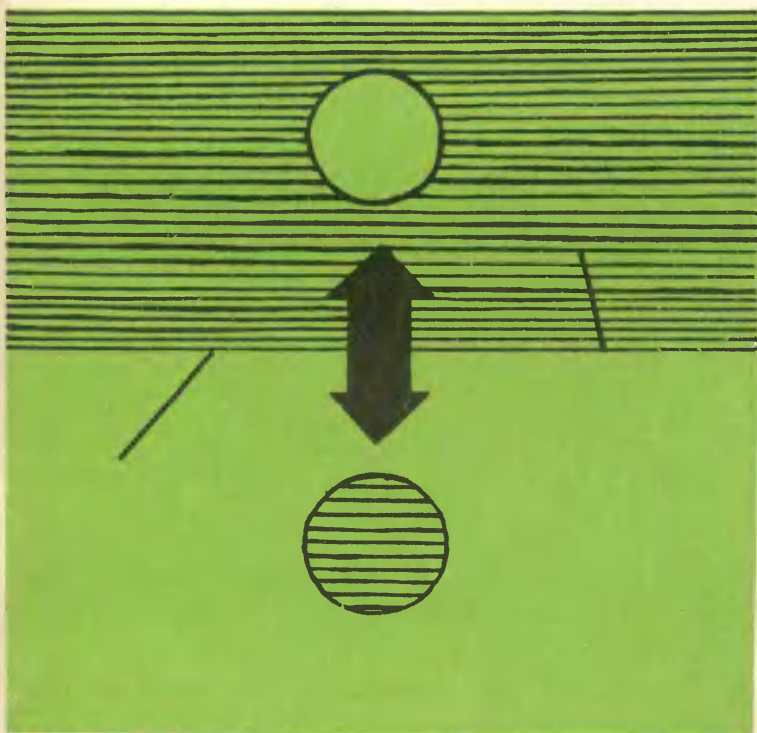


Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

М.И. Башманов

# Уравнения и неравенства



Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

Выпуск 5

М. И. Башмаков

# Уравнения и неравенства

Издание второе,  
переработанное

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
Москва 1976

512  
Б 33  
УДК 512

Математика

Библиотечка  
физико-математической  
школы

Б  $\frac{20202-134}{053(02)-76}$  29-76

© Главная редакция  
физико-математической литературы  
издательства «Наука», 1976,  
с изменениями.

«Какой в этом смысл?» — спросил Кролик. — «Ну, — сказал Пух, — мы все время ищем Дом и не находим его. Вот я и думаю, что если мы будем искать эту Яму, то мы ее обязательно не найдем, и тогда мы, может быть, найдем то, чего мы как будто не ищем, а оно-то есть то, что мы на самом деле ищем».

А. Милн, Винни-Пух и все остальные,  
гл. XV.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Решить уравнение, решить неравенство... С этим сортом задач мы сталкиваемся очень часто. Пишем подряд какие-то формулы, радуемся, когда они становятся проще и проще, наконец, видим желанное равенство, например  $x = 100$ , и объявляем, что уравнение решено. Это напоминает прополку грядки человеком, которому не сказали, что на ней должно расти.

Цель этой книжки — помочь научиться пропалывать грядку так, чтобы все нужное оставить, а все лишнее — выдернуть. Сначала мы познакомимся со всеми растениями, которые будут расти на нашей грядке, научимся их быстро узнавать, классифицировать, удобно обозначать. Этому посвящена довольно длинная вводная глава. Затем мы попробуем точно сформулировать, чего же мы добиваемся, что мы понимаем под словами «решить уравнение», «решить неравенство» и т. п., обдумаем смысл тех операций, тех преобразований, которые мы используем для достижения цели.

Все это вместе довольно легко, потому что сложной теории здесь нет, большая часть книжки состоит просто из примеров. С другой стороны, хотя заниматься мы будем самыми привычными вещами, иногда привычки придется ломать и создавать новые.

Круг рассмотренных вопросов намеренно ограничен: разбираются почти исключительно алгебраические уравнения и неравенства, совсем мало места отведено интересным и важным задачам, касающимся доказательства неравенств, которые, как мы надеемся, будут включены в одну из книжек этой серии.

Книжка носит ярко выраженный «технический» характер. В ней много задач, требующих только хорошего владения школьным материалом, близких к конкурсным задачам при поступлении в институт. Примеры, показываемые в тексте, требуют внимательного разбора с карандашом в руке.

Книга рассчитана на школьников 9—10 классов, учителей и лиц, самостоятельно занимающихся математикой.

Я глубоко благодарен Н. Б. Васильеву, Д. А. Владимирову, В. Л. Гутенмахеру, Ю. И. Ионину, Д. К. Фаддееву, прочитавшим рукопись и много сделавшим для ее улучшения.

## ГЛАВА I

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Числа

В этой книге мы всюду имеем дело с вещественными числами. Мы не будем здесь давать определение того, что такое вещественное число. Вместо этого просто перечислим те свойства чисел, которыми мы пользуемся.

Что же мы обычно делаем с числами?

Прежде всего, мы совершаем арифметические действия — сложение и умножение, с помощью которых мы можем из двух чисел получить третье — их сумму или произведение.

Эти действия обладают рядом свойств. Основными свойствами сложения являются следующие:

1.  $a + b = b + a$  — *переместительный*, или *коммутативный*, закон сложения.

2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  — *сочетательный*, или *ассоциативный*, закон сложения.

3. Существует особое число 0 (нуль) такое, что для любого числа  $a$  справедливо равенство  $a + 0 = a$ .

4. Для любого числа  $a$  существует *противоположное* число  $(-a)$  такое, что их сумма равна числу 0, т. е.

$$a + (-a) = 0.$$

Последнее свойство позволяет определить *обратное* действие — вычитание. *Вычитание* из числа  $a$  числа  $b$  определяется как сложение числа  $a$  с числом  $(-b)$ , противоположным числу  $b$ .

*Умножение* обладает свойствами, очень похожими на свойства сложения. Именно:

5.  $ab = ba$  — *переместительный*, или *коммутативный*, закон умножения.

6.  $(ab)c = a(bc)$  — *сочетательный*, или *ассоциативный*, закон умножения.

7. Существует особое число 1 (единица) такое, что для любого числа  $a$  справедливо равенство  $a \cdot 1 = a$ .

8. Для всякого числа  $a$ , отличного от числа 0, существует *обратное* число  $a^{-1} = 1/a$  такое, что  $a \cdot a^{-1} = 1$ .

С умножением тесно связано *обратное* действие — деление. Деление числа  $a$  на число  $b$ , отличное от нуля, определяется как умножение числа  $a$  на число  $1/b$ , обратное к числу  $b$ .

Сложение с умножением связано так называемым *распределительным*, или *дистрибутивным*, законом:

$$9. (a + b)c = ac + bc.$$

Число 0 по отношению к действиям умножения и деления является *исключительным*. Произведение любого числа на нуль равно нулю. Деление же на нуль не имеет смысла (не определено).

Важным свойством умножения является следующее: если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю.

Множество всех вещественных чисел удобно представлять себе как множество всех точек некоторой прямой, называемой в таком случае координатной прямой или числовой осью. Соответствие между числами и точками числовой оси при обучении математике не менее существенно, чем, например, соответствие между буквами и звуками при обучении чтению. Оно лежит в основе языка, на котором излагаются целые главы математики. Этот язык настолько привычен, что мы часто вместо слова «число» говорим «точка» и наоборот. Поэтому, например, мы не будем старательно различать координатную прямую (числовую ось) и числовую прямую, т. е. само множество вещественных чисел  $\mathbb{R}$ .

Напомним, что для того, чтобы каждая точка оси была изображением некоторого числа, одних рациональных чисел оказывается недостаточно. Для того чтобы сплошь заполнить числами всю прямую, к множеству рациональных чисел присоединяют новые, иррациональные числа. Вместе все эти числа, рациональные и иррациональные, носят название *вещественных* или *действительных* чисел.

В этом «полном» множестве вещественных чисел уже можно определять такие операции, как извлечение корня, возведение в произвольную степень, взятие логарифма.

рифма (правда, все эти операции безоговорочно выполняемы только для положительных чисел), и другие. Остановимся коротко на операции извлечения корня, необходимой при решении алгебраических уравнений.

Примем без доказательства, что для любого *положительного* числа  $a$  существует единственное *положительное* число  $b$  такое, что  $b^n = a$  (здесь  $n$  — произвольное натуральное число). Очевидно,  $b^n = 0$  тогда и только тогда, когда  $b = 0$ . Отсюда следует, что из любого неотрицательного числа можно извлечь корень с любым натуральным показателем, причем единственным образом, если ограничиться неотрицательным значением. Этот (единственный) неотрицательный корень обозначается так:  $\sqrt[n]{a}$ .

Кроме операций над числами нам приходится рассматривать отношения между ними — отношение равенства (совпадают они между собой или нет) и отношение порядка, или, как мы будем часто говорить, отношение «больше — меньше».

То, что  $a$  больше  $b$ , будем записывать так:  $a > b$ . Для любых двух чисел верно одно и только одно из трех: 1)  $a > b$ , 2)  $a = b$ , 3)  $b > a$ . Можно писать и так:  $a < b$  ( $a$  меньше  $b$ ), причем, разумеется,  $a$  меньше  $b$  в тех и только тех случаях, когда  $b$  больше  $a$ , так что ничего нового, кроме некоторого удобства, отношение  $a < b$  не дает.

Употребляется также знак  $\leq$ . Неравенство  $a \leq b$  верно тогда и только тогда, когда верно неравенство  $a < b$  или верно равенство  $a = b$ . Так, в частности, верны неравенства  $3 \leq 3$ ,  $3 \leq 5$ ,  $-1 \leq 0$ .

Читается неравенство  $a \leq b$  так: « $a$  меньше или равно  $b$ », или « $a$  не больше  $b$ », или « $a$  не превосходит  $b$ ». Когда хотят подчеркнуть, что имеются в виду неравенства вида  $a > b$ , то говорят, что это *строгое* неравенство, а неравенство  $a \geq b$  называют *нестрогим* неравенством.

С помощью знака  $\geq$  особенно удобно переходить к *противоположному* неравенству: если  $a > b$  неверно, то верно, что либо  $a = b$ , либо  $a < b$ , т. е.  $a \leq b$ . Точно так же, если  $a \geq b$  неверно, то верно  $a < b$ .

Отношение порядка между числами очень наглядно представляется геометрически. Если положительное направление оси выбрано слева направо, то точка, соответствующая большему числу, расположена правее. Свойства



отношения «больше — меньше» будут изучены подробно в главе II.

А пока займемся тем, что введем обозначения для некоторых множеств на прямой. Эти обозначения будут несколько отличаться от принятых в настоящее время в школьных учебниках. Однако именно они применяются в большей части современной математической литературы, и учащимся полезно с ними познакомиться.

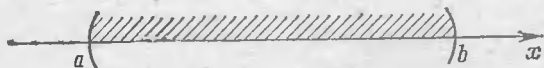


Рис. 1.

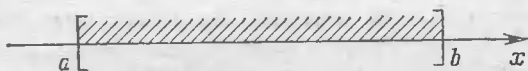


Рис. 2.

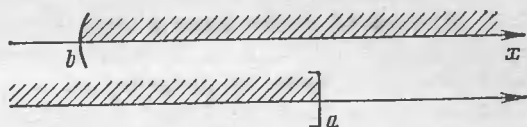


Рис. 3.

Пусть  $a < b$ . Все числа  $x$ , для которых  $a < x < b$ <sup>1)</sup>, заполняют отрезок оси с концами в точках  $a$  и  $b$  (причем сами точки  $a$  и  $b$  не включаются) (рис. 1).

Это множество чисел (точек на оси) мы будем обозначать так:  $(a; b)$ ; читается эта запись: «промежуток  $(a; b)$ » или «интервал  $(a; b)$ ».

Допустим, что мы хотим записать отрезок между числами  $a$  и  $b$  вместе с его концами (рис. 2), т. е. множество всех чисел  $x$ , для которых  $a \leq x \leq b$ . Для этого отрезка будем применять такое обозначение:  $[a; b]$ .

С помощью тех же скобок можно записывать и отрезок, в который включен только один из его концов. Нам хотелось бы иметь похожую запись и для лучей, т. е. для множеств чисел  $x$  такого вида:  $x \geq b$ ,  $x \leq a$  (рис. 3).

<sup>1)</sup> Читается: « $x$  больше  $a$  и меньше  $b$ ».

Для этого введем два знака:  $-\infty$  и  $+\infty$  (читать их будем так: «минус бесконечность», «плюс бесконечность»), Сведем все обозначения в такую таблицу:

Множество всех чисел $x$ , удовлетворяющих условию	Обозначается
$a < x < b$	$(a; b)$
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
$a < x \leq b$	$(a; b]$
$a \leq x < b$	$[a; b)$
$x < a$	$(-\infty; a)$
$x \leq a$	$(-\infty; a]$
$x > b$	$(b; +\infty)$
$x \geq b$	$[b; +\infty)$

Всю числовую ось, т. е. множество всех вещественных чисел, обозначают символом  $(-\infty; +\infty)$ , или просто буквой  $\mathbb{R}$ .

Наконец, если нам потребуется записать множество чисел, заполняющих не один, а два или несколько отрезков, то эти отрезки будем писать не просто рядом, а будем ставить между ними «чашечку»  $\cup$  — знак объединения множеств. Так,  $[-1; 3] \cup [5; 7]$  обозначает множество чисел, заполняющих два отрезка на числовой оси

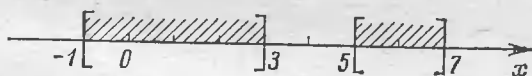


Рис. 4.

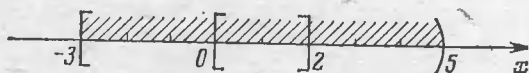


Рис. 5.

(рис. 4). Заметим, что если два отрезка, объединяемые с помощью  $\cup$ , налегают друг на друга, то их объединение можно записать в виде одного отрезка, например:  $[-3; 2] \cup [0; 5) = [-3; 5)$  (рис. 5).

Напомним еще одно обозначение:  $x \in X$  — это означает, что  $x$  есть элемент множества  $X$ ; например, неравенства  $a < x < b$  можно записать в виде  $x \in (a; b)$ , а то, что  $x \geq 3$ , можно записать так:  $x \in [3; +\infty)$ .

Итак, мы с вами научились коротко записывать промежутки на числовой оси. Покажем, почему это удобно. Бывает, что, решая неравенства, ученики пишут ответ в таком, например, виде:

$$x > 3, \quad x \leq 5, \quad x < 0.$$

Из такой записи (так же как из рис. 6) совершенно неясно, какое множество чисел считать ответом.



Рис. 6.

Если имеется в виду, что нужны числа  $x$ , удовлетворяющие хотя бы одному из написанных неравенств, то

$$x \in (3; +\infty) \cup (-\infty; 5] \cup (-\infty; 0).$$

Очевидно, это будут все действительные числа, так как каждое число попадает хотя бы в один из указанных отрезков. Тогда ответ можно записать так:  $X = \mathbb{R}$ .

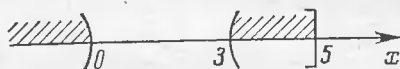


Рис. 7.

Если же нужны числа, удовлетворяющие одновременно всем трем неравенствам, то это записывается обычно с помощью «перевернутой чашечки»:

$$x \in (3; +\infty) \cap (-\infty; 5] \cap (-\infty; 0).$$

Очевидно, таких чисел не будет вовсе (как говорят, «множество решений пусто»).

Но, может быть, ответ такой:  $x$  удовлетворяет или одновременно первым двум неравенствам, т. е.  $x \in (3; +\infty) \cap (-\infty; 5]$ , или третьему неравенству, т. е.  $x \in (-\infty; 0)$ ? В таком случае (рис. 7) мы пишем

$$X = ((3; +\infty) \cap (-\infty; 5]) \cup (-\infty; 0) = (3; 5] \cup (-\infty, 0).$$

## УПРАЖНЕНИЯ

1.1. Операции сложения и умножения выполнимы во множестве всех целых чисел, а также во множестве рациональных чисел. Проверьте, что свойства 1—7, 9 верны для множеств целых чисел и рациональных чисел, а свойство 8 — только для множества рациональных чисел.

1.2. Докажите, что во множестве рациональных чисел не найдется такого числа  $b$ , что  $b^2 = 2$ .

1.3. На числовой оси покажите промежутки, соответствующие следующим условиям, и запишите их с помощью введенных обозначений:

а)  $1 \leq x \leq 5$ ; б)  $x > 7$ ; в)  $0 < x \leq 3$ ; г)  $x \leq -1$ .

1.4. На числовой оси изобразите следующие множества:

а)  $(-3; 5] \cup (6; 7]$ ; б)  $(-\infty; 1] \cup (0; 2]$ ;

в)  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ; г)  $[-2; -1] \cup [-1; 3) \cup [3; 4)$ .

Там, где это возможно, запишите полученные множества короче.

1.5. Обозначьте на числовой оси множества чисел, удовлетворяющие одновременно следующим условиям:

а)  $x > 0$ ,  $x \leq 5$ ,  $3 < x \leq 7$ ; б)  $-3 < x \leq 2$ ,  $-1 < x \leq 5$ ;

в)  $3 < x$ ,  $x < 5$ ,  $0 \leq x < 3$ ; г)  $x \in (3; -1]$ ,  $x \in (-2; +\infty)$ .

Запишите результат с помощью введенных обозначений. (Например, он может выглядеть так:  $X = (-\infty; 3] \cap (5; 6)$ .)

## § 2. Высказывания

До сих пор мы рассматривали некоторые понятия и удобные обозначения, касающиеся числовых множеств. А теперь поговорим о понятиях и обозначениях, связанных с логическими рассуждениями, которые мы проводим при решении уравнений, неравенств и вообще при решении разных математических задач и доказательстве теорем.

Эти рассуждения формулируются в виде каких-то утверждений, высказываний. Вот примеры самых простых математических высказываний:

1)  $2 \cdot 2 = 4$ ;

2)  $2 \cdot 2 > 9$ ;

3) 1649 делится на 17;

4) треугольник со сторонами 3, 5, 7 имеет ось симметрии.

Высказывания могут быть верными и неверными. Так, утверждения в первом и третьем примерах верны, истинны, а остальные ложны.

Из одних высказываний можно строить новые с помощью логических союзов. Так, утверждение

$$16 < \sqrt[3]{5000} < 17$$

можно считать составленным из двух утверждений

$$16 < \sqrt[3]{5000} \text{ и } \sqrt[3]{5000} < 17$$

с помощью союза **и**, который показывает, что оба утверждения должны выполняться одновременно; на самом деле  $\sqrt[3]{5000}$  больше 17, поэтому утверждение  $16 < \sqrt[3]{5000} < 17$  неверно. Высказывание

$$\text{число } 313^{641} + 2 \text{ делится на } 727 \text{ или на } 757$$

может быть составлено из высказываний

$$\text{число } 313^{641} + 2 \text{ делится на } 727,$$

$$\text{число } 313^{641} + 2 \text{ делится на } 757$$

с помощью союза **или**. Оно будет верно, если верно хотя бы одно из двух составляющих его утверждений; заметим, что верными могут оказаться и оба. Высказывание  $5^2 \geq 25$  можно считать составленным из двух:  $5^2 > 25$ ,  $5^2 = 25$  с помощью союза **или**. Итак, подчеркнем еще раз: **и**, соединяющее два высказывания, означает, что они должны выполняться оба одновременно — и то, и другое; **или** — что должно выполняться хотя бы одно из них — или то, или другое (или оба вместе). В обычной речи союзы «и» и «или» не всегда употребляются именно в этом смысле. Когда мы захотим подчеркнуть, что вкладываем в них этот точный смысл, мы будем использовать жирный шрифт.

Многие теоремы имеют такую форму: *если ..., то ...*. Например, *если число  $2^{40} + 1$  делится на 51, то оно делится на 17*. Для записи таких утверждений будем употреблять значок  $\Rightarrow$ . Так, если обозначить через  $A$  первое утверждение ( $2^{40} + 1$  делится на 51), а через  $B$  — второе ( $2^{60} + 1$  делится на 17), то все исходное утверждение можно записать так:  $A \Rightarrow B$  — и прочесть: «из  $A$  следует  $B$ , из  $A$  вытекает  $B$ , если  $A$ , то  $B$ » и т. п.

Высказывание  $A \Rightarrow B$  считается неверным только в том случае, если  $A$  верно, а  $B$  неверно; например,

$$2 = 0 \Rightarrow 0 = 0,$$

$$12 < 6 \Rightarrow 10 < 4,$$

$$25 < 27 \Rightarrow \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

верны, а

$$3 < 5 \Rightarrow -3 < -5$$

неверно. Мы скоро увидим, почему такое соглашение удобно.

Часто бывает нужно написать: *из  $A$  следует  $B$*  и *из  $B$  следует  $A$* , т. е. соединить высказывания  $A \Rightarrow B$  и  $B \Rightarrow A$  союзом **и**. Для этого будет употребляться значок  $\Leftrightarrow$  (его часто читают так: «эквивалентно», «равносильно»;  $A \Leftrightarrow B$  означает, что  $A$  выполняется в тех и только тех случаях, когда выполняется  $B$ ).

Вы, наверно, заметили, что во всех наших примерах утверждения относились к конкретным числам и истинность их можно было проверять, хотя бы в принципе, прямым вычислением. Сила математики состоит в том, что она умеет обращаться с переменными высказываниями.

Можно составить такую заготовку: *число ... делится на 727 или число ... делится на 757*, а затем вместо многоточия подставлять различные целые числа и для них проверять верность получившегося утверждения. Вместо многоточия пишут обычно какую-нибудь букву, скажем  $x$ , и считают ее переменной. При этом нужно знать, какие значения может принимать такая переменная.

Приведем примеры высказываний с переменными<sup>1)</sup>.

1) Пусть  $x$  и  $y$  — натуральные числа; если  $xy$  делится на 6, то  $x$  делится на 6 или  $y$  делится на 6.

