

И. М. ЯГЛОМ

Проблема тринадцати шаров



И. М. ЯГЛОМ

Проблема тринадцати шаров



БИБЛИОТЕКА ИМУ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
КОЛЛЕДЖ

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство
Киев — 1975

УДК 519.1

Проблема тринадцати шаров. Яглом И. М. Издательское объединение «Вища школа», 1975, 84 с.

В книге в научно-популярной форме изложен ряд вопросов комбинаторной геометрии. Рассматривается проблема тринадцати шаров, интересовавшая еще И. Кеплера и И. Ньютона, а также многие важные результаты комбинаторной геометрии, полученные в последние годы. Обсуждаются нерешенные до настоящего времени задачи и проблемы, которые могут заинтересовать и юных математиков.

Рассчитана на учащихся физико-математических школ. Книгой смогут пользоваться преподаватели математики и учащиеся старших классов общеобразовательных школ.
Ил. 52. Библиогр. 15.

Редакционная коллегия: член-кор. АН УССР А. В. Скороход (ответственный редактор), проф. Л. А. Калужнин, проф. Н. И. Кованцов, доц. В. И. Коба, доц. Н. Я. Ляшенко, доц. Ю. М. Рыжов, доц. М. И. Ядренко (заместитель ответственного редактора), канд. пед. наук Л. В. Кованцова.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией А. С. Макуха

20201—173
Я $\frac{М211(04)—75}{418—75}$

© Издательское объединение «Вища школа», 1975.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Характерные для нашего времени глубокие изменения в математике, частично связанные с появлением электронных цифровых вычислительных машин и с созданием того направления математической мысли, которое обозначается собирательным термином «кибернетика», нашли своеобразное отражение также и в столь, казалось бы, устоявшейся области математической науки как элементарная геометрия. На роль «элементарной геометрии XX века» начинает претендовать лишь недавно созданная *комбинаторная геометрия* изучающая экстремальные геометрические задачи (т. е. задачи на максимум и минимум), связанные с отысканием «самых лучших» (или, во всяком случае, «достаточно хороших») расположений конечного числа точек или фигур. Интерес к комбинаторной геометрии естественно связать с общим интересом к задачам на максимум и минимум, порожденным большим числом чисто прикладных задач, в которых ищутся оптимальные режимы работы отдельных механизмов или больших систем.

Эта книга посвящена комбинаторной геометрии, она рассказывает об одной несложной по формулировке задаче, у истоков которой стоят великие имена Иоганна Кеплера (1571—1630) и Исаака Ньютона (1643—1727).

Наш рассказ о «проблеме 13 шаров» отнюдь не претендует на полноту. Основную роль в нем играют 16 задач, которые тематически связаны одна с другой, но математически довольно независимы, что позволяет читателю просто опускать те из них, которые покажутся ему трудными или недостаточно его заинтересуют. Хочется обратить внимание

читателей на ряд сформулированных не решенных до сих пор задач, некоторые из которых вполне могут стать трамплином для самостоятельной работы в области комбинаторной геометрии.

Отзывы и пожелания о содержании книги просим посылать по адресу: 252054, Киев, 54, Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.

Автор

ЗАДАЧИ О КРУГАХ И ШАРАХ

§ 1. ЗАДАЧА НЬЮТОНА — ГРЕГОРИ

Начнем изложение со следующей задачи:

Задача 1. *Какое наибольшее число кругов на плоскости можно приложить к равному им кругу K_r так, чтобы никакие два из них не пересекались (но все они соприкасались с границей круга K_r , не пересекая его)?*

Решение. Если круг K_{r_1} приложен к равному ему кругу K_r , то он виден из центра O круга K_r под углом $\varphi = 60^\circ$. Другими словами, проведенные из центра O к кругу K_{r_1} касательные OM и ON образуют угол $MON = 60^\circ$ (рис. 1, а). Примем радиус r круга K_r за 1. Так как касательные, проведенные из точки O к любому другому приложенному к K_r кругу K_{r_2} радиуса 1, не пересекающему круга K_{r_1} , будут проходить в не угла MON , то всем приложенным к K_r *непересекающимся* кругам того же радиуса 1 будут соответствовать *неперекрывающиеся* углы с общей вершиной O , каждый из которых будет равен 60° . Поэтому к кругу K_r можно приложить не более, чем

$$360^\circ : 60^\circ = 6$$

равных K_r кругов, удовлетворяющих условию задачи (рис. 1, б).

Задаче 1 родственна такая задача:

Задача 2. *Какое наибольшее число материальных (непересекающихся) шаров можно приложить к равному им шару Π так, чтобы все они своей поверхностью соприкасались с поверхностью шара Π , не пересекая его?*

Попробуем эту задачу решить так же, как и задачу 1.

Пусть единичный шар \mathcal{W}_1 , т. е. шар, радиус R которого равен 1, соприкасается с равным ему шаром \mathcal{W} (рис. 2, а); тогда шар \mathcal{W}_1 виден из центра O шара \mathcal{W} под «пространственным углом» φ , измеряемым величиной «сферического сектора» (или «сферической шапочки») σ , гысекаемой из

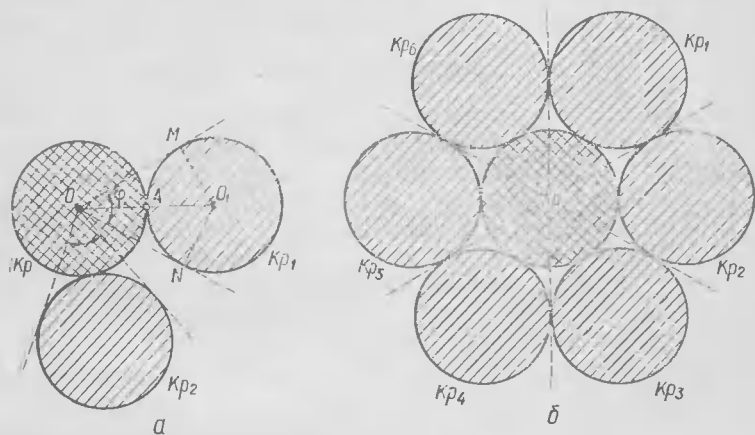


Рис. 1

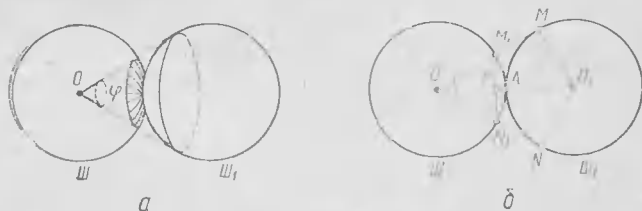


Рис. 2

сферы шара \mathcal{W} конусом касательных, проведенных к шару \mathcal{W}_1 из точки O . А так как гысота $AP = h$ «шапочки» σ (рис. 2, б) равна:

$$h = 1 - \cos 30^\circ = 1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} = 0,134 \dots,$$

то отношение поверхности шара $Ш$ к поверхности «шапочки» σ равно

$$2 : 0,134 \dots = 14,9 \dots$$

Но *непересекающимся* шарам $Ш_1, Ш_2, Ш_3, \dots$, приложенным к шару $Ш$, должны соответствовать *неперекрывающиеся* «шапочки» $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$; поэтому ясно, что *больше 14 (материальных) шаров, равных шару $Ш$, к этому шару приложить нельзя.*

А сколько же материальных шаров, равных шару $Ш$, можно приложить к нему? Нетрудно сообразить, что к $Ш$ можно приложить 12 равных ему шаров. В самом деле, пусть шар $Ш$ лежит на горизонтальной плоскости; приложим к нему 6 равных ему шаров (рис. 3). При этом сверху и снизу от шара $Ш$ образуется по шесть выемок. Положим теперь в три несмежные из шести верхних выемок 3 равных шару $Ш$ шара так, чтобы каждый из них касался трех нижних шаров — в том числе и шара $Ш$ (рис. 4, а). Если, далее, расположить подобным образом еще 3 шара снизу от $Ш$, то $Ш$ окажется окруженным 12 равными ему шарами, каждый из которых касается $Ш$; при этом 3 шара снизу от $Ш$ можно даже приложить двумя различными способами: в выемки, расположенные точно под занятыми верхними шарами выемками (рис. 4, б), или в три другие выемки (рис. 4, в). Подобное расположение тринадцати равных шаров впервые описано в 1611 г. одним из создателей современной астрономии и математики знаменитым Иоганном Кеплером; однако практически складывали таким образом одинаковые шары (образовывая из них «пирамиду»), вероятно, и ранее того времени, хотя бильiardных

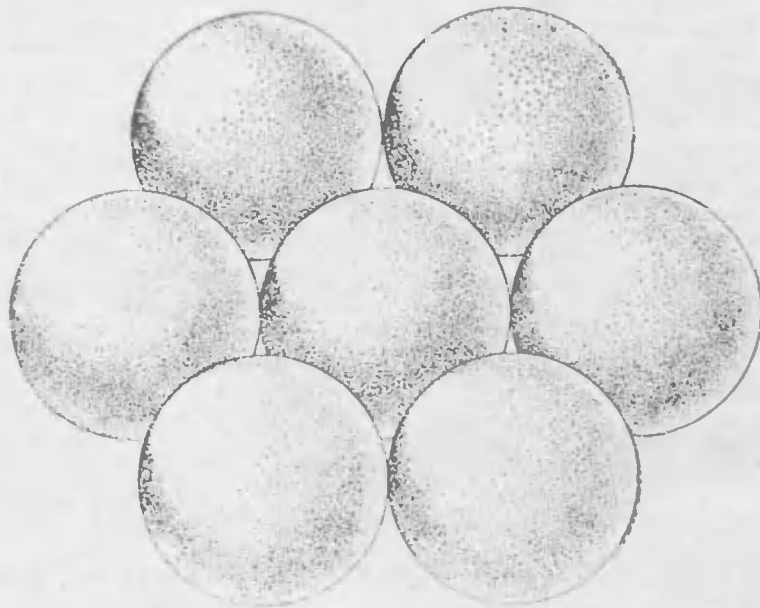


Рис. 3

При этом сверху и снизу от шара $Ш$ образуется по шесть выемок. Положим теперь в три несмежные из шести верхних выемок 3 равных шару $Ш$ шара так, чтобы каждый из них касался трех нижних шаров — в том числе и шара $Ш$ (рис. 4, а). Если, далее, расположить подобным образом еще 3 шара снизу от $Ш$, то $Ш$ окажется окруженным 12 равными ему шарами, каждый из которых касается $Ш$; при этом 3 шара снизу от $Ш$ можно даже приложить двумя различными способами: в выемки, расположенные точно под занятыми верхними шарами выемками (рис. 4, б), или в три другие выемки (рис. 4, в). Подобное расположение тринадцати равных шаров впервые описано в 1611 г. одним из создателей современной астрономии и математики знаменитым Иоганном Кеплером; однако практически складывали таким образом одинаковые шары (образовывая из них «пирамиду»), вероятно, и ранее того времени, хотя бильiardных

или крокетных шаров (не говоря уж о подшипниках!) в те годы, разумеется, еще не было и даже круглые пушечные ядра были тогда в новинку.

Таким образом, если обозначить *наибольшее возможное число материальных шаров, которые можно приложить*

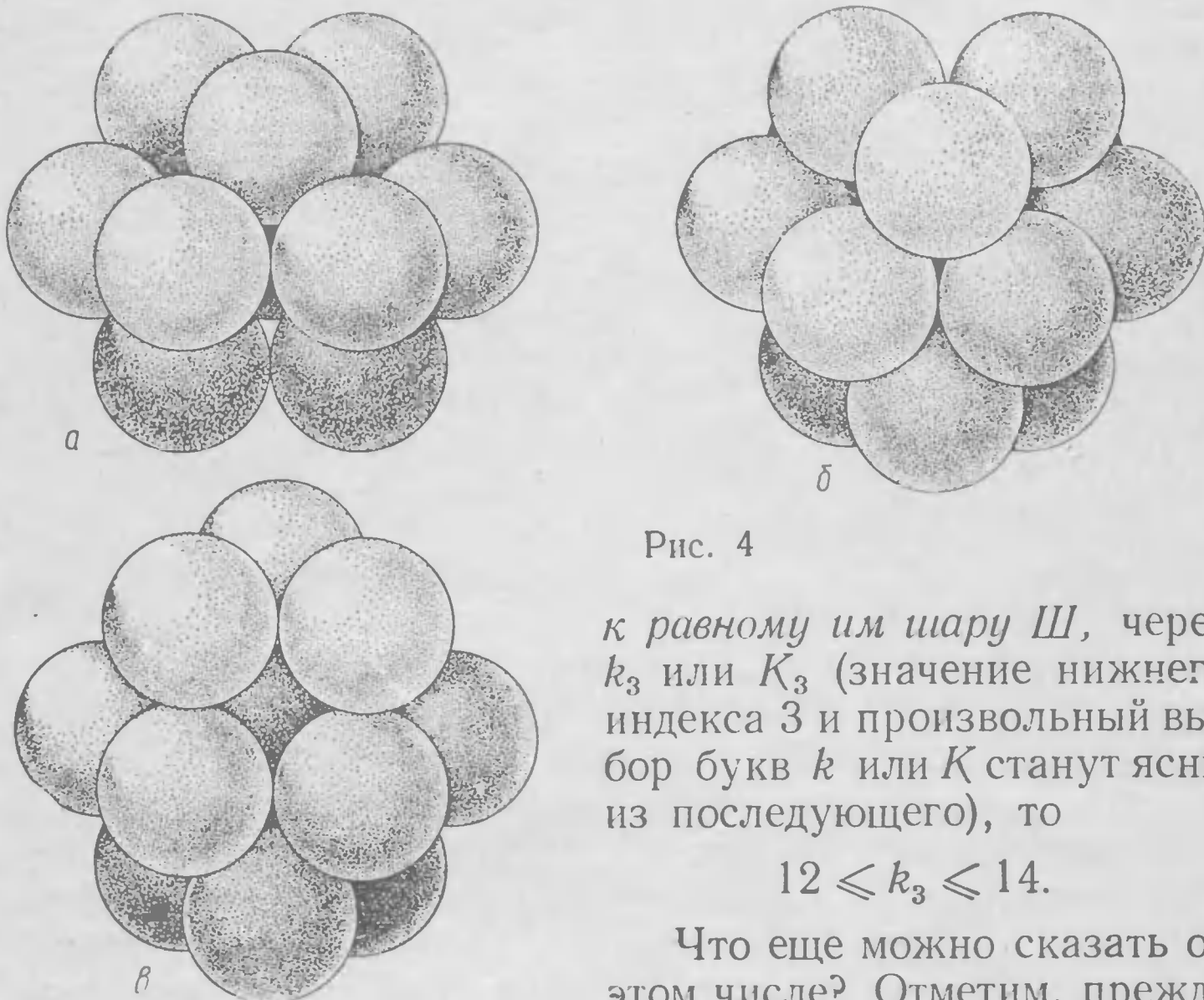


Рис. 4

к равному им шару \mathcal{M} , через k_3 или K_3 (значение нижнего индекса 3 и произвольный выбор букв k или K станут ясны из последующего), то

$$12 \leq k_3 \leq 14.$$

Что еще можно сказать об этом числе? Отметим, прежде всего, что число k_3 не может быть равно 14! Доказательство этого утверждения помещено в следующем параграфе.

Итак, можно утверждать, что

$$12 \leq k_3 \leq 13.$$

Но какое из этих двух значений имеет в действительности число k_3 ? Поставленный вопрос не является простым.

В 1694 г. по этому вопросу разгорелась даже довольно оживленная полемика: известный естествоиспытатель того

времени Дэвид Грегори утверждал, что к шару можно приложить 13 равных ему материальных шаров, а гениальный Исаак Ньютон — что нельзя, но доказать свою правоту, т. е. точно определить число k_3 ни одному из них не удалось. Первым, кому удалось решить эту задачу, а именно доказать гипотезу Ньютона, утверждающую, что

$$k_3 = 12 \quad (1)$$

был немецкий геометр Рудольф Гоппе; об этом сообщается в статье его соотечественника К. Бендера, опубликованной в 1874 г., т. е. через 180 лет после дискуссии Ньютон — Грегори. Годом позже доказательство Р. Гоппе усовершенствовал другой немецкий геометр С. Гюнттер; однако оно все еще оставалось очень сложным и запутанным. Многие специалисты, например, известный венгерский геометр Ласло Фейеш Тот, считают даже, что первое безупречное доказательство равенства (1) (первое решение задачи 2) дали в 1953 г. (через 342 г. после того, как И. Кеплер доказал, что $k_3 \geq 12$ и через 259 лет после дискуссии Ньютона с Грегори) один из крупнейших алгебраистов XX века голландец Бартель Леенберт ван дер Варден и выдающийся немецкий логик Карл Шютте. Еще более простое доказательство того, что к шару нельзя приложить 13 равных ему материальных шаров предложил в 1956 г. англичанин Джон Лиш — однако и это доказательство является довольно сложным.

С проблемой 13 шаров тесно связана задача о самой плотной укладке равных кругов на плоскости и равных шаров в пространстве. Эта задача, открывшая новый большой раздел геометрии, называемый дискретной геометрией, вызывает сегодня очень большой интерес в силу обнаруженных за последние десятилетия неожиданных важных приложений ее «многомерного варианта» к вычислительной математике и теории связи.

Предположим, что плоскость заполнена непересекающимися равными кругами; составим отношение суммарной

площади тех кругов, которые целиком помещаются внутри круга Σ большого радиуса R , с центром в произвольной точке O плоскости) к площади πR^2 этого круга. Предел, к которому стремится это отношение при $R \rightarrow \infty$, называется *плотностью* рассмотренного расположения (укладки) равных кругов на плоскости; задача заключается

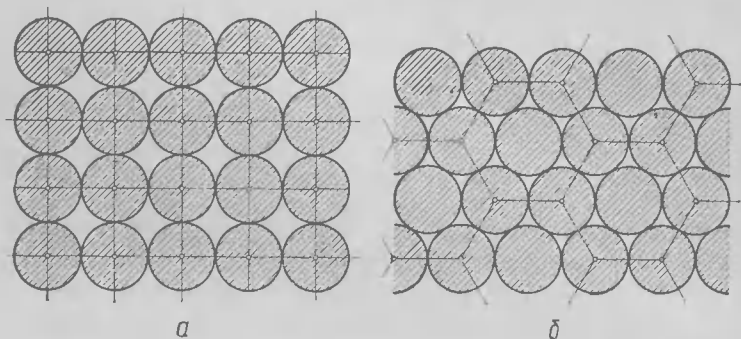


Рис. 5

в том, чтобы найти ту укладку кругов, плотность которой является самой большой из всех возможных. Аналогично формулируется и задача о самой плотной укладке равных шаров в пространстве.

В замечательном трактате «О снежинке, или новогодний дар», составленном И. Кеплером в качестве подарка его другу королевскому советнику Вакгеру фон Вакгенфельсу по случаю наступления нового, 1611 года, были разобраны две укладки равных кругов на плоскости: в первой из них (рис. 5, а) центры кругов образуют сетку равных квадратов и каждый круг касается *четырёх* соседних с ним, а во второй (рис. 5, б) — центры кругов образуют сетку правильных шестиугольников, и каждый круг касается *шести* соседних с ним. И. Кеплер считал, что вторая укладка шаров является наиболее плотной из всех возможных. Действительно, в то время как плотность первой

укладки $\frac{\pi}{4} \approx 78,54\%$, плотность второй укладки больше:

она равна $\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 90,69\%$. Далее, в том же трактате

Кеплер рассматривает вопрос об укладке равных шаров в пространстве. Самая плотная из таких упаковок получается следующим образом: на плоскости по схеме рис. 5, б укладываются равные круги, являющиеся «экваториальными кругами» равных шаров; при этом образуется «шестиугольный слой» шаров, в котором каждый шар касается шести соседних. Затем второй, такой же слой шаров, накладывается сверху на первый так, что шары верхнего слоя попадают в выемки шаров нижнего слоя, касаясь трех из нижних шаров (ср. рис. 4, а). Если затем продолжать накладывать таким же образом подобные слои шаров сверху и снизу от уже имеющихся, то получим заполнение всего пространства равными шарами, где каждый шар будет касаться *двенадцати* соседних с ним. Заметим, что поскольку каждый слой можно наложить на уже имеющийся д в у м я способами (ср. рис. 4, б и в), то фактически получается *бесконечно много* разных систем заполнений пространства равными шарами; однако, все эти укладки шаров имеют, очевидно, одинаковую плотность. Эта плотность равна $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 74,05\%$.

