

Приложение к журналу

КВАНТ

№2/2004

А.А.Склянкин, А.В.Зотеев

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ НА ХИМИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ

Бюро



Квантум

А.А.Склянкин, А.В.Зотеев

**КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
НА ХИМИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ**



Москва 2004
Бюро Квантум

С43 Склянкин А.А., Зотеев А.В. Конкурсные задачи по физике на химическом факультете МГУ. — М.: Бюро Квантум, 2004. — 128 с. — (Прил. к журналу «Квант» №2/2004)

ISBN 5-85843-049-X

Книга представляет собой сборник задач с решениями, предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике на химическом факультете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в течение последних восьми лет. Сюда же включены и избранные задачи заочного тура олимпиады «Абитуриент МГУ» 2001 и 2002 годов.

Для старшеклассников и выпускников средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для тех, кто самостоятельно готовится к вступительным экзаменам в вузы.

ББК 22.3я729

ISBN 5-85843-049-X

**© Бюро Квантум,
«Квант», 2004**

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
От авторов	5
Образцы экзаменационных билетов 2003 года	6
УСЛОВИЯ ЗАДАЧ	7
1. МЕХАНИКА	7
Задачи экзаменационных билетов 2003 года	11
2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА	12
Задачи экзаменационных билетов 2003 года	16
3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА	17
Задачи экзаменационных билетов 2003 года	23
4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	24
Задачи экзаменационных билетов 2003 года	26
5. ОПТИКА	26
Задачи экзаменационных билетов 2003 года	29
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ	30
1. Механика	30
2. Молекулярная физика и термодинамика	53
3. Электродинамика	70
4. Колебания и волны	95
5. Оптика	104
ОЛИМПИАДА «АБИТУРИЕНТ МГУ»	115
Задачи заочного тура олимпиады 2001 года	115
Задачи заочного тура олимпиады 2002 года	121

ПРЕДИСЛОВИЕ

Последнее десятилетие химический факультет МГУ в качестве вступительных экзаменов наряду с химией неизменно включает такие ключевые для химиков дисциплины, как математика и физика. Вступительные экзамены по математике и химии проводятся в письменной форме, экзамен по физике до нынешнего года проводился в устной форме. Однако и экзамен по физике нельзя рассматривать как «устный» в буквальном смысле, поскольку каждый экзаменационный билет по физике наряду с теоретическими вопросами содержал и обязательную задачу.

Для получения серьезной базовой подготовки по любой из трех перечисленных дисциплин абитуриенту полезно предоставить возможность использовать не только теоретические пособия, но и практические руководства, которые содержат набор экзаменационных задач последних лет и разбор основных приемов их решения. Издание таких руководств – это очень серьезная помощь и для учителей средних школ, поскольку полная открытость материалов ежегодных вступительных экзаменов позволяет общеобразовательной средней школе видеть ту «планку» требований, которую предъявляет к ней высшая школа. Одновременно – это и тот реально существующий материал, которым, на наш взгляд, могли бы заинтересоваться сторонники введения в стране совсем не бесспорного единого государственного экзамена (ЕГЭ).

Первым среди естественных факультетов МГУ серию практических руководств по различным предметам начал издавать химический факультет. Уже вышли в свет пособия по химии и математике. Предлагаемое вашему вниманию пособие – попытка представить аналогичный материал вступительных экзаменов по физике. Авторами пособия являются сотрудники физического факультета МГУ, которые на протяжении многих лет готовили экзаменационные билеты, руководили организацией и проведением экзамена по физике на химическом факультете МГУ.

Уверен, что пособие окажет огромную пользу не только поступающим на химический факультет, но и всем абитуриентам Московского университета.

*Заместитель декана
химического факультета МГУ по учебной работе,
профессор Н.Е.Кузьменко*

Вступительный экзамен по физике на химическом факультете МГУ традиционно проводился в устной форме. Каждый экзаменационный билет содержал одну задачу и два теоретических вопроса. При этом всегда и задача, и теоретические вопросы были составлены в полном соответствии с официальной программой вступительных экзаменов по физике. Для ознакомления ниже приводится полный текст трех экзаменационных билетов 2003 года.

Для подготовки к экзаменам помимо учебников можно использовать и дополнительную литературу. Практически ежегодно различные издательства предлагают читателям новую продукцию в виде пособий, задачников и справочников. Качественный уровень и стиль изложения материала этих пособий весьма разнообразен. Однако абитуриенту, поступающему в МГУ, следует иметь в виду, что, несмотря на ежегодное обязательное обновление заданий вступительных экзаменов, сохраняются стиль, традиции и уровень трудности предлагаемых задач.

Мы сочли полезным издать книгу, центральное место в которой занимает набор задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах по физике на химическом факультете МГУ за последние 8 лет, и их подробные решения (в 2001 году экзаменационные задачи были составлены Н.Л. Левшиным, А.Н. Невзоровым и А.В. Павликовым).

В последней части сборника приводится текст и подробный разбор избранных задач по физике заочного тура олимпиады «Абитуриент МГУ» 2001 и 2002 годов. С условиями проведения олимпиады можно ознакомиться по телефону 939-26-66 (группа нового приема, химфак МГУ).

Возможно, читатели найдут опечатки, неточности, а может быть, и ошибки. Авторы будут признательны за любые отзывы, замечания и пожелания, которые можно направлять по адресу:

119899 Москва В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет,
кафедра общей физики и молекулярной электроники
или по электронному адресу:
zoteyev@vega.phys.msu.su

А.А.Склянкин, А.В. Зотеев

ОБРАЗЦЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ 2003 ГОДА

Экзаменационный билет № 1

1. **Задача.** Найдите удельную теплоемкость механической смеси, состоящей из порошков меди и алюминия. Масса алюминия в смеси $m_1 = 0,3$ кг, его удельная теплоемкость $c_1 = 900$ Дж/(кг · К), масса меди $m_2 = 0,15$ кг, ее удельная теплоемкость $c_2 = 400$ Дж/(кг · К).

2. Условия равновесия тела. Устойчивое, неустойчивое и безразличное равновесия тел. Центр тяжести тела.

3. Закон Кулона. Напряженность электрического поля. Напряженность электростатического поля точечного заряда.

Экзаменационный билет № 5

1. **Задача.** Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в $n = 2$ раза. Найдите частоту колебаний, если их амплитуда $A = 6,8$ см. Принять $g = 10$ м/с².

2. Собственная и примесная проводимости полупроводников. Зависимость проводимости полупроводников от температуры; p - n -переход и его свойства. Полупроводниковый диод.

3. Индукция магнитного поля. Картины линий индукции магнитного поля прямого тока и соленоида. Магнитные свойства вещества. Ферромагнетики.

Экзаменационный билет № 6

1. **Задача.** Источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В может создать максимальный ток в цепи силой $I_{\max} = 1,5$ А. Источник замкнут на внешнее сопротивление $R = 2$ Ом. Какое количество теплоты Q выделяется на внешнем сопротивлении за время $\tau = 1$ мин?

2. Свободные колебания. Колебания груза на пружине. Математический маятник. Вынужденные колебания. Резонанс.

3. Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Планетарная модель атома. Непрерывный и линейчатый спектры. Спектральный анализ.

1. МЕХАНИКА

1.1. Камень, подброшенный вертикально вверх, упал на землю через $\tau = 3$ с. На каком расстоянии l от точки бросания (по горизонтали) упадет камень на землю, если его бросить с такой же начальной скоростью, но под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².

1.2. По спускающемуся эскалатору идет пассажир со скоростью $v = 1$ м/с относительно эскалатора. Скорость эскалатора $u = 1$ м/с. Общее количество ступеней $N = 100$. Сколько ступеней N_1 пройдет пассажир, спускаясь по эскалатору?

1.3. Груз массой $m_1 = 4$ кг висит на легкой веревке, привязанной к грузу массой $m_2 = 2$ кг. Какую максимальную силу F , направленную вертикально вверх, можно приложить к верхнему грузу, чтобы веревка не оборвалась? Веревка выдерживает максимальную силу натяжения $F_n = 60$ Н.

1.4. На гладкой горизонтальной поверхности лежит прямоугольный клин с углом $\alpha = 15^\circ$ при основании, упираясь торцом в неподвижную вертикальную стенку (рис.1). По наклонной грани клина соскальзывает без трения брусок массой $m = 0,2$ кг. Найдите силу F нормального давления клина на стенку.

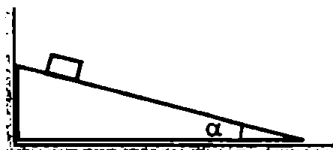


Рис. 1

1.5. Тело скользит вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. Коэффициент трения $\mu = 0,2$. Через какое время τ после начала движения скорость тела снова будет равна v_0 ?

1.6. Масса Луны в $n_1 = 81$ раз меньше массы Земли, а диаметр Луны составляет $n_2 = 0,27$ от среднего диаметра Земли. На какое расстояние h от поверхности Луны удалится камень, если его подбросить вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 10$ м/с².

1.7. Определите первую космическую скорость v_1 для спутника, запускаемого с гипотетической планеты, масса и радиус которой в $n = 3$ раза больше, чем у Земли. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10 \text{ м/с}^2$, радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$.

1.8. Два груза одинаковой массы $m = 0,5 \text{ кг}$ связаны легкой нитью и движутся вертикально вверх под действием силы F , приложенной к одному из грузов. Нить обрывается при величине силы $F_1 = 20 \text{ Н}$. При какой силе F_2 разорвется нить, если нижний груз закрепить неподвижно?

1.9. Два шарика одинакового размера – один деревянный, а другой из алюминия – связаны легкой и достаточно длинной нитью. Шарик опускают в водоем, и через некоторое время их погружение происходит с постоянной скоростью. Найдите натяжение нити при этом движении. Массы шариков $m_1 = 100 \text{ г}$ и $m_2 = 300 \text{ г}$. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.10. Мальчик раскручивает шарик на нитке в вертикальной плоскости. Масса шарика $m = 0,1 \text{ кг}$, длина нити $l = 1 \text{ м}$. Нить выдерживает максимальный вес подвешенного на ней груза, равный $P = 11 \text{ Н}$. С какой максимальной угловой скоростью ω мальчик может вращать нить, чтобы она не оборвалась? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.11. На поверхности воды плавает плоская льдина массой $m = 0,2 \text{ кг}$. Площадь льдины $S = 100 \text{ см}^2$. Какую минимальную работу требуется совершить, чтобы поднять льдину из воды? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Поверхностное натяжение не учитывать.

1.12. При выстреле из пушки из нее вылетает снаряд, скорость которого направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту. При этом пушка за счет отдачи откатывается в горизонтальном направлении с начальной скоростью $v = 0,5 \text{ м/с}$. Масса пушки $M = 800 \text{ кг}$. Найдите изменение импульса Δp системы пушка – снаряд в результате такого выстрела. Трением пренебречь.

1.13. Горизонтальная доска длиной $l = 0,45 \text{ м}$ движется со скоростью $v = 3 \text{ м/с}$ (рис. 2). На краю доски находится брусок. При внезапной остановке доски брусок начинает скользить по ее поверхности. Найдите коэффициент трения μ между бруском и доской, если в момент соскальзывания с доски кинетическая энергия бруска уменьшилась в $k = 3$ раза по сравнению с первоначальной. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Рис. 2

1.14. При вертикальном подъеме груза массой $m = 2 \text{ кг}$ на высоту $H = 4 \text{ м}$

совершена работа $A = 116$ Дж. Сколько времени продолжался подъем, если он происходил равноускоренно и без начальной скорости? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.15. На легкой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик. Период малых колебаний такого маятника $T = 1,3$ с. На какой максимальный угол α будет отклоняться нить от вертикали, если при колебаниях шарик, проходя положение равновесия, движется со скоростью $v = 2,1 \text{ м/с}$? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.16. Из резервуара большой емкости с помощью насоса откачивают воду. Наконечник шланга, из которого вытекает вода, имеет площадь поперечного сечения $S = 10 \text{ см}^2$ и находится на уровне поверхности воды в резервуаре. Мотор насоса потребляет мощность $P = 0,5$ кВт. Каков коэффициент полезного действия установки η , если вода вытекает из шланга со скоростью $v = 6 \text{ м/с}$? Плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$.

1.17. Мяч массой $m = 0,2$ кг отпустили без начальной скорости с высоты $H = 6$ м над полом. Найдите количество теплоты Q , выделившееся при первом ударе мяча о пол, если промежуток времени между первым и вторым ударами о пол составляет $\Delta t = 2$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.18. С наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом, с высоты $h_1 = 2$ м соскальзывает небольшая шайба (рис.3). В конце спуска, у основания наклонной плоскости, шайба испытывает абсолютно упругое соударение со стенкой и поднимается вверх по наклонной плоскости на высоту $h_2 = 1,2$ м. Найдите коэффициент трения μ между шайбой и наклонной плоскостью.

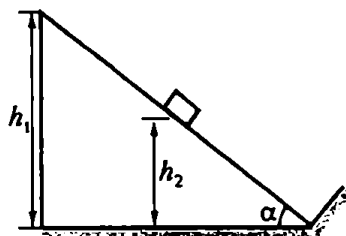


Рис.3

1.19. Маятник представляет собой небольшой шарик, подвешенный на легком стержне. Для того чтобы шарик мог описать окружность в вертикальной плоскости, ему нужно сообщить в положении равновесия скорость в горизонтальном направлении, не меньшую чем $v = 3 \text{ м/с}$. Найдите период малых колебаний этого маятника. Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$.

1.20. Ракета, запущенная с поверхности Земли вертикально вверх, взлетает с постоянным ускорением $a = 3,3 \text{ м/с}^2$. С какой скоростью ракета упадет на Землю, если ее двигатель проработает в течение $\tau = 10$ с? Принять $g = 10 \text{ м/с}^2$. Сопротивление воздуха не учитывать.

1.21. Артиллерийское орудие массой $M = 2000$ кг установлено на крепостной стене высотой $H = 20$ м. Начальная скорость отдачи орудия равна $v = 2$ м/с. На каком расстоянии L от стены снаряд падает на землю при горизонтальном выстреле из такого орудия? Масса снаряда $m = 10$ кг. Принять $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха не учитывать.

1.22. Двое рабочих должны выкопать цилиндрический колодец глубиной $H = 2$ м. До какой глубины h следует копать первому рабочему, чтобы работа оказалась распределенной поровну? Считать, что грунт однородный и рабочие поднимают его до поверхности Земли.

1.23. Тело массой $M = 5$ кг, лежащее на гладком горизонтальном столе, прикреплено к стене невесомой пружиной жесткостью $k = 2000$ Н/м. В это тело попадает и застревает в нем пуля массой $m = 10$ г, летевшая со скоростью $v = 50$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Найдите максимальную силу F , с которой пружина действует на стену в процессе возникших колебаний.

1.24. Автомобиль движется с постоянной скоростью. Расход топлива на этой скорости составляет $V = 10$ л бензина на $l = 100$ км пути. Найдите силу сопротивления $F_{\text{сопр}}$ движению автомобиля. КПД двигателя $\eta = 30\%$. Удельная теплота сгорания топлива $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг, плотность бензина $\rho = 700$ кг/м³.

1.25. Деревянный шар лежит в сосуде с водой так, что половина его находится в воде и он касается дна. Найдите плотность дерева ρ , если шар давит на дно сосуда с силой $F = 6$ Н. Вес шара в воздухе равен $P = 16$ Н. Плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м³.

1.26. На дне вертикального цилиндрического сосуда радиусом $R = 10$ см лежит шар радиусом $r = 5$ см. Плотность материала шара в два раза меньше, чем плотность воды. Какой объем воды ΔV следует налить в сосуд, чтобы шар перестал оказывать давление на дно сосуда?

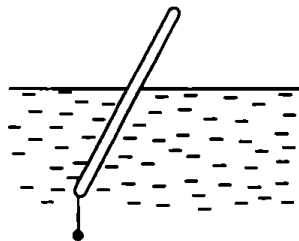


Рис. 4

1.27. К нижнему концу поплавка прикреплена леска с грузом (рис.4). Определите архимедову силу F_A , если плавающий поплавок погружен в воду на $k = 2/3$ своей длины. Масса поплавка $m = 10$ г. Принять $g = 10$ м/с².

1.28. К нижнему концу поплавка прикреплена леска с грузом (см. рис.4). Определите силу натяжения лески F_n , если плава-

ющий поплавок погружен в воду на $k = 2/3$ своей длины. Масса поплавок $m = 10$ г. Принять $g = 10$ м/с².

1.29. Два одинаковых алюминиевых шарика уравновешены на рычажных весах (рис.5). Расстояние от оси весов до точек подвеса $l = 10$ см. Один из шариков полностью погружают в воду. На какое расстояние x необходимо переместить точку подвеса другого шарика, чтобы равновесие сохранилось? Плотность алюминия $\rho_1 = 2,7$ г/см³, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см³.

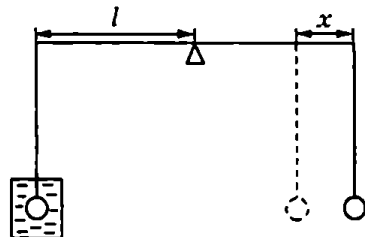


Рис.5

1.30. На двух кубиках, плавающих в воде, покоится невесомая палочка (рис.6). Ребра кубиков равны $a_1 = 0,1$ м и $a_2 = 0,2$ м. Сколько воды (массу воды Δm) нужно налить в один из кубиков, чтобы палочка лежала горизонтально? Массы кубиков $m_1 = 0,05$ кг и $m_2 = 0,1$ кг. Толщиной стенок пренебречь. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

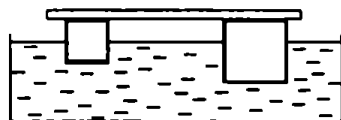


Рис.6

Задачи экзаменационных билетов 2003 года

1.31. Камень брошен под некоторым углом α к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Найдите горизонтальную дальность полета камня L , если известно, что в верхней точке траектории его кинетическая энергия равна потенциальной. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 10$ м/с².

1.32. Брусok, скользящий вдоль горизонтальной доски, останавливается, пройдя путь $s = 0,1$ м при начальной скорости $v_0 = 0,6$ м/с. Под каким максимальным углом α_{\max} (к горизонту) можно наклонить доску, чтобы покоящийся на ней брусok не начал скользить? Принять $g = 10$ м/с².

1.33. Закрепленная наклонная плоскость образует с горизонтом угол $\alpha = 60^\circ$. С высоты h на наклонную плоскость падает небольшой шарик (без начальной скорости). При ударе шарика о плоскость изменение импульса шарика составило $\Delta p = 0,08$ кг·м/с. Считая удар абсолютно упругим, найдите высоту h , с которой упал шарик. Масса шарика $m = 20$ г. Принять $g = 10$ м/с².

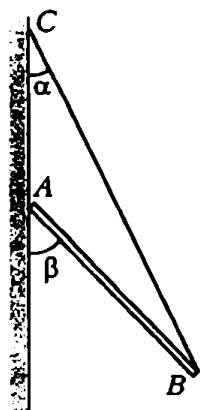


Рис. 7

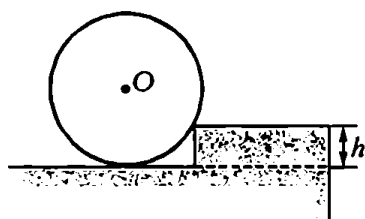


Рис. 8

1.34. Тонкий однородный стержень AB подвешен у гладкой стенки с помощью нити BC так, как показано на рисунке 7. Конек стержня A не закреплен. Определите угол α , если угол $\beta = 45^\circ$.

1.35. Цилиндр массой $m = 20$ кг и радиусом $R = 0,5$ м лежит на горизонтальном полу, касаясь ступеньки высотой $h = 0,1$ м (рис.8). Какую минимальную силу F_{\min} необходимо приложить к центру цилиндра O , чтобы он перестал давить на пол? Трением пренебrecь. Принять $g = 10$ м/с².

1.36. Ведро емкостью $V = 10$ л наполовину заполнено водой. В воду опускают кусок льда, в который вмерз камень. Масса льда $m_1 = 3$ кг, масса камня $m_2 = 0,3$ кг, при этом лед плавает и не касается дна ведра. Какое количество воды (объем ΔV в литрах) следует налить в ведро, чтобы она поднялась до краев ведра? Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м³.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Воздушный шар, заполненный водородом при температуре $T_1 = 300$ К, может поднять некоторый полезный груз. Водород заменили горячим воздухом. Какой должна быть температура воздуха T_2 , чтобы подъемная сила осталась прежней? Молярная масса водорода $M_{H_2} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Молярную массу воздуха принять равной $M_v = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Объем шара и атмосферное давление постоянны.

2.2. Газовая смесь содержит $m_1 = 32$ г кислорода (молярная масса $M_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль) и $m_2 = 22$ г углекислого газа ($M_2 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль). Найдите плотность смеси ρ при нормальных условиях: $p_0 = 10^5$ Па и $t_0 = 0^\circ$ С. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

2.3. Два баллона с кислородом соединены трубкой с краном. Массы газа в обоих баллонах одинаковы. При закрытом кране давление в одном баллоне $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а в другом — $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па. Какое давление p установится в баллонах, если

кран открыть? Температуру в баллонах считать постоянной и одинаковой, а газ – идеальным.

2.4. В узкой цилиндрической трубке, запаянной с одного конца, находится воздух, отделенной от наружного столбиком ртути. При горизонтальном положении трубки ртуть и воздух занимают по половине трубки. Если трубку осторожно повернуть открытым концом вниз, то выльется половина ртути. Найдите длину трубки L . Температура постоянна. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность ртути $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³. Поверхностное натяжение не учитывать.

2.5. При нагревании некоторого количества идеального газа его давление изменялось прямо пропорционально объему. На сколько градусов нагрели газ, если его объем увеличился в $k = 1,2$ раза? Начальная температура $t = 27^\circ$ С. Масса газа постоянна.

2.6. Баллон содержит идеальный газ при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па. Найдите изменение давления Δp после того как из баллона выпустили половину массы газа, а температуру оставшегося газа повысили на $\Delta T = 100$ К.

2.7. В цилиндре под тяжелым поршнем массой $M = 10$ кг и сечением $S = 14$ см² находится идеальный газ. На сколько процентов изменится высота столба газа в цилиндре, если его поместить в лифт, движущийся вертикально вниз с ускорением $a = 4$ м/с²? Считать, что поршень перемещается без трения о стенки цилиндра, а температура газа не изменяется. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2.8. В вертикальном цилиндре под поршнем находится газ при температуре $t_1 = 20^\circ$ С. При нагреве газа на $\Delta T = 20$ К поршень поднялся. Какую силу F следует приложить к поршню, чтобы вернуть его в прежнее положение? Площадь поршня $S = 20$ см². Атмосферное давление вне цилиндра равно $p_a = 10^5$ Па и постоянно. Трение и массу поршня не учитывать.

2.9. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 80\%$ при температуре $t_1 = 27^\circ$ С. Объем воздуха $V_1 = 1,5$ л. Какой станет влажность, если объем воздуха уменьшить до $V_2 = 0,37$ л, а температуру повысить до $t_2 = 100^\circ$ С? Давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 равно $p_{н1} = 20$ мм рт. ст. Нормальное атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт. ст.

2.10. В закрытом помещении объемом $V = 83$ м³ стоит сосуд с водой. Какая масса m воды испарится из сосуда, если температуру в помещении повысить от $t_1 = 7^\circ$ С до $t_2 = 17^\circ$ С? Давление

насыщенного водяного пара при t_1 равно $p_1 = 1120$ Па, а при $t_2 - p_2 = 2200$ Па. Молярная масса воды $M = 0,018$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль · К).

2.11. В двух баллонах с объемами $V_1 = 25$ л и $V_2 = 50$ л находится влажный воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом баллоне $\phi_1 = 40\%$, а во втором $\phi_2 = 20\%$. Какой будет относительная влажность ϕ , если баллоны соединить трубкой и дождаться установления равновесия? Температуру считать постоянной.

2.12. Две порции влажного воздуха с относительными влажностями $\phi_1 = 40\%$ и $\phi_2 = 50\%$ и объемами $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ м³ и $V_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ м³ смешивают при постоянной температуре. Во сколько раз α необходимо увеличить суммарный объем системы, чтобы установилась относительная влажность воздуха $\phi = 23\%$?

2.13. На нагревание железной болванки израсходовано количество теплоты $Q = 2 \cdot 10^5$ Дж. Найдите изменение объема болванки ΔV . Плотность железа $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, удельная теплоемкость железа $c = 500$ Дж/(моль · К), коэффициент объемного расширения железа $\beta = 3,6 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹.

2.14. В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1 = 0,5$ кг воды при $t_1 = 10$ °С, помещают $m_2 = 0,1$ кг льда с температурой $t_2 = -10$ °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(моль · К), удельная теплоемкость льда $c = 2100$ Дж/(моль · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Выделением тепла при охлаждении сосуда пренебречь.

2.15. Двигатель мотоцикла развивает мощность $P = 5$ кВт при скорости $v = 60$ км/ч. Расход бензина при этом составляет $m = 3$ кг на каждые $s = 100$ км пути. Найдите коэффициент полезного действия η двигателя. Удельная теплота сгорания бензина $q = 46 \cdot 10^6$ Дж/кг.

2.16. В теплоизолированном сосуде находится смесь льда массой $m = 2,1$ кг и воды. После начала нагревания температура смеси оставалась постоянной в течение времени $t_1 = 11$ мин, а затем за время $t_2 = 4$ мин повысилась на $\Delta T = 20$ К. Определите массу смеси M , считая, что количество теплоты, получаемое системой в единицу времени, постоянно. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг, а удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(моль · К). Теплоемкостью сосуда пренебречь.

2.17. В горизонтальном цилиндрическом сосуде перемещается без трения поршень, который связан с основанием цилиндра пружиной. Недеформированному состоянию пружины соответствует крайнее левое положение поршня. Слева от поршня находится идеальный газ, занимающий объем $V_1 = 2$ л при давлении $p_1 = 10^5$ Па. Со стороны пружины – вакуум. Какую работу A совершает газ при увеличении объема в 2 раза?

2.18. Замкнутый цилиндрический сосуд сечением $S = 20$ см² разделен поршнем массой $M = 5$ кг на две части. Под поршнем при начальной температуре $t_0 = 0$ °С находится вода, сверху – вакуум. Поршень связан с верхним основанием цилиндра пружиной жесткостью $k = 15$ Н/м. Вначале пружина недеформирована. Определите массу пара m под поршнем при нагревании воды до $t = 100$ °С. Трением пренебречь. Молярная масса воды $M = 0,018$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с², атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

2.19. Какую работу A нужно совершить над одним молем идеального газа для его изобарного сжатия, при котором концентрация молекул в конечном состоянии в $k = 2$ раза больше, чем в начальном? Первоначальная температура $T = 300$ К, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

2.20. С некоторым количеством идеального газа совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 9 (все линии прямые). Известно, что в состояниях a и b температуры одинаковы: $T_a = T_b = 300$ К, а объемы отличаются вдвое: $V_b = 2V_a$. Найдите количество молей газа ν , если за один цикл газ совершает работу $A = 150$ Дж. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

2.21. Идеальный газ участвует в циклическом процессе, график которого приведен на рисунке 10. Здесь ab – изотерма,

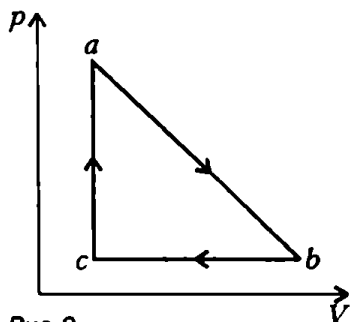


Рис.9

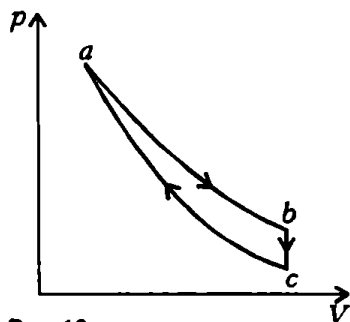


Рис.10

bc – изохора, ca – адиабата. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 1$ Дж. В изохорной стадии процесса газ охлаждается на $\Delta T = 2$ К. Найдите термодинамический КПД цикла η , если изохорная теплоемкость газа равна $C_V = 0,49$ Дж/К.