Нам сказано, какие числа можно подставлять в это переменное высказывание. При одних значениях переменных может получиться верное высказывание (скажем, при  $x = 12$ ,  $y = 3$ ), а при других — неверное (например, при  $x = 2$ ,  $y = 3$ ).

<sup>1)</sup> Термин *высказывание* часто используют только для «*постоянных высказываний*», каждое из которых либо истинно, либо ложно. «Переменные высказывания» называют предложениями с переменными, или *высказывательными формами*; из такой «формы» могут получаться разные конкретные высказывания — и истинные, и ложные — в зависимости от того, что в нее подставить.

2) Четырехугольник  $S$  является параллелограммом.  
Здесь  $S$  — переменная; область значений  $S$  указана, это — множество всех четырехугольников.

3) Число  $a$  делится на 6.

Здесь переменная обозначена буквой  $a$ . Следовало, конечно, указать область ее значений. К сожалению, это делают не всегда. Разумно считать в этом примере областью значений  $a$  множество всех целых чисел.

4)  $x$  — вещественное число;  $x > 0 \Rightarrow x > -2$ .

5)  $a$  и  $b$  — вещественные числа;

$$|a| = b \Rightarrow [b \geq 0 \text{ и } (a = b \text{ или } a = -b)].$$

В последних двух примерах мы получаем верные высказывания при всех значениях переменных (эти примеры оправдывают несколько странное на первый взгляд соглашение о том, что высказывания «ложь  $\Rightarrow$  истина» и «ложь  $\Rightarrow$  ложь» считаются верными: подставьте в 4)  $x = -1$  и  $x = -3$ ).

Читая любую математическую книгу, вы заметите, что в тех случаях, когда следует сказать: «при всех  $x$  верно высказывание  $A(x)$ », часто говорят: « $A(x)$  при всех  $x$ », или « $A(x)$  верно», или даже просто « $A(x)$ »; слова «при всех значениях переменной» и «верно» подразумеваются. Например, говорят просто: «квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов», а не «верно, что для любого прямоугольного треугольника...» Мы тоже иногда будем пользоваться этим привычным сокращением — и уже пользовались им выше, при перечислении свойств вещественных чисел. Обычно из контекста ясно, подразумевается ли, что высказывание верно при всех значениях переменных, или нет.

Далее в этой книге нас будут интересовать в основном высказывания, составленные с помощью знаков равенства и неравенства:  $=$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ , которые верны лишь при некоторых — далеко не при всех — значениях переменных. Переменные в них будут принимать числовые значения.

## УПРАЖНЕНИЯ

2.1. Рассмотрим следующие утверждения

A:  $S$  — параллелограмм;

B:  $S$  — равнобокая трапеция;

C:  $S$  — ромб;

- $D$ :  $S$  — выпуклый четырехугольник;  
 $E$ : четырехугольник  $S$  имеет ось симметрии;  
 $F$ : четырехугольник  $S$  имеет центр симметрии;  
 $G$ : около  $S$  можно описать окружность;  
 $H$ : в  $S$  можно вписать окружность.

Из них можно составлять другие утверждения с помощью союзов **и**, **или**. Например, утверждение  $D$  и  $E$  означает, что  $S$  — выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии.  $A$  или  $B$  означает, что  $S$  или параллелограмм, или равнобокая трапеция.

а) Укажите, какие утверждения верны<sup>1)</sup>, а какие нет:

- 1)  $A \Rightarrow F$ ; 2)  $A \Rightarrow H$ ; 3)  $G \Rightarrow D$ ;  
 4)  $B \Rightarrow H$ ; 5)  $C \Rightarrow A$ ; 6)  $F \Rightarrow A$ ;  
 7)  $H \Rightarrow C$ ; 8)  $F \Rightarrow D$ ; 9)  $E \Rightarrow F$ ; 10)  $G \Rightarrow A$ .

б) Придумайте три верных и три неверных утверждения такого же типа.

в) Докажите или опровергните следующие теоремы:

- 1)  $F \Leftrightarrow A$ ; 2)  $(B \text{ или } C) \Rightarrow (G \text{ или } H)$ ;  
 3)  $(E \text{ и } G) \Rightarrow B$ ; 4)  $(A \text{ и } H) \Rightarrow C$ ;  
 5)  $(C \text{ и } G) \Leftrightarrow (F \text{ и } E)$ ; 6)  $(D \text{ и } E) \Rightarrow (G \text{ или } H)$ .

2.2. Рассмотрим следующие утверждения:

$A(a)$ : число  $a$  делится на 3;

$B(a)$ : число  $a$  делится на 2;

$C(a)$ : число  $a$  делится на 4;

$D(a)$ : число  $a$  делится на 6;

$E(a)$ : число  $a$  делится на 12

(всюду идет речь только о целых числах). Укажите, какие из следующих утверждений верны<sup>1)</sup>, а какие нет:

- 1)  $(A(a) \text{ и } C(a)) \Rightarrow E(a)$ ; 2)  $(B(a) \text{ и } D(a)) \Rightarrow E(a)$ ;  
 3)  $(C(a) \text{ и } D(a)) \Rightarrow E(a)$ ; 4)  $E(a) \Rightarrow (C(a) \text{ и } D(a))$ ;  
 5)  $E(a) \Rightarrow (B(a) \text{ и } D(a))$ ; 6)  $A(ab) \Rightarrow (A(a) \text{ или } A(b))$ ;  
 7)  $C(ab) \Rightarrow (C(a) \text{ или } C(b))$ ; 8)  $D(ab) \Rightarrow (D(a) \text{ или } D(b))$ ;  
 9)  $B(n-1) \Rightarrow E(n^3 - n)$ ; 10)  $B(n) \Rightarrow E(n^3 + 2n)$ .

### § 3. Функции

Наиболее важная связь между числовыми переменными описывается с помощью понятия функции.

<sup>1)</sup> Здесь «верны» означает «верны при всех значениях переменных».



Задание функции предусматривает задание некоторого множества  $D$  (области определения) и правила, которое каждому элементу из  $D$  сопоставляет некоторое число. Это сопоставление часто обозначают стрелкой, например:

1)  $t \rightarrow t^2$ ;  $t \in [0; +\infty)$ ; это — функция аргумента  $t$ , ее область определения — луч  $0 \leq t < +\infty$ .

2)  $(x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $x > 0$ ,  $y < 0$ ; здесь область определения — некоторое множество пар  $(x, y)$  вещественных чисел<sup>1)</sup>; в этом случае говорят, что задана функция двух аргументов:  $x$  и  $y$ .

Общее математическое понятие *функция* включает и функции, заданные на любых множествах. Вот еще примеры функций:

3)  $\Delta \rightarrow S_\Delta$ , где  $\Delta$  — любой треугольник на координатной плоскости,  $S_\Delta$  — его площадь.

4)  $A \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } A \text{ ложно,} \\ 1, & \text{если } A \text{ истинно,} \end{cases}$   $A$  — любое высказывание,

которое можно записать не более чем десятью русскими словами<sup>2)</sup>.

Но в дальнейшем нам будут встречаться только функции числовых аргументов.

Функцию часто обозначают одной буквой, скажем буквой  $f$ ; при этом для любого  $x$  из области ее определения запись  $f(x)$  означает число, которое сопоставляется элементу  $x$ , — *значение функции* в точке  $x$ .

Например, если  $f_1$  и  $f_2$  — функции из примеров 1) и 2), приведенных выше, то

$$f_1(1) = 1, \quad f_1(\sqrt{5}) = 5, \quad f_2(3, 4) = 5, \quad f_2(0, 1) = 1$$

и вообще

$$f_1(t) = t^2, \quad f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Функции, заданные на одном и том же множестве, можно складывать и перемножать.

<sup>1)</sup> Можно также сказать, что область определения — множество точек  $(x, y)$  таких, что  $x > 0$ ,  $y < 0$ ; когда говорят о функциях двух (или трех) переменных, слово «точка» заменяет слова «пара (тройка) чисел» — подразумевается, что речь идет о точках числовой плоскости (пространства).

<sup>2)</sup> Для точности условимся, что бессмысленные предложения (скажем, такие: «логарифм минус единицы равен сапогу») мы считаем ложными высказываниями.

Если  $f$  и  $g$  — функции, которые определены на множестве  $D$ , то их сумма  $f + g$  и произведение  $fg$  задаются так:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

при каждом  $x \in D$ .

$fg$  и  $f + g$  — это функции с той же областью определения  $D$ . Заметьте, что для этих операций сложения и умножения функций выполнены почти все свойства операций над вещественными числами, о которых мы говорили в начале § 1 (а именно свойства 1—7 и 9); роль нуля и единицы играют функции  $f_0(x) = 0$  при всех  $x \in D$  и  $f_1(x) = 1$  при всех  $x \in D$ .

Подчеркнем еще раз: для того чтобы полностью определить функцию, нужно знать не только правило вычисления ее значений (скажем,  $x \rightarrow x^2$ ), но и множество, на котором она определена. Например,  $x \rightarrow x^2$ ,  $x \in [0; +\infty)$  и  $x \rightarrow x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  — разные функции; про первую из них, определенную на более узком множестве, говорят, что она получается сужением второй функции на множество  $[0; +\infty)$ .

Наиболее употребительные правила вычисления имеют свои знаки:  $+$  (сложение),  $\sqrt{\phantom{x}}$  (извлечение неотрицательного квадратного корня),  $\sin$  (взятие синуса),  $[ ]$  (нахождение целой части),  $\lg$  (логарифмирование по основанию 10) и т. п. Комбинируя их, можно получить много новых правил. Например, запись

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

означает, что число  $y$  вычисляют, исходя из числа  $x$ , последовательно выполняя известные уже операции вычитания, деления, извлечения положительного корня.

Часто бывает, что при задании функции указывают только правило вычисления ее значений, не оговаривая специально, на каком множестве функция определена<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Правила вычисления значений функции называют, короче, *числовыми выражениями*, или *числовыми формами*; например,

$\sqrt{\frac{x}{x-1}}$  — числовая форма. Из такой формы получаются разные числа (или бессмысленные выражения) в зависимости от того, что в нее подставить.

В этом случае считается, что область определения функции состоит из всех чисел, к которым можно применить указанное правило (ее называют *естественной областью определения*). Так, записывая функцию просто в виде

$x \rightarrow \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ , мы считаем ее областью определения множество

$$D = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty).$$

Конечно, нечеткость слов «можно применить правило» вызывает иногда путаницу. В школьном курсе математики обычно принимаются некоторые твердые соглашения об употреблении математических символов. В то же время еще до сих пор встречаются бессодержательные споры, например, о том, считать ли число  $x = -1$  корнем уравнения  $x^2 = -1$  или нет. Просто нет четкой договоренности, при каких значениях  $x$  запись  $x^{x^2}$  «имеет смысл». (Подставьте  $x = -1/2$ ,  $x = -\sqrt{2}$  и т. д.)

Укажем еще на одну нечеткую договоренность: в современных школьных учебниках запись  $\sqrt[n]{a}$  при нечетном  $n$  применяется только для  $a \geq 0$ . Мы также придерживаемся этой договоренности, хотя во многих книгах (и в первом издании этой книги) запись  $\sqrt[n]{a}$  при нечетном  $n$  считается осмысленной и при  $a < 0$  и обозначает единственное вещественное число  $b$  такое, что  $b^n = a$ .

Правило задания одной и той же функции может быть записано по-разному. Так, функции  $x \rightarrow x^2 + 2x + 1$  и  $x \rightarrow (x + 1)^2$  совпадают, так как они имеют одну и ту же естественную область определения  $(-\infty; +\infty)$ , а правило вычисления дает при каждом  $x$  один и тот же результат:  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ . Надо быть очень осторожным при преобразованиях записи правила вычисления значений функции. Производя сокращения и приведение подобных членов, можно получить запись, которая применима к более широкому множеству чисел. Например, для функции

$$x \rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x^2}$$

естественная область определения — множество чисел, отличных от нуля. Производя преобразования

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2},$$

мы получим запись  $x \rightarrow x^2 + 2$ , которая имеет смысл уже при всех  $x$ . В этих случаях при преобразованиях нужно

указывать исходное множество, являющееся областью определения. Это замечание относится к применению всех «опасных» формул, левые и правые части которых имеют смысл при различных множествах значений переменных. Например,

$$\begin{aligned} a/a &= 1, & \sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \\ \lg ab &= \lg a + \lg b, & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x &= 1, \\ \sin 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

## УПРАЖНЕНИЯ

3.1. Может ли равняться нулю произведение двух функций с областью определения  $(0; 1]$ , ни одна из которых не равна тождественно нулю?

3.2. Для следующих функций найдите естественную область определения (т. е. множество точек  $x$ , в которых выражение, стоящее справа, имеет смысл):

$$\text{а) } y = \sqrt{1-x^2}; \quad \text{б) } y = \sqrt{\frac{1}{x(2-x)}}; \quad \text{в) } y = \sqrt{\frac{x}{x-\sqrt{x}}}.$$

Как бы вы описали естественную область определения следующей функции:  $S \rightarrow d_S$ , где  $d_S$  — расстояние от точки пересечения диагоналей многоугольника  $S$  до центра вписанной в  $S$  окружности?

3.3. Совпадают ли функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{1+x} + 1;$$

$$\text{б) } y = \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{x+1};$$

$$\text{в) } y = (\sqrt{x})^2 \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x^2};$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \quad \text{и} \quad y = \frac{6}{x^2-9};$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \quad \text{и} \quad y = \sqrt{x^2+1} + x?$$

Если нет, то как нужно ограничить их естественную область определения (какие сужения функций взять), чтобы они совпали?

## ГЛАВА II

### УРАВНЕНИЯ

#### § 4. Числовые равенства

Возьмем два числа. Подставим между ними знак  $=$ . Получим высказывание, называемое *числовым равенством*.

Приведем примеры:

- 1)  $2 \cdot 2 = 4$ ; 2)  $2 \cdot 2 = 5$ ;
- 3)  $(4 + \sqrt{7}) \cdot (4 - \sqrt{7}) = 3^2$ ;
- 4)  $2^{200} = 10^{30}$ ;
- 5)  $\pi = 3,14$ ; 6)  $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$ ;
- 7)  $\sqrt{6} + \sqrt{9} + \sqrt{19} = 10$ ;
- 8)  $\sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ ;
- 9)  $1/7 = 0,1428561428$ ; 10)  $1917/852 = 2\frac{1}{4}$ .

Равенства, как и всякие высказывания, бывают верные и неверные. Равенство  $2 \cdot 2 = 4$  — верное равенство; равенство  $2 \cdot 2 = 5$  — неверное. Если в двух частях равенства стоят равные числа (они могут быть по-разному записаны), такое равенство будет верным. В двух частях неверного равенства стоят различные числа.

Перечислим некоторые очевидные свойства равенств.

1. Если к двум частям верного равенства прибавить одно и то же число, то получится снова верное равенство.

Это свойство позволяет, в частности, переносить числа из одной части верного равенства в другую с противоположным знаком.

2. Если две части верного равенства умножить на одно и то же число, то получится снова верное равенство.

3. Если две части верного равенства возвести в одну и ту же степень  $n$  ( $n$  — натуральное число), то получится снова верное равенство.

4. Если к двум частям верного равенства применить одну и ту же функцию  $f$ , то получится снова верное равенство.

Применить функцию  $f$  к равенству  $a = b$  — значит составить новое равенство  $f(a) = f(b)$ :

$$a = b \Rightarrow f(a) = f(b).$$

Например, применяя к двум частям равенства  $a = b$  функции

$$x \rightarrow |x|, \quad x \rightarrow \sqrt[3]{x}, \quad x \rightarrow x + 6,$$

получим соответственно равенства

$$|a| = |b|, \quad \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}, \quad a + 6 = b + 6.$$

Конечно, мы предполагаем, что функция  $f$  определена при  $x = a$  и  $x = b$ . Например, переход от равенства  $a = b$  к равенству  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  имеет смысл (для вещественных чисел) только при неотрицательных  $a$  и  $b$ .

1'. Если к двум частям неверного равенства прибавить одно и то же число, то получится снова неверное равенство.

Докажем это, используя свойство 1. Предположим противное. Пусть в результате прибавления числа  $a$  получено верное равенство. Тогда, прибавив к обеим его частям число  $(-a)$ , получим исходное равенство. По свойству 1 это равенство должно получиться верным, что противоречит условию.

Свойства, аналогичные свойствам 2, 3, 4, для неверных равенств могут и не иметь места. Например, умножая обе части неверного равенства  $2 \cdot 2 = 5$  на одно и то же число 0, получим верное равенство  $0 = 0$ . Или, возводя в квадрат неверное равенство  $2 = -2$ , получим верное равенство  $4 = 4$ .

Про какие же операции можно утверждать, что они переводят неверное равенство в неверное? Из доказательства свойства 1' видно, что это выполняется, например, тогда, когда можно однозначно совершить

обратную операцию<sup>1)</sup>). В приведенных примерах рассмотренные операции — умножение на 0, возведение в квадрат — не имеют однозначно определенных обратных.

Полезно иметь в виду такие свойства неверных равенств:

2'. Если две части неверного равенства умножить на одно и то же число, отличное от 0, то равенство остается неверным.

3'. Если в двух частях неверного равенства стоят положительные числа, то после возведения его в степень  $n$  равенство останется неверным.

Чтобы сформулировать еще одно более общее свойство, нам понадобится понятие *монотонной* функции. Напомним, что если для любых  $x$  и  $y$  из области определения функции  $f$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

то функция  $f$  называется возрастающей; если

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

— убывающей. Все такие функции — возрастающие и убывающие — вместе называются *строго монотонными*. (Слово *строго* подчеркивает, что равенство  $f(x) = f(y)$  не допускается.)

4'. Если к двум частям неверного равенства применить строго монотонную функцию, то оно останется неверным.

## УПРАЖНЕНИЯ

4.1. Какие из равенств 6)–10), приведенных в начале параграфа, верны?

4.2. Докажите свойства 2', 3', 4', используя свойства 2, 3 и 4.

4.3 Найдите ошибку в следующем «доказательстве» того, что  $2 = 3$ .

Рассмотрим равенство  $a = b + 1$ . Умножим обе части на  $(a - b)$ :

$$a^2 - ab = ab + a - b^2 - b.$$

Преобразуем:  $a^2 + b^2 = 2ab + a - b$ . Подставим  $a = b = 2$ . Получим  $4 + 4 = 8 + 2 - 2$ . Это — верное равенство, значит, и исходное при  $a = b = 2$  должно быть верным:

$$2 = 2 + 1.$$

4.4. Рассмотрим такое утверждение:  $a \neq b$  ( $a$  не равно  $b$ ). Оно верно тогда, когда неверно утверждение  $a = b$ , и наоборот.

---

<sup>1)</sup> См. упр. 4.5.

Вясните, верны ли утверждения:

а)  $a^2 \neq b^2 \Rightarrow a \neq b$ ;

б)  $a^3 \neq b^3 \Rightarrow a \neq b$ ;

в)  $a^3 \neq b^3 \Rightarrow a^2 \neq b^2$ .

Вы, наверное, заметили, что от высказываний вида  $a \neq b$  удобно переходить к обычному равенству. Проверая, например, правдивость нашего утверждения (а), можно было рассуждать так: пусть  $a \neq b$  неверно; значит,  $a = b$ , а тогда  $a^2 = b^2$ , и мы получили противоречие с данным утверждением  $a^2 \neq b^2$ . Таким образом, высказывание  $a^2 \neq b^2 \Leftarrow a \neq b$  — это точно то же самое, что высказывание  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ . Проверьте с такой точки зрения ваше решение примеров а), б), в) <sup>1)</sup>.

Проверьте истинность утверждений:

г)  $(a^3 + b^3 + c^3 = 0 \text{ и } abc \neq 0) \Rightarrow a + b + c \neq 0$ ;

д)  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 1 \Rightarrow (a + b \neq 0 \text{ и } a + c \neq 0)$ ;

е)  $(a \neq -b \text{ и } b \neq -c \text{ и } c \neq -a) \Rightarrow 1/a + 1/b + 1/c \neq 1/(a + b + c)$ .

4.5. Пусть  $f$  — любая функция и  $M$  — множество всех ее значений. Назовем функцию  $f$  обратимой, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из ее области определения

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

т. е. если она переводит неверное равенство в неверное.

Пусть функция  $f$  обратима. Рассмотрим функцию  $g$ , заданную на множестве  $M$ , значения которой вычисляются по следующему правилу:

каждому числу  $y$  из  $M$  ставится в соответствие число  $x$  такое, что  $f(x) = y$ .

Эта функция  $g$  называется обратной к функции  $f$ . Имеют место тождества  $f(g(y)) = y$  и  $g(f(x)) = x$ .

а) Докажите, что функция  $f: x \rightarrow x^2$ , заданная на множестве отрицательных чисел, обратима. Найдите обратную к  $f$ .

б) Докажите, что функция  $f: x \rightarrow |x + 1| + 2x$  обратима. Запишите с помощью формул правило, по которому вычисляются значения обратной функции  $g$ . Постройте на одном чертеже графики функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ .

в) Проверьте, что функция  $f: x \rightarrow |x + 1| + 2|x|$  не является обратимой. Разбейте числовую ось на такие интервалы, чтобы на каждом из них сужение функции  $f$  стало обратимым. Постройте соответствующие обратные функции.

---

<sup>1)</sup> В математике вместе с утверждением  $A$  часто рассматривается противоположное утверждение  $\bar{A}$ , читающееся: « $A$  неверно».  $A$  верно тогда, когда  $\bar{A}$  неверно, и наоборот.

Употребляя противоположное высказывание, можно наше утверждение записать так: высказывание  $A \Rightarrow B$  равносильно высказыванию  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .

Этот логический закон полезно запомнить.



## § 5. Уравнения

Возьмем две функции  $f$  и  $g$ , заданные на одном и том же числовом множестве  $D$ . Если мы для некоторого числа  $a$  из множества  $D$  вычислим значения функций  $f(a)$  и  $g(a)$  и приравняем их, то получим числовое равенство. Если же мы соединим знаком  $=$  записи  $f(x)$  и  $g(x)$ , где  $x$  — переменная (буква), то получим *уравнение*:  $f(x) = g(x)$ .