С тех пор как Кеплер опубликовал свой трактат, прошло уже более 360 лет. За это время было предложено много различных упаковок равных кругов на плоскости и шаров в пространстве, и никто никогда не сомневался, что найденные Кеплером укладки являются самыми плотными,— по доказать это оказалось вовсе не просто. Считают, что доказательство того, что изображенная на рис. 5, б схема укладки равных кругов является самой плотной, впервые дал в 1892 г. выдающийся норвежский математик, один из основателей геометрических методов в теории чисел Адольф Т у э. Однако оригинальное доказательство А. Туэ

не было опубликовано. Краткое резюме доклада на эту тему, прочитанного А. Туэ в 1892 г. на конгрессе математиков скандинавских стран, содержит существенные и трудно восполнимые пробелы. Более убедительным является другое доказательство того же факта, опубликованное А. Туэ в 1910 г., — но и это доказательство вряд ли может удовлетворить современным требованиям математической строгости. Полные доказательства соответствующего предложения (иногда называемого «теоремой Туэ») были даны в 1940 г. уже упоминавшимся выше Ласло Фейешем Тотом и, независимо от него, в 1944 г. — известными специалистами по геометрическим методам в теории чисел итальянским математиком Беньямино Сегре и немецким математиком Куртом Малером. Несколько доказательств этой теоремы приведены в книге Л. Фейеша Тотта [8] (см. литературу на стр. 84).

Несмотря на всеобщее убеждение о том, что *в пространстве не существует укладки равных шаров, плотность которых превосходила бы $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$* , доказать это пока не удалось никому. Не решены также и многомерные аналогии соответствующей задачи, при этом не найдена даже величина плотности самой лучшей укладки (или нескольких самых лучших упаковок) равных (многомерных) шаров.

§ 2. ТЕОРЕМА О ЧЕТЫРНАДЦАТИ ШАРАХ

Докажем следующую теорему:

Теорема 1 (теорема о 14 шарах). К данному материальному шару \mathcal{S} нельзя приложить более 13 равных ему материальных (не пересекающихся между собой и не пересекающихся шар \mathcal{S}) шаров.

Доказательство. Воспользуемся методом «от противного». Предположим, что к шару \mathcal{S} радиуса 1 с центром O удалось приложить четырнадцать равных шару \mathcal{S} материальных шаров $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{14}$. Центры

этих шаров обозначим через Q_1, Q_2, \dots, Q_{14} , а точки пересечения отрезков $OQ_1, OQ_2, \dots, OQ_{14}$ с ограничивающей шар \mathcal{W} сферой $S\mathcal{f}$ (т. е. точки касания шаров \mathcal{W} и $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}$ и $\mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}$ и \mathcal{W}_{14}) — через A_1, A_2, \dots, A_{14} . Так как точки Q_i и Q_j (номера i и j могут принимать любое из значе-

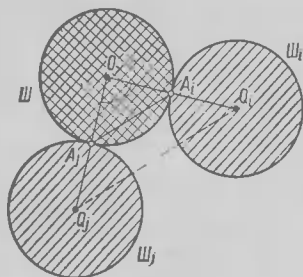


Рис. 6

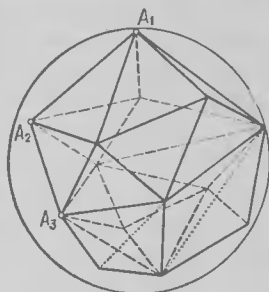


Рис. 7

ний $1, 2, \dots, 14; i \neq j$) — центры непересекающихся с \mathcal{W} шаров единичного радиуса, то $Q_i Q_j \geq 2$; поэтому $A_i A_j \geq 1$ и следовательно $\sphericalangle A_i A_j$ «большой окружности» сферы $S\mathcal{f}$, высекаемой из $S\mathcal{f}$ плоскостью, должна быть больше или равной 60° (ср. рис. 6 с рис. 1, а).

Будем считать, что точки A_1, A_2, \dots, A_{14} не принадлежат одной полусфере сферы $S\mathcal{f}$ (ниже мы покажем, что даже на полной сфере $S\mathcal{f}$ нельзя расположить четырнадцать точек так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было больше или равно 1). «Натянем» на точки A_1, A_2, \dots, A_{14} выпуклый многогранник (рис. 7), т. е. рассмотрим выпуклую оболочку наших четырнадцати точек. Наглядно ее можно представить себе как тело, ограниченное охватывающей A_1, A_2, \dots, A_{14} резиновой пленкой, которая стягивается, стремясь уменьшить свою поверхность, однако не может сдвинуть «колышки» A_1, A_2, \dots, A_{14} . Разумеется, не все грани многогранника M будут треугольниками; если это так, то каждую (выпуклую) грань многогранника M можно

разбить на треугольники диагоналями, проходящими через одну из ее вершин. Тогда получим выпуклый многогранник \bar{M} , вписанный в сферу $S\phi$, все грани которого будут треугольниками (вообще говоря, многогранник \bar{M} является «вырожденным», т. е. некоторые из соседних его граней лежат в одной плоскости).

Воспользуемся теперь теоремой Эйлера:
для каждого выпуклого многогранника

$$B - P + \Gamma = 2, \quad (2)$$

где B , P и Γ — соответственно число вершин, ребер и граней многогранника (доказательство этой теоремы см. на стр. 72—73).

В рассматриваемом случае $B = 14$, а так как каждая из Γ граней многогранника \bar{M} имеет по три ребра и каждое ребро при таком счете «по граням» учитывается дважды (ибо оно разделяет две грани), то

$$P = \frac{3}{2} \Gamma.$$

Подставляя эти значения в формулу (2), получаем

$$14 - \frac{3}{2} \Gamma + \Gamma = 2 \text{ или } \Gamma = 24 \text{ и, следовательно,}$$

$$P = \frac{3}{2} \Gamma = 36.$$

Пусть теперь $A_l A_m A_n$ (l, m, n — какие-то конкретные номера; $1 \leq l, m, n \leq 14$) — произвольная грань многогранника \bar{M} . Мы знаем, что $A_l A_m \geq 1$, $A_m A_n \geq 1$, $A_n A_l \geq 1$. Опишем вокруг треугольника $A_l A_m A_n$ окружность s (рис. 8, а) — эта окружность будет линией пересечения плоскости $A_l A_m A_n$ со сферой $S\phi$. Хотя бы одна из сторон треугольника $A_l A_m A_n$ будет стягивать дугу, не большую 120° . Но если $\sphericalangle A_l A_m \leq 120^\circ$, а $A_l A_m \geq 1$, то обозначая

середину хорды $A_l A_m$ через P , а центр и радиус окружности s соответственно через Q и ρ , получим:

$$\frac{1}{2} : \rho \leq A_l P : \rho = \sin \angle A_l Q P \leq \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$\rho \geq \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 \dots$$

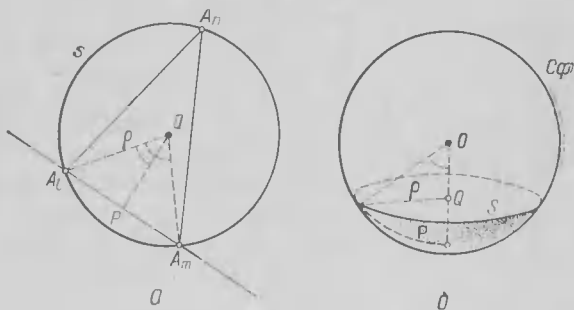


Рис. 8

Таким образом, для радиуса ρ окружности, описанной около любой из двадцати четырех граней многогранника \bar{M} , имеем

$$\rho \geq \rho_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 \dots,$$

откуда вытекает, что сферический радиус P окружности s сферы $S\phi$ равен (рис. 8, б)

$$P = \arcsin \rho \geq P_0 = \arcsin \rho_0 = \arcsin 0,577 \dots \approx 35^\circ 16'.$$

Поэтому площадь S ограниченного окружностью s сферического круга σ («шапочки» высотой $1 - \cos P$) будет

$$\begin{aligned} S &= (1 - \cos P) \cdot \frac{\Sigma}{2} \geq S_0 = (1 - \cos P_0) \cdot \frac{\Sigma}{2} \approx \\ &\approx (1 - \cos 35^\circ 16') \cdot \frac{\Sigma}{2} > 0,092\Sigma, \end{aligned}$$

где $\Sigma = 4\pi = 12,56 \dots$ — площадь всей сферы $S\phi$.

Опишем теперь около каждой из точек A_1, A_2, \dots, A_{14} сферические круги («шапочки») $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$ одного и того же сферического радиуса $R_0 \approx 35^\circ 16'$ и одной площади $S_0 > 0,092\Sigma$. Оценим площадь части сферы $S\phi$, покрытую

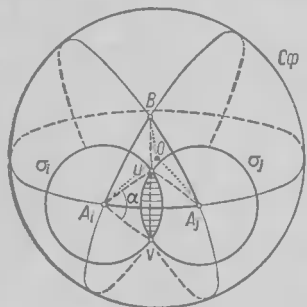


Рис. 9

всеми этими «шапочками». Отметим, прежде всего, что *никакие три из «шапочек»* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$ не пересекаются. Действительно, если бы «шапочки» $\sigma_i, \sigma_m, \sigma_n$ имели бы общую (внутреннюю) точку Z , то круг сферического радиуса R_0 с центром Z покрыв бы точки A_i, A_m и A_n ; следовательно, сферический радиус описанной вокруг треугольника $A_i A_m A_n$ окружности был бы *меньше* R_0 — что противоречит доказанному ранее.

Поэтому «шапочки» $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$ перекрываются *не более, чем по две*, и вся покрытая ими площадь равна

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{14} - S_{1,2} - S_{1,3} - \dots - S_{13,14},$$

где S_1, S_2, \dots, S_{14} — соответственно площади «шапочек» $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$, а $S_{i,j}$ (i и j — какие-то из номеров $1, 2, \dots, 14$) обозначает площадь *пересечения* «шапочек» σ_i и σ_j . (Разумеется, что если «шапочки» σ_i и σ_j не пересекаются, то величина $S_{i,j}$ равна нулю.)

Так как все величины S_i (где $i = 1, 2, \dots, 14$) по условию равны $S_0 > 0,092\Sigma$, то остается только оценить величины $S_{i,j}$. Если «шапочки» σ_i и σ_j пересекаются (рис. 9), то их пересечение представляет собой некоторую «линзу» L . Площадь этой линзы будет тем больше, чем меньше расстояние $A_i A_j$. Но $A_i A_j \geq 1$ (или $\sphericalangle A_i A_j \geq 60^\circ$); поэтому площадь каждой линзы L не больше площади изображенной на рис. 9 линзы L_0 с хордой UV , для которой

$$A_i A_j = 1.$$

Линза L_0 состоит из двух равных сферических сегментов, отсекаемых от сферических кругов σ_i , σ_j сферической хордой UV (т. е. дугой UV большой окружности сферы $S\phi$, образуемой при пересечении $S\phi$ плоскостью OUV). Найдем площадь каждого из этих сегментов. Обозначим через α радианную меру сферического центрального угла UA_iV сектора A_iUV круга σ_i , т. е. угол между дугами A_iU и A_iV больших окружностей, образуемых при пересечении сферы $S\phi$ плоскостями OA_iU и OA_iV (точнее — угол между касательными к этим окружностям в точке A_i). Тогда площадь сектора A_iUV равна $\frac{\alpha}{2\pi}S_0$, так как отношение площади этого сектора к площади S_0 «шапочки» σ_i равно отношению $\alpha : 2\pi$ (центрального угла α сектора к полному углу 2π). С другой стороны, площадь сферического треугольника A_iUV , ограниченного дугами A_iU , A_iV , UV больших окружностей, равна

$$\text{пл. } A_iUV = \angle A_i + \angle U + \angle V - \pi,$$

где $\angle A_i$, $\angle U$, $\angle V$ — сферические углы этого треугольника, измеренные в радианной мере (ср. стр. 68). Но $\angle U = \frac{\pi}{3}$, поскольку точку U можно принять за центр окружности, описанной около равностороннего сферического треугольника A_iA_jB со стороной A_iA_j (напомним, что радиус окружности, описанной около равностороннего сферического треугольничка со стороной $\sphericalangle A_iA_i = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ равен $R_0 = \sphericalangle A_iU = \sphericalangle A_jU$). Далее,

$$\angle A_iUA_i = \angle A_iUB = \angle BUA_i \left(= \frac{2\pi}{3} \right).$$

Точно так же и

$$\angle V = \angle U = \frac{\pi}{3},$$

а так как $\angle A_i = \alpha$, то

$$\text{пл. } A_iUV = \alpha + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \pi = \alpha - \frac{\pi}{3}$$

и

$$\begin{aligned} \text{пл сегм.} &= \text{пл. сект } A_iUV - \text{пл. } \triangle A_iUV = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} S_0 - \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{пл линзы } L_0 = 2 \text{ пл сегм.} = \frac{\alpha}{\pi} S_0 - \left(2\alpha - \frac{2\pi}{3} \right).$$

Теперь определим величину угла α . Из рис. 9 следует, что

$$\alpha = \angle U A_i V = 2 \angle U A_i A_j = \angle B A_i A_j.$$

Другими словами, α — это угол равностороннего сферического треугольника $A_i A_j B$ со сторонами $\sphericalangle A_i A_j = \sphericalangle A_i B = \sphericalangle A_j B = \frac{\pi}{3}$. Так как $\angle A_i O A_j = \angle A_i O B = \angle A_j O B = \frac{\pi}{3}$, то четыре точки A_i, A_j, B и O являются вершинами правильного тетраэдра с ребром, равным 1 (т. е. треугольной пирамиды, все ребра которой имеют одну и ту же длину, равную 1). Но $\angle B A_i A_j = \alpha$ — это угол между касательными к дугам $A_i B$ и $A_i A_j$ в точке A_i , т. е. угол между перпендикулярами $A_i b$ и $A_i a_j$ к ребру $O A_i$ правильного тетраэдра $A_i A_j B O$, проведенными в точке A_i и лежащими в плоскостях $O A_i B$ и $O A_i A_j$, или двугранный угол правильного тетраэдра — угол между его гранями $O A_i B$ и $O A_i A_j$. Отсюда следует, что

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 \dots,$$

(см. стр. 73), и, следовательно,

$$\frac{\alpha}{2} < 35^\circ 16', \quad \alpha < 70^\circ 32' < 1,227 \text{ (рад)} \text{ (но } \alpha > 1,226).$$

Таким образом, имеем:

$$\text{пл. } S_{i,j} = \text{пл. линзы } L \leq \text{пл. линзы } L_0 =$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} S_0 - 2\alpha + \frac{2}{3} \pi < \frac{1,227}{3,14} 0,092\Sigma - 2 \cdot 1,226 + \\ + \frac{1}{6} \Sigma < 0,005\Sigma,$$

где $\Sigma = 4\pi$ обозначает поверхность сферы $S\phi$.

Отметим теперь, что число попарных пересечений «шапочек» $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$ не превосходит числа пар «соседних» точек среди вершин A_1, A_2, \dots, A_{14} многогранника M , т. е. не превосходит числа $P = 36$ ребер этого многогранника. Поэтому общая площадь, покрытая кругами $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{14}$ должна быть не меньше, чем

$$14S_0 - 36 \text{ пл. } L_0 > 14 \cdot 0,092\Sigma - 36 \cdot 0,005\Sigma > 1,1\Sigma,$$

т. е. эта площадь оказалась больше площади Σ всей сферы! Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы, т. е. неравенство

$$k_3 < 14$$

§ 3. ЗАДАЧА О ШАРАХ В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотренные задачи 1 и 2 допускают целый ряд вариантов и обобщений. Одно из первых обобщений связано с очень важным понятием n -мерного евклидова пространства¹⁾. Хорошо известно, что содержание школьной планиметрии, следуя идеям Рене Декарта (1596—1650) и Пьера Ферма (1601—1665), можно охарактеризовать так:

условимся сопоставлять каждой точке A плоскости ее декартовы прямоугольные координаты (x, y) ; при этом множество точек плоскости можно будет отождествить с множеством пар вещественных чисел (x, y) . Расстоя-

¹⁾ См.: Б. А. Розенфельд, П. М. Яглом. Многомерные пространства. Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. V, «Геометрия», М., «Наука», 1966, с. 349—393.

и е AB между точками $A(x, y)$ и $B(x_1, y_1)$, очевидно, равно (рис. 10):

$$AB = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \quad (3)$$

Фигуры (множества точек — в используемом нами здесь языке *аналитической геометрии* под множеством точек понимается множество пар чисел) F и F' называются равными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие так, что расстояния между

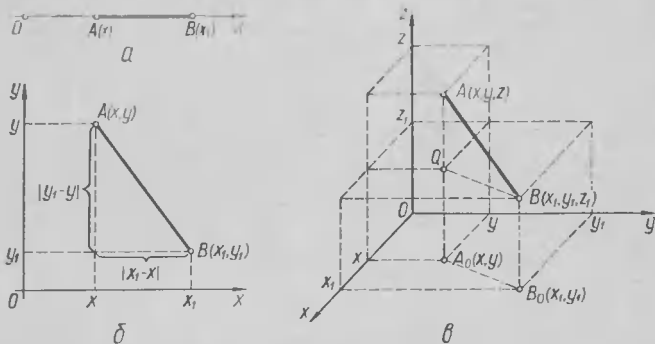


Рис 10

соответствующими парами точек равны: пусть точкам A и B фигуры F отвечают точки A' и B' фигуры F' , тогда $AB = A'B'$. Предмет геометрии можно теперь описать как изучение свойств фигур плоскости, где равные фигуры считаются «одинаковыми», т. е. обладающими одинаковыми геометрическими свойствами, или как еще говорят, планиметрия изучает свойства плоских фигур, «заданных с точностью до замены фигуры равной ей».

Аналогично определению декартовых прямоугольных координат на плоскости можно ввести и координаты (x, y, z) точки A пространства, при этом расстояние AB между точками $A(x, y, z)$ и $B(x_1, y_1, z_1)$ пространства будет равно (рис. 10):

$$AB = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} \quad (4)$$

Равенство фигур в пространстве определяется теперь так же, как в случае плоских фигур; содержание же стереометрии составляет *изучение геометрических свойств фигур в пространстве.*

Отметим также, что аналогично можно описать предмет «геометрии прямой»: для этого достаточно сопоставить точкам прямой их координаты (т. е. числа) x и определить расстояние AB между точками $A(x)$ и $B(x_1)$ прямой по формуле, аналогичной формулам (3) и (4) (рис. 10):

$$AB = \sqrt{(x_1 - x)^2} = |x_1 - x|. \quad (5)$$

Так как каждая фигура имеет на прямой единственное измерение (длину a), на плоскости — два измерения (длину a и ширину b), в пространстве — три измерения (длину a , ширину b и высоту c), то геометрию на прямой часто называют «одномерной геометрией», геометрию на плоскости (планиметрию) — «двумерной геометрией», а геометрию в пространстве (стереометрию) — «трехмерной геометрией». Естественным обобщением всех этих понятий является понятие *n -мерного пространства*, точки которого понимаются как *упорядоченные наборы n чисел* (x_1, x_2, \dots, x_n) — координат этих точек. Таким образом, каждый раз, когда мы имеем множество каких-либо объектов, характеризуемых заданием n чисел, то можно говорить об « n -мерном пространстве» этих объектов. Так, например, физики часто говорят о *четырёхмерном «множестве (мире) событий»*, или (четырёхмерном) «пространстве-времени», элементы которого, называемые событиями, характеризуются четырьмя числами (x, y, z, t) , где первые три числа (x, y, z) указывают место события, а координата t — его время. Другим примером многомерного пространства, постоянно используемого физиками, является так называемое *фазовое пространство*, отвечающее движущимся материальным точкам: точка шестимерного фазового пространства характеризуется шестью числами (x, y, z, x', y', z') , где x, y, z —

это координаты движущейся материальной точки, а x' , y' , z' — ее скорости (в направлениях осей O_x , O_y и O_z соответственно). Аналогично этому геометры говорят о четырехмерном «пространстве сфер», каждая «точка» S которого (сфера) характеризуется четырьмя координатами (x, y, z, ρ) , где $Q(x, y, z)$ центр сферы S , а ρ — ее радиус или о (четырёхмерном) «пространстве прямых», где за координаты (x, y, y_1, z) прямой AB можно принять координаты точек $A(x, y)$ и $B(y_1, z)$ ее пересечения с плоскостями xOy и yOz (координаты прямых, параллельных одной из этих плоскостей, здесь приходится вводить особо).

Введем теперь в n -мерном пространстве «метрику», определив расстояние AB между точками $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ формулой

$$AB = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}. \quad (6)$$

Это определение имеет тот смысл, что равенство нулю расстояния AB здесь означает, что $y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$, т. е. что A и B — одна и та же точка; малость же расстояния AB означает, что все разности $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n$ по абсолютной величине малы, т. е. «точки» $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ «близки» в том смысле, что им отвечают близкие значения всех координат¹⁾. n -мерное пространство с определенным по формуле (6) расстоянием между точками называется евклидовым пространством (n -мерным). Две фигуры F и F' евклидоваго и n -мерного пространства — т. е. два множества «точек» или упорядоченных наборов n чисел — называются равными, если между точками фигур F и F' можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что расстояния между соответствующими парами точек этих фигур будут одинаковы: если точкам A и B фигу-

¹⁾ Так, например, «близость» в четырехмерном пространстве сфер двух сфер $S(x, y, z, \rho)$ и $S_1(x_1, y_1, z_1, \rho_1)$ означает, что центры $Q(x, y, z)$ и $Q_1(x_1, y_1, z_1)$ близки друг к другу в пространстве и радиусы ρ и ρ_1 сфер мало отличаются друг от друга.

