### Задача 10. Многоугольник — на трапеции

Докажите, что выпуклый  $n$ -угольник можно разрезать на  $n$  трапеций.

*Решение.* Любой треугольник можно разрезать на три трапеции, проведя из его внутренней точки три отрезка, параллельные трем его сторонам. Любой четырехугольник можно разрезать на треугольник и трапецию, а значит — на четыре трапеции и т. д.; доказательство завершаем по индукции.

**Задача 11. Многоугольники-близнецы**

Существуют ли два равных семиугольника, у которых все вершины общие, но нет ни одной общей стороны? А три таких семиугольника?

*Ответ:* такие семиугольники существуют.

*Решение.* Пример приведен на рис. 190. Общими вершинами являются: центр двух concentрических окружностей и шесть вершин двух равносторонних треугольников, вписанных в эти окружности. Пунктиром и жирной линией на рисунке показаны два таких семиугольника, один семиугольник получается из другого поворотом на  $120^\circ$ . Произведя еще раз поворот на  $120^\circ$ , получим третий семиугольник.

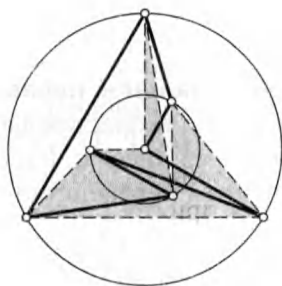


Рис. 190

**Задача 12. Объем куба**

Куб разрезали на 1000 кубиков. Из них 999 имеют объемы, равные 1, а один имеет объем, отличный от 1. Каков объем этого кубика?

*Решение.* К одному из ребер исходного куба примыкают лишь кубики объема 1, поэтому длина ребра исходного куба — целое число  $x$ . Точно так же длина ребра кубика, объем которого отличен от 1, — целое число  $y$ . Тогда можно записать уравнение  $x^3 - y^3 = 999$ . Решив это уравнение в натуральных числах и учитывая, что  $y \neq 1$ , находим  $x = 12$ ,  $y = 9$ . Значит, искомый объем кубика равен 729.

**Задача 13. Разрезание тетраэдра**

Можно ли разрезать правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длина ребра каждого из которых меньше 0,01?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Правильный тетраэдр можно разрезать на 4 одинаковых правильных тетраэдра и октаэдр. Октаэдр можно разрезать на 6 одинаковых октаэдров и 8 правильных одинаковых тетраэдров. В результате последовательности этих операций мы на некотором шаге получим требуемый малый размер многогранников. Анализ указанной процедуры показывает, что такое разрезание можно выполнить, проводя плоскости, параллельные граням исходного тетраэдра.

**Задача 14. Функциональное неравенство**

Пусть  $f(x)$  — нечетная возрастающая функция. Докажите, что для любых трех чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , сумма которых равна нулю, выполняется неравенство

$$f(a)f(b) + f(b)f(c) + f(c)f(a) \leq 0.$$

*Решение.* Убедимся в том, что сумма любых двух слагаемых в левой части доказываемого неравенства не больше нуля. После этого справедливость этого неравенства станет очевидной. Возьмем два первых слагаемых (для других пар проверка аналогична):

$$f(a)f(b) + f(b)f(c) = f(b)[f(a) - f(a+b)],$$

но легко проверить, что  $f(b)[f(a) - f(a+b)] \leq 0$  для любых  $a$  и  $b$ , поскольку  $f(x)$  — возрастающая нечетная функция.

Из доказанного неравенства легко получить различные следствия. Например, для любых чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  вы-

полняется неравенство

$$\arctg(x - y) \arctg(y - z) + \arctg(y - z) \arctg(z - x) + \\ + \arctg(z - x) \arctg(x - y) \leq 0.$$

### Задача 15. Куб внутри куба

Все вершины одного куба лежат на гранях другого куба. Может ли так случиться, что никакая грань первого куба не параллельна никакой грани второго?

*Ответ:* не может.

*Решение.* Допустим противное: пусть восемь вершин второго куба  $Q_2$  лежат на шести гранях первого куба  $Q_1$  и притом никакая грань одного куба не параллельна никакой грани другого. Тогда у куба  $Q_1$  найдется грань  $S$  (будем считать ее горизонтальной), на которой лежит две вершины куба  $Q_2$ , т. е. на грани  $S$  лежит ребро куба  $Q_2$ , а на второй горизонтальной грани  $S_1$  куба  $Q_1$  лежит другое ребро куба  $Q_2$ . Примем длину ребра куба  $Q_1$  за 1, а длину ребра куба  $Q_2$  за  $x$ . Проекция куба  $Q_2$  на вертикальную ось равна 1, откуда получаем неравенство  $1 \leq x\sqrt{2}$ . Проекция куба  $Q_2$  на грань  $S$  является прямоугольником со сторонами 1 и  $x$ , вписанным в  $S$ . Но в квадрат  $S$  со стороной 1 нельзя вписать прямоугольник со сторонами 1 и  $x$ , где  $1 \leq x\sqrt{2}$ . Из полученного противоречия вытекает нужное утверждение.

### Задача 16. На шахматной доске

Сколькими способами можно расставить восемь ладей на черных полях шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?

*Ответ:*  $24^2$ .

*Решение.* Если не выдвигать ограничений на цвет полей, то 8 ладей указанным образом можно расставить  $8!$  различными способами; вообще для доски размером  $n \times n$  число способов расстановки  $n$  ладей равно числу перестановок из  $n$  элементов, т. е.  $n!$ .



Но нам нужно учесть ограничение на цвет полей: ладьи расставляются только на черных полях доски. Представим черные поля доски в виде темно- и светло-серых. При этом всякое черное поле, расположенное на нечетной вертикали (но на четной горизонтали), сделаем темно-серым, а всякое черное поле, расположенное на четной вертикали (но на нечетной горизонтали), сделаем светло-серым (рис. 191). Из 8 ладей, стоящих допустимым образом на черных полях, 4 ладьи окажутся на темно-серых полях, а остальные 4 ладьи — на светло-серых.

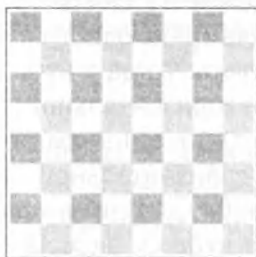


Рис. 191

Темно-серые поля образуют как бы отдельную шахматную доску размером  $4 \times 4$ , поэтому число способов расстановки 4 ладей на них равно  $4! = 24$ . То же можно сказать о светло-серых полях. В результате число способов для допустимых расстановок 8 ладей равно  $24^2$ .

ISBN 978-5-4439-1702-3



9 785443 917023 >