Таким образом, можно считать, что уравнение — высказывательная форма (см. сноску на стр. 13), точнее, «форма для числовых равенств». При подстановке вместо  $x$  числового значения получается числовое равенство — верное или неверное.

Примеры:

- 1)  $x(x+1) = x^2 + 5, \quad x \in \mathbf{R};$
- 2)  $3x = 2x - 3, \quad x \in [0; +\infty);$
- 3)  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbf{R};$
- 4)  $x^2 + 1 = x^2 + 2, \quad x \in \mathbf{R}.$

В этих примерах рядом с уравнением указана область определения функций, составляющих это уравнение (в этой книге будем рассматривать только функции вещественного аргумента и, следовательно, искать только вещественные корни уравнений).

Если рядом с уравнением не указывается специально область определения входящих в него функций, то естественно считать, что *область определения уравнения* (ее иногда называют *областью допустимых значений*) — множество всех значений аргумента, при которых определены функции, составляющие уравнение.

Например, у уравнения

$$5) \sqrt{x+3} = 1 + \sqrt{-x}$$

областью определения является множество  $D = [-3; 0]$ .

Мы всегда считаем, что функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, имеют одну и ту же область определения  $D$ .

Часто нужно составлять уравнения с помощью двух функций, имеющих разные естественные области определения, скажем,  $A$  и  $B$ . Тогда сначала сужают области определения этих функций и получают новые функции, заданные на новом множестве  $D = A \cap B$ , но с прежними правилами вычисления значений.

Например, уравнение 5) составлено из функций

$$x \in [-3; 0], \quad x \rightarrow \sqrt{x+3}$$

и

$$x \in [-3; 0], \quad x \rightarrow 1 + \sqrt{-x}.$$

Приведем еще примеры уравнений:

6)  $a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2$ ;

7)  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$ ;

8)  $x^2 + y^2 = z^2$ , где  $z \leq 0$ ;

9)  $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ ;

10)  $\sqrt{x^2 - y} = 1 - x$ .

В этих примерах функции, образующие уравнения, являются функциями нескольких аргументов. *Областью определения* такого уравнения является множество наборов значений аргументов, при которых определены все функции, составляющие уравнение. Например, естественная область определения уравнения 10) — множество пар  $(x, y)$  таких, что  $x^2 \geq y$ .

Аргументы функций, составляющих уравнение, часто называют *неизвестными*. Если в обеих частях уравнения стоят функции одного и того же аргумента, то говорят, что задано уравнение с одним неизвестным. Уравнение 5) — это уравнение с одним неизвестным, а уравнение 8) — это уравнение с тремя неизвестными.

Числовое равенство можно считать уравнением, образованным функциями, принимающими постоянное значение.

*Решением уравнения с одним неизвестным* называется значение неизвестного, при котором уравнение превращается в верное числовое равенство.

Соответственно *решением уравнения с несколькими неизвестными* называется набор значений неизвестных, при подстановке которых в уравнение оно превращается в верное числовое равенство. Часто решения уравнения с одним неизвестным называют *корнями* уравнения.

Например,  $x = 5$  является корнем уравнения 1),  $x = -100$  является корнем уравнения 3), пара чисел  $(5; 0)$ , т. е.  $a = 5$ ,  $b = 0$ , является решением уравнения 6).

Следует обратить внимание на то, что, по определению, решениями могут быть лишь такие значения

неизвестных, которые можно подставить в уравнение, т. е. которые принадлежат области определения функций, входящих в уравнение.

Например, тройка чисел (3; 4; 5) не является решением уравнения 8), так как в нем стоит ограничение  $z \leq 0$ . Аналогично,  $x = -3$  не является корнем уравнения 2).

*Решить уравнение* — это значит найти все его решения, или, как мы будем говорить, найти множество его решений.

*Тождеством* называют уравнение, множество решений которого совпадает с областью определения входящих в него функций; иначе говоря, тождество — это уравнение, превращающееся в верное числовое равенство при всех допустимых значениях аргументов.

Например, уравнения 3) и 9) — тождества. Всякое верное числовое равенство является тождеством. Все «опасные формулы», о которых мы говорили во введении (стр. 19), тоже тождества.

В некоторых книгах для таких уравнений вводят специальный термин *квазитождества* (латинская приставка «quasi» означает «почти», «якобы»), а название «тождество» сохраняют лишь для тех «абсолютных тождеств»  $f(x) = g(x)$ , у которых естественные области определения левой и правой частей — функций  $f$  и  $g$  — полностью совпадают.

Как записывается множество решений уравнения? У уравнения с одним неизвестным, как правило, множество решений конечно, и мы можем записывать его в виде

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

(в фигурных скобках перечислены все решения уравнения). Если решений нет, то будем писать  $X = \emptyset$  — множество решений пусто. Одно уравнение с несколькими неизвестными имеет, как правило, бесконечное множество решений. С такими уравнениями мы встретимся еще в § 12, когда будем говорить об уравнениях с параметрами.

Приведем для примера ответы (множества решений) уравнений 1)–9):

1)  $X = \{5\}$ ;

2)  $X = \emptyset$ ;

3)  $X = (-\infty; +\infty)$ ;

- 4)  $X = \emptyset$ ;
- 5)  $X = \{-(3 + \sqrt{5})/2\}$ ;
- 6)  $a = 0$ ,  $b$  — любое или  $b = 0$ ,  $a$  — любое;
- 7)  $x = 1$ ,  $y = 2$  (одно решение);
- 8)  $x, y$  — любые,  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- 9)  $x, y$  — любые.

В заключение этого параграфа сформулируем известные факты о решениях линейных и квадратных уравнений, которые мы будем постоянно использовать. Пусть  $a, b, c$  — некоторые вещественные числа.

*Множество решений линейного уравнения  $ax + b = 0$ :*

- 1)  $a \neq 0 \Rightarrow X = \{-b/a\}$ ;
- 2)  $a = 0$ ,  $b \neq 0 \Rightarrow X = \emptyset$ ;
- 3)  $a = b = 0 \Rightarrow X = (-\infty; +\infty)$ .

*Множество решений квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  (будем считать, что  $a \neq 0$ ; положим  $D = b^2 - 4ac$ ):*

- 1)  $D > 0 \Rightarrow X = \left\{ \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right\}$
- 2)  $D = 0 \Rightarrow X = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$ ;
- 3)  $D < 0 \Rightarrow X = \emptyset$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

5.1. Проверьте, являются ли следующие уравнения тождествами:

- а)  $x^2 = (-x)^2$ ;
- б)  $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ ;
- в)  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ;
- г)  $(xz - yt)^2 + (yz + xt)^2 = (x^2 + y^2)(z^2 + t^2)$ ;
- д)  $\lg x^2 = 2 \lg (-x)$ .

5.2. Какие из уравнений  $\sqrt{x^2} = x$ ,  $\sqrt[3]{x^3} = x$ ,  $\sqrt{x^2} = |x|$ ,  $\sqrt[3]{x^3} = |x|$  являются тождествами?

5.3. Найдите естественную область определения уравнений:

а)  $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x-1}$ ;

б)  $\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{\frac{5x-6-x^2}{3+x}} + x^2 = 4$ ;

в)  $\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+7x-12} = \frac{1}{x-3}$ .

5.4. Докажите тождества:

а)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ ;

б)  $\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ .

## § 6. Связь между уравнениями

Проследим внимательно за ходом рассуждений, которые мы проводим обычно при решении уравнений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Мы должны найти все решения этого уравнения.

Пусть  $x_0$  — какое-нибудь решение. Тогда после подстановки  $x = x_0$  мы получим верное равенство  $x_0 =$

$= \sqrt{\frac{x_0}{x_0-1}}$ . Возведя обе части в квадрат, получим новое

верное равенство  $x_0^2 = \frac{x_0}{x_0-1}$ ; умножив обе части на

число  $(x_0-1)$ , получим верное равенство  $x_0^2(x_0-1) = x_0$ .

Перенесем  $x_0$  в левую часть и вынесем его за скобки. Получим

$$x_0(x_0^2 - x_0 - 1) = 0.$$

Произведение двух чисел равно нулю, если хотя бы одно из этих чисел равно 0, т. е.  $x_0 = 0$  или  $x_0^2 - x_0 - 1 =$

0; отсюда или  $x_0$  равно 0, или  $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , или  $x_0 =$

$$= \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Решили ли мы наше уравнение? Конечно, нет. Мы предположили, что  $x_0$  — решение, и нашли «подозрительные» значения  $x_0$ .

Тем самым мы доказали, что все корни уравнения содержатся в множестве

$$\left\{0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Теперь можно каждое из найденных чисел подставить в исходное уравнение и проверить, является ли оно на самом деле решением или нет. Проверка показывает, что числа 0 и  $(1+\sqrt{5})/2$  удовлетворяют исходному уравнению, число  $(1-\sqrt{5})/2$  — нет.

Ответ:  $X = \{0, (1+\sqrt{5})/2\}$ .

Вы видите, что при нашем способе решения уравнения проверка является частью решения.

Обычно не записывают все эти рассуждения так подробно. Вместо фраз «пусть  $x = x_0$  — решение», «подставим  $x_0$  в уравнение» и т. д. пишут просто

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow x^2 = \frac{x}{x-1} \Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \\&\Rightarrow x = 0 \text{ или } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ или } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Проверкой убеждаемся, что нашему уравнению удовлетворяют число 0 и  $(1+\sqrt{5})/2$ .

Как же связаны между собой уравнения, которые мы писали вслед за исходным? Вспомним наше первое рассуждение: если число  $x = x_0$  есть корень первого уравнения, то оно является корнем и каждого следующего.

Из двух уравнений второе называется *следствием* первого, если каждое решение первого уравнения является решением второго.

Если  $A$  — множество решений первого уравнения, а  $B$  — множество решений второго, то каждое число  $x$ , содержащееся в  $A$ , принадлежит и  $B$ , т. е.

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Для такой связи между множествами  $A$  и  $B$  употребляется специальный знак  $\subset$  (включение).  $A \subset B$  читается так: « $A$  содержится в  $B$ », или « $B$  содержит  $A$ », или « $A$  есть часть  $B$ », или « $A$  есть подмножество  $B$ ».

Таким образом, способ, которым мы решали уравнение, состоит в следующем: мы строили цепочку уравнений, в которой первое написанное уравнение — это то, которое нам дано, а дальше каждое уравнение является

следствием предыдущего (это мы обозначали стрелкой), т. е. множество его решений содержит в себе все решения предыдущего; решения последнего уравнения нам известны; затем с помощью проверки мы выясняем, какие из решений последнего уравнения являются решениями первого.

Подчеркнем еще раз: мы должны проделывать с уравнением только такие операции, при которых не может потеряться ни одно решение.

Какие же это операции? Естественно, годятся все такие операции, которые переводят любое верное равенство в верное.

Перечислим конкретно некоторые такие операции. Пусть дано уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$ .

*Теорема 1. Пусть  $g$  — функция, определенная при всех тех значениях аргумента, при которых определены функции  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда уравнения*

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot g(x) &= f_2(x) \cdot g(x), \\ f_1(x) + g(x) &= f_2(x) + g(x) \end{aligned}$$

*являются следствиями уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ .*

Отсюда следует, что если  $g(x)$  ни при каком  $x$  (из области определения уравнения) не обращается в 0, то уравнение  $f_1(x)/g(x) = f_2(x)/g(x)$  является следствием уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ : действительно, делить на  $g(x)$  — это все равно что умножать на  $1/g(x)$ .

*Теорема 2. Пусть  $g$  — произвольная функция, которая определена при всех возможных значениях функций  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда уравнение*

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x))$$

*является следствием уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ .*

Здесь  $g(f_1(x))$  и  $g(f_2(x))$  — результат применения функции  $g$  к обеим частям уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ .

Докажем, например, последнюю теорему. Пусть  $x_0$  — произвольное решение уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ . Тогда  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$  — верное числовое равенство и функция  $g$  определена в точке  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ . Поэтому, по свойству 4 из § 1,  $g(f_1(x_0)) = g(f_2(x_0))$  — верное равенство, т. е.  $x_0$  является решением уравнения

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)).$$

Покажем, к чему может привести неаккуратное обращение с этими теоремами. Все следующие переходы:

$$1) x = x^2 - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 2};$$

$$2) x^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1};$$

$$3) x^2 - 1 = 2(x+1) \Rightarrow x - 1 = 2;$$

$$4) x^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-x}}\right) = 4 - \frac{4}{\sqrt{-x}} \Rightarrow x^2 = 4$$

неверны — во всех случаях пропал корень  $x = -1$ .

Что же произошло с этими уравнениями? В первом примере к обеим частям применили функцию  $t \rightarrow \sqrt{t}$ , определенную только при  $t \geq 0$ . Однако и левая и правая части исходного уравнения принимают и отрицательные значения; более того, они отрицательны при подстановке одного из корней. Разумеется, этот корень оказался потерянным. Во втором примере мы прибавили

функцию  $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$ , которая не определена при  $x = -1$ .

В третьем примере разделили обе части уравнения на функцию  $x \rightarrow x+1$ , которая при  $x = -1$  обращается в 0

(т. е. умножили на  $\frac{1}{x+1}$ , что при  $x = -1$  не имеет

смысла). Похожая ошибка и в последнем примере. Подчеркнем еще раз, что делить обе части уравнения на функцию, которая обращается в 0, нельзя. Вместо этого нужно перенести все члены уравнения в одну часть, вынести общие множители за скобку и воспользоваться следующей теоремой.

**Теорема 3.** Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

$D$  — область определения  $f$ , и пусть функция  $f$  представлена в виде произведения функций  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , которые имеют ту же область определения  $D$ . Тогда множество решений уравнения (1) есть объединение множеств решений уравнений

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0. \quad (2)$$



Иными словами, чтобы решить уравнение (1), нужно решить каждое из уравнений (2) и объединить все их корни.

**Доказательство.** Возьмем корень уравнения (1), подставим его, заменив  $f$  на  $g_1 g_2 \dots g_k$ . Получим произведение  $k$  чисел, равное 0. Хотя бы один из сомножителей обязан равняться нулю, например,  $g_i = 0$ . Это означает, что взятый корень уравнения (1) есть корень одного из уравнений (2).

Докажем обратное. Возьмем корень какого-либо из уравнений (2). Этот корень обращает это уравнение в верное равенство. Подставим его в уравнение (1). Один из сомножителей обратится в 0. Это означает, что это число есть корень уравнения (1).

Конечно, нужно следить за тем, чтобы области определения  $f(x)$  и всех функций  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$  совпадали. Если одна из функций  $g_i$  при  $x = x_0$  обращается в 0, а другая в точке  $x = x_0$  теряет смысл, то могут получиться такие казусы:

$$1) \quad x - 1 = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} (x^2 - 1) \cdot \frac{1}{x + 1} = 0.$$

Уравнение  $x^2 - 1 = 0$  имеет корнями  $x = -1, x = 1$ ; уравнение  $\frac{1}{x + 1} = 0$  не имеет корней. Но исходное уравнение  $x - 1 = 0$  имеет только один корень, и мы получили посторонний корень.

$$2) \quad x^2 - 1 = 0 \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1} \cdot (x + 1)^2 = 0.$$

Уравнение  $\frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1} = 0$  корней не имеет; уравнение  $(x + 1)^2 = 0$  имеет корень  $x = -1$ . Исходное уравнение имеет два корня, и мы потеряли корень.

Заметим, что мы могли бы сформулировать наши теоремы короче, используя те понятия суммы и произведения функций, которые были даны во введении. Например, теорема 1 звучала бы просто так:

*Уравнения  $(f_1 + g)(x) = (f_2 + g)(x)$  и  $(f_1 g)(x) = (f_2 g)(x)$  являются следствиями уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ .*

Формально говоря, никаких оговорок больше не нужно, потому что уже само по себе точное определение, что такое сумма или произведение функций, подразумевает, что  $f_1, f_2$  и  $g$  заданы на одном и том же множестве.

Мы привели более детальные формулировки, чтобы лишний раз напомнить: проделявая над уравнением какие-либо операции, нужно следить, чтобы эти операциигодились для всех  $x$  из области определения.

Практически трудности, связанные с областью определения, возникают, как правило, лишь при решении довольно искусственных уравнений с корнями или логарифмами (они предлагаются иногда на экзаменах).

Мы не можем дать твердый совет, надо ли находить область определения уравнения перед его решением. Бывают такие уравнения, область определения которых состоит из одной точки или даже пуста. В этих случаях, конечно, знание области определения сразу приведет к ответу. Но иногда аккуратное нахождение области определения уравнения труднее, чем полное его решение. Наиболее целесообразно перед началом решения выписать все «запреты», не сопоставляя их друг с другом, и в ходе решения сверяться с выписанными условиями.

Например, решая уравнение и) на стр. 47, стоит только выписать условия:

$$x^2 \geq 24, \quad x \sqrt{x^2 - 24} \geq -1,$$

не решая системы неравенств.

Получая из этого уравнения очевидные следствия, мы быстро найдем, что  $x = 0$  или  $x = 7$ . Второе число удовлетворяет выписанным условиям, а первое — нет.

Иногда бывает полезно разбить область определения уравнения на несколько частей и отдельно преобразовывать уравнение на каждой из них. Ясно, что при этом все корни всех полученных «сужением» уравнений дадут нам нужное множество. Нам удобно (для ссылок) сформулировать это в виде теоремы.

**Теорема 4.** Если область определения  $D$  уравнения  $f(x) = g(x)$  представить в виде объединения нескольких множеств:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k,$$

решить уравнение отдельно на каждом из этих множеств и затем собрать все решения, то мы получим множество всех решений уравнения  $f(x) = g(x)$ .

Пример.

$$x|x| + |2x^2 - 5x| = 6$$

$\Downarrow$

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x \geq 0 \\ x^2 + 2x^2 - 5x = 6 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$3x^2 - 5x - 6 = 0$$

$\Downarrow$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{97}}{6},$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{97}}{6};$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 5x < 0 \\ x^2 - 2x^2 + 5x = 6 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$\Downarrow$

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 3;$$

$$3) \begin{cases} x < 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x > 0 \\ -x^2 + 2x^2 - 5x = 6 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$\Downarrow$

$$x_5 = -1, \quad x_6 = 6.$$

Проверка показывает, что из полученных значений  $(5 - \sqrt{97})/6$ ,  $(5 + \sqrt{97})/6$ , 3, 6 не удовлетворяют ограничениям, наложенным в каждом из трех соответствующих случаев 1), 2), 3); остаются два решения, которые удовлетворяют уравнению.

Ответ:  $X = \{-1; 2\}$ .

Если бы мы решили системы неравенств в каждом из трех случаев 1), 2), 3), то выяснили бы, что вся числовая ось разбилась на три множества: 1)  $x \geq 5/2$ ; 2)  $0 \leq x < 5/2$ ; 3)  $x < 0$ . И дальше решали бы уравнение отдельно на каждом из этих множеств.

Важное замечание. Когда мы пишем какие-то ограничения, задающие область определения уравнения  $f(x) = g(x)$ , скажем  $f_1(x) \geq 0$ ,  $f_2(x) < 0$ ,  $f_3(x) \neq 0$ , то получаем несколько высказываний, связанных союзом **и**: нас интересует множество точек, в которых

$$f(x) = g(x) \text{ и } f_1(x) \geq 0 \text{ и } f_2(x) < 0 \text{ и } f_3(x) \neq 0,$$

т. е. множество точек, удовлетворяющих одновременно всем условиям; оно является пересечением (общей частью) полученных множеств точек.

Наоборот, когда мы рассматриваем несколько отдельных случаев (например, пользуемся теоремами 4 или 3), то получаем несколько высказываний, связанных союзом **или**. Например, в последнем примере решениями исходного уравнения были числа, удовлетворяющие условиям 1), или 2), или 3). Точно так же в ситуации, описываемой теоремой 3, высказывание  $f(x) = 0$  эквивалентно такому:

$$g_1(x) = 0 \quad \text{или} \quad g_2(x) = 0 \quad \text{или} \dots \text{или} \quad g_k(x) = 0.$$

Нас интересует множество точек, удовлетворяющих хотя бы одному из этих уравнений, т. е. объединение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям:

$$g_1(x) = 0, \quad g_2(x) = 0, \quad \dots, \quad g_k(x) = 0.$$

Когда мы переходим от одного уравнения к совокупности нескольких уравнений, соединенных союзом **или**, то схема решения уравнения выглядит примерно так, как показано на рис. 8.

Пример.

$$\frac{6x^2}{\sqrt{x^2+1}} + x^2 + 1 = x(3 + 2\sqrt{x^2+1})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{6x^2}{\sqrt{x^2+1}} - 3x - 2x\sqrt{x^2+1} + (x^2+1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}(3x - x^2 - 1) - 3x + x^2 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)(3x - x^2 - 1) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \quad \text{или} \quad 3x - x^2 - 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4x^2 = x^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \quad x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}};$$



Пусть имеется уравнение

$$f_1(x) = f_2(x) \quad (1)$$

и  $g$  — функция, которую можно применить к обеим частям уравнения. Тогда мы знаем (теорема 2), что уравнение

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)) \quad (2)$$

является следствием уравнения (1):

$$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow g(f_1(x)) = g(f_2(x)). \quad (3)$$

Для того чтобы уравнения (1) и (2) были равносильны, нужно, чтобы каждый корень уравнения (2) был корнем уравнения (1), иначе говоря, чтобы был возможен переход

$$g(f_1(x)) = g(f_2(x)) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x). \quad (4)$$

Легко сообразить, что подобный переход возможен, если функция  $g$  переводит всякое неверное равенство в неверное (обязательно подумайте, почему это так!).

Свойства числовых равенств 1, 2, 3 и 1', 2', 3' § 4 показывают нам примеры функций, для которых возможны оба перехода  $\Rightarrow$  и  $\Leftarrow$ . Сформулируем это в качестве теорем.