ры F соответствуют точки A' и B' фигуры F' , то $AB \equiv A'B'$. Наконец, предметом евклидовой геометрии n -мерного пространства (или n -мерной евклидовой геометрии) является изучение геометрических (одних

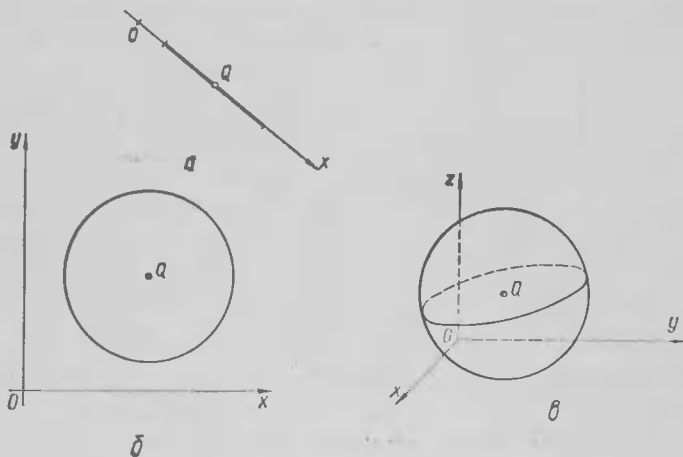


Рис. 11

и тех же у любых двух равных фигур) свойств фигур n -мерного евклидового пространства.

Отметим еще, что в числе основных геометрических образов n -мерной евклидовой геометрии входит n -мерный шар с центром Q и радиусом r , т. е. множество всех таких точек n -мерного пространства, для которых

$$QA \leq r.$$

Ясно, что «одномерный шар» представляет собой не что иное как отрезок со серединой Q (рис. 11, а), «двумерный шар» — это круг (рис. 11, б), а «трехмерный шар» — обыкновенный шар (рис. 11, в). «Граница» n -мерного шара, т. е. множество таких точек B , что

$$QB = r,$$

называется $((n - 1)$ -мерной) сферой; так «одномерной сферой» является окружность, а «двумерной» — обыкновенная сфера, т. е. поверхность трехмерного шара; роль же «0-мерной сферы» — границы «одномерного шара», т. е. отрезка — играет просто пара точек.

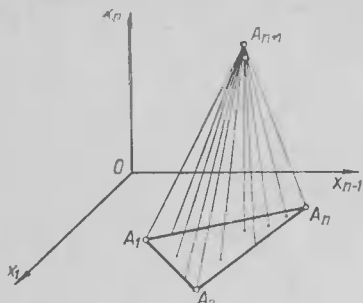


Рис. 12

Простейшим « n -мерным многогранником» (многомерные многогранники часто называют *политопами*) является так называемый n -мерный симплекс с $n + 1$ вершиной A_1, A_2, \dots, A_{n+1} . Если считать, что содержание понятия « $(n - 1)$ -мерный симплекс» уже известно¹⁾, то n -мерный симплекс $S \equiv A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ можно определить как множество всех отрезков, соединяющих точку A_{n+1} с точками $(n - 1)$ -мерного симплекса $S \equiv A_1 A_2 \dots A_n$ (на рис. 12 взят случай, когда $n = 3$).

Примечание. Понятие отрезка (т. е. 1-мерного симплекса) n -мерного пространства не нуждается в специальном определении: отрезок длины d можно описать как фигуру, равную отрезку OD оси Ox_1 , т. е. множеству всех точек $(x_1, 0, 0, \dots, 0)$ оси Ox_1 , где $0 \leq x_1 \leq d$.

Нетрудно понять, что одномерный симплекс AB — это просто отрезок (рис. 13, а); двумерный симплекс — это треугольник ABC (рис. 13, б); наконец, трехмерный симплекс — этот тетраэдр (рис. 13, в). Роль параллелограмма в n -мерной геометрии играет *параллело-*

¹⁾ См. например, И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом. О математической индукции. М., «Наука», 1967, с. 97—100, 120—121, 124, где в определении n -мерного симплекса не рассматривается одно дополнительное условие, заключающееся в том, что точка A_{n+1} должна лежать вне «плоскости», в которой расположен симплекс S .

топ. Если считать понятия $(n - 1)$ -мерного параллелотопа уже известным (см. сноску на стр. 24), то n -мерный параллелотоп $\text{Пар} \equiv A_1 A_2 \dots A_{2^{n-1}} B_1 B_2 \dots B_{2^{n-1}}$ можно определить как множество всех отрезков, соединяющих точки $(n - 1)$ -мерного параллелотопа $\text{Пар}_1 \equiv A_1 A_2 \dots A_{2^{n-1}}$,

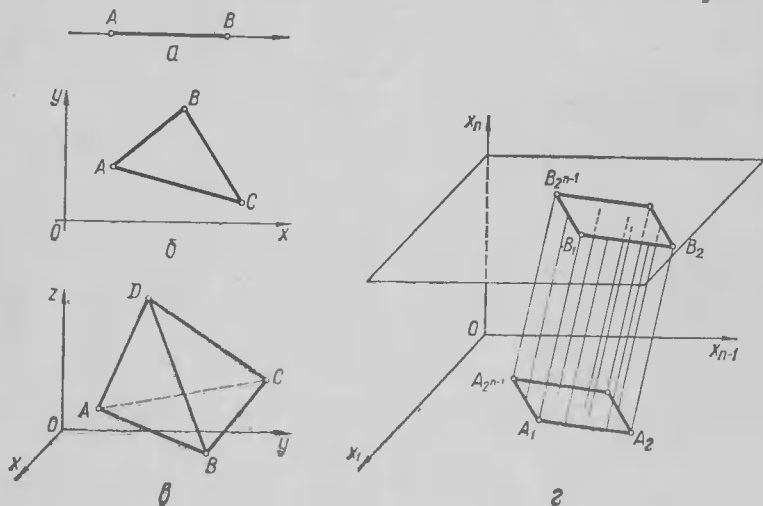


Рис. 13

все точки которого имеют координату $x_n = 0$, и точки равного ему параллелотопа $\text{Пар}_2 = B_1 B_2 \dots B_{2^{n-1}}$, полученного из параллелотопа Пар_1 параллельным переносом на вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_n \neq 0$, т. е. такого параллелотопа Пар_2 , координаты вершины B_i которого (где $1 \leq i \leq 2^{n-1}$) имеют вид $(x_1 + a_1, x_2 + a_2, \dots, x_{n-1} + a_{n-1}, a_n)$, где $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ — координата вершины A_i параллелотопа Пар_1 (на рис. 13, г взят случай, когда $n = 3$). Ясно, что одномерный параллелотоп — это просто отрезок. (Таким образом, «одномерный шар»,

«одномерный симплекс» и «одномерный параллелотоп» — это одна и та же фигура.) «Двумерный параллелотоп» — это параллелограмм, а «трехмерный параллелотоп» — параллелепипед.

Укажем еще (это нам понадобится в дальнейшем), что в известном смысле самым «симметричным» из всех n -мерных

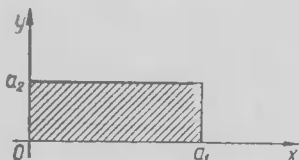


Рис. 14

симплексов является так называемый *правильный симплекс* A_1A_2, \dots, A_{n+1} , все «ребра» A_iA_j которого (где $i, j = 1, 2, \dots, n + 1$) равны между собой.

Частным случаем правильного симплекса есть *правильный треугольник* на

плоскости и *правильный тетраэдр* в пространстве. Частным случаем параллелотопа является так называемый *прямоугольный параллелотоп*, полностью характеризующийся своими «измерениями» («размерами») a_1, a_2, \dots, a_n : прямоугольный параллелотоп с размерами a_1, a_2, \dots, a_n можно охарактеризовать как *множество всех таких точек* (x_1, x_2, \dots, x_n) n -мерного пространства, что

$$0 \leq x_i \leq a_i, \text{ где } 1 \leq i \leq n$$

(ср. рис. 14, где $n = 2$). Прямоугольный параллелотоп, все размеры которого одинаковы, называется n -мерным *кубом*; n -мерный куб со стороной a можно охарактеризовать как *множество всех таких точек* (x_1, x_2, \dots, x_n) , что

$$0 \leq x_i \leq a.$$

Ясно, что при $n = 1$ n -мерный куб обращается в *отрезок*, при $n = 2$ — в *квадрат*, и при $n = 3$ — в *обычный куб*.

Сказанное выше естественно связывается с интересным вопросом о *правильных политопах* n -мерного пространства, характеризующимся равенством (в смысле n -мерной геометрии) всех «граней» и всех «вершин» (точнее — всех «многогранных углов») политопа; частными случаями *правильных политопов* являются *правильный симплекс* и *куб*. Ясно,

что при $n = 1$ мы имеем единственный «правильный политоп» (и вообще единственный политоп!) — отрезок; при $n = 2$ — бесконечное семейство правильных многоугольников, а при $n = 3$ — пять известных типов правильных многогранников (*тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр*). Оказывается, что число типов правильных политопов в четырехмерном пространстве равно шести, а в любом n -мерном пространстве, где $n \geq 5$ — трем (два из которых — это n -мерный куб и правильный симплекс):

Число измерений пространства	Число типов правильных политопов
1	1
2	∞
3	5
4	6
$n \geq 5$	3

По этому вопросу см., например, указанную в списке на стр. 24 статью и названную там литературу

Рассмотрим теперь задачу о шарах уже в n -мерном пространстве.

Задача 3. Каково наибольшее число k_n материальных n -мерных шаров, которые можно приложить к равному им шару \mathcal{H} так, чтобы ни один из них не пересекал \mathcal{H} , но граница каждого из шаров соприкасалась бы с границей \mathcal{H} ?

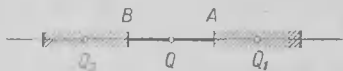


Рис. 15.

Кроме равенств $k_2 = 6$ (рис. 1, б), $k_3 = 12$ (рис. 4, б, в) и тривиального равенства $k_1 = 2$ (рис. 15) в этом отношении пока известно не очень много. Правда, удалось доказать, что

$$24 \leq k_4 \leq 26; \quad 40 \leq k_5 \leq 48; \quad 72 \leq k_6 \leq 85;$$

$$126 \leq k_7 \leq 146; \quad 240 \leq k_8 \leq 244.$$

Однако дальнейшего решения вопроса (хотя бы точного определения величины k_1) ожидать в ближайшие годы,

видимо, не приходится. Но так как уже переход от задачи 1 к задаче 2 (т. е. от размерности $n = 2$ к размерности $n = 3$) приводит, как мы видели выше, к весьма резкому скачку сложности рассматриваемой задачи, то здесь скорее надо удивляться точности оценки величины k_8 , а не тому, что истинные значения всех величин k_n , где $n > 3$, остаются до сих пор неизвестными. И в самом деле, при переходе через значение $n = 8$ имеющаяся информация о границах, в которых может заключаться величина, резко падает: так для следующей за k_8 величины k_9 мы пока имеем лишь следующие весьма грубые оценки

$$272 \leq k_9 \leq 440,$$

улучшить которые пока никому не удалось.

§ 4. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ И ВИДОИЗМЕНЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Задачи 1—3 допускают целый ряд вариантов. В следующей главе будет рассмотрен вопрос о замене кругов и шаров другими фигурами; здесь же остановимся на иных постановках задач о прикладывании материальных кругов (шаров) к равному им кругу (шару).

Известные венгерские геометры Л. Фейеш Тот и Аладар Хеппеш дали следующее обобщение задачи 1—3.

Рассмотрим, например, круг K_r , радиус которого можно принять за 1 (рис. 16). Приложенные к нему непересекающиеся круги того же радиуса назовем *соседями*, или *первыми соседями*, круга K_r . Совокупность как всех этих кругов, так и всех касающихся их (непересекающихся) кругов того же радиуса назовем *вторыми соседями* K_r ; совокупность всех вторых соседей K_r и всех касающихся их (непересекающихся) кругов того же радиуса — *третьими соседями* K_r и т. д. Аналогично определяются и первые, вторые, третьи ... соседи материального шара \mathcal{S} .

Имеет смысл следующая задача:

Задача 4. Определить наибольшее возможное число $k_2(i)$ i -х соседей круга K_r и наибольшее возможное число $k_3(i)$ i -х соседей обыкновенного шара Π , а также наибольшее возможное число $k_n(i)$ i -х соседей n -мерного шара Π .

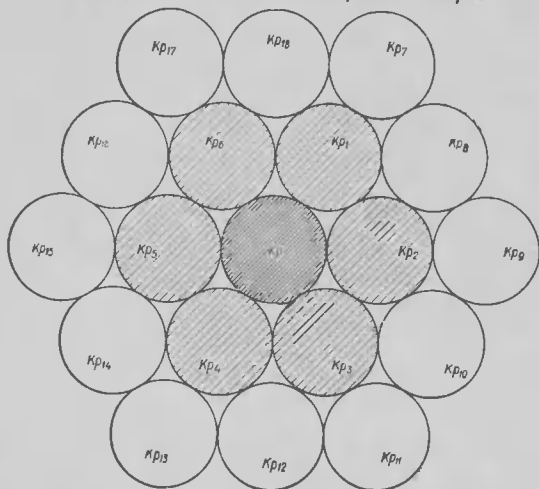


Рис. 16.

Ясно, что $k_n(1) = k_n$ (поэтому задача 4 обобщает задачи 1—3) и, следовательно,

$$k_2(1) = k_2 = 6, \quad k_3(1) = k_3 = 12, \quad 24 \leq k_4(1) \leq 26$$

и т. д. Нетрудно установить также, что

$$k_2(2) = 18$$

(рис. 16, 17). Предлагаем читателю самостоятельно доказать это равенство.

Однако ни одна из величины $k_n(i)$, где $n \geq 2$ ¹⁾, отличная от $k_2(1)$, $k_2(2)$ и $k_3(1)$, до сих пор точно не определена

¹⁾ Случай $n = 1$, как всегда, не представляет интереса: очевидно, что $k_2(i) = 2i$ (почему?).

Л. Фейеш Тот и А. Хеппеш установили, что

$$56 \leq k_3(2) \leq 63 \text{ и } 168 \leq k_1(2) \leq 232;$$

что же касается величин $k_n(i)$, где $i > 2$, то имеющиеся для них оценки относятся лишь к случаю, когда $n = 2$.

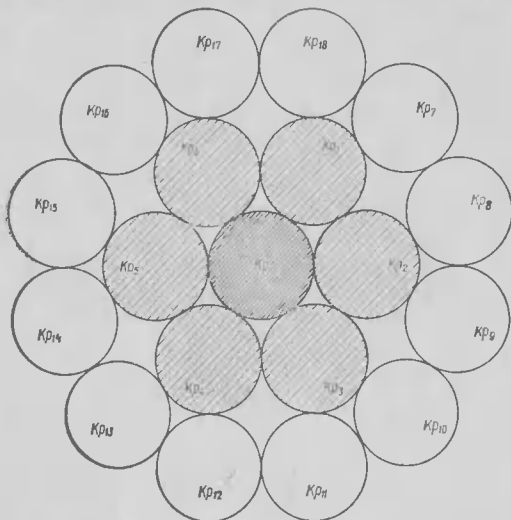


Рис. 17

Вот еще одна задача, родственная рассматриваемым ранее:

Задача 5. Чему равно наименьшее возможное число \bar{k}_2 непесекающихся одинаковых кругов, которыми можно «окружить» равный им круг K_r , т. е. расположить их на плоскости так, что любой проведенный из центра круга K_r луч пересечет один из этих кругов?

Решить тот же вопрос для наименьшего возможного числа \bar{k}_3 материальных одинаковых шаров, которыми можно «окружить» равный им шар Π , а также для числа \bar{k}_n n -мер-

ных шаров, которыми можно «окружить» n -мерный шар \mathcal{H} того же радиуса.

Ясно, что изображенное на рис. 1, б расположение шести кругов Kp_1, \dots, Kp_6 , «окружающих» круг Kp , является «самым выгодным», т. е. $\bar{k}_2 = 6$. Однако изображенные на рис. 4, б, в расположения шаров задачу 5 уже не решают, ибо фигурирующие на них 12 шаров, очевидно, не «окружают» центральный шар \mathcal{H} . Наиболее экономное из известных к настоящему моменту расположений шаров, «окружающих» шар \mathcal{H} , предложил известный немецкий геометр Людвиг Д а н ц е р; у Данцера шар \mathcal{H} «окружают» 42 равных \mathcal{H} непересекающихся шаров, откуда следует, что $\bar{k}_3 \leq 42$. Кроме того, Л. Ф е й с ш Т о т доказал, что $\bar{k}_3 \geq 19$, а А. Х е п п е ш — что $\bar{k}_3 \geq 24$; таким образом, имеем

$$24 \leq \bar{k}_3 \leq 42.$$

Для величин же \bar{k}_n , где $n > 3$, нет до сих пор никаких со-
держательных оценок.

Разумеется, что задачи 4 и 5, так же как и задачи 1—3, можно обобщать и видоизменять далее. Например, можно заменить круги и шары произвольными выпуклыми фигурами (причем, здесь возможны два подхода к этим «обобщенным» задачам, родственные задачам 6 и 7 из гл. II); однако сложность самих исходных задач 4 и 5 делает попытки их обобщения достаточно мало перспективными.

Г Л А В А П

ЗАДАЧИ О МНОГОУГОЛЬНИКАХ, МНОГОГРАННИКАХ И ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФИГУРАХ

§ 5. ТЕОРЕМА ХАДВИГЕРА

Естественным обобщением задач 1—3 является следующая задача:

Задача 6. Пусть F — произвольная фигура (рис. 18). Чему равно наибольшее возможное число $K(F)$ равных F непересекающихся фигур F_1, F_2, \dots , которые можно приложить к F (т. е. расположить так, чтобы ни одна из них не пересекалась с F , но граница каждой из фигур F_1, F_2, \dots соприкасалась с границей фигуры F)?

Из сказанного в гл. I вытекает, что задача эта — особенно в том случае, когда фигура F является не плоской, а пространственной (трехмерной или даже n -мерной) — слишком трудна для того, чтобы по виду фигуры F можно было сразу определить отвечающее ей число $K(F)$. Поэтому упростим сначала эту задачу, заменив ее следующей:

Задача 7. Пусть F — произвольная фигура (рис. 19). Чему равно наибольшее возможное число $k(F)$, равных F и параллельно F расположенных непересекающихся фигур F_1, F_2, \dots , которые можно приложить к F ?

Задача 7 проще задачи 6 потому, что здесь фигуры F_1, F_2, \dots должны быть расположены параллельно F , т. е. получаться из F не произвольным движением δ , а параллельным переносом π .

Примечание. Это обстоятельство важно еще и потому, что оно позволяет отнести задачу 7 не к евклидовой геометрии, а к более простой аффинной геометрии, в то время как задача 6 бесспорно относится собственно к евклидовой геометрии. По этому поводу см., например, И. М. Яглом, Л. С. Атанасян. Геометрические преобразования.

Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ), кн. IV, Геометрия. М., Физматгиз, 1963, с. 98—108 или И. М. Яглом и В. Г. Ашкинуров. Идея и методы аффинной и проективной геометрии. Ч. I, Аффинная геометрия. М., «Просвещение», 1962.

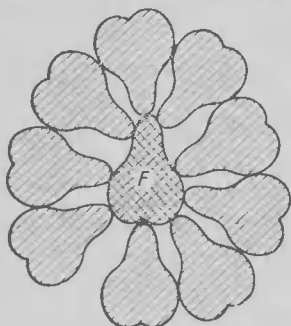


Рис. 18

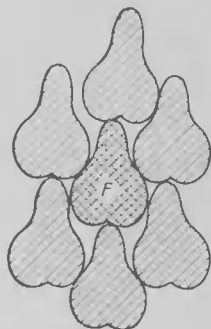


Рис. 19

Задачи 6 и 7 допускают следующую общую формулировку (служащую, одновременно, их обобщением):

Пусть G — какая-то совокупность («группа») движений плоскости; обозначим через $k(F, G)$ наибольшее число фигур, получаемых из F движениями из G , которые можно «приложить» к F с соблюдением условий задач 6 и 7. Чему равно число $k(F, G)$? Ясно, что если G — это совокупность D всех движений плоскости, то $k(F, D) = k(F)$, а если G — это совокупность T параллельных переносов, то $k(F, T) = k(F)$; «промежуточной» между задачами 6 и 7 является, например, задача оценки чисел $k(F, S)$, где S — совокупность всех параллельных переносов и всех центральных симметрий (ср., например, В. Г. Болтянский и И. Равновеликие и равносоставленные фигуры М., Гостехиздат, 1956, § 4)

Ясно, что произвольность размещения фигур F_1, F_2, \dots в задаче 7 значительно меньшая, чем в задаче 6; поэтому

$$k(F) \leq K(F). \quad (7)$$

Заметим, что в рассматриваемых в задаче 5 расположениях фигур F_1, F_2, \dots разобраться гораздо легче, чем в тех расположениях, анализ которых предусматривает задача 6. Кроме того, как задача 7, так и задача 6, могут

рассматриваться как обобщение задач 1—3, поскольку любые два равные круга $K\rho$ и $K\rho_1$, как и два одинаковые шара \mathcal{W} и \mathcal{W}_1 , всегда расположены параллельно (т. е. могут быть переведены один в другой параллельным переносом); поэтому в условиях гл. I задачи 6 и 7 полностью совпадают:

$$k_2 = k_2(K\rho) = K_2(K\rho), \quad k_3 = k_3(\mathcal{W}) = K_3(\mathcal{W}), \quad \dots$$

$$\dots, \quad k_n = k_n(\mathcal{W}) = K_n(\mathcal{W}), \quad \dots$$

(здесь и дальше нижний индекс возле букв k и K указывает размерность фигуры F и вмещающего ее пространства). Поскольку общее понятие «фигуры» является настолько сложным, что его и к геометрии-то относить рискованно ¹⁾, мы впоследствии ограничимся рассмотрением одних лишь *выпуклых* фигур. Выпуклую фигуру F (плоскую, трехмерную или даже n -мерную) можно определить как такую, что *фигуре F принадлежит каждая ее отрезок AB , соединяющий две произвольно выбранные точки A и B этой фигуры*. Выпуклую фигуру F можно описать еще как фигуру, которую ограничивает «выпуклая», т. е. не имеющая «вмятин», замкнутая линия L ; последнее означает, что *через каждую точку линии L можно провести прямую l (называемую опорной прямой выпуклой фигуры), не пересекающую F , т. е. такую, что F целиком лежит по одну сторону от l* . Это описание выпуклых фигур родственно известному из средней школы описанию выпуклых многоугольников как таких, которые *расположены по одну сторону от каждой своей стороны*. Заметьте, что через каждую вершину выпуклого многоугольника проходит много опорных прямых.

