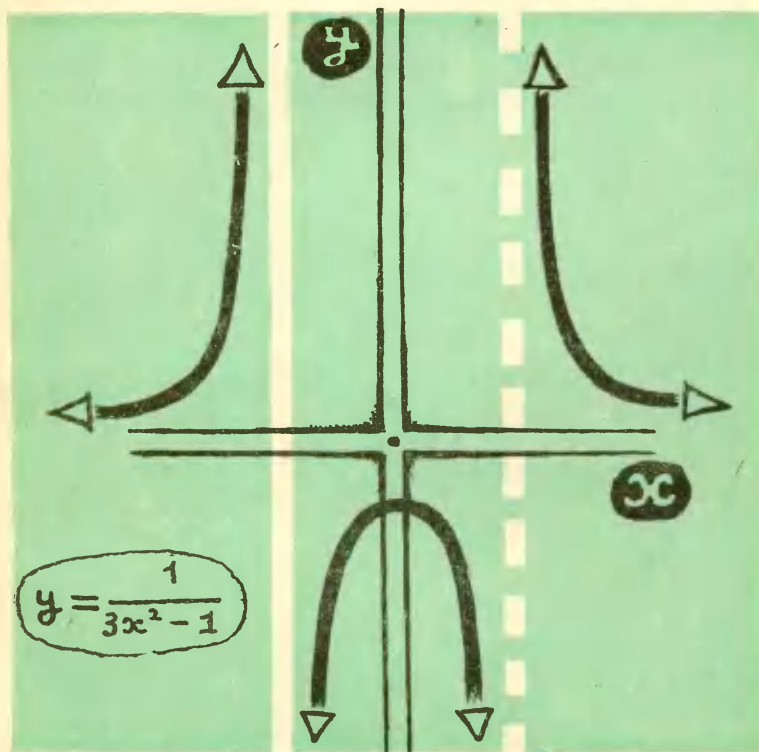


И.М.Гельфанд
Е.Г.Глаголева
Э.Э.Шноль

Функции и графики



Математика

Библиотечка
физико-математической школы
Выпуск 2

Фесенко П.Ф.

И. М. Гельфанд
Е. Г. Глаголева
Э. Э. Шноль

Функции и графики

(основные приемы)

Издание третье,
исправленное и
дополненное

БИБЛИОТЕКА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
КОЛЛЕДЖА НМУ

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы
Москва 1968

512

Г32

УДК 512 2/512.3



Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Редактор серии
И. М. Гельфанд

2-2-2

53-68

Предисловие	4
Вступление	5
§ 1. Некоторые примеры	11
§ 2. Линейная функция	24
§ 3. Функция $y = x $	27
§ 4. Квадратный трехчлен	38
§ 5. Дробно-линейная функция	52
§ 6. Степенные функции	63
§ 7. Рациональные функции	77
Задачи для самостоятельного решения	85
Ответы и указания к задачам и упражнениям, отмеченным значком \oplus	94

Предисловие

Эта брошюра посвящена разбору основных приемов построения графиков на примерах простейших функций. Книга рассчитана на учащихся 9-х классов.

Научиться строить графики по книге нелегко: читателю не хватает доски, на которой во время урока или лекции преподаватель постепенно строит график. Поэтому авторы отказались от чертежей, на которых дается обычно только окончательный вид графика, и попросили художников выпуска В. В. Смолянинова и В. Б. Янкилевского превратить поля брошюры в некоторое подобие доски. Следя за рисунками на полях, Вам нетрудно будет воспроизвести шаг за шагом весь процесс построения графика.

Часть теоретического материала изложена в виде задач. Для понимания текста необходимо внимательно разбирать все задачи и примеры, помещенные в тексте.

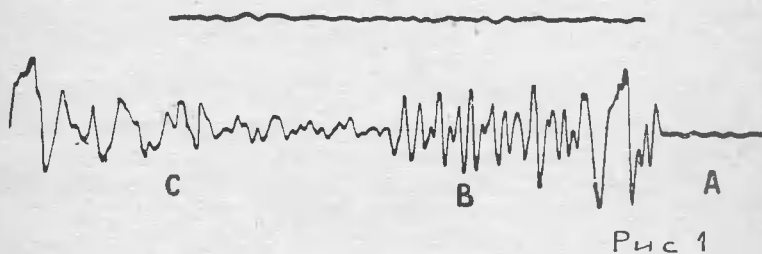
При подготовке книги авторы пользовались помощью и советами своих товарищей по работе: В. М. Алексеева, В. И. Кейлис-Борока, А. А. Кириллова, И. Х. Сивашинского, С. В. Фомина, М. Л. Цетлина. Авторы благодарят их за помощь. Особенно благодарны авторы редактору выпуска Б. В. Шабату, чья работа существенно улучшила книгу.

Авторы благодарят учащихся Заочной математической школы при МГУ, приславших свои замечания о книге, а также Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера, оказавших большую помощь при подготовке этого издания.

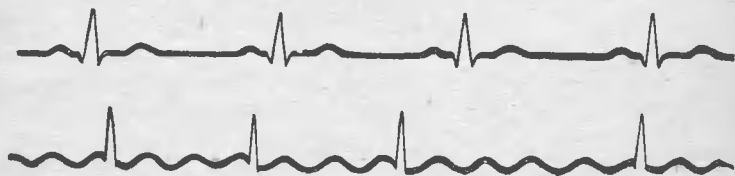
Все замечания и пожелания по улучшению книги просим направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, механико-математический факультет, Заочная математическая школа.

Авторы

Вступление



На рис. 1 Вы видите две кривые, начерченные сейсмографом — прибором, записывающим колебания земной коры. Верхняя кривая получена, когда земная кора спокойна, на нижней видны сигналы землетрясения.



На рис. 2 — две кардиограммы. Верхняя показывает нормальную работу сердца, нижняя снята у больного.

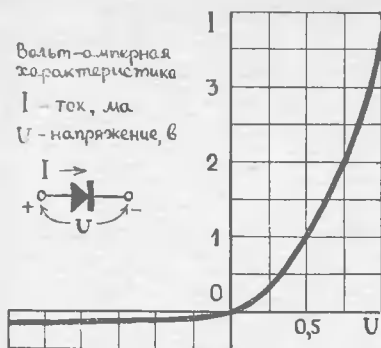


Рис. 3

На рис. 3 показана так называемая характеристика полупроводникового элемента — кривая зависимости силы тока от напряжения.

Сейсмолог, анализируя сейсмограмму, узнает, когда было землетрясение, где оно произошло, определяет силу и характер толчков. Врач, исследующий больного, может по кардиограмме судить

о нарушениях сердечной деятельности; изучение кардиограммы помогает правильно поставить диагноз заболевания. Инженер-радиоэлектроник по характеристике полупроводникового элемента выбирает наиболее подходящий режим его работы. Все эти люди изучают некоторые функции по графикам этих функций.

Что же такое функция и что же такое график функции?

Прежде чем дать точное определение функции, поговорим немного об этом понятии. Описательно говоря, функция — это когда каждому значению некоторой величины, которую математики называют аргументом и обозначают обычно буквой x , отвечает значение другой величины y , называемой функцией.

Так, например, величина смещения земной поверхности при землетрясении в каждый момент времени имеет определенное значение — величина смещения есть функция времени. Сила тока в полупроводниковом элементе есть функция напряжения, так как каждому значению напряжения соответствует определенное значение силы тока.

Таких примеров можно привести очень много: объем шара есть функция его радиуса, высота, на которую поднимается брошенный вертикально вверх камень, есть функция его начальной скорости и т. д.

Перейдем теперь к точным определениям. Когда говорят, что величина y есть функция величины x , то прежде всего указывают, какие значения может принимать x . Эти «разрешенные» значения аргумента x называются *допустимыми значениями*, а множество всех допустимых значений величины x называется *областью определения функции* y .

Например, если мы говорим, что объем V шара есть функция его радиуса R , то областью определения функции $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ будут все числа, большие нуля, поскольку величина R радиуса шара может быть только положительным числом.

Всегда, когда задается функция, необходимо указывать ее область определения.

О п р е д е л е н и е I

Мы говорим, что y есть функция величины x , если: 1) указано, какие значения x являются допустимыми, т. е. задана область определения функции, и 2) каждому допустимому значению x соответствует в точности одно значение величины y .

Коротко вместо слов «величина y есть функция величины x » записывают:

$$y = f(x).$$

(Читается: «игрек равно эф от икс».)

Запись $f(a)$ означает численное значение функции $f(x)$, соответствующее значению x , равному a .

Например, если

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

то

$$f(2) = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5}, \quad f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$f(0) = \frac{1}{0^2 + 1} = 1 \text{ и т. д.}$$

Правило, с помощью которого по значению x находят соответствующее значение y , можно задавать различными способами, и никаких ограничений на форму, в которой оно выражается, не накладывается. Если сказано, что y есть функция от x , то Вы должны проверить только, что 1) задана область определения, т. е. указано, какие значения может принимать x , и 2) дано правило, по которому каждому допустимому значению x Вы можете поставить в соответствие единственное значение y .

Каким может быть это правило?

Приведем несколько примеров.

1. Пусть сказано, что x — это любое действительное число и y находится по формуле

$$y = x^2.$$

Функция $y = x^2$ задана формулой.

Правило может быть и словесным.

2. Функция y задается следующим образом: если x — положительное число, то y равно 1, если x — отрицательное число, то y равно -1 , если x равно нулю, то y равно 0.

Приведем еще один пример функции, задаваемой словесным правилом.

3. Каждое число x можно записать в виде

$$x = y + \alpha,$$

где α — неотрицательное число, меньшее единицы, а y — целое число. Ясно, что каждому числу x соответствует единственное число y , т. е. y есть функция от x . Область определения этой функции — вся числовая ось. Эта функция называется «целая часть x » и обозначается так:

$$y = [x].$$

Например,

$$[3,53] = 3, [4] = 4, [0,3] = 0, [-0,3] = -1.$$

Ниже мы используем эту функцию в наших упражнениях.

4. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную формулой

$$y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}.$$

Что разумно считать ее областью определения?

Если функция задана формулой, то рассматривается обычно ее так называемая *естественная* область определения, т. е. множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Значит, в область определения нашей функции не входит число 5 (так как при $x = 5$ знаменатель дроби обращается в нуль) и значения x , меньшие чем -3 (так как при $x < -3$ подкоренное выражение отрицательно). Итак, естественная область определения

функции $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$ — это все числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$x \geq -3, x \neq 5.$$

Функцию можно изображать геометрически с помощью графика. Чтобы построить график некоторой функции, рассмотрим некоторое допустимое значение x и отвечающее ему значение y . Например, пусть значение x — это число a , а соответствующее ему значение y — число $b = f(a)$. Эту пару чисел a и b изобразим на плоскости точкой с координатами (a, b) . Построим такие точки для всех допустимых значений x . Набор получившихся точек и есть график функции.