**Теорема 5.** *Если к двум частям уравнения прибавить одно и то же число или обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное исходному.*

Эта теорема позволяет, в частности, получать равносильное уравнение при переносе числа из одной части в другую (с противоположным знаком).

В теореме 5 можно слово *число* заменить словом *функция*, т. е., прибавляя к двум частям одну и ту же функцию или умножая их на функцию, не обращающуюся в 0, мы будем получать уравнения, равносильные исходному. Но при этом, как мы уже говорили в § 2, очень важно следить за тем, чтобы область определения уравнения не изменилась или, по крайней мере, чтобы это изменение не затрагивало корни.

**Теорема 6.** *Если в двух частях уравнения стоят функции, принимающие только неотрицательные значения, то при возведении обеих частей в одну и ту же степень получаем уравнение, равносильное данному.*

Решение уравнения с использованием понятия равносильности происходит следующим образом.

Исходя из данного уравнения, строим цепочку других уравнений с помощью преобразований, переводящих каждое уравнение в его следствие, стараясь прийти к уравнению, решения которого мы уже знаем. Затем проверяем, обратимы ли совершенные переходы, можно ли поставить стрелки в обратную сторону. Если да, то мы решили исходное уравнение, так как все уравнения в построенной цепочке равносильны друг другу, а решения последнего мы нашли. Если же нет, то через неравносильный переход придется «перегнать» каждый из найденных корней последнего уравнения и оставить лишь те из них, для которых этот, вообще говоря, необратимый переход оказался обратимым.

Приведем примеры.

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{x^2}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \\
 &\Downarrow \\
 x^2 &= \frac{1}{2}(x^2 + 1) \\
 &\Downarrow \\
 x^2 &= 1.
 \end{aligned}$$

Решения последнего уравнения мы знаем — это числа 1 и  $-1$ . Проверим обратимость всех переходов. Сомнение может вызвать только переход от первого уравнения ко второму, который состоял в умножении на функцию  $y = x^2 + 1$ . Эта функция в 0 не обращается, так что и этот переход обратим. Уравнение решено.

Ответ:  $X = \{-1; 1\}$ .

$$\begin{aligned}
 2. \quad \sqrt{x^2 - 4x + 13} + 1 &= 2x \\
 &\Downarrow \\
 \sqrt{x^2 - 4x + 13} &= 2x - 1 \\
 &\Downarrow \\
 x^2 - 4x + 13 &= 4x^2 - 4x + 1 \\
 &\Downarrow \\
 3x^2 &= 12 \\
 &\Downarrow \\
 x^2 &= 4 \\
 &\Downarrow \\
 x_1 &= 2 \text{ или } x_2 = -2.
 \end{aligned}$$

Все переходы, кроме второго, обратимы. Подставим числа 2 и  $-2$  во второе уравнение. Получим  $\sqrt{9} = 3$  — верное равенство,  $\sqrt{25} = -5$  — неверное равенство.

Следовательно, решением исходного уравнения является только число 2. (При втором переходе произошло расширение множества решений.)

Ответ:  $X = \{2\}$ .

Прием, с помощью которого иногда удается избежать появления лишних корней, сохранить равносильность переходов, — это разбиение области определения уравнения на несколько частей, на каждой из которых наше уравнение легко исследовать или заменить равносильным, но более простым (см. теорему 4).

Например, переход

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2x - 1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 4x + 13 = (2x - 1)^2,$$

как мы только что видели, не сохраняет равносильности (появляется посторонний корень  $x = -2$ ). Заметим теперь, что первое уравнение заведомо не может иметь решений на множестве, где правая часть  $2x - 1$  меньше 0, поскольку  $\sqrt{\quad}$ , стоящий в левой части, — всегда неотрицательное число, т. е. на множестве  $(-\infty; 1/2)$  решений нет. С другой стороны, ясно, что на множестве  $[1/2; +\infty)$  тот же переход

$$\sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2x - 1$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 4x + 13 = (2x - 1)^2$$

обратим: в обеих частях первого уравнения стоят теперь функции, принимающие неотрицательные значения, и остается применить теорему 2.

При этом способе решения вместе с последним уравнением  $x^2 = 4$  мы получили бы ограничение  $x \geq 1/2$ . Отсюда ясно, что  $x = 2$  — единственный корень, и необходимость в проверке отпала.

Заметим, что теоремы 3 и 4 дают равносильный переход от одного уравнения к совокупности нескольких уравнений.

Еще одно замечание относительно уравнений, имеющих бесконечно много решений (например,  $\sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} +$



$+x^2=3$ ). При решении таких уравнений сделать проверку в обычном смысле слова, т. е. подставить все решения одно за другим в исходное уравнение, невозможно, и приходится следить за равносильностью переходов.

То же самое относится и к доказательству тождеств: при доказательстве тождества мало вывести из него очевидное тождество в качестве следствия — нужно еще проверить обратимость всех переходов; только тогда мы докажем, что исходное уравнение действительно справедливо для всех значений входящих в него аргументов, т. е. является тождеством.

## УПРАЖНЕНИЯ

**6.1.** Всегда ли уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  является следствием уравнения  $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ , т. е. верно ли, что  $f_1^2(x) = f_2^2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$ ?

Проверить верность следующих переходов:

а)  $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x f_1(x) = x f_2(x)$ ;

б)  $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow f_1(x) + \sqrt{1-x^2} = f_2(x) + \sqrt{1-x^2}$ ;

в)  $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{f_2(x)} \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$ ;

г)  $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow |f_1(x)| = |f_2(x)|$

(в каждом случае нужно дать доказательство или привести опровергающий пример).

**6.2. а)** Укажите все ошибки в следующем решении уравнения (а затем решите его правильно):

$$\begin{aligned}
 9 - x^2 &= 2x(\sqrt{10 - x^2} - 1) \\
 &\Downarrow \\
 9 - 2x\sqrt{10 - x^2} &= x^2 - 2x \\
 &\Downarrow \\
 10 - x^2 - 2x\sqrt{10 - x^2} + x^2 &= x^2 - 2x + 1 \\
 &\Downarrow \\
 (\sqrt{10 - x^2} - x)^2 &= (x - 1)^2 \\
 &\Downarrow \\
 \sqrt{10 - x^2} - x &= x - 1 \\
 &\Downarrow \\
 \sqrt{10 - x^2} &= 2x - 1 \\
 &\Downarrow \\
 10 - x^2 &= 4x^2 - 4x + 1 \\
 &\Downarrow \\
 x_1 = 9/5 \quad \text{или} \quad x_2 &= -1.
 \end{aligned}$$

б) Почему пропал корень при решении следующего уравнения?

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 - 1} &= (x + 5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{(x+1)(x-1)} - (x+5) \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{x+1} \left( \sqrt{x-1} - \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} \right) &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \sqrt{x+1} = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{x-1} - \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} &= 0 \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x+1 = 0 & \qquad \qquad (\sqrt{x-1})^2 - (x+5) = 0 \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x = -1 & \qquad \qquad x-1-x-5 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 & \qquad \qquad \qquad -6 = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{нет решений.}
 \end{aligned}$$

(Пропал корень  $x = -2$ .)

6.3. Проверьте, что уравнение  $f_2(x) = g_2(x)$  является следствием уравнения  $f_1(x) = g_1(x)$  тогда и только тогда, когда высказывание

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

верно при всех числовых значениях  $x$  (см. стр. 12). Свяжите это с тем, что для множеств решений этих уравнений  $X_1$  и  $X_2$  должно выполняться условие  $X_1 \subset X_2$ .

6.4. Некоторые из следующих уравнений являются следствиями других; например, ж)  $\Rightarrow$  в). Укажите все такие пары.

- а)  $\sqrt{x+2} = |x|$ ;      б)  $x = x^2$ ;  
 в)  $x + \frac{1}{x} = 2$ ;      г)  $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$ ;  
 д)  $\sqrt{x+2} = \sqrt{2} - x$ ;      е)  $\frac{x}{x-1} = \frac{x+5}{x+9}$ ;  
 ж)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$ ;      з)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 0$ .

6.5. Докажите, что

- а)  $x + y = 0 \Rightarrow x^{1917} + y^{1917} = 0$ ;  
 б)  $x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ;  
 в)  $\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} = 0 \Rightarrow$   

$$\Rightarrow \frac{x}{(y-z)^2} + \frac{y}{(z-x)^2} + \frac{z}{(x-y)^2} = 0;$$

$$\Gamma) x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 47;$$

$$\text{д)} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{1}{a^{1917} + b^{1917} + c^{1917}} = \frac{1}{(a+b+c)^{1917}}.$$

6.6. Придумайте уравнение, которое было бы следствием любого уравнения. А затем такое, следствием которого являлось бы любое уравнение! (Речь идет об уравнениях с одним неизвестным  $x$ .)

6.7. Равносильны ли уравнения:

$$\text{а)} x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ и } x + 1 = 0;$$

$$\text{б)} \sqrt{x^2 + 2x + 1} = -(x + 1) \text{ и } 1 + x = 0;$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{1}{5} \text{ и } \sqrt{x} = \frac{x+1}{5};$$

$$\text{г)} \frac{x^2}{x-1} = 2x \text{ и } \frac{x}{x-1} = 2?$$

6.8. Может ли нарушиться равносильность при возведении обеих частей уравнения в куб?

6.9. Докажите, что для любых двух функций  $f_1$  и  $f_2$  с одной и той же областью определения

$$\sqrt{f_1(x)} = f_2(x) \Leftrightarrow [f_1(x) = f_2^2(x) \text{ и } f_2(x) \geq 0].$$

6.10. Решить уравнения:

$$\text{а)} \sqrt{x^2 + 5} = 2x + 1; \text{ б)} \sqrt[3]{x^3 + 21} = x + 1;$$

$$\text{в)} \sqrt[4]{x^3(x+1)} = x + 1/4.$$

6.11. Решите несколько уравнений с модулями:

$$\text{а)} |x^2 - x - 2| = 2x^2 + 3x + 1;$$

$$\text{б)} \sqrt{x^2 - |x + 2|} = 2x - |x + 1|;$$

$$\text{в)} |||x| - 4| - 3| - 2| = 1.$$

6.12. Укажите, какие из пар уравнений в упр. 6.4 равносильны.

## § 7. Примеры

Длинные разговоры в предыдущих параграфах могли навести на мысль, что главное в решении уравнений — это не попасться в какую-нибудь ловушку, связанную с областью определения. На самом деле самое трудное — придумать, как свести уравнение к более простому. Прежде чем приводить общие соображения о спо-

собах решения уравнений, рассмотрим конкретные примеры.

### 1°. Замена неизвестного.

Очень часто полезно сделать замену неизвестного, которая упрощает вид уравнения. Например, если уравнение удастся привести к виду

$$a[f(x)]^2 + bf(x) + c = 0,$$

то, заменив неизвестное по формуле  $y = f(x)$ , мы сведем дело к решению двух уравнений:

$$f(x) = y_1, \quad f(x) = y_2,$$

где  $y_1$  и  $y_2$  — корни уравнения  $ay^2 + by + c = 0$ .

Простейшим примером такого типа уравнений является биквадратное уравнение  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . Оно решается заменой  $y = x^2$ .

Пример 1.

$$\begin{aligned} \frac{15}{x^2 + x + 1} &= (x + 1)^2 + x^2 \\ &\Downarrow \\ \frac{15}{x^2 + x + 1} &= 2(x^2 + x) + 1. \end{aligned}$$

Сделав замену  $x^2 + x = y$ , получаем уравнение  $\frac{15}{y + 1} = 2y + 1$ , которое сводится к квадратному. Решая его, находим  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = -\frac{7}{2}$ . Решая квадратные уравнения  $x^2 + x = 2$  и  $x^2 + x = -\frac{7}{2}$ , находим ответ:  $X = \{-2; 1\}$ .

Пример 2.  $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 24 &= 0. \end{aligned}$$

Выделим в левой части уравнения полный квадрат:  $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 24 = (x^2 + 3x)^2 - 9x^2 + 11x^2 + 6x - 24 = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24$ . Замена  $x^2 + 3x = y$  приводит к решению квадратных уравнений.

Пример 3.  $3^{x+1} - 2 = 9^x$ . Сделав замену  $3^x = y$ , приходим к квадратному уравнению  $3y - 2 = y^2$ .

Пример 4.  $\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} + \sqrt{\frac{x+b}{x+a}} = \frac{5}{2}$ . Сделав замену  $\sqrt{\frac{x+a}{x+b}} = y$ , приходим к уравнению  $y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$ .

Пример 5.  $\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x - 2} = 0$ . Заменяв  $\cos x$  на  $y$ , а  $\sin^2 x$  на  $1 - y^2$ , получаем уравнение  $y - \frac{1 - y^2}{y - 2} = 0$ , приводящееся к квадратному.

2°. *Использование симметрии уравнения.*

Пример 6. Снова рассмотрим уравнение

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 24.$$

Числа  $x$ ,  $x+1$ ,  $x+2$ ,  $x+3$  симметрично расположены относительно числа  $x + \frac{3}{2}$ . Сделаем замену переменной  $x + \frac{3}{2} = y$ . Уравнение примет вид

$$(y - \frac{3}{2})(y - \frac{1}{2})(y + \frac{1}{2})(y + \frac{3}{2}) = 24,$$

или

$$(4y^2 - 9)(4y^2 - 1) = 384.$$

Дальнейшее очевидно.

Интересная замена неизвестного применяется при решении так называемых *симметрических*, или *возвратных* уравнений, т. е. уравнений вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Делим на  $x^2$ ; получим равносильное (при  $a \neq 0$ ) уравнение

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Заметив, что  $ax^2 + \frac{a}{x^2} = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2a$ , приведем уравнение к виду  $a\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c - 2a = 0$ . Дальнейшее очевидно.

Пример 7.  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ . Объединяем равноотстоящие от концов слагаемые:

$$\begin{aligned} (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) &= \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{5x}{2} \left( \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \sin \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Дальнейшее очевидно.

3°. *Подбор корней и разложение на множители.*

Если удалось угадать корень, обычно удается разложить левую часть на множители.

Пример 8.  $2x^3 - x - 1 = 0$ . Корень  $x = 1$  угадывается сразу. Выделим множитель  $x - 1$ :

$$2x^3 - x - 1 = 2x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1 = \\ = 2x^2(x - 1) + 2x(x - 1) + x - 1 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 1).$$

Пример 9.  $x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = 0$ . Попытаемся представить левую часть в виде произведения двух квадратных множителей с целыми коэффициентами:

$$x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Теперь надо найти «неопределенные» пока целые коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} 1 = a + c, \\ -8 = ac + b + d, \\ 3 = ad + bc, \\ 5 = bd. \end{cases}$$

Так как множители в последнем уравнении системы равноправны, то можно считать, что  $b = 1$  или  $b = -1$  (напомним, что мы ищем целочисленные решения системы).

При  $b = 1$  имеем  $d = 5$ ,  $ac = -14$ ,  $a + c = 1$  — целых решений нет.

При  $b = -1$  имеем  $d = -5$ ,  $ac = -2$ ,  $a + c = 1$ . Получаем, что либо  $a = 2$ ,  $c = -1$ , либо  $a = -1$ ,  $c = 2$ . Третьему уравнению удовлетворяет лишь вторая пара. В итоге

$$x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x + 5 = (x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 5).$$

Пример 10.  $\cos^3 x + \cos x = \cos^3 \alpha + \cos \alpha$ . Ясно, что все  $x$ , для которых  $\cos x = \cos \alpha$ , являются решениями. Выделим множитель  $\cos x - \cos \alpha$ :

$$\cos^3 x + \cos x - \cos^3 \alpha - \cos \alpha = \\ = (\cos x - \cos \alpha)(\cos^2 x + \cos x \cos \alpha + \cos^2 \alpha + 1).$$

Уравнение  $\cos^2 x + \cos x \cos \alpha + \cos^2 \alpha + 1 = 0$  является квадратным относительно  $y = \cos x$  и не имеет корней.

4°. Сведение уравнения к системе.

Пример 11.  $x^4 + (1 - x)^4 = 17$ . Положив  $1 - x = y$ , получим систему

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Это стандартная симметричная система. О ее решении говорится в § 10.

Пример 12.  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ . Положив  $\sin^2 x = y$ ,  $\cos^2 x = z$ , получим систему

$$\begin{cases} y^3 + z^3 = \frac{7}{16}, \\ y + z = 1. \end{cases}$$

Пример 13.  $\sqrt[3]{x-13} - \sqrt[3]{x-32} = 1$ . Положив  $\sqrt[3]{x-13} = y$ ,  $\sqrt[3]{x-32} = z$ , получим систему

$$\begin{cases} y - z = 1, \\ y^3 - z^3 = 19. \end{cases}$$

5°. *Использование сопряженных радикалов.*

Пример 14.  $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \sqrt{5-x}$ . Умножив числитель и знаменатель дроби на  $\sqrt{1+x}-1$ , получим

$$\frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x} = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow \sqrt{1+x}-1 = \sqrt{5-x}.$$

Последнее уравнение легко решается.

Пример 15.  $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$ . Произведение  $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$  равно 1, и поэтому замена  $(2 + \sqrt{3})^x = y$  сразу приводит к квадратному уравнению  $y + \frac{1}{y} = 4$ .

Пример 16.  $\frac{\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+4} - \sqrt{x^2+x+1}} = x^2 + x + 3$ .

Умножив числитель и знаменатель дроби на сумму радикалов, получим уравнение

$$\frac{1}{3}(x^2 + x + 4 + 2\sqrt{x^2+x+4}\sqrt{x^2+x+1} + x^2 + x + 1) = x^2 + x + 3.$$

Замена  $x^2+x=y$  приводит к уравнению  $2\sqrt{y+4}\sqrt{y+1} = y+4$ . Сначала решаем уравнение  $y+4=0$ , т. е.  $x^2+x+4=0$ ; оно не имеет корней. Сокращая на  $\sqrt{y+4}$ , приходим к уравнению  $2\sqrt{y+1} = \sqrt{y+4}$ , откуда  $y=0$ .

Ответ:  $X = \{-1; 0\}$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

7.1. Решить уравнения:

а)  $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$ ;

б)  $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$ ;

в)  $x^4 + (1 - x)^4 = 97$ ;

г)  $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ ;

д)  $x^3 + 2x^2(a + 1) + x(a^2 + 2a + 2) = 0$ ;

е)  $x^4 - a^4 - 3a^3x + 3ax^3 = 0$ ;

ж)  $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x^2} = 5 \cdot \frac{2 - x^2}{2x}$ ;

з)  $\frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} = \frac{21}{20}$ .

7.2. Решить уравнения:

а)  $\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} = \sqrt{2x+7}$ ;

б)  $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ ;

в)  $\frac{x}{\sqrt{1-x}+1} + \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = 1$ ;

г)  $\sqrt{(x+1)(x-2)} = 2x^2 - 2x - 10$ ;

д)  $\sqrt[4]{a+x} + \sqrt[4]{a-x} = 2\sqrt[8]{a^2-x^2}$ ;

е)  $\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1$ ;

ж)  $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} + \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2$ ;

з)  $\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = 4 + \frac{\sqrt{x+1}-1}{2}$ ;

и)  $\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-24} = x-1$ .

6.3. Решить уравнения:

а)  $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ ;

б)  $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$ ;

в)  $\frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} = 5$ ;

бд) г)  $(\sqrt{7+4\sqrt{3}})^x + (\sqrt{7-4\sqrt{3}})^x = 14$ ;

д)  $3\sqrt{x} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$ ;



$$\text{е) } 4^x - 5 \cdot 2^{x-1} + 1 = 0;$$

$$\text{ж) } 2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2};$$

$$\text{з) } 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x;$$

$$\text{и) } \frac{8^x + 2^x}{4^x - 2} = 5;$$

$$\text{к) } 27 \cdot 2^{-3x} + 9 \cdot 2^x - 2^{3x} - 27 \cdot 2^{-x} = 8.$$

## § 8. Корни многочленов

Алгебра долго развивалась как наука о решении уравнений, причем прежде всего уравнений вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0. \quad (1)$$

В § 5 мы привели известные еще в древности формулы для решений линейных и квадратных уравнений. В XVI—XVII вв. были получены аналогичные, но более громоздкие формулы для уравнений третьей и четвертой степени.

Вот как выглядит, например, знаменитая *формула Кардано* для решения уравнения  $x^3 + px + q = 0$ :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Корни многочленов степени выше четвертой, как правило, не могут быть выражены формулами, в которые входят такие операции над коэффициентами многочлена, как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Это было доказано в 1823 г. норвежским математиком Абелем (1802—1829) и положило конец многочисленным попыткам «решить в общем виде» уравнение пятой степени.

Вопрос о разрешимости уравнений в радикалах был полностью решен французским математиком Галуа (1811—1832). Созданная им теория послужила началом нового этапа в развитии алгебры. После работ Абеля и Галуа исследование корней многочлена переместилось в основном в теорию функций — имеющиеся здесь закономерности относятся к более широкому классу функций, чем те, которые задаются многочленами.

Какие же вопросы о корнях многочлена разумно поставить?

1. Как найти рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами?

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

**Теорема а.** Если несократимая дробь  $p/q$  есть корень многочлена

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами, то  $a_0$  делится на  $p$ , а  $a_n$  делится на  $q$ .

**Доказательство.** Подставив в данный многочлен  $x = p/q$ , мы получим 0 и после приведения к общему знаменателю придем к равенству

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Запишем это равенство сначала так:

$$p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n.$$

Так как  $q$ , а вместе с ним и  $q^n$  взаимно просто с  $p$ , то  $a_0$  делится на  $p$ . Аналогично, из равенства

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1})$$

и взаимной простоты  $p$  и  $q$  следует, что  $a_0$  делится на  $q$ . Теорема доказана.

**Пример.** Рациональные корни уравнения

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = 0$$

могут быть только среди чисел  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$  ( $a_0 = 10, a_3 = 1$ ). Ясно, что положительных корней быть не может. Осталось испытать четыре числа. Убеждаемся, что  $x = -2$  является корнем. Многочлен  $x^3 + 3x^2 + 7x + 10$  должен делиться на  $x + 2$ . «Заставим» его выделить множитель  $x + 2$ :

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 7x + 10 &= x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 5x + 10 = \\ &= (x + 2)(x^2 + x + 5). \end{aligned}$$

Квадратное уравнение  $x^2 + x + 5 = 0$  корней не имеет.

2. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Можно ли его разложить на множители с целыми коэффициентами?

Есть несложный алгоритм, позволяющий ответить на этот вопрос. Он основан на методе «неопределенных коэффициентов», который мы применили при решении примера 9 предыдущего параграфа.

3. Как узнать количество корней многочлена?

Этот вопрос относится уже к теории функций и будет затронут нами в следующем параграфе.

4. Как быть с уравнениями, не имеющими корней? Нельзя ли так расширить область вещественных чисел, чтобы каждый многочлен имел корень в этой расширенной области?

Ответ на последний вопрос утвердительный. Если к вещественным числам формально «присоединить» корень уравнения  $x^2 + 1 = 0$ , то получим так называемые комплексные числа. Каждое комплексное число запишется в виде  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — вещественные числа, а символ  $i$  обладает тем свойством, что  $i^2 + 1 = 0$ .

Замечательно то, что в области комплексных чисел уже всякий многочлен имеет корень. Доказательство этого факта требует применения теории функций от комплексного аргумента.

5. Как приближенно вычислить корень многочлена с данной точностью?

На этот вопрос также отвечает теория функций. Проведение вычислений с помощью вычислительных машин позволяет очень быстро получить нужное приближение.

## УПРАЖНЕНИЯ

8.1. Докажите, что не существует многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, у которого  $P(7) = 11$ , а  $P(11) = 13$ .

8.2. Решить уравнения:

а)  $2x^3 - x^2 - 10x - 7 = 0$ ;

б)  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14 = 0$ ;

в)  $6x^4 - 19x^3 - 7x^2 + 26x + 12 = 0$ ;

г)  $x^4 - 5x^2 - 2x + 3 = 0$ .

8.3. Докажите, что если  $p/q$  — несократимая рациональная дробь — есть корень многочлена  $f(x)$  с целыми коэффициентами, то при любом целом  $a$  число  $f(a)$  делится на  $p - aq$ . Эту теорему часто используют для нахождения рациональных корней многочлена, особенно при  $a = \pm 1$ .

8.4. а) Докажите, что многочлен  $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$ , где  $a_1, \dots, a_n$  — различные целые числа, не раскладывается на множители с целыми коэффициентами. б) Определить  $a$  и  $b$  так, чтобы многочлен  $ax^n + bx^{n-1} + 1$  делился на  $(x - 1)^2$ .

## § 9. Графическое исследование уравнений

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным

$$f_1(x) = f_2(x). \quad (1)$$

Нарисуем на одном чертеже графики функций  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  (рис. 9). Точкам пересечения графиков этих

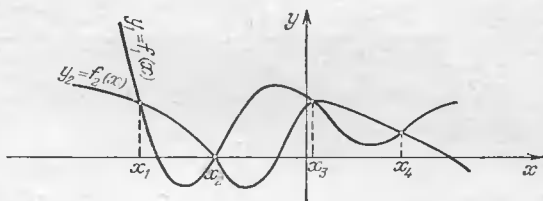


Рис. 9.

функций соответствуют те значения аргумента  $x$ , при которых совпадают значения функций, т. е. корни уравнения (1).

Итак, абсциссы точек пересечения графиков функций  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  являются корнями уравнения  $f_1(x) = f_2(x)$ .

Например, для уравнения  $x^2 = x + 2$  такими точками будут  $P_1 = (-1, 1)$  и  $P_2 = (2, 4)$  (рис. 10).

Если наше уравнение имеет вид  $f(x) = 0$ , то в качестве функции, стоящей в правой части, выступает функция  $y = 0$ . Графиком ее будет ось  $Ox$ , так что решениями уравнения  $f(x) = 0$  будут абсциссы точек пересечения графика функции  $y = f(x)$  с осью  $Ox$  (рис. 11).

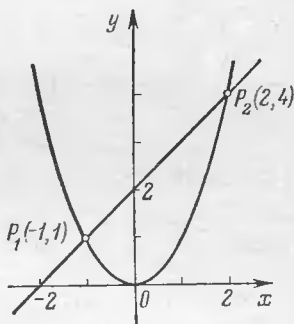


Рис. 10.

Указанная графическая иллюстрация уравнения и его корней подсказывает, на первый взгляд, и способ решения уравнения — начертим две кривые и найдем их точки пересечения. Действительно, если выбрать не слишком мелкий масштаб и начертить графики достаточно аккуратно, мы сможем приблизительно найти точки пересечения. Но для того, чтобы найти координаты точек пересечения точно, как раз и нужно решить соответствующее

уравнение! В то же время графическая иллюстрация часто помогает дать некоторые качественные ответы: найти число корней, грубо указать отрезки на числовой оси, где они могут находиться, и т. п.

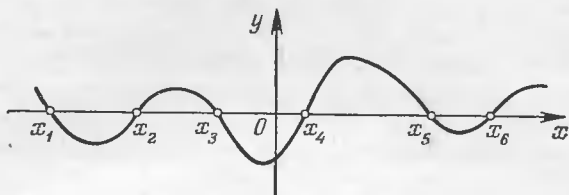


Рис. 11.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\sqrt{x} = (x - 1)^2. \quad (2)$$

Начертим графики функций, стоящих в левой и правой частях (рис. 12). Из этого рисунка мы можем заключить, что уравнение имеет два вещественных корня, один

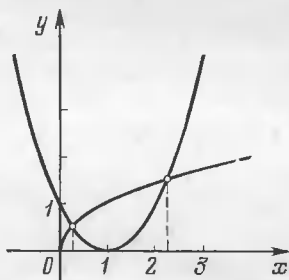


Рис. 12.

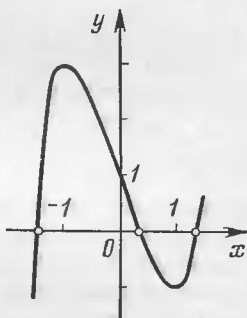


Рис. 13.

из которых находится в интервале  $(0; 1)$ , а другой — в интервале  $(2; 3)$ . Можно указать эти интервалы и более точно:  $(0; 0,5)$  и  $(2; 2,5)$ ; еще более точно:  $(0,2; 0,3)$  и  $(2,2; 2,3)$ . (Действительно, нетрудно проверить, что при  $x = 0,2$  имеем  $\sqrt{x} < (x - 1)^2$ , а при  $x = 0,3$  — уже  $\sqrt{x} > (x - 1)^2$ ; точно так же при  $x = 2,2$  левая часть уравнения больше правой, а при  $x = 2,3$  — меньше.)

Вообще, вычисляя и сравнивая значения левой и правой частей нашего уравнения, мы можем найти корни с любой степенью точности.

## Корни уравнения пятой степени

$$x^5 - 3x + 1 = 0 \quad (3)$$

вообще нельзя записать с помощью радикалов, но, построив достаточно точный график функции  $y = x^5 - 3x + 1$  (рис. 13), мы видим, что уравнение имеет три корня в интервалах  $(-1,5; -1,3)$ ,  $(0; 0,5)$  и  $(1; 1,3)$ .

Заметим, что хотя, глядя на график, мы «сразу видим», что на интервале  $(1; 1,3)$  уравнение имеет корень, но, чтобы строго это доказать, нам понадобилось бы следующее свойство непрерывных функций:

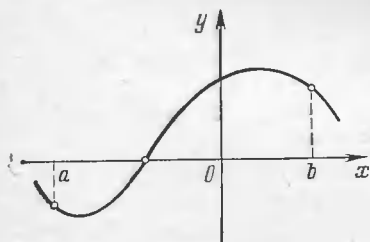


Рис. 14.

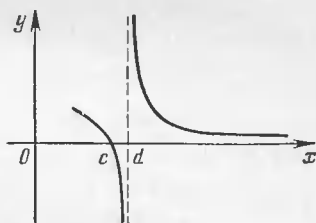


Рис. 15.

Если в концах отрезка  $[a; b]$  функция принимает значения разных знаков, то где-то на этом отрезке она обращается в нуль (рис. 14).

Другими словами, если числа  $f(a)$  и  $f(b)$  имеют разные знаки, то на интервале  $(a; b)$  лежит по крайней мере одно решение уравнения  $f(x) = 0$ .

Заметим, что этим свойством обладает не всякая функция. Например, функция, график которой изображен на рис. 15, при  $x > c$  не обращается в 0, однако она принимает значения разных знаков: от  $c$  до  $d$  функция принимает отрицательные значения, а для  $x > d$  — положительные. На картинке наглядно видна причина этого: график функции «рвется» при  $x = d$ . Мы не будем определять точно смысл этих слов: график функции не рвется, непрерывен или, наоборот, рвется, — это довольно сложный вопрос, связанный, в частности, с уточнением понятий вещественного числа и предела<sup>1)</sup>. Для

<sup>1)</sup> Для справедливости нашего свойства непрерывности очень существенно, что вещественные числа заполняют всю ось, т. е. что на оси нет «дырок». Если бы мы рассматривали только рациональные числа на оси, то, например, функция  $y = x^2 - 2$  переходила бы от отрицательных значений (при  $x = 0$ ) к положительным (при  $x = 2$ ), не обращаясь в 0.

большинства функций, с которыми обычно приходится иметь дело, легко увидеть те точки (их обычно бывает немного), в которых график функции рвется.

Раньше — при решении уравнения  $\sqrt{x} = (x-1)^2$  — мы также пользовались соображениями непрерывности. Поэтому наши утверждения о существовании корней этого уравнения будут строго доказанными, только если мы установим, что функции  $y = \sqrt{x}$  и  $y = (x-1)^2$  непрерывны.

Заметим, что нам нужно было несколько более общее утверждение:

Если  $f_1(a) < f_2(a)$ , а  $f_1(b) > f_2(b)$  и функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  на отрезке  $[a; b]$  непрерывны, то уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  имеет (по крайней мере одно) решение (рис. 16).

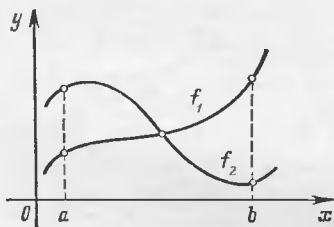


Рис. 16.

Это утверждение очевидным образом следует из первоначальной формулировки: достаточно переписать уравнение в виде  $f_1(x) - f_2(x) = 0$ .

Для графического решения часто бывает полезно переписать уравнение в виде  $f_1(x) = f_2(x)$  с таким расчетом, чтобы графики  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  было удобно построить.

Решим, например, такую задачу: сколько решений имеет уравнение

$$x^4 + 100[x] = 100x? \quad (4)$$

( $[x]$  означает целую часть числа  $x$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ).)

Перепишем уравнение в таком виде:

$$\frac{x^4}{100} = x - [x].$$

Строим графики левой и правой частей (рис. 17):  $y_1 = x^4/100$  и  $y_2 = x - [x]$ . Видно, что уравнение имеет семь решений:  $x = 0$  и по одному на отрезках  $(-4; -3)$ ,  $(-3; -2)$ ,  $(-2; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 3)$ .

<sup>1)</sup> Графики функций, в записи которых встречается  $[x]$ , рассматриваются в книге: И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шполь, Функции и графики, изд. 4, 1971.

Часто с помощью построения графиков и исследования функций  $f_1, f_2$  удастся показать, что уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  на каком-то отрезке не имеет решений или имеет не более одного решения и т. п.

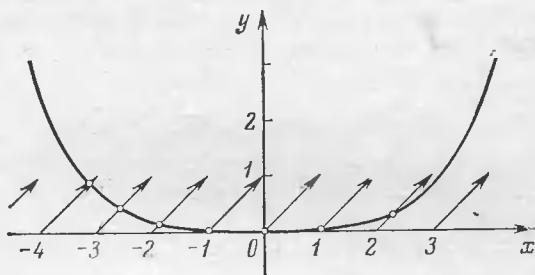


Рис. 17.

**Пример.** Доказать, что уравнение

$$\sqrt[4]{1+x^4} = \frac{4}{x} \quad (5)$$

имеет единственное решение.

При  $x < 0$  уравнение (5) не имеет решений (левая часть больше 0, правая — меньше).

При  $x > 0$  функция

$$y = \sqrt[4]{1+x^4}$$

возрастает, функция

$$y = 4/x$$

убывает (рис. 18).

Легко подсчитать, что при  $x = 1$  значение первой функции меньше, чем значение второй, а при  $x = 2$  — больше. Значит, на интервале  $(1; 2)$  уравнение имеет корень.

Пусть  $x_0$  — этот корень. Если  $0 < x < x_0$ , то

$$f_1(x) < f_1(x_0) = f_2(x_0) < f_2(x),$$

так что при  $x < x_0$  уравнение не имеет решений.

Если  $x > x_0$ , то

$$f_1(x) > f_1(x_0) = f_2(x_0) > f_2(x),$$

т. е. при  $x > x_0$  тоже нет решений.

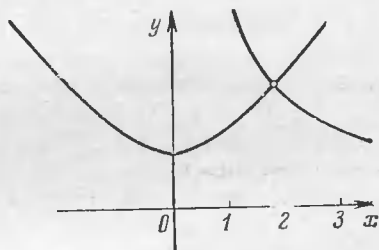


Рис. 18.



Подобные рассуждения короче записывают так: если  $x$  меняется от 0 до  $+\infty$ , то  $\sqrt[3]{1+x^3}$  монотонно возрастает от 1 до  $+\infty$ , а  $4/x$  монотонно убывает от  $+\infty$  до 0, поэтому уравнение  $\sqrt[3]{1+x^3} = 4/x$  имеет на  $(0; +\infty)$  ровно одно решение.

## УПРАЖНЕНИЯ

9.1. Дайте графическую иллюстрацию к решению уравнений 2)–4) § 5 (стр. 24).

9.2. Решить уравнения:

а)  $|x+1| + |2x-3| = 5$ ; б)  $|4-2|x|| = 1$ ;

дать графическую иллюстрацию (перед решением этой задачи рекомендуем заглянуть в книгу «Функции и графики»).

9.3. Решить уравнения:

а)  $\left[ \frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}$ ; б)  $\frac{x^2}{x-[x]} = \frac{1}{25}$ .

9.4. Найти число корней уравнения и указать отрезки, в каждом из которых находилось бы ровно по одному его корню:

а)  $-\frac{x^2 - 1/4}{x^2 + x^4} = x^2$ ;

б)  $1/2 |x+1| - 1/2 |x-1| = x^3 - 2x^2 + x$ ;

в)  $x^2 - 3/2 = \frac{1}{[x]}$ ; г)  $\sqrt{1-x^2} = x^3$ ; д)  $|x^2+1| = \frac{2x}{x^2+1}$ .

Трудные графики встречающихся здесь функций вы можете найти в книге «Функции и графики».

9.5. Заметьте, что в этом параграфе в наших рассуждениях при исследовании уравнений (2) и (4) был изъясн: мы не доказывали, что в каждом из интервалов находится ровно по одному корню (а не больше). Постарайтесь исправить эту неточность.

9.6. Решить уравнения:

а)  $\sqrt{x^8+8} = 3/x$ ; б)  $x^4 = 18 - |x|$ ;

в)  $2^{-|x|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|x+1| + |x-1|)$ ;

г)  $\sin 3x - \sin 2x = 2$ ; д)  $2^{2x} - 3^x = 1$ ;

е)  $\sin^4 x + \cos^{10} x = 1$ .

## § 10. Системы уравнений

Приведем примеры систем уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2x=4, \\ x^2+1=5; \end{cases} & 3) \begin{cases} x+y^2=5, \\ y+x^2=3; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1; \end{cases} & 4) \begin{cases} x+yx=1, \\ x=3y+1. \end{cases} \end{array}$$

Решением системы называется набор чисел (набор значений аргументов), при подстановке которых каждое из уравнений системы обращается в верное равенство. Например,

$x = 2$  — решение первой системы;  
 $x = 1, y = 0, z = 0$  — решение второй системы;  
 $x = 0, y = 1, z = 0$  — другое решение второй системы;  
 $x = 1, y = 2$  — решение третьей системы.

Как правило, рассматриваются системы, в которых число уравнений равно числу неизвестных (среди приведенных выше примеров это системы 3) и 4)). Такие системы обычно имеют конечное число решений.

Определения равносильности двух систем, а также того, что одна система является следствием другой, совершенно аналогичны соответствующим определениям, которые мы дали для уравнений.

На решения систем распространяются те же способы рассуждений, о которых мы говорили ранее.

Здесь мы приведем только одну теорему о равносильности систем<sup>1)</sup>.

*Теорема. Если одно из уравнений системы с  $n$  неизвестными  $x_1, \dots, x_n$  равносильно уравнению  $x_1 = \varphi(x_2, \dots, x_n)$ , то, подставив в остальные уравнения  $\varphi(x_2, \dots, x_n)$  вместо  $x_1$ , мы получим систему, равносильную исходной.*

Доказательство этой теоремы несложно, и мы предоставляем его читателю. На этой теореме основан наиболее употребительный способ решения систем — способ подстановки.

Пусть имеется система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Если первое уравнение можно привести к равносильному ему уравнению  $y = \varphi(x)$ , то решение уравнения  $f_2(x, \varphi(x)) = 0$  приведет к решению системы (1).

Теперь сделаем несколько практических замечаний.

Начнем с линейных уравнений. Вы подробно разбираете в школе систему двух линейных уравнений с двумя

---

<sup>1)</sup> В конце параграфа, в упр. 10.7, мы приводим еще одну полезную теорему о равносильности систем.

Приведем один пример, где использование симметричности системы позволяет получить решение очень быстро:

[illegible]

[illegible]
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1}$$
$$x_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} - a_1,$$

$$x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} - a_n.$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \dots + x_n &= \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} - a_2 + \dots + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} - a_n = \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n-1} (n-1) - (a_2 + \dots + a_n) = a_1. \end{aligned}$$

Получили верное равенство:  $a_1 = a_1$ . В остальные уравнения можно не подставлять, так как все они похожи на первое, будут меняться только номера у входящих в наши выкладки букв.

Кроме способа подстановки при решении часто помогает замена неизвестных. Мы не будем приводить общих рецептов, как лучше выбирать вспомогательные неизвестные. Заметим только, что многие симметричные системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1977, \\ xy = 50; \end{cases} \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x + y = 3 \end{cases}$$

и т. п. — приводятся к системам относительно  $xy$  и  $x + y$ . Этому помогают следующие полезные формулы:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) \text{ и т. п.}$$

**Пример.** Решить систему

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x - y) = 447, \\ xy(x - y) = 210. \end{cases}$$

Сделаем замену

$$\begin{aligned} & \begin{cases} xy = u, \\ x - y = v; \end{cases} \\ & \begin{cases} (v^2 + 2u)v = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3 + 2uv = 447, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3 = 27, \\ uv = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, \\ u = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 70. \end{cases} \end{aligned}$$

Числа  $x$  и  $-y$  являются корнями квадратного уравнения <sup>1)</sup>  $t^2 - 3t - 70 = 0$ ;  $t_1 = 10$ ,  $t_2 = -7$ ; поэтому имеем

$$\begin{cases} x_1 = 10, \\ -y_1 = -7, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x_1 = 10, \\ y_1 = 7, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x_2 = -7, \\ -y_2 = 10, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} x_2 = -7, \\ y_2 = -10. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> См. упр. 10.6.

Сделаем замечание относительно геометрической интерпретации решения систем. Рассмотрим снова систему

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Возьмем на плоскости с системой координат (рис. 19) множество точек  $l_1$ , координаты которых удовлетворяют

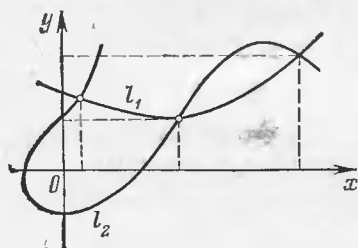


Рис. 19.

первому уравнению (в геометрии его называют кривой, задаваемой уравнением  $f_1(x, y) = 0$ );  $l_2$  — кривая, соответствующая второму уравнению. Решения системы соответствуют точкам пересечения кривых  $l_1$  и  $l_2$ .

В этих геометрических терминах удобно проводить исследование решений систем, а иногда и находить их

приближенное решение. Вам известно геометрическое исследование системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными (рис. 20):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

В случае а)  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ,  $(x_0, y_0)$  — единственное решение; в случае б)  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  и либо  $a_1c_2 - a_2c_1 \neq$

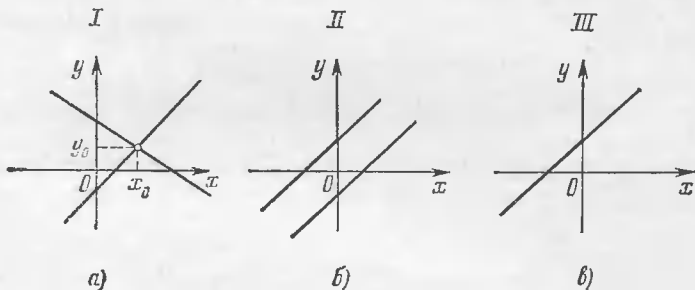


Рис. 20.

$\neq 0$ , либо  $b_1c_2 - b_2c_1 \neq 0$ , решений нет; в случае в)  $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$ , решения заполняют прямую.

Исследуем на геометрическом языке систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, & a > 0, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Первое уравнение системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом  $a$  (рис. 21). Второе уравнение задает прямую  $l$ , проходящую через точки с координатами  $(0; b)$  и  $(b; 0)$ . Сразу видно, что если прямая  $l$  пересекает окружность в двух точках, то

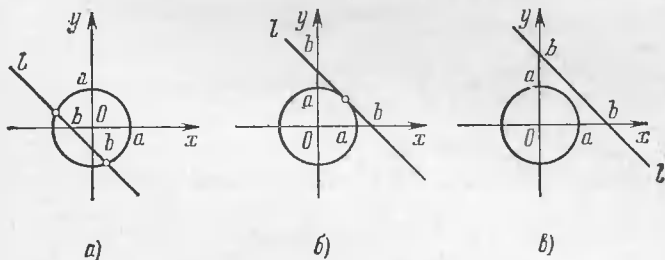


Рис. 21.