2.22. Рабочим телом тепловой машины является один моль одноатомного идеального газа. Циклический процесс работы

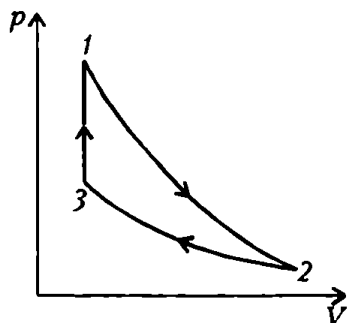


Рис. 11

машины представлен на рисунке 11. Он состоит из адиабатного расширения $1-2$, изотермического сжатия $2-3$ и изохорного процесса $3-1$. При этом КПД машины равен $\eta = 20\%$, а работа, совершаемая над газом в процессе изотермического сжатия, равна $A = 25$ Дж. Найдите разность максимальной и минимальной температур газа в цикле ΔT . Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль \cdot К).

Задачи экзаменационных билетов 2003 года

2.23. В двух баллонах с объемами $V_1 = 40$ л и $V_2 = 20$ л находится влажный воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом баллоне $\phi_1 = 50\%$. После того как баллоны соединили трубкой, установившаяся влажность в них стала $\phi = 70\%$. Какова была влажность воздуха ϕ_2 во втором сосуде? Температуру считать постоянной.

2.24. В модификации опыта Торричелли в пространстве над ртутью остался воздух. При длине трубки, выступающей над ртутью в сосуде, $L = 0,6$ м, высота столбика ртути $h = 0,3$ м. На сколько сантиметров надо дополнительно погрузить трубку, чтобы уровень ртути в ней стал таким же, как в сосуде? Атмосферное давление $p_a = 760$ мм рт. ст. Температура постоянна.

2.25. Найдите удельную теплоемкость c механической смеси, состоящей из порошков меди и алюминия. Масса алюминия в смеси $m_1 = 0,3$ кг, его удельная теплоемкость $c_1 = 900$ Дж/(кг \cdot К); масса меди $m_2 = 0,15$ кг, ее удельная теплоемкость $c_2 = 400$ Дж/(кг \cdot К).

2.26. Два сосуда с объемами $V_1 = 3$ л и $V_2 = 2$ л соответственно соединены небольшой трубкой с перекрытым краном. В первом сосуде находится аргон под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, а во

втором – неон под давлением $p_2 = 1 \cdot 10^5$ Па. Считая сосуды теплоизолированными, определите внутреннюю энергию U смеси газов, образовавшейся после открытия кранов.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. В однородном электрическом поле подвешена на невесомой и нерастяжимой нити бусинка массой $m = 100$ мг, несущая заряд $q = +2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Напряженность поля равна 500 В/м, силовые линии направлены вертикально вниз. Нить отклонили на угол $\alpha = 90^\circ$ от вертикали и отпустили. Найдите силу натяжения нити в момент прохождения ею вертикального положения. Сопротивление воздуха не учитывать. Принять $g = 10$ м/с².

3.2. От верхней пластины горизонтально расположенного плоского конденсатора падает дробинка массой $m = 20$ мг. При абсолютно упругом ударе о нижнюю пластину на дробинку переходит заряд $q = 5 \cdot 10^{-8}$ Кл. С какой скоростью v дробинка движется перед ударом о верхнюю пластину? Конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 50$ В.

3.3. Параллельно отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки влетает пучок электронов, движущихся со скоростью $v_0 = 6 \cdot 10^6$ м/с. Через промежуток времени $\tau = 5 \cdot 10^{-10}$ с их скорость оказывается равной $v = 1 \cdot 10^7$ м/с. Считая, что поле между пластинами однородно, найдите его напряженность E . Удельный заряд электрона $e/m = 1,8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

3.4. Конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 50$ В. После замыкания ключа K конденсатор разряжается через два параллельно соединенных резистора с сопротивлениями $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 10$ Ом (рис.12). Какое количество теплоты Q_1 выделится на резисторе сопротивлением R_1 за время полного разряда конденсатора?

3.5. Два конденсатора с электроемкостями $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ соединены параллельно (рис.13) и через резистор

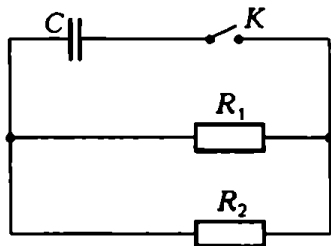


Рис.12

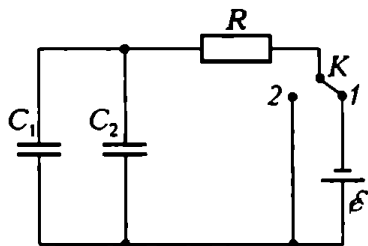


Рис.13

сопротивлением R присоединены к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 60$ В, при этом ключ K находится в положении 1. Какое количество теплоты выделится на резисторе при полном разряде конденсаторов, если ключ K перевести в положение 2?

3.6. Батарею параллельно соединенных конденсаторов (рис. 14) с емкостями $C_1 = 1$ мкФ и $C_2 = 2$ мкФ сначала подсоединяют к

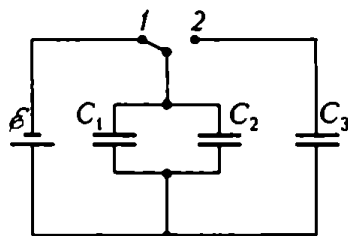


Рис. 14

источнику с ЭДС, равной $\mathcal{E} = 6$ В, при этом ключ K находится в положении 1. Затем ключ переводят в положение 2, соединяя батарею с конденсатором емкостью $C_3 = 3$ мкФ. Найдите заряд q , который получит конденсатор емкостью C_3 .

3.7. Сосуд представляет собой прямоугольный параллелепипед. Две противоположные боковые грани являются металлическими пластинами, остальные грани – диэлектрики. Расстояние между пластинами равно $l = 1$ мм, что значительно меньше двух других сторон параллелепипеда. Металлические пластины присоединены к клеммам источника постоянного напряжения $U = 10$ В. В сосуд наливают жидкость с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 21$ объемом $V = 20$ см³. Определите, какой заряд Δq пройдет после этого через баллистический гальванометр, включенный в цепь последовательно. Считать $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

3.8. Два гальванических элемента соединены по схеме, изображенной на рисунке 15, и имеют следующие характеристики: ЭДС $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = 1,5$ В, внутреннее сопротивление первого источника тока $r_1 = 0,6$ Ом. При какой величине сопротивления R резистора ток через второй элемент не идет?

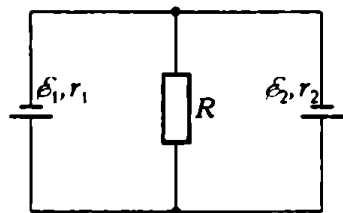


Рис. 15

3.9. Два аккумулятора имеют одинаковые ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В, но разные внутренние сопротивления $r_1 = 0,2$ Ом и $r_2 = 0,6$ Ом. Аккумуляторы соединены параллельно и замкнуты на внешнее сопротивление

$R = 2$ Ом. Найдите силу тока I_1 , проходящего через первый аккумулятор.

3.10. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 50$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 10$ Ом. Последовательно с этим источником в цепи включают еще один

источник с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В. При каком внутреннем сопротивлении r_2 второго источника сила тока в цепи не изменится?

3.11. В схеме, изображенной на рисунке 16, резисторы имеют сопротивления $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом. При разомкнутом ключе K через источник протекает ток $I_1 = 5$ А, а при замкнутом ключе ток через источник равен $I_2 = 6$ А. Найдите внутреннее сопротивление r источника тока.

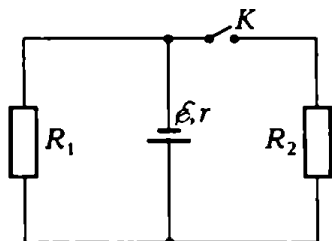


Рис. 16

3.12. Резистор сопротивлением $R = 12$ Ом подключен к источнику тока. При этом напряжение на зажимах источника составляет $U_1 = 6$ В. Если параллельно первому резистору подключить второй такой же, то напряжение на зажимах источника станет $U_2 = 5$ В. Определите по этим данным внутреннее сопротивление r источника тока.

3.13. В схеме, изображенной на рисунке 17, $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 10$ В, $\mathcal{E}_3 = 20$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$. Определите разность потенциалов $\Delta\phi$ между точками A и B . Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

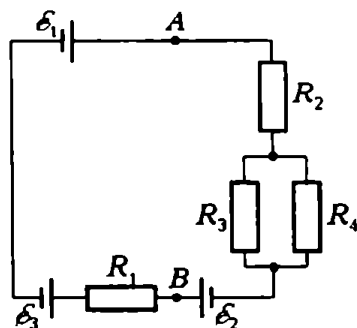


Рис. 17

3.14. К клеммам источника постоянного тока, замкнутого на нагрузку сопротивлением $R = 8$ Ом, подключен конденсатор. Если конденсатор включить в эту цепь последовательно, то заряд на его обкладках окажется больше в $k = 1,5$ раза. Найдите внутреннее сопротивление источника r .

3.15. В схеме, изображенной на рисунке 18, все сопротивления одинаковы: $r = R_1 = R_2 = 2$ Ом. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделяющееся в резисторе сопротивлением R_1 за 1 секунду, после замыкания ключа K ?

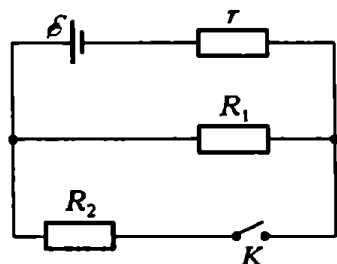


Рис. 18

3.16. Мощность электрического нагревателя, подключенного к бытовой электросети, равна $P = 840$ Вт. За какое время τ можно вскипятить $m = 1$ кг воды, если воспользоваться двумя такими нагревателями, соеди-

нив их последовательно и подключив к той же сети? Начальная температура воды $t = 20^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$. Потери тепла не учитывать.

3.17. В банку налито $m = 2 \text{ кг}$ воды. Когда в банку опустили один кипятильник, включенный в сеть с эффективным значением напряжения $U = 160 \text{ В}$, вода начала закипать через $\tau_1 = 4 \text{ мин}$. Когда одновременно с первым в банку опускают второй кипятильник, включенный параллельно с первым, вода в банке начинает закипать через $\tau_2 = 3 \text{ мин}$. Найдите сопротивления R_1 и R_2 спиралей кипятильников, если комнатная температура, при которой находилась вода в банках, $t = 20^\circ\text{C}$. Теплоемкость воды принять равной $c = 4,0 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{K})$. Теплоемкостью банки и изменением сопротивления кипятильников с температурой пренебречь.

3.18. Елочная гирлянда состоит из $N = 20$ одинаковых лампочек, соединенных последовательно. Каждая из них рассчитана на напряжение $U_0 = 6 \text{ В}$. Гирлянду включают в электрическую сеть с напряжением $U = 220 \text{ В}$ через дополнительное сопротивление R . Его величину подбирают так, чтобы лампочки работали в номинальном режиме. Найдите, какая часть k общей мощности, потребляемой от сети, теряется на дополнительном сопротивлении.

3.19. Электродвигатель трамвайного вагона работает при постоянном напряжении $U = 600 \text{ В}$, потребляя при этом ток $I = 100 \text{ А}$. Сопротивление обмотки двигателя $R = 3 \text{ Ом}$. Найдите силу тяги F , развиваемую двигателем при движении вагона с постоянной скоростью $v = 36 \text{ км}/\text{ч}$.

3.20. Два одинаковых аккумулятора с ЭДС $\mathcal{E} = 12 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 2 \text{ Ом}$ (у каждого) соединены последовательно и подключены к реостату сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Какое количество теплоты Q выделяется в одном из аккумуляторов за время $\Delta t = 10 \text{ мин}$?

3.21. На электроплитку, включенную в сеть с действующим напряжением $U = 220 \text{ В}$ и имеющую только омическое сопротивление $R = 30 \text{ Ом}$, поставили сосуд со льдом, имеющим температуру $t = 0^\circ\text{C}$. Масса льда $m = 1 \text{ кг}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,34 \text{ МДж}/\text{кг}$. Учитывая, что на плавление льда расходуется $\eta = 50\%$ мощности плитки, определите время τ , необходимое для плавления льда.

3.22. К источнику тока параллельно подключены две электролитические ванны. Через источник течет ток силой $I = 7 \text{ А}$. В первой ванне, где находится раствор соли никеля, за время $t =$

= 10 мин выделилось $m_1 = 0,36$ г никеля. Во второй ванне, где находится раствор соли серебра, за это же время выделилось $m_2 = 3,35$ г серебра. Найдите электрохимический эквивалент серебра k_2 , если электрохимический эквивалент никеля $k_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

3.23. Фоторезистор и резистор с постоянным сопротивлением $R = 5$ кОм соединены последовательно с источником тока. Когда фоторезистор осветили, сила тока в цепи увеличилась в $k = 3$ раза. Во сколько раз изменилось сопротивление фоторезистора при освещении, если в темноте оно составляло $R_0 = 20$ кОм? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

3.24. Концентрация электронов проводимости в чистом германии при комнатной температуре равна $n = 3 \cdot 10^{19}$ м⁻³. Какова доля ионизированных атомов германия? Считать, что каждый ионизированный атом теряет по одному электрону. Плотность германия $\rho = 5400$ кг/м³, молярная масса $M = 0,073$ кг/моль. Число Авогадро принять равным $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

3.25. В однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 0,1$ Тл и направленной вертикально вверх, подвешена проводочная рамка $abcd$ (рис.19). Рамка может свободно поворачиваться вокруг стороны ad . Какой силы I ток следует пропустить через рамку, чтобы она отклонилась от вертикали на угол $\alpha = 45^\circ$? Масса проводника bc равна $m = 15$ г, его длина $l = 20$ см. Массой проводников ab и cd пренебречь. Принять $g = 10$ м/с².

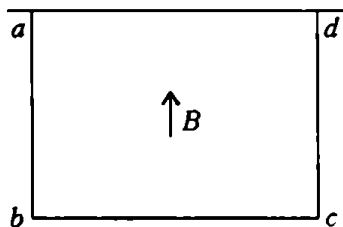


Рис.19

3.26. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 220$ В, движется по окружности радиусом $R = 15$ см в однородном магнитном поле. Найдите индукцию B магнитного поля. Заряд частицы $q = 2e = 3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл, ее масса $m = 6,3 \cdot 10^{-27}$ кг.

3.27. Электрон движется в однородном магнитном поле по окружности с периодом обращения $T_e = 1,1 \cdot 10^{-8}$ с. Каков будет период обращения по окружности протона T_p в том же магнитном поле? Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, масса протона $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг.

3.28. Протон движется в пространстве с однородными электрическим и магнитным полями. Линии магнитной индукции и линии напряженности этих полей параллельны. В тот момент,

когда скорость протона перпендикулярна линиям электрического и магнитного полей, его ускорение, вызванное действием этих полей, равно $a = 10^{12} \text{ м/с}^2$. Найдите напряженность электрического поля E , если скорость протона $v = 60 \text{ км/с}$, индукция магнитного поля $B = 0,1 \text{ Тл}$. Отношение заряда протона к его массе принять равным $q/m = 10^8 \text{ Кл/кг}$.

3.29. Протон, ускоренный электрическим полем, попадает в магнитное поле и движется по дуге окружности радиусом $R = 0,3 \text{ м}$. При этом вектор скорости протона изменяет свое направление, поворачиваясь на угол $\Delta\varphi = 45^\circ$ за время $\Delta t = 10^{-7} \text{ с}$. Найдите ускоряющую разность потенциалов U . Заряд протона $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, его масса $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

3.30. Длинная проволочная катушка (соленоид) состоит из достаточно большого количества витков и имеет индуктивность $L = 0,05 \text{ Гн}$. На катушку надет замкнутый виток проволоки. Найдите число витков N в катушке, если известно, что при равномерном увеличении тока через соленоид от $I_1 = 1 \text{ А}$ до $I_2 = 3 \text{ А}$ за время $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ в надетом витке индуцируется ЭДС $\mathcal{E} = 10^{-3} \text{ В}$.

3.31. При равномерном изменении силы тока через проволочную катушку за время $\Delta t = 0,05 \text{ с}$ в ней возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$. Катушка содержит $N = 1000$ витков. Какой заряд Δq протечет за это время через замкнутый проволочный виток, надетый на катушку? Сопротивление витка $R = 0,2 \text{ Ом}$.

3.32. Проволочное кольцо радиусом $r = 0,1 \text{ м}$ лежит на столе. Какой заряд q протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $R = 2 \text{ Ом}$. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$.

3.33. Проволочная катушка, имеет площадь поперечного сечения $S = 5 \text{ см}^2$ и содержит $N = 100$ витков. Катушка помещена в однородное магнитное поле, линии индукции которого параллельны оси катушки. Концы провода катушки подсоединены к обкладкам конденсатора емкостью $C = 4 \text{ мкФ}$. Какой заряд q окажется на обкладках этого конденсатора, если магнитное поле будет убывать со скоростью $\Delta B/\Delta t = 20 \text{ Тл/с}$?

3.34. Через обмотку соленоида течет ток силой $I_1 = 5 \text{ А}$. При увеличении этого тока в $k = 2$ раза за время $\Delta t = 1 \text{ с}$ среднее значение электродвижущей силы самоиндукции равно $\mathcal{E} = 2 \text{ В}$. Найдите энергию магнитного поля в соленоиде W_m при исходной силе тока I_1 .

3.35. Проволочное кольцо диаметром $d = 10$ см, имеющее сопротивление $R = 1$ Ом, помещено в переменное однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. Магнитная индукция нарастает линейно за время $t_1 = 2$ с от нуля до значения $B = 0,1$ Тл, а затем линейно уменьшается до нуля за время $t_2 = 4$ с. Какое количество теплоты Q выделится в кольце?

Задачи экзаменационных билетов 2003 года

3.36. Два одинаковых воздушных конденсатора подсоединены к источнику тока через резистор R , как показано на рисунке 20. Емкость каждого конденсатора $C = 6 \cdot 10^{-10}$ Ф. Напряжение источника $U = 20$ В. Какой заряд Δq протечет через резистор, если пространство между обкладками одного из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 5$?

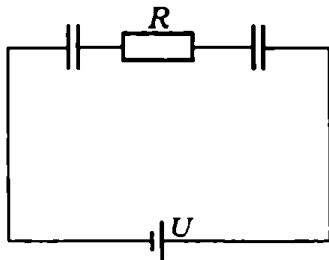


Рис.20

3.37. Источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E} = 6$ В может создать максимальный ток в цепи силой $I_{\max} = 1,5$ А. Источник замкнут на внешнее сопротивление $R = 2$ Ом. Какое количество теплоты Q выделится на внешнем сопротивлении за время $\tau = 1$ мин?

3.38. Два источника постоянного тока соединены последовательно и замкнуты на некоторое внешнее сопротивление. Если полярность одной из батарей поменять на противоположную, то количество теплоты, выделяющееся на внешнем сопротивлении за одну секунду, уменьшится в $n = 4$ раза. ЭДС одного из источников равна $\mathcal{E}_1 = 12$ В. Найдите ЭДС другого источника \mathcal{E}_2 , если известно, что она меньше, чем \mathcal{E}_1 .

3.39. В электролитической ванне при получении $m = 10$ г серебра выделилось количество теплоты $Q = 4 \cdot 10^4$ Дж. На клеммах ванны поддерживалось постоянное напряжение $U = 10$ В. Найдите КПД установки η , если электрохимический эквивалент серебра $k = 1 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

3.40. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 40$ В, влетает в плоский слой однородного магнитного поля толщиной $h = 10$ см. Скорость электрона перпендикулярна как линиям магнитной индукции поля \vec{B} , так и плоской границе слоя. При каком минимальном значении индукции B_{\min} электрон не пролетит сквозь слой? Отношение заряда электрона к его массе $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

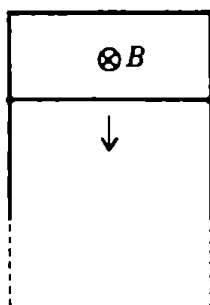


Рис.21

3.41. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 2$ Тл расположены вертикально на расстоянии $l = 20$ см два металлических прута, замкнутых наверху (рис.21). Поле перпендикулярно плоскости системы. По прутьям без трения и без нарушения контакта может скользить перемычка массой $m = 5$ г и сопротивлением $R = 4$ Ом. Сопротивление остальной части системы пренебрежимо мало. Перемычку сначала удерживают в покое, а затем отпускают. Какова будет установившаяся скорость

движения перемычки $v_{\text{уст}}$? Принять $g = 10$ м/с².

3.42. На один сердечник намотана катушка и надет замкнутый виток провода с сопротивлением $R = 0,1$ Ом. Индуктивность катушки $L = 0,4$ Гн. Найдите число витков N в катушке, если при равномерном уменьшении силы тока в ней за время $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$ с от $I_1 = 0,5$ А до нуля в витке протекал ток силой $I_2 = 0,1$ А.

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Один из двух маятников за некоторое время совершил $n_1 = 10$ полных колебаний, а другой за это же время — $n_2 = 6$ полных колебаний. Определите длину второго маятника, если она отличается от длины первого на $\Delta l = 20$ см. Маятники считать математическими.

4.2. Брусок находится на горизонтальной плоскости и с помощью пружины прикреплен к вертикальной стенке (рис.22).

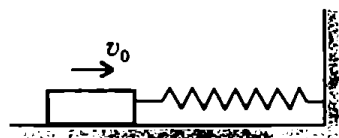


Рис.22

В некоторый момент бруску толчком сообщили начальную скорость $v_0 = 0,6$ м/с, направленную к стенке. Наибольшее сжатие пружины составило $x_{\text{max}} = 12$ см. Через какое время τ после толчка брусок окажется на максимальном удалении от стенки? Трением пренебречь.

4.3. Точка совершает гармонические колебания вдоль прямой линии. При движении между крайними положениями средняя скорость оказалась равной $v_{\text{cp}} = 4$ м/с. Найдите максимальную скорость v_{max} .

4.4. Груз, неподвижно висящий на пружине, удлиняет ее на Δx . Найдите максимальное ускорение груза a_{max} при его вертикальных колебаниях на этой же пружине с амплитудой, равной Δx .

4.5. Диод подключен к источнику синусоидального напряжения последовательно с резистором сопротивлением R , как показано на рисунке 23. Действующее значение напряжения источника $U_d = 20$ В. Сопротивление резистора $R = 12$ Ом. Найдите величину сопротивления диода при прямом токе, если в цепи выделяется средняя мощность $P = 10$ Вт. Обратным током диода пренебечь.

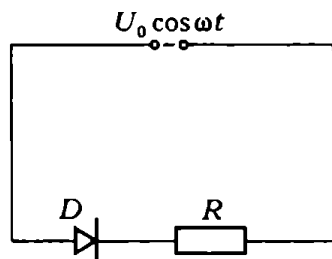


Рис.23

4.6. В схеме, изображенной на рисунке 24, сопротивления резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = 6$ Ом. Амплитуда приложенного переменного напряжения $U_0 = 20$ В. Найдите количество теплоты Q , выделяющееся на резисторах за время $\Delta t = 120$ с. Диод считать идеальным. Время $\Delta t \gg T$, где T – период переменного напряжения.

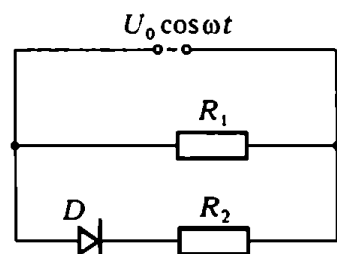


Рис.24

4.7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,2$ Гн и конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ. Конденсатор зарядили до напряжения $U_0 = 2$ В и замкнули контур. Найдите силу тока I в контуре в тот момент, когда энергия колебаний распределилась поровну между электрическим и магнитным полями. Затуханием пренебечь.

4.8. Колебательный контур радиоприемника настроен на длину волны $\lambda = 50$ м при емкости входящего в него конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-10}$ Ф. Какова максимальная сила тока I_{\max} в контуре, если максимальное значение напряжения на конденсаторе $U_{\max} = 1,4 \cdot 10^{-6}$ В? Сопротивлением в контуре пренебечь. Скорость распространения электромагнитных волн принять равной $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

4.9. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки индуктивностью $L = 2 \cdot 10^{-3}$ Гн и двух конденсаторов с электроемкостями $C_1 = 3 \cdot 10^{-11}$ Ф и $C_2 = 1,5 \cdot 10^{-11}$ Ф. Соединяя разными способами катушку с конденсаторами, можно изменять собственную частоту контура. Найдите минимальную длину волны λ_{\min} , на которую может быть настроен контур. Скорость распространения электромагнитных волн $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

4.10. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью $v = 40$ м/с (рис.25). Длина волны

$\lambda = 60$ см, амплитуда $A = 2$ мм. Найдите скорость v_0 точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку.

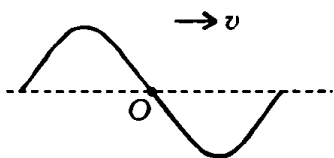


Рис.25

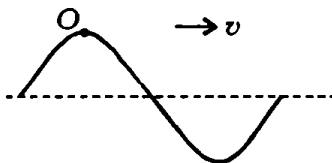


Рис.26

4.11. По струне слева направо бежит поперечная гармоническая волна со скоростью $v = 40$ м/с (рис.26). Длина волны $\lambda = 60$ см, амплитуда $A = 2$ мм. Найдите ускорение a точки O струны в момент времени, соответствующий рисунку.

4.12. По поверхности озера бегут волны со скоростью $u = 2$ м/с. Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью $v = 5$ м/с. С какой частотой ν волны бьются о нос лодки, если поплавков на поверхности воды колеблется с частотой $\nu_0 = 0,5$ Гц?

4.13. Между двумя точками звуковой волны, колеблющимися в одинаковой фазе, укладывается $N = 825$ длин волн. При повышении температуры на 1К скорость распространения звука возрастает на 0,2%. Найдите минимальное повышение температуры ΔT , при котором эти две точки будут совершать колебания в противофазе.

Задачи экзаменационных билетов 2003 года

4.14. Горизонтальная платформа совершает гармонические колебания в вертикальном направлении вместе с лежащим на ней грузом. Силы, с которыми груз давит на платформу в крайних нижнем и верхнем положениях, отличаются в $n = 2$ раза. Найдите частоту колебаний, если их амплитуда составляет $A = 6,8$ см. Принять $g = 10$ м/с².

5. ОПТИКА

5.1. В доске имеется круглое отверстие диаметром $d_1 = 10$ см. Через отверстие проходит сходящийся пучок света, который дает на экране, расположенном за доской параллельно ей, круглое пятно диаметром $d_2 = 5$ см. В отверстие вставили рассеивающую линзу, и пятно превратилось в точку. Найдите оптическую силу D этой линзы. Расстояние от доски до экрана $l = 15$ см.

5.2. Расстояние между предметом и его изображением, полученным при помощи линзы, равно $L = 25$ см. Найдите

оптическую силу D линзы, если изображение прямое и увеличенное в $k = 2$ раза.

5.3. Точечный источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 30$ см. На каком расстоянии x от линзы нужно поместить плоское зеркало для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя через линзу, стали параллельными?

5.4. Собирающая линза дает на экране действительное изображение предмета, увеличенное в $k = 4$ раза. Найдите фокусное расстояние F линзы, если расстояние между предметом и экраном $l = 0,5$ м.

5.5. Длина волны монохроматического света в воздухе равна $\lambda_0 = 600$ нм. При переходе в стеклянную пластинку длина волны становится равной $\lambda_1 = 420$ нм. Найдите угол падения α луча света на стеклянную пластинку, если отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол.

5.6. Имеется линза с оптической силой $D = +2$ дптр. Стержень располагают перпендикулярно главной оптической оси поочередно в двух ее точках на разных расстояниях от линзы (по одну сторону от нее). В обоих случаях линейные размеры оптического изображения оказываются в $k = 10$ раз больше длины стержня. Найдите расстояние l между этими положениями стержня.

5.7. Оптическая сила лупы $D = +12,5$ дптр. На каком расстоянии d от нее надо поместить предмет, чтобы увидеть изображение, увеличенное в $k = 4$ раза?