Переходя теперь к рассмотрению задачи 7, начнем с простых примеров:

¹⁾ Сегодня это понятие скорее относят к математическому анализу (к теории множеств) или к топологии, чем к геометрии.

Задача 8. Чему равно число

а) $k_2(T\rho)$;

б) $k_2(K\vartheta)$,

где $T\rho$ означает равносторонний треугольник, а $K\vartheta$ — квадрат?

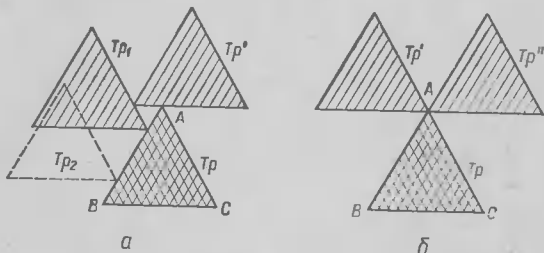


Рис. 20.

Решение. а) Ясно, что стороны AB треугольника $(T\rho)$ ABC во внутренней точке этой стороны может касаться лишь один не пересекающий его равный и па-

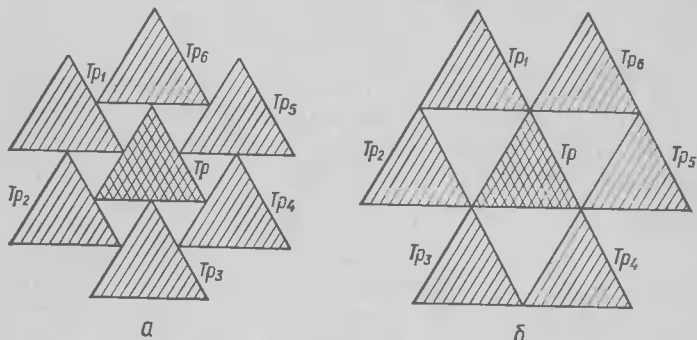


Рис. 21

раллельно $T\rho$ расположенный треугольник $T\rho_1$, ибо два таких треугольника $T\rho_1$ и $T\rho_2$ обязательно пересекутся (рис. 20, а). При этом, когда имеется такой $T\rho_1$, соприка-

сающийся со стороной AB , то к вершине A (и к вершине B) треугольника Tr может прилегать не более чем один, не пересекающий ни Tr , ни Tr_1 , треугольник Tr' , равный и параллельно Tr расположенный, в то время как при отсутствии такого треугольника Tr_1 к вершине A могут прилегать два равных и параллельно Tr расположенных

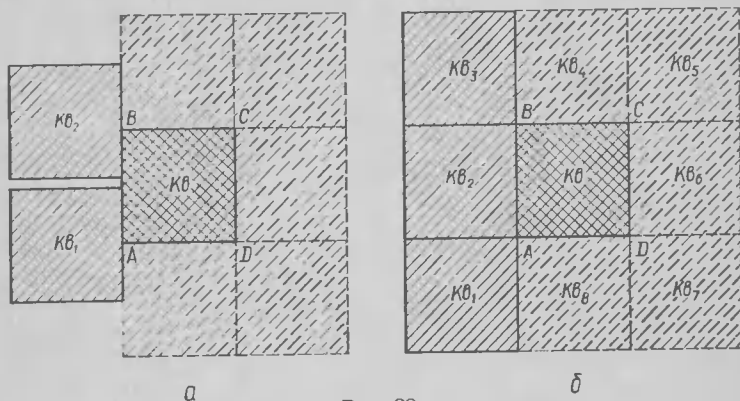


Рис. 22

треугольника Tr' и Tr'' , не пересекающих ни Tr , ни друг друга (рис. 20, б). Так как это рассуждение справедливо и для любой другой стороны треугольника Tr , то из него вытекает, что $k_2(Tr) \leq 6$. Из рис. 21, а, б следует равенство

$$k_2(Tr) = 6. \quad (8)$$

б) К стороне AB квадрата ($Kв$) $ABCD$ можно приложить один, два (рис. 22, а) или три (рис. 22, б) равных и параллельно $Kв$ расположенных квадрата, не пересекающих $Kв$ и не пересекающихся между собой. При этом, если к стороне AB квадрата $Kв$ приложено два квадрата $Kв_1$ и $Kв_2$ или три квадрата $Kв_1$, $Kв_2$ и $Kв_3$, то к сторонам BC и AD квадрата $Kв$ можно дополнительно приложить еще только по два квадрата, а к стороне CD после — лишь

один новый квадрат. Это рассуждение (которое в целях полной строгости надо еще несколько дополнить, что мы предоставляем сделать читателю) и убеждает нас в том, что (рис. 22, б)

$$k_2(K\theta) = 8. \quad (8a)$$

Примечание. Решение задачи 8 несколько не изменится (величина k_2 будет иметь те же значения 6 и 8), если мы под фигурой Tr будем понимать не обязательно *равносторонний*, а *произвольный треугольник*, а под $K\theta$ — произвольный *параллелограмм* Pr

Заметим, что полученные при решении задачи 8 результаты (8) и (8a) имеют, по существу, общий характер. В 1957 г. выдающийся швейцарский математик Гуго Хадвигер доказал, что справедлива следующая теорема:

Теорема Г. Хадвигера. Для любой плоской выпуклой¹⁾ фигуры

$$6 \leq k_2(F) \leq 8. \quad (9)$$

Г. Хадвигер предположил также, что $k_2(F) = 8$ лишь в том случае, когда F — *параллелограмм*, но доказать это ему не удалось. Однако интуиция не обманула Хадвигера: его предположение все же оказалось верным; это доказали в 1961 г. (всего через 4 года после того, как Г. Хадвигер выдвинул свою гипотезу) немецкий геометр Гельмут Грёммер и Бранко Грюнбаум. Последний дал также полное решение задачи 5 для случая плоских (выпуклых) фигур, показав, что

$$k_2(F) = \begin{cases} 6, & \text{если } F \text{ — не параллелограмм;} \\ 8, & \text{если } F \text{ — параллелограмм} \end{cases}$$

§ 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ХАДВИГЕРА

Доказательство неравенства (9) сводится к проверке того, что для любой плоской (выпуклой) фигуры F

$$k_2(F) \geq 6 \text{ и } k_2(F) \leq 8.$$

¹⁾ В 1959 г. американские математики К. Дж. Хальбергер-младший, Е. Левин, Е. Г. Страус показали, что $k_2(F) \geq 6$ также и для невыпуклых (плоских) фигур F .

Таким образом, нас здесь, по существу, интересует следующая задача:

Задача 9. Чему равно

- а) наибольшее возможное значение k_{\max} ;
б) наименьшее возможное значение k_{\min}
чисел $k_2(F)$, определяемых для всевозможных плоских выпуклых фигур F ?

Решение. Основную роль в решении этой задачи играет следующая лемма:

Лемма. Для каждой (плоской, выпуклой) фигуры F существует такая центрально симметричная фигура F^* , что

$$k_2(F^*) = k_2(F).$$

Доказательство леммы является сравнительно несложным; однако по своему характеру оно отличается от остальных используемых в решении задачи 9 рассуждений, ибо опирается на одну общую конструкцию (а именно на симметризацию Минковского), специфическую для теории выпуклых тел. Поэтому мы доказательство леммы дадим в приложении (стр. 80—83); здесь же ограничимся решением задачи 9 для одних лишь центрально симметричных выпуклых фигур.

Решение задачи 9, а). Пусть F — произвольная центрально симметричная фигура с центром O , а $F_1, F_2 \dots F_k$ — k выпуклых фигур, равных фигуре F и параллельно ей расположенных, причем каждая из этих фигур имеет с фигурой F общие (внутренние или граничные) точки (рис. 23, а). Условимся сопоставлять каждой точке M плоскости вектор $r_M = OM$ — радиус-вектор этой точки (рис. 23, б); при этом, если M и N — две произвольные точки, то $r_N = r_M + MN$, т. е. $MN = ON - OM = r_N - r_M$, а если точки M и M_1 симметричны относительно центра O фигуры F , то $r_{M_1} = -r_M$.

Пусть B — произвольная точка фигуры F_1 , получаемой из F параллельным переносом на вектор a_1 , а A —

общая точка фигур F и F_1 . Так как точки A' и B' , из которых A и B получаются переносом на вектор \mathbf{a}_1 , принадлежат фигуре F , то, очевидно,

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_{A'} + \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_{B'} + \mathbf{a}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{AB} &= \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{r}_A + [(\mathbf{r}_B + \mathbf{a}_1) - \\ &- (\mathbf{r}_{A'} + \mathbf{a}_1)] = \mathbf{r}_A + (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{A'}) = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_{A'} = \\ &= \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A_1}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_{A_1} = -\mathbf{r}_A$, т. е. A_1 — точка, симметричная точке A' фигуры F относительно точки O (в силу центральной симметрии фигуры F эта точка также принадлежит фигуре F).

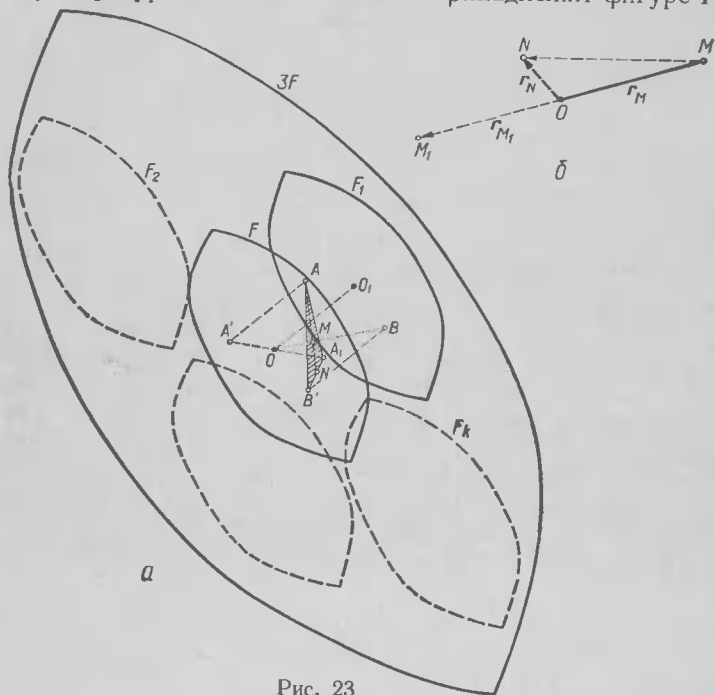


Рис. 23

Рассмотрим теперь полностью принадлежащий фигуре F (согласно ее выпуклости) треугольник $AB'A_1$. Радиус-вектор середины N стороны $B'A_1$ запишется формулой

$$r_N = \frac{1}{2}(r_{B'} + r_{A_1}),$$

а центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан) M , делящая отрезок AN в отношении $AM : MN = 2 : 1$, находится по формуле ¹⁾

$$\begin{aligned} r_M &= \frac{r_A + 2r_N}{3} = \frac{1}{3} \left[r_A + 2 \cdot \frac{1}{2} (r_{B'} + r_{A_1}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} (r_A + r_{B'} + r_{A_1}). \end{aligned}$$

Из сравнения формул

$$r_B = r_A + r_{B'} + r_{A_1} \text{ и } r_M = \frac{1}{3} (r_A + r_{B'} + r_{A_1})$$

следует, что точка B гомотетична точке M фигуры F с центром гомотетии O и коэффициентом 3; иными словами, B принадлежит лучу OM и $OB = 3OM$, т. е. B принадлежит фигуре $3F$, гомотетичной фигуре F с центром гомотетии O и коэффициентом 3. Таким образом, каждая точка каждой из фигур F_1, F_2, \dots, F_k принадлежит фигуре $3F$.

Предположим теперь, что никакие две из фигур F, F_1, F_2, \dots, F_k не имеют общих внутренних точек. Тогда площадь, покрываемая всеми этими фигурами, равна сумме площадей всех фигур, т. е. равна $(k + 1)$ -кратной площади фигуры F , поскольку все $k + 1$ фигуры равны. Но так как все эти фигуры расположены внутри фигуры $3F$, подобной фигуре F с коэффициентом подобия 3 и потому имеющей площадь, равную девятикратной площади фигуры F , то

$$k + 1 \leq 9, \text{ т. е. } k \leq 8.$$

¹⁾ См. ЭМ, ки. IV, с. 317 (статья «Векторы и их применения в геометрии»).

Доказанное неравенство $k_2(F) \leq 8$ и равенство $k_2(K\theta) = 8$ (см. задачу 8, б) показывают, что для центрально симметричных выпуклых фигур (а согласно лемме и для любых плоских выпуклых фигур!)

$$k_{\max} = 8$$

Решение задачи 9, б) несколько сложнее. Опишем вокруг центрально симметричной фигуры F центрально симметричный шестиугольник (Шк) $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ наименьшей возможной площадью. Докажем, что *средина* Z_1 , например, *стороны* A_1A_2 *этого шестиугольника, принадлежит границе фигуры* F . В самом деле, пусть это утверждение неверно, т. е. пусть отрезок A_1K , где $A_1K > A_1Z_1 = \frac{1}{2} A_1A_2$, *стороны* A_1A_2 *шестиугольника Шк*

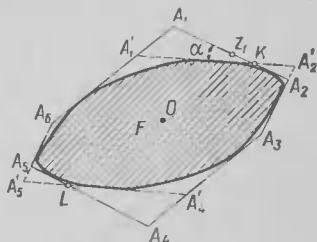


Рис. 24

полностью свободен от точек границы F (рис. 24). Так как фигура F центрально симметрична, это же будет справедливо и для отрезка $A_4L = A_1K$ ($A_4L \in A_4A_5$), где A_4L симметричен A_1K относительно центра O шестиугольника и фигуры F . Повернем теперь слегка отрезки A_1A_2 и A_4A_5 вокруг точек K и L , соответственно в таком направлении, чтобы точка A_1 сместилась по направлению к точке A_6 , а точка A_4 — к точке A_3 , и чтобы полученные поворотом из A_1A_2 и A_4A_5 новые прямые $A_1'A_2'$ и $A_4'A_5'$ остались по-прежнему параллельными. Образованный четырьмя прежними сторонами шестиугольника и повернутыми прямыми $A_1'A_2'$ и $A_4'A_5'$ шестиугольник $A_1'A_2'A_3A_4'A_5A_6$ обозначим через $Шк_1$. Ясно, что этот шестиугольник будет центрально симметричным и если $\angle A_1KA_1' = \alpha$ настолько мал, что прямая $A_1'A_2'$ не пересекает F , то $Шк_1$ по-прежнему заклю-

чает F внутри себя. Кроме того, если

$$A_1K > \frac{1}{2} A_1A_2 > KA_2',$$

что наверное будет иметь место при достаточно малом угле α , то

$$S_{\Delta A_1KA_1'} = \frac{1}{2} KA_1KA_1' \sin \alpha > \frac{1}{2} KA_2'KA_2' \sin \alpha = S_{\Delta A_2KA_2'}$$

и аналогично

$$S_{\Delta A_4LA_4'} > S_{\Delta A_6LA_6'}$$

Поэтому

$$S_{Шк} = S_{Шк} + S_{\Delta KA_2A_2'} + S_{\Delta LA_6A_6'} - S_{\Delta KA_1A_1'} - S_{\Delta LA_4A_4'} < S_{Шк},$$

что противоречит предположению о том, что площадь шестиугольника $Шк$ — наименьшая из возможных. Этим и доказано, что середина стороны A_1A_2 (как и середины всех остальных сторон шестиугольника $Шк$) действительно принадлежит F .

Наконец, отразим шестиугольник $Шк$ вместе со вписанной в него фигурой F от середин Z_1, Z_2, \dots, Z_6 всех его сторон. Мы получим конфигурацию из 7 шестиугольников, аналогичную изображенному на рис. 1, б расположению 7 кругов. На рис. 25, например, $A_1U \parallel A_3A_2 \parallel A_5A_6$, $A_2V \parallel A_4A_3 \parallel A_6A_1$ и т. д. При этом шестиугольник $Шк$ окажется «окруженным» шестью другими, равными ему шестиугольниками $Шк_1, Шк_2, \dots, Шк_6$, а фигура F — шестью другими непересекающимися и равными ей фигурами F_1, F_2, \dots, F_6 , вписанными в эти шестиугольники и соприкасающимися с фигурой F в серединах сторон шестиугольника $Шк$.

Заметим теперь, что фигуры F_1, F_2, \dots, F_6 не только равны фигуре F , но и параллельно ей расположены (могут быть получены из F параллельным переносом). В самом деле, фигура F_1 получается из фигуры F симметрией относительно середины Z_1 стороны A_1A_2 шес-

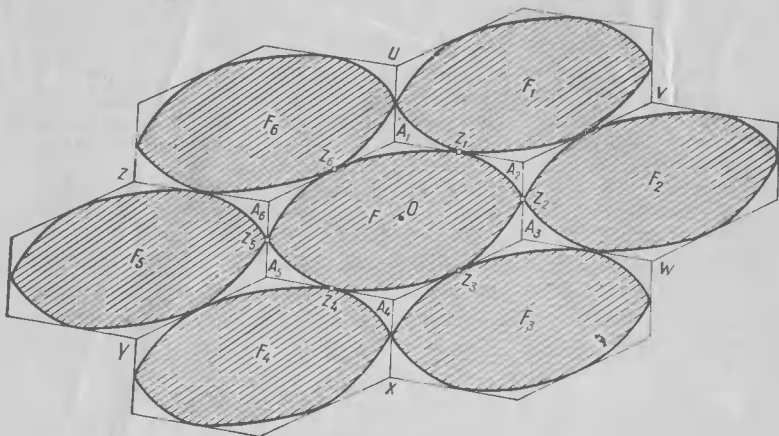


Рис. 25

тиугольника $Шк$ (поворотом на 180° вокруг точки Z_1). А так как фигура F — центрально симметрична, то от нее к F_1 можно перейти с помощью двух последовательно осуществленных центральных симметрий — симметрии относительно центра O фигуры F (эта симметрия переводит F в себя) и последующей симметрии относительно точки Z_1 (эта симметрия переводит F в F_1).

Примечание. Последовательность двух центральных симметрий представляет собой параллельный перенос.

Действительно, если M — произвольная точка плоскости, M' — точка, симметричная M относительно O , а M_1 — точка, симметричная M' относительно Z_1 (рис. 26), то так как OZ_1 — средняя линия треугольника MM_1 , то

$$OZ_1 = \frac{1}{2} MM_1,$$

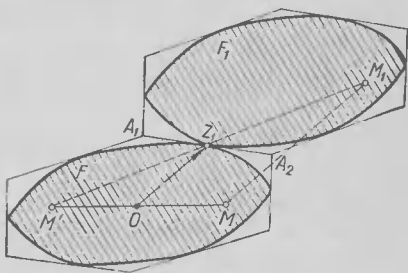


Рис. 26

или

$$MM_1 = 2OZ_1,$$

т. е. точка M_1 получается из точки M параллельным переносом на вектор $2OZ_1$. Отсюда следует, что фигура F_1 , которую можно получить из F двумя последовательными симметриями относительно точек O и Z_1 , может быть также получена из F параллельным переносом на вектор $2OZ_1$. Точно так же доказывается, что и фигуры F_2, \dots, F_6 получаются из F параллельными переносами (на векторы $2OZ_2, \dots, 2OZ_6$ соответственно).