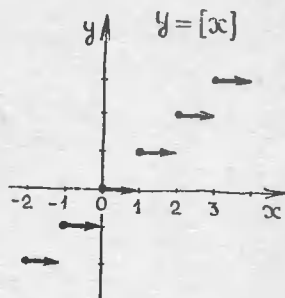


Рис. 4

О п р е д е л е н и е II

График функции — это множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x , а ординаты — соответствующими значениями функции y .

Например, на рис. 4 изображен график функции $y = [x]$.

Он состоит из бесконечного множества горизонтальных отрезков. Стрелочки означают, что правые концы этих отрезков не принадлежат графику (левые же концы принадлежат ему и поэтому обозначены жирной точкой).

График может служить правилом, задающим функцию. Например, по характеристике полупроводникового элемента можно определить (см. рис. 5), что если аргумент U равен 0,6 (вольт), то функция I равна 1,3 (миллиампер).

Изображать функции графиками очень удобно, потому что, поглядев на графики, можно сразу отличить одну функцию от другой. Посмотрите еще раз на нижнюю кривую рисунка 1. На этом графике самый неопытный человек сразу увидит сигналы землетрясения (участки B и C). Присмотревшись, он, безусловно, заметит и разницу в характере волн на участках B и C (сейсмолог мог бы объяснить Вам, что на участке B записана так называемая волна P — волна, идущая в глубине земной коры, а на участке C волна S , идущая по поверхности).

Попробуйте, удастся ли Вам отличить эти два участка по помещенным рядом

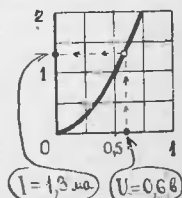


Рис. 5

Волна Р
(шаг 0,2 сек)

0,1
0,1
-1,6
-1,7
-2,4
-3,0
-4,5
-3,8
-2,9
-1,1
0,8
3,3
5,1
3,7
0,0
-2,0
-4,4
-5,8
-3,8
-1,6

Волна S
(шаг 0,4 сек)

0,2
0,5
2,5
4,9
7,1
6,1
3,8
0,4
0,2
0,7
1,5
2,5
3,2
2,8
0,4
-2,2
-3,3
-4,5
-4,8
-4,8
-3,7
-3,5
-4,4
-6,6

таблицам. (Мы не смогли привести здесь таблицы для всей кривой: она заняла бы всю страницу. На полях Вы видите таблицы для небольших кусков участков В и С.)

На рис. 6 показаны графики двух функций, которые задаются очень похожими формулами:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \text{ и } y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}.$$

Разницу в поведении этих двух функций можно, конечно, обнаружить и по формулам. Но если посмотреть на их графики, эта разница сразу бросается в глаза.

Всегда, когда нужно выяснить общий характер поведения функции, обнаружить ее особенности, график в силу своей наглядности является незаменимым. Поэтому инженер или ученый, получив интересующую его функцию в виде формулы или таблицы, обычно берет за карандаш, набрасывает эскиз графика и смотрит, как ведет себя функция, как она «выглядит».

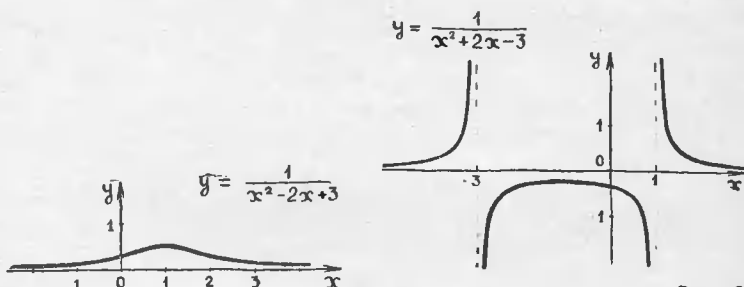
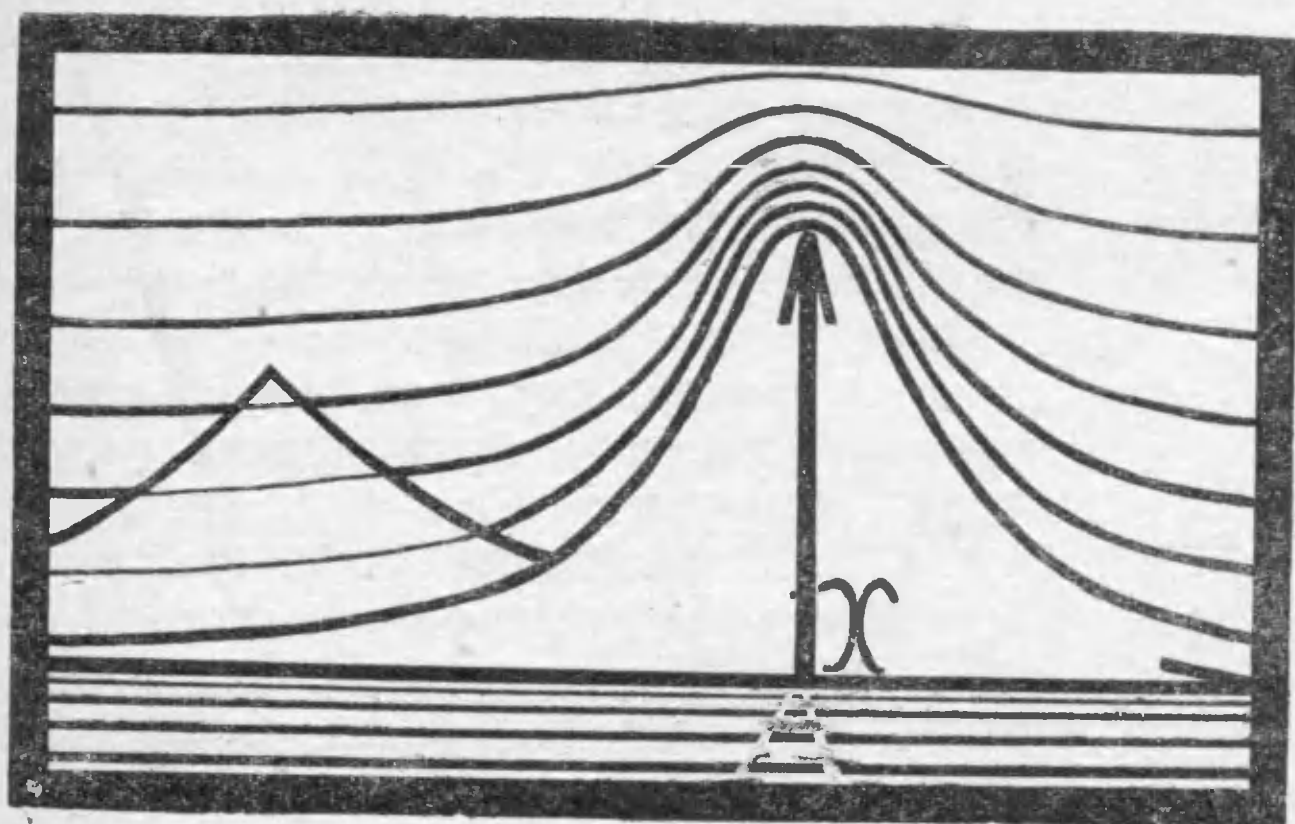


Рис. 6



§ 1. Некоторые примеры

[1.] Если буквально следовать определению, то для построения графика некоторой функции нужно найти все пары соответствующих значений аргумента и функции и построить все точки с этими координатами. В большинстве случаев это сделать практически невозможно, так как таких точек бесконечно много. Поэтому обычно находят несколько точек, принадлежащих графику, и соединяют их плавной кривой.

Попробуем построить таким способом график функции

$$y = \frac{1}{1 + x^2} \quad (1)$$

Выберем несколько значений аргумента, найдем соответствующие значения функции и запишем их в таблицу (см. табл. 1). По полученным координатам построим точки и соединим их пока пунктирной линией (рис. 1).

Проверим теперь, правильно ли мы провели кривую между найденными точками графика. Для этого возьмем какое-

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

x	y
0	1
1	$1/2$
2	$1/5$
3	$1/10$

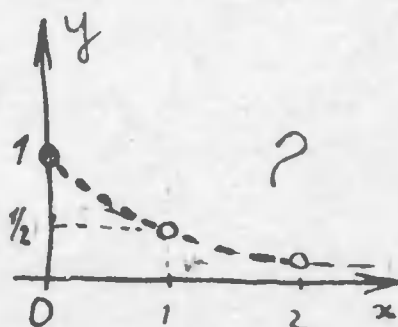
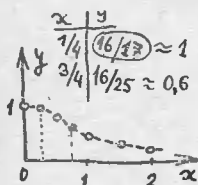
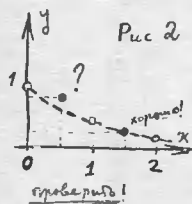


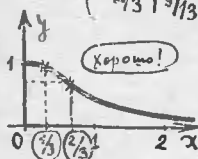
Рис 1

x	y
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{13}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$



еще одна проверка

x	y
$1/3$	$9/10$
$2/3$	$9/13$



x	y
1	$1/2$
2	$1/5$
3	$1/10$



Рис. 4

нибудь промежуточное значение аргумента, например $x = 3/2$, и вычислим соответствующее значение функции $y = 4/13$. Полученная точка $(3/2, 4/13)$ хорошо «ложится» на нашу кривую (рис. 2), так что мы провели ее вроде бы правильно.

Однако возьмем еще $x = 1/2$. Тогда $y = 4/5$ и соответствующая точка ложится выше нарисованной нами кривой (рис. 2). Значит, между $x = 0$ и $x = 1$ график идет не так, как мы думали. Возьмем на этом «сомнительном» участке еще значения $x = 1/4$ и $x = 3/4$. Соединив все полученные точки, мы получим более правильную кривую, изображенную на рис. 3. Взятые для контроля точки $(1/3, 9/10)$ и $(2/3, 9/13)$ хорошо «ложатся» на эту кривую.

[2.] Чтобы построить левую половину графика, нужно заполнить еще одну таблицу для отрицательных значений аргумента. Это сделать просто.