5.8. Луч света падает нормально на боковую грань прозрачной призмы. После прохождения через призму луч отклоняется на угол $\varphi = 4^\circ$ от первоначального направления. Преломляющий угол призмы $\delta = 8^\circ$. Найти показатель преломления материала, из которого сделана призма. Учитывая малость углов, можно считать $\sin \varphi \approx \varphi$, $\sin \delta \approx \delta$, $\sin(\delta + \varphi) \approx \delta + \varphi$.

5.9. Тонкий пучок света падает нормально на стеклянное полушарие радиусом $R = 30$ см с показателем преломления $n = 4/3$ (рис.27). Определите расстояние x от выпуклой поверхности полушария до точки, в которой соберется этот пучок. Считать, что для малых углов $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.

5.10. В бассейне с водой, глубиной $H = 2$ м, обладающем зеркальным дном, находится точечный источник света на расстоянии $h = H/2$

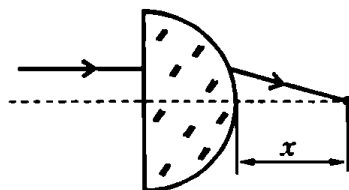


Рис.27

под поверхностью воды. Определите радиус светового пятна R на поверхности бассейна. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

5.11. Определите, какова должна быть связь преломляющего угла стеклянной призмы φ с показателем преломления призмы n , если углы падения луча и выхода его из призмы равны α (рис.28). Также имеет место следующее условие: $\operatorname{tg} \alpha = n$.

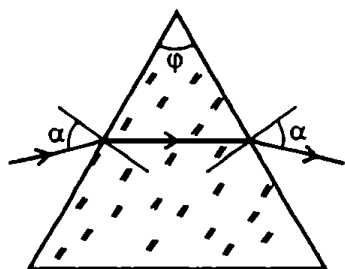


Рис.28

5.12. Дифракционная решетка представляет собой пластинку шириной $l = 1$ см, на которую нанесено $N = 2500$ штрихов. На решетку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Какое наибольшее количество максимумов может дать такая решетка (при нормальном падении света на нее) ?

5.13. Лазер излучает свет с длиной волны $\lambda = 495$ нм, потребляя мощность $P = 40$ Вт. Сколько фотонов ежесекундно излучает лазер, если в энергию света переходит $\eta = 10\%$ от потребляемой энергии? Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

5.14. Катод фотоэлемента освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 350$ нм. Для того чтобы фотоэлектроны не достигли анода, между анодом и катодом необходимо приложить напряжение $U > U_{\min} = 1,55$ В. Найдите работу $A_{\text{вых}}$ выхода электрона из материала катода. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

5.15. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}$ м. Энергия светового потока, падающего на катод за время $\Delta t = 10$ с, равна $W = 0,15$ Дж. Определите силу тока насыщения фотоэлемента $I_{\text{нас}}$ при таком освещении. Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

5.16. Пучок света с длиной волны $\lambda = 330$ нм падает на металлическую сферу радиусом $R = 0,144$ м. Какой максимальный заряд q может образоваться на сфере в результате фотоэффекта? Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, работа выхода электрона из металла $A_{\text{вых}} = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж, заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянный коэффициент $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².

5.17. На экран, расположенный на расстоянии $l = 3$ м от объектива проектора с оптической силой $D = 8$ дптр, проецируется кадр диафильма с размерами $a = 24$ мм и $b = 36$ мм. Найдите площадь S изображения кадра на экране.

5.18. Источник света S , испускающий тонкий луч, движется вдоль поверхности воды в бассейне, приближаясь по нормали к его стенке со скоростью $v_1 = 0,5$ м/с (рис.29). Луч направлен в воду так, что угол падения равен 30° . С какой скоростью v_2 движется под водой по вертикальной стенке бассейна световое пятно от луча? Показатель преломления воды $n = 1,33$.

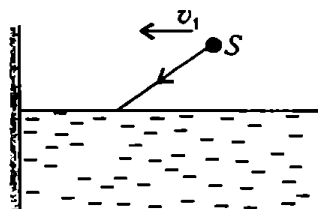


Рис.29

1. МЕХАНИКА

1.1. Выберем систему отсчета с началом вертикальной оси координат (Oy) на поверхности земли. В обоих случаях бросания камня координата y камня изменяется по закону (равномерное движение)

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент падения на землю она, очевидно, обращается в ноль. Для первого случая (движение по вертикали) это дает возможность определить начальную скорость броска v_0 из условия

$$0 = v_0\tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

а для второго – время полета τ_1 из аналогичного условия

$$0 = v_0 \sin \alpha \cdot \tau_1 - \frac{g\tau_1^2}{2}.$$

Искомая дальность полета l камня, брошенного под углом к горизонту, определяется с использованием закона движения по горизонтали (равномерное движение)

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

При $t = \tau_1$ имеем

$$l = v_0 \cos \alpha \cdot \tau_1.$$

Из полученных уравнений находим

$$l = \frac{g\tau^2 \sin 2\alpha}{4} = 22,5 \text{ м}.$$

1.2. Обозначим длину эскалатора l , тогда длина одной ступеньки $\Delta l = l/N$. Поскольку скорость пассажира относительно эскалатора совпадает по направлению с направлением скорости эскалатора, по закону сложения скоростей классической механики можно найти скорость пассажира в неподвижной системе отсчета – она равна $v + u$. Тогда время спуска пассажира

по эскалатору равно

$$\tau = \frac{l}{v+u}.$$

При этом на одну ступеньку пассажир затрачивает время

$$\tau_1 = \frac{\Delta l}{v}.$$

Таким образом, за время спуска пассажир проходит количество ступеней

$$N_1 = \frac{\tau}{\tau_1} = \frac{lvN}{(v+u)l} = \frac{v}{v+u} N = \frac{1}{2} N = 50.$$

1.3. На рисунке 30 изображены силы, действующие на грузы. Здесь $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, \vec{F}_n – сила натяжения нити. Уравнения движения каждого из грузов (второй закон Ньютона) в проекциях на вертикальное направление следует записать так:

$$F - m_2g - F_n = m_2a,$$

$$F_n - m_1g = m_1a.$$

Исключив отсюда ускорение грузов a , можно найти искомую величину силы, считая, что натяжение нити достигло максимально возможного для нее значения:

$$F = \frac{m_1 + m_2}{m_1} F_n = 90 \text{ Н}.$$



Рис.30

1.4. Скольжение бруска вдоль наклонной плоскости клина происходит под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы нормального давления \vec{N} со стороны наклонной плоскости. Это довольно стандартная задача, и мы не будем приводить ее подробное решение. Напомним, что применение второго закона Ньютона дает

$$N = mg \cos \alpha.$$

По третьему закону Ньютона с такой же силой брусок действует на наклонную плоскость.

Поскольку клин неподвижен, векторная сумма всех сил, действующих на него, равна нулю. В горизонтальном направлении на клин вправо действует искомая сила реакции F со стороны стенки, влево – горизонтальная составляющая силы давления со стороны бруска, равная $N \sin \alpha$. По второму закону Ньютона,

$$F - N \sin \alpha = 0,$$

откуда окончательно получаем

$$F = mg \cos \alpha \sin \alpha = \frac{mg}{2} \sin 2\alpha = 0,5 \text{ Н}.$$

1.5. На рисунке 31 показаны силы, действующие на тело при его скольжении вверх по наклонной плоскости. При движении вниз лишь изменится на противоположное направление силы трения. Выберем направление одной из осей системы отсчета

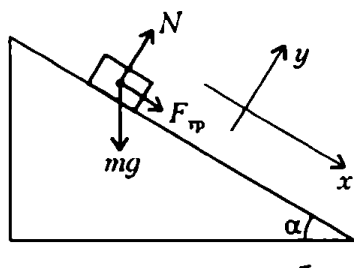


Рис.31

вдоль наклонной плоскости, а другой – перпендикулярно. Тогда уравнение движения (второй закон Ньютона) тела вверх по наклонной плоскости в проекциях на координатные оси будет выглядеть следующим образом:

$$mg \sin \alpha + F_{\text{тр}} = ma_1,$$

$$N - mg \cos \alpha = 0.$$

Сила трения скольжения равна при этом

$$F_{\text{тр}} = \mu N.$$

Записанные уравнения динамики позволяют найти ускорение тела:

$$a_1 = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) g.$$

Время движения вверх τ_1 определяет кинематическое равенство:

$$0 = v_0 - a_1 \tau_1.$$

Здесь учтено, что мгновенная скорость тела линейно уменьшается при равнозамедленном движении и обращается в ноль в верхней точке траектории. Отсюда получаем

$$\tau_1 = \frac{v_0}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) g}.$$

Вполне аналогично определяем ускорение и время движения тела вниз по наклонной плоскости до достижения скорости v_0 :

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = ma_2,$$

откуда

$$a_2 = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g;$$

$$v_0 = a_2 \tau_2,$$

откуда

$$\tau_2 = \frac{v_0}{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g}.$$

Общее время движения вверх и вниз, очевидно, равно

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{(\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha) g} \approx 2,3 \text{ с}.$$

1.6. Определить, на какое расстояние h от поверхности Луны удалится камень, если его подбросить вертикально вверх, можно, записав закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg_{\text{Л}} h,$$

где $g_{\text{Л}}$ – ускорение свободного падения у поверхности Луны. Оно определяется массой и радиусом Луны, исходя из закона всемирного тяготения и второго закона Ньютона (пренебрегая зависимостью $g_{\text{Л}}$ от h):

$$g_{\text{Л}} = G \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}^2}.$$

Аналогично, ускорение свободного падения у поверхности Земли равно

$$g = G \frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}.$$

Разделив два последних равенства друг на друга, получим

$$\frac{g_{\text{Л}}}{g} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{Л}}} \right)^2.$$

Отсюда легко выразить $g_{\text{Л}}$:

$$g_{\text{Л}} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_{\text{З}}} \left(\frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{Л}}} \right)^2 g,$$

а затем найти h :

$$h = \frac{v_0^2}{2g_{\text{Л}}} = \frac{v_0^2 n_1 n_2^2}{2g} \approx 7,4 \text{ м}.$$

1.7. Напомним читателю, как вычисляется первая космическая скорость для Земли. По определению это та минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно стало спутником Земли. Обозначим через M и R массу и радиус Земли. Поскольку спутник движется по круговой орбите на небольшой высоте над поверхностью Земли ($h \ll R$), то, в соответствии со

вторым законом Ньютона,

$$G \frac{mM}{R^2} = m \frac{v^2}{R}.$$

Здесь в левой части уравнения записана величина силы тяготения, в правой – произведение массы спутника на его центростремительное ускорение, G – гравитационная постоянная. Отсюда для первой космической скорости для Земли получаем

$$v_{1з} = \sqrt{G \frac{M}{R}} = \sqrt{gR}.$$

Аналогично, первая космическая скорость для планеты массой M_1 и радиусом R_1 будет равна

$$v_{1пл} = \sqrt{G \frac{M_1}{R_1}}.$$

Учитывая, что по условию

$$\frac{M_1}{M} = \frac{R_1}{R} = n,$$

получаем искомую скорость:

$$v_{1пл} = v_{1з} = \sqrt{gR} = 8 \text{ км/с}.$$

Как видно, конкретное значение числа n роли не играет.

1.8. На рисунке 32 изображены силы, действующие на каждый из грузов. Здесь $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, \vec{F}_n – сила натяжения нити. Как следует из второго закона Ньютона, в первом случае нить обрывается при достижении системой тел ускорения

$$a = \frac{F_1 - (m_1 + m_2)g}{m_1 + m_2}.$$

Натяжение нити можно найти при этом из уравнения

$$F_n - m_2g = m_2a.$$

Остается определить, при каком значении силы, действующей на верхний груз, будет достигаться такое же натяжение нити при закрепленном нижнем грузе. Для этого запишем уравнение

Рис.32

$$F_2 - m_1g - F_n = 0.$$

Выражая из последнего уравнения F_2 , используя предыдущие

уравнения и учитывая, что $m_1 = m_2 = m$, получаем

$$F_2 = m_1 g + F_{\text{н}} = mg + \frac{F_1}{2} = 15 \text{ Н}.$$

1.9. На рисунке 33 изображены силы, действующие на каждый из шариков. Здесь $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{F}_A – архимедова сила, $\vec{F}_{\text{н}}$ – сила натяжения нити и \vec{F}_c – сила сопротивления, или вязкого трения, со стороны воды. При движении с постоянной скоростью в инерциальной системе отсчета с учетом направления сил для каждого шарика можно записать соответствующее уравнение движения:

$$m_1 g + F_{\text{н}1} - F_{A1} - F_{c1} = 0,$$

$$m_2 g - F_{\text{н}2} - F_{A2} - F_{c2} = 0.$$

Индекс «1» относится, естественно, к деревянному шарiku, а индекс «2» – к алюминиевому. Важно напомнить, что сила вязкого трения при движении тела в данной жидкости зависит от размеров и формы тела и от скорости движения, а архимедова сила – только от размеров тела. Учитывая условия задачи (одинаковые размеры шариков и невесомость нити), получим

$$F_{A1} = F_{A2}, \quad F_{c1} = F_{c2}, \quad F_{\text{н}1} = F_{\text{н}2} = F_{\text{н}}.$$

Тогда из уравнений движения найдем

$$F_{\text{н}} = \frac{m_2 - m_1}{2} g = 1 \text{ Н}.$$

1.10. При движении шарика по окружности в вертикальной плоскости он имеет составляющую ускорения, направленную к центру окружности и называемую обычно центростремительным ускорением. При этом в любой точке траектории на шарик действуют только две силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити, направленная вдоль нее к центру окружности. Сумма проекций этих сил на направление к центру окружности и обеспечивает центростремительное ускорение. При каждом фиксированном значении скорости движения шарика максимальное натяжение нить испытывает, очевидно, в нижней точке траектории. Запишем уравнение движения шарика вдоль оси, направленной вертикально

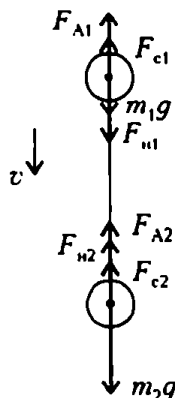


Рис. 33

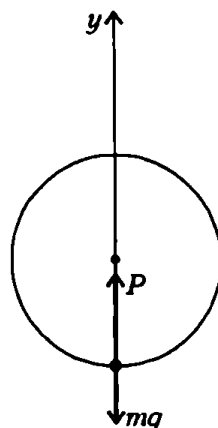


Рис. 34

вверх, именно для нижней точки (рис.34):

$$P - mg = ma_{\text{ц}}.$$

В нашем случае центростремительное ускорение равно

$$a_{\text{ц}} = \omega^2 l,$$

где $l = R$ – длина нити, определяющая радиус окружности. Используя оба равенства, легко найти угловую скорость вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{P - mg}{ml}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

1.11. Уравнение равновесия плавающей льдины выглядит так:

$$mg - F_A = 0.$$

Сила Архимеда равна

$$F_A = \rho g S h_0,$$

где h_0 – исходная глубина погружения льдины в воду. Для подъема льдины из воды нужна внешняя сила, направленная вертикально вверх. По мере уменьшения глубины погружения льдины h эта сила должна линейно нарастать от нуля до mg . Соответственно, ее работа по перемещению льдины вверх на высоту h_0 будет равна

$$A = \frac{1}{2} m g h_0.$$

Убедиться в этом можно, например, построив график зависимости $F_A(h)$ и вспомнив аналогичный расчет работы силы упругости. Подставив сюда найденную с использованием предыдущих соотношений величину h_0 , окончательно получим

$$A = \frac{m^2 g}{2 \rho S} = 0,02 \text{ Дж}.$$

1.12. Отметим, прежде всего, что импульс системы пушка – снаряд изменяется при выстреле в результате действия на систему внешней силы, а именно силы реакции опоры. Однако сохраняется горизонтальная составляющая импульса системы, поскольку реакция опоры не имеет проекции на это направление (импульсом силы трения, в соответствии с условием задачи, можно пренебречь). После такого анализа остается лишь записать соответствующие условия в виде уравнений. По горизонтали:

$$0 = m v_0 \cos \alpha - M v,$$

по вертикали:

$$\Delta p = mv_0 \sin \alpha .$$

В итоге находим изменение импульса системы:

$$\Delta p = Mv \operatorname{tg} \alpha = 400 \text{ кг} \cdot \text{м/с} .$$

1.13. Скорость бруска при скольжении по доске уменьшается в результате действия силы трения. Изменение кинетической энергии бруска, в соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии, равно работе силы трения:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -F_{\text{тр}} l .$$

Здесь $v_1 = v$ – начальная скорость бруска. Работа силы трения отрицательна, так как сила трения направлена против перемещения.

По условию,

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{1}{k} \frac{mv_1^2}{2} .$$

Для трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu N .$$

В нашем случае

$$N = mg .$$

Объединив записанные соотношения, получим

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{1}{k} \frac{mv^2}{2} = \mu mgl .$$

Отсюда можно найти коэффициент трения:

$$\mu = \frac{v^2 (k - 1)}{2glk} = 0,67 .$$

1.14. При подъеме на груз действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила \vec{F} со стороны поднимающего «устройства» (нити, троса, руки человека и т.п.). Уравнение движения груза (второй закон Ньютона) с учетом того, что подъем происходит вертикально, можно записать в виде

$$F - mg = ma ,$$

откуда

$$F = m(a + g) .$$

При подъеме сила F постоянна, так как по условию задачи движение является равноускоренным. Работа, совершаемая этой силой, равна

$$A = FH = m(g + a)H.$$

При равноускоренном подъеме без начальной скорости

$$H = \frac{at^2}{2}.$$

Определив отсюда ускорение груза, подставим его в выражение для работы:

$$A = m \left(g + \frac{2H}{t^2} \right) H.$$

Из этого равенства найдем искомую величину t :

$$t = \sqrt{\frac{2m}{A - mgH}} H = 1,33 \text{ с}.$$

1.15. По закону сохранения энергии можно записать

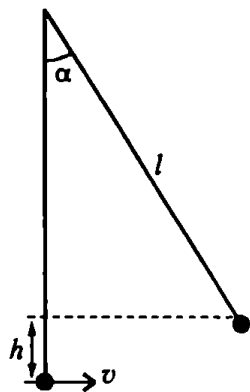
$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где h – максимальная высота, на которую поднимается шарик в процессе колебаний. Из рисунка 35 видно, что

$$h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha).$$

Длину нити l можно найти из формулы для периода малых колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$



откуда

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

Рис.35

Из записанных соотношений получим уравнение

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g^2 T^2}{4\pi^2} (1 - \cos \alpha),$$

из которого находим

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2\pi^2 v^2}{g^2 T^2} = 0,5, \text{ и } \alpha = 60^\circ.$$

1.16. Пусть за время Δt из наконечника вытекает масса воды Δm . Полезная работа $A_{\text{пол}}$, совершаемая мотором, расходуется на увеличение кинетической энергии этой воды. С учетом того, что в водоеме вода покоится, запишем

$$A_{\text{пол}} = \frac{\Delta m v^2}{2}.$$

Полезная мощность равна, соответственно,

$$P_{\text{пол}} = \frac{\Delta m v^2}{2 \Delta t}.$$

Обратим внимание, что $\Delta m / \Delta t$ – это масса воды, вытекающей из наконечника в единицу времени. Объем воды, вытекающей в единицу времени, равен Sv . Следовательно,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho Sv,$$

Таким образом,

$$P_{\text{пол}} = \frac{\rho S v^3}{2}.$$

По определению, коэффициент полезного действия равен

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P} = \frac{\rho S v^3}{2P} = 0,216 \text{ (т.е. 21,6\%)}. \quad \square$$

1.17. По закону сохранения энергии количество теплоты, выделившееся при ударе, равно

$$Q = mgH - mgh,$$

где H – высота, с которой шарик упал, а h – высота, на которую он поднялся после удара. Рассмотрим движение шарика между первым и вторым ударами о пол. При движении тела под действием только силы тяжести максимальная высота подъема связана со временем подъема, равно как и со временем падения, известным кинематическим соотношением

$$h = \frac{g\tau^2}{2},$$

где τ – время подъема. Учитывая, что время подъема и время падения одинаковы, получим

$$\Delta t = 2\tau.$$

Следовательно,

$$h = \frac{g(\Delta t)^2}{8},$$

и окончательно

$$Q = mg \left(H - \frac{g(\Delta t)^2}{8} \right) = 2 \text{ Дж}.$$

1.18. По закону сохранения энергии убыль механической энергии равна работе против сил трения:

$$mgh_1 - mgh_2 = A_{\text{тр}}.$$

Здесь m – масса шайбы и $A_{\text{тр}}$ – работа против сил трения, которая равна

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} s,$$

где s – путь, пройденный шайбой вдоль наклонной плоскости. Этот путь равен

$$s = \frac{h_1}{\sin \alpha} + \frac{h_2}{\sin \alpha}.$$

Сила трения при скольжении вдоль наклонной плоскости, как известно, равна $F_{\text{тр}} = \mu N$. В данном случае $N = mg \cos \alpha$, и

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha.$$

Отсюда, с учетом полученных ранее соотношений, найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \operatorname{tg} \alpha = 0,25.$$

1.19. Период малых колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Длину маятника l (в данном случае это длина стержня) можно найти, пользуясь законом сохранения механической энергии. Для того чтобы шарик мог сделать полный оборот, он должен подняться на высоту $2l$. Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = mg \cdot 2l.$$

Выразив отсюда длину l и подставив ее значение в выражение для периода колебаний, получим

$$T = \frac{\pi v}{g} \approx 0,9 \text{ с}.$$

1.20. Искомую скорость v найдем, исходя из закона сохранения механической энергии системы ракета – Земля. В момент

времени τ эта энергия складывается из потенциальной и кинетической энергий. Соответствующие значения высоты и скорости ракеты в момент отключения двигателей найдем из очевидных кинематических соотношений:

$$H_0 = \frac{a\tau^2}{2},$$

$$v_0 = a\tau.$$

Приравняем полную механическую энергию ракеты на высоте H_0 ее кинетической энергии в момент падения на Землю:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgH_0 = \frac{mv^2}{2}.$$

После сокращения на m и подстановки выражений для v_0 и H_0 получим окончательно

$$v = a\tau\sqrt{1 + \frac{g}{a}} = 66 \text{ м/с}.$$

1.21. Величину начальной скорости v_0 снаряда, вылетевшего из пушки в горизонтальном направлении, найдем, пользуясь законом сохранения импульса:

$$mv_0 - Mv = 0,$$

откуда

$$v_0 = \frac{Mv}{m}.$$

После этого можно решить кинематическую задачу о движении тела, брошенного горизонтально с высоты H . Время полета снаряда определяется из соотношения

$$H = \frac{g\tau^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Объединяя полученные соотношения, найдем искомое расстояние:

$$L = v_0\tau = \frac{Mv}{m} \sqrt{\frac{2H}{g}} = 800 \text{ м}.$$

1.22. При рытье колодца глубиной x работа по выемке грунта на поверхность Земли равна изменению потенциальной энергии этого грунта:

$$A = \frac{mgx}{2}.$$

Здесь мы учитываем, что центр тяжести грунта изначально находится на расстоянии $x/2$ от поверхности Земли. Масса грунта m определяется его объемом и плотностью:

$$m = \rho S x ,$$

где S – площадь поперечного сечения колодца, ρ – плотность грунта. Следовательно,

$$A = \frac{\rho S g}{2} x^2 .$$

Обратим внимание на то, что величина работы пропорциональна квадрату глубины колодца. Обозначим A_h работу первого рабочего, а A_H – полную работу по выкапыванию колодца глубиной H . По условию,

$$\frac{A_h}{A_H} = \frac{1}{2} .$$

Учитывая закономерность, установленную нами ранее для работы, получим

$$\frac{h^2}{H^2} = \frac{1}{2} .$$

Отсюда найдем

$$h = \frac{H}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ м} \approx 1,41 \text{ м} .$$

1.23. Максимальная сила, с которой пружина действует на стену в процессе колебаний, это сила упругости, равная по закону Гука

$$F = k x_m ,$$

где x_m – величина максимальной деформации пружины, т.е. амплитуда возникших колебаний. Чтобы найти ее, достаточно воспользоваться законами сохранения импульса и энергии. Первый закон, как известно, вполне применим к абсолютно неупругому удару (крайне малым импульсом силы упругости пренебрегаем, считая соударение мгновенным). Поэтому запишем

$$mv = (M + m)u .$$

Это равенство связывает импульс летящей пули и импульс системы пуля – тело сразу после попадания пули в брусок; здесь u – скорость системы, с которой начинаются колебания. С этого момента становится допустимым применение закона сохранения механической энергии, так как в системе действуют лишь консервативные силы. Запишем соответствующее это-

му закону равенство:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Это равенство связывает значения максимальной кинетической энергии (момент времени $t = 0$, отсчет времени ведем от начала колебаний) и потенциальной энергии системы ($t = T/4$, т.е. через четверть периода колебаний). Найдя из законов сохранения амплитуду x_m возникших колебаний, определим максимальную силу упругости пружины:

$$F = mv\sqrt{\frac{k}{(M + m)}} = 10 \text{ Н}.$$

1.24. Обозначим через τ время, за которое автомобиль проедет путь l . За это время в двигателе автомобиля сгорит масса бензина $m = \rho V$ и выделится количество теплоты $Q = qm = q\rho V$. Рассматривая двигатель автомобиля как тепловую машину, отметим, что это количество теплоты является затраченным (в соответствии с общепринятой терминологией). Полезную работу можно вычислить по определению коэффициента полезного действия:

$$A = \eta Q = \eta q\rho V.$$

Полезная мощность, развиваемая двигателем, равна, соответственно,

$$P_{\text{пол}} = \frac{A}{\tau} = \frac{\eta q\rho V}{\tau}.$$

Учтем, что полезная мощность расходуется на преодоление силы сопротивления. Поэтому запишем

$$P_{\text{пол}} = \frac{F_{\text{сопр}} l}{\tau}.$$

Приравнявая выражения для полезной мощности, найдем

$$F_{\text{сопр}} = \frac{\eta q\rho V}{l}.$$

Для получения правильного численного значения надо все данные выразить в единицах СИ: $l = 100 \text{ км} = 10^5 \text{ м}$, $V = 10 \text{ л} = 10^{-2} \text{ м}^3$, $\eta = 30\% = 0,3$. Окончательно получим

$$F_{\text{сопр}} = 966 \text{ Н}.$$

1.25. На шар действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, архимедова сила \vec{F}_A и сила давления со стороны дна \vec{F} . При

равновесии шара в сосуде с водой (архимедовой силой со стороны воздуха пренебрегаем) выполняется равенство

$$mg - F - F_A = 0.$$

По закону Архимеда, в данном случае

$$F_A = \frac{\rho_{\text{в}} g V}{2},$$

где V – объем шара. При равновесии шара в воздухе

$$P = mg.$$

Подставив два последних выражения в первое равенство, получим

$$P - F - \rho_{\text{в}} \frac{V}{2} g = 0.$$

Сила тяжести шара равна

$$mg = \rho V g.$$

Выразив V через $P = mg$, получим

$$V = \frac{P}{\rho g}.$$

Тогда

$$P - F - \rho_{\text{в}} \frac{P}{2\rho} = 0,$$

откуда

$$\rho = \frac{P}{2(P - F)} \rho_{\text{в}} = 800 \text{ кг/м}^3.$$

1.26. На шар действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, архимедова сила \vec{F}_A и сила реакции опоры со стороны дна \vec{N} . При равновесии

$$mg - N - F_A = 0.$$

Сила Архимеда связана с объемом $V_{\text{п}}$ погруженной части шара:

$$F_A = \rho_1 g V_{\text{п}},$$

где ρ_1 – плотность воды. С учетом соотношения плотностей материала шара и жидкости для массы шара получим

$$m = \rho_2 V = \frac{\rho_1}{2} V,$$

где ρ_2 – плотность материала шара. Сила давления шара на дно

сосуда (его вес) P по третьему закону Ньютона равна силе реакции опоры N и по условию задачи должна обратиться в ноль:

$$P = N = 0.$$

Подстановка полученных соотношений в первое уравнение приводит к выводу, что в указанных условиях погруженной в воду должна оказаться ровно половина шара:

$$\frac{\rho_1 V g}{2} - \rho_1 g V_n = 0,$$

откуда

$$V_n = \frac{V}{2}.$$

Этот результат снимает некоторые геометрические трудности при определении необходимого количества воды. Ее объем можно найти как разность объемов цилиндра радиусом R и высотой r и половины объема шара радиусом r :

$$\Delta V = \pi R^2 r - \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r \left(R^2 - \frac{2}{3} r^2 \right) = 1,3 \text{ л} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

1.27. На плавающий поплавок действуют три силы: сила тяжести $m\bar{g}$, архимедова сила \bar{F}_A и сила натяжения \bar{F}_H лески, на которой закреплен груз (рис.36).