Таким образом, изображенные на рис. 25 фигуры F_1, F_2, \dots, F_6 удовлетворяют всем условиям задачи 7, откуда следует, что для любой плоской выпуклой центрально симметричной фигуры F

$$k_2(F) \geq 6.$$

Это неравенство и равенство $k_2(Tp) = 6$ (см. задачу 8, а) и доказывают, что для центрально симметричных выпуклых фигур

$$k_{\min} = 6.$$

§ 7. ЗАДАЧИ О ПРИКЛАДЫВАНИИ КВАДРАТОВ И ТРЕУГОЛЬНИКОВ

До сих пор мы рассматривали лишь задачу 7 из § 5; перейдем теперь к более сложной задаче 6. Начнем с примеров:

Задача 10. Чему равно число

а) $K_2(K\vartheta)$;

б) $K_2(Tp)$,

где символы Tp и $K\vartheta$ имеют тот же смысл, что и в задаче 8.

Решение задачи а). Из результата задачи 8, б) (рис. 22, б) и из неравенства (7) следует, что $K_2(K\vartheta) \geq 8$. Докажем, что имеет место равенство

$$K_2(K\vartheta) = 8. \quad (10)$$

Рассмотрим замкнутую линию L , образованную проходящими вне квадрата $K\vartheta$, со стороной 1, прямыми, па-

параллельными сторонами квадрата K_6 и удаленными от них на расстояние $\frac{1}{2}$; эта линия представляет собой квадрат со стороной 2 и периметром 8 (рис. 27, а). Докажем, что длина части ломаной L , отсекаемой от L приложенным к K_6 квадратом K_{6_1} , равным K_6 , всегда ≥ 1 ; отсюда и будет следовать, что к K_6 нельзя приложить более, чем $8 : 1 = 8$ равных K_6 непересекающихся квадратов.

Разберем все возможные случаи взаимного расположения квадрата K_6 и равного ему квадрата K_{6_1} , не пересекающего K_6 , но соприкасающегося с ним.

I. Пусть одна из вершин квадрата $A_1B_1C_1D_1$, например, A_1 лежит на стороне квадрата $ABCD$. При этом может быть, что:

1°. Квадрат K_{6_1} отсекает из линии L отрезок, принадлежащий одной из четырех сторон квадрата $\overline{A_1B_1C_1D_1} \equiv L$. Если при этом ни одна вершина квадрата K_{6_1} , отличная от вершины A_1 , не попадает внутрь линии L и сторона A_1B_1 образует с проходящей через точку A_1 стороной квадрата K_6 угол α , то

$$\begin{aligned} ab &= aP + Pb = A_1P \operatorname{ctg} \alpha + A_1P \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \geq 1 \end{aligned}$$

(равенство имеет место при $\alpha = 45^\circ$). Если же внутрь линии L попадут две вершины A_1 и B_1 квадрата K_{6_1} , то проводя через точку a_1 пересечения отрезка A_1D_1 с линией L прямую $a_1b'_1 \parallel A_1B_1$, получим

$$a_1b'_1 \geq a_1b'_1 = A_1B_1 = 1$$

(равенство имеет место, когда сторона A_1B_1 квадрата K_{6_1} примыкает к стороне квадрата K_6).

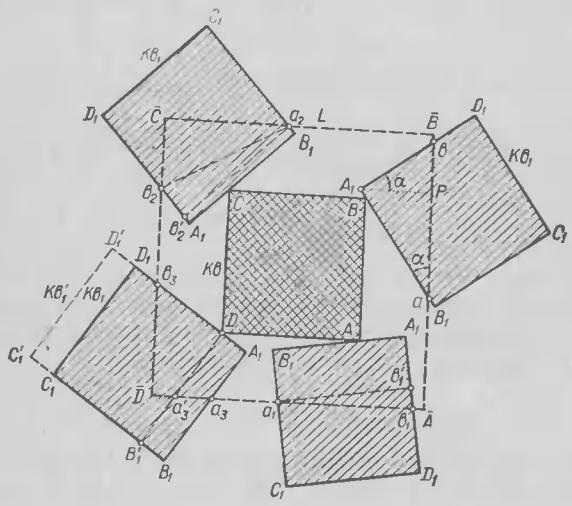
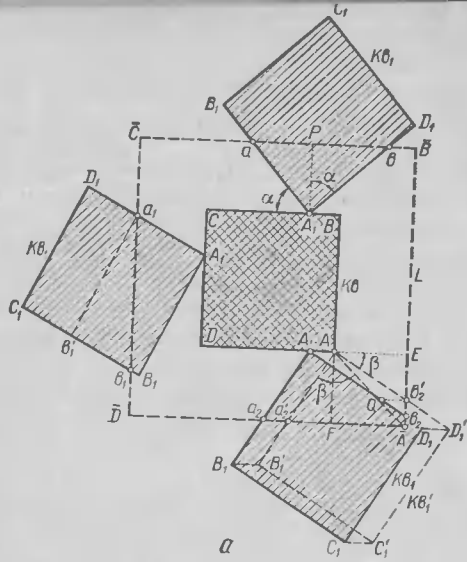


Рис. 27

2°. Квадрат K_{β_1} отсекает от линии L ломаную, т. е. одна из вершин квадрата $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \equiv L$, например \bar{A} , попадает внутрь квадрата K_{β_1} . Перенесем теперь квадрат K_{β_1} параллельно в положение $K_{\beta_1}' (A_1B_1C_1D_1)$. Так как угол $\beta \leq \angle EA\bar{A} = 45^\circ$, то

$$b_2b_2' = b_2Q \cdot \operatorname{tg} \beta = AA_1 \cdot \operatorname{tg} \beta = a_2a_2' \cdot \operatorname{tg} \beta \leq a_2a_2',$$

поэтому $a_2\bar{A}b_2' \leq a_2\bar{A}b_2$. Но так как, очевидно, $\Delta Aa_2'F = \Delta A'b_2'E$, ибо $AF = AE$ и $\angle FAa_2' = \angle EA'b_2' = \beta$, то $a_2'F = b_2'E$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} a_2'\bar{A}b_2' &= a_2'\bar{A} + \bar{A}b_2' = (a_2'F + F\bar{A}) + (\bar{A}E - b_2'E) = \\ &= F\bar{A} + \bar{A}E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, и в этом случае имеем

$$a_2\bar{A}b_2 \geq a_2'\bar{A}b_2' = 1$$

(равенство имеет место при $a_2a_2' = b_2b_2' = 0$ и квадрат K_{β_1} совпадает с K_{β_1}').

II. Пусть на одной из сторон квадрата $A_1B_1C_1D_1$, например, на стороне A_1B_1 , лежит вершина квадрата K_{β} (рис. 27, б). Здесь имеем те же два случая, что и выше.

1°. Если квадрат K_{β_1} отсекает от линии L отрезок, то мы имеем условия, близкие к тем, которые были в случае I. Так:

$$ab = aP + Pb = A_1P \operatorname{ctg} \alpha + A_1P \operatorname{tg} \alpha \geq 2A_1P \geq 1,$$

ибо $A_1P \geq \frac{1}{2}$, или

$$a_1b_1 \geq a_1b_1' = B_1A_1 = 1.$$

2°. Если квадрат K_{β_1} отсекает от линии L ломаную $a_2\bar{C}b_2$ и две вершины A_1 и B_1 этого квадрата лежат

внутри линии L то, проведя через точку a_2 прямую $a_2\bar{b}_2 \parallel B_1A_1$, получим:

$$a_2\bar{c}b_2 > a_2b_2 \geq a_2b_2' = B_1A_1 = 1.$$

Если же квадрат Kv_1 отсекает от линии L ломаную $a_3\bar{D}b_3$ и внутри L находится лишь одна вершина A_1 этого квадрата, то переместив Kv_1 параллельно в направ-

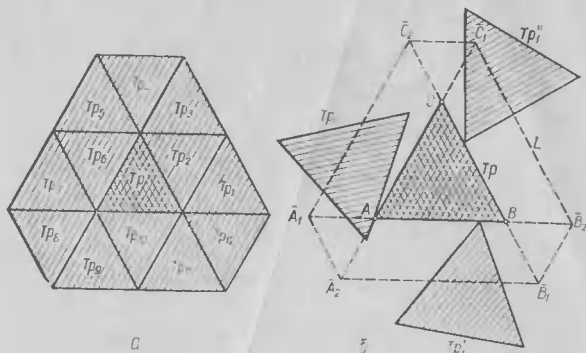


Рис. 28

лению A_1D_1 в положение $DB_1C_1D_1 \equiv Kv_1$, убедимся, что квадрат Kv_1 отсекает от L большую часть L , чем квадрат Kv_1 , в то время как квадрат Kv_1 отсекает от L ломаную длины 1 или отрезок длины больше или равной 1 (ср. со случаем 1). Поэтому и здесь

$$a_3\bar{D}b_3 \geq 1,$$

(равенство может иметь место лишь в случае, когда квадрат Kv_1 совпадает с Kv_1).

Эти рассуждения и завершают доказательство равенства (10)¹⁾.

¹⁾ При разборе всевозможных вариантов взаимного расположения квадратов Kv и Kv_1 мы не рассматривали случая, когда сторона A_1B_1 квадрата Kv_1 соприкасается с вершиной квадрата Kv и обе вершины A_1 и B_1 находятся в $n \in L$. Почему мы так поступили?

Решение задачи 10, б. Как видно из рис. 28, а, $K_2(Tp) \geq 12$. Рассмотрим описанную вокруг правильного треугольника $Tp \equiv ABC$ со стороной 1, шестиугольную замкнутую ломаную $L \equiv \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{C}_1\bar{C}_2$ (рис. 28, б), натянутую на такие точки \bar{A}_1 и \bar{B}_2 , \bar{B}_1 и \bar{C}_2 , \bar{C}_1 и \bar{A}_2 сторон AB , BC и CA треугольника Tp , что $A\bar{A}_1 = A\bar{A}_2 = B\bar{B}_1 = B\bar{B}_2 = C\bar{C}_1 = C\bar{C}_2 = \frac{1}{2}$. Как и при решении задачи а), можно установить, что при любом положении «приложенного» к треугольнику Tp равного ему треугольника Tp_1 (несколько возможных вариантов расположения треугольника Tp_1 изображены на рис. 28, б), он отсекает от L часть длины, большую или равную $\frac{1}{2}$ (докажите это самостоятельно). А так как общая длина ломаной L , очевидно, равна 6 (ибо $\bar{A}_1\bar{A}_2 = \bar{B}_1\bar{B}_2 = \bar{C}_1\bar{C}_2 = \frac{1}{2}$, а $\bar{A}_2\bar{B}_1 = \bar{B}_2\bar{C}_1 = \bar{C}_2\bar{A}_1 = \frac{3}{2}$), то отсюда следует что к Tp нельзя приложить более чем $6 : \frac{1}{2} = 12$ непересекающихся равносторонних треугольников, равных Tp , т. е.

$$K_2(Tp) = 12. \quad (11)$$

Равенство (11) впервые (без доказательства) встречается в работе Л. Фейеш Тотта, опубликованной в 1967 г.; еще раньше задача определения величины $K_2(Tp)$ была поставлена автором настоящих строк перед учащимися московских математических школ и была решена несколькими школьниками. В той же работе Л. Фейеш Тотт высказал предположение, что величина $K_2(Mn_n)$, где Mn_n *правильный n -угольник*, равна 12 при $n = 3$, равна 8 при $n = 4$ и равна 6 при $n > 4$. Для всех $n \neq 5$ это предположение в 1971 г. доказал венгерский геометр К. Бёрёцки.

Таким образом, из всех относящихся к правильным многоугольникам задач определения величины k_2 и K_2

открытой пока остается лишь задача нахождения числа $K_2(Pm)$, где Pm — *правильный пятиугольник*. Однако мы не советуем читателям заняться этой не особенно интересной задачей. Дело в том, что если полученные в процессе

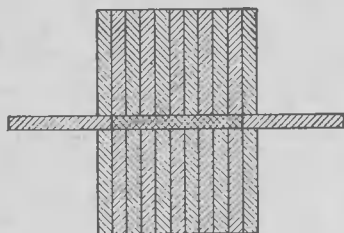


Рис. 29

решения задачи 8 формулы (8) и (9) в известном смысле характеризуют общую ситуацию, то формулы (10) и (11), и любые подобные им, не могут претендовать на большее, чем только служить достаточно частными иллюстрациями задачи 6. Конечно, очевидное по самому смыслу величин

$k(F)$ и $K(F)$, где буква F обозначает одну и ту же фигуру и поэтому нижний индекс у букв k и K опущен (он одинаков, т. к. соответствует размерности F) неравенство (7) совместно с неравенством Хадвигера и равенством

$$k_2 = k_2(Kp) = K_2(Kp) = 6$$

(рис. 1, б) доказывает, что для любой плоской выпуклой фигуры F

$$K_2(F) \geq 6 \quad (12)$$

(где наименьшее возможное значение $K_2 = 6$ достигается, например, для круга); однако никакой «верхней оценки» для числа дать нельзя: выпуклую фигуру F можно выбрать так, что число $K_2(F)$ будет сколько угодно велико. В самом деле, легко видеть, что если $F \equiv Pr_m$ есть прямоугольник с целочисленными сторонами 1 и m , то

$$K_2(Pr_m) \geq 2m + 6$$

см. рис. 29, где $m = 9$ и $2m + 6 = 24$. А может быть вы сумеете доказать, что $K_2(Pr_m) = 2m + 6$?

Таким образом, неравенством (12) в некотором смысле исчерпывается все, что мы можем сказать о величине $K_2(F)$. Дальнейшие же содержательные задачи могут возникнуть

лишь в том случае, если выбрать фиксированную фигуру F или как-нибудь ограничить класс рассматриваемых фигур.

Представление о задачах, связанных с фиксированным выбором фигуры F может дать, например, такая задача:

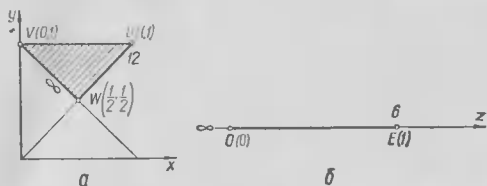


Рис. 30

Задача 11. Чему равна величина

а) $K_2(\text{Tr}(a, b, c))$, где $\text{Tr}(a, b, c)$ — треугольник со сторонами a, b и c ($a \leq b \leq c$);

б) $K_2(\mathcal{E}(a, b))$, где $\mathcal{E}(a, b)$ — эллипс¹⁾ с полуосями a и b ($a \geq b$).

Ясно, что форма треугольника $\text{Tr}(a, b, c)$ полностью определяется отношениями $\frac{a}{c} = x$ и $\frac{b}{c} = y$, где $y \leq 1$, $x \leq y$, $x + y > 1$ (ибо $x + y = \frac{a+b}{c}$, а $a + b > c$); поэтому величину $K_2(\text{Tr}(a, b, c))$ можно также обозначить через $K_2(x, y)$ — это есть функция двух переменных x и y , удовлетворяющих неравенствам

$$y \leq 1; \quad x \leq y; \quad x + y > 1.$$

Эти неравенства определяют на плоскости (x, y) треугольник UVW (рис. 30, а), являющийся областью определения искомой функции $K_2(x, y)$. Из результата задачи 10, б) следует, что в точке $U(1, 1)$ (эта точка соответствует равнобедренному треугольнику) функция $K_2(x, y)$ принимает значение 12; кроме того, она неограниченно возрастает при

¹⁾ См., например, ЭЭМ, кн. V (геометрия). М., «Наука», 1966, с. 579—585 (статья «Конические сечения»).

приближении точки к стороне VW . Однако никаких методов полного определения функции $K_2(x, y)$, т. е. никаких способов решения задачи 11, а) указать сегодня, видимо, нельзя.

Аналогично, форма эллипса $\mathcal{E}(a, b)$ с полуосями a и b определяется одним числом $\frac{b}{a} = z$; поэтому величину $K_2(\mathcal{E}(a, b))$ можно также обозначить через $K_2(z)$, где $0 < z \leq 1$ — функция одного аргумента z , определенная на отрезке $0 < z \leq 1$ (отрезке OE , рис. 30, б). Из § 1 следует, что в конце E отрезка OE функция $K_2(z)$ принимает значение 6, ибо точка E соответствует обращению эллипса в о к р у ж н о с т ь; также и в точках отрезка OE , достаточно близких к точке E , т. е. для эллипсов $\mathcal{E}(a, b)$, мало отличающихся от окружности, $K_2(z) = 6$, а при приближении точки z к концу O отрезка OE функция $K_2(z)$ стремится к бесконечности. Однако полная картина зависимости величины $K_2(z)$ от z остается пока достаточно неясной.

§ 8. ОБОБЩЕНИЯ И ВАРИАНТЫ

Рассмотрим один из возможных способов, позволяющих выделить определенный класс выпуклых фигур F , для которых величина $K_2(F)$ остается ограниченной.

Условимся называть ширину Δ самой узкой полосой, ограниченной параллельными прямыми l_1 и l_2 и такой, что внутри этой полосы можно поместить (плоскую, выпуклую) фигуру F (рис. 31, а) просто шириной фигуры. Таким образом, ширина Δ фигуры F равна *расстоянию между наиболее близкими друг к другу параллельными опорными прямыми этой фигуры*. А ширину D самой широкой полосы, внутри которой можно поместить фигуру F так, чтобы эта фигура «упиралась» в ограничивающие полосу параллельные прямые m_1 и m_2 (рис. 31, б), назовем *диаметром* фигуры. Таким образом, диаметр — это *расстояние между наиболее*

удалеными друг от друга параллельными торными прямыми фигуры F . Так, например, ширина треугольника, очевидно, равна его наименьшей высоте, а диаметр — наибольшей стороне; ширина прямоуголь-



Рис. 31

ника равна его меньшей стороне, а диаметр — диагонали; ширина эллипса равна его меньшей оси, а диаметр — большей оси. Для круга диаметр и ширина совпадают — оба они равны диаметру круга в элементарно-геометрическом понимании этого слова.

Нетрудно видеть, что диаметр D (плоской, выпуклой) фигуры равен наибольшему расстоянию между ее точками.

В самом деле, пусть AB — наибольший из отрезков, соединяющих точки фигуры F (рис. 32). В этом случае, очевидно, A и B — граничные точки F — ведь иначе отрезок AB можно было бы увеличить, продолжив его за один из концов. Проведем теперь прямые m_1 и m_2 , перпендикулярные к отрезку AB и проходящие через его концы. Ясно, что m_1 и m_2 — опорные прямые

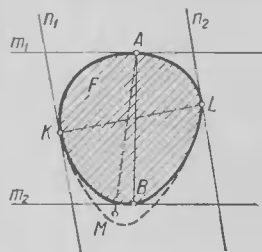


Рис. 32

фигуры F : в самом деле, если бы, скажем, существовала точка M фигуры F , расположенная по другую сторону от m_2 , чем точка B , то тогда было бы $AM > AB$ — что противоречит нашему допущению об отрезке AB . Далее, если бы существовали параллельные опорные прямые n_1 и n_2 фигуры F , расстояние между которыми было бы больше расстояния AB , то отрезок KL ,

соединяющий точки соприкосновения n_1 и n_2 с границей F , был бы больше отрезка AB , что опять противоречит тому, что расстояние между точками A и B фигуры F — наибольшее.

Отсюда и следует, что отрезок AB равен расстоянию D между наиболее удаленными друг от друга параллельными опорными прямыми m_1 и m_2 фигуры F .

Таким образом, ширина Δ фигуры F — это как бы ее «наименьшая ширина», а диаметр D — «наибольшая ширина».

Примечание. Сказанное имеет следующий точный смысл: каждая выпуклая фигура F имеет только две опорные прямые l_1 и l_2 , параллельные любой произвольно фиксированной прямой l (которую можно характеризовать, например, задав $\angle NOx = \alpha$ между прямой $ON \perp l$ и положительным направлением оси Ox); расстояние $\Delta(\alpha)$ между этими прямыми l_1 и l_2 называется *шириной фигуры F в направлении ON* . При этом наибольшее значение функции $\Delta(\alpha)$ (которую можно считать определенной, например, при $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$, причем $\Delta(0) = \Delta(180^\circ)$) совпадает, очевидно, с *диаметром $D(F)$ фигуры F* , а наименьшее — с *ее шириной $\Delta(F)$* .

Отношение $\frac{D}{\Delta}$ принимают за «меру вытянутости» фигуры F . Условимся теперь рассматривать только те фигуры, для которых эта «мера вытянутости» $\frac{D}{\Delta}$ не превосходит некоторого фиксированного значения c (очевидно, что $c \geq 1$). При этом величина $K_2(F)$ уже не сможет быть слишком большой. Таким образом, можно поставить следующую задачу:

Задача 12. В каких пределах может меняться величина $K_2(F)$, если известно, что отношение $\frac{D}{\Delta}$ диаметра фигуры F к ее ширине меньше или равно c , где $c \geq 1$?