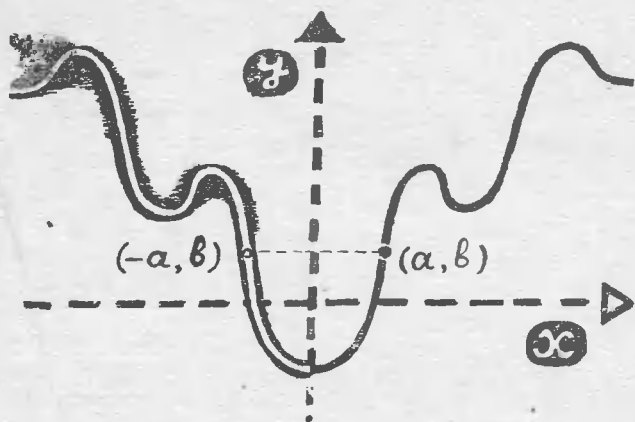
Например,

$$\text{при } x = 2 \quad \text{имеем} \quad y = \frac{1}{2^2 + 1} = \frac{1}{5},$$

$$\text{при } x = -2 \quad \text{имеем} \quad y = \frac{1}{(-2)^2 + 1} = \frac{1}{5}.$$

Значит, вместе с точкой $(2, 1/5)$ на графике лежит точка $(-2, 1/5)$, симметричная первой относительно оси ординат.

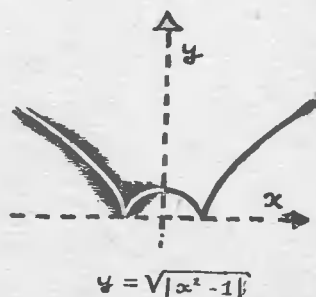
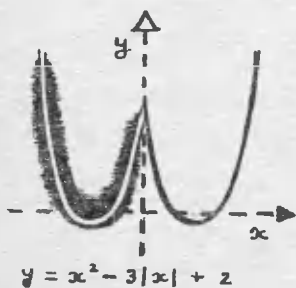
Вообще, если точка (a, b) лежит на правой половине нашего графика, то на левой его половине будет лежать точка $(-a, b)$, симметричная (a, b) относительно оси ординат (рис. 4). Поэтому, чтобы получить левую часть графика функции (1), соответствующую отрицательным значениям x , нужно зеркально отразить относительно оси Oy правую половину этого графика.

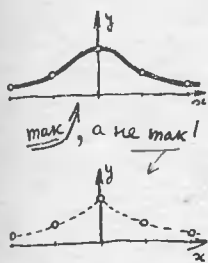


$$f(-a) =$$

$$= f(a)$$

Если значения некоторой функции, соответствующие двум любым противоположным значениям аргумента (т.е. значениям a и $-a$), равны между собой, то такая функция называется четной.
 Всякая четная функция имеет график, симметричный относительно оси ординат.





Общий вид графика — на рис. 5.

Если бы мы поторопились и достроили для отрицательных x наш первоначальный набросок (рис. 1 и 2), то на нем при $x = 0$ получился бы «излом» (уголок). Этого излома нет на правильном графике: вместо него здесь плавный «купол».

У п р а ж н е н и я

1. График функции

$$y = \frac{1}{3x^2 + 1} \quad (2)$$

похож на график функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Постройте его.

2. Какие из следующих функций являются четными (определение и график четной функции, а также некоторые примеры см. на стр. 13):

а) $y = 1 - x^2$; б) $y = x^2 + x$;

в) $y = \frac{x^2}{1 + x^4}$; г) $y = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$?

[3.] Возьмем теперь функцию

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}. \quad (3)$$

По виду эта формула мало отличается от формулы (2). Однако при построении этого графика по точкам сразу же начинаются неприятности.

Составим снова таблицу и нанесем на чертеж полученные точки. Как соединять эти точки — неясно: создается впечатление, что точка $(0, -1)$ «выпадает» (рис. 6).

Попытайтесь сами построить график этой функции. Не огорчайтесь, если для того, чтобы понять, как идет эта кривая, Вам понадобится найти больше точек, чем Вы ожидали.

После этого обязательно прочитайте на стр. 16—18 как у нас строится этот график и какие полезные выводы делаются из построения.

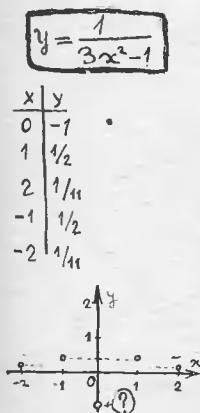


Рис 6

4. График многочлена

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \quad (4)$$

мы тоже начнем строить по точкам.

Взяв для аргумента значения, равные 0, 1, 2, мы получим значения функции, равные нулю. Возьмем еще значение $x = -1$. Снова получим, что y равно нулю. Соответствующие точки графика (0, 0), (1, 0), (2, 0), (-1, 0) лежат на оси Ox (рис. 7).

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

x	y
0	0
1	0
2	0
-1	0

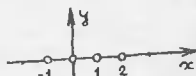


Рис. 7

Если ограничиться этими четырьмя значениями аргумента, то «плавной» кривой, соединяющей полученные точки, будет ось абсцисс. Однако ясно, что ось абсцисс не является графиком нашей функции: ведь многочлен $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ не может быть равен нулю при всех значениях x .

Возьмем еще два значения аргумента $x = -2$ и $x = 3$. Соответствующие точки (-2, 24) и (3, 24) уже не лежат на оси Ox , а, напротив, расположены очень далеко от нее (рис. 8).

x	y
-2	24
3	24

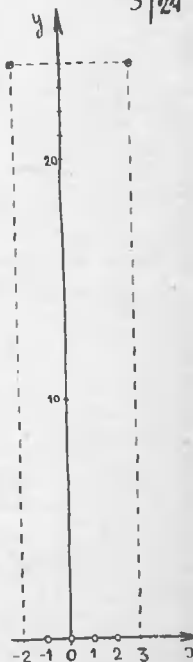


Рис. 8

Как выглядит график, остается по-прежнему неясным. Можно, конечно, как мы делали раньше, найти достаточное количество промежуточных точек и приблизительно построить график, но этот способ не очень надежен.

Попробуем поступить иначе.

Выясним, где функция положительна (и, значит, график лежит выше оси Ox) и где отрицательна (т. е. график лежит ниже оси Ox).

Разложим для этого многочлен, задающий функцию, на множители:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x &= x^3(x-2) - x(x-2) = \\ &= (x^3 - x)(x-2) = x(x^2 - 1)(x-2) = \\ &= (x+1)x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

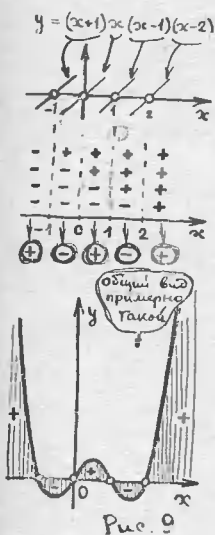


Рис. 9

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

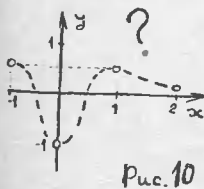


Рис. 10

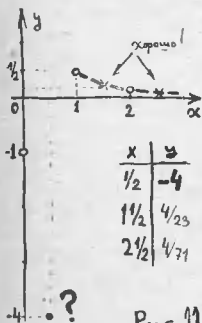


Рис. 11

Теперь видно, что наша функция равна нулю только в тех четырех точках, которые мы уже нанесли на график. Левее точки $x = -1$ все четыре сомножителя отрицательны — функция положительна. Между точками $x = -1$ и $x = 0$ (т. е. на промежутке $-1 < x < 0$) множитель $x + 1$ становится положительным, а остальные остаются отрицательными — функция отрицательна. На участке $0 < x < 1$ имеем два отрицательных сомножителя и два положительных — функция положительна. На следующем участке функция снова отрицательна. Наконец, при переходе через точку $x = 2$ последний из сомножителей становится положительным — функция становится положительной.

График функции представляется нам теперь примерно в таком виде, как на рис. 9.

[5.] Перейдем к построению графика функции

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1},$$

о котором мы уже говорили на стр. 14.

Отметим на рисунке точки графика, отвечающие значениям $x = -1, 0, 1, 2$, и соединим их линиями. Получится примерно так, как на рис. 10.

Возьмем теперь $x = 1/2$. Мы получим $y = -4$, и точка $(1/2, -4)$ лежит гораздо ниже нашей кривой. Значит, между $x = 0$ и $x = 1$ график идет совсем по-другому!

Более точный ход графика мы изобразим на рис. 11. Возьмем еще $x = 3/2$ и $x = 5/2$. Соответствующие точки довольно хорошо ложатся на нашу кривую.

Но как же проходит график между точками $x = 0$ и $x = 1$?

Возьмем $x = 1/4$ и $x = 3/4$. Получим соответственно $y = -16/13 \approx -5/4$ и $y = -16/11 \approx 3/2$. Ход графика между точками

$x = 0$ и $x = 1/2$ несколько прояснился (рис. 12), но, как ведет себя функция между $x = 1/2$ и $x = 3/4$, по-прежнему непонятно.

Если мы возьмем еще несколько промежуточных значений между $x = 1/2$ и $x = 3/4$, то увидим, что соответствующие точки графика ложатся на не одну, а на две плавные кривые, и график приобретает примерно такой вид, как на рис. 13.

Вы теперь хорошо понимаете, что построение графика по точкам — это рискованный и длинный путь. Если взять мало точек, то может оказаться, что мы получим совсем неверное представление о функции. Если же брать точки чаще, то будет много лишней работы и все равно останется сомнение, не пропустили ли мы чего-нибудь существенного. Как же быть?

Вспомним, что при построении графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ на участках $2 < x < 3$ и $1 < x < 2$ никаких дополнительных точек не потребовалось, а на участке $0 < x < 1$ пришлось найти еще 5 точек. Так же при построении графика $y = \frac{1}{3x^2 - 1}$ основной работы потребовал участок $0 < x < 1$, где кривая разрывается на две ветви.

Нельзя ли заранее выделить такие «опасные» участки?

[6.] Вернемся в третий раз к графику

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}.$$

Если посмотреть на выражение, задающее функцию, то сразу видно, что при двух значениях x знаменатель этого выражения обращается в нуль. Эти значения равны $+\sqrt{1/3}$ и $-\sqrt{1/3}$, т. е. примерно $\pm 0,58$. Одно из них лежит в промежутке $1/2 < x < 3/4$, т. е. как раз там,

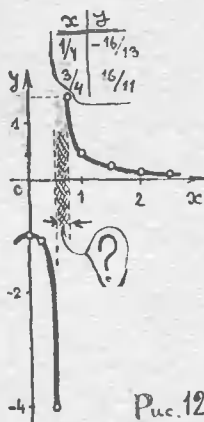


Рис. 12

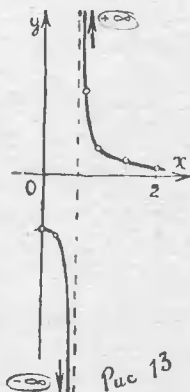


Рис. 13

где функция ведет себя необычно, график идет неплавно. Теперь понятно, почему это происходит.