Обозначим через l длину поплавка, а через $x = kl$ – длину погруженной его части. Принимая поплавок за тонкий однородный стержень, учтем, что сила тяжести приложена к его середине, а архимедова сила – к середине погруженной части поплавка.

Проще всего задача решается применением правила моментов сил, если их вычислять по отношению к оси, проходящей через нижний конец стержня перпендикулярно к нему (точка O на рисунке 36.). Условие равновесия запишется в этом случае в виде

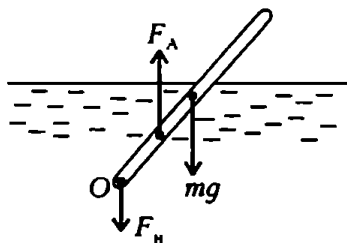


Рис.36

$$F_A \frac{x}{2} \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0,$$

где α – угол между осью поплавка и поверхностью воды. Отсюда получаем

$$F_A = \frac{mg}{k} = 0,15 \text{ Н}.$$

1.28. Задача представляет собой слегка видоизмененный вариант предыдущей задачи. Мы можем предложить два варианта решения.

1) Так же, как при решении предыдущей задачи, учтем все силы, действующие на поплавок, и обязательно уточним, где находятся точки их приложения. Только теперь, применяя правило моментов, удобнее вычислять моменты всех сил по отношению к оси, проходящей через точку приложения архимедовой силы. Тогда при равновесии

$$F_n \frac{kl}{2} \cos \alpha = mg \left(\frac{l}{2} - \frac{kl}{2} \right) \cos \alpha ,$$

где $\frac{kl}{2} \cos \alpha$ – плечо силы F_n (обозначения те же, что и в решении предыдущей задачи). Отсюда находим

$$F_n = mg \frac{1-k}{k} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Н} .$$

2) Можно воспользоваться результатом решения предыдущей задачи, где показано, что

$$F_A = \frac{mg}{k} .$$

При равновесии (с учетом направления сил)

$$F_A = mg + F_n .$$

Отсюда

$$F_n = \frac{mg}{k} - mg = mg \frac{1-k}{k} ,$$

т.е. получаем тот же самый результат.

1.29. На рисунке 37 изображены силы, действующие на шарики и на рычаги весов: $m\vec{g}$ – сила тяжести, \vec{F}_1 и \vec{F}_2 – силы натяжения нитей, на которых подвешены шарики, \vec{F}_A – архимедова сила. При равновесии (левый шарик погружен в воду) для шариков можно записать

$$F_2 - mg = 0 ,$$

$$F_1 + F_A - mg = 0 .$$

Обозначим через V объем шарика. Тогда

$$m = \rho_1 V .$$

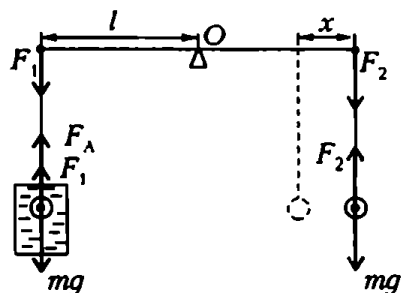


Рис.37

По закону Архимеда,

$$F_A = \rho_2 g V .$$

Отметив, что $F_1 < F_2$, запишем правило моментов для весов относительно оси, проходящей через точку O :

$$F_1 l - F_2 (l - x) = 0 ,$$

или

$$(mg - F_A) l = mg (l - x) .$$

После раскрытия скобок получаем

$$F_A l = mgx .$$

Отсюда, с учетом выражений для F_A и m , найдем

$$x = \frac{\rho_2}{\rho_1} l = 3,7 \text{ см} .$$

1.30. Пусть кубик с ребром a плавает в воде так, что над поверхностью воды выступает часть кубика высотой x . Согласно условию плавания архимедова сила уравнивает силу тяжести кубика:

$$mg = \rho g a^2 (a - x) .$$

Запишем это условие для обоих кубиков с учетом двух обстоятельств, отражающих условие задачи: а) массу одного из кубиков увеличивают, налив в него воду массой Δm ; б) высота надводной части кубиков одинакова. Итак,

$$m_1 g = \rho g a_1^2 (a_1 - x) ,$$

$$(m_2 + \Delta m) g = \rho g a_2^2 (a_2 - x) .$$

Мы получили систему из двух уравнений с двумя неизвестными величинами Δm и x . Решая ее, находим

$$\Delta m = \rho a_2^2 (a_2 - a_1) - a_2^2 \left(\frac{m_2}{a_2^2} - \frac{m_1}{a_1^2} \right) \approx 4,1 \text{ кг} .$$

Полученный результат $\Delta m > 0$ означает, что мы без предварительного анализа правильно угадали: воду следует налить в большой кубик.

1.31. Анализ условия задачи приводит к двум этапам решения задачи.

1) Первый этап стандартный – нахождение горизонтальной дальности полета тела, брошенного под углом к горизонту.

Время полета τ определяется из закона движения тела по вертикали с начальной скоростью $v_0 \sin \alpha$:

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент приземления вертикальная координата тела обращается в ноль:

$$0 = v_0 \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Дальность полета L теперь можно определить, подставив значение для времени полета в закон изменения горизонтальной координаты камня

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t.$$

В итоге получим

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

2) Теперь приступаем ко второму этапу решения задачи. Для ответа на вопрос задачи необходимо помимо начальной скорости v_0 знать угол бросания α . Посмотрим, как определить эти величины, исходя из условия задачи о том, что в верхней точке траектории кинетическая энергия камня равна потенциальной. Используем закон сохранения механической энергии (сопротивлением воздуха, как обычно, пренебрегаем):

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

где h – высота полета камня в верхней точке траектории, а v – его скорость в этой точке, равная горизонтальной составляющей скорости камня в течение всего полета, т.е. $v = v_0 \cos \alpha$. С учетом равенства потенциальной энергии камня его кинетической энергии в верхней точке закон сохранения энергии можно переписать в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + \frac{mv_0^2 \cos \alpha}{2},$$

откуда находим

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \alpha = 45^\circ.$$

Окончательно получаем

$$L = \frac{v_0^2}{g} = 10 \text{ м}.$$

1.32. Как и предыдущую, эту задачу будем решать в два этапа.

1) Ответ на поставленный вопрос определяется, очевидно, значением коэффициента трения скольжения μ между бруском и поверхностью доски. Найдем его, исходя из первого условия задачи.

Удобнее всего использовать закон сохранения и изменения механической энергии. При наличии скорости v_0 брусок обладает кинетической энергией, которая полностью расходуется на совершение работы против силы трения скольжения (неконсервативная сила). В результате механическая энергия системы брусок – доска обращается в ноль (переходит во внутреннюю энергию, т.е. в тепло). Запишем соответствующее соотношение:

$$\frac{mv_0^2}{2} - A_{\text{тр}} = 0.$$

Работа против силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$, по определению механической работы постоянной силы при прямолинейном движении, равна

$$A_{\text{тр}} = \mu N s.$$

Сила реакции опоры, очевидно, уравнивает силу тяжести (ускорение по вертикали отсутствует), поэтому

$$N - mg = 0.$$

В итоге получаем

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gs}.$$

2) Для определения искомого угла укажем силы, действующие на брусок при наклонном положении доски (рис.38). Это сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Будем предполагать, что доска неподвижна относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей. Тогда, пока брусок не соскальзывает вдоль доски, сумма действующих на него сил равна нулю. Удобно оси x и y системы координат выбирать нами инерциальной системы отсчета располо-

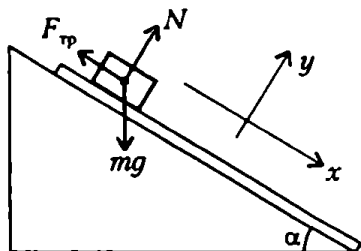


Рис.38

жить вдоль доски и перпендикулярно к ней. Условия равновесия бруска запишутся в виде

$$N - mg \cos \alpha = 0 ,$$

$$mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0 .$$

Пока угол наклона доски мал, составляющая силы тяжести вдоль доски («скатывающая» сила) уравнивается силой трения покоя. С ростом угла α она также растет (по закону синуса). Однако ее рост не беспределен, максимальное значение силы трения покоя равно

$$F_{\text{тр max}} = \mu N .$$

Этим и определяется максимальное значение угла, при котором брусок не соскальзывает.

Совместное решение приведенных уравнений дает

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{max}} = \mu .$$

Отсюда и получаем ответ задачи:

$$\alpha_{\text{max}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0^2}{2gs} \right) \approx 10^\circ .$$

1.33. Успешному решению задачи весьма способствует правильно выполненный рисунок, на котором указаны векторы импульса шарика непосредственно перед ударом и сразу после удара о наклонную плоскость — это \vec{p}_0 и \vec{p}_1 соответственно (рис.39).

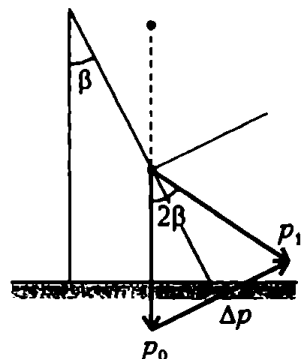


Рис.39

Вектор изменения импульса $\Delta \vec{p}$ соединяет концы векторов \vec{p}_0 и \vec{p}_1 и тем самым замыкает треугольник. При абсолютно упругом ударе о неподвижную гладкую поверхность импульс шарика не изменяется по модулю, а угол отражения равен углу падения. Это обеспечивает приведенное на рисунке соотношение углов, где буквой β обозначен для краткости угол $\pi/2 - \alpha$.

Воспользуемся теоремой косинусов и запишем

$$\Delta p^2 = p_0^2 + p_0^2 - 2p_0^2 \cos(\pi - 2\alpha) .$$

С учетом формулы приведения и известных тригонометрических

соотношений получаем

$$\Delta p = 2p_0 \cos \alpha .$$

Чтобы найти исходную высоту над точкой соударения, с которой упал шарик, проще всего использовать закон сохранения механической энергии (сопротивлением воздуха пренебрегаем):

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} .$$

По определению импульс материальной точки равен $p_0 = mv_0$. Тогда окончательно получаем

$$h = \frac{(\Delta p)^2}{8gm^2 \cos^2 \alpha} = 0,8 \text{ м} .$$

1.34. Описанный в задаче стержень будем считать твердым телом. Так как тело не имеет закрепленных осей вращения, то условиями его равновесия являются, как известно, равенства нулю суммы действующих сил, а также моментов этих сил относительно любой оси. Укажем все действующие на стержень силы (рис.40). Сила реакции со стороны стенки \bar{N} направлена строго перпендикулярно к ней, так как по условию стенка считается гладкой (нет силы трения). Поскольку находить эту силу не требуется, достаточно записать всего два уравнения равновесия — для суммы проекций всех сил на вертикальное направление и для суммы моментов сил относительно оси A , проходящей через точку касания стержня со стенкой перпендикулярно плоскости рисунка:

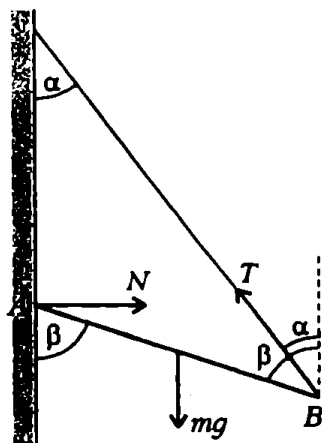


Рис.40

$$\begin{aligned} T \cos \alpha - mg &= 0, \\ mg \frac{l}{2} \sin \beta - Tl \sin (\beta - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Далее нужно решить эту систему уравнений относительно искомого угла α , проведя подстановку T из первого уравнения во второе и сделав несложные тригонометрические преобразования:

$$\frac{1}{2} mg \sin \beta - \frac{mg}{\cos \alpha} \sin (\beta - \alpha) = 0 ,$$

$$\sin \beta - \frac{2 \sin (\beta - \alpha)}{\cos \alpha} = 0 ,$$

$$\sin \beta - 2 \sin \beta + 2 \operatorname{tg} \alpha \cos \beta = 0 .$$

Поделим последнее равенство почленно на $\cos \beta$ и найдем соотношение между углами α и β , а затем и искомый угол α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta , \quad \alpha \approx 27^\circ .$$

Обратим внимание на независимость соотношения между углами от конкретных значений самих углов, а также от длины и массы стержня.

1.35. На цилиндр действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и искомая сила \vec{F} , приложенные к центру цилиндра, и сила \vec{N} реакции опоры со стороны ступеньки, приложенная в точке

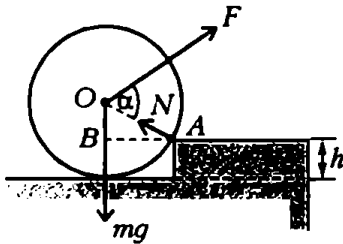


Рис. 41

касания со ступенькой (рис.41). Реакция опоры со стороны пола исчезает, когда цилиндр перестает давить на пол, т.е. сила реакции со стороны пола равна нулю по условию задачи. Отметим, что из-за отсутствия трения (опять же – по условию) сила \vec{N} направлена строго по нормали к поверхности цилиндра, т.е. вдоль его радиуса к центру O .

Обозначим на рисунке 41 через A точку соприкосновения цилиндра со ступенькой и через α угол между направлением силы и радиусом цилиндра $OA = R$. Воспользуемся правилом моментов при равновесии, вычисляя моменты всех сил относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. При этом момент силы \vec{N} равен нулю, поэтому не требуется знать ни величины, ни направления этой силы. Момент силы тяжести равен

$$M_{mg} = mg \cdot AB ,$$

где величина плеча AB легко находится из геометрических соображений:

$$AB = \sqrt{R^2 - (R - h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2} .$$

Момент силы \vec{F} равен

$$M_F = FR \sin \alpha .$$

Согласно правилу моментов, при равновесии суммарный момент

всех сил должен быть равен нулю. Учитывая, что моменты силы \bar{F} и силы тяжести имеют разные знаки, получим

$$FR \sin \alpha = mg \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Отсюда находим

$$F = \frac{mg}{R \sin \alpha} \sqrt{2Rh - h^2}.$$

Минимальное значение силы соответствует $\sin \alpha = 1$, т.е. $\alpha = \pi/2$ (при прочих равных условиях). Физический смысл этого условия понятен: если $\alpha = \pi/2$, то сила \bar{F} создает максимальный момент относительно оси, проходящей через точку A .

Окончательно получаем

$$F_{\min} = \frac{mg}{R} \sqrt{2Rh - h^2} = 120 \text{ Н}.$$

1.36. Обозначим через V' объем воды, вытесненной плавающим телом (льдом с вмержшим в него камнем). Архимедова сила, действующая на лед, равна

$$F_A = \rho V' g.$$

При плавании льда архимедова сила уравнивает силу тяжести:

$$\rho V' g = (m_1 + m_2) g.$$

Отсюда получаем

$$V' = \frac{m_1 + m_2}{\rho}.$$

Если ΔV – искомый объем воды, то очевидно, что

$$\frac{V}{2} + V' + \Delta V = V.$$

Тогда получаем ответ задачи:

$$\Delta V = \frac{V}{2} - V' = \frac{V}{2} - \frac{m_1 + m_2}{\rho} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1,7 \text{ л}.$$

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Подъемная сила шара определяется разностью $F_A - mg$. Здесь $m = m_1 + m_r$ – масса оболочки шара и газа внутри него, F_A – сила Архимеда, равная

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ – плотность окружающего воздуха, V – объем шара.

Уравнения состояния газов – водорода и воздуха – в рассматриваемых случаях заполнения шара можно записать в виде

$$pV = \frac{m_{\text{H}_2}}{M_{\text{H}_2}} RT_1,$$

$$pV = \frac{m_{\text{в}}}{M_{\text{в}}} RT_2.$$

Так как по условию объем шара и давление атмосферы постоянны, одинаковая подъемная сила возможна лишь в случае, когда массы газов одинаковы: $m_{\text{H}_2} = m_{\text{в}}$. С учетом этого из уравнений состояния легко найти искомую температуру:

$$T_2 = \frac{M_{\text{в}}}{M_{\text{H}_2}} T_1 = 4350 \text{ К}.$$

2.2. Для каждой из составляющих газовой смеси – кислорода и углекислого газа – следует записать свое уравнение состояния, определяющее ее парциальное давление:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT_0,$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT_0,$$

где $T_0 = t + 273$. Общее давление смеси определяется при этом по закону Дальтона:

$$p_0 = p_1 + p_2,$$

а ее плотность – очевидным соотношением

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}.$$

Для решения полученной системы уравнений удобно сложить левые и правые части первых двух уравнений и затем выделить искомую величину ρ :

$$\rho = \frac{(m_1 + m_2) p_0}{RT_0 \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right)} = 1,6 \text{ кг/м}^3.$$

2.3. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в первом и во втором баллонах (до их соединения между собой) и для соединенных баллонов (после установления равновесия):

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} RT,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m}{M} RT,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{2m}{M} RT.$$

Здесь p_1 и p_2 – давления в баллонах при закрытом кране, p – искомое давление, V_1 и V_2 – объемы баллонов, m – масса кислорода в каждом баллоне, M – молярная масса кислорода, T – температура газа в баллонах. В уравнениях учтено, что массы газа в баллонах одинаковы. Третье уравнение составлено из очевидных соображений: при открытом кране масса $2m$ всего газа распределена по объему $V_1 + V_2$ и после установления равновесия давление p газа в обоих баллонах одинаково.

Из этих уравнений находим p . Наиболее естественный способ: из первых двух уравнений выразить V_1 и V_2 , а потом найти их сумму:

$$V_1 + V_2 = \frac{m}{M} RT \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right).$$

Теперь из третьего уравнения выразим p и окончательно получим

$$p = \frac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2.4. Рассмотрим два положения трубки: первое – горизонтальное и второе – вертикальное. Сопоставим параметры газа (воздуха), находящегося в трубке. Считая газ идеальным и применяя закон Бойля–Мариотта, запишем

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

где p_1 , p_2 и V_1 , V_2 – давление и объем, занимаемый газом, в первом и втором состояниях соответственно. Учтено, что масса газа не изменилась, а температура осталась постоянной.

Исходный объем воздуха, очевидно, равен

$$V_1 = \frac{SL}{2},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки. Из условия равновесия столбика ртути в первом случае получаем

$$p_1 = p_0.$$

Во втором, вертикальном, положении трубки с учетом того, что половина ртути вылилась, найдем новый объем воздуха:

$$V_2 = S \cdot \frac{3}{4} L.$$

А новое давление воздуха p_2 опять находим из условия равновесия столбика ртути, приравняв внешнее атмосферное давление суммарному давлению столбика ртути (гидростатическое) и

воздуха над ним:

$$p_2 + \frac{\rho g L}{4} = p_0.$$

Подставим все найденные параметры в уравнение Бойля–Мариотта:

$$p_0 \frac{SL}{2} = \left(p_0 - \frac{\rho g L}{2} \right) S \cdot \frac{3}{4} L$$

и выразим искомую величину:

$$L = \frac{4}{3} \frac{p_0}{\rho g} \approx 1 \text{ м}.$$

2.5. Обозначим через p_1 , V_1 и T_1 давление, объем и температуру газа в начальном состоянии, а через p_2 , V_2 и T_2 – значения тех же параметров в конечном состоянии. Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для этих состояний газа:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2,$$

где $\nu = \text{const}$ – количество молей газа. Из этих соотношений следует

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

По условию задачи давление изменяется пропорционально объему, следовательно,

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_2}{V_1} = k,$$

или

$$k^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда легко выразить увеличение температуры газа:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = (k^2 - 1) T_1 = 132 \text{ К}, \text{ или } \Delta t = 132^\circ \text{С}.$$

Здесь учтено, что $T_1 = t_1 + 273 = 300 \text{ К}$.

2.6. Уравнение исходного состояния рассматриваемого идеального газа (уравнение Клапейрона–Менделеева) имеет вид

$$pV = \frac{m}{M} RT.$$

После того как из баллона выпустили половину массы газа, а температуру повысили на ΔT , новое состояние газа будет описываться уравнением

$$p_1 V = \frac{m}{2M} R(T + \Delta T),$$

где новое значение давления газа, очевидно, можно записать так:

$$p_1 = p + \Delta p.$$

Поделив друг на друга соответствующие части двух получившихся уравнений состояния, приходим к уравнению, содержащему единственную неизвестную величину Δp :

$$\frac{p + \Delta p}{p} = \frac{T + \Delta T}{2T}.$$

Решив его относительно Δp , получаем ответ:

$$\Delta p = \frac{\Delta T - T}{2T} p = -0,67 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Знак «минус» означает, что давление уменьшилось

2.7. Запишем условие равновесия поршня в неподвижном (исходном) состоянии и уравнение его движения с ускорением a (второй закон Ньютона):

$$Mg + p_0 S - p_1 S = 0,$$

$$Mg + p_0 S - p_2 S = Ma,$$

где $p_0 S$, $p_1 S$, $p_2 S$ – соответствующие силы давления атмосферы и газа на поршень. Соотношение между величинами p_1 и p_2 легко найти, записав закон Бойля – Мариотта для изотермического расширения идеального газа в цилиндре после начала движения:

$$p_1 S h_1 = p_2 S h_2,$$

где использованы очевидные выражения для объема через площадь поперечного сечения цилиндра и высоту столба газа в двух случаях (h_1 и h_2).

Искомая величина относительного изменения высоты поршня равна

$$x = \frac{h_2 - h_1}{h_1} \cdot 100\% = \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) \cdot 100\%,$$

или, с учетом равенства, выражающего закон Бойля–Мариотта,

$$x = \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \cdot 100\%.$$

Выразив p_1 и p_2 из первых двух уравнений, получаем окончательно

$$x = \frac{Ma}{p_0 S + M(g - a)} \cdot 100\% = 20\%.$$

2.8. Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для двух состояний газа под поршнем. Первое – исходное состояние, в котором газ имеет температуру T_1 ($T_1 = 273 + t_1 = 293$ К) и находится при атмосферном давлении p_a :

$$p_a V = \nu R T_1.$$

Второе – конечное состояние, в котором газ нагрет до температуры $T_2 = T_1 + \Delta T$ и сжат до исходного объема:

$$\left(p_a + \frac{F}{S}\right) V = \nu R (T_1 + \Delta T).$$

В этих уравнениях V – объем газа, ν – количество молей, F – искомая сила. В них учтено, что дополнительное давление равно F/S и что количество молей газа в цилиндре не изменяется ($\nu = \text{const}$). Кроме того, в начальном и конечном состояниях газ занимает один и тот же объем (по условию). С учетом этих обстоятельств из записанных уравнений следует

$$\frac{p_a + \frac{F}{S}}{p_a} = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1},$$

откуда и находим искомую силу:

$$F = p_a S \frac{\Delta T}{T_1} = 13,6 \text{ Н}.$$

2.9. Уравнения исходного и конечного состояний для водяного пара в количестве ν молей имеют вид

$$p_1 V_1 = \nu R T_1,$$

$$p_2 V_2 = \nu R T_2.$$

Относительная влажность воздуха для этих же состояний воздуха может быть записана в виде

$$\varphi_1 = \frac{p_1}{p_{n1}} \cdot 100\%,$$

$$\varphi_2 = \frac{p_2}{p_{n2}} \cdot 100\%,$$

где p_{n1} и p_{n2} – давления насыщенного пара при температурах

T_1 и T_2 соответственно ($T_1 = t_1 + 273$, $T_2 = t_2 + 273$). Важно заметить, что давление насыщенного пара при температуре $t_2 = 100^\circ\text{C}$ равно нормальному атмосферному давлению p_0 (условие кипения воды).

Поделив почленно друг на друга уравнения состояния водяного пара, найдем отношение давлений:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \frac{T_1}{T_2},$$

из которого выразим p_2 :

$$p_2 = \frac{V_1}{V_2} \frac{T_2}{T_1} p_1.$$

Теперь легко получить ответ задачи:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{V_1}{V_2} \frac{T_2}{T_1} \frac{p_{н1}}{p_0} = 10,6\%.$$

2.10. Свойства насыщенных паров достаточно хорошо описываются уравнением Клапейрона–Менделеева. Запишем это уравнение для начального и конечного состояний пара:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} R T_1,$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2,$$

где m_1 и m_2 – массы водяных паров в объеме V при начальной и конечной температурах. Необходимо помнить, что в записанных уравнениях T – абсолютная температура, т.е.

$$T_1 = 273 + t_1 = 280 \text{ К}$$

и

$$T_2 = 273 + t_2 = 290 \text{ К}.$$

Из уравнений состояния сначала выразим m_1 и m_2 , а затем найдем искомую величину $m = m_2 - m_1$:

$$m = \frac{M V}{R} \left(\frac{p_2}{T_2} - \frac{p_1}{T_1} \right) = 0,65 \text{ кг}.$$

2.11. По определению относительная влажность равна

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\%,$$

где p – парциальное давление водяных паров, а p_n – давление насыщенных паров при той же температуре.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для водяных паров в сосудах до и после соединения:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT ,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT ,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT .$$

Здесь m_1 – масса водяных паров в первом баллоне, а m_2 – во втором, p_1 и p_2 – парциальные давления водяных паров до соединения сосудов, p – после соединения сосудов. Температура T , по условию, является постоянной. Учитывая определение относительной влажности, запишем

$$p_1 = \frac{\varphi_1}{100\%} p_{\text{н}} ,$$

$$p_2 = \frac{\varphi_2}{100\%} p_{\text{н}} ,$$

$$p = \frac{\varphi}{100\%} p_{\text{н}} ,$$

где φ – искомая относительная влажность. Из первых двух уравнений состояния можно выразить m_1 и m_2 и, подставив в третье уравнение состояния, получим

$$p(V_1 + V_2) = p_1 V_1 + p_2 V_2 .$$

Теперь окончательно

$$\varphi = \frac{p}{p_{\text{н}}} \cdot 100\% = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 27\% .$$

2.12. Относительные влажности каждой порции воздуха в исходном состоянии системы равны

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{\text{н}}} \cdot 100\% , \quad \varphi_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{\text{н}}} \cdot 100\% ,$$

где ρ_1 и ρ_2 – плотности водяных паров, а $\rho_{\text{н}}$ – плотность насыщенных паров при той же температуре. Плотности в первом и втором сосудах по определению равны

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} , \quad \rho_2 = \frac{m_2}{V_2} ,$$

где m_1 и V_1 – масса водяных паров и объем первой порции влажного воздуха, а m_2 и V_2 – второй.

Относительная влажность смеси воздуха равна

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_{\text{н}}} \cdot 100\% = \frac{m_1 + m_2}{V \rho_{\text{н}}} \cdot 100\% ,$$

где V – новый суммарный объем системы. Температура, по условию, является постоянной, поэтому ρ_n не изменяется, а объем смеси увеличивается в α раз:

$$V = \alpha(V_1 + V_2).$$

Решая совместно приведенные уравнения, приходим к искомому результату:

$$\alpha = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{\varphi(V_1 + V_2)} = 2.$$

2.13. Количество теплоты, расходуемое на нагревание железной болванки, найдем, исходя из определения удельной теплоемкости вещества:

$$Q = cm\Delta T.$$

Объем тела увеличивается при нагревании по закону

$$V = V_0(1 + \beta\Delta T).$$

Его масса и изменение объема, очевидно, равны

$$m = \rho V_0,$$

$$\Delta V = V - V_0.$$

Из первого соотношения выразим ΔT :

$$\Delta T = \frac{Q}{cm},$$

а из второго – ΔV :

$$\Delta V = \beta\Delta T V_0.$$

В итоге получим

$$\Delta V = \frac{\beta Q}{c\rho} \approx 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

2.14. Решение задачи основано на анализе уравнения теплового баланса. Максимальное количество теплоты, которое может выделиться при охлаждении воды (до температуры плавления льда $t_{пл} = 0^\circ\text{C}$), равно

$$Q_1 = c_1 m_1 (t - t_{пл}) = 21 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

При этом максимальное количество теплоты, которое может потребоваться для нагревания льда (до температуры $t_{пл} = 0^\circ\text{C}$), составляет

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_{пл} - t) = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Так как $Q_1 > Q_2$, после достижения температуры $t_{пл} = 0^\circ\text{C}$ начнется плавление льда. На плавление всего льда потребова-

лось бы количество теплоты

$$Q_3 = \lambda m_2 = 33 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

В условиях задачи на плавление может пойти количество теплоты

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = 18,9 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Отметив, что $\Delta Q < Q_3$, приходим к выводу, что весь лед не может растаять.