Эта задача состоит в определении некоторого множества чисел $K_2(F)$, отвечающих всевозможным фигурам F , таким, что

$$1 \leq \frac{D(F)}{\Delta(F)} \leq c.$$

Это множество чисел можно обозначить, например, через $\underline{K}_2(c)$ или просто через $\underline{K}(c)$, ибо мы здесь рассматриваем только плоские фигуры. Ясно, что при любом c наименьшим числом множества $\underline{K}(c)$ (его можно обозначить, скажем, через $K_{\min}(c)$) всегда будет число 6, ибо на-

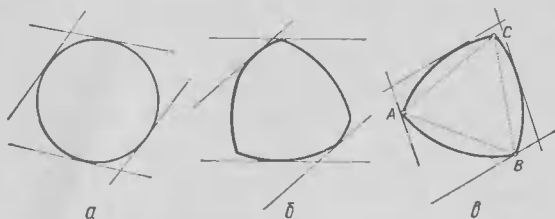


Рис. 33

пример, для круга $K\rho$, у которого $\frac{D(K\rho)}{\Delta(K\rho)} = 1$, имеем $K(F) = 6$. Таким образом, основная трудность заключается в определении наибольшего числа $K_{\max}(c)$ множества $\underline{K}(c)$.

Л. Фейеш Тот установил, что

$$K_{\max}(c) \leq (2\pi + 4)c + \frac{1}{c} + 2. \quad (13)$$

Для некоторых значений c эта оценка числа является точной, в том смысле, что $K_{\max}(c) = [(2\pi + 4)c + \frac{1}{c} + 2]$, где квадратные скобки означают целую часть числа; однако она справедлива далеко не для всех значений c . Так, например, предположив, что $c = 1$, мы приходим к «максимально округлым» или «наименее вытянутым» фигурам, имеющим во всех направлениях одну и ту же ширину (рис. 33); такие фигуры называются *фигурами постоянной ширины*¹⁾. Из неравенства (13) следует, что для

¹⁾ О фигурах постоянной кривизны см., например, § 7 книги. [15].

любой фигуры F постоянной ширины

$$K(F) \leq \lfloor 2\pi + 7 \rfloor = \lfloor 13, 28 \dots \rfloor = 13,$$

в то время как в той же работе Л. Фейеш Тот показал, что для всех таких фигур $K(F) \leq 8$ и предположил, что

$$K_{\max}(1) = 7, \text{ т. е. } \underline{K}(1) = \{6, 7\},$$

другими словами, что характеристики $K_2(F)$ плоских и выпуклых фигур постоянной ширины могут иметь лишь два значения: 6 и 7. Первое из них достигается, например, для круга (рис. 1, б), а второе — для изображенного, например, на рис. 33, в так называемого треугольника Релло, ограниченного тремя дугами AB , BC и AC окружностей радиуса 1 с центрами в вершинах равностороннего треугольника ABC со стороной 1. В 1970 г. это предположение Л. Фейеша Тота доказал венгр И. Шоп, что, впрочем, доставило немного новой информации о всем комплексе связанных с задачей 12 вопросов. Так, до сих пор остается открытой проблема полного описания того семейства фигур постоянной ширины, для которых $K(F) = 6$ и тех фигур, для которых $K(F) = 7$, к решению которой пока не видно никаких подходов, или проблема оценки того наименьшего значения отношения $c = \frac{D}{\Delta}$, для которого

множество $\underline{K}(c)$ превосходит множество $\underline{K}(1)$, т. е. для которого существует выпуклая фигура F , такая, что $\frac{D(F)}{\Delta(F)} = c$ и что к F можно «приложить» 8 равных F фигур.

Новые вопросы возникают при переходе к трехмерному или многомерному пространству. Так, Г. Хадвигер установил «верхнюю оценку» для чисел $k_n(F)$, показав, что при любом n

$$k_n(F) \leq 3^n - 1, \quad (14)$$

в частности, что

$$k_3(F) \leq 3^3 - 1 = 26$$

для всякого пространственного выпуклого тела F . Он предположил также, что $k_n(F) = 3^n - 1$ в том и только в том случае, когда F — параллелотоп, например $k_3(F) = 26$, если F — параллелепипед (куб). Это предположение было позже доказано Г. Грёмером и Б. Грюнбаумом. Последний установил также «нижнюю оценку» величины $k_n(F)$, доказав, что для каждого n -мерного выпуклого тела F

$$n^2 + n \leq k_n(F) \leq 3^n - 1, \quad (15)$$

причем здесь оба крайние значения величины $k_n(F)$ достигаются:

$k_n(F) = n^2 + n$, если F n -мерный симплекс;

$k_n(F) = 3^n - 1$, если F n -мерный параллелотоп.

При $n = 1$ неравенство (15) означает лишь, что для любой «одномерной» выпуклой фигуры F (отрезка)

$$1^2 + 1 \leq k_1(F) \leq 3 - 1, \text{ т. е. } k_1(F) = 2,$$

а при $n = 2$ это неравенство обращается в уже известное неравенство Хадвигера: для любой плоской выпуклой фигуры

$$2^2 + 2 \leq k_2(F) \leq 3^2 - 1 \text{ или } 6 \leq k_2(F) \leq 8.$$

Однако уже при $n = 3$ неравенство (15) содержит новую и нетривиальную информацию: из него следует, что для любого выпуклого тела F обыкновенного трехмерного пространства

$$3^2 + 3 = 12 \leq k_3(F) \leq 26 = 3^3 - 1, \quad (16)$$

причем, оба крайних значения достигаются:

$$k_3(T) = 12, \quad k_3(K\bar{6}) = 26,$$

где T — треугольная пирамида (тетраэдр), а $K\bar{6}$ — куб. Аналогично, при $n = 4$ имеем

$$20 = 4^2 + 4 \leq k_4(F) \leq 3^4 - 1 = 80.$$

Рассмотрим теперь трехмерный и многомерный варианты более трудной задачи.

6. Ясно, что неравенство Грюнбаума (16) совместно с равенством

$$k_3 = k_3(Ш) = K_3(Ш) = 12 \quad (17)$$

(равенством Ньютона—Гоппе-ван дер Вардена—Шютте—Лича) доказывают, что

$$K_3(F) \geq 12, \quad (18)$$

причем, эта оценка величины $K_3(F)$ является точной: равенство $K_3(F) = 12$ достигается, например, для шара Ш. Более общее неравенство (15) доказывает, что для любой n -мерной фигуры F

$$K_n(F) \geq n^2 + n, \quad (19)$$

где однако уже нельзя утверждать, что полученная оценка является точной, т. е., что существуют такие n -мерные фигуры F , что $K_n(F) = n^2 + n$. Задачи определения величины $K(F)$ для конкретных (трехмерных или даже n -мерных) тел весьма трудны и, видимо, никогда не ставились.

Задачи 1—3 могут быть обобщены и в ряде других направлений.

Примечание. Естественным является, скажем, перенос всей проблематики настоящей книги в область разного рода «неевклидовых» геометрий, вроде геометрии на поверхности сферы — *сферической геометрии* или *неевклидовой геометрии Лобачевского* (см. ЭЭМ, кн. V, статья «Неевклидовы геометрии»)

Ясно, что также и задачи 4 и 5 могут быть сформулированы и с заменой кругов и шаров произвольными, но фиксированными выпуклыми фигурами F . При этом возможны два варианта таких «обобщенных» задач, возникающих в зависимости от того, будем ли мы требовать от рассматриваемых в обобщении задачи 4 «соседей» фигуры F или от фигурирующих в обобщении задачи 5 фигур, «окружающих» F , лишь их равенства исходной фигуре F или также их параллельного расположения.

жения. Числа, определяемые в этих двух вариантах обобщения задачи 4 естественно обозначить через $K(l, F)$ и $k(l, F)$, а те числа, определения которых требует обобщение задачи 5 — через $\bar{K}(F)$ и $\bar{k}(F)$. По поводу этих обобщений задач 4 и 5 неизвестно пока почти ничего; можно только указать на полученное Л. Фейешем Тотом неравенство:

$$\text{если } \frac{D(F)}{\Delta(F)} \leq c, \text{ то } K(l, F) \leq 2(\pi l^2 + 4l)c + \frac{l}{c} + 2l,$$

обобщающее неравенство (13), стр. 55.

Далее, в задачах 1—3 мы оценивали наибольшее число непересекающихся *кругов* или *шаров*, которые можно приложить к равному им *кругу* или *шару*; в обобщении этой постановки вопроса мы уже рассматривали вопрос о числе «копий» произвольно заданной (выпуклой) *фигуры F*, которые можно приложить к фигуре *F*. Но можно, разумеется, ставить вопрос и о числе, например, единичных *кругов* или *шаров*, которые можно приложить к *заданной фигуре F* с соблюдением всех требуемых условий:

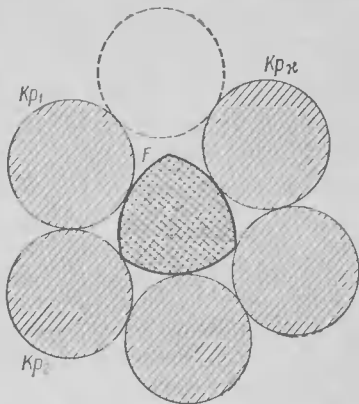


Рис. 34

Задача 13. Чему равно наибольшее возможное число $\chi_n(F)$ непересекающихся *кругов* или *шаров* диаметра 1, которые можно приложить к данной выпуклой фигуре *F* так, чтобы никакой из них не пересекал *F*, но все они имели с *F* общие граничные точки (рис. 34)?

Ясно, что

$$\chi_2(Kp) = k_2 = 6, \quad \chi_3(Ш) = k_3 = 12, \\ \chi_4(Ш) = k_4, \dots,$$

где Kp — круг; $Ш$ — шар диаметра 1; номер или «индекс» n внизу, как всегда, указывает размерность фигуры F и вмещающего ее пространства, а также прикладываемых к F шаров, где «двумерный шар» — это круг. Таким образом, задачи 1—3 являются частными случаями задачи 13. Понятно, однако, что для «больших» в том или ином смысле фигур F число $\chi(F)$ будет весьма велико; поэтому задача оценки чисел $\chi(F)$, отвечающих тому или иному семейству фигур F , имеет смысл лишь тогда, когда мы тем или иным способом ограничиваем размеры F (или фиксируем F). Представление о возникающих при этом вопросах может дать следующая задача:

Задача 14. *Какие значения могут иметь величины $\chi_2(F)$, отвечающие всевозможным (плоским, выпуклым) фигурам F диаметра 1?*

Решение. Эта задача состоит в определении некоторого минимума чисел $\chi(F)$, которое можно обозначить, например, через \underline{X} . Докажем, что интересующее нас множество чисел

$$\underline{X} = \{4, 5, 6\},$$

т. е. число $\chi(F)$, отвечающее плоской фигуре F диаметра 1, может иметь лишь одно из трех значений: 4, 5 или 6. Для этого установим, что:

1°. *Наименьшее число χ_{\min} множества \underline{X} не может быть меньше 4:*

$$\chi_{\min} \geq 4;$$

другими словами, к каждой плоской выпуклой фигуре F диаметра 1 можно приложить четыре круга Kp_1, Kp_2, Kp_3, Kp_4 единичного диаметра с соблюдением условий задачи. Действительно, фигуру F диаметра 1 можно заключить в полосу шириной 1, ограниченную двумя параллельными опорными прямыми m_1 и m_2 этой фигуры, касающимися границы фигуры в некоторых точках A и B (рис. 35). Рассмотрим два круга Kp_1 и Kp_2 , расположенные вне этой полосы и

касающиеся m_1 и m_2 соответственно в точках A и B ; они будут соприкасаться в то же время и с контуром фигуры F . Возьмем еще два круга Kp'_3 и Kp'_4 , расположенные внутри ограниченной m_1 и m_2 полосы и вне F , по разные стороны от F . Перемещая эти круги по направлению к F вплоть до их

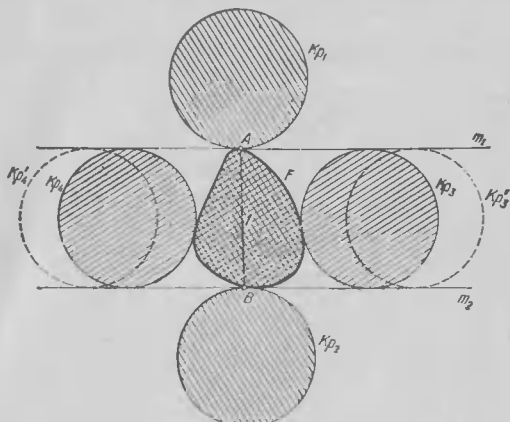


Рис. 35

соприкосновения с границей F , мы получим требуемые 4 круга Kp_1 , Kp_2 , Kp_3 и Kp_4 .

2°. Наибольшее число χ_{\max} множества \underline{X} не может быть больше 6:

$$\chi_{\max} \leq 6;$$

другими словами, ни к какой плоской, выпуклой фигуре F диаметра 1 нельзя приложить более 6 кругов единичного диаметра с соблюдением условий задачи. Действительно, предположим, что к фигуре F диаметра 1 приложено 7 единичных непересекающихся кругов Kp_1, Kp_2, \dots, Kp_7 , касающихся контура фигуры в точках A_1, A_2, \dots, A_7 (рис. 36, а). Проведем опорные прямые a_1, a_2, \dots, a_7 фигуры F , проходящие через точки A_1, A_2, \dots, A_7 ; они образуют описанный вокруг F выпуклый семиугольник.

Примечание. Здесь мы считаем, что точки A_1, A_2, \dots, A_7 настолько «равномерно» распределены вдоль контура F , что прямые a_1, a_2, \dots, a_7 образуют описанный вокруг F выпуклый семиугольник. Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть иной случай.

Вспользуемся теперь так называемой теоремой Юнга (стр. 74), по которой каждую фигуру диаметра 1 можно заключить в круг радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Пусть $Окр$ — окруж-

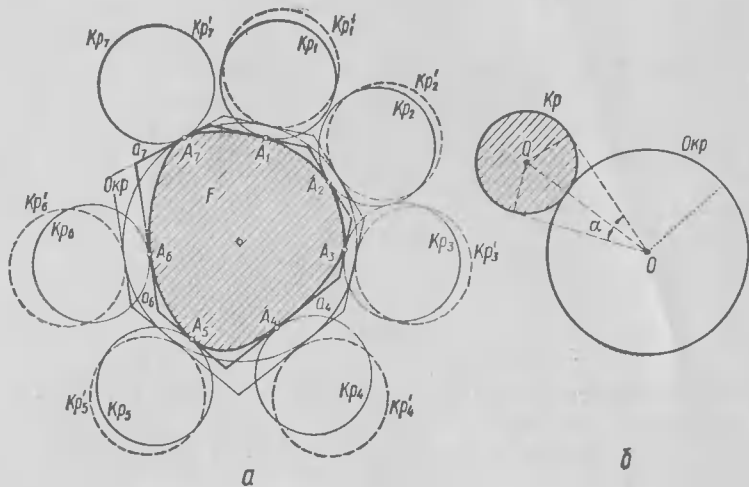


Рис. 36

ность радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$, заключающая F внутри себя. Переместим все круги $Кр_1, \dots, Кр_7$, не касающиеся $Окр$, в направлении, перпендикулярном к сторонам a_1, \dots, a_7 семиугольника, до их соприкосновения с $Окр$. При этом круги $Кр_1, \dots, Кр_7$, равные между собой, только «разойдутся», т. е. они по-прежнему не будут пересекаться. Однако, круг $Кр$ диаметра 1, касающийся окружности $Окр$ радиуса $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(рис. 36, б), виден из центра O этой окружности под таким углом α , что

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{3+3}} = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,464;$$

$$\text{т. е. } \frac{\alpha}{2} \approx 27^\circ 40' \text{ и } \alpha \approx 55^\circ 20',$$

— откуда и следует, что к $Окр$ нельзя приложить 7 непересекающихся кругов единичного диаметра, так как $\frac{2\pi}{\alpha} \approx \frac{360^\circ}{55^\circ 20'} \approx 6,5 < 7$.

Полученное противоречие и доказывает ошибочность сделанного предположения о возможности приложить к фигуре F семь единичных кругов.

Нетрудно видеть, что существуют фигуры F единичного диаметра, для которых $\chi(F)$ принимает как значение 4, так и значение 5 или 6; это делает содержательной (видимо, достаточно трудную) задачу об описании тех фигур F , для которых, например, $\chi(F) = 4$ (или 5, или 6). Так, эллипс \mathcal{E} диаметра 1 — это эллипс с осями 1 и $2b$, где $0 <$

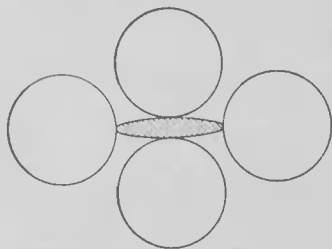


Рис. 37

$< 2b \leq 1$; при этом эллипсам с очень малым b соответствуют значения $\chi(\mathcal{E}) = 4$ (рис. 37), в то время, как при $2b = 1$ эллипс переходит в круг, для которого $\chi = 6$. Однако, даже задача полного описания функции $\chi(b) = \chi(\mathcal{E}(\frac{1}{2}, b))$, где $\mathcal{E}(\frac{1}{2}, b)$ — эллипс с осями 1 и $2b$, является, видимо, совсем не простой.

Разумеется, задачи 13 и 14 могут быть перенесены в трехмерное или в n -мерное пространства. Возможны также иные варианты задач о характеристике $\chi(F)$ фигур F .

Для иллюстрации сложности задач рассматриваемого здесь типа остановимся еще на одной задаче, в некотором смысле близкой к задаче 10:

Задача 15. Чему равно наибольшее возможное число

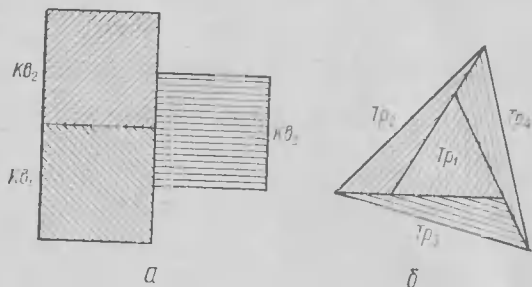


Рис. 38

- а) параллелограммов (например, квадратов);
 б) треугольников,

которые можно расположить на плоскости так, чтобы каждые два из них соприкасались по некоторому участку границы (соприкосновение многоугольников лишь своими вершинами здесь не учитывается)?

Ответ: а) 3 (рис. 38, а); б) 4 (рис. 38, б). Предлагаем читателям самостоятельно решить эту задачу.

Рассмотрим теперь следующий «трехмерный вариант» задачи 15.

Задача 16. Чему равно наибольшее возможное число

- а) параллелепипедов (кубов);
 б) треугольных пирамид (тетраэдров),

которые можно расположить в пространстве так, чтобы каждые два из них соприкасались по некоторому плоскому (или «двумерному») участку границы (не по части ребра, и тем более, не в одной лишь вершине)?

Обозначим числа, искомые в задачах 15, а), б) и 16, а), б) соответственно через $P_2(Kв)$, $P_2(Тр)$, $P_3(Kб)$, $P_3(Т)$.

Тогда, как уже указывалось,

$$P_2(K\theta) = 3 \text{ и } P_2(T\rho) = 4. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что в пространстве можно расположить 6 кубов или 8 тетраэдров с соблюдением условий задачи 16, так что

$$P_3(K\theta) \geq 6 \text{ и } P_3(T) \geq 8 \quad (21)$$

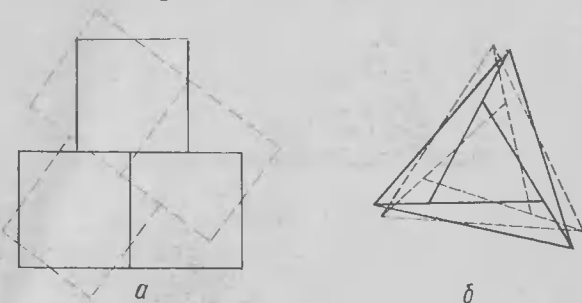


Рис. 39

Действительно, считая плоскость листа бумаги горизонтальной, «поставим на плоскость» три куба, основания которых изображены на рис. 39, *a* сплошными линиями; затем «приложим к этой плоскости снизу» еще три куба, образующих аналогичную конфигурацию кубов, но повернутую по отношению к системе первых трех кубов (на рисунке основания этих кубов изображены пунктиром). При этом мы получим 6 кубов, расположенных в пространстве так, что каждые два из них соприкасаются по некоторой части границы. Аналогично, можно «поставить на плоскость» четыре тетраэдра с общей вершиной, основания которых изображены на рис. 39, *б* сплошными линиями; если затем «приложить к этой плоскости снизу» еще четыре тетраэдра с общей вершиной (основания их изображены пунктиром), то мы получим конфигурацию из 8 тетраэдров, удовлетворяющих условиям задачи 16, *б*).