система имеет два решения — это соответствует случаю  $a$ ), когда расстояние от прямой  $l$  до центра  $|b|/\sqrt{2}$  меньше  $\sqrt{a}$ , т. е.  $|b| < \sqrt{2a}$ . Если же прямая  $l$  не пересекает окружности (случай  $в$ )), т. е.  $|b| > \sqrt{2a}$ , то система решений не имеет. При  $|b| = \sqrt{2a}$  решение одно (рис. 21, б).

## УПРАЖНЕНИЯ

10.1. Решить системы уравнений:

а) 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + v^2 = 4; \\ x^2 + v^2 + z^2 = 6, \\ v^2 + y^2 + z^2 = 7; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{10}{7}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{5}{8}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{40}{13}; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1, \\ y = 5 + |x-1|; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - 2x_3 = 1; \end{cases}$$

д) 
$$\begin{cases} xy + x - y = 3, \\ x^2y - xy^2 = 2; \end{cases}$$

е) 
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ж)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{array} \right. & \text{з)} \left\{ \begin{array}{l} x^2 - yz = a, \\ y^2 - xz = b, \\ z^2 - yx = c; \end{array} \right. \\ \text{и)} \left\{ \begin{array}{l} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + xy + y^2 = 13; \end{array} \right. & \text{к)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1. \end{array} \right. \end{array}$$

10.2. Решить системы уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} (x^2 + xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} = 65; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 32; \end{cases}$$

$$\text{B)} \begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9; \end{cases}$$

$$\Gamma) \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = \frac{7}{2}, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3; \end{cases}$$

10.3. Решить системы уравнений:

$$a) \begin{cases} 2^{2x-2y} + 2^{x-y} - 2 = 0, \\ 2^{2x+1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{2y-1} = 5; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2^{\frac{x+y}{4}} + 2^{\frac{x+y}{2}} = 6, \\ 2^x + 2^y = 17. \end{cases}$$

**10.4. Решить систему ста линейных уравнений со ста неизвестными:**

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + \dots + 99x_{99} + 100x_{100} = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \dots + 98x_{99} + 99x_{100} = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + \dots + 97x_{99} + 98x_{100} = 1, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{99} + 2x_{100} = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{99} + x_{100} = 1. \end{array} \right.$$

10.5. а) Исследуйте систему (для каждой пары чисел  $a$  и  $b$  укажите, сколько решений имеет система, и найдите эти решения)

$$\begin{cases} y - ax = 0, \\ y = x^2 + b. \end{cases}$$

Дайте геометрическую иллюстрацию этой системы.

б) Докажите, что для того, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы числа

$$c + a, \quad c - a, \quad c + b, \quad c - b$$

имели один и тот же знак (или, что то же самое, чтобы выполнялись одновременно неравенства  $|a| < |c|$  и  $|b| < |c|$ ).

10.6. Докажите, что решение системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases} \quad (1)$$

сводится к решению уравнения

$$t^2 - pt + q = 0. \quad (2)$$

А именно, если уравнение (2) имеет два различных корня  $t_1$  и  $t_2$ , то система (1) имеет два решения:

$$\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = t_1, \\ x = t_2; \end{cases}$$

если уравнение (2) имеет одно решение  $t_1 = t_2$ , то система (1) имеет также одно решение  $x = y = t_1$ ; если уравнение (2) не имеет решений, то и система (1) не имеет решений.

10.7. Докажите, что системы уравнений

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \dots \\ f_n = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_1 + a f_2 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \dots \\ f_n = 0 \end{cases}$$

( $a$  — некоторое число) равносильны.

10.8. Докажите, что система, состоящая из одного уравнения  $f_1^2 + f_2^2 = 0$ , равносильна системе, состоящей из двух уравнений:

$$\begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0. \end{cases}$$



## ГЛАВА III

### НЕРАВЕНСТВА

#### § 11. Свойства неравенств

Возьмем два числа. Поставим между ними один из знаков  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ . Получим высказывание, называемое *числовым неравенством*.

Примеры.

$$1) 3 > 1; \quad 4) 10 \leq 10;$$

$$2) 10 > 10; \quad 5) 5 \geq 1;$$

$$3) 5 > 7; \quad 6) 3 \geq 5.$$

Неравенства бывают верные и неверные. 1), 4), 5) — верные неравенства, остальные неравенства неверные.

Так как для любых двух чисел  $a$  и  $b$  либо  $a > b$ , либо  $a = b$ , либо  $b > a$ , то для различных чисел  $a$  и  $b$  ровно одно из неравенств  $a > b$  и  $b > a$  будет верным.

Если  $a$  больше  $b$ , а  $b$  больше  $c$ , то  $a$  больше  $c$ .

Это свойство запишем так:

$$T: a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

(мы обозначили это свойство буквой  $T$ ; его называют *транзитивностью*).

Сформулируем еще свойства неравенств, связывающие их с арифметическими действиями:

$$A: a > b \Rightarrow a + c > b + c \text{ при любом } c.$$

$$B: a > 0, b > 0 \Rightarrow ab > 0.$$

Сейчас мы перечислим еще ряд свойств неравенств, которые являются следствиями свойств  $T$ ,  $A$ ,  $B$ :

$$1. a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$

$$2. a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc.$$

$$3 \quad a > b \Rightarrow -a < -b.$$

$$4. \quad a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc.$$

$$5. \quad a > 0, b > 0 \Rightarrow a + b > 0.$$

$$6. \quad a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d.$$

$$7. \quad a > b, b > 0, c > d, d > 0 \Rightarrow ac > bd.$$

$$8. \quad a > b, b > 0 \Rightarrow a^n > b^n, \quad n - \text{натуральное число.}$$

$$9. \quad a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Напомним, что  $\sqrt[n]{a}$  при  $a > 0$  обозначает единственное положительное число  $c$  такое, что  $c^n = a$ .

Все эти свойства легко доказываются последовательно, одно за другим.

Выведем, например, свойство 7 из предыдущих. Рассмотрим преобразования  $ac - bd = ac - ad + ad - bd = a(c - d) + d(a - b)$ .

$$c > d \quad \text{— данное неравенство,}$$

$$c > d \Rightarrow c - d > 0 \quad \text{— свойство 1,}$$

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \quad \text{— свойство 1,}$$

$$a > b, \quad b > 0 \Rightarrow a > 0 \quad \text{— свойство Т,}$$

$$a > 0, c - d > 0 \Rightarrow a(c - d) > 0 \quad \text{— свойство Б,}$$

$$d > 0, a - b > 0 \Rightarrow d(a - b) > 0 \quad \text{— свойство Б,}$$

$$a(c - d) > 0, \quad d(a - b) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$a(c - d) + d(a - b) > 0 \quad \text{— свойство Б,}$$

$$a(c - d) + d(a - b) = ac - bd > 0$$

$$\Downarrow$$

$$ac > bd, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Можно доказать свойство 7 и по-другому. Так как  $a > b > 0$  и  $c > d > 0$ , то  $ac > bc$  (свойство 2),  $bc > bd$  (свойство 2) и  $ac > bd$  (свойство Т).

10. Если  $f$  — (строго) монотонная функция, определенная в точках  $a$  и  $b$ , то

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b), \quad \text{если } f \text{ возрастает,}$$

и

$$a > b \Rightarrow f(a) < f(b), \quad \text{если } f \text{ убывает.}$$

Это просто определение строгой монотонной функции (стр. 22).

Кроме неравенств вида  $a > b$  изучают и высказывания вида  $a \geq b$ , которые читаются так: « $a$  больше или равно  $b$ ».

Мы не будем выводить свойства отношения  $\geq$ . Заметим, что свойства Т, А, Б, будучи справедливыми для строгих неравенств и для равенств, остаются справедливыми и для нестрогих неравенств. К этим основным свойствам добавляется еще одно, свойство Р:  $a \geq a$  (которое, конечно, всегда верно, хотя и звучит непривычно). Буквой Р оно обозначено потому, что такое свойство отношений называют *рефлексивностью*. Это свойство не выполняется для строгих неравенств. Все свойства 1—10 строгих неравенств остаются верными, если всюду заменить строгие неравенства нестрогими.

## УПРАЖНЕНИЯ

11.1. Верны ли неравенства:

- а)  $0 \geq 3$ ;      в)  $\sqrt[3]{2} > \sqrt[7]{5}$ ;  
б)  $\frac{7}{15} > \frac{8}{17}$ ;    г)  $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$ ?

11.2. Выведите свойства 1—9 из основных (Т, А и Б).

11.3. Верны ли утверждения:

- а)  $\frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$ ;  
б)  $\frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$ ;  
в)  $a^2 \leq b^2 \Rightarrow |a| \leq |b|$ ;  
г)  $b \leq 0 \Rightarrow b^n \leq 0$ ,  $n$  — натуральное число;  
д)  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Rightarrow a < b$ ?

В каких из них можно поставить стрелки и в обратную сторону?

## § 12. Условные неравенства

Пусть нам даны две функции  $f_1$  и  $f_2$ . Если поставить между  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  один из знаков неравенства ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ), получается *условное неравенство*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Таким образом, условное неравенство — это высказывательная форма для числовых неравенств.

Примеры.

$$x^2 + 2\sqrt{y} > x, \quad x > 1, \quad y \in (0; 3); \quad (1)$$

$$2x + 3 > 0; \quad (2)$$

$$x \geq \sqrt{x-1}. \quad (3)$$

В примере (1) справа указана область определения функций, образующих неравенство. В примерах (2) и (3), где этого не сделано, имеется в виду естественная область определения. Так, в примере (2) — это множество всех вещественных чисел, в примере (3) — луч  $[1; +\infty)$ .

*Решением* условного неравенства называется такое значение аргумента (или набор значений аргументов в случае неравенств с несколькими неизвестными), при подстановке которого в данное условное неравенство оно обращается в верное (числовое) неравенство. Например,  $x = 2$  есть решение неравенства (3); пара чисел  $(3; 1)$  — решение неравенства (1), в то время как пара чисел  $(0; 2)$  решением этого неравенства не является, так как не входит в его область определения.

Два условных неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

**Теорема 1.** Если к обеим частям условного неравенства прибавить одну и ту же функцию, то получится неравенство, равносильное данному.

**Теорема 2.** а) Если обе части условного неравенства умножить на одну и ту же функцию, все значения которой в области определения данного неравенства строго положительны, то получится неравенство, равносильное данному.

б) Если все значения функции, на которую мы умножаем обе части неравенства, строго отрицательны, то, изменив знак неравенства на противоположный, мы также получим неравенство, равносильное данному.

**Теорема 3.** Если в обеих частях неравенства стоят функции, все значения которых в области определения неравенства положительны, то, возводя обе части неравенства в степень  $n$  ( $n$  — натуральное число) или извлекая корень  $n$ -й степени из обеих частей, мы получим неравенство, равносильное данному.

При применении всех этих теорем очень важно следить за тем, чтобы область определения неравенства сохранялась, хотя мы и не оговаривали этого специально в условии.

Доказательство этих трех теорем проводится аналогично доказательству соответствующих теорем об уравнениях (см. стр. 30, 37) с использованием свойств числовых неравенств из § 11.

Докажем для примера теорему 2б. По условию имеется неравенство

$$f(x) > \varphi(x), \quad x \in D, \quad (4)$$

и функция  $g$ , причем  $g(x) < 0$  для всех  $x \in D$ . Требуется доказать, что

$$f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow g(x)f(x) < g(x)\varphi(x). \quad (5)$$

Пусть число  $x \in D$  является решением неравенства (4), т. е.  $f(x_0) > \varphi(x_0)$ . Это верное числовое неравенство. Но  $g(x_0) < 0$ , следовательно,  $g(x_0)f(x_0) < g(x_0)\varphi(x_0)$  — тоже верное числовое неравенство (см. свойство 4, стр. 65), т. е.  $x_0$  является решением неравенства (5).

Обратно, пусть  $x_0$  — решение неравенства (4), т. е. верно неравенство  $g(x_0)f(x_0) < g(x_0)\varphi(x_0)$ ; по тому же свойству 4, умножив обе части этого неравенства на число  $1/g(x_0) < 0$ , получим верное неравенство  $f(x_0) > \varphi(x_0)$ . Теоремы 1, 2а и 3 докажите самостоятельно.

Приведем еще одну теорему, обобщающую теорему 3.

**Теорема 4.** Если к обеим частям условного неравенства  $f(x) > g(x)$  применить функцию  $h$ , которая определена при всех значениях функций  $f$  и  $g$  и (строго) монотонна (см. стр. 22), то исходное неравенство равносильно неравенству

$$h(f(x)) > h(g(x)) \quad (\text{для возрастающей } h),$$

$$h(f(x)) < h(g(x)) \quad (\text{для убывающей } h).$$

Приведем примеры использования перечисленных теорем для решения неравенств.

$$1) \frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} < 1.$$

В обеих частях этого неравенства стоят функции, определенные на множестве всех чисел. Функция  $x \rightarrow \sqrt{x^4+1}$  положительна при всех  $x$ , поэтому (теорема 2а)

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}} < 1 \Leftrightarrow x^2 < \sqrt{x^4+1}.$$

Обе части неравенства принимают только положительные значения, поэтому (теорема 3)

$$\sqrt{x^4+1} > x^2 \Leftrightarrow x^4+1 > x^4.$$

Решением последнего неравенства является, очевидно, любое число, так как (по теореме 1)

$$x^4 + 1 > x^4 \Leftrightarrow 1 > 0.$$

Следовательно, и множество решений исходного неравенства — все множество  $\mathbf{R}$ .

$$2) \sqrt{x^4 - 1} < x^2.$$

Здесь тоже можно возвести обе части неравенства в квадрат:

$$\sqrt{x^4 - 1} < x^2 \Leftrightarrow x^4 - 1 < x^4,$$

но у полученного неравенства естественная область определения шире, чем у первоначального; поэтому обязательно нужно рядом с неравенством  $x^4 - 1 < x^4$  написать ограничения (указать область определения):  $x^4 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ . Это и будет ответ, поскольку само неравенство  $x^4 - 1 < x^4$  выполняется при всех  $x$ .

$$3) \sqrt{x^2 - 1} > x.$$

Областью определения неравенства является то же самое множество  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ . Если возвести обе части данного неравенства в квадрат, то получится неравенство, не имеющее решений. Однако это еще не означает, что исходное неравенство не имеет решений (подставьте, например,  $x = -2$  и убедитесь в противном). Так как при возведении в квадрат мы не получаем в этом случае равносильного неравенства (подумайте, почему здесь неприменима теорема 3), придется рассуждать иначе.

Предположим, что  $x_0$  есть решение неравенства, т. е.

$$\sqrt{x_0^2 - 1} > x_0.$$

Мы хотим возвести это числовое неравенство в квадрат. Нам известно (свойство 8 верных числовых неравенств), что при возведении в квадрат верного неравенства, в обеих частях которого стоят положительные числа, получается снова верное неравенство. В левой части неравенства стоит положительное число. Если в правой части стоит положительное число, т. е. если  $x_0 > 0$ , то

неравенство  $x_0^2 - 1 > x_0^2$  должно быть верным. Но из него вытекает, что  $-1 > 0$ , это неверно. Значит, сделанное предположение о том, что положительное число  $x_0$  является решением неравенства, привело нас к противоречию. Следовательно, положительных решений у неравенства нет. Легко убедиться, с другой стороны, что каждое отрицательное число (из области определения) является решением нашего неравенства.

Коротко можно записать эти рассуждения так: на множестве  $(-\infty; -1]$  неравенство  $\sqrt{x^2 - 1} > x$  выполняется тождественно, а на множестве  $[1; +\infty)$  оно эквивалентно неравенству  $x^2 - 1 > x^2$ , у которого нет решений. Итак, ответом будет множество  $X = (-\infty; -1]$ .

Подобный прием — разбиение области определения неравенства на два или несколько множеств, на каждом из которых удастся заменить его равносильным, но более простым, — как мы увидим дальше, часто применяется при решении неравенств. Теорема 4 из § 6 (стр. 33) будет, очевидно, верна, если в ней заменить слово *уравнение* на *неравенство*.

К решению неравенств, конечно, полностью относится и важное замечание в конце § 6.

Вы заметили, видимо, что определения, касающиеся уравнений и неравенств, строились параллельно:

равенство	— (числовое) неравенство,
верное, неверное равенство	— верное, неверное неравенство,
уравнение	— условное неравенство,
решение (корень) уравнения	— решение неравенства,
равносильность уравнений	— равносильность неравенств,
тождество	— тождественное неравенство.

К сожалению, в терминах такого параллелизма нет. Для условных равенств придумано специальное слово — «уравнение», а для условных неравенств специального слова нет; так же и с тождествами. В дальнейшем, когда мы будем писать просто слово *неравенство*, мы будем иметь в виду условное неравенство. Это не страшно, поскольку всякое числовое неравенство  $a > b$ , в двух частях которого стоят две постоянные функции  $y = a$ ,  $y = b$ , можно считать условным,

## УПРАЖНЕНИЯ

12.1. Равносильны ли следующие неравенства:

а)  $x^3 \leq 1$  и  $x \leq 1$ ;

б)  $\sqrt{x-1} < x$  и  $x-1 \leq x^2$ ;

в)  $\sqrt{x-1} \geq x$  и  $x-1 \geq x^2$ ;

г)  $\frac{x^3 - x - 1}{x^3 + x + 1} > 0$  и  $x^6 - x^2 - 2x - 1 > 0$ ;

д)  $\frac{x^3 - x - 1}{x^3 + x + 1} \geq 0$  и  $x^6 - x^2 - 2x - 1 \geq 0$ ?

12.2. Найдите все ошибки в следующем «решении» неравенства (а затем решите его правильно)

$$\sqrt{\frac{x^3 + 8}{x}} > x - 2.$$

Найдем область определения:

$$\begin{cases} x^3 + 8 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^3 + 8 < 0, \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x < 0. \end{cases}$$

Область определения  $(-\infty; 0] \cup [-2; +\infty)$ .

Теперь преобразуем данное неравенство (заменяем его равносильными):

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 8}{x} &> x^2 - 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow \\ x^3 + 8 &> x^3 - 4x^2 + 4x \\ &\Leftrightarrow \\ 4x^2 - 4x + 8 &> 0 \\ &\Leftrightarrow \\ x^2 - x + 2 &> 0. \end{aligned}$$

Корни уравнения  $x^2 - x + 2 = 0$ :  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 2$ . Решения последнего неравенства:  $-1 < x < 2$ , т. е.  $x \in (-1; 2)$ .

Выберем теперь значения  $x$ , принадлежащие области определения.

Ответ:  $X = [-1; 0]$ .



### § 13. Неравенства с одним неизвестным

Начнем с линейного неравенства, т. е. неравенства вида  $ax + b > 0$  ( $a$  и  $b$  — числа,  $a \neq 0$ ).

Множество его решений можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$a > 0 \Rightarrow X = (-b/a; +\infty),$$

$$a < 0 \Rightarrow X = (-\infty; -b/a).$$

Этот результат можно представить себе так: линейная функция  $f(x) = ax + b$  сохраняет постоянный знак на каждом из двух лучей, на которые точка  $x = -b/a$  (единственный корень уравнения  $f(x) = 0$ ) делит числовую ось, и меняет знак при переходе через этот корень. Это легко изобразить графически (рис. 22).

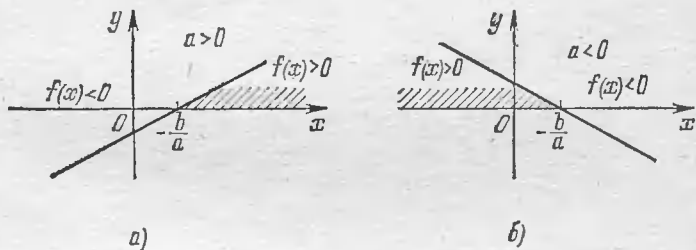


Рис. 22.

Несложно решаются и неравенства вида  $f(x) > 0$ , где функция  $f(x)$  раскладывается в произведение линейных множителей. Рассмотрим такой пример:

$$x(x-1)(x+1)(2x+3) > 0.$$

Нанесем на числовую ось корни линейных множителей (рис. 23). На каждом из пяти получившихся интервалов каждый из множителей (а значит, и все произведение) сохраняет постоянный знак. Чтобы найти его, достаточно вычислить значения левой части в какой-либо точке интервала.

I.  $x = -2 \Rightarrow f(x) > 0.$

IV.  $x = 1/2 \Rightarrow f(x) < 0.$

II.  $x = -5/4 \Rightarrow f(x) < 0.$

V.  $x = 2 \Rightarrow f(x) > 0.$

III.  $x = -1/2 \Rightarrow f(x) > 0.$

Ответ:  $X = (-\infty; -3/2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty).$

Случайно ли у нас произошло чередование знаков? Конечно, нет. В точках  $-\frac{3}{2}$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  менял знак ровно один множитель. Заметив это, можно не вычислять значения функции во внутренней точке отрезка, а, начав с любой точки, где знак произведения очевиден, следить за изменением знака при переходе через корни. При

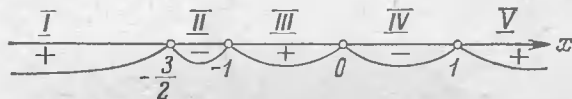


Рис. 23.

этом надо быть осторожным, так как может в какой-то точке обратиться в нуль четное число линейных множителей и изменения знака не произойдет.

Точно так же решаются и рациональные неравенства вида

$$f(x)/g(x) > 0,$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  раскладываются на линейные множители. Здесь только надо не забывать, что корни знаменателя играют особую роль — в них исходная функция не определена.

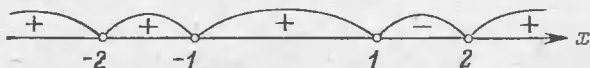


Рис. 24.