Итак, при равновесии в сосуде будет содержаться смесь воды и льда, которая, как известно, имеет температуру $t = 0^\circ \text{C}$.

2.15. При сгорании топлива выделяется энергия, пропорциональная его массе:

$$Q = qm.$$

По условию, эта энергия выделяется за время

$$t = \frac{s}{v}.$$

Поэтому выделяющаяся при сгорании топлива мощность (затраченная) составляет

$$P_{\text{затр}} = \frac{qmv}{s}.$$

Коэффициент полезного действия двигателя, по определению, равен

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{затр}}} = \frac{Ps}{qmv} = 0,22 \text{ (или 22\%)}. \quad \square$$

2.16. Прежде всего рассчитаем количество теплоты Q_1 , необходимое для того, чтобы расплавить массу m льда в сосуде при постоянной температуре (очевидно, при температуре 0°C , так как в сосуде находилась смесь воды и льда):

$$Q_1 = \lambda m.$$

Затем рассчитаем количество теплоты Q_2 , которое идет на нагревание всей получившейся воды в сосуде на ΔT :

$$Q_2 = cM\Delta T,$$

где M – масса исходной смеси воды и льда. Теперь учтем, что эти энергии (количества теплоты) получены системой за времена t_1 и t_2 от источника с постоянной мощностью теплопередачи P :

$$Q_1 = Pt_1,$$

$$Q_2 = Pt_2.$$

Приравнивая между собой отношения правых частей первых двух равенств и последних двух, получим

$$\frac{\lambda m}{cM\Delta T} = \frac{t_1}{t_2},$$

откуда легко выражается искомая величина:

$$M = \frac{t_2}{t_1} \frac{\lambda}{c\Delta T} m = 3 \text{ кг}.$$

2.17. В исходном состоянии системы (рис.42) сила давления на поршень газа слева уравновешена силой упругости пружины:

$$p_1 S = kx_1,$$

где x_1 — деформация (сжатие) пружины, связанная с объемом газа очевидным соотношением

$$V_1 = Sx_1.$$

Положение поршня удобно характеризовать его координатой вдоль оси x , направленной вдоль стенок сосуда. В крайнем левом

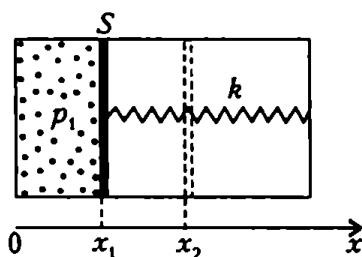


Рис.42

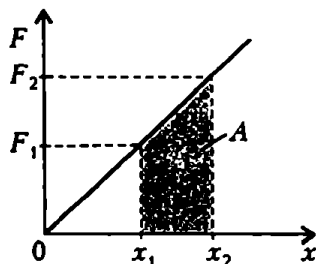


Рис.43

положении поршня его координата равна нулю (что соответствует отсутствию деформации пружины). По мере расширения газа его давление линейно увеличивается с координатой. Работа газа в этом случае совершается против силы упругости, и ее можно найти, вычислив площадь под прямой зависимости силы от координаты (рис.43):

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{k}{2} (x_2 + x_1) (x_2 - x_1) = \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2).$$

По условию объем газа, а следовательно и координата поршня, увеличивается в два раза. Поэтому при $x_2 = 2x_1$ получаем

$$A = \frac{3}{2} kx_1^2.$$

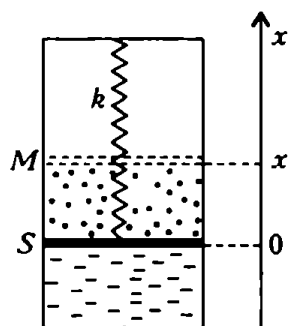
С использованием первых двух равенств легко получить, что

$$kx_1^2 = p_1 V_1.$$

Тогда окончательно

$$A = \frac{3}{2} p_1 V_1 = 300 \text{ Дж}.$$

2.18. При температуре 0°C давление насыщенных паров воды пренебрежимо мало, и в исходном состоянии системы поршень лежит на поверхности воды – его вес компенсирован реакцией опоры воды. При нагревании до 100°C часть воды испарится, пружина сожмется под действием силы давления насыщенного пара, равной $p_n S$. Смещение поршня определяет величину деформации пружины x (рис.44). Запишем условие равновесия поршня в этом состоянии:



$$p_n S = Mg + kx.$$

Определить массу пара можно, исходя из уравнения состояния идеального газа (уравнения Клапейрона–Менделеева)

$$p_n Sx = \frac{m}{M} RT.$$

Рис.44

Напомним, что давление насыщенного пара при температуре 100°C равно нормальному атмосферному давлению p_0 (условие кипения воды) и что абсолютная термодинамическая температура воды T связана с температурой t по шкале Цельсия соотношением $T = t + 273$.

Итак,

$$m = \frac{p_0 M S}{R(t + 273)} \frac{(p_0 S - Mg)}{k} = 11,7 \text{ г}.$$

2.19. При изобарном сжатии идеального газа совершаемая над ним работа равна

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T.$$

По условию, концентрация молекул возросла в два раза. Это означает, что объем газа уменьшился в два раза. Из уравнения Клапейрона–Менделеева (или из закона Гей-Люссака) следует, что конечная температура T_k тоже в два раза меньше начальной:

$$T_k = \frac{1}{2} T = 150 \text{ К}.$$

Следовательно, уменьшение температуры равно

$$\Delta T = T - T_k = \frac{1}{2} T = 150 \text{ К}.$$

Таким образом, при $\nu = 1$ моль получаем

$$A = RT \frac{k-1}{k} = R \left(\frac{1}{2} T \right) = 1250 \text{ Дж}.$$

2.20. Работа, совершенная идеальным газом в указанном циклическом процессе, равна площади треугольника abc , соответствующего представлению цикла в координатах p, V (см. рис.9). С учетом того, что $V_b = 2V_a$, получаем

$$A = \frac{1}{2} (V_b - V_a) (p_a - p_b) = \frac{1}{2} V_a (p_a - p_b).$$

Кроме того, для состояний газа a и b можно записать уравнения Клапейрона–Менделеева (опять с учетом $V_b = 2V_a$ и $T_a = T_b$):

$$p_a V_a = \nu R T_a,$$

$$2p_b V_a = \nu R T_a.$$

Поделив два последних равенства друг на друга, определяем отношение давлений:

$$\frac{p_a}{p_b} = 2.$$

Подставив в первое соотношение, получим

$$A = \frac{1}{4} p_a V_a.$$

Теперь выразим количество молей газа из второго равенства и найдем окончательно

$$\nu = \frac{p_a V_a}{R T_a} = \frac{4A}{R T_a} = 0,24 \text{ моль}.$$

2.21. Термодинамический коэффициент полезного действия цикла равен

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{Q},$$

где $A_{\text{п}}$ – полезная работа, совершенная рабочим телом за весь цикл, а Q – количество теплоты, полученное рабочим телом (также за весь цикл от нагревателя).

Проанализировав процессы, из которых состоит цикл, с позиции первого закона термодинамики ($Q = \Delta U + A$), заметим следующее.

1) В процессе изотермического расширения изменение внутренней энергии ΔU_{ab} идеального газа равно нулю. При этом, расширяясь, газ совершает работу $A_{ab} = A$ за счет того, что к нему подводится количество теплоты

$$Q_{ab} = A.$$

Отметим также, что температуры в точках a и b процесса одинаковы: $T_a = T_b$.

2) При изохорном охлаждении газа (участок bc) газ не совершает работы. Его внутренняя энергия уменьшается ($\Delta U < 0$) на величину $\Delta U_{bc} = C_V \Delta T$ за счет того, что газ отдает количество теплоты

$$|Q_{bc}| = |\Delta U_{bc}| = C_V \Delta T.$$

3) В процессе адиабатического сжатия теплопередачи не происходит ($Q_{ca} = 0$). Над газом совершается работа, и увеличивается его внутренняя энергия, причем

$$|A_{ca}| = |\Delta U_{ca}|.$$

Далее, вспомнив, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, и учитывая, что изменения температуры при изохорном охлаждении и адиабатическом сжатии одинаковы по величине ($T_a = T_b$), заключаем, что

$$|\Delta U_{ca}| = |\Delta U_{bc}|.$$

Учитывая все вышесказанное, находим полезную работу, совершенную за цикл:

$$A_n = |A_{ab}| - |A_{ca}| = A - |\Delta U_{ca}| = A - |\Delta U_{bc}| = A - C_V \Delta T.$$

За весь цикл газ получает тепло только на этапе ab , поэтому

$$Q = Q_{ab} = A.$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A_n}{Q} = \frac{A - C_V \Delta T}{A} = 0,02 \quad (\text{т.е. } 2\%).$$

2.22. При адиабатическом расширении газ не получает и не отдает тепло ($Q = 0$). В рассматриваемой задаче (рис.45) тепловая машина получает тепло при изохорическом нагревании $3-1$, следовательно, $Q_{31} = Q_n$, а отдает при изотермическом сжатии $2-3$, следовательно, $Q_{23} = Q_x$. По определению, КПД тепловой машины равен

$$\eta = \frac{|Q_{31}| - |Q_{23}|}{|Q_{31}|} = 1 - \frac{|Q_{23}|}{|Q_{31}|}.$$

Согласно первому закону термодинамики,

$$Q_{23} = A,$$

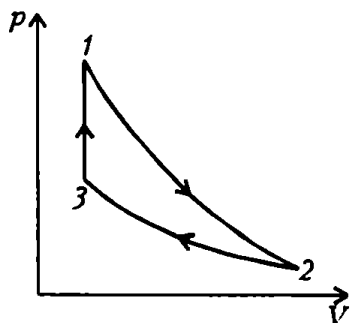


Рис.45

так как при изотермическом процессе внутренняя энергия не изменяется. При изохорном нагревании

$$|Q_{31}| = \nu C_V (T_1 - T_3),$$

где ν – количество молей, C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме. Для одноатомного идеального газа, как известно, $C_V = \frac{3}{2} R$.

Таким образом,

$$\eta = 1 - \frac{2A}{3R(T_1 - T_3)}.$$

Из диаграммы процесса видно, что T_1 – максимальная, а $T_2 = T_3$ – минимальная температуры в процессе. Окончательно получим

$$\Delta T = T_1 - T_3 = \frac{2A}{3R(1 - \eta)} = 2,5 \text{ К}, \text{ где } \eta = 0,2.$$

2.23. Согласно определению, относительная влажность равна

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100\%,$$

где p – парциальное давление водяных паров, а p_n – давление насыщенных водяных паров при той же температуре.

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для водяных паров в сосудах до и после их соединения:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M} RT,$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M} RT,$$

$$p(V_1 + V_2) = \frac{(m_1 + m_2)}{M} RT.$$

Здесь m_1 – масса водяных паров в первом баллоне, m_2 – во втором, p_1 и p_2 – парциальные давления водяных паров в сосудах до их соединения, p – давление паров в сосудах после их соединения, которое, естественно, является одним и тем же в обоих сосудах, температура T (по условию) остается постоянной.

Учитывая определение относительной влажности, найдем

$$p_1 = \frac{\varphi_1}{100\%} p_n,$$

$$p_2 = \frac{\varphi_2}{100\%} p_n,$$

$$p = \frac{\varphi}{100\%} p_n.$$

Из равенств, выражающих уравнение Клапейрона–Менделеева, можно выразить m_1 и m_2 . Получится соотношение

$$p(V_1 + V_2) = p_1V_1 + p_2V_2.$$

С использованием выражений для давлений последнее равенство приобретает вид

$$\varphi(V_1 + V_2) = \varphi_1V_1 + \varphi_2V_2.$$

Отсюда находим

$$\varphi_2 = \frac{\varphi(V_1 + V_2) - \varphi_1V_1}{V_2} = 110\%.$$

Так как равновесная влажность не может быть больше 100%, заключаем, что во втором сосуде исходная влажность была $\varphi_2 = 100\%$ и в этом сосуде присутствовало некоторое количество воды, которая после соединения сосудов испарилась.

2.24. На рисунке 46 изображены исходное и конечное положения трубки с указанием характерных размеров. При опускании трубки состояние воздуха, находящегося над ртутью, изменяется: другими становятся давление p и объем V , но остаются неизменными температура и масса воздуха. Тогда в соответствии с законом Бойля–Мариотта (температуру предполагаем неизменной) можно записать

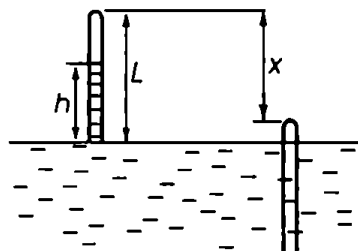


Рис. 46

$$p_1V_1 = p_2V_2$$

(индекс «1» относится к исходному состоянию воздуха, «2» – к конечному). Выразим величины, входящие в это равенство, через данные, приведенные в условии.

1) При равновесии ртути в исходном состоянии

$$p_a = \rho gh + p_1,$$

где ρ – плотность ртути. Отсюда

$$p_1 = p_a - \rho gh.$$

Объем воздуха равен

$$V_1 = S(L - h),$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

2) В конечном состоянии

$$p_2 = p_a \text{ и } V_2 = S(L - x).$$

Подставив эти выражения в самое первое равенство, получим

$$(p_a - \rho gh)(L - h) = p_a(L - x).$$

Решая это уравнение относительно x , найдем

$$x = h + \frac{\rho gh(L - h)}{p_a}.$$

Этой формуле можно придать более компактный вид, если ввести дополнительную величину h_0 – высоту столбика ртути, соответствующую атмосферному давлению p_a :

$$p_a = \rho gh_0.$$

Тогда окончательный результат будет выглядеть так:

$$x = (L - h + h_0) \frac{h}{h_0} = 42 \text{ см}.$$

2.25. Согласно определению удельной теплоемкости, количество теплоты, необходимое для нагревания вещества, равно

$$Q = cm\Delta T,$$

где c – удельная теплоемкость вещества, m – его масса, ΔT – изменение температуры.

Пусть рассматриваемая смесь нагревается на ΔT градусов. При этом на столько же нагреваются как алюминий, так и медь. Для их нагревания требуются количества теплоты, равные, соответственно,

$$Q_1 = c_1 m_1 \Delta T \quad \text{и} \quad Q_2 = c_2 m_2 \Delta T.$$

Для нагревания всей смеси требуется количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T.$$

При этом предполагается, что внутри смеси в процессе нагревания дополнительная теплота не выделяется и не поглощается.

Сопоставляя первое и последнее равенства, найдем

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Подставив численные данные из условия, получим

$$c \approx 730 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

2.26. Инертные газы аргон и неон, находящиеся в сосудах, как известно, одноатомные. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа представляет собой сумму кинетических энергий одного лишь поступательного теплового движения его молекул (вращение и внутримолекулярные колебания отсутствуют). По-

этому внутреннюю энергию для каждого газа в исходном состоянии системы можно записать в виде

$$U_1 = \frac{3}{2} \nu_1 RT_1, \quad U_2 = \frac{3}{2} \nu_2 RT_2.$$

Кроме того, для каждой порции газов в количестве ν_1 и ν_2 молей справедливо уравнение состояния Клапейрона–Менделеева:

$$p_1 V_1 = \nu_1 RT_1, \quad p_2 V_2 = \nu_2 RT_2.$$

После того как кран, соединяющий сосуды, будет открыт, начнется взаимодиффузия газов. Молекулы будут обмениваться энергией теплового движения, и по истечении некоторого времени в системе установится равновесное состояние с новым давлением и новой температурой. Однако если, как и предложено считать в условии задачи, сосуды теплоизолированы от окружающей среды, то суммарная внутренняя энергия газов U не изменится. А значит, для ответа на вопрос задачи достаточно просуммировать исходные значения внутренних энергий U_1 и U_2 каждого из газов:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{3}{2} (p_1 V_1 + p_2 V_2) = 1200 \text{ Дж}.$$

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. На бусинку при движении действуют три силы: сила натяжения нити \vec{F}_n (направлена по нити), сила тяжести $m\vec{g}$ и кулоновская сила $q\vec{E}$ (обе направлены вертикально вниз). В тот момент, когда бусинка проходит нижнее положение, все три силы направлены вдоль одной линии. По второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{L} = F_n - mg - qE,$$

где L – длина нити, определяющая радиус окружности, v – скорость бусинки в нижней точке траектории. Величину скорости можно найти, пользуясь законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL + q\Delta\phi,$$

где $\Delta\phi$ – разность потенциалов между двумя точками поля, соответствующими начальному положению бусинки и нижней точке траектории. Поскольку электрическое поле однородно, то

$$\Delta\phi = EL,$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgL + qEL.$$

Исключив из формул величину v , найдем

$$F_n = 3(mg + qE) = 6 \cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

3.2. Наиболее краткий способ решения задачи опирается на применение закона сохранения энергии. Сопоставим два состояния дробинки: первое соответствует моменту начала падения дробинки от верхней пластины, второе соответствует моменту подлета к этой пластине после абсолютно упругого удара о нижнюю пластину. Сравнивая полную энергию дробинки в этих двух состояниях, заметим, что потенциальная энергия в поле тяготения Земли не изменилась, а кинетическая энергия увеличилась на

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2},$$

где v – искомая скорость подлета к пластине (начальная скорость равна нулю).

Увеличение энергии произошло за счет работы сил электрического поля, притягивающих дробинку к верхней пластине после того, как дробинка зарядилась. При разности потенциалов между пластинами, равной ЭДС источника \mathcal{E} , эта работа равна

$$A = q\mathcal{E}.$$

По закону сохранения энергии,

$$\Delta E_k = A, \text{ или } \frac{mv^2}{2} = q\mathcal{E}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2q\mathcal{E}}{m}} = 0,5 \text{ м/с}.$$

3.3. При движении электрона в однородном поле конденсатора на него действует постоянная сила

$$\vec{F} = e\vec{E},$$

где e – заряд электрона, \vec{E} – напряженность поля. По второму закону Ньютона эта сила сообщает электрону постоянное ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m},$$

где m – масса электрона. Это ускорение определяет изменение

только той составляющей скорости электрона, которая направлена вдоль поля, т.е. v_E . Через промежуток времени τ эта составляющая достигнет величины

$$v_E = a\tau = \frac{eE}{m} \tau.$$

Поскольку вдоль пластин на электрон не действуют силы, составляющая его скорости, направленная вдоль пластин, остается постоянной и равной v_0 .

По теореме Пифагора,

$$v^2 = v_0^2 + v_E^2 = v_0^2 + \left(\frac{eE}{m} \tau \right)^2.$$

Отсюда находим

$$E = \frac{\sqrt{v^2 - v_0^2}}{\tau e/m} \approx 8,9 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

3.4. Общее количество теплоты, которое выделится на резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 после замыкания ключа, по закону сохранения энергии равно исходной энергии заряженного конденсатора:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Оно, очевидно, складывается из количеств теплоты, которые выделяются на каждом из резисторов по отдельности:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Заметим, что ток разряда конденсатора непостоянен и для определения величин Q_1 и Q_2 по закону Джоуля–Ленца придется суммировать количества теплоты, выделяющиеся на соответствующих резисторах за малые интервалы времени Δt :

$$\Delta Q_1 = \frac{U^2}{R_1} \Delta t, \quad \Delta Q_2 = \frac{U^2}{R_2} \Delta t.$$

Для ответа на вопрос задачи достаточно, однако, воспользоваться тем, что отношение количеств теплоты не зависит от времени:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta Q_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Отсюда легко выразить Q_2 и, подставив в равенство $Q = Q_1 + Q_2$, найти искомую величину:

$$Q_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{CU_0^2}{2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,5 \text{ мДж}.$$

3.5. Если ключ находится в положении 1, то конденсаторы с емкостями C_1 и C_2 заряжаются от источника напряжения. При

полностью заряженных конденсаторах ток через резистор прекращается, и напряжение на каждом из конденсаторов оказывается равным δ , так как $IR = 0$.

При переводе ключа в положение 2 источник напряжения оказывается отключенным. Начинается процесс разрядки конденсаторов. Ток разряда протекает через резистор. Вся запасенная конденсаторами энергия выделяется в виде тепла.

Вспомнив, как вычисляется энергия заряженного конденсатора, запишем

$$Q = \frac{C_1 \delta^2}{2} + \frac{C_2 \delta^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) \delta^2}{2} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

3.6. Батарею, состоящую из параллельно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 , можно заменить одним конденсатором с электроемкостью

$$C' = C_1 + C_2.$$

Если ключ K находится в положении 1 (рис. 47), то батарея конденсаторов зарядится до напряжения, равного δ , и суммарный заряд на их обкладках будет равен

$$q = (C_1 + C_2) \delta.$$

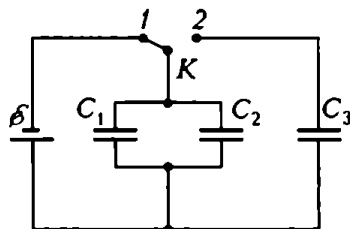


Рис. 47

После перевода ключа K в положение 2 заряд q , накопленный батареей, распределится между тремя конденсаторами, но так, что напряжения на всех трех конденсаторах будут одинаковы:

$$q = q_1 + q_2 + q_3, \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_3}{C_3}.$$

Здесь q_1 , q_2 и q_3 — заряды на обкладках конденсаторов с емкостями C_1 , C_2 и C_3 при ключе K в положении 2.

Совокупность полученных формул позволяет найти искомый заряд:

$$q_3 = \frac{C_3 (C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} \delta = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

Заметим, что в данном конкретном случае задача решается почти устно, если обратить внимание на то, что емкость батареи $C' = C_1 + C_2 = 3 \text{ мкФ}$ и емкость конденсатора $C_3 = 3 \text{ мкФ}$ одинаковы. Тогда заряд $q = (C_1 + C_2) \delta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл}$, накопленный батареей, при переводе ключа K в положение 2 распределится поровну между батареей и конденсатором емкостью C_3 :

$$q_3 = \frac{q}{2} = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

3.7. Описанный в условии задачи сосуд можно рассматривать как плоский конденсатор. Его емкость вычисляется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{l},$$

где S – площадь пластин. При подключении конденсатора к источнику постоянного напряжения U на металлических пластинах накапливается заряд

$$q = CU = \frac{\epsilon_0 S U}{l}.$$

При заполнении сосуда жидкостью емкость конденсатора изменяется. При неизменной величине напряжения изменяется величина заряда на обкладках, следовательно, по цепи протекает заряд. В условии задачи предполагается, что металлические пластины расположены вертикально. Найдем новое значение емкости C^* . Для этого будем рассматривать новый конденсатор как два параллельно соединенных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 , причем один из них заполнен диэлектрической жидкостью, а другой – нет (рис.48). Для расчетов обозначим через S_1 площадь пластин той части конденсатора, которая заполнена жидкостью. Тогда

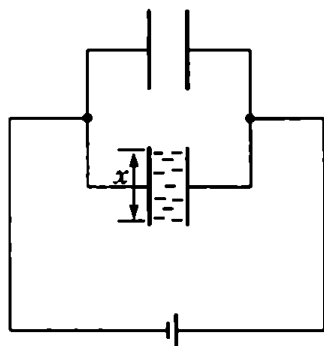


Рис.48

$V = S_1 l$.

С учетом сказанного,

$$C^* = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S_1}{l} + \frac{\epsilon_0 (S - S_1)}{l} = \frac{\epsilon_0 (S + (\epsilon - 1) V/l)}{l}.$$

Новый заряд на обкладках конденсатора будет равен

$$q^* = \frac{\epsilon_0 (S + (\epsilon - 1) V/l) U}{l}.$$

Величина протекшего заряда составит

$$\Delta q = q^* - q = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) V U}{l^2} = 3,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

3.8. Так как ток через второй источник тока не идет (по условию), его можно мысленно отсоединить от схемы (и убрать с рисунка 15). Тогда силу тока I_1 через первый источник тока

можно найти по закону Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Выразим разность потенциалов U между концами резистора, вернув второй источник на место. С одной стороны, $U = I_1 R$. С другой стороны, поскольку ток через второй источник не идет ($I_2 = 0$), то $U = \mathcal{E}_2$. Таким образом,

$$\frac{\mathcal{E}_1 R}{r_1 + R} = \mathcal{E}_2,$$

откуда

$$R = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 0,2 \text{ Ом}.$$

3.9. Запишем закон Ома для каждого из параллельно соединенных участков:

$$\Delta\varphi = \mathcal{E} - I_1 r_1, \quad \Delta\varphi = \mathcal{E} - I_2 r_2, \quad \Delta\varphi = IR.$$

Сила тока I , протекающего по внешнему сопротивлению, складывается из токов I_1 и I_2 , протекающих через каждый из аккумуляторов:

$$I = I_1 + I_2.$$

Решение системы полученных уравнений приводит к результату

$$I_1 = \frac{\mathcal{E} r_2}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2} \approx 2,1 \text{ А}.$$

3.10. В первом случае сила тока в цепи, определяемая по закону Ома для полной цепи, равна

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

При последовательном соединении источников тока их электродвижущие силы суммируются, так же, как и внутренние сопротивления. Тогда сила тока в цепи в этом случае будет равна

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}.$$

Приравнявая, в соответствии с условием задачи, величины I_1 и I_2 , найдем

$$r_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} (r_1 + R) = 120 \text{ Ом}.$$

3.11. Сила тока через источник определяется законом Ома для полной цепи.

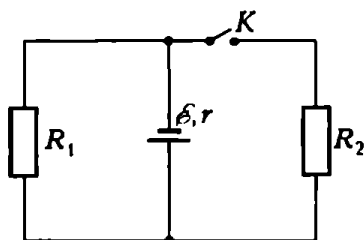


Рис. 49

При разомкнутом ключе K (рис. 49)

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}.$$

При замкнутом ключе K внешнее сопротивление цепи состоит из двух параллельно соединенных сопротивлений R_1 и R_2 . При этом величину общего сопротивления вычисляют из соотношения

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Отсюда

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом,

$$I_2 = -\frac{\varepsilon}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r}.$$

Исключив из полученных уравнений для токов ЭДС источника ε , найдем

$$r = \frac{R_1 (I_1 (R_1 + R_2) - I_2 R_2)}{(R_1 + R_2)(I_2 - I_1)} = 1 \text{ Ом}.$$

3.12. Пусть ε – ЭДС источника и r – его внутреннее сопротивление. По закону Ома для полной цепи сила тока в цепи в первом случае равна

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R}.$$

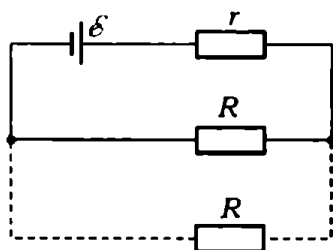


Рис. 50

Напряжение на полюсах источника равно падению напряжения на внешнем сопротивлении:

$$U_1 = I_1 R = \frac{\varepsilon}{r + R} R.$$

После параллельного подключения еще одного такого же сопротивления R (рис. 50) сопротивление внешней цепи станет $R/2$, и напряжение на источнике будет равно

$$U_2 = I_2 \frac{R}{2} = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R}{2}} \frac{R}{2}.$$

Если из полученных уравнений исключить \mathcal{E} , то найдем, что искомое внутреннее сопротивление источника тока равно

$$r = \frac{U_1 - U_2}{2U_2 - U_1} R = 3 \text{ Ом}.$$

3.13. Так как в задаче не требуется находить силы токов, протекающих по резисторам с сопротивлениями R_3 и R_4 по отдельности, их можно сразу заменить на эквивалентное сопротивление R^* , которое для случая параллельно соединенных резисторов определяется по известному соотношению

$$R^* = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

С учетом того, что $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, получим $R^* = R/2$. Тогда сопротивление цепи будет равно $R_1 + R_2 + R^* = 2,5R$. По закону Ома для замкнутой цепи найдем теперь силу протекающего в ней тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R^*} = \frac{2}{5} \frac{\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R}.$$

Направление этого тока определяется величинами ЭДС источников. Так как $\mathcal{E}_3 > \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, то ток протекает против часовой стрелки.