Но равны ли числа $P_3(Kb)$ и $P_3(T)$ соответственно 6 и 8, или они больше этих значений? Ответ здесь дать, видимо, совсем не просто. Предположение о том, что

$$P_3(T) = 8$$

впервые высказал американский математик Ф. Бейджемил, но он не сумел доказать свою гипотезу. Впоследствии задачей 16 занимался английский геометр В. Дж. Д. Бестон, посвятивший этой проблеме свою диссертацию. В. Бестон заявил, что он может доказать равенство

$$P_3(Kb) = 6.$$

Развив специальный алгебраический аппарат, он доказал, что

$$P_3(T) \leq 9,$$

но доказать, что $P_3(T) = 8$, Бестон так и не сумел. Таким образом, на сегодняшний день вся имеющаяся у нас по поводу задачи 16, б) информация ограничивается, видимо, двойным неравенством

$$8 \leq P_3(T) \leq 9 \quad (22)$$

(хотя В. Бестон уверен, что $P_3(T) = 8$).

Задачи 14 и 15 возникли в связи со знаменитой «проблемой четырех красок», требующей доказать, что любую географическую карту на плоскости можно закрасить четырьмя красками так, что никакие две страны, имеющие общий участок границы, не будут окрашены одной краской¹⁾. На плоскости невозможно расположить 5 об-

¹⁾ Эта проблема, имеющая более чем вековую историю, до сих пор еще не решена. См.:

Г. Радемахер, О. Теплиц. Числа и фигуры. М., «Наука», 1966, тема 13;

Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.—Л., Гостехиздат, 1951, п. 51;

Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика? М., «Просвещение», 1967, § 3, гл. V;

Е. Б. Дынкин, В. А. Успенский. Математические беседы. М.—Л., Гостехиздат, 1952, раздел I.

И. С. Соминский, Л. И. Головина, И. М. Яглом. О математической индукции. М., «Наука», 1967, § 2 части II.

ластей так, чтобы каждая из них граничила со всеми четырьмя другими (образованию подобными пятью «странами» карту, разумеется, нельзя было бы закрасить четырьмя красками с соблюдением требуемых условий); таким образом, ответ на вопрос задачи 15, б) парадоксальным образом не изменится при замене треугольников совершенно произвольными (даже не обязательно выпуклыми) многоугольниками: в понятных обозначениях

$$P_2(Mn) = 4, \quad (23)$$

где Mn обозначает произвольный (скажем, выпуклый, хотя на самом деле это условие здесь несущественно) многоугольник. Напротив, в пространстве можно так расположить любое, сколь угодно большое, число выпуклых многогранников, что каждые два из них будут иметь общий плоский участок границы. Таким образом,

$$P_3(Mngr) = \infty, \quad (24)$$

где $Mngr$ обозначает произвольный выпуклый многогранник. Сравнение второго из равенств (20) с равенством (23), а также результатов (22) и (24), показывает, кстати сказать, опасность бездумного переноса на пространство результатов, относящихся к плоскости: если в планиметрических вариантах рассматриваемых здесь задач переход от треугольников к произвольным, даже не обязательно выпуклым, многоугольникам не сказывается на результатах, то в стереометрических вариантах тех же задач замена тетраэдров произвольными выпуклыми многогранниками резко меняет картину.

Символическое «равенство» (24), из которого вытекает бессодержательность пространственного варианта «задачи о красках» — отсутствие такого, сколько угодно большого, «универсального» числа N , что любую «пространственную географическую карту» можно раскрасить N красками, — впервые установил еще в 1905 г. известный немецкий геометр Генрих Титце; в 1947 г. этот результат был доказан видным английским математиком Александром Бэзиковичем, видимо не знакомым с работой Титце.

I. Несколько теорем из элементарной геометрии

При доказательстве теоремы о 14 шарах нам понадобились несколько предложений, которые можно считать относящимися к области *сферической геометрии*. Роль прямых в сферической геометрии играют так называемые *большие окружности* — линии пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр O сферы (рис. 40, а), а роль треугольников — *сферические n -угольники* (рис. 40, б), ограниченные тремя дугами AB , BC и CA больших окружностей и представляющие собой пересечение (общую часть) трех ограниченных соответствующими большими окружностями полусфер¹⁾. Длины сторон сферического треугольника измеряются соответствующими этим сторонам центральными углами $\angle BOB$, $\angle BOC$ и $\angle COA$ сферы, а величины углов — двугранными углами между соответствующими сторонам треугольника плоскостям (и те и другие удобно измерять, например, в радианах, что мы и будем делать в дальнейшем). Место обычных n -угольников в сферической геометрии занимают *сферические n -угольники* (рис. 40, в), ограниченные n дугами больших окружностей; здесь $n \geq 3$ — произвольное целое число. Радиус сферы S_f , являющейся «полем действия» сферической геометрии, мы дальше будем считать равным 1.

Теорема 1 (теорема о площади сферического треугольника). *Площадь сферического треугольника ABC равна*

$$A + B + C - \pi,$$

где A , B и C — углы треугольника (из этой теоремы, в частности, следует, что сумма углов любого сферического треугольника больше π).

Доказательство. Прежде всего покажем, что *площадь AA_1 сферического двуугольника* («ломтя») с углами $A = A_1$ (рис. 41, а)

¹⁾ Ср.: Б. А. Розенфельд. Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии. ЭЭМ, кн. IV, с. 518—557;

Ж. Адамар. Элементарная геометрия, ч. II. М., «Просвещение», 1958, гл. VIII пятой книги;

Д. И. Перепелкин. Курс элементарной геометрии, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1949, гл. XVI.

равна $2A$. Для этого предположим, что угол A двуугольника соизмерим с π :

$$\angle A = \frac{p}{q} \pi, \quad p, q \text{ — целые числа.}$$

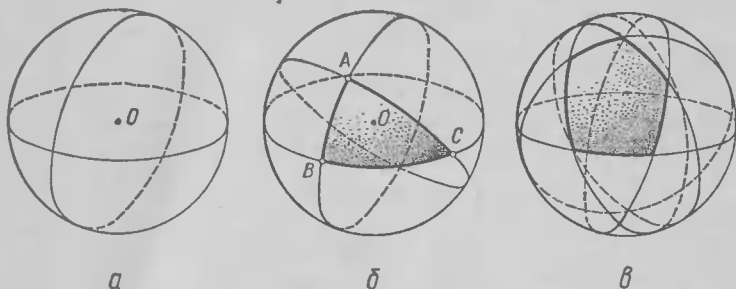


Рис. 40

Разделим всю сферу на $2q$ «элементарных ломтиков» с помощью q проходящих через вершины A и A_1 двуугольника больших окружностей («меридианов»). Так как поверхность всей сферы радиуса 1 равна 4π , то площадь каждого «ломтика» будет равна $\frac{1}{2q} \cdot 4\pi = \frac{2\pi}{q}$, а площадь двуугольника AA_1 , составленного из p таких ломтиков, равна

$$\text{пл. } AA_1 = p \cdot \frac{2\pi}{q} = 2 \frac{p}{q} \pi = 2A, \quad (1)$$

— что и требовалось доказать. Отсюда обычным способом с помощью предельного перехода можно убедиться в справедливости этого утверждения и для двуугольников, угол которых несоизмерим с π

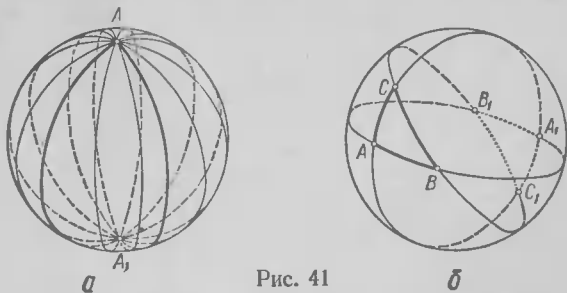


Рис. 41

Рассмотрим теперь сферический треугольник ABC (рис. 41, б) и составим сумму площадей: пл. AA_1 + пл. BB_1 + пл. CC_1 + пл. A_1A + пл. B_1B + пл. C_1C шест и двуугольников с углами A, B, C , а также с углами, вертикальными этим углам. Эти 6 двуугольников полностью покрывают сферу S_f , причем треугольник ABC и симметричный ему относительно центра O сферы треугольник $A_1B_1C_1$ покрываются трехкратно, а остальная часть сферы — однократно. Отсюда, используя формулу (1), получаем

$$4A + 4B + 4C = \text{пл. } S_f + 2 \text{ пл. } ABC + 2 \text{ пл. } A_1B_1C_1. \quad (2)$$

Но площадь всей сферы равна 4π , а площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ (симметричных, т. е. одинаковых) равны¹⁾ между собой; поэтому имеем

$$4A + 4B + 4C = 4\pi + 4 \text{ пл. } ABC,$$

откуда

$$\text{пл. } ABC = A + B + C - \pi, \quad (3)$$

— что и требовалось доказать.

Теорема 2 (теорема о площади сферического n -угольника). Площадь сферического многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n - (n - 2)\pi. \quad (4)$$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что каждый сферический n -угольник можно разбить на $n - 2$ неперекрывающихся сферических треугольника с теми же вершинами, что и у исходного многоугольника. Доказательство будем вести методом математической индукции.

Для $n = 3$ это утверждение бессодержательно («каждый сферический треугольник можно разбить на $3 - 2 = 1$ сферический треуголь-

¹⁾ Для того, чтобы строго доказать это утверждение, достаточно заметить, что если треугольник ABC — равнобедренный, то треугольник $A_1B_1C_1$ будет также равнобедренным и равным ABC ; поэтому площади этих треугольников не могут быть различными. Если же треугольник ABC разносторонний, то достаточно найти внутри него точку Q , равноудаленную от всех вершин ABC — центр описанной вокруг ABC окружности (нахождение этой точки не отличается от решения соответствующей планиметрической задачи) и соединить ее дугами больших окружностей со всеми вершинами треугольника. При этом треугольник ABC разобьется на три равнобедренных треугольника AQB, BQC и CQA ; аналогично, треугольник $A_1B_1C_1$ разобьется на три равных и равнобедренных треугольника $A_1Q_1B_1, B_1Q_1C_1$ и $C_1Q_1A_1$, где Q_1 — точка, диаметрально противоположная Q — центр описанной вокруг $A_1B_1C_1$ окружности, — откуда и вытекает, что пл. $A_1B_1C_1 =$ пл. ABC .

ник»); однако оно, разумеется, верно. Предположим, теперь, что наше утверждение доказано для всех m -угольников, где $m < n$, и рассмотрим n -угольник $Mn \equiv A_1A_2 \dots A_n$. Проведем всевозможные дуги больших окружностей, исходящие из вершины A_1 n -угольника и заключенные внутри Mn (рис. 42, а). Если среди этих дуг имеется диагональ A_1A_i сферического многоугольника, то A_1A_i делит Mn на два меньших многоугольника, Mn_1 и Mn_2 ; пусть $Mn_1 \equiv A_1A_2 \dots A_i$ имеет n_1 ($n_1 = i$) вершин, а $Mn_2 \equiv A_iA_{i+1}, \dots, A_nA_1$ имеет n_2 ($n_2 = n - i + 2$) вер-

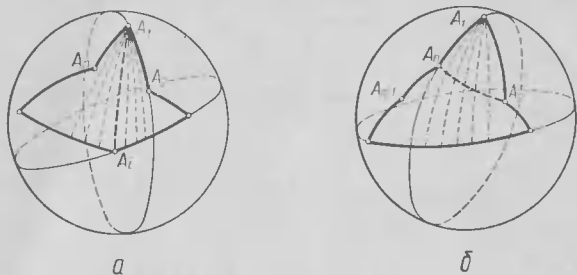


Рис. 42

шин. Ясно, что $n_1 + n_2 = n + 2$ (ибо сложив n_1 вершин многоугольника Mn_1 и n_2 вершин многоугольника Mn_2 мы получим n вершин Mn , причем, вершины A_1 и A_i в этой сумме будут фигурировать дважды); кроме того, по предположению Mn_1 можно разбить на $n_1 - 2$ треугольника, а Mn_2 — на $n_2 - 2$ треугольника. При этом весь многоугольник Mn разобьется на

$$(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = (n_1 + n_2) - 4 = (n + 2) - 4 = n - 2$$

треугольников, что и требовалось доказать. Если же среди исходящих из вершины A_1 дуг больших окружностей нет диагоналей многоугольника Mn , то все эти дуги «упираются» своими концами в одну (в определенном смысле — «противоположную вершине A_1 ») сторону многоугольника (рис. 42, б). Но в этом случае диагональ A_nA_2 отсекает от Mn треугольник $A_1A_2A_n$ и является стороной $(n - 1)$ -угольника $A_2A_3 \dots A_n$, который, по предположению можно разбить на $(n - 1) - 2 = n - 3$ треугольников. Прибавив сюда треугольник $A_nA_1A_2$, мы снова получим разбиение многоугольника Mn на

$$(n - 3) + 1 = n - 2$$

треугольников, которое и требовалось отыскать.

Обозначим теперь углы $n - 2$ треугольников, на которые разбивается в соответствии со сказанным выше n -угольник $Mn \equiv A_1A_2 \dots A_n$,

через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \dots; \alpha_{n-2}, \beta_{n-2}, \gamma_{n-2}$. Так как площадь многоугольника M_n равна сумме площадей тех $n - 2$ треугольников, на которые он разбивается, то, применяя формулу (3), получаем:

$$\begin{aligned} \text{пл. } M_n &= (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi) + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi) + \dots + \\ &+ (\alpha_{n-2} + \beta_{n-2} + \gamma_{n-2} - \pi) = A_1 + A_2 + \dots + A_n - (n - 2)\pi, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать (здесь мы используем то, что сумма углов всех $n - 2$ треугольников равна сумме $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ углов n -угольника M_n).

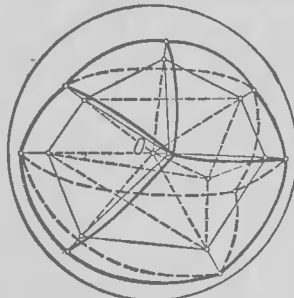


Рис. 43

Следствием теоремы о площади сферического многоугольника является такая теорема:

Теорема 3 (теорема Эйлера). Пусть V — число вершин произвольного выпуклого многогранника, P — число его ребер и Γ — число его граней. Тогда

$$V - P + \Gamma = 2. \quad (Э)$$

Доказательство. Опишем вокруг многогранника M какую-то сферу $S\phi$, радиус которой примем за 1, и спроектируем из центра O сферы вершины и грани многогранника M на поверхность $S\phi$ (рис. 43). При этом $S\phi$ разобьется на Γ

сферических многоугольников $m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_\Gamma}$, являющихся проекциями граней многогранника M . По формуле (4)

$$\left. \begin{aligned} \text{пл. } m_{n_1} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1} - (n_1 - 2)\pi \\ \text{пл. } m_{n_2} &= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n_2} - (n_2 - 2)\pi \\ &\dots \\ \text{пл. } m_{n_\Gamma} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n_\Gamma} - (n_\Gamma - 2)\pi \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $n_1, n_2, \dots, n_\Gamma$ — числа вершин многоугольников $m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_\Gamma}$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}; \dots; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_\Gamma}$ — углы этих многоугольников. Сложим теперь почленно все равенства (5). Тогда в левой части равенства получим:

$$\text{пл. } m_{n_1} + \text{пл. } m_{n_2} + \dots + \text{пл. } m_{n_\Gamma} = \text{пл. } S\phi = 4\pi,$$

а в правой — сумму углов всех многоугольников, уменьшенную на выражение

$$(n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi + \dots + (n_r - 2)\pi = (n_1 + n_2 + \dots + n_r)\pi - 2\pi r.$$

Заметим теперь, что сумма

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n_1}) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{n_2}) + \dots + (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{n_r})$$

углов всех многоугольников разбиения равна, очевидно, $2B\pi$, ибо вокруг каждой из B вершин разбиения сферы на многоугольники группируются углы, сумма которых равна 2π . С другой стороны,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = 2P,$$

ибо $n_1 + n_2 + \dots + n_r$ есть не что иное как сумма чисел сторон сферических многоугольников MN_1, MN_2, \dots, MN_r , а в этой сумме проекция каждого из P ребер многогранника фигурирует дважды — в соответствии с теми двумя сферическими многоугольниками, которые разделяет проекция этого ребра. Таким образом, окончательно получаем

$$4\pi = 2B\pi - (2P\pi - 2\pi r) = 2B\pi - 2P\pi + 2\pi r,$$

откуда и следует равенство

$$B - P + r = 2.$$

В § 2, гл. I используется следующая теорема:

Теорема 4 (теорема о двугранном угле правильного тетраэдра). *Двугранный угол α между гранями правильного тетраэдра таков, что*

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (6)$$

Доказательство. Проведем высоты AE и BE граней ACD и BCD правильного тетраэдра $ABCD$ (рис. 44). Общее основание E этих высот совпадает, очевидно, со серединой ребра CD тетраэдра. Ясно, что $\angle AEB = \alpha$. Так как $AE = BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (это высоты равносторонних треугольников со стороной 1), а $AB = 1$, то из прямоугольного треугольника AEF , где F — середина ребра AB , а следовательно, $EF \perp$

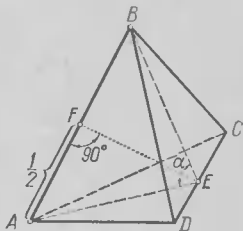


Рис. 44

высота и биссектриса равнобедренного треугольника AEB , получаем

$$\sin \angle AEF = \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

При решении задачи 14 используется следующая важная теорема:
Теорема 5 (теорема Юнга). *Каждую плоскую фигуру F диаметра 1 можно заключить в круг радиуса*

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} (\approx 0,577).$$

Круг наименьшего возможного радиуса, заключающий фигуру внутри себя, называется описанным кругом этой фигуры.

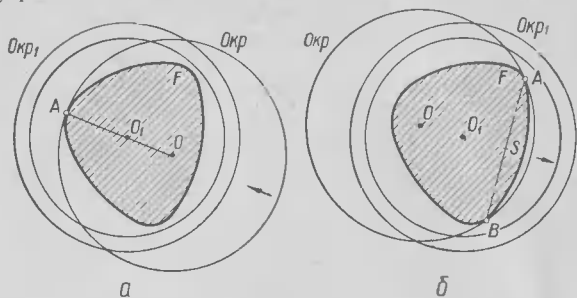


Рис. 45

Так как диаметр описанного круга фигуры, содержащей такие две точки A и B , что $AB = 1$, не может быть меньше 1, то из теоремы Юнга вытекает, что радиус r описанного круга фигуры F диаметра 1 всегда заключен в пределах

$$0,5 = \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 \dots$$

Например, $r = \frac{1}{2}$, если F — квадрат диаметра 1, $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, если F — равносторонний треугольник диаметра 1.

Доказательство теоремы. Пусть F — плоская выпуклая фигура диаметра 1, а $Окр$ — объемлющая ее окружность. Ясно, что если $Окр$ вообще не содержит граничных точек фигуры F , то существует окружность меньшего радиуса, содержащая F внутри себя; чтобы получить такую окружность, достаточно уменьшить радиус $Окр$ не меняя ее центра, причем это «сжатие» $Окр$ можно производить до тех пор, пока уменьшенная окружность не коснется границы F в какой-либо точке A (рис. 45, а).

Далее, если заключающая F окружность $Окр$ содержит е д и н с т в е н н у ю точку A границы F , то также существует окружность меньшего радиуса, заключающая F внутри себя. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно переместить $Окр$ в направлении радиуса OA (O — центр $Окр$) так, чтобы точка A оказалась внутри $Окр$ и фигура F

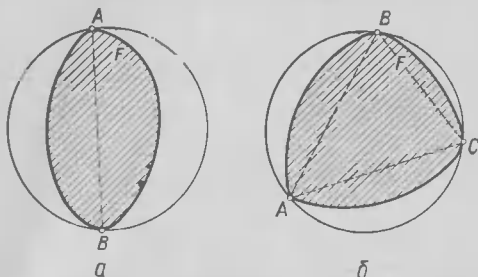


Рис. 46

все еще не вышла за ее пределы (рис. 45, а). При этом мы получим равную $Окр$ окружность $Окр_1$, уже не содержащую граничных точек F , которую, как показано выше, можно уменьшить с тем, чтобы фигура F все еще оставалась внутри уменьшенной окружности.

Наконец, если окружность $Окр$, заключающая F внутри себя, содержит две граничные точки A и B фигуры F , не являющиеся диаметрально противоположными точками $Окр$ и *большая полуокружности* $\cup AB$ окружности $Окр$ не содержит более никаких граничных точек F , то также существует *м е н ь ш а я*, чем $Окр$ окружность, заключающая F внутри себя. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно переместить $Окр$ в направлении OS , где S — середина хорды AB , так, чтобы точки A и B оказались внутри окружности, а F не вышла за ее пределы (рис. 45, б). При этом мы снова приходим к равной $Окр$ окружности $Окр_1$, заключающей F внутри себя и не содержащей ни одной точки F ; эту окружность мы можем уменьшить так, чтобы F все еще заключалась внутри уменьшенной окружности.

Итак, если $Окр$ есть *наименьшая* из всех заключающих F окружностей, то $Окр$ либо содержит две граничные точки A и B фигуры F , являющиеся диаметрально противоположными точками $Окр$ (рис. 46, а), либо содержит три граничные точки A , B и C фигуры, такие, что они разбивают $Окр$ на три дуги, меньшие, чем полуокружность (эти три точки являются вершинами остроугольного треугольника ABC , рис. 46, б).