**Пример.** Решим неравенство

$$\frac{3(x-1)(x+2)^2}{(x^2+1)(x+1)^2(x-2)} > 0.$$

Наносим на ось корни числителя и знаменателя (рис. 24) и читаем ответ<sup>1)</sup>:

$$X = (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty).$$

Наши предыдущие рассуждения имеют наглядный геометрический смысл. Пусть надо решить неравенство

<sup>1)</sup> Подумайте, какую ошибку мы совершили бы, «вычеркнув» в неравенстве неотрицательные множители  $(x+2)^2$  и  $(x+1)^2$ , и почему можно «вычеркнуть» множитель  $x^2+1$ .

$f(x) \geq 0$ . Нарисуем график функции  $y = f(x)$  (рис. 25). Эта функция непрерывна всюду, кроме точки  $d$ ; ее область определения:  $(-\infty; d) \cup (d; +\infty)$ .

Нас интересуют точки  $x$ , где  $f(x) \geq 0$ , т. е. точки графика функции, лежащие выше оси  $x$  или на оси  $x$ .

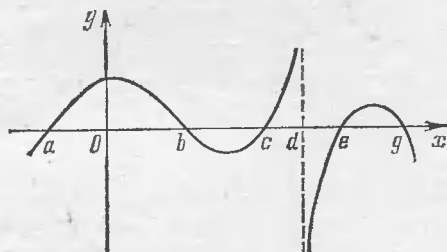


Рис. 25.

Легко перечислить участки изменения  $x$ , которые соответствуют таким точкам. Это три отрезка:  $[a; b]$ ,  $[c; d)$  и  $[e; g]$ . Ответ можно записать в виде объединения этих отрезков:

$$X = [a; b] \cup [c; d) \cup [e; g].$$

Наша геометрическая картинка подсказывает следующий способ решения неравенства  $f(x) \geq 0$ : нужно разбить числовую ось на отрезки, в которых функция  $y = f(x)$  сохраняет знак; на такие отрезки ось  $Ox$  делится, во-первых, точками, в которых значение функции равно нулю:  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = c$ ,  $x = e$ ,  $x = g$ , и, во-вторых, точками, где функция не определена, график ее разрывается:  $x = d$ .

Для более строгого обоснования такого способа решения неравенств нам хотелось бы иметь следующее свойство функции: *если на каком-нибудь отрезке функция не обращается в нуль, то она имеет на этом отрезке постоянный знак*. Разумеется, это одно из тех свойств непрерывности, о которых мы говорили в параграфе о графическом решении уравнений (§ 9, стр. 53). В начале этого параграфа мы применяли его для линейной функции. Напомним, что для непрерывных функций оно заведомо верно, но если график функции в некоторых точках «рвется», то нужно отметить все такие точки и исследовать функцию отдельно на каждом из отрезков, на которые эти точки делят ось.

Обратим еще внимание на неравенства, содержащие абсолютную величину. Нового, конечно, в них нет ничего. Например, нетрудно решить неравенство  $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$ , нарисовав графики функций  $y = x - 1$  и  $y = |x^2 - 5x + 4|$  и затем найдя нужные отрезки.

В то же время полезно научиться быстро ориентироваться в неравенствах типа  $|x| < a$ ,  $|x - a| \geq b$  и т. д.

Эти неравенства разбирались в книжке «Метод координат»<sup>1)</sup> из нашей серии. Напомним, что число  $|x - y|$  равно расстоянию между точками на числовой оси, соответствующими числам  $x$  и  $y$ . Из этого сразу вытекает,

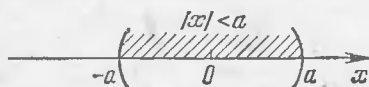


Рис. 26.

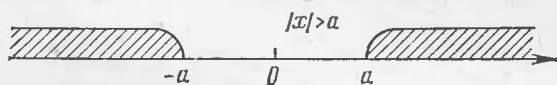


Рис. 27.

что неравенству  $|x| < a$  при  $a > 0$  удовлетворяют точки, расстояния которых до начала координат меньше  $a$ , т. е. точки отрезка  $(-a; a)$  (рис. 26). Легко убедиться, что решение неравенства  $|x| > a$  при  $a > 0$  (рис. 27) выглядит так:

$$x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty).$$

С помощью этих рассуждений можно быстро решить такое, например, неравенство:  $|x^2 - 2| \leq 1$ .

Нарисуем график функции  $y = x^2$  (рис. 28). Неравенство можно прочесть так:  $|y - 2| \leq 1$ , т. е. расстояние от  $y$  до 2 не должно превосходить числа 1. Это будет верно для точек графика, лежащих в полосе между прямыми  $y = 1$  и  $y = 3$ . Рисуем эту полосу и находим нужные отрезки на оси  $x$ :

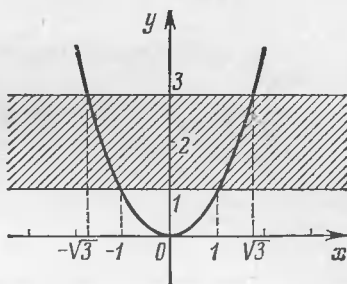


Рис. 28.

$$X = [-\sqrt{3}; -1] \cup [1; \sqrt{3}].$$

<sup>1)</sup> И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат, «Наука», изд. 3, 1968.

В заключение разберем решение двух неравенств.

$$1) \frac{|2x-1|}{x^2+x-2} \geq 3.$$

а) Решим неравенство на интервале  $(-\infty; 1/2)$ .

Для всех  $x \in (-\infty; 1/2)$  имеем  $|2x-1| = 1-2x$ .

$$\frac{1-2x}{x^2+x-2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x^2+x-2} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x-7}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)(x-1)} \leq 0,$$

где

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{6}, \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{6}$$

— корни числителя. Наносим на числовую ось корни числителя и знаменателя, попадающие в рассматриваемый интервал  $x < 1/2$  (рис. 29). (Заметим, что  $x_1 < -2$ .)

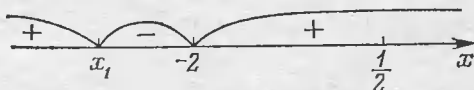


Рис. 29.

Итак, решениями неравенства 1) на интервале  $(-\infty; 1/2)$  являются

$$x \in \left[ \frac{-5-\sqrt{109}}{6}; -2 \right).$$

б) Осталось рассмотреть промежуток  $[1/2; +\infty)$ .

Для всех  $x \in [1/2; +\infty)$  выражение  $|2x-1|$  равно  $2x-1$ . Далее, имеем

$$\frac{2x-1}{x^2+x-2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3x^2+x-5}{(x+2)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-x_1)(x-x_2)}{(x+2)(x-1)} \leq 0,$$

$$\text{где } x_1 = \frac{-1-\sqrt{61}}{6}, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{61}}{6}.$$

Решения этого неравенства, входящие в промежуток  $[1/2; +\infty)$ , образуют промежуток  $\left(1; \frac{-1+\sqrt{61}}{6}\right]$ .

$$\text{Ответ: } X = \left[ \frac{-5-\sqrt{109}}{6}; -2 \right) \cup \left( 1; \frac{-1+\sqrt{61}}{6} \right].$$

$$2) 4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}.$$

Выясним область определения неравенства:

$$(x+5)(3x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [-4/3; +\infty).$$

Так как неизвестен знак левой части неравенства, возведение обеих частей неравенства в квадрат может привести к неравносильному неравенству. Поэтому следует рассмотреть два случая.

а)  $x < 1$ .

При этих значениях  $x$  слева стоит отрицательное число, а справа — неотрицательное; наше неравенство верно при всяком допустимом  $x$ , т. е. в этом случае решение таково:

$$X_1 = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 1).$$

б)  $x \geq 1$ .

$$4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)} \Leftrightarrow 16x^2 - 32x + 16 < 3x^2 + 15x + 4x + 20 \Leftrightarrow 13(x + 1/13)(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1/13; 4).$$

В этом случае решение — промежуток  $[1; 4)$ .

Ответ:

$$X = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 1] \cup [1; 4) = (-\infty; -5] \cup [-4/3; 4).$$

## УПРАЖНЕНИЯ

13.1. Решить неравенства, построив графики соответствующих функций:

а)  $\left| \frac{x+1}{3-2x} \right| > 1$ ; б)  $|x^2 - 3x + 2| - 1 > x - 2$ ; в)  $\sqrt{x+2} > x$ .

13.2. Решить неравенства:

а)  $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$ ; б)  $\frac{x^3+15}{x^3+8} < 2$ ;

в)  $\frac{(x-1)^2(x+3)}{x-5} \geq 0$ ; г)  $\sqrt{x^2-3x+2} \geq 2-x$ ;

д)  $\sqrt{x-\sqrt{x-1/4}} \geq 1/4$ ; е)  $\frac{x-\sqrt{x-2}}{x+\sqrt{x+2}} < 0$ ;

ж)  $\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5-x}$ ; з)  $\sqrt{x^2-x+1} \leq x^2+x-1$ ;

и)  $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} > \frac{x}{2}$ ; к)  $x^2-2x+3 < \sqrt{4-x^2}$ ;

л)  $x\sqrt{3-2x}+1 > 0$ ;

м)  $\frac{1}{x^2-2x-15} > \frac{1}{x^2-x-2}$ ;

н)  $(x^2+2x-1)(2x^2+4x-1) \leq 10$ ;

о)  $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4$ ;

п)  $\sqrt{\left| \frac{1}{4} - x \right|} \geq x + \frac{1}{2}$ .

13.3. Решить неравенства:

а)  $\frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1}$ ;

б)  $(0, 2)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \geq 25$ ;

в)  $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$ ;

г)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \geq 1$ ;

д)  $\log_{3-x} x \leq -1$ ; е)  $x^{3/4x} \leq (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$ .

13.4. В каждом из уравнений § 7 замените знак равенства на какой-либо из знаков  $\geq$  или  $\leq$  и решите получившееся неравенство.

13.5. Равносильны ли неравенства:

а)  $\sqrt{x^3 + x - 2} > x$  и  $x^3 + x - 2 > x^2$ ;

б)  $\sqrt{x^3 + x - 2} < x$  и  $x^3 + x - 2 < x^2$ ?

13.6. Докажите неравенства:

а)  $x(1-x) \leq 1/4$ ; б)  $x^4 + (1-x)^4 \geq 1/8$ ;

в)  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ,  $x \in (0; +\infty)$ ;

г)  $|x + \sqrt{1-x^2}| \leq 2$ ,  $x \in [-1; 1]$ ;

д)  $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$ ,  $x \in [-1; +\infty)$ ;

е)  $(1+x)^n > 1+nx$ ,  $x \in (0; \infty)$ ,  $n$  — натуральное;

ж)  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ,  $x \in [-1; \infty)$ ,  $n$  — натуральное.

## § 14. Неравенства с двумя неизвестными

Неравенство с двумя неизвестными можно представить так:  $f(x, y) > 0$ , где  $f$  — функция двух аргументов  $x$  и  $y$ . Если мы рассмотрим уравнение  $f(x, y) = 0$ , то множество точек  $M(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют этому уравнению, образует, как правило, некоторую кривую, которая разобьет плоскость на две или несколько областей. В каждой из этих областей функция  $f$  сохраняет знак, — остается выбрать те из них, в которых  $f(x, y) > 0$ .

Мы познакомимся только с самыми простыми неравенствами с двумя неизвестными.

Рассмотрим прежде всего неравенство  $ax + by + c > 0$ . Если какой-нибудь из коэффициентов  $a$  или  $b$  отличен от нуля, то уравнение  $ax + by + c = 0$  задает прямую, разбивающую плоскость на две полуплоскости. В каждой из них будет сохраняться знак функции  $f(x, y) = ax + by + c$ . Для определения этого знака достаточно взять любую точку этой полуплоскости и вычислить значение функции  $f$  в этой точке. Например, чтобы нарисовать на плоскости множество точек  $(x, y)$ , удовлетворяющих неравенству  $5x - 2y + 6 > 0$ , нужно начертить прямую  $5x - 2y + 6 = 0$  и взять все точки полуплоскости под этой прямой (рис. 30); чтобы убедиться, что

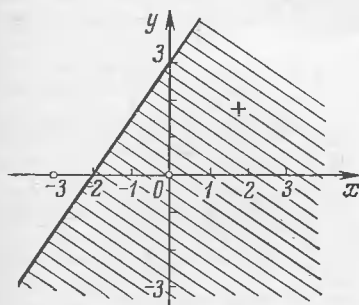


Рис. 30.

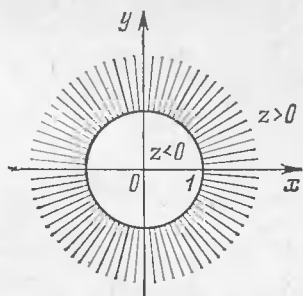


Рис. 31.

именно *под*, а не *над*, мы нашли значение функции  $f(x, y) = 5x - 2y + 6$  в точке  $(0, 0)$ :  $f(0, 0) = 6 > 0$ .

На рис. 31 показано решение еще одного простого неравенства:  $x^2 + y^2 > 1$ ; чтобы решить его, достаточно рассмотреть функцию  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

Если нужно решать системы неравенств с двумя неизвестными, то решают графически каждое из неравенств системы, а затем находят общую часть (пересечение) получившихся частей плоскости. Решим графически, например, такую систему двух неравенств:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6 > 0, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Пусть  $f_1(x, y) = 3x - 2y + 6$ ,  $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ .

В заштрихованном куске (рис. 32) одновременно выполняются нужные нам неравенства  $f_1 > 0$  и  $f_2 \leq 0$  (кусоч окружности, ограничивающей заштрихованную область, входит в решение, а отрезок прямой — нет).



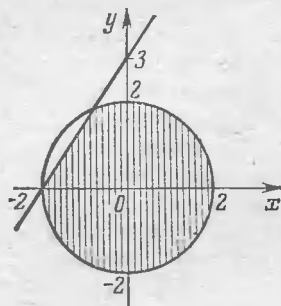


Рис. 32.

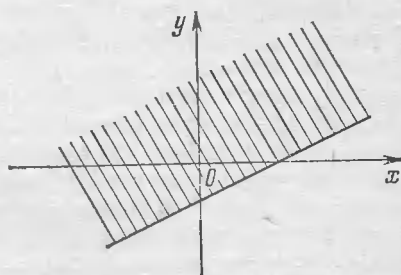


Рис. 33.

$$ax + by + c \geq 0$$

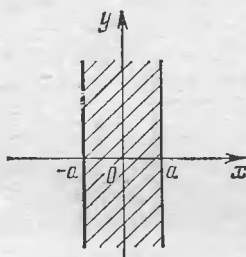


Рис. 34.

$$|x| \leq a$$

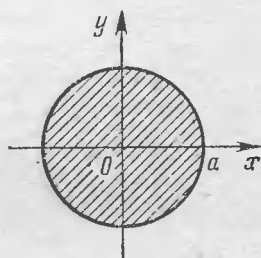


Рис. 35.

$$x^2 + y^2 \leq a^2$$

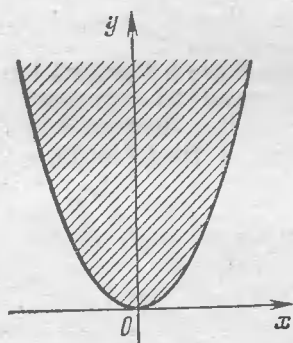


Рис. 36.

$$y \geq x^2$$

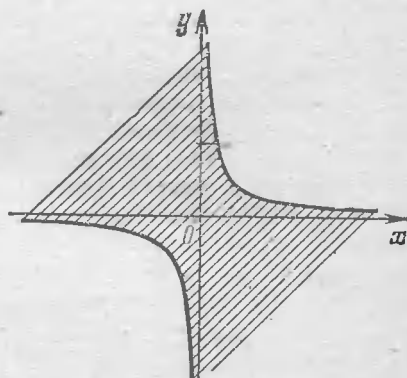


Рис. 37.

$$xy \leq 1$$

На рис. 33—37 приведены примеры графического решения наиболее часто встречающихся неравенств с двумя неизвестными.

## УПРАЖНЕНИЯ

14.1. Дать графическое решение неравенств:

- |                            |                                  |
|----------------------------|----------------------------------|
| а) $y - 2x \geq 1$ ;       | б) $x +  y  \leq 1$ ;            |
| в) $ x + y  > 1$ ;         | г) $  x - y  - 1  > 2$ ;         |
| д) $x^2 \geq y^2$ ;        | е) $x + y \leq y^2$ ;            |
| ж) $y^2 +  x  \geq 2$ ;    | з) $\sqrt{y+2} \geq x$ ;         |
| и) $\sqrt{2-x} \leq y$ ;   | к) $x^2 + y^2 \geq x + y$ ;      |
| л) $\sqrt{4-x^2} \leq y$ ; | м) $\sqrt{1-x^2-y^2} \geq 1/2$ ; |
| н) $xy \geq 1$ ;           | о) $xy \leq -2$ ;                |
| п) $y \geq \frac{1}{x}$ ;  | р) $x + \frac{1}{x} > y$ ;       |
| с) $x^2 > xy + 1$ .        |                                  |

14.2. Решить графически неравенства, приводя их к системе неравенств:

- |                            |                                      |
|----------------------------|--------------------------------------|
| а) $xy > 0$ ;              | б) $x^2 - y^2 < 0$ ;                 |
| в) $(x-2)(x-2y) < 0$ ;     | г) $x^2 - x \leq y - xy$ ;           |
| д) $x^3 + y^3 + 1 > 3xy$ ; | е) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 0$ . |

14.3. Дать графическое решение систем неравенств:

- |  |   |
|--|---|
| а) $\begin{cases} 2x - y + 2 > 0, \\ x + y + 1 < 0; \end{cases}$ | б) $\begin{cases} x > 2y, \\ xy < 1; \end{cases}$                     |
| в) $\begin{cases} y + x^2 < 0, \\ y - x^2 > 1; \end{cases}$      | г) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\  x  < 1, \\  y  > 1; \end{cases}$ |
|  | д) $\begin{cases}  x + y  \geq y, \\ x - y \leq 0. \end{cases}$       |

## § 15. Уравнения и неравенства с параметрами

Как правило, наиболее интересная часть решения реальной физической задачи — выяснить, как зависит ответ от параметра.

Если встать на формальную точку зрения, то никаких специальных уравнений или неравенств «с параметрами» нет.

Скажем, уравнение  $x^2 + x + a = 0$  можно понимать как уравнение с двумя неизвестными  $x$  и  $a$ . В левой части его стоит функция двух аргументов  $y = f(x, a) = x^2 + x + a$ . Множество решений такого уравнения — множество пар чисел, при подстановке которых получается верное равенство. Однако иногда мы говорим о решении уравнения относительно  $x$ , т. е. считаем аргументы  $x$  и  $a$  неравноправными и хотим выразить  $x$  через  $a$ . Можно сказать по-другому: мы хотим иметь ответ в таком виде, чтобы для каждого значения  $a$  было указано, какие числа  $x$  в паре с этим  $a$  дают решения.

В задачах с реальным физическим содержанием неравноправие аргументов — разделение их на «неизвестные» и «параметры» — для нас естественно. Чтобы подчеркнуть различную роль аргументов, параметры обозначают, как правило, первыми буквами латинского алфавита ( $a, b, c, \dots$ ), а неизвестные — последними ( $\dots, x, y, z$ ).

В основу решения задач с параметрами может быть положен следующий принцип: значение параметра (или параметров, если их несколько) считается произвольно фиксированным, и затем ищется решение задачи так, как мы это делали, обращаясь с уравнениями и неравенствами с одним неизвестным. Ответом должно быть перечисление решений для каждого допустимого значения параметра.

Например, ответ при решении неравенства  $\sqrt{x} \leq a$  лучше всего записать так: при  $a \in (-\infty; 0)$   $X = \emptyset$ ; при  $a \in [0; +\infty)$   $X = [0; a^2]$ .

Надо заметить еще следующее: выяснение зависимости решений от значений параметра есть часть процесса решения задачи. Иногда ее называют исследованием и отделяют от непосредственного решения. Привыкайте к тому, что если вы решили задачу без исследования, то вы ее вовсе не решили.

Мы разберем решение квадратного уравнения с одним параметром:

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0.$$

Прежде всего рассмотрим случай  $a = 0$  (при этом значении обычная схема решения квадратного уравнения не действует). Уравнение принимает вид

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Пусть теперь  $a \neq 0$ . Существование и число корней квадратного уравнения зависят от его дискриминанта. Вычислим дискриминант<sup>1)</sup>  $D = (a+1)^2 - 2a^2 = -a^2 + 2a + 1$ ; как многочлен от  $a$ ,  $D$  имеет корни  $a_1 = 1 - \sqrt{2}$  и  $a_2 = 1 + \sqrt{2}$ . Нанесем на числовую ось  $a$  полученные точки (рис. 38).

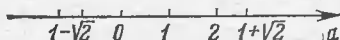


Рис. 38.

Если  $D < 0$ , т. е.  $a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$ , то уравнение не имеет решений.

При  $D = 0$ , т. е. при  $a = 1 - \sqrt{2}$  и при  $a = 1 + \sqrt{2}$ , уравнение имеет один корень:  $x = -\frac{a+1}{a}$ . Подставим значения  $a$ . При  $a = 1 + \sqrt{2}$  получим  $x = -\sqrt{2}$ ; при  $a = 1 - \sqrt{2}$   $x = \sqrt{2}$ .

При  $D > 0$ , т. е. при  $a \in (1 - \sqrt{2}; 0) \cup (0; 1 + \sqrt{2})$ , уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{D}}{a}; \quad x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{D}}{a}.$$

Ответ:

$$a \in (-\infty; 1 - \sqrt{2}) \Rightarrow \text{корней нет};$$

$$a = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2};$$

$$a \in (1 - \sqrt{2}; 0) \Rightarrow x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a},$$

$$x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a};$$

$$a = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$a \in (0; 1 + \sqrt{2}) \Rightarrow x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a},$$

$$x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{-a^2 + 2a + 1}}{a};$$

$$a = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2};$$

$$a \in (1 + \sqrt{2}; +\infty) \Rightarrow \text{корней нет}.$$

<sup>1)</sup> Здесь и ниже, где это удобно, мы считаем дискриминант  $D$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  равным

$$D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{b^2 - 4ac}{4}.$$

Приучите себя записывать ответ, перечисляя все значения параметра в порядке возрастания.