Далее, для нахождения искомой разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ можно воспользоваться законом Ома для неоднородного участка цепи между соответствующими точками, например включающего источники с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 и резистор сопротивлением R_1 :

$$IR_1 = \varphi_A - \varphi_B - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3.$$

Заметим, что при написании последнего равенства знак «+» для ЭДС берется в том случае, когда направление тока в участке совпадает с «направлением» ЭДС источника (от отрицательного полюса к положительному), а знак «-» — в противном случае.

Подстановка ранее найденного значения силы тока в цепи в последнее соотношение позволяет выразить искомую величину:

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_B = \frac{3}{5}\mathcal{E}_1 - \frac{2}{5}\mathcal{E}_2 - \frac{3}{5}\mathcal{E}_3 = -13 \text{ В}.$$

3.14. По закону Ома для замкнутой цепи сила тока в цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где \mathcal{E} — ЭДС источника, r — его внутреннее сопротивление. Если конденсатор подключен к клеммам источника, то напряжение на

его обкладках равно напряжению на клеммах источника:

$$U_1 = \mathcal{E} - Ir = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}.$$

При этом заряд на обкладках конденсатора емкостью C равен

$$q_1 = CU_1 = \frac{C\mathcal{E}R}{R+r}.$$

Во втором случае, когда конденсатор включен в цепь последовательно, ток в цепи отсутствует, и напряжение на обкладках конденсатора равно ЭДС источника: $U_2 = \mathcal{E}$. При этом заряд на обкладках равен

$$q_2 = CU_2 = C\mathcal{E}.$$

По условию,

$$\frac{q_2}{q_1} = k.$$

Учитывая выражения для q_1 и q_2 , получаем

$$\frac{R+r}{R} = k.$$

Отсюда

$$r = (k-1)R = 4 \text{ Ом}.$$

3.15. До замыкания ключа K ток идет через источник и резистор сопротивлением R_1 . По закону Ома для полной цепи сила тока в цепи равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}.$$

Количество теплоты, выделяющееся на резисторе за одну секунду (тепловая мощность), определяется по закону Джоуля-Ленца:

$$P_1 = I^2 R_1.$$

После замыкания ключа K резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2 оказываются соединенными параллельно. Их эквивалентное сопротивление равно

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Сила тока через источник при этом равна

$$I^* = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

В точках, где резисторы соединены, ток источника разветвляется. Часть тока силой I_1 идет через резистор сопротивлением R_1 , а другая часть силой I_2 – через резистор сопротивлением R_2 . По закону сохранения заряда,

$$I^* = I_1 + I_2.$$

При параллельном соединении падения напряжения на резисторах одинаковы, т.е.

$$I_1 R_1 = I_2 R_2.$$

Выразим величину I_1 через I^* :

$$I_1 = \frac{I^* R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\varepsilon R_2}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

По закону Джоуля–Ленца тепловая мощность, выделяемая на резисторе сопротивлением R_1 , теперь равна

$$P_1^* = I_1^2 R_1.$$

Теперь можно найти искомое отношение мощностей:

$$\frac{P_1^*}{P_1} = \frac{I_1^2}{I^2} = \frac{R_2^2 (r + R_1)^2}{(r(R_1 + R_2) + R_1 R_2)^2} = 0,44.$$

Заметим, что приведенное в общем виде решение представляется достаточно громоздким и длинным. Однако оно значительно упростится, если на всех стадиях учитывать, что все резисторы имеют одинаковые сопротивления. Упростится настолько, что правильный ответ можно получить и в устной форме.

3.16. Если нагреватель сопротивлением R подключен к электросети с напряжением U , то по закону Джоуля–Ленца тепловая мощность равна

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

При последовательном соединении двух одинаковых нагревателей их общее сопротивление равно $R_1 = 2R$, и суммарная тепловая мощность составляет

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{P}{2}.$$

(Предполагается, что сопротивление каждого нагревателя не изменяется.)

Для того чтобы вскипятить, т.е. нагреть до температуры кипения $t_k = 100^\circ\text{C}$, воду массой m , требуется количество теп-

$$Q = cm(t_k - t_1) .$$

Следовательно, на это потребуется время

$$\tau = \frac{Q}{P_1} .$$

Окончательно получим

$$\tau = \frac{2cm(t_k - t)}{P} = 800 \text{ с} .$$

3.17. Количество теплоты, выделяемое первым кипятильником, может быть рассчитано по закону Джоуля–Ленца:

$$Q = \frac{U^2}{R_1} \tau_1 .$$

Аналогично находится и количество теплоты во втором случае – при параллельном включении двух кипятильников:

$$Q = \frac{U^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \tau_2 .$$

Здесь использовано выражение для сопротивления двух параллельно соединенных участков цепи.

На нагрев воды до температуры ее кипения $t_k = 100^\circ \text{C}$ необходимо в обоих случаях одинаковое количество теплоты, равное

$$Q = cm(t_k - t) .$$

Приравняв правые части первого и третьего равенств, получим сопротивление первого кипятильника:

$$R_1 = \frac{U^2}{cm(t_k - t)} \tau_1 = 9,6 \text{ Ом} .$$

Аналогично, приравняв правые части второго и третьего равенств, получим сопротивление второго кипятильника:

$$R_2 = \frac{U^2}{cm(t_k - t)} \frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_1 - \tau_2)} = 28,8 \text{ Ом} .$$

3.18. Напряжение, приложенное к последовательно соединенным лампам гирлянды и дополнительному сопротивлению, равно сумме падений напряжения на каждом участке:

$$U = IR + NU_0 ,$$

где I – ток в цепи. Мощность, которая теряется на дополнительном сопротивлении, может быть определена по закону Джоуля–

Ленца: $P_R = I^2 R$. Полная мощность, потребляемая от сети, равна $P = IU$. Тогда искомая величина есть

$$k = \frac{P_R}{P}.$$

Выразив силу тока из первого равенства, окончательно получим

$$k = \frac{U - NU_0}{U} = 0,45.$$

3.19. Энергия, потребляемая электродвигателем, расходуется на механическую работу по перемещению трамвайного вагона и на выделение тепла при протекании тока в проводах электродвигателя. Следовательно, электромотором потребляется мощность

$$P_1 = P_{\text{мех}} + P_{\text{тепл}}.$$

Механическая мощность $P_{\text{мех}}$, развиваемая силой тяги F при движении тела с постоянной скоростью v , как известно, равна

$$P_{\text{мех}} = Fv,$$

а мощность тепловых потерь по закону Джоуля–Ленца составляет

$$P_{\text{тепл}} = I^2 R.$$

Источник тока развивает при этом мощность P_2 , равную произведению силы тока в цепи на напряжение, при котором он работает:

$$P_2 = IU.$$

По закону сохранения энергии можно утверждать, что

$$P_1 = P_2.$$

После соответствующих преобразований получим

$$IU = I^2 R + Fv,$$

откуда легко найти искомую величину силы тяги электродвигателя:

$$F = \frac{I(U - IR)}{v} = 3000 \text{ Н}.$$

3.20. Сила тока в цепи определяется законом Ома для замкнутой цепи (с учетом последовательного соединения источников тока):

$$I = \frac{2\varepsilon}{R + 2r}.$$

Количество теплоты, выделяющееся за время t на внутреннем сопротивлении аккумулятора r , определяется законом Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2 r \Delta t .$$

Решая эти уравнения совместно, находим

$$Q = \frac{46^2}{(R + 2r)} r \Delta t \approx 3527 \text{ Дж} .$$

3.21. Количество теплоты, выделенное плиткой за искомое время τ , найдем по закону Джоуля-Ленца с учетом закона Ома:

$$Q_{\text{зат}} = I^2 R \tau = \frac{U^2}{R} \tau .$$

Это – затраченное тепло.

Количество теплоты, необходимое для плавления льда (полезное тепло), вычисляется с помощью определения удельной теплоты плавления λ :

$$Q_{\text{пол}} = \lambda m .$$

По определению коэффициента полезного действия,

$$\eta = \frac{Q_{\text{пол}}}{Q_{\text{зат}}} = \frac{\lambda m R}{U^2 \tau} .$$

Отсюда находим

$$\tau = \frac{\lambda m R}{\eta U^2} .$$

При $\eta = 0,5$ (50%) получается

$$\tau = 422 \text{ с} \approx 7 \text{ мин} .$$

3.22. Обозначим через I_1 силу тока через первую ванну (с раствором соли никеля) и через I_2 – силу тока через вторую ванну (с раствором соли серебра). Так как ванны подключены к источнику тока параллельно, то

$$I = I_1 + I_2 .$$

По закону Фарадея для электролиза,

$$m_1 = k_1 I_1 t , \quad m_2 = k_2 I_2 t .$$

Записанные равенства можно рассматривать как систему трех уравнений с тремя неизвестными величинами I_1 , I_2 и k_2 . Решая ее, найдем

$$k_2 = k_1 \frac{m_2}{k_1 I t - m_1} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ кг/Кл} .$$

3.23. Запишем закон Ома для полной цепи:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + R_0},$$

где \mathcal{E} – электродвижущая сила источника (ЭДС) и I_0 – сила тока при отсутствии света. При освещении по цепи течет ток

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1},$$

где I_1 – сила тока и R_1 – сопротивление фоторезистора при освещении. По условию,

$$I_1 = kI_0.$$

Из полученных соотношений находим

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{kR_0}{R + R_0 - kR} = 6.$$

Таким образом, сопротивление фоторезистора уменьшилось в 6 раз.

3.24. Для ответа на вопрос задачи необходимо найти отношение концентрации ионизированных атомов к их общему количеству N в единице объема. По предложенному в условии задачи допущению первая величина равна концентрации электронов проводимости в германии n . Величину N определим, поделив число Авогадро N_A на объем одного моля вещества:

$$N = \frac{N_A}{V_M}.$$

Молярный объем V_M легко выразить из соотношения, соответствующего определению плотности любого вещества:

$$V_M = \frac{M}{\rho}.$$

Таким образом, искомая доля ионизированных атомов равна

$$\frac{n}{N} = \frac{nM}{N_A \rho} = 6,6 \cdot 10^{-10}.$$

3.25. На рисунке 51 указаны силы, действующие на проводник bc (вид сбоку). Символом \otimes показано направление протекающего по нему тока. Запишем условие равновесия проводника в проекциях на горизонтальное и вертикальное направ-

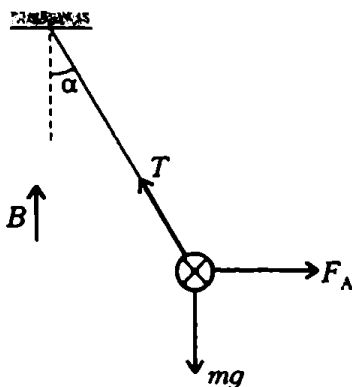


Рис.51

ления:

$$T \sin \alpha - F_A = 0, \quad T \cos \alpha - mg = 0.$$

Сила Ампера равна при этом

$$F_A = IBl.$$

Для решения системы относительно искомой величины силы тока удобно сначала, исключив силу натяжения из первых двух уравнений, выразить $\operatorname{tg} \alpha$. Тогда, используя третье равенство, окончательно находим

$$I = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{Bl} = 7,5 \text{ А}.$$

3.26. Найдем кинетическую энергию частицы, ускоренной электрическим полем, пользуясь законом сохранения энергии:

$$qU = \frac{mv^2}{2}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой работу электрического поля над частицей.

Влетев в однородное магнитное поле, частица движется по окружности под действием силы Лоренца. Уравнение движения частицы (второй закон Ньютона) можно записать в виде

$$F_L = m \frac{v^2}{R}.$$

В правой части здесь использовано выражение центростремительного ускорения через скорость частицы и радиус траектории. Так как магнитное поле перпендикулярно вектору скорости частицы, сила Лоренца равна

$$F_L = qvB.$$

Из полученных равенств окончательно находим

$$B = \frac{m\sqrt{2qU}}{qR\sqrt{m}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2mU}{q}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}.$$

3.27. При движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца. Поскольку скорость частицы перпендикулярна направлению магнитной индукции поля, траекторией ее движения является окружность. Уравнение движения частицы (второй закон Ньютона) можно записать в виде

$$F_L = m \frac{v^2}{R},$$

где R – радиус окружности, по которой движется частица, v – ее

скорость. А сама сила Лоренца при этом равна

$$F_{\text{л}} = qvB,$$

где q – заряд частицы, B – индукция магнитного поля. Используя эти уравнения, выразим скорость:

$$v = \frac{qBR}{m}.$$

Период обращения – время полного оборота частицы по окружности – найдем из очевидного кинематического соотношения:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Для протона и электрона при движении в одном и том же магнитном поле можно записать

$$\frac{T_p}{T_e} = \frac{m_p}{m_e} \frac{q_e}{q_p}.$$

Здесь индекс « p » – относится к протону, а « e » – к электрону. Учитывая, что электрон и протон имеют равные по величине заряды, получим

$$T_p = T_e \frac{m_p}{m_e} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

3.28. Со стороны электрического поля на протон (точечный заряд) действует сила $F_{\text{эл}} = qE$. При этом по направлению она совпадает с вектором напряженности электрического поля.

Со стороны магнитного поля на эту движущуюся заряженную частицу действует магнитная сила (сила Лоренца) $F_{\text{м}} = qvB$. Эта сила перпендикулярна как скорости частицы, так и направлению вектора магнитной индукции поля.

Поскольку линии магнитной индукции и линии напряженности параллельны, в рассматриваемый момент времени результирующая сила направлена по диагонали прямоугольника со сторонами $F_{\text{эл}}$ и $F_{\text{м}}$. Абсолютная величина этой силы равна

$$F = \sqrt{F_{\text{эл}}^2 + F_{\text{м}}^2} = \sqrt{(qE)^2 + (qvB)^2}.$$

По второму закону Ньютона она равна произведению массы частицы на ее ускорение:

$$ma = \sqrt{(qE)^2 + (qvB)^2}.$$

Возводя это равенство в квадрат, находим

$$E = \sqrt{\left(\frac{a}{q/m}\right)^2 - (vB)^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

3.29. При движении по окружности направление линейной скорости всегда перпендикулярно радиусу окружности. Угловая скорость при движении протона равна

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Линейная скорость связана с угловой соотношением

$$v = R\omega = R \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

При ускорении протона электрическим полем по закону сохранения энергии можно записать

$$\frac{m_p v^2}{2} = eU.$$

Из последних двух равенств найдем

$$U = \frac{m_p}{2e} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right)^2 R^2.$$

При получении численного ответа надо учитывать, что угол $\Delta\varphi$ должен быть выражен в радианах: $\Delta\varphi = 45^\circ = \pi/4$ рад. Тогда окончательно

$$U = 2,9 \cdot 10^4 \text{ В}.$$

3.30. Собственный магнитный поток через все витки соленоида связан с силой протекающего по нему тока, в соответствии с определением индуктивности контура, соотношением

$$\Phi = LI.$$

Этот поток, очевидно, складывается из потоков через каждый виток соленоида:

$$\Phi = N\Phi_1.$$

Величина ЭДС, индуцируемой в витке, охватывающем соленоид, по закону Фарадея равна

$$|\mathcal{E}| = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t}.$$

Здесь учтено, что поверхность витка пронизывают линии магнитной индукции соленоида и поток определяется именно потоком Φ_1 через один виток соленоида.

Из решения системы полученных уравнений находим

$$N = \frac{L}{\mathcal{E}} \frac{(I_2 - I_1)}{\Delta t} = 1000.$$

3.31. Обратим внимание на то, что магнитный поток, пронизывающий надетый виток, в любой момент времени тождественно равен потоку через поперечное сечение катушки, т.е. потоку через каждый виток катушки. Следовательно, электродвижущая сила, возникающая в надетом витке, такая же, как в каждом витке катушки. В то же время ЭДС самоиндукции катушки представляет собой сумму электродвижущих сил, индуцируемых в каждом витке.

Обозначим через \mathcal{E}_1 величину ЭДС в надетом витке. Из сказанного следует, что

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}}{N}.$$

По закону Ома сила тока в витке равна

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R} = \frac{\mathcal{E}}{NR}.$$

По определению силы тока,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

Тогда

$$\Delta q = I \Delta t.$$

Окончательно получим

$$\Delta q = \frac{\mathcal{E} \Delta t}{NR} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

3.32. Рассмотрим малый промежуток времени Δt , выделив его из всего времени поворота кольца. Согласно закону Фарадея для электромагнитной индукции, возникающая электродвижущая сила равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},$$

где $\Delta \Phi$ – изменение магнитного потока через кольцо, произошедшее за время Δt . Эта ЭДС вызывает появление электрического тока. По закону Ома сила тока равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Напомним, что знак «минус» определяет направление индукционного тока в соответствии с правилом Ленца. По определению силы тока,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

где Δq – величина заряда, прошедшего через сечение проводника за время Δt . Тогда

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Сократив на Δt ($\Delta t \neq 0$), получаем

$$\Delta q = -\frac{1}{R} \Delta \Phi.$$

Просуммировав величины зарядов, протекших по кольцу за весь процесс поворота, получим

$$q = -\frac{1}{R} (\Phi_{\text{кон}} - \Phi_{\text{нач}}),$$

где $\Phi_{\text{кон}}$ и $\Phi_{\text{нач}}$ – значения магнитного потока в конце и в начале процесса поворота.

В соответствии с определением магнитного потока, в нашем случае

$$\Phi_{\text{кон}} = -\pi r^2 B \text{ и } \Phi_{\text{нач}} = \pi r^2 B.$$

Тогда окончательно получим

$$|q| = \frac{2\pi r^2 B}{R} = 1,57 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

На направлении протекания заряда мы не акцентируем внимание. Выяснение этого вопроса не требуется по условию задачи.

3.33. По закону электромагнитной индукции Фарадея при изменении магнитного потока через любую поверхность, ограниченную проводящим контуром, в нем возникает (индуцируется) электродвижущая сила, равная по модулю скорости изменения этого магнитного потока:

$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|.$$

Магнитный поток через каждый виток катушки равен

$$\Phi = BS \cos \alpha,$$

где α – угол между вектором \vec{B} и нормалью к плоскости витка. Так как вектор магнитной индукции поля по условию задачи перпендикулярен плоскости всех ее витков, а площадь их не меняется, то можно записать

$$\frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = S \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

где $\Delta \Phi_1$ – изменение магнитного потока через один виток катушки. Поскольку в катушке N витков соединены последовательно, общая ЭДС, индуцируемая на концах катушки, окажется

равной

$$\varepsilon = N \left| \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} \right| = NS \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Так как к концам провода катушки подключен конденсатор, эта ЭДС и обеспечивает постоянную разность потенциалов $U = \varepsilon$ между его обкладками. В соответствии с определением емкости конденсатора,

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varepsilon}.$$

Выражая отсюда q и подставляя значение ε , получим

$$q = CNS \frac{\Delta B}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

3.34. Энергия магнитного поля, порожденного током I_1 в соленоиде, равна

$$W_m = \frac{LI_1^2}{2}.$$

По закону электромагнитной индукции Фарадея при увеличении этого тока в $k = 2$ раза за время $\Delta t = 1$ с в катушке возникает электродвижущая сила самоиндукции со средним значением

$$\varepsilon = L \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|.$$

Изменение силы тока, протекающего через соленоид, очевидно, равно

$$\Delta I = I_1 (k - 1).$$

Решая совместно полученные уравнения, приходим к результату

$$W_m = \frac{\varepsilon I_1 \Delta t}{2(k-1)} = 5 \text{ Дж}.$$

3.35. При изменении магнитного поля, пронизывающего площадь, охватываемую кольцом, в последнем появляется индукционный ток. Сила этого тока определяется возникающей ЭДС индукции, которая по закону электромагнитной индукции Фарадея равна (по модулю) скорости изменения магнитного потока через вышеупомянутую поверхность:

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R}, \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}.$$

Напомним, что поток вектора магнитной индукции \vec{B} равен произведению его модуля на площадь соответствующей поверх-

ности S и косинус угла между вектором \vec{B} и нормалью к поверхности. По условию задачи меняется лишь магнитная индукция, а косинус указанного угла равен единице. Поэтому ЭДС индукции равна

$$\mathcal{E}_i = S \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Индукция магнитного поля изменяется линейно, поэтому скорость ее изменения постоянна, что обеспечивает постоянство силы индукционного тока как на этапе нарастания (интервал времени t_1), так и на этапе убывания магнитного поля (интервал времени t_2). Отличаются лишь направления и значения силы тока:

$$I_{1,2} = \frac{\pi d^2}{4R} \frac{B}{t_{1,2}}.$$

Остается найти количество теплоты, выделившееся при протекании индукционного тока, используя закон Джоуля–Ленца:

$$Q = I_1^2 R t_1 + I_2^2 R t_2.$$

Подстановка найденных ранее значений для индукционных токов I_1 и I_2 дает окончательный результат:

$$Q = \frac{\pi^2 d^4 B^2}{16R} \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} \approx 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} = 0,46 \text{ мкДж}.$$

3.36. Подключение источника тока к данной схеме (рис.52) приводит к кратковременному протеканию тока зарядки конденсаторов. В результате на каждом конденсаторе будет накоплен заряд, пропорциональный разности потенциалов между его обкладками. Так как исходные емкости конденсаторов одинаковы, то приложенное напряжение будет распределено между ними поровну (последовательное соединение). Итак, используя определение емкости, можно найти исходный заряд каждого конденсатора:

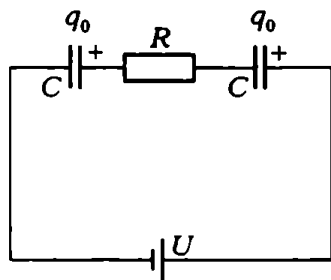


Рис.52

$$q_0 = C \frac{U}{2}.$$

После того как пространство между обкладками одного из конденсаторов будет заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , его емкость возрастет в ϵ раз, т.е. станет равной

$$C_1 = \epsilon C.$$

Заряд и напряжение на обоих конденсаторах также изменятся. Из закона сохранения заряда можно заключить, что новое значение заряда на конденсаторах будет одним и тем же и равным

$$q_1 = q_0 + \Delta q.$$

Изменение заряда Δq как раз и есть искомый заряд, перетекающий между внутренними (по отношению к источнику) обкладками конденсаторов. Напряжение источника распределится на конденсаторах в соответствии с их электроемкостями, поэтому запишем

$$\frac{q_1}{C} + \frac{q_1}{\varepsilon C} = U.$$

Здесь учтено, что конденсаторы соединены последовательно, а на резисторе в отсутствие тока напряжение не падает.

Выражая новое значение заряда конденсаторов:

$$q_1 = \frac{\varepsilon CU}{\varepsilon + 1}$$

и вычитая из него исходное, приходим к результату

$$\Delta q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \frac{CU}{2} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ Кл} = 4 \text{ нКл}.$$

3.37. Если источник постоянного тока с электродвижущей силой \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнее сопротивление R , то сила тока в цепи определяется законом Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Максимальная сила тока соответствует случаю, когда внешнее сопротивление равно нулю (ток короткого замыкания):

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r},$$

откуда

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_{\max}}.$$

Количество теплоты, которое выделяется на сопротивлении R за время τ , вычисляется по закону Джоуля–Ленца: $Q = I^2 R \tau$. С учетом предыдущих равенств получаем окончательный результат:

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2 I_{\max}^2 R \tau}{(I_{\max} R + \mathcal{E})^2} = 120 \text{ Дж}.$$

Для получения правильного численного результата не забудьте время τ выразить в единицах СИ.

3.38. Сила тока в цепи определяется законом Ома для полной цепи (см., например, предыдущую задачу). При последовательном соединении источников тока ток в цепи равен

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Здесь r_1 и r_2 – внутренние сопротивления первого и второго источников соответственно, а R – внешнее сопротивление цепи. Количество теплоты, выделяющееся на внешнем сопротивлении за одну секунду, численно равно тепловой мощности, вычисляется по закону Джоуля–Ленца:

$$P_1 = I_1^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} \right)^2 R.$$

Если полярность одной из батарей поменять на противоположную, то сила тока в цепи станет

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} \quad \text{либо} \quad I_2' = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2}.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, будет

$$P_2 = I_2^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} \right)^2 R = \left(\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2} \right)^2 R.$$

По условию задачи, $\frac{P_1}{P_2} = n$, откуда получаем

$$\left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} \right)^2 = \left(\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} \right)^2 = n.$$

При решении возможны два варианта:

а) $\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} = \sqrt{n}$, откуда $\mathcal{E}_2 = \frac{1 + \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} \mathcal{E}_1 = 36$ В, но это противоречит условию, согласно которому $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$:

б) $\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = \sqrt{n}$, откуда $\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1} \mathcal{E}_1 = 4$ В, что и является окончательным ответом.

3.39. Запишем первый закон Фарадея для электролиза:

$$m = kq,$$

где m – масса серебра, полученного при электролизе, а k – электрохимический эквивалент серебра. При переносе заряда q по участку цепи, включающему в себя электролитическую ванну,

электрическое поле совершает работу A , равную

$$A = qU.$$

Эта работа идет на осуществление химических реакций с выделением вещества на электродах (полезная энергия $W_{\text{пол}}$), а также частично превращается во внутреннюю энергию, т.е. в тепло Q , выделяющееся при протекании тока по данному участку цепи (потери энергии). Таким образом, полезную энергию можно представить как разность $A - Q$, а КПД установки записать в виде

$$\eta = \frac{W_{\text{пол}}}{A} = \frac{A - Q}{A} = 1 - \frac{Q}{A}.$$

Выразив из первых двух уравнений протекший через ванну заряд q и полные энергетические затраты A , приходим к ответу для искомого КПД установки:

$$\eta = 1 - \frac{kQ}{mU} = 0,6 \text{ (или 60\%).}$$

3.40. Обратимся к рисунку 53. Электрон, влетая в однородное магнитное поле со скоростью v , движется равномерно по дуге окружности радиусом R . Этот радиус может быть найден при помощи второго закона Ньютона, в соответствии с которым центростремительное ускорение электрона вызывается силой Лоренца: $evB = \frac{mv^2}{R}$. Здесь m – масса электрона, e – его заряд, причем $e/m = \gamma$. Отсюда находим

$$R = \frac{mv}{eB}.$$

Скорость v электрону сообщило ускоряющее электрическое поле. По закону сохранения энергии,

$$\frac{mv^2}{2} = e\Delta\varphi.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}}.$$

Подставив это выражение в формулу для радиуса, получим

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta\varphi}{e}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2\Delta\varphi}{\gamma}}.$$

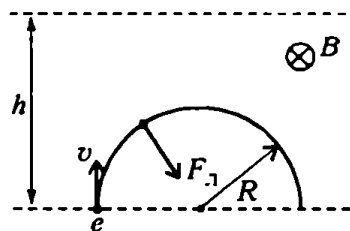


Рис. 53

Отметим: чем меньше индукция магнитного поля, тем больше радиус окружности, по которой движется электрон. Для того чтобы он не прошел сквозь слой, необходимо, чтобы

$$R \leq h, \text{ или } R_{\max} = h.$$

Тогда минимальное значение индукции будет равно

$$B_{\min} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\Delta\phi}{\gamma}} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

3.41. Будем пренебрегать сопротивлением прутьев и скользящих контактов, а также самоиндукцией контура. Под действием силы тяжести переключатель начнет скользить вниз с нарастающей скоростью. Магнитный поток, пронизывающий контур, образованный переключателем и П-образными рельсами, очевидно, будет при этом увеличиваться. По правилу Ленца, возникающий в контуре индукционный ток направлен так, чтобы его собственное магнитное поле препятствовало нарастанию внешнего магнитного потока, т.е. в рассматриваемом случае оно направлено на-

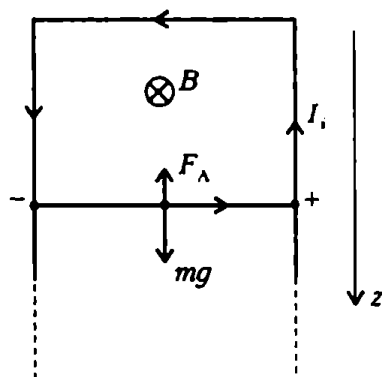


Рис. 54

встречу полю \vec{B} . Направление индукционного тока находим по правилу правого винта («буравчика») – против часовой стрелки (рис. 54). На переключатель, по которой протекает ток, действует сила Ампера. По правилу левой руки находим, что эта сила направлена вертикально вверх и тормозит падение переключки.