Как видно из рисунка 46, а,

$$2r = AB \leq 1, \text{ следовательно, } r \leq \frac{1}{2}, \text{ т. е. } r < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

где r — радиус окружности $O_{кр}$.

Далее в остроугольном треугольнике ABC (рис. 46, б) хотя бы один из углов будет больше или равен 60° (ибо сумма всех трех его углов равна $180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$); пусть, например, $\angle C \geq 60^\circ$. Тогда, применяя к треугольнику ABC теорему синусов и принимая во внимание, что $AB \leq 1$, получаем

$$2r = \frac{AB}{\sin C} \leq \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } r \leq \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

что и требовалось доказать.

II. О симметризации Минковского

В теории выпуклых тел широко используются преобразования, переводящие выпуклые фигуры в новые фигуры, являющиеся более симметричными, чем исходные — такие преобразования выпуклых фигур называются симметризациями. Относительная трудность задач, связанных с выпуклыми фигурами, по сравнению, скажем, с задачами школьного курса геометрии, объясняется в первую очередь тем, что в теории выпуклых фигур изучаются фигуры довольно общего вида, так что здесь нет возможности использовать какие-либо индивидуальные особенности формы этих фигур. Именно поэтому приходится индивидуальную особенность формы заменить изучаемой фигурой новой фигурой, более симметричной, чем первая (здесь мы пока не уточняем смысл термина более симметричная фигура, который можно понимать по-разному). В связи с этим в теории выпуклых фигур значительное место занимает метод симметризаций, смысл которого как раз и заключается в подобной замене.

Существует целый ряд различных способов симметризации выпуклых фигур и тел. В теории плоских выпуклых фигур, в частности, основную роль играют два типа симметризаций: симметризация относительно прямой (или симметризация Штейнера), переводящая всякую фигуру в фигуру, имеющую ось симметрии, и симметризация относительно точки (или симметризация Минковского), переводящая каждую фигуру в фигуру, имеющую центр симметрии. Симметризация относительно прямой l заключается в том, что все перпендикулярные к l хорды фигуры F перемещаются вдоль содержащих эти хорды прямых в такое новое положение, что l делит новую хорду пополам, т. е. является осью симметрии этой хорды; образованная таким образом фигура F' , для которой, очевидно, прямая l является осью симметрии (рис. 47) и называется образом F при симметризации относительно l .

Примечание. Рекомендуем читателю самостоятельно доказать следующие свойства симметризации Штейнера:

1°. Если F — выпуклая, то F' — тоже выпуклая.

2°. Площадь F' равна площади F .

3°. Периметр F' не больше периметра F .

Из этих свойств, в частности, можно вывести знаменитую и зометрическую теорему, утверждающую, что из всех плоских выпуклых фигур фиксированной площади наименьший периметр имеет круг, который обладает осями симметрии в всех возможных направлениях и поэтому не может быть «улучшен» симметризацией ни относительно какой прямой (см.: Д. А. Крыжановский. Изопериметры, М., Физматгиз, 1959, § 14).

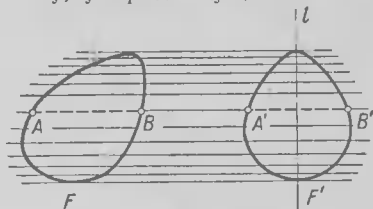


Рис. 47

Аналогично симметризацию относительно точки O можно было бы определить так: все проходящие через точку O хорды фигуры F перемещаются вдоль содержащих эти хорды прямых в такое новое положение, что O делит новую хорду пополам (рис. 48). Однако, такое преобразование может перевести выпуклую фигуру F в не выпуклую фигуру \bar{F} ; поэтому это определение приходится заменять другим.

В определении симметризации Минковского выпуклая фигура F рассматривается как образованная при пересечении бесконечного числа полос, ограниченных всевозможными парами параллельных опорных прямых фигуры. Затем все эти полосы перемещаются в перпендикулярном им направлении в новое положение, при котором точка O оказывается принадлежащей средней линии полосы (т. е. является центром симметрии новой полосы). Образованная таким образом фигура F^* , для которой, очевидно, точка O является центром симметрии (рис. 49, а, б) и называется образом фигуры F при симметризации относительно точки O .

Можно доказать следующие свойства симметризации Минковского, переводящей выпуклую фигуру F в новую фигуру F^* :

1°. Для любой выпуклой фигуры F фигура F^* тоже будет выпуклой.

2°. Диаметр и ширина фигуры F^* равны диаметру и ширине фигуры F .

3°. Периметр фигуры F^* равен периметру фигуры F .

4°. Площадь фигуры F^* не меньше площади фигуры F .

Эти свойства используются для доказательства ряда связанных с выпуклыми фигурами теорем.

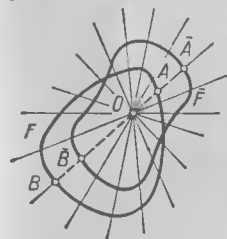


Рис. 48

Примечание. Так, например, из свойств 2° и 4° симметризации Минковского следует, что каждую выпуклую фигуру F диаметра D можно заменить центрально симметричной фигурой F^* того же диаметра и не меньшей площади, откуда вытекает, что из всех фигур диаметра D наибольшую площадь может иметь лишь центрально симметричная фигура. А так как каждая фигура диаметра D с центром сим-

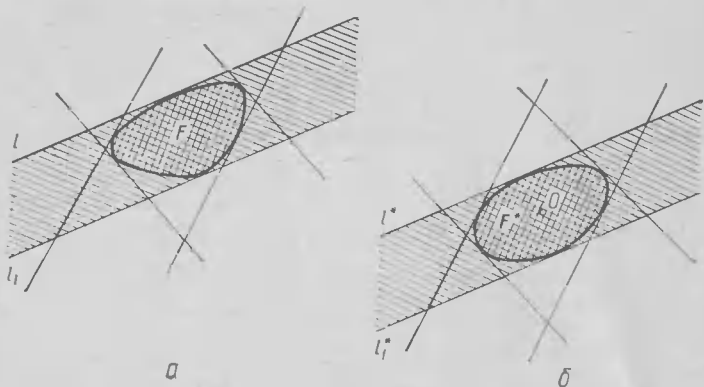


Рис. 49

метрии O заключается, очевидно, внутри круга с центром O и радиусом $\frac{D}{2}$, то отсюда имеем, что из всех (выпуклых) фигур фиксированного диаметра наибольшую площадь имеет круг.

Нам, однако, нужно здесь лишь свойство 1° симметризации Минковского, которое мы и докажем, заменив предварительно данное выше определение симметризации относительно точки другим, более удобным.

Пусть F — произвольная плоская выпуклая фигура, F' — фигура, симметричная F относительно некоторой точки O , а F^* — фигура, образованная серединами A^* всевозможных стрелок AA' , где $A \in F$, а $A' \in F'$ (рис. 50). Полученную таким образом фигуру F^* можно также описать следующим образом: если принять точку O за начало отсчета радиусов в векторах, сопоставляя каждой точке N плоскости ее радиус-вектор $r_N = ON$, то F^* есть множество всех таких точек A^* , что

$$r_{A^*} = \frac{1}{2} (r_A + r_{A'}), \quad \text{где } A \in F, \quad A' \in F'. \quad (7)$$

или

$$r_{A^*} = \frac{1}{2}(r_A - r_{A_1}) = \frac{1}{2} A_1 A, \text{ где } A, A_1 \in F$$

ибо на рис. 50 $r_{A_1} = -r_{A'}$, где $A' \in F'$, $A_1 \in F$, $OA^* = \frac{1}{2}A_1A$.

Фигуру F^* и будем называть о б р а з о м фигуры F при симметризации относительно точки O . Предлагаем читателю установить, что та-

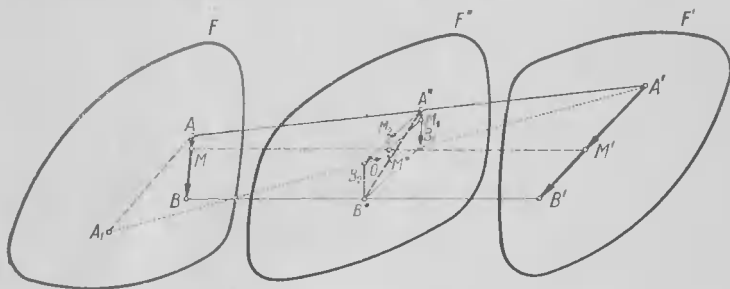


Рис. 50

кое определение симметризации Минковского равносильно данному выше. А теперь докажем, что полученная фигура F^*

1) центрально-симметрична;

2) выпуклая.

1) Так как центральная симметрия относительно O (поворот вокруг O на 180°) лишь меняет местами фигуры F и F' , то это преобразование переводит множество F^* среди всех отрезков, соединяющих точки F с точками F' , само в себя таким образом. точка O является центром симметрии фигуры F^* .

2) Пусть A^* и B^* — две произвольные точки фигуры F^* . Нам надо показать, что отрезок A^*B^* целиком принадлежит F^* . По определению фигуры F^* точки A^* и B^* являются серединами некоторых отрезков AA' и BB' , где $A, B \in F$ и $A', B' \in F'$. Но так как фигуры F и F' выпуклые, то каждая точка M отрезка AB принадлежит F , а каждая точка M' отрезка $A'B'$ принадлежит F' . Поэтому F^* принадлежит определяемая равенством

$$r_{M^*} = \frac{1}{2}(r_M + r_{M'})$$

середина M^* каждого из отрезков MM' .

Заметим теперь, что

$$r_M = r_A + AM \text{ и } r_{M'} = r_{A'} + A'M',$$

где

$$AM = l \cdot AB, \quad A'M' = l' \cdot A'B'; \quad 0 \leq l \leq 1, \quad 0 \leq l' \leq 1.$$

Отложим от точки A^* векторы

$$A^*B_1 = \frac{1}{2} AB, \quad A^*B_2 = \frac{1}{2} A'B', \quad A^*M_1 = \frac{1}{2} AM,$$

$$A^*M_2 = \frac{1}{2} A'M',$$

тогда

$$\begin{aligned} r_{M^*} &= \frac{1}{2}(r_M + r_{M'}) = \frac{1}{2}[(r_A + AM) + (r_{A'} + A'M')] = \\ &= \frac{1}{2}(r_A + r_{A'}) + \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}A'M' = r_{A^*} + A^*M_1 + A^*M_2 = \\ &= OA^* + A^*M^*, \end{aligned}$$

где A^*M^* — диагональ параллелограмма $A^*M_1M^*M_2$, построенного на векторах A^*M_1 и A^*M_2 .

Когда l и l' пробегают все значения между нулем и единицей, то вершины M^* параллелограммов $A^*M_1M^*M_2$ «заметают» параллелограмм $A^*B_1B^*A_2$, построенный на векторах A^*B_1 и A^*B_2 . Вершиной этого параллелограмма является точка B^* , так как при $l = l' = 1$ точки M и M' совпадают с точками B и B' , а следовательно, точка M^* совпадает с точкой B^* . Таким образом, параллелограмм $A^*B_1B^*B_2$ полностью принадлежит фигуре F^* , поскольку F^* принадлежит к а ж д а я его точка M^* . В частности, F^* принадлежит и отрезок A^*B^* — диагональ рассматриваемого параллелограмма, — что и доказывает выпуклость F^* .

Покажем теперь, что если фигура F^* получается из фигуры F симметризацией Минковского, то

$$k(F^*) = k(F) \quad (8)$$

(см. л е м м у на стр. 38). Рассмотрим две фигуры F_a и F_b , получаемые из фигуры F параллельными переносами на векторы a и b , а также фигуры F_a^* и F_b^* , получаемые т а к и м ж е образом из фигуры F^* (рис. 51).

Докажем, что если фигуры F_a и F_b соприкасаются (имеют общие граничные точки) или пересекаются (имеют общие внутренние точки), то и фигуры F_a^* и F_b^* соответственно соприкасаются или пересекаются и об-

ратно, если фигуры F_a^* и F_b^* соприкасаются (пересекаются), то и фигуры F_a и F_b соприкасаются (пересекаются).

Действительно, если фигуры F_a и F_b имеют общую точку C , получаемую переносом на вектор a из точки C_1 фигуры F и переносом на вектор

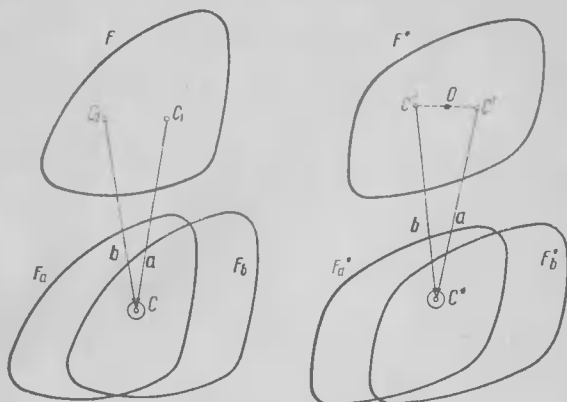


Рис. 51

b из точки C_2 той же фигуры, то (за начало отсчета радиусов-векторов точек мы по-прежнему принимаем точку O)

$$r_{C_1} + a = r_{C_2} + b = r_C,$$

т. е.

$$r_{C_1} - r_{C_2} = b - a.$$

Заметим теперь, что по формуле (7) точки C' и C'' , где

$$r_{C'} = \frac{1}{2}(r_{C_1} - r_{C_2}) \text{ и } r_{C''} = \frac{1}{2}(r_{C_2} - r_{C_1})$$

принадлежат фигуре F^* (эти точки симметричны друг другу относительно центра O фигуры F^*). А так как

$$r_{C'} - r_{C''} = \frac{1}{2}(r_{C_1} - r_{C_2}) - \frac{1}{2}(r_{C_2} - r_{C_1}) = r_{C_1} - r_{C_2} = b - a,$$

то

$$r_{C'} + a = r_{C''} + b.$$

Обозначим точку плоскости с радиусом-вектором $r_{C'} + a$, а также $r_{C''} + b$ через C^* . Ясно, что эта точка принадлежит фигуре F_a^* , так как она получается параллельным переносом на вектор a из точки C' фигуры F , — и в то же время принадлежит фигуре F_b^* , ибо она получается переносом на вектор b из точки C'' фигуры F . Отсюда следует, что фигуры

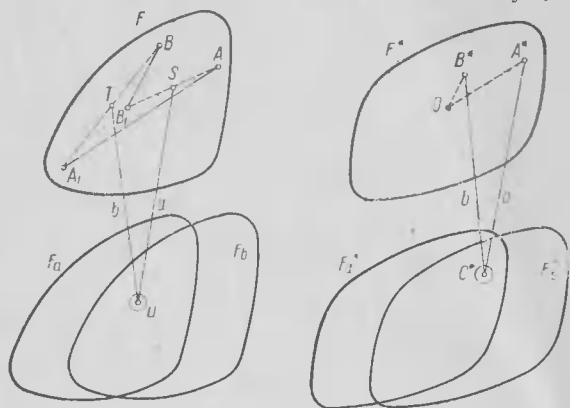


Рис. 52

F_a^* и F_b^* имеют общую точку C^* . Более того, если все точки, достаточно близкие к точке C , являются общими для фигур F_a и F_b , т. е. если эти фигуры пересекаются, то все точки, близкие к точке C^* , являются общими для фигур F_a^* и F_b^* , т. е. эти фигуры тоже пересекаются.

Обратно, предположим, что фигуры F_a^* и F_b^* имеют общую точку C^* , т. е. что

$$r_{C^*} = r_{A^*} + a = r_{B^*} + b,$$

где

$$r_{A^*} = \frac{1}{2}(r_A - r_{A_1}), \quad r_{B^*} = \frac{1}{2}(r_B - r_{B_1});$$

точки $A, A_1, B, B_1 \in F$, следовательно $A^*, B^* \in F^*$ (рис. 52). Тогда имеем

$$\frac{1}{2}(r_A - r_{A_1}) + a = \frac{1}{2}(r_B - r_{B_1}) + b,$$

т. е.

$$\frac{1}{2}(r_A + r_{B_1}) + a = \frac{1}{2}(r_B + r_{A_1}) + b.$$

Но, очевидно,

$$\frac{1}{2}(r_A + r_{B_1}) = r_S, \quad \frac{1}{2}(r_B + r_{A_1}) = r_T,$$

где S и T — середины отрезков AB_1 и BA_1 , принадлежащие выпуклой фигуре F . Следовательно,

$$r_S + a = r_T + b,$$

т. е. точка U фигуры F_a , получаемая из точки S фигуры F переносом на вектор a , совпадает с точкой фигуры F_b , получаемой из точки T фигуры F переносом на вектор b . Таким образом, фигуры F_a и F_b имеют общую точку U ; при этом, в точности как и выше, легко установить, что если C^* — внутренняя точка фигур F_a^* и F_b^* , то U — внутренняя точка фигур F_a и F_b .

Теперь мы можем уже непосредственно доказать справедливость формулы (8). Предположим, что характеристика $k(F)$ фигуры F равна некоторому числу k , т. е., что можно найти k непересекающихся фигур F_1, F_2, \dots, F_k , получаемых из фигуры F параллельными переносами на векторы a_1, a_2, \dots, a_k таких, что ни одна из них не пересекает фигуры F , но все они соприкасаются с F и что нельзя найти более k фигур, обладающих этими свойствами. Пусть F^* — центрально симметричная фигура, получаемая из F симметризацией Минковского; тогда:

1) центрально симметричные фигуры $F_1^*, F_2^*, \dots, F_k^*$, получаемые из фигуры F^* параллельными переносами на векторы a_1, a_2, \dots, a_k , также не пересекаются между собой, не пересекают фигуры F^* , но имеют с F^* общие граничные точки;

2) если бы к F^* можно было бы «приложить» $k+1$ непересекающихся фигур $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_{k+1}$, получаемых из F^* параллельными переносами на векторы b_1, b_2, \dots, b_{k+1} , то к F можно было бы приложить $k+1$ непересекающихся равных F и параллельно F расположенных фигур $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_{k+1}$, полученных из F параллельными переносами на векторы b_1, b_2, \dots, b_{k+1} . — что, однако, противоречит сделанному предположению.

Таким образом,

$$k(F^*) = k(F) \quad (= k),$$

что и завершает доказательство леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг. Разбиение фигур на меньшие части. М., «Наука», 1971.
2. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Выпуклые фигуры и тела. ЭЭМ, кн. V (геометрия). М., «Наука», 1966, с. 181—269.
3. В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Геометрические задачи на максимум и минимум, ЭЭМ, кн. V, с. 270—348.
4. Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин. Математические соревнования (геометрия). М., «Наука», 1974.
5. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли. Теорема Хелли. М., «Мир», 1969.
6. Л. А. Люстерник. Выпуклые фигуры и многогранники. М., Гостехиздат, 1956.
7. К. А. Роджерс. Укладки и покрытия. М., «Мир», 1968.
8. Л. Фейеш Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М., Физматгиз, 1958.
9. Г. Хадвигер, Г. Дебруннер. Комбинаторная геометрия плоскости. М., «Наука», 1965.
10. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М., «Наука», 1970.
11. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. М., «Наука», 1974.
12. Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом. Избранные задачи и теоремы планиметрии. М., «Наука», 1967.
13. И. М. Яглом. О комбинаторной геометрии. М., «Знание», 1971.
14. И. М. Яглом. Элементарная геометрия прежде и теперь. М., «Знание», 1972.
15. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский. Выпуклые фигуры. М.—Л., Гостехиздат, 1951.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Задачи о кругах и шарах	
§ 1. Задача Ньютона — Грегори	5
§ 2. Задача о четырнадцати шарах	12
§ 3. Задача о шарах в n -мерном пространстве	19
§ 4. Дальнейшие обобщения и видоизменения основной задачи	28
Глава II. Задачи о многоугольниках, многогранниках и произвольных фигурах	
§ 5. Теорема Хадвигера	32
§ 6. Доказательство теоремы Хадвигера	37
§ 7. Задачи о прикладывании квадратов и треугольников	44
§ 8. Обобщения и варианты	52
<i>Приложение</i>	
I. Несколько теорем из элементарной геометрии	68
II. О симметризации Минковского	76
Литература	84

Яглом Исаак Моисеевич

Проблема тринадцати шаров

Пособие для учащихся физико-математических школ

Издательское объединение «Вища школа»
Головное издательство

Редактор Г. Ф. Трофимчук. Обложка художника Е. В. Попова. Художественный редактор И. Р. Ойхман. Технический редактор А. Д. Новик. Корректор Н. В. Косачева.

Сдано в набор 14.11.1974 г. Подписано к печати 25.07.1975 г. Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{32}$. Бумага книжно-журнальная. Физ.-печ. л. 2,625. Условн. печ. л. 3,67. Уч.-изд. л. 3,53. Тираж 40 000. Изд. № 1605. БФ 08139. Цена 12 коп. Зак. № 1406.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа»
252054, Киев. 54. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкига» Госкомиздата УССР, г. Киев, ул. Довженко, 3, в Киевской типографии № 1, ул. Волошская, 55.