Теперь мы решим одно неравенство с параметром. Наберитесь, пожалуйста, терпения, потому что формальное решение его довольно утомительно. Но если вы не сделаете сейчас все выкладки, вы не сможете оценить другое решение этого примера, которое будет приведено в следующем параграфе. Итак, решим неравенство

$$\sqrt{2x+a} \geq x.$$

Естественная область определения<sup>1)</sup>  $2x+a \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -a/2$ .

Рассмотрим два случая:

1)  $x < 0$ . Тогда все пары  $(x, a)$ , входящие в область определения, являются решениями.

2)  $x \geq 0$ . Тогда

$$\sqrt{2x+a} \geq x \Leftrightarrow 2x+a \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - a \leq 0.$$

Исследуем дискриминант получившегося трехчлена  $D = 1 + a$ :

а)  $a < -1 \Rightarrow$  решений нет;

б)  $a \geq -1 \Rightarrow 1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1}$ .

Однако надо еще согласовать полученное с условиями  $x \geq 0$  и  $x \geq -a/2$ . Иными словами, надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{a+1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a+1}, \\ x \geq 0, \\ x \geq -a/2, \\ a \geq -1. \end{cases}$$

Число  $x$  должно быть больше (или равно) каждому из трех чисел  $0$ ,  $-a/2$ ,  $1 - \sqrt{a+1}$ . Нам надо знать, как они расположены на числовой оси в зависимости от  $a$ . Сначала выясним, когда первое из этих чисел больше третьего:

$$0 > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 \Leftrightarrow a > 0.$$

Заметим, что при этих же  $a$  первое число больше и второго. Итак, случай б) разбивается на два:

<sup>1)</sup> Напомним, что область определения уравнения или неравенства с двумя неизвестными  $x$  и  $a$  — множество пар  $(x, a)$ , при которых определены составляющие его функции.

б')  $a > 0$ . В этом случае из трех исходных чисел самым большим является первое — число 0. Остаются условия  $x \geq 0$  и  $x \leq 1 + \sqrt{a+1}$ . В этом случае

$$x \in [0; 1 + \sqrt{a+1}].$$

б'')  $-1 \leq a \leq 0$ . Сейчас заведомо первое число меньше и второго и третьего. Сравним второе и третье:

$$-\frac{a}{2} > 1 - \sqrt{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} > 1 + \frac{a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+1 > 1+a+\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} < 0,$$

что не выполняется ни при каких  $a$ . Итак, в этом случае третье число — наибольшее, и мы получаем

$$x \in [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}].$$

Соберем все вместе.

Ответ:

$$a < -1 \Rightarrow \text{решений нет};$$

$$-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow X = [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}];$$

$$a > 0 \Rightarrow X = \left[-\frac{a}{2}; 0\right) \cup [0; 1 + \sqrt{a+1}] = \\ = \left[-\frac{a}{2}; 1 + \sqrt{a+1}\right].$$

## УПРАЖНЕНИЯ

15.1. Решить уравнения:

$$а) (a+1)x^2 - (a-1)x - 2a = 0; \quad б) \frac{1}{x-a} + \frac{1}{ax} = 1.$$

15.2. Сколько решений (при различных значениях  $a$ ) имеют следующие уравнения:

$$а) x^2 - a^2x + a = 0; \quad б) \left|x + \frac{1}{x} - 3\right| = a - 3;$$

$$в) |a^{2x} + a^{x+2} - 1| = 1; \quad г) 2[x] = x + a?$$

15.3. Решить уравнения:

$$а) \sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \sqrt{b};$$

$$б) \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b-2x};$$

$$в) \sqrt{x-2a} - \sqrt{x-2b} = 2;$$

$$г) \sqrt{x - \sqrt{x-a}} = a; \quad д) \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

15.4. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a, \\ x_3 - x_4 = b, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение в положительных числах  $x_1, x_2, x_3, x_4$  тогда и только тогда, когда  $|a| + |b| < 1$ .

## § 16. Графический метод

Предыдущий параграф вас убедил, по-видимому, в том, что дать полное решение уравнения или неравенства с параметром не так-то просто. Особенно трудно уследить за изменением характера ответа при изменении параметра. На помощь здесь могут прийти те графические методы в решении неравенств с двумя переменными, которые мы развивали в § 14.

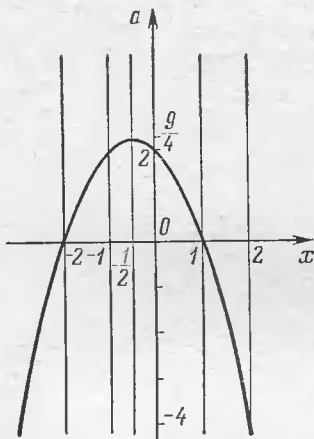


Рис. 39.

Представим себе, что в связи с некоторой функцией  $z = x^2 + x + a - 2$  двух переменных  $x$  и  $a$  стоит ряд задач.

1) При каких значениях  $a$  уравнение  $z = 0$  имеет корни?

2) При каких значениях  $a$  корни уравнения  $z = 0$  имеют разные знаки?

3) При каких значениях  $a$  на отрезке  $|x| \leq 2$  лежит ровно один корень уравнения  $z = 0$ ?

4) При каких значениях  $a$  неравенство  $z > 0$  выполняется при всех  $x > 2$ ?

5) При каких значениях  $a$  неравенство  $\sin^2 y + \sin y + a - 2 > 0$  не имеет решений?

6) При каких значениях  $a$  неравенство  $z < 0$  имеет хотя бы одно решение  $x \in [-2; -1]$ ?

Можно каждый из этих вопросов исследовать отдельно. Мы предложим способ, позволяющий сравнительно легко ответить на них и на многие другие вопросы такого же типа.

Нарисуем на плоскости  $(x, a)$  линию, задаваемую уравнением  $z(x, a) = 0$ . Для этого из уравнения  $z = 0$  выразим  $a$  как функцию от  $x$ :  $a = -x^2 - x + 2$  и по-

строим график этой функции (рис. 39). Это — парабола. Ее вершина находится в точке  $(-1/2; 9/4)$ , ось  $x$  пересекает ее в точках  $(-2; 0)$  и  $(1; 0)$ , а ось  $a$  — в точке  $(0; 2)$ .

Рассмотрим знак функции  $z(x, a)$  в зависимости от значений  $x$  и  $a$ . В начале координат  $z(0, 0) = -2 < 0$ . Итак, на параболе  $z = 0$ , между ее ветвями  $z < 0$ , а в остальной части плоскости  $z > 0$ .

Как увидеть корни уравнения  $z = 0$  при фиксированном  $a$ ? Надо провести через точку  $(0, a)$  прямую, параллельную оси  $x$ , и найти точки пересечения ее с параболой.

Теперь легко ответить на первые три вопроса:

- 1) Корни существуют при  $a \leq 9/4$ .
- 2) Корни разных знаков при  $a < 2$ .
- 3) На отрезке  $|x| \leq 2$  корень ровно один при  $-4 \leq a < 0$  и при  $a = 9/4$ .

Столь же легко ответить и на вопросы, связанные с решением неравенств:

4) Интервал  $(2; +\infty)$  целиком попадает в область решений неравенства  $z > 0$  при  $a \geq -4$ .

5) Этот вопрос сводится к такому: при каких значениях  $a$  неравенство  $z > 0$  не имеет решений среди чисел  $x$  таких, что  $|x| \leq 1$ ? Из чертежа видно, что это происходит при  $a \leq 0$ .

6) Отметив пересечение полосы  $-1 < x < -2$  и области  $z < 0$ , видим, что решения существуют при  $a < 2$ .

Вернемся к решениям задач предыдущего параграфа. Нетрудно дать им графическую иллюстрацию.

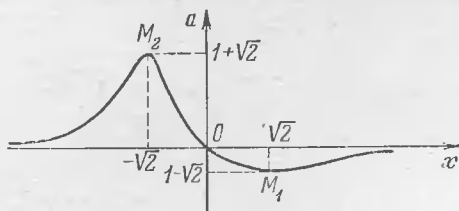


Рис. 40.

Для исследования уравнения  $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$  построим график функции  $a = -2x/(x^2 + 2x + 2)$  (рис. 40). (Это можно сделать по точкам или пользуясь методами книжки «Функции и графики» из нашей серии.) Внешний вид графика указать нетрудно. Самое главное —



найти «горбы», т. е. координаты точек  $M_1$  и  $M_2$ . Для этого достаточно решить относительно  $x$  исходное квадратное уравнение: ясно, что искомые координаты  $(x_1, a_1)$  и  $(x_2, a_2)$  точек  $M_1$  и  $M_2$  — это крайние значения  $a$ , при которых уравнение имеет вещественные корни. Мы уже нашли их раньше:  $a_1 = 1 - \sqrt{2}$ ,  $a_2 = 1 + \sqrt{2}$ ; соответственно  $x_1 = \sqrt{2}$ ,  $x_2 = -\sqrt{2}$ .

Теперь, глядя на этот график, мы можем ответить на многие вопросы, связанные с поведением корней нашего уравнения. Попробуйте ответить, например, на такие вопросы:

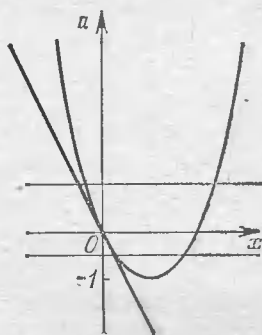


Рис. 41.

1) При каких значениях  $a$  уравнение имеет два корня, по модулю меньших трех?

2) При каких значениях  $a$  больший из двух корней по модулю больше двух?

Особенно полезно сочетать формальные приемы в решении уравнений и неравенств с графическими. Так, например, в решении неравенства из предыдущего параграфа трудности начались тогда, когда надо было сравнивать все полученные условия; графическая иллюстрация помогает преодолеть все эти трудности и не запутаться во многочисленных *и, или, если..., то...*, связывающих неравенства.

Напомним, что мы, решая неравенство

$$\sqrt{2x + a} \geq x,$$

пришли к двум случаям; решение нашего неравенства — множество точек  $(x, a)$ , для которых

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \geq -a/2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 2x - a \leq 0, \\ x \geq -a/2. \end{cases}$$

Теперь на плоскости  $(x, a)$  нарисуете графики функций  $a = -2x$  и  $a = x^2 - 2x$  (рис. 41). Чтобы найти точки пересечения параболы и прямой, решаем уравнение

$$x^2 - 2x = -2x \Leftrightarrow x = 0.$$

В левой полуплоскости ( $x < 0$ ) надо взять точки, лежащие выше прямой (и на ней), так как  $x \geq -a/2$ .

В правой полуплоскости ( $x \geq 0$ ) надо взять точки, лежащие между ветвями параболы, поскольку

$$a \geq x^2 - 2x$$



$$1 - \sqrt{a+1} < x < 1 + \sqrt{a+1}, \quad a \geq -1.$$

Ответ:

$$a < -1 \Rightarrow \text{решений нет;}$$

$$-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow X = [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}];$$

$$a \geq 0 \Rightarrow X = [-a/2; 1 + \sqrt{a+1}].$$

В практических задачах часто нужно не просто найти все решения уравнения или неравенства, а требуется еще выбрать из этих решений самое выгодное.

**Задача.** На двух шахтах добывается руда: на первой — 100 т в день, на второй — 200 т в день. Эту руду можно перерабатывать на двух заводах, причем стоимость перевозок (в условных единицах) одной тонны руды видна из таблицы:

	1-й завод	2-й завод
1-я шахта	5	4
2-я шахта	7	5

Известно, что каждый завод может перерабатывать в день не более 250 т руды. Сколько руды нужно возить с каждой шахты на каждый завод, чтобы стоимость перевозок была наименьшей?

Пусть  $x$  — количество руды, перевозимой в день с 1-й шахты на 1-й завод,  $y$  — количество руды, перевозимой в день со 2-й шахты на 1-й завод; тогда  $(100 - x)$  — количество руды, перевозимой в день с 1-й шахты на 2-й завод,  $(200 - y)$  — количество руды, перевозимой в день со 2-й шахты на 2-й завод.

Тогда ограничения на  $x$  и  $y$ , налагаемые условиями задачи, записываются в таком виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 250, \\ x + y \geq 50, \\ x \leq 100, \\ y \leq 200 \end{array} \right. \quad (1)$$



К такой задаче сводится значительная часть расчетов в экономике, связанных с нахождением оптимальных (наилучших) планов и т. д. Конечно, в реальных задачах число аргументов  $n$  и число уравнений  $m$  бывают огромными: порядка нескольких десятков и сотен.

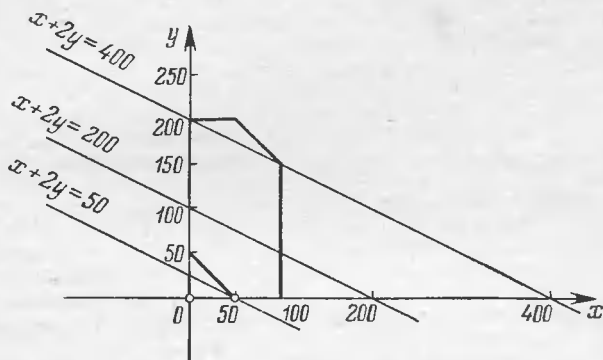


Рис. 43.

В нашей задаче  $n = 2$ , поэтому мы смогли решить ее с помощью геометрии. В случае большого количества аргументов для решения этой задачи требуется огромное количество вычислений, так что невозможно обойтись без современных электронно-вычислительных машин. Такая задача была одной из первых, для решения которой составлялись специальные программы, откуда и возникло название «линейное программирование».

## УПРАЖНЕНИЯ

16.1. Решить уравнения:

- а)  $|x - a| + |x + a + 1| = 3$ ;
- б)  $x + \sqrt{x(a - x)} = 1 \quad (a > 0)$ ;
- в)  $(\sqrt{a - x^2} - 1/2)^2 = x^2 - x + 1/4$ .

16.1. Решите неравенства и (если сможете) изобразите ответ графически:

- а)  $(a + 1)x > 3a - 1$ ;    б)  $\frac{a}{ax - a - 1} \leq 2$ ;
- в)  $\frac{ax + 1}{ax - 1} \geq \frac{a + 1}{a - 1}$ ;
- г)  $\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} \leq \sqrt{2}$ ;

$$д) \sqrt{2ax+1} \geq x-1; \quad е) \sqrt{x+a} \geq x+1;$$

$$ж) \log_x(x-a) > 2; \quad з) \cos x - \frac{1}{\cos x} \leq a.$$

16.3. Будем рассматривать квадратные уравнения вида  $x^2 + px + q = 0$ ; каждое такое уравнение задается двумя числами  $p$  и  $q$ . Условимся изображать его точкой на плоскости с координатами  $(p; q)$ . Например, уравнение  $x^2 - 2x + 3 = 0$  изображается точкой  $(-2; 3)$ , уравнение  $x^2 - 1 = 0$  — точкой  $(0; -1)$ .

а) Какое уравнение соответствует началу координат?

б) Какую часть плоскости «занимают» уравнения, не имеющие вещественных корней? На какой линии расположены точки, соответствующие уравнениям, имеющим один кратный вещественный корень?

в) Нарисуйте множество точек, соответствующих тем уравнениям, у которых корни вещественны и сумма корней равна 2.

г) Какое множество точек соответствует тем уравнениям, у которых корни вещественны и положительны? вещественны и отрицательны?

д) Какой точкой может изображаться уравнение, если известно, что один из его корней равен 1?

е) Какой точкой может изображаться уравнение, у которого оба корня вещественны и по модулю не превосходят 1?

16.4. Изобразить на плоскости  $(a, b)$  те точки, для которых уравнение  $\sqrt{x+a+b} - \sqrt{x+b} = 1$

а) имеет хотя бы один (вещественный) корень;

б) не имеет вещественных корней;

в) имеет положительный корень;

г) имеет корень, меньший чем  $-2$ .

16.5. Среди решений системы неравенств

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3, \\ 2x - y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$$

выбрать такое, для которого  $x^2 + y^2$  максимально.

16.6. При каких значениях  $a$  система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

16.7. При каких значениях  $a$  всякое решение неравенства  $x^2 - x - 2 \leq 0$  больше какого-нибудь решения неравенства  $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$ ?

16.8. Найти все такие значения  $a$ , что при любом  $b$  найдется такое  $c$ , что система

$$\begin{cases} bx - y = ac^2, \\ (b-6)x + 2by = c + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение,

## КРАТКИЕ ИТОГИ

### Основные понятия

1. *Числовое равенство (числовое неравенство)* — это высказывание вида  $a = b$  ( $a > b, a \geq b$ ), где  $a$  и  $b$  — числа.

2. *Уравнение (условное неравенство)* — это переменное высказывание вида  $f(x) = g(x), f(x) > g(x), f(x) \geq g(x)$ , где  $f$  и  $g$  — функции.

3. *Область определения уравнения (неравенства)* — множество значений аргумента, при которых определены все функции, входящие в уравнение (неравенство).

4. *Решение, или корень, уравнения (неравенства)* — значение аргумента, при подстановке которого получается верное равенство (верное числовое неравенство).

5. *Решить уравнение (неравенство)* — найти множество его решений.

6. Уравнения (неравенства) *равносильны* — это значит, что множества их решений совпадают.

### Советы

1. Процесс решения уравнения состоит обычно в получении цепочки следствий — уравнений, множества решений которых содержат множества решений предыдущих. Получив в качестве следствия уравнение, множество решений которого нам известно, можно либо сделать проверку, либо проследить за равносильностью переходов. Так же решают и системы уравнений.

2. При решении неравенств и доказательстве тождеств нужно пользоваться равносильными переходами.

3. Переход с помощью некоторой операции от одного неравенства (уравнения) к другому заведомо является

равносильным, если для этой операции имеется «обратная». Например, можно обе части умножить на положительную функцию, прибавить к ним любую функцию, применить некоторую монотонно возрастающую функцию.

4. Решение следует начинать с того, что выписать все ограничения на область определения.

5. Преобразуя одну часть уравнения (неравенства) или переходя от одного уравнения (неравенства) к другому, нужно обязательно следить за тем, чтобы выполняемые операции имели смысл при всех значениях переменных из области определения.

6. Иногда полезно рассмотреть несколько «случаев»: разбить области определения на несколько множеств, на каждом из которых удобно совершить переход к более простому уравнению (неравенству).

7. Если нужно найти множество точек, удовлетворяющих одновременно нескольким условиям, записываемым уравнениями, неравенствами и т. п. (решить систему), то надо взять пересечение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям.

Если нужно найти множество точек, удовлетворяющих хотя бы одному из нескольких условий (рассмотреть несколько возможных случаев), то надо взять объединение множеств точек, удовлетворяющих отдельным условиям.

8. Очень часто, особенно при решении неравенств и при необходимости перебирать много частных случаев, помогают графические иллюстрации.

9. При решении уравнений и неравенств с параметром надо в ответе перечислить решения при всех значениях параметра.

10. Несколько советов по поводу решения задач на составление уравнений (с параметрами): не забудьте выписать все условия и ограничения; получив ответ, проверьте, все ли слагаемые в сумме имеют одинаковую размерность (нельзя, например, складывать длину и скорость); проверьте ответ в каком-либо простом частном случае; подставьте простое численное значение параметра и посмотрите, правдоподобный ли получился результат.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава I. Введение . . . . .	5
§ 1. Числа . . . . .	5
§ 2. Высказывания . . . . .	11
§ 3. Функции . . . . .	15
Глава II. Уравнения . . . . .	20
§ 4. Числовые равенства . . . . .	20
§ 5. Уравнения . . . . .	24
§ 6. Связь между уравнениями . . . . .	28
§ 7. Примеры . . . . .	42
§ 8. Корни многочленов . . . . .	48
§ 9. Графическое исследование уравнений . . . . .	51
§ 10. Системы уравнений . . . . .	56
Глава III. Неравенства . . . . .	64
§ 11. Свойства неравенств . . . . .	64
§ 12. Условные неравенства . . . . .	66
§ 13. Неравенства с одним неизвестным . . . . .	72
§ 14. Неравенства с двумя неизвестными . . . . .	78
§ 15. Уравнения и неравенства с параметрами . . . . .	81
§ 16. Графический метод . . . . .	86
Краткие итоги . . . . .	93



Марк  
Иванович  
Башмаков

# Уравнения и неравенства

М., 1976 г., 96 стр. с илл.

---

Редактор	Г. В. Дорофеев
Техн. редактор	С. Я. Шкляр
Корректор	Е. Я. Строева

---

Сдано в набор	4.06.76.
Подп. к печати	30.09.76.
Бумага тип. № 3	$84 \times 108^{1/32}$
Физич. печ. л.	3.
Усл. печ. л.	5,04.
Уч.-изд. л.	4,58.
Тираж	250 000 экз.
T-15166	
Цена книги	13 коп.
Заказ 202	

Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической литературы  
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета  
Министров СССР по делам издательств,  
полиграфии и книжной торговли.  
198052, Ленинград, Л-52.  
Измайловский проспект, 29

## Математика

Библиотечка  
физико-математической школы

### Серия основная

- Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов. Метод координат.
- Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль. Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко. Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы).
- Выпуск 4 Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. Прямые и кривые.
- Выпуск 5 М. И. Башмаков. Уравнения и неравенства.

### Серия дополнительная

- Выпуск 1\* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго. Математические задачи.
- Выпуск 2\* А. А. Кириллов. Пределы.
- Выпуск 3\* Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь. Математические соревнования (арифметика и алгебра).
- Выпуск 4\* Н. Б. Васильев, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. П. Савин. Математические соревнования (геометрия).