Качественно ясно, что ускорение переключки при этом постепенно уменьшается, а ее скорость через некоторое время перестает расти. Запишем уравнение движения переключки в проекции на ось z :

$$mg - F_A = ma(t).$$

Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле (сила Ампера) равна

$$F_A = I_i B l = \frac{\mathcal{E}_i}{R} B l,$$

где учтено, что угол между вектором магнитной индукции \vec{B} и проводником равен 90° , а синус этого угла равен 1. ЭДС индукции по закону Фарадея определяется скоростью изменения

магнитного потока через поверхность контура:

$$|\mathcal{E}_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = Bl \frac{ds}{dt} = Bvl.$$

Подставляя соответствующие выражения в уравнение движения переключки, получаем

$$mg - \frac{Bvl}{R} Bl = ma(t).$$

Очевидно, переключка будет падать с постоянной скоростью $v_{уст}$, когда ее ускорение обратится в ноль. Установившаяся скорость движения переключки при этом будет равна

$$v_{уст} = \frac{mgR}{B^2 l^2} = 1,25 \text{ м/с}.$$

3.42. По определению индуктивности магнитный поток, сцепленный со всеми N витками катушки, равен в начальный момент

$$\Phi = LI_1.$$

Магнитный поток через один виток катушки, а значит и через замкнутый виток, надетый на нее, при этом, очевидно, равен

$$\Phi_1 = \frac{LI_1}{N}.$$

При равномерном уменьшении силы тока через катушку в витке возникает ЭДС индукции, равная по модулю скорости изменения магнитного потока (закон Фарадея):

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{\Phi_1}{\Delta t} = \frac{L}{N} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{L}{N} \frac{I_1}{\Delta t}.$$

Сила тока, протекающего по витку, может быть определена по закону Ома:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{L}{NR} \frac{I_1}{\Delta t}.$$

Остается выразить из последнего соотношения искомое число витков N катушки:

$$N = \frac{L}{I_2 R} \frac{I_1}{\Delta t} = 2000.$$

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. Период колебаний каждого из маятников может быть найден из очевидных соотношений

$$T_1 = \frac{\tau}{n_1}, \quad T_2 = \frac{\tau}{n_2}.$$

В то же время, периоды колебаний определяются параметрами колебательной системы:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2 - \Delta l}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}.$$

Для решения системы полученных уравнений удобнее всего поделить правые части первых двух уравнений и приравнять результат частному от деления правых частей вторых двух равенств. Получим

$$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{l_2 - \Delta l}{l_2}}.$$

Далее нужно возвести данное равенство в квадрат и решить уравнение относительно искомой величины:

$$l_2 = \frac{n_1^2}{n_1^2 - n_2^2} \Delta l = 31,25 \text{ см}.$$

4.2. Рассматриваемая система представляет собой простейшую колебательную систему – гармонический осциллятор. Время движения бруска до максимального удаления от стенки соответствует $3/4$ периода T колебаний, возникающих после толчка. Как известно, период колебаний груза массой m на пружине жесткостью k равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Так как по условию задачи трением в системе следует пренебречь, можно записать равенство, соответствующее закону сохранения механической энергии, в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kx_{\max}^2}{2}.$$

Здесь исходная кинетическая энергия бруска приравнена потенциальной энергии деформированной пружины в положении максимального удаления бруска от стенки. Из последнего равенства легко выразить отношение m/k :

$$\frac{m}{k} = \frac{x_{\max}^2}{v_0^2}$$

и затем окончательно найти интересующее нас время:

$$\tau = \frac{3}{4}T = \frac{3}{2}\pi \frac{x_{\max}}{v_0} \approx 0,9 \text{ с}.$$

4.3. Обозначим через x отклонение точки от положения

равновесия в момент времени t . При гармонических колебаниях

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, ω – круговая частота и φ_0 – начальная фаза. Скорость колеблющейся точки меняется по закону

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Максимальное значение скорости равно

$$v_{\max} = A\omega.$$

При движении между двумя крайними положениями значения средней скорости, в соответствии с ее определением, равно

$$v_{\text{ср}} = \frac{2A}{T/2} = \frac{4A}{T},$$

где T – период колебаний. Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$, найдем связь между v_{\max} и $v_{\text{ср}}$:

$$v_{\max} = \frac{\pi v_{\text{ср}}}{2} = 6,3 \text{ м/с}.$$

4.4 Максимальное ускорение при гармонических колебаниях равно

$$a_{\max} = A\omega^2,$$

где A – амплитуда колебаний, а ω – круговая частота, определяемая соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Жесткость пружины k можно определить, пользуясь первой частью условия задачи. Если груз массой m неподвижно висит на пружине, то сила тяжести уравнивается силой упругости:

$$k\Delta x - mg = 0, \text{ откуда } k = \frac{mg}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $A = \Delta x$, находим окончательно

$$a_{\max} = A\omega^2 = \Delta x \frac{k}{m} = \frac{mg}{m} = g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

4.5. Если бы диод обладал одним и тем же сопротивлением r при протекании тока в цепи в обоих направлениях, то средняя мощность тепловых потерь в ней определялась бы по закону

Джоуля–Ленца. С учетом закона Ома, для этого случая имеем

$$P_0 = I_a^2 (R + r) = \frac{U_a^2}{R + r}.$$

На самом деле диод обладает односторонней проводимостью, и ток в цепи отличен от нуля только при одной полярности приложенного переменного напряжения. Поэтому

$$P = \frac{P_0}{2}.$$

Из полученных соотношений находим

$$r = \frac{U_a^2}{2P} - R = 8 \text{ Ом}.$$

4.6. Сила тока через резистор сопротивлением R_1 изменяется по закону

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U_0}{R_1} \cos \omega t.$$

Количество теплоты, которое выделяется на этом резисторе за время Δt , определяется законом Джоуля–Ленца:

$$Q_1 = I_{1d}^2 R_1 \Delta t,$$

где I_{1d} – действующее (эффективное) значение силы тока. Для гармонически изменяющегося тока

$$I_{1d} = \frac{I_{1\max}}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{R_1 \sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$Q_1 = \frac{U_0^2}{2R_1} \Delta t.$$

В отсутствие диода количество теплоты, выделяющееся на резисторе сопротивлением R_2 , вычислялось бы точно так же (разумеется, вместо индекса «1» следовало бы употребить индекс «2»). Однако идеальный диод проводит ток только в одном направлении. Другими словами, половину периода через резистор сопротивлением R_2 ток идет так же, как и через резистор сопротивлением R_1 , а половину периода ток отсутствует. Это означает, что количество теплоты, выделяющееся на втором резисторе, при включении диода уменьшается в 2 раза:

$$Q_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{U_0^2}{2R_2} \Delta t \right).$$

Так как тепло выделяется одновременно на обоих резисторах, то

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{U_0^2}{2R_1} \Delta t + \frac{U_0^2}{4R_2} \Delta t = 6 \text{ кДж}.$$

4.7. При незатухающих колебаниях в контуре энергия электрического поля $W_э$ переходит в энергию магнитного поля $W_м$ и обратно. По закону сохранения энергии в любой момент времени

$$W_э + W_м = \frac{CU_0^2}{2}.$$

В момент времени, выбранный по условию, $W_э = W_м$, следовательно,

$$2W_м = \frac{CU_0^2}{2}.$$

Учитывая, что энергия магнитного поля в катушке индуктивности может быть определена по формуле

$$W_м = \frac{LI^2}{2},$$

где I – сила тока в контуре, получим окончательно

$$I = U_0 \sqrt{\frac{C}{2L}} = 10^{-2} \text{ А}.$$

4.8. Резонансная частота, равная частоте собственных незатухающих колебаний LC -контра, составляет

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Электромагнитным волнам с такой частотой, которые распространяются со скоростью света c , соответствует длина волны

$$\lambda = cT = c \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi c}{\omega_0}.$$

Исходя из закона сохранения энергии, можно утверждать, что при вынужденных колебаниях в контуре максимальное значение энергии электрического поля в конденсаторе равно максимальному значению энергии магнитного поля тока соленоида:

$$\frac{CU_{\max}^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}.$$

Следовательно,

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{C}{L}} U_{\max}.$$

Выразим из первых двух равенств индуктивность катушки:

$$\sqrt{L} = \frac{\lambda}{2\pi c\sqrt{C}}$$

и, подставив в выражение для I_{\max} , найдем

$$I_{\max} = \frac{2\pi c C}{\lambda} U_{\max} = 10,6 \cdot 10^{-9} \text{ А}.$$

4.9. По формуле Томсона период колебаний в контуре равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Соответствующая такому периоду длина волны составляет

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Минимальная длина волны будет соответствовать такому соединению конденсаторов, при котором их общая емкость окажется наименьшей. Вспомнив, как вычисляется результирующая емкость при различных соединениях двух конденсаторов в батарею, легко сообразить, что наименьшей она будет при последовательном их соединении. При этом

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \text{ откуда } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Следовательно,

$$\lambda_{\min} = 2\pi c \sqrt{\frac{LC_1 C_2}{C_1 + C_2}} = 266 \text{ м}.$$

4.10. При распространении волны частицы струны совершают гармонические колебания, описываемые законом

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь x – отклонение частицы от положения равновесия, A – амплитуда колебаний, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – круговая частота, T – период колебаний, $(\omega t + \varphi)$ – фаза колебаний. Начальная фаза φ зависит от положения частицы на струне, поэтому для разных частиц в один и тот же момент времени фаза имеет различное значение.

Для ситуации, изображенной на рисунке 25, частица, находящаяся в точке O , очевидно, проходит положение равновесия. В этот момент она имеет наибольшую скорость v_{\max} , определяемую соотношением

$$v_{\max} = A\omega = \frac{A \cdot 2\pi}{T}.$$

Период колебаний можно найти, воспользовавшись связью между длиной волны, частотой (периодом) и скоростью распространения волны:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = vT.$$

Окончательно получим

$$v_{\max} = \frac{2\pi A\nu}{\lambda} = 0,83 \text{ м/с}.$$

4.11. Рассмотрим два подхода к решению задачи.

1) Можно провести такие же рассуждения, как и в предыдущей задаче. Точка О находится в крайнем положении, ее ускорение максимально и равно

$$a = a_{\max} = A\omega^2 = \frac{A \cdot 4\pi^2}{T^2}.$$

Период колебаний связан с длиной волны соотношением $\lambda = vT$. Следовательно,

$$a_{\max} = \frac{A \cdot 4\pi^2}{\lambda^2} v^2 = 350 \text{ м/с}^2.$$

2) Приведем также и более общий способ решения этой задачи. Уравнение гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

Циклическая частота ω и волновое число k связаны с длиной волны λ такими соотношениями:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

В итоге уравнение волны приобретает вид

$$\xi(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right).$$

Ускорение точек струны можно получить, дважды продифференцировав смещение частиц по времени:

$$\xi''(x, t) = -\left(\frac{2\pi}{\lambda} v\right)^2 A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right).$$

Моменту, указанному на рисунке 26, соответствует максимальное значение ускорения (его амплитудное значение), т.е. коэффициент перед гармонической функцией:

$$a = a_{\max} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} v^2 A = 350 \text{ м/с}^2.$$

Читатель сам выберет для себя наиболее понятный вариант решения.

4.12. Расстояние между ближайшими гребнями волн, т.е. длина волны, составляет $\lambda = \frac{u}{v_0}$. В системе отсчета, связанной с лодкой, гребни пробегают мимо лодки со скоростью $v_1 = v + u$. Минимальный промежуток времени между ударами волн о нос лодки (период) равен

$$T = \frac{\lambda}{v_1} = \frac{\lambda}{v + u}.$$

Тогда частота ударов будет

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v + u}{u} \nu_0 = 1,75 \text{ Гц}.$$

4.13. Обозначим через L расстояние между двумя точками звуковой волны, о которых идет речь в условии задачи. Тогда при исходной температуре длина волны

$$\lambda_1 = \frac{L}{N}.$$

Как известно, $\lambda_1 = \frac{v}{\nu}$, где v – скорость распространения волны, а ν – ее частота. Таким образом,

$$\lambda_1 = \frac{L}{N} = \frac{v}{\nu}.$$

При повышении температуры длина волны увеличивается, а частота не изменяется. Согласно условию, на отрезке L должно уложиться на половину новой длины волны меньше, т.е.

$$\lambda_2 = \frac{L}{N - 1/2} = \frac{v + \Delta v}{\nu}.$$

Здесь Δv – изменение скорости.

Разделив последнее равенство на предыдущее, получим

$$\frac{N}{N - 1/2} = \frac{v + \Delta v}{v}.$$

По условию,

$$\frac{\Delta v}{v} = \alpha \Delta T,$$

где ΔT – изменение температуры, а $\alpha = 0,002 \text{ K}^{-1}$. Тогда

$$\frac{N}{N - 1/2} = 1 + \frac{\Delta v}{v} = 1 + \alpha \Delta T.$$

Отсюда находим искомое увеличение температуры:

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha(2N - 1)} \approx 0,3 \text{ К}.$$

4.14. В процессе движения на груз действуют две силы (рис.55): постоянная сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила реакции со стороны доски \vec{N} , направленная вверх и изменяющаяся со временем. Под действием этих двух сил груз совершает гармонические колебания вместе с доской. Согласно второму закону Ньютона, равнодействующая сил обуславливает ускорение груза, которое при гармонических колебаниях направлено всегда к положению равновесия.

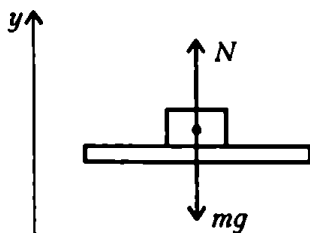


Рис.55

Рассмотрим два крайних положения доски, в которых ускорение имеет максимальную величину, равную $a_{\max} = A\omega^2$, где A – амплитуда колебаний, а ω – циклическая частота колебаний.

В крайнем верхнем положении ускорение направлено вниз. По второму закону Ньютона,

$$mA\omega^2 = mg - N_1.$$

Здесь N_1 – величина силы реакции в верхней точке, m – масса груза. Отсюда получаем

$$N_1 = m(g - A\omega^2).$$

В крайнем нижнем положении ускорение имеет ту же величину, но направлено оно вверх. Поэтому

$$mA\omega^2 = N_2 - mg.$$

Здесь N_2 – величина силы реакции в нижней точке. Получаем

$$N_2 = m(g + A\omega^2).$$

По условию,

$$\frac{N_2}{N_1} = n, \text{ или } n = \frac{g + A\omega^2}{g - A\omega^2}.$$

Решая это уравнение относительно ω , найдем частоту колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{n-1}{n+1} \frac{g}{A}} \approx 7 \text{ с}^{-1}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 1,1 \text{ Гц}.$$

Заметим, что при решении задачи буквой N обозначалась сила, действующая на груз со стороны доски. Согласно третьему закону Ньютона, сила, с которой груз давит на доску, имеет такую же величину.

5. ОПТИКА

5.1. Воспользуемся свойством обратимости хода световых лучей в оптических системах. Поместим мысленно источник света в точку B (рис.56). Тогда точку A пересечения лучей до появления линзы можно считать мнимым оптическим изображением точки B , полученным с помощью рассеивающей линзы. Поэтому можно записать формулу линзы в виде

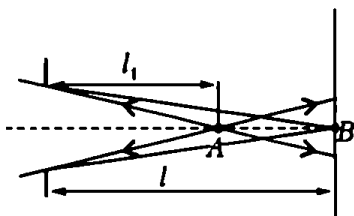


Рис.56

$$D = \frac{1}{l} - \frac{1}{l_1},$$

где l_1 – расстояние от доски до точки A . Далее, из подобия треугольников можно записать

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l_1}{l - l_1}.$$

Отсюда легко выражаем l_1 :

$$l_1 = \frac{d_1 l}{d_1 + d_2}$$

и, подставляя в первое равенство, получаем искомую величину:

$$D = -\frac{d_2}{d_1} \frac{1}{l} \approx -3,3 \text{ дптр}.$$

5.2. Из условия следует, что изображение предмета мнимое и получено оно с помощью собирающей линзы. Обозначим через d расстояние от предмета до линзы, через f – расстояние от линзы до изображения и через D – оптическую силу линзы. Тогда для нашего случая формулу линзы можно записать в следующем виде:

$$D = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}.$$

При этом следует иметь в виду, что под d и f подразумеваются численные значения расстояний, т.е. положительные величины.

Увеличение, даваемое линзой, равно

$$k = \frac{f}{d}.$$

По условию,

$$f - d = L.$$

Используя две последние формулы, можно выразить d и f

через L :

$$d = \frac{L}{k-1} \text{ и } f = \frac{kL}{k-1}.$$

Подставив эти выражения в формулу линзы, получим окончательный результат:

$$D = \frac{(k-1)^2}{kL} = 2 \text{ дптр}.$$

5.3. Напомним два утверждения, важных для решения данной задачи.

1) Если источник света находится на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы, то его действительное изображение также находится на двойном фокусном расстоянии. Это следует, в частности, из формулы линзы.

2) Для того чтобы лучи, прошедшие через линзу, были параллельными, необходимо, чтобы они исходили из фокуса линзы. Это следует из определения фокуса линзы и из свойства обратимости хода лучей в геометрической оптике.

Оба утверждения помогут сделать чертеж (рис.57) и указать на нем характерные отрезки. Обозначения на рисунке: S – источник света, O – оптический центр линзы, F – фокусы линзы, A – точка пересечения зеркала с главной оптической осью линзы O_1O_2 , S_1 – точка, в которой получилось бы изображение источника в отсутствие зеркала. При этом

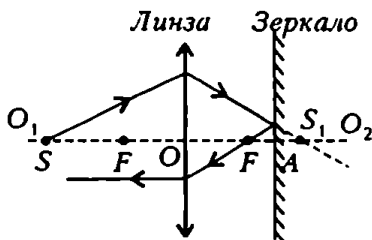


Рис.57

$$OS = OS_1 = 2F, \quad OF = FS = F.$$

Из законов отражения следует, что

$$FA = AS_1 = \frac{F}{2}.$$

Значит, искомое расстояние равно

$$x = OA = OF + FA = F + \frac{F}{2} = \frac{3}{2}F = 45 \text{ см}.$$

5.4. Обозначим через d расстояние от предмета до линзы и через f – расстояние от линзы до экрана. Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \text{ откуда } F = \frac{d+f}{df}.$$

Увеличение, даваемое линзой, равно

$$k = \frac{f}{d}.$$

По условию,

$$d + f = l.$$

Выражая d и f через l и k из соответствующих соотношений, найдем

$$d = \frac{l}{k+1} \quad \text{и} \quad f = \frac{lk}{k+1}.$$

После этого получим окончательно

$$F = \frac{kl}{(k+1)^2} = 0,08 \text{ м.}$$

5.5. Обозначим через β угол преломления (в стеклянной пластинке). Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_0} = \frac{v_0}{v_1},$$

где n_1 и n_0 – абсолютные показатели преломления стекла и воздуха ($n_0 \approx 1$), v_1 и v_0 – скорости распространения света в стекле и в воздухе. Как известно, длина волны λ , скорость ее распространения v и частота ν связаны соотношением

$$\lambda = \frac{v}{\nu}.$$

При переходе из одной среды в другую частота не изменяется (нелинейными эффектами пренебрегаем). Поэтому

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Закон преломления теперь запишем в виде

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Условие того, что отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол, означает, что $\alpha + \beta = \pi/2$ (в этом легко убедиться, сделав рисунок). Следовательно, $\sin \beta = \cos \alpha$, и предыдущее соотношение сводится к виду

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}.$$

Подставив численные данные задачи, найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,43, \quad \alpha = 54,5^\circ.$$

5.6. Из условия задачи следует, что одно из изображений мнимое, а другое – действительное. Обозначим через d расстояние от предмета до линзы, а через f – расстояние от линзы до изображения. Запишем формулу линзы для этих двух случаев:

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = D \quad \text{для мнимого изображения,}$$

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = D \quad \text{для действительного.}$$

Важно подчеркнуть, что в этих формулах d и f – расстояния, т.е. положительные числа. Увеличение, даваемое линзой, в каждом из рассматриваемых случаев равно

$$k = \frac{f_1}{d_1}, \quad k = \frac{f_2}{d_2}.$$

Из полученных соотношений, исключая f_1 и f_2 , найдем

$$l = d_2 - d_1 = \frac{2}{kD} = 0,1 \text{ м}.$$

5.7. Обозначим через d расстояние от предмета до лупы и через f – расстояние от лупы до изображения предмета. Как известно, лупу используют для получения мнимого увеличенного изображения. Тогда, согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = D.$$

Подчеркнем, что в таком виде формулы под d и f подразумеваются именно расстояния, т.е. положительные величины. Как известно, увеличение, даваемое линзой, равно

$$k = \frac{f}{d}.$$

Исключив из записанных формул f , получим

$$d = \frac{k-1}{kD} = 6 \text{ см}.$$

5.8. По условию задачи луч падает на боковую грань призмы нормально и потому не преломляясь проходит внутри призмы до границы раздела с воздухом – второй боковой грани (рис.58). Преломление на этой грани описывается законом преломления

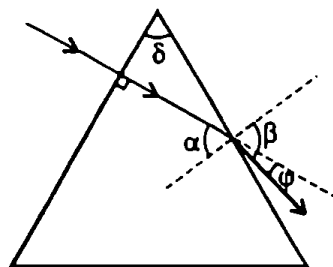


Рис.58

(законом Снеллиуса)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Здесь учтено, что относительный показатель преломления стекло – воздух равен $1/n$.

Далее остается найти, опираясь на чертеж, ход лучей в оптической системе и записать соотношение между интересующими нас углами:

$$\varphi + \alpha = \beta.$$

Кроме того,

$$\alpha = \delta$$

как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

Подставляя эти соотношения в закон преломления, окончательно находим

$$n = \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\sin \delta} \approx 1 + \frac{\varphi}{\delta} = 1,5.$$

5.9. По закону преломления,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n$$

(обозначения – на рисунке 59). Обозначим через h расстояние от крайнего луча в пучке до параллельной ему оси OO' , проходящей через центр сферы. Тогда

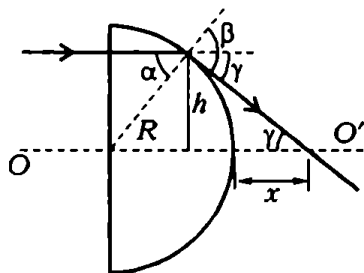


Рис. 59

$$\sin \alpha = \frac{h}{R} \text{ и } \sin \beta = \frac{nh}{R}.$$

Угол отклонения преломленного луча от первоначального направления равен $\gamma = \beta - \alpha$. С учетом замечания о малости углов, кото-

рое содержится в условии, получаем

$$\gamma \approx (n - 1) \frac{h}{R}.$$

Из рисунка видно, что при малых углах

$$\gamma \approx \tan \gamma \approx \frac{h}{x}.$$

Учитывая предыдущую формулу, получим

$$(n - 1) \frac{h}{R} \approx \frac{h}{x}.$$

Отсюда

$$x \approx \frac{R}{n-1} = 90 \text{ см}.$$

Важно отметить, что в ответе не содержится величина h . Это означает, что различные лучи падающего пучка действительно сфокусируются в одной точке. Также подчеркнем, что полученный результат является приближенным, поскольку постоянно учитывалось условие малости углов. Например, $\sin \alpha \ll 1$ эквивалентно $h \ll R$.

5.10. Как известно, предельный угол падения при полном внутреннем отражении определяется соотношением

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = \frac{1}{n}.$$

Если источник света находится на глубине L (рис.60), то лучи света, находящиеся за пределами конуса с углом при вершине $2\alpha_{\text{пр}}$, полностью отражаются от поверхности воды. Из рисунка видно, что радиус круга R , в пределах которого свет выходит из воды, равен

$$R = L \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}.$$

Величина $\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}}$ выражается через $\sin \alpha_{\text{пр}}$ при помощи известных тригонометрических соотношений:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\cos \alpha_{\text{пр}}} = \frac{\sin \alpha_{\text{пр}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\text{пр}}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

В условии задачи дно бассейна – зеркальное. На поверхность воды попадают лучи, не только идущие непосредственно от источника S , но и отраженные от дна (рис.61). При этом, как известно из геометрической оптики, ход отраженных лучей такой, что их можно считать исходящими из дополнительного мнимого источника света S' . Мнимый источник S' должен находиться в точке, симметричной с точкой S относительно зеркала. В условиях конкретной задачи расстояние от источника S' до поверхности воды составляет $L = 1,5 H$.

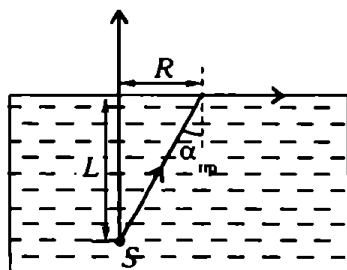


Рис.60

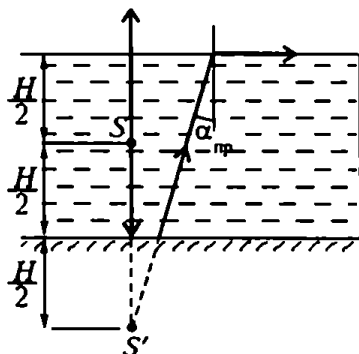


Рис.61

Легко показать, что радиус светового круга R будет определяться именно источником S' :

$$R = L \operatorname{tg} \alpha_{\text{пр}} = \frac{3}{2\sqrt{n^2 - 1}} H \approx 3,4 \text{ м}.$$

Следует отметить, что световое пятно на поверхности воды в бассейне можно видеть только при мутной воде. При идеальной прозрачности такого пятна нет.

5.11. Обратимся к рисунку 62, введя следующие обозначения: A – точка входа луча в призму, B – точка выхода из нее, E – пересечение перпендикуляров, восстановленных из точек падения и выхода лучей, D – пересечение линий CE и AB .