Действительно, при значениях $x = \pm \sqrt{1/3}$ функция не определена (деление на нуль невозможно); значит, на графике не может быть точки с такими абсциссами — график не пересекает прямых $x = \sqrt{1/3}$ и $x = -\sqrt{1/3}$. Поэтому график распадается на три отдельные ветви. Если x приближается к одному из «запрещенных» значений, например к $x = \sqrt{1/3}$, то дробь $\frac{1}{3x^2 - 1}$ неограниченно растет по абсолютной величине — две ветви графика приближаются к вертикальной прямой $x = \sqrt{1/3}$.

Аналогично ведет себя наша (четная!) функция вблизи точки $x = -\sqrt{1/3}$.

Общий вид графика

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

показан на рис. 14.

Мы понимаем теперь, что *всегда, когда функция задана формулой, которая представляет собой дробь, необходимо обращать внимание на те значения аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль.*

[7.] Какой же урок можно извлечь из рассмотренных примеров? При изучении поведения функции и построении ее графика не все значения аргумента одинаково важны.

На примере функции

$$y = \frac{1}{3x^2 - 1}$$

мы видели, насколько важными являются те «особые» точки, в которых функция не определена. Характер графика

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

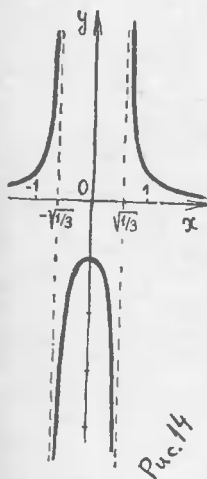


Рис. 14

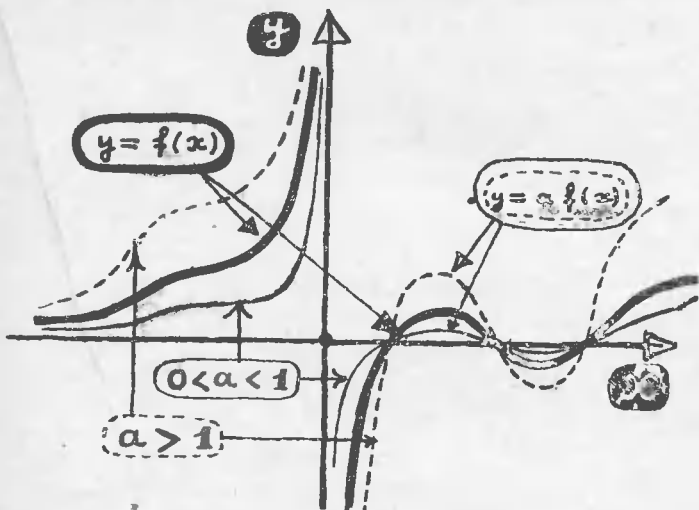
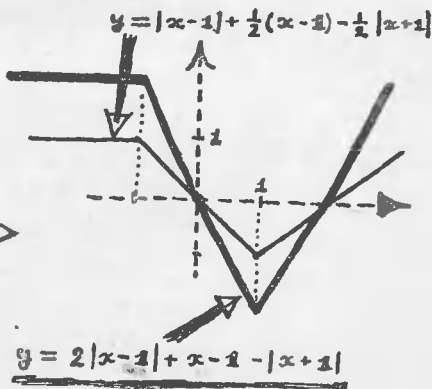
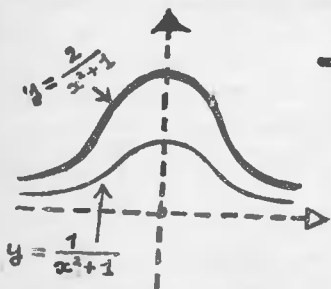


График функции $y = a f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в a раз по оси Oy (в случае $|a| < 1$ получается сжатие).

$f(x) \Rightarrow a f(x)$



нам стал понятен тогда, когда мы нашли точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. корни многочлена.

В большинстве случаев основная работа при построении графиков состоит как раз в том, чтобы найти существенные для данной функции значения аргумента и изучить ее поведение вблизи этих значений. После такого исследования для полного построения графика достаточно бывает найти несколько промежуточных значений функции между этими характерными точками.

У п р а ж н е н и я

1. Постройте график функции $y = \frac{1}{3x-1}$.

В каких точках график пересекает оси координат?

Представьте себе, что мы поместили начало координат в самой середине тетрадного листа и взяли за единицу масштаба 1 см (для определенности будем считать тетрадный лист прямоугольником размером 16 см \times 20 см). Найдите координаты точек, в которых график уходит за пределы тетрадного листа.

2. Постройте графики многочленов*)

а) $y = x^3 - x^2 - 2x + 2;$

б) $y = x^3 - 2x^2 + x. \oplus$

(обратите внимание на то, что в случае б) при разложении многочлена на множители получается два одинаковых сомножителя).

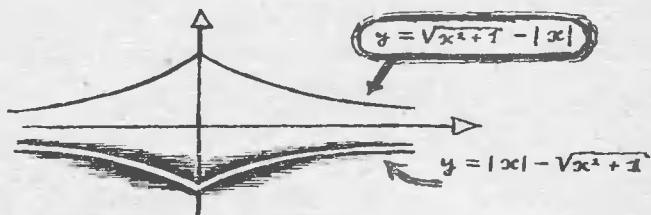
[8.] Построив график какой-либо функции, с помощью разных приемов можно легко построить графики некоторых других «родственных» с первой функций**).

*) Знак \oplus стоит около задач и упражнений, к которым имеются ответы в конце книги (см. стр. 94).

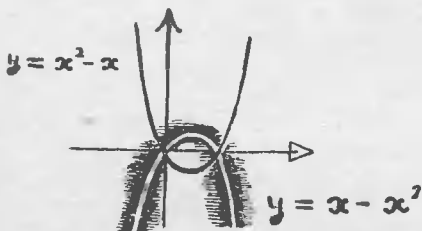
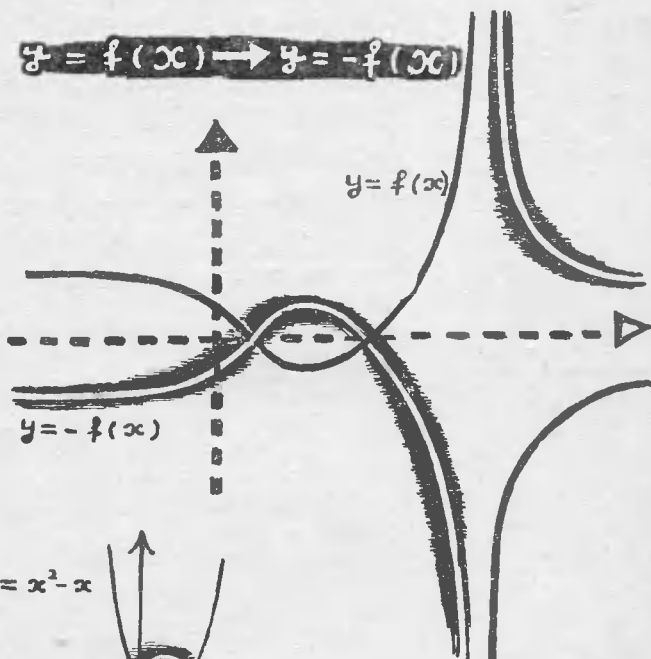
**) С приемом такого рода мы уже встречались на стр. 12 при построении графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$. Построив график этой функции для положительных значений x , мы смогли сразу построить график и для отрицательных x .

$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

График $y = -f(x)$
 может быть получен из
 графика $y = f(x)$ зер-
 кальным отражением
 относительно оси Ox .



$$y = f(x) \rightarrow y = -f(x)$$



Один из простейших таких приемов — это так называемое *растяжение по оси Oy*. Мы построили уже график функции

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$y = \frac{1}{x^2 + 1} \quad y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

(см. рис. 5 на стр. 14).

Построим теперь график функции

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Возьмем какую-нибудь точку первого графика, например $x = 1/2$, $y = 4/5$, т. е. точку $M_1 (1/2, 4/5)$. Ясно, что мы можем получить точку второго графика, оставив x тем же (т. е. $x = 1/2$) и увеличив y в три раза. Получится точка $M_2 (1/2, 12/5)$. Ее можно получить прямо на чертеже (рис. 15). Для этого нужно увеличить ординату точки $M_1 (1/2, 4/5)$ в три раза.

Если мы сделаем такое преобразование с каждой точкой графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, то точка $M (a, b)$ перейдет в точку $M' (a, 3b)$ графика $y = \frac{3}{x^2 + 1}$, а весь график, растянувшись втрое по оси Oy , превратится в график функции $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ (рис. 16).

Итак, график $y = \frac{3}{x^2 + 1}$ представляет собой график $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, растянутый втрое по оси Oy .

[9.] Еще проще получить из графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ график функции

$$y = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

Чтобы получить из таблицы 1 на стр. 11 для функции $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ таблицу для функ-

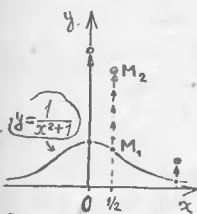


Рис. 15

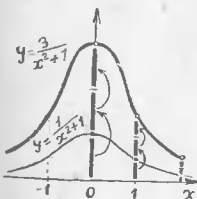


Рис. 16

ции $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$, нужно просто по-
менять знак у каждого из чисел второго
столбца.

Тогда из каждой точки графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$, например, из точки M с абсциссой 2 и ординатой $\frac{1}{5}$, получится точка M' гра-
фика $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$ с той же абсциссой 2
и противоположной ординатой ($-\frac{1}{5}$).
Очевидно, точка M' ($2, -\frac{1}{5}$) симметрич-
на точке M ($2, \frac{1}{5}$) относительно оси Ox .
Вообще всякой точке $N(a, b)$ графика
 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ соответствует точка $N'(a, -b)$
графика $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$.

Итак, график функции $y = -\frac{1}{x^2 + 1}$
можно получить из графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$
зеркальным отражением относительно оси
 Ox (рис. 17).

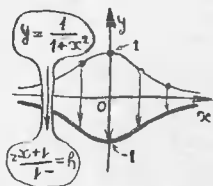


Рис. 17

У п р а ж н е н и я

1. Имея график $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$
(рис. 9, на стр. 16), постройте графики функций
 $y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$ и $y = -x^4 + 2x^3 +$
 $+ x^2 - 2x$.

2. Постройте график $y = \frac{1}{2x^2 + 2}$, используя
график $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

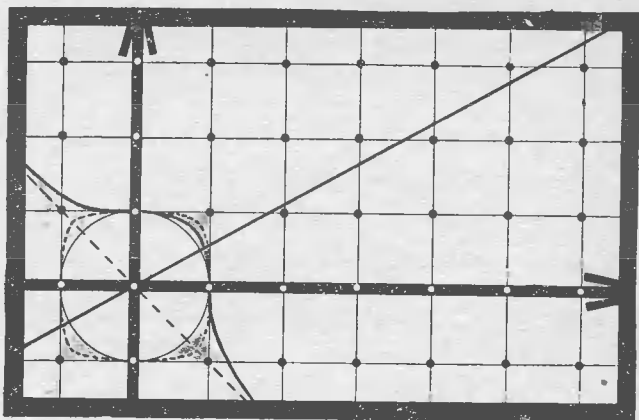
3. Постройте графики *):

а) $y = \frac{1}{2} [x]$;

б) $y = x - [x]$ и $y = -2(x - [x])$;

в) $y = [2x]$.

*) Смысл символа $[x]$ — целой части числа x —
объяснен на стр. 8.



§ 2. Линейная функция

[1.] Приступим теперь к систематическому изучению поведения различных функций и построению их графиков. При этом с характерными чертами поведения функций и особенностями их графиков мы будем знакомиться на простейших примерах. При построении более сложных графиков будем стараться найти в них знакомые элементы.

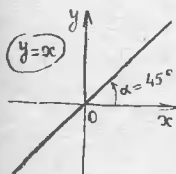


Рис. 1

Самая простая функция — это функция $y = x$. Графиком этой функции является прямая — биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 1).

Вообще, как Вы знаете, графиком любой линейной функции $y = kx + b$ является некоторая прямая. Обратно, любая прямая, не параллельная оси Oy , является графиком некоторой линейной функции.

Положение прямой вполне определяется заданием двух ее точек. В соответствии с этим линейная функция вполне определяется заданием ее значений для двух значений аргумента.

Упражнения

1. Найдите линейную функцию $y = kx + b$, которая принимает при $x = -10$ значение $y = 41$, а при $x = 6$ значение $y = 9$.

2. Прямая проходит через точки $A(0, 0)$ и $B(a, c)$. Найдите линейную функцию, графиком которой является эта прямая.

3. Проведите через начало координат прямую под углом 60° к оси ординат. Графиком какой функции она является?

4. а) В таблице 1 значений некоторой линейной функции два из пяти ее значений записаны неверно. Найдите их и исправьте.

б) Тот же вопрос для таблицы 2.

5. Найдите функцию $y = kx + b$, если ее график параллелен графику $y = x$ и проходит через точку $(3, -5)$.

6. Найти линейную функцию, график которой составляет угол в 60° с осью абсцисс и проходит через точку $(3, -5)$.

7. Угловым коэффициентом прямой*) равен a . Прямая проходит через точку $(3, -5)$. Найдите линейную функцию, графиком которой является эта прямая.

[2.] Характерным свойством линейной функции является то, что когда x увеличивается равномерно, т. е. на одно и то же число, y меняется тоже равномерно. Возьмем, например, функцию $y = 3x - 2$. Пусть x принимает значения 1, 3, 5, 7, ..., каждое из которых больше предыдущего на одно и то же число 2. Соответствующие значения y будут: 1, 7, 13, 19, ... Вы видите, что каждое из значений y больше предыдущего тоже на одно и то же число — на 6.

Ряд чисел, который получается из какого-нибудь числа прибавлением одного и того же числа, образует так называемую *арифметическую прогрессию*. Таким образом, характерное свойство, о котором мы говорили, можно выразить так: линейная функция переводит одну арифметическую прогрессию в другую арифметическую прогрессию (рис. 2). В нашем примере

Табл. 1

x	y
\vdots	\vdots
-2	-2
-1	3
0	1
1	2
2	-3

Табл. 2

x	y
-15	-33
-10	-13
0	7
10	+17
15	+27

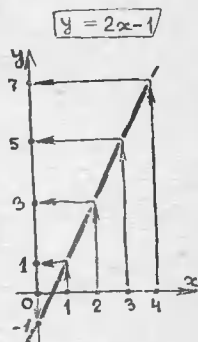


Рис. 2

*) Угловым коэффициентом прямой $y = kx + b$ называется коэффициент k .

функция $y = 3x - 2$ переводит арифметическую прогрессию $1, 3, 5, 7, \dots$ в арифметическую прогрессию $1, 7, 13, 19, \dots$, а на рисунке 2 показано, как функция $y = 2x - 1$ переводит арифметическую прогрессию $0, 1, 2, 3, \dots$ в арифметическую прогрессию $-1, 1, 3, 5, 7, \dots$

У п р а ж н е н и я

1. Придумайте линейную функцию, которая переводила бы арифметическую прогрессию $-3, -1, 1, 3, \dots$ в арифметическую прогрессию $-2, -12, -22, \dots$

Какая линейная функция переведет вторую прогрессию в первую?

2. Пусть даны две арифметические прогрессии: $a, a + h, a + 2h, \dots$ и $c, c + l, c + 2l, \dots$. Всегда ли можно найти линейную функцию $y = kx + b$, которая переводит первую прогрессию во вторую?

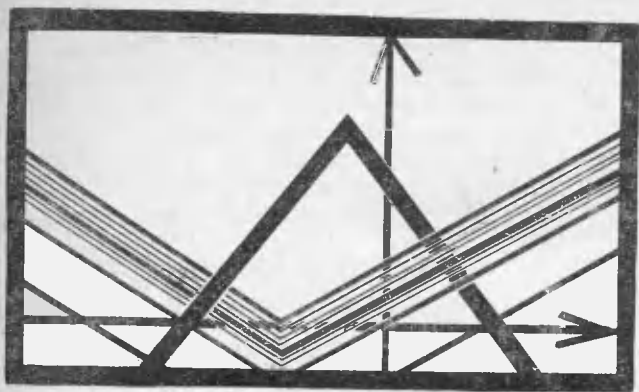
3. а) Прямая $y = \frac{7}{15}x + \frac{1}{3}$ проходит через две точки с целыми координатами: $A(10, 5)$ и $B(-20, -9)$. Есть ли на этой прямой еще «целочисленные точки» (т. е. точки с целыми координатами)?

б) Известно, что прямая $y = kx + b$ проходит через две целочисленные точки. Есть ли на этой прямой еще целочисленные точки?

в) Легко построить прямую, не проходящую ни через одну целочисленную точку. Например, $y = x + \frac{1}{2}$.

Может ли какая-нибудь прямая $y = kx + b$ проходить только через одну целочисленную точку?*)

*) Если Вы не сможете найти ответа на этот вопрос, посмотрите на стр. 86 — 87 задачу 4.



§ 3. Функция $y = |x|$

[1.] Рассмотрим теперь функцию

$$y = |x|,$$

где $|x|$ означает абсолютную величину*), или модуль, числа x .

Построим ее график, пользуясь определением абсолютной величины. При положительных x имеем $|x| = x$, т. е. этот график совпадает с графиком $y = x$ и является лучом, выходящим из начала координат под углом 45° к оси абсцисс (рис. 1). При $x < 0$ имеем $|x| = -x$; значит, для отрицательных x график $y = |x|$ совпадает с биссектрисой второго координатного угла (рис. 2).

Впрочем, вторую половину графика (для отрицательных x) легко получить из первой, если заметить, что функция $y = |x|$ — четная, так как $|-a| = |a|$

$$y = |x|$$

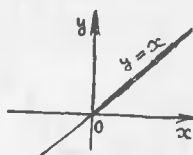


Рис. 1

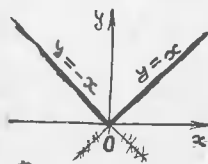


Рис. 2

*) Напоминаем: абсолютная величина положительного числа равна этому числу (если $x > 0$, то $|x| = x$); абсолютная величина отрицательного числа равна противоположному числу (если $x < 0$, то $|x| = -x$), абсолютная величина нуля равна нулю ($|0| = 0$).

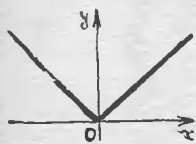


Рис. 3

(см. определение четной функции на стр. 13). Значит, график функции $y = |x|$ симметричен относительно оси Oy , и вторую половину графика можно получить, отразив относительно оси ординат часть, начерченную для положительных x . Получается график, изображенный на рис. 3.

[2.] Построим график функции

$$y = |x| + 1.$$

Этот график легко построить непосредственно. Однако мы его получим из графика функции $y = |x|$. Составим таблицу значений функции $y = |x| + 1$ и сравним ее с такой же таблицей, составленной для $y = |x|$, выписав эти таблицы рядом (табл. а, б). Ясно, что из каждой точки первого графика $y = |x|$ можно получить точку второго графика $y = |x| + 1$, увеличив y на единицу. (Например, точка $(-2, 2)$ графика $y = |x|$ переходит в точку $(-2, 3)$ графика $y = |x| + 1$, лежащую на 1 выше первой — рис. 4.) Значит, чтобы получить точки второго графика, нужно каждую точку первого графика сдвинуть на 1 вверх, т. е. весь второй график получается из первого сдвигом вверх на 1 (см. рис. 4).

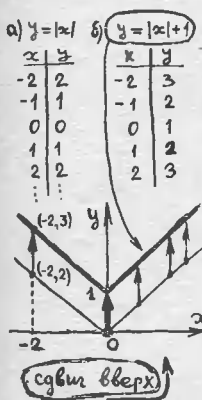


Рис. 4

Задача. Постройте график функции

$$y = |x| - 1.$$

Решение. Сравним этот график с графиком $y = |x|$. Если точка $x = a$, $y = |a|$ лежит на первом графике, то точка $x = a$, $y = |a| - 1$ будет лежать на втором графике. Поэтому каждая точка $(a, |a| - 1)$ второго графика может быть получена из точки $(a, |a|)$ первого графика сдвигом вниз на 1 единицу, и весь график получается, если график $y = |x|$ сдвинуть вниз на 1 (рис. 5).

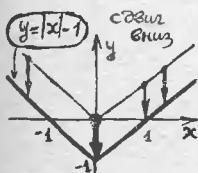
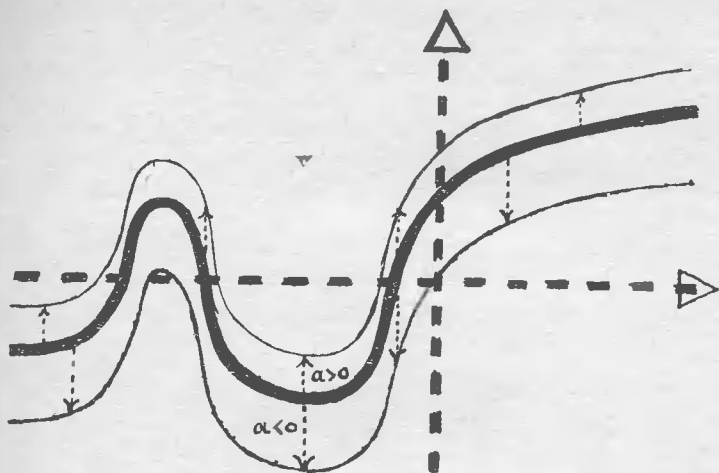


Рис. 5

Такой сдвиг вдоль оси Oy полезен при построении многих графиков (см. стр. 29).

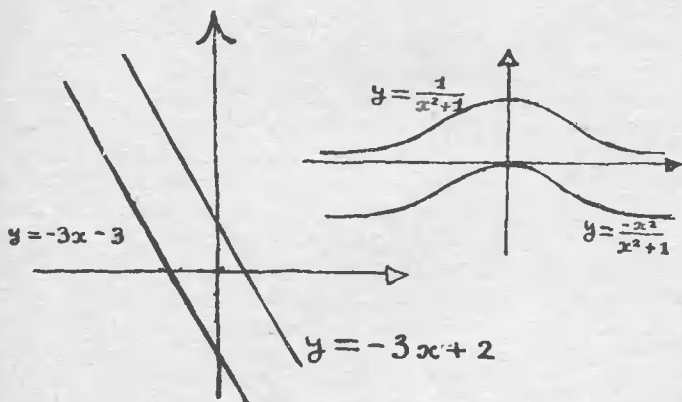


$f(x)$



$f(x) + a$

График функции $y = f(x) + a$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на a единиц. Направление сдвига определяется знаком числа a (при $a > 0$ график сдвигается вверх, при $a < 0$ — вниз).



Пусть надо построить график функции

$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}.$$

Представим эту функцию в виде

$$y = \frac{x^2 + 1 + 1}{x^2 + 1}, \text{ или } y = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Теперь ясно, что ее график может быть получен из графика $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ (см. рис. 5 на стр. 28) сдвигом вдоль оси Oy на 1 вверх.

[3.] Возьмем теперь функцию

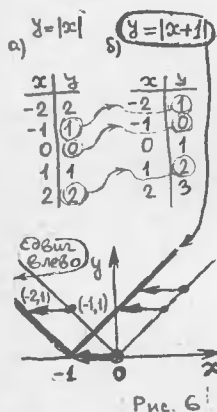
$$y = |x + 1|.$$

График этой функции мы тоже получим из графика $y = |x|$. Напишем опять рядом две таблицы: для $y = |x|$ и для $y = |x + 1|$ (табл. а, б). Если сравнивать значения этих функций при одинаковых x , то окажется, что для некоторых x ордината первого графика больше, чем второго, а для некоторых — наоборот.

Однако, если внимательно посмотреть на правые столбцы этих двух таблиц, связь между таблицами можно установить. Именно, вторая функция принимает те же самые значения, что и первая, только принимает их на единицу раньше, при меньших значениях x . (Почему?) Значит, из каждой точки первого графика $y = |x|$ получается точка второго графика $y = |x + 1|$, сдвинутая на 1 влево; например, из точки $(-1, 1)$ получается точка с координатами $(-2, 1)$ (рис. 6). Поэтому и весь график $y = |x + 1|$ получится, если сдвинуть график $y = |x|$ на 1 влево вдоль оси абсцисс.

Задача. Построить график функции $y = |x - 1|$.

Решение. Сравним его с графиком $y = |x|$. Если A — точка графика $y =$



$= |x|$ с координатами $(a, |a|)$, то точкой графика $y = |x - 1|$ с тем же значением ординаты y будет точка $A' (a + 1, |a|)$. (Почему?) Эту точку второго графика можно получить из точки $A (a, |a|)$ первого графика сдвигом вдоль оси Ox вправо. Значит, и весь график $y = |x - 1|$ получается из графика $y = |x|$ сдвигом вдоль оси Ox вправо на 1 (рис. 7).

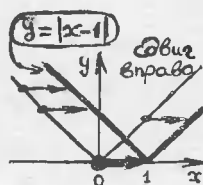


Рис. 7

Мы можем сказать, что функция $y = |x - 1|$ принимает те же значения, что и функция $y = |x|$, только с некоторым запозданием (а именно, на 1).

Такой сдвиг вдоль оси Ox полезен при построении многих графиков (см. стр. 33).

У п р а ж н е н и я

1. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

(У к а з а н и е. Представьте знаменатель дроби

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 2} \text{ в виде } (x - 1)^2 + 1.)$$

2. Сформулируйте правила, по которым из графика функции $y = f(x)$ можно получить графики функций $y = f(x + 5)$ и $y = f(x - 3)$.

3. Постройте графики $y = |x| + 3$ и $y = |x + 3|$.

4. Найдите все линейные функции, которые при $x = 3$ принимают значение $y = -5$.

Р е ш е н и е. Геометрически условие формулируется так: найти все прямые, проходящие через точку $(3, -5)$. Любая (невертикальная) прямая, проходящая через начало координат, является графиком некоторой функции $y = kx$. Сдвинем эту прямую так, чтобы она проходила через нужную точку $(3, -5)$, т. е. на 3 единицы вправо и на 5 единиц вниз (рис. 8). После первого сдвига мы получим уравнение $y = k(x - 3)$, после второго $y = k(x - 3) - 5$.

О т в е т. Все линейные функции, которые при $x = 3$ принимают значение $y = -5$, выражаются формулой $y = k(x - 3) - 5$, где k — любое действительное число. (Сравните эту задачу с задачей 7 на стр. 25.).

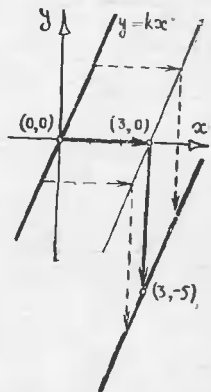


Рис. 8

[4.] З а д а ч а. Построить график

$$y = |x + 1| + |x - 1|.$$

Решение. Построим сначала на одном чертеже графики каждого из слагаемых: $y = |x + 1|$ и $y = |x - 1|$. Ордината y искомого графика получается сложением ординат двух построенных графиков в этой же точке. Так, например, если $x = 3$, то ордината y_1 первого графика равна 4, ордината y_2 второго графика равна 2, а ордината y графика $y = |x + 1| + |x - 1|$ равна 6.

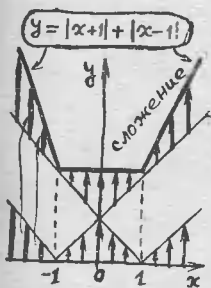


Рис. 9

Попробуем получить искомым график, складывая в каждой точке (т. е. при каждом x) ординаты обоих графиков. Получим чертеж, данный на рис. 9.

Мы видим, что графиком $y = |x + 1| + |x - 1|$ является ломаная, составленная из кусков трех прямых. Значит, на каждом из трех участков функция меняется линейно.

Упражнения

1. Напишите уравнения для каждого из звеньев ломаной

$$y = |x + 1| + |x - 1|.$$

(Ответ: для $x \leq -1$ $y = \dots x + \dots$,
для $-1 \leq x \leq 1$ $y = \dots$,
для $x \geq 1$ $y = \dots$)

2. В каких точках имеются изломы у ломаной, являющейся графиком функции $y = |x| + |x + 1| + |x + 2|$? Найдите уравнения каждого из звеньев.

3. а) Функцию, график которой изображен на рисунке 10, можно задать следующими условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } x < 0 \quad y &= 0, \\ \text{при } x \geq 0 \quad y &= 2x. \end{aligned}$$

Попробуйте задать эту функцию одной формулой.

б) Напишите формулы для функций, графики которых изображены соответственно на рис. 11 и 12. ⊕

4. Постройте график функции $y = |3x - 2|$.

Указание. Получите этот график из графика $y = |x|$ двумя преобразованиями: сдвигом по оси Ox и растяжением по оси Oy . Чтобы правильно определить величину сдвига, нужно вынести коэффициент при x за знак модуля: $|3x - 2| = 3|x - 2/3|$.

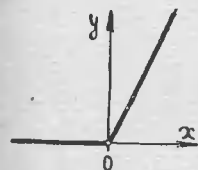


Рис. 10

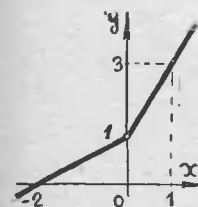


Рис. 11

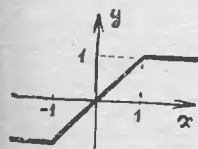
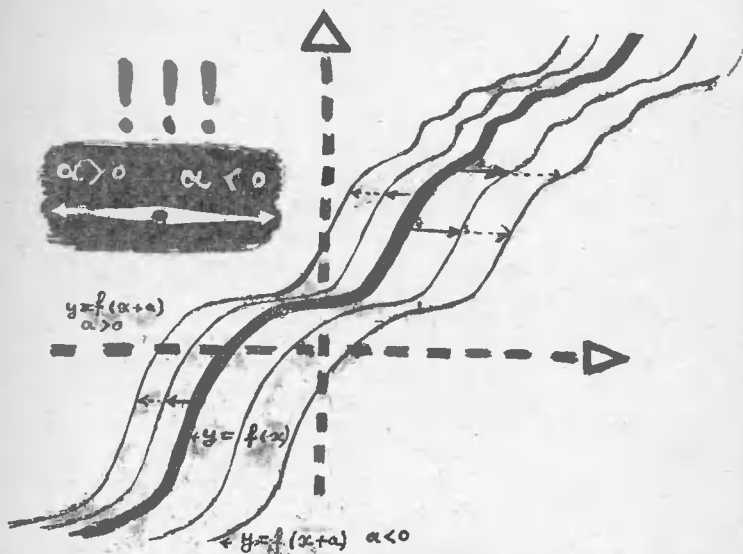
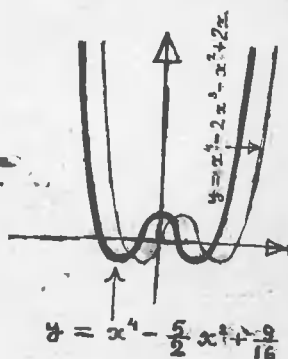
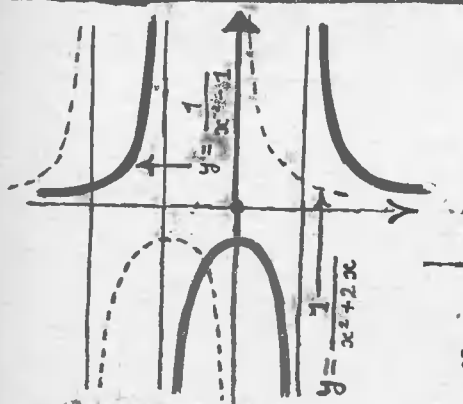


Рис. 12



$$f(x) \rightarrow f(x+a)$$

График функции $y = f(x+a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $-a$ единиц. Знак "минус" означает, что если $a > 0$, график сдвигается влево, если $a < 0$, график сдвигается вправо.



[5.] Задача. Построить график

$$y = |2x - 1|.$$

Решение. Получим этот график из прямой $y = 2x - 1$ (рис. 13). Там, где прямая идет выше оси абсцисс, y положительно, т. е. $2x - 1 > 0$. Значит, на этом участке $|2x - 1| = 2x - 1$ и искомый график $y = |2x - 1|$ совпадает с графиком $y = 2x - 1$. Там, где $2x - 1 < 0$ (т. е. прямая $y = 2x - 1$ идет ниже оси Ox), $|2x - 1| = -(2x - 1)$. Значит, чтобы на этом участке из графика $y = 2x - 1$ получить график $y = |2x - 1|$, нужно у каждой точки прямой $y = 2x - 1$ поменять знак ординаты, т. е. отразить эту прямую относительно оси абсцисс. Получаем рис. 14.

Упражнение

Зная график

$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$$

(рис. 9, стр. 16), постройте график

$$y = |x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x|.$$

[6.] Задача. Зная график

$$y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (1)$$

(рис. 15), постройте график

$$y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}. \quad (2)$$

Решение. Так как для положительных значений аргумента $|x| = x$, то

$$\frac{1}{x^2 - 2|x| + 2} = \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \quad (\text{при } x > 0).$$

Значит, справа от нуля график (2) совпадает с графиком (1) (рис. 16). Чтобы получить левую половину искомого графика (2), заметим, что функция $y = \frac{1}{x^2 - 2|x| + 2}$ четная. Значит, левая

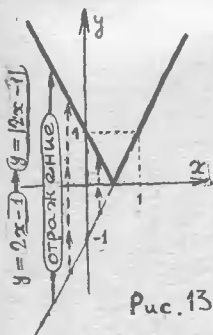


Рис. 13

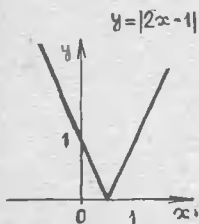


Рис. 14

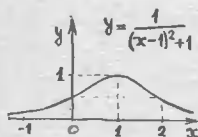


Рис. 15

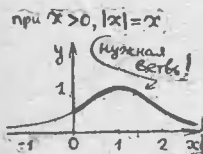
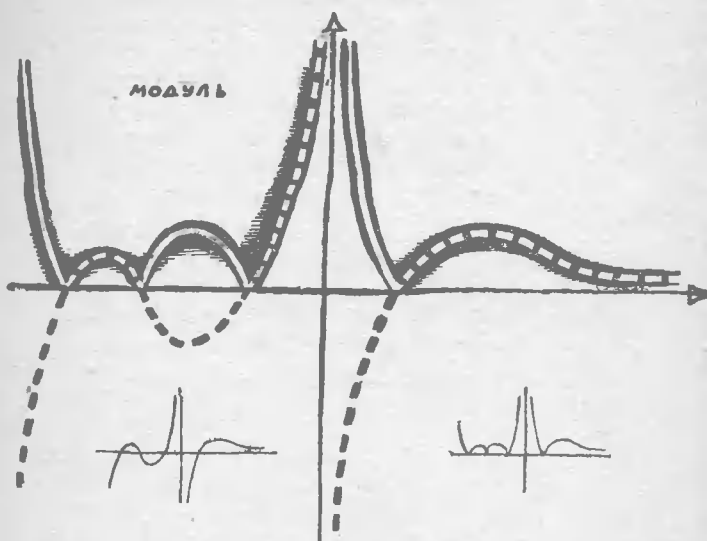


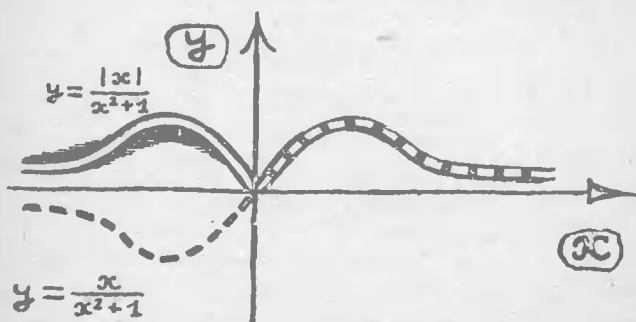
Рис. 16



$f(x)$

$|f(x)|$

Чтобы из графика $y = f(x)$ получить график $y = |f(x)|$, нужно угаетки графика $y = f(x)$ лежащие выше оси абсцисс, оставить без изменения, а угаетки, лежащие ниже оси абсцисс, отразить относительно этой оси.



$$\frac{(-x)^2 - 2|x| + 2}{x^2 - 2|x| + 2} = 1$$

теплая!

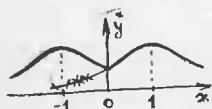


Рис. 17

половина графика (2) получается из его правой половины зеркальным отражением относительно оси ординат (рис. 17). То же самое верно и в общем случае: чтобы получить из графика $y = f(x)$ график $y = f(|x|)$, нужно половину первого графика, лежащую справа от оси ординат, отразить зеркально относительно оси ординат (см. стр. 35).

Упражнения

1. Постройте график $y = 2|x| - 1$.

2. Постройте графики:

а) $y = 4 - 2x$; б) $y = |4 - 2x|$;

в) $y = 4 - 2|x|$; г) $y = |4 - 2|x||$.

3. Найдите наименьшее значение функции

$$y = |x - 2| + |x| + |x + 2| + |x + 4|. \oplus$$

В заключение этого параграфа предлагаем Вам решить несколько задач. На первый взгляд кажется, что они совершенно не имеют никакого отношения к тому, чем мы занимались в этом параграфе, но, подумав, Вы увидите, что это не так.

Задачи*)

1. Семь спичечных коробок расположены в ряд. В первой лежит 19 спичек, во второй 9 спичек, в следующих соответственно 26, 8, 18, 11 и 14 спичек (рис. 18). Спички можно перекладывать из любой коробки в любую соседнюю с ней. Нужно переложить спички так, чтобы во всех коробках их стало поровну. Как это сделать, перекладывая как можно меньше спичек?

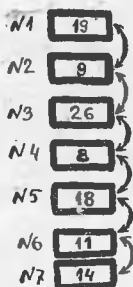


Рис. 18

Решение. Всего во всех коробках содержится 105 спичек. Значит, если спичек в коробках было бы поровну, то в каждой коробке лежало бы по 15 спичек. При таком расположении коробок задача имеет всего одно решение. Именно, из первой коробки во вторую нужно переложить четыре спички. После этого в первой коробке

*) Задачи 1—4 и способ их решения предложены М. Л. Цетлиным.

будет 15, а во второй 13 спичек. Добавим недостающие две спички из третьей коробки во вторую, тогда в третьей останется 24 спички. Лишние спички из этой коробки переложим в четвертую и т. д.

Задачи 2 и 3 несколько более трудные. Вопрос в них ставится тот же, что и в задаче 1.

2. На прямой расположены по-прежнему 7 коробок со спичками, но количество спичек в коробках другое. Именно, в первой лежит 1 спичка, во второй 2, в следующих 3, 72, 32, 20, 10.

3. Коробки со спичками расположены «собачкой» (рис. 19). Спички можно перекладывать только по линиям (маршрутам), соединяющим коробки.

Для следующей задачи уже полезно применить графики.

4. На окружности расположено 7 коробок со спичками. В первой лежит 19 спичек, во второй 9, в остальных соответственно: 26, 8, 18, 11, 14 спичек (рис. 20). Разрешается перекладывать спички из любой коробки в любую из соседних с ней. Требуется переложить спички так, чтобы во всех коробках их стало поровну. Как это сделать, перекладывая как можно меньше спичек? \oplus

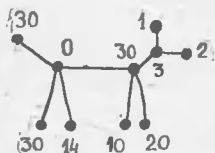


Рис. 19

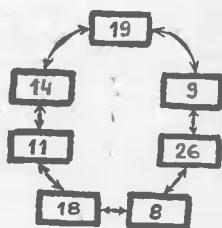
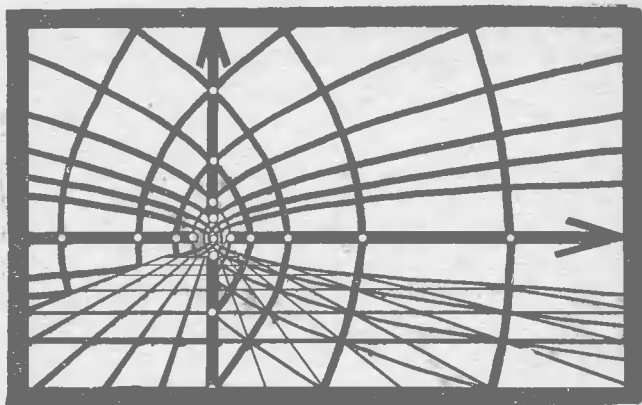


Рис. 20



§ 4. Квадратный трехчлен

[1.] Перейдем теперь к функции

$$y = x^2.$$

Вы, конечно, строили ее график и знаете, что у этой кривой есть специальное название — *парабола*. Графики функций $y = ax^2$ получаются из графика $y = x^2$ растяжением и тоже называются параболлами*).

У п р а ж н е н и е

На рис. 1 изображена парабола. а) Известно, что это — график функции $y = x^2$. Определите масштаб (масштаб по обеим осям одинаков). б) Какую надо взять единицу масштаба по осям, чтобы та же кривая рис. 1 служила графиком функции $y = 5x^2$?

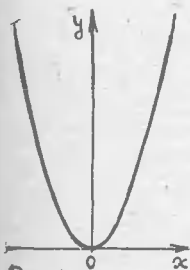


Рис. 1

[2.] Посмотрим, как будут меняться значения функции $y = x^2$, если значения аргумента меняются на одну и ту же величину, т. е. составляют арифметическую

*) Интересно, что все параболлы подобны друг другу (см. стр. 41, а также 90, задача 16 г).

прогрессию. Для простоты рассмотрим положительные значения x . Например, пусть x принимает значения:

1, 2, 3, 4, ...

Тогда y будет принимать значения

1, 4, 9, 16, ...

Вы видите, что значения y уже не образуют арифметической прогрессии.

Добавим к таблице значений аргумента и функции еще один столбец (рис. 2). В этом столбце мы будем записывать, на сколько меняется значение y , когда аргумент x переходит от своего значения к следующему. Например, пусть аргумент меняется от значения $x = 2$ до значения $x = 3$. Тогда функция меняется от значения $y = 4$ до значения $y = 9$. Изменение или, как говорят, *приращение функции* *) равно разности нового и старого значения функции, т. е. $9 - 4 = 5$.

Итак, в третьем столбце нашей таблицы мы запишем приращения функции $y = x^2$. Теперь ясно видно, что функция $y = x^2$ изменяется так, что при возрастании x возрастает не только сама функция, но и ее приращения. На графике этот факт тоже виден: кривая $y = x^2$ все круче и круче идет вверх, в то время как график линейной функции, которая изменяется равномерно, идет все время под одним и тем же углом к оси Ox (рис. 3).

Интересно заметить, что приращения функции $y = x^2$ составляют арифметическую прогрессию! Попробуйте доказать этот факт в общем виде: если значения аргумента x образуют арифметическую прогрессию

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots,$$

то значения соответствующих приращений

x	y	приращение
1	1	
2	4	$4 - 1 = 3$
3	9	$9 - 4 = 5$
4	16	$16 - 9 = 7$
5	25	$25 - 16 = 9$
...

приращение прираще-
ния = 2
(постоянно !)

Рис. 2

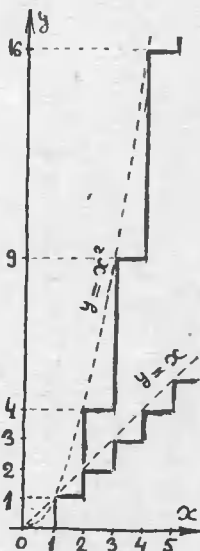


Рис. 3

*) Приращение функции $y = f(x)$ обозначается обычно греческой буквой Δ (дельта):

$$\Delta y, \text{ или } \Delta f(x).$$

квадратичной функции $y = x^2$ также образуют арифметическую прогрессию.

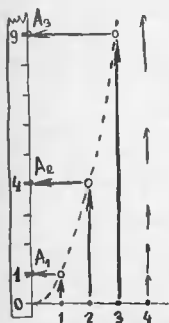


Рис. 4

Если аргумент t есть время, а функция s — пройденный путь (мы меняем обозначения x на t и y на s в соответствии с тем, как это принято в физике), то зависимость $s = t^2$ соответствует равноускоренному движению (с ускорением, равным 2), а формула $s = kt + b$ — равномерному движению со скоростью k . При равномерном движении за равные промежутки времени тело проходит равные отрезки пути, т. е. равным приращениям аргумента соответствуют равные приращения функции (линейная функция переводит каждую арифметическую прогрессию в арифметическую прогрессию). При равноускоренном движении отрезки пути, пройденные за равные промежутки времени, равномерно возрастают. Соответственно этому для квадратичной функции (кстати, не только для $y = x^2$, но и для любой функции $y = ax^2 + bx + c$) равным приращениям аргумента соответствуют равномерно возрастающие приращения функции.

У п р а ж н е н и я

1. Составьте таблицу с тремя столбцами (значения аргумента, значения функции и значения приращений функции) для трехчлена $y = x^2 + x - 3$, взяв для x значения 1, 0, -1, -2, -3. Добавьте к таблице еще один столбец и запишите в него разности двух последовательных приращений.

Возьмите теперь другой трехчлен: $x^2 + 3x + 5$. Составьте и для него такую же таблицу. Сравните последние столбцы этих двух таблиц. А что получится, если взять трехчлен $y = 2x^2 + 3x + 5$?

2. Из рисунка 4 видно, что если взять на положительной половине оси абсцисс равномерную шкалу, то график $y = x^2$ переведет ее в шкалу O, A_1, A_2, A_3 и т. д., расположенную на оси ординат, которая уже не будет равномерной. Этой шкалой ось ординат разбилась на отрезки OA_1, A_1A_2, A_2A_3 и т. д. Представьте себе, что вы разрежали ось ординат на эти отрезки и поставили их вертикально один за другим вдоль оси Ox на равных расстояниях друг от друга (основаниями в точки 1, 2, 3 и т. д.) (рис. 5). Как расположатся концы этих отрезков? Объясните результат.

3. Рассмотрим график $y = x^3$ для положительных значений x (рис. 6). Прodelайте с ним то же самое, что и с графиком $y = x^2$ в упражнении 2. Нарисуйте, как расположатся концы отрезков в этом случае. Более трудный вопрос: не можете ли Вы подобрать уравнение кривой, на которой лежат концы отрезков?

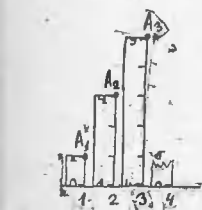


Рис. 5

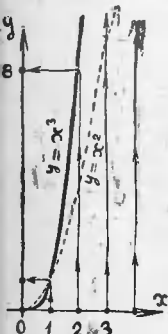


Рис. 6

Задача. Постройте график $y = x^2$. Масштаб возьмите покрупней: $1 = 2$ см (4 клетки). Отметьте на оси Oy точку $F(0, 1/4)$. Полоской бумаги измерьте расстояние от точки F до какой-нибудь точки M параболы. Затем приколите полоску в точке M и поверните ее вокруг этой точки так, чтобы она стала вертикальной. Конiec полоски опустится немного ниже оси абсцисс. Отметьте на полоске, насколько она выйдет за ось абсцисс (рис. 7). Возьмите теперь другую точку на параболе и повторите измерение еще раз. Насколько теперь опустился край полоски за ось абсцисс? Результат мы вам сможем сказать заранее: какую бы точку на параболе $y = x^2$ Вы ни взяли, расстояние этой точки до точки $(0, 1/4)$ будет больше расстояния от той же точки до оси абсцисс всегда на одно и то же число — на $1/4$.

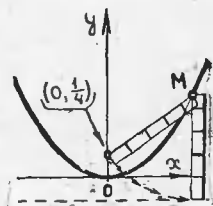


Рис. 7

Можно сказать иначе: расстояние от любой точки параболы до точки $(0, 1/4)$ равно расстоянию от той же точки параболы до прямой $y = -1/4$, параллельной оси Ox .

Эта замечательная точка $F(0, 1/4)$ называется *фокусом* параболы $y = x^2$, а прямая $y = -1/4$ — *директрисой* этой параболы.

Директриса и фокус есть у всякой параболы. (См. также рис. 1 на стр. 44).

[3.] Рассмотрим графики квадратных трехчленов вида

$$y = x^2 + px + q.$$

Покажем, что они по форме ничем не отличаются от параболы $y = x^2$ и занимают лишь другое положение относительно координатных осей.

Рассмотрим сначала численный пример. Возьмем трехчлен

$$y = x^2 + 2x + 3.$$

Чтобы получить его график, представим его в виде $y = (x + 1)^2 + 2$, выделив полный квадрат.

График $y = (x + 1)^2$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox . (Объясните, почему кривая $y = (x + 1)^2$ получается из $y = x^2$ сдвигом влево.) Из графика $y = (x + 1)^2$ график $y = (x + 1)^2 + 2$ получается совсем просто (рис. 8).

Итак, график трехчлена $y = (x + 1)^2 + 2 = x^2 + 2x + 3$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом влево на 1 единицу и вверх на 2 единицы. При таком преобразовании вершина параболы, помещавшаяся в точке $(0, 0)$ — начале координат, переходит в точку M с координатами $(-1, 2)$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ y &= (x+1)^2 + 2 = \\ &= x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

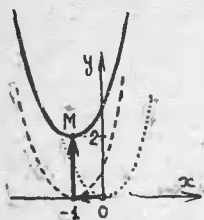


Рис. 8

У п р а ж н е н и е

1. Нарисуйте графики функций:

- а) $y = (x + 2)^2 + 3$, б) $y = (x + 2)^2 - 3$;
в) $y = (x - 2)^2 + 3$; г) $y = (x - 2)^2 - 3$.

З а д а ч а. а) Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^2 + 6x + 5.$$

Р е ш е н и е. Наименьшее значение указанной функции — это ордината вершины параболы $y = x^2 + 6x + 5$. Чтобы определить координаты вершины, выделим полный квадрат:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4.$$

Таким образом, наша парабола получилась из $y = x^2$ сдвигом по Ox на -3 единицы и на -4 по оси Oy , т. е. наименьшее значение функции равно -4 .

б) Вершина параболы $y = x^2 + px + q$ лежит в точке $(-1, 2)$. Найти p и q .

Докажем теперь, что, сдвигая параболу $y = x^2$, можно получить график любого квадратного трехчлена вида

$$y = x^2 + px + q.$$

Для этого, как и выше, выделим полный квадрат, т. е. представим наш трехчлен в виде $y = (x + \dots)^2 + \dots$, где второе слагаемое в скобках и свободный член нужно подобрать не зависящими от x .

После раскрытия скобок член с первой степенью x получается лишь в удвоенном произведении, и так как этот член должен быть равен px , то второе слагаемое в скобках нужно взять равным $\frac{p}{2}$. Таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \dots = \\ &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} + \dots \end{aligned}$$

Так как свободный член трехчлена должен быть равен q , то вместо многоточия нужно написать $q - \frac{p^2}{4}$.

Итак, трехчлен $y = x^2 + px + q$ можно переписать в виде

$$y = (x + p/2)^2 + q - p^2/4.$$

Мы видим (рис. 9), что график

$$y = x^2 + px + q$$

представляет собой параболу $y = x^2$, сдвинутую*) на $-p/2$ по оси Ox и на $q - p^2/4$ по оси Oy .

Вершина M этой параболы имеет абсциссу $x_M = -p/2$ и ординату $y_M = q - p^2/4$.

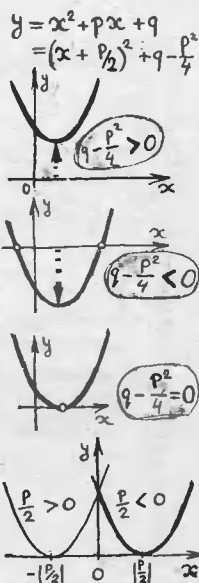