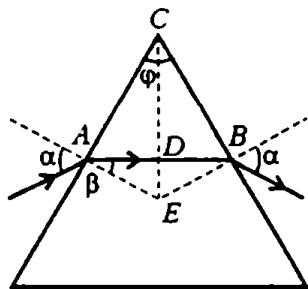


Рис. 62

Решение задачи значительно упрощается из-за симметрии хода лучей: $AC = CB$ и линия CE является биссектрисой угла φ . Из подобия треугольников ACD и ADE следует, что

$$\beta = \frac{1}{2} \varphi.$$

По закону преломления,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

С другой стороны, согласно условию,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = n.$$

Следовательно,

$$\cos \alpha = \sin \beta, \text{ или } \sin \alpha = \cos \beta.$$

Тогда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} = n.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{n}, \text{ и } \varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

5.12. Положение главных максимумов при дифракции света на решетке определяется условием

$$d \sin \varphi = m \lambda,$$

где $d = \frac{l}{N}$ – период решетки, φ – угол дифракции, а $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Очевидно, что

$$\varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

поэтому максимальное значение порядка дифракции m_{\max} определяется так:

$$m_{\max} = \frac{l}{N\lambda} = 8.$$

Для подсчета общего количества наблюдаемых максимумов надо учесть, что они располагаются симметрично по обе стороны от центрального максимума, соответствующего значению $m = 0$. Не надо забывать и о центральном максимуме. Поэтому общее число максимумов равно

$$k = 2m_{\max} + 1 = \frac{2l}{N\lambda} + 1 = 17.$$

5.13. В соответствии с квантовыми представлениями каждый фотон переносит одну порцию световой энергии (квант энергии)

$$E = h\nu,$$

где ν – частота излучаемого света. Обозначим через n число фотонов, пересекающих поперечное сечение светового пучка в единицу времени (т.е. искомую величину). Тогда энергия, переносимая фотонами за единицу времени через сечение пучка, это мощность светового потока:

$$P_0 = nh\nu.$$

Не требуется рассмотрения механизма излучения света лазером, чтобы утверждать, что источником энергии является электрическая мощность P , потребляемая лазером. По определению КПД,

$$\eta = \frac{P_0}{P}.$$

Учтем связь частоты ν с длиной волны λ :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Решая совместно записанные уравнения, найдем

$$n = \frac{P\eta\lambda}{hc} = 10^{19} \text{ с}^{-1}.$$

5.14. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта, которое отражает закон сохранения энергии в актах фотоэмиссии

электронов:

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + A_{\text{вых}},$$

где $\frac{m_e v^2}{2}$ – кинетическая энергия электрона вблизи поверхности катода. Частота фотона связана с длиной волны и скоростью света в вакууме соотношением

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}.$$

Приложенное между анодом и катодом отрицательное напряжение (минус на аноде) создает электрическое поле, тормозящее фотоэлектроны. Отрицательная работа этого поля уменьшает кинетическую энергию фотоэлектронов, покинувших катод. Очевидно, что минимальное напряжение U_{min} , необходимое для того, чтобы электроны не достигли анода, определяется условием

$$\frac{m_e v^2}{2} - eU_{\text{min}} = 0.$$

Тогда окончательно

$$A_{\text{вых}} = h\nu - eU_{\text{min}} = \frac{hc}{\lambda} - eU_{\text{min}} = 3,2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 2 \text{ эВ}.$$

5.15. Энергию светового потока можно представить как произведение энергии кванта света частотой ν , их числа в единицу времени n и времени освещения Δt :

$$W = h\nu n \Delta t.$$

Частота связана с длиной волны света соотношением

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}.$$

Ток насыщения соответствует ситуации, когда все фотоэлектроны достигают анода. Сила этого тока поэтому может быть найдена из простого равенства

$$I_{\text{нас}} = ne$$

(напомним, что, по определению сила тока равна заряду, переносимому в единицу времени). Подставив второе соотношение в первое и выражая оттуда n , находим

$$I_{\text{нас}} = \frac{W\lambda}{hc\Delta t} e \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

5.16. Освещение металлической сферы в ультрафиолетовой области вызывает фотоэффект – поверхность металла покидают

электроны. Определим прежде всего кинетическую энергию электронов непосредственно при вылете с поверхности с помощью уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = \frac{m_e v^2}{2} + A_{\text{вых}}.$$

Здесь ν – частота фотона, $\frac{m_e v^2}{2}$ – кинетическая энергия электрона вблизи поверхности металла. Частота фотона связана с длиной волны и скоростью света в вакууме соотношением

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda}.$$

Очевидно, что при потере электронов сфера заряжается положительно и вылетевшие фотоэлектроны попадают в тормозящее поле самой сферы – отрицательная работа этого поля уменьшает кинетическую энергию фотоэлектронов. Максимальный заряд сферы определяется тем потенциалом сферы φ , который необходим для полного торможения электронов:

$$\frac{m_e v^2}{2} - e\varphi = 0.$$

Потенциал сферы радиусом R , как известно, равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}.$$

С учетом предыдущих равенств получаем окончательный результат:

$$q = \frac{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{hc}{\lambda} - A_{\text{вых}} \right) R}{e} = 2 \cdot 10^{-11} \text{ Кл}.$$

5.17. Кадр диафильма получается на экране резким, если там же формируется его оптическое изображение с помощью объектива проектора. Соответствующие расстояния связаны с фокусным расстоянием линзы объектива по формуле линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{l},$$

где d – расстояние от кадра диафильма до объектива проектора. Оптическая сила линзы по определению есть

$$D = \frac{1}{F}.$$

Увеличение, даваемое линзой, равно

$$k = \frac{l}{d}.$$

Поэтому любой линейный размер объекта окажется при изображении в k раз больше, а площадь ab прямоугольного кадра возрастет в k^2 раз.

Решая совместно полученные уравнения, находим

$$S = (Dl - 1)^2 ab \approx 0,46 \text{ м}^2.$$

5.18. На рисунке 63, частично приведенном в условии, дополнительно введем следующие обозначения: α – угол падения, β – угол преломления, точка A – пересечение границы воды со стенкой бассейна, точка B – место падения светового луча на поверхность воды, точка C – место, где преломленный луч попадает на стенку бассейна.

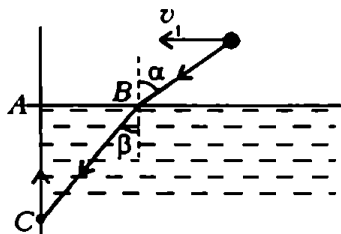


Рис. 63

Ключевым моментом при решении задачи является следующее утверждение: за то время, в течение которого точка B при движении источника пройдет путь BA , точка C пройдет путь CA . Следовательно, при равномерном движении

$$BA = v_1 t, \quad CA = v_2 t, \quad \text{и} \quad \frac{BA}{CA} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Из треугольника ABC видно, что $BA/CA = \operatorname{tg} \beta$. Следовательно,

$$v_2 = \frac{v_1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Значение $\operatorname{tg} \beta$ найдем, воспользовавшись законом преломления

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Отсюда

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Окончательно получим

$$v_2 = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} v_1 \approx 1,2 \text{ м/с}.$$

Очевидно, что пятно движется по стенке вверх.

Задачи заочного тура олимпиады 2001 года

Задача 1. По гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_0 скользит тонкая однородная доска длиной l (рис. 64). С некоторого момента гладкая поверхность становится шероховатой с коэффициентом трения μ , и доска через какое-то время останавливается. Какой путь s пройдет передний конец доски по шероховатому участку поверхности до полной ее остановки? Следует иметь в виду, что в данной ситуации возможны два случая конечного расположения доски по отношению к границе раздела участков поверхности. (5 баллов)¹

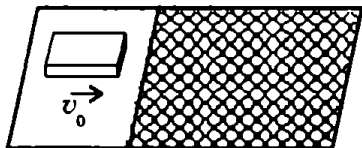


Рис. 64

Решение. Проще всего задача решается с помощью закона сохранения энергии. Кинетическая энергия доски расходуется на работу против силы трения:

$$\frac{mv_0^2}{2} - A_{\text{тр}} = 0.$$

Возможны два случая: 1) доска останавливается до того, как целиком въедет на шероховатый участок; 2) доска останавливается после того, как целиком окажется на шероховатом участке. Пусть x – длина доски, въехавшей на шероховатый участок. Сила трения, тормозящая движение, равна

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \frac{\mu mg}{l} x.$$

Отметим, что $F_{\text{тр}} \sim x$.

Случай 1). Обозначим через s_1 путь, пройденный передним концом доски по шероховатому участку. По закону сохранения

¹ После текста задачи в скобках указаны баллы, соответствующие уровню ее сложности. С условиями проведения олимпиады и критериями оценок можно ознакомиться по телефону 939-26-66.

энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2} - \bar{F}_{\text{тр}} s_1 = 0 ,$$

где $\bar{F}_{\text{тр}}$ – среднее значение силы трения. С учетом линейной зависимости силы трения от координаты можно записать

$$\bar{F}_{\text{тр}} = \mu \frac{mg}{2l} s_1 .$$

Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu \frac{mgs_1^2}{2l} ,$$

откуда получаем

$$s_1 = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} .$$

Очевидно, что этот случай реализуется при $s_1 \leq l$, т.е. при $v_0 \leq \sqrt{\mu gl}$. Потому ответ будет таким:

$$s_1 = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} \quad \text{при} \quad v_0 \leq \sqrt{\mu gl} .$$

Случай 2). Ясно, что этот случай реализуется при $v_0 > \sqrt{\mu gl}$. Обозначим через s_2 путь, пройденный доской, полностью находящейся на шероховатом участке. Полный путь, пройденный передним концом доски до остановки, равен

$$s = l + s_2 .$$

Работа силы трения при этом равна

$$A_{\text{тр}} = \frac{\mu mgl}{2} + \mu mgs_2 .$$

Поэтому закон сохранения энергии запишем в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} - \mu \frac{mg}{2} l - \mu mgs_2 = 0 .$$

Отсюда находим

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{l}{2} .$$

Тогда окончательный ответ для этого случая будет выглядеть так:

$$s_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{l}{2} \quad \text{при} \quad v_0 > \sqrt{\mu gl} .$$

Задача 2. Аэростат сферической формы наполняют водородом, имеющим температуру окружающего воздуха $t = 27^\circ \text{C}$

(при этом атмосферное давление $p = 100$ кПа). Оболочка аэростата сделана из материала, каждый квадратный метр которого имеет массу $m = 0,9$ кг/м². При каком минимальном радиусе оболочки r_{\min} аэростат начнет подниматься? Универсальная газовая постоянная $R = 8300$ Дж/(кмоль · К). Молярная масса воздуха $M_1 = 29$ кг/кмоль, водорода $M_2 = 2$ кг/кмоль. (2 балла)

Решение. На шар действуют сила тяжести оболочки и водорода и сила Архимеда. Для его подъема необходимо выполнение условия

$$F_A \geq (m_0 + m_2)g,$$

где F_A – сила Архимеда, m_0 – масса оболочки и m_2 – масса водорода внутри оболочки. Масса оболочки равна

$$m_0 = mS,$$

а массу водорода внутри шара можно найти из уравнения состояния идеального газа:

$$pV = \frac{m_2}{M_2}RT, \text{ и } m_2 = \frac{pVM_2}{RT}.$$

Плотность окружающего шар воздуха также легко определяется из уравнения состояния:

$$pV = \frac{m_1}{M_1}RT, \text{ и } \rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{pM_1}{RT}.$$

Тогда для силы Архимеда запишем

$$F_A = \rho_1 gV = \frac{pM_1 gV}{RT}.$$

Объем шара $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ и площадь сферической оболочки шара

$S = 4\pi r^2$, где r – радиус шара.

Для минимального радиуса r_{\min}

$$F_A = (m_0 + m_2)g,$$

откуда получаем

$$r_{\min} = \frac{3mRT}{p(M_1 - M_2)} = 2,5 \text{ м}.$$

Задача 3. Одноатомный идеальный газ нагревают так, что его температура изменяется по закону $T = aV^2$. При этом газ расширяется и совершает некоторую работу. Определите КПД такого процесса. (4 балла)

Решение. Подставив $T = aV^2$ в объединенный газовый закон:

$$\frac{pV}{T} = \frac{pV}{aV^2} = \frac{p}{aV} = \text{const},$$

обнаруживаем, что давление в рассматриваемом процессе зависит от объема газа линейно:

$$p = \alpha V, \text{ где } \alpha = \frac{\text{const}}{a}.$$

Для определения КПД процесса надо подсчитать работу A расширяющегося газа и поделить ее на передаваемое при этом газу количество теплоты Q . Работа газа равна

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2} (V_2 - V_1) = \frac{\alpha (V_1 + V_2)}{2} (V_2 - V_1) = \frac{\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

Согласно первому закону термодинамики, переданное газу количество теплоты равно

$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU – изменение внутренней энергии газа. В данном процессе

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2),$$

поэтому

$$Q = \frac{\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2) (1 + 3) = 4 \frac{\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2).$$

Тогда окончательно получим

$$\eta = \frac{\frac{\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2)}{4 \frac{\alpha}{2} (V_2^2 - V_1^2)} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ (или 25\%)}. \quad \square$$

Задача 4. В схеме, представленной на рисунке 65, $R = R^* = 100 \text{ Ом}$, а действующее значение переменного напряжения источника $U_a = 220 \text{ В}$ (бытовая электросеть). Найдите действующее значение силы тока, потребляемого нагрузкой (резистор сопротивлением R^*) от источника. Диод считать идеальным, т.е. пренебречь его сопротивлением при прямом токе и полагать, что обратного тока нет. (4 балла)

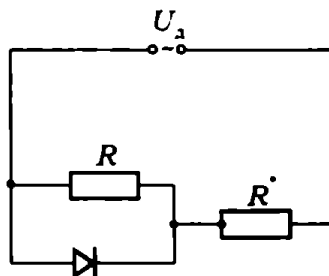


Рис. 65

Решение. По определению, действующее значение силы тока $I_{\text{д}}$ связано с выделяющимся в нагрузке количеством теплоты Q за период T колебаний тока:

$$Q = I_{\text{д}}^2 RT.$$

С другой стороны, это количество теплоты выделяется за время «положительного» и «отрицательного» полупериодов колебаний напряжений источника. В первом случае сила протекающего через резистор сопротивлением R тока равна $\frac{U_{\text{д}}}{R}$, а во втором $\frac{U_{\text{д}}}{2R}$. Поэтому

$$Q = I_{\text{д}}^2 RT = \frac{U_{\text{д}}^2}{R^2} R \frac{T}{2} + \frac{U_{\text{д}}^2}{4R^2} R \frac{T}{2} = \frac{5}{8} \frac{U_{\text{д}}^2}{R^2} RT.$$

Отсюда получаем

$$I_{\text{д}} = \sqrt{\frac{5}{8} \frac{U_{\text{д}}}{R}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \frac{U_{\text{д}}}{R} = 1,74 \text{ А}.$$

Задача 5. Протоны движутся в однородном магнитном поле циклотрона по дуге окружности радиусом $R = 10$ м. При этом поле имеет индукцию $B = 2$ Тл и направлено перпендикулярно плоскости движения частиц. Пучок протонов попадает на заземленную мишень. Найдите силу тока в пучке, если тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, составляет $P = 2$ Вт. Отношение заряда протона к его массе равно $q/m = 10^8$ Кл/кг. (3 балла)

Решение. По второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R} = qvB.$$

Кинетическая энергия каждого протона равна

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2},$$

а тепловая мощность, выделяющаяся в мишени, составляет

$$P = E_{\text{к}} n,$$

где n – число протонов, попадающих на мишень в единицу времени. По определению силы тока,

$$I = nq.$$

Тогда окончательно получаем

$$I = nq = \frac{2P}{mv^2} q = \frac{2P}{m} \frac{m^2}{q^2 B^2 R^2} q = \frac{2P}{B^2 R^2 q/m} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ А}.$$

Задача 6. Ближайшая точка, на которую может быть сфокусирован фотоаппарат, находится на расстоянии $d = 2$ м от объектива. На какое расстояние переместится эта точка, если к объективу вплотную приставить тонкую собирающую линзу с оптической силой $D = +0,5$ дптр? (2 балла)

Решение. Согласно формуле линзы,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = D_0,$$

где f – расстояние от объектива до фотопленки, D_0 – оптическая сила объектива. Если к объективу вплотную приставить данную линзу, то формула линзы примет вид

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f} = D_0 + D,$$

где d_1 – новое расстояние от предмета до фотоаппарата. Вычитая первое равенство из второго, найдем

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d} = D,$$

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{d} + D = \frac{1 + Dd}{d},$$

$$d_1 = \frac{d}{1 + Dd}.$$

Изменение расстояния до предмета будет равно

$$\Delta d = d - d_1 = d \left(1 - \frac{1}{1 + Dd} \right) = \frac{d^2 D}{1 + Dd} = 1 \text{ м}.$$

Итак, точка приблизится к фотоаппарату на 1 м.

Задача 7. Монохроматическая световая волна частотой $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц падает по нормали на тонкую прозрачную пленку. Абсолютный показатель преломления пленки $n = 1,5$. Какой минимальной толщины должна быть пленка, чтобы фаза колебаний в световой волне после прохождения пленки изменилась на $\Delta\varphi = \frac{3}{2}\pi$? (1 балл)

Решение. По определению длины волны,

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{h}{\Delta\varphi},$$

где λ – длина волны в веществе, h – толщина пленки. Длина волны в веществе λ связана с длиной волны в вакууме λ_0 ,

скоростью света c и частотой ν соотношением

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{c}{\nu n}.$$

Отсюда легко находится необходимая толщина пленки:

$$h = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \frac{c}{\nu n} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,3 \text{ мкм}.$$

Задача 8. В модели атома водорода Бора электрон может двигаться по круговой орбите радиусом $R = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ м}$, в центре которой находится протон. Какова при этом скорость электрона? (1 балл)

Решение. По второму закону Ньютона, с учетом закона Кулона, можно записать

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2},$$

или

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{Rm},$$

где m и e – масса и заряд электрона. Отсюда легко выразить искомую величину:

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 Rm}} = \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 Rm}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Задачи заочного тура олимпиады 2002 года

Задача 1. Цепочка массой m симметрично подвешена за концы. Сила натяжения цепочки в нижней точке равна F . Найдите силу натяжения цепочки в точке подвеса. (1 балл)

Решение. Сила натяжения в любой точке цепочки направлена по касательной к ней, т.е. в нижней точке – по горизонтали. Из условия равновесия любого участка цепочки следует, что горизонтальная составляющая силы натяжения везде одинакова и равна F по условию задачи. В точке подвеса каждого из концов цепочки сила натяжения \vec{T} име-

ет также вертикальную составляющую, которая уравнивает силу тяжести, действующую на цепочку (рис.66). Очевидно, что эта составляющая равна $mg/2$. Остается выразить искомую силу натяжения

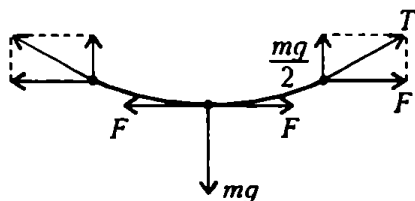


Рис.66

цепочки, исходя из теоремы Пифагора:

$$T = \sqrt{F^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4F^2 + (mg)^2}.$$

Задача 2. Автомобиль массой $m = 2$ т въезжает на паром, прикрепленный к берегу двумя тросами, расстояние между которыми $L = 8$ м. Начальная скорость автомобиля $v_0 = 3,6$ км/ч. При торможении с момента въезда на паром автомобиль остановился, пройдя путь $s = 4$ м. Въезд на паром расположен на расстоянии $l = 2$ м от одного из тросов. Найдите натяжение троса, считая силу торможения постоянной. (2 балла)

Решение. В задаче требуется, очевидно, рассмотреть условия равновесия парома. На паром действуют три силы: две силы натяжения тросов \vec{T}_1 и \vec{T}_2 , а также сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны колес въезжающего автомобиля (рис.67). Отсутствие поступательного движения парома обеспечивается равенством

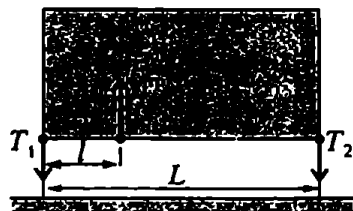


Рис.67

$$F_{\text{тр}} - T_1 - T_2 = 0,$$

тогда как отсутствие вращения обеспечивает выполнение «уравнения моментов», записанное относительно оси, проходящей через точку крепления правого троса:

$$F_{\text{тр}}(L - l) - T_1 L = 0.$$

Сила трения, действующая на паром со стороны автомобиля, равна по третьему закону Ньютона силе, действующей со стороны парома на автомобиль. А она определяет ускорение автомобиля при его торможении:

$$F_{\text{тр}} = ma.$$

С другой стороны, ускорение автомобиля может быть найдено, исходя из кинематического соотношения

$$2as = v_0^2,$$

связывающего перемещение тела s при равнозамедленном торможении от начальной скорости v_0 до остановки.

Из соображений симметрии ясно, что силы натяжения тросов одинаковы по абсолютной величине:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Совместное решение системы полученных уравнений приводит к результату

$$T = \frac{mv_0^2(L-l)}{2sL} \approx 190 \text{ Н}.$$

Задача 3. Колебательная система состоит из двух шариков, прикрепленных к концам невесомой пружины. Если закрепить неподвижно один из шариков, то частота колебаний другого равна ω_2 . При закреплении второго шарика частота колебаний первого равна ω_1 . Найдите частоту колебаний системы, если оба шарика не закреплены. Колебания происходят в горизонтальной плоскости только вдоль пружины. Трение не учитывать. (3 балла)

Решение. Если закрепить один из шариков в рассматриваемой системе, то частота малых колебаний в ней легко находится, исходя из известной формулы частоты колебаний груза массой m на пружине жесткостью k :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В условиях задачи, для каждого из шариков при другом закреплённом получаем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \text{ и } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}.$$

Если же оба шарика не закреплены, то их колебания будут происходить в противофазе при неподвижном положении центра масс системы (этого требует сохранение импульса системы). Расстояния от центра масс до шариков равны

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \text{ и } l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l,$$

где l – общая длина пружины. Рассмотрим колебания шариков относительно центра масс системы. Частоты их колебаний будут равны

$$\omega'_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \text{ и } \omega'_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

где k_1 и k_2 – жесткости пружин, имеющих длины l_1 и l_2 соответственно. Учтя очевидные соотношения $kl = k_1l_1 = k_2l_2$, найдем

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

Совпадение частот ω'_1 и ω'_2 – предсказуемый результат. Это и есть искомая частота ω колебаний системы.

Связь между ω , ω_1 и ω_2 легче всего найти, записав последнее соотношение в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}}.$$

Тогда легко получить

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Задача 4. Удельная теплота парообразования для воды, кипящей при нормальном давлении $p_0 = 10^5$ Па, составляет $r = 539$ кал/г. Оцените, какая часть подведенного количества теплоты расходуется на изменение внутренней энергии воды. (3 балла)

Решение. Пусть к кипящей воде подвели количество теплоты Q , что привело к испарению массы воды m . В соответствии с первым законом термодинамики,

$$Q = \Delta U + A,$$

где ΔU – изменение внутренней энергии, а A – работа, связанная с изменением объема. В условиях кипения,

$$Q = rm \text{ и } A = p_0 (V_{\text{пара}} - V_{\text{воды}}).$$

Вполне очевидно, что после выкипания объем, занимаемый паром, значительно больше объема, изначально занятого водой, поэтому

$$A = p_0 V_{\text{пара}}.$$

Применив для пара уравнение Клапейрона–Менделеева, получим

$$A = \frac{m}{M} RT_{\text{кип}}.$$

Окончательно, требуемая оценка будет такой:

$$x = \frac{\Delta U}{Q} = \frac{Q - A}{Q} = 1 - \frac{A}{Q} = 1 - \frac{mRT_{\text{кип}}}{Mr m} = 1 - \frac{RT_{\text{кип}}}{Mr} = 0,925 \quad (\text{т.е. } 92,5\%).$$

При расчете численного значения учтено, что $1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж}$, $M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$, $T_{\text{кип}} = 373 \text{ К}$.

Задача 5. Конденсатор емкостью $C = 10 \text{ мкФ}$, предварительно заряженный до напряжения $U = 100 \text{ В}$, подключают к батарее с электродвижущей силой $\mathcal{E} = 300 \text{ В}$ через резистор R . Внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо мало. Какое количество теплоты Q выделится на резисторе за время полной

зарядки конденсатора? Рассмотрите два варианта подключения. (3 балла)

Решение. Энергия заряженного конденсатора равна

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

При подключении к конденсатору источника тока в цепи протекает кратковременный ток перезарядки конденсатора до нового напряжения, равного ЭДС источника тока \mathcal{E} . Работа источника равна при этом произведению перенесенного по цепи заряда Δq на ЭДС источника:

$$A = \Delta q \mathcal{E}.$$

Часть этой работы идет на увеличение энергии конденсатора ΔW , а часть – на выделение искомого количества теплоты Q при протекании тока по резистору.

Очевидно, что изменение энергии конденсатора равно

$$\Delta W = \frac{C}{2}(\mathcal{E}^2 - U^2).$$

А работа источника зависит от способа подключения конденсатора к источнику.

Если полярность подключения конденсатора такова, как представлено на рисунке 68,а, то заряд Δq , протекший по цепи

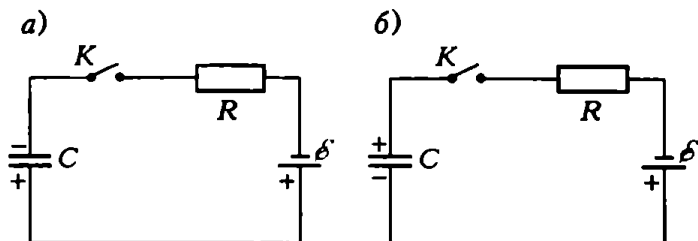


Рис.68

в процессе перезарядки конденсатора, можно найти как разность зарядов на пластинах конденсатора после и до замыкания ключа:

$$\Delta q_1 = C\mathcal{E} - CU = C(\mathcal{E} - U).$$

Тогда искомое количество теплоты в первом случае равно

$$Q_1 = \Delta q_1 \mathcal{E} - \Delta W = C(\mathcal{E} - U)\mathcal{E} - \frac{C}{2}(\mathcal{E}^2 - U^2) = \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U)^2 = 0,2 \text{ Дж}.$$

На рисунке 68,б полярность подключения конденсатора к источнику тока изменена на противоположную. Конечный заряд

на нижней пластине конденсатора, как и в первом случае, будет положительным и равным $C\delta$. Однако по цепи протечет на этот раз больший заряд:

$$\Delta q_2 = C\delta - (-CU) = C(\delta + U).$$

Количество теплоты, выделившееся на резисторе в этом случае, равно

$$Q_2 = \Delta q_2 \delta - \Delta W = C(\delta + U)\delta - \frac{C}{2}(\delta^2 - U^2) = \frac{C}{2}(\delta + U)^2 = 0,8 \text{ Дж}.$$

Задача 6. Вдоль линий индукции однородного магнитного поля из одной точки вылетают электроны со скоростью v , имея малый угловой разброс δ . Определите, на каком расстоянии от места вылета пучок будет иметь минимальный поперечный размер. Индукция магнитного поля B . Масса электрона m , величина заряда e . (4 балла)

Решение. Электрон, скорость которого образует угол δ с направлением магнитного поля \vec{B} , движется по винтовой линии. Разложим вектор скорости электрона на две составляющие

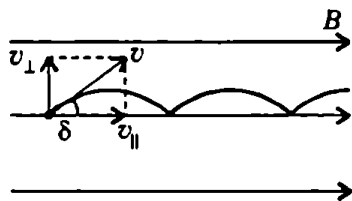


Рис. 69

(рис. 69), направленные вдоль линий магнитной индукции: $v_{\parallel} = v \cos \delta \approx v$ и перпендикулярно к ним: $v_{\perp} = v \sin \delta \approx v\delta$. Период движения электрона по образующей цилиндра равен

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi R}{eBR/m} = \frac{2\pi m}{eB}$$

и, как видно, не зависит ни от скорости электрона, ни от радиуса цилиндра. Шаг винтовой линии составляет

$$L = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{eB} v.$$

Слабо расходящийся из одной точки пучок электронов, пройдя именно это расстояние, сфокусируется практически в одной точке.

Задача 7. Кадр кинофильма высотой $h = 18$ мм проецируется на экран, высота которого $H = 3,6$ м. Объектив проекционного аппарата имеет фокусное расстояние $F = 30$ см. Расстояние от объектива до экрана в зрительном зале $L = 20$ м. Найдите фокусное расстояние линзы, которую следует приставить вплотную к объективу, чтобы резкое изображение кадра заполняло по высоте точно весь экран. (2 балла)

Решение. Оптическая сила системы, состоящей из двух составленных вплотную друг к другу тонких линз (объектив и дополнительная линза, упомянутые в задаче), равна сумме их оптических сил:

$$D = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1},$$

где F_1 – искомое фокусное расстояние приставленной к объективу линзы. Формула линзы дает возможность связать эту величину D с расстояниями от пленки до объектива d и от объектива до экрана L :

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{L}.$$

На рисунке 70 показан ход лучей, определяющих положение и размер оптического изображения кадра пленки на экране. Подобие соответствующих треугольников позволяет записать последнее необходимое для решения задачи соотношение:

$$\frac{L}{d} = \frac{H}{h}.$$

Остается выразить из последнего равенства d и, приравняв правые части первых двух равенств, подставить туда d . Окончательно для фокусного расстояния F_1 получим

$$F_1 = \frac{LhF}{F(H+h) - Lh} = 15 \text{ см.}$$

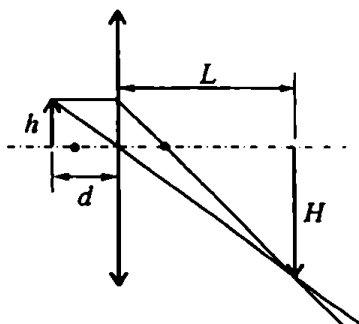


Рис. 70

А.А.Склянкин, А.В.Зотеев

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ НА ХИМИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ МГУ

Редактор *В.А.Тихомирова*

Литературный редактор *Л.В.Кардаевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 69

Подписано к печати 05.02.04. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 8 печ.л.

Тираж 4 600 экз. Заказ 4668.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП «Чеховский полиграфический комбинат»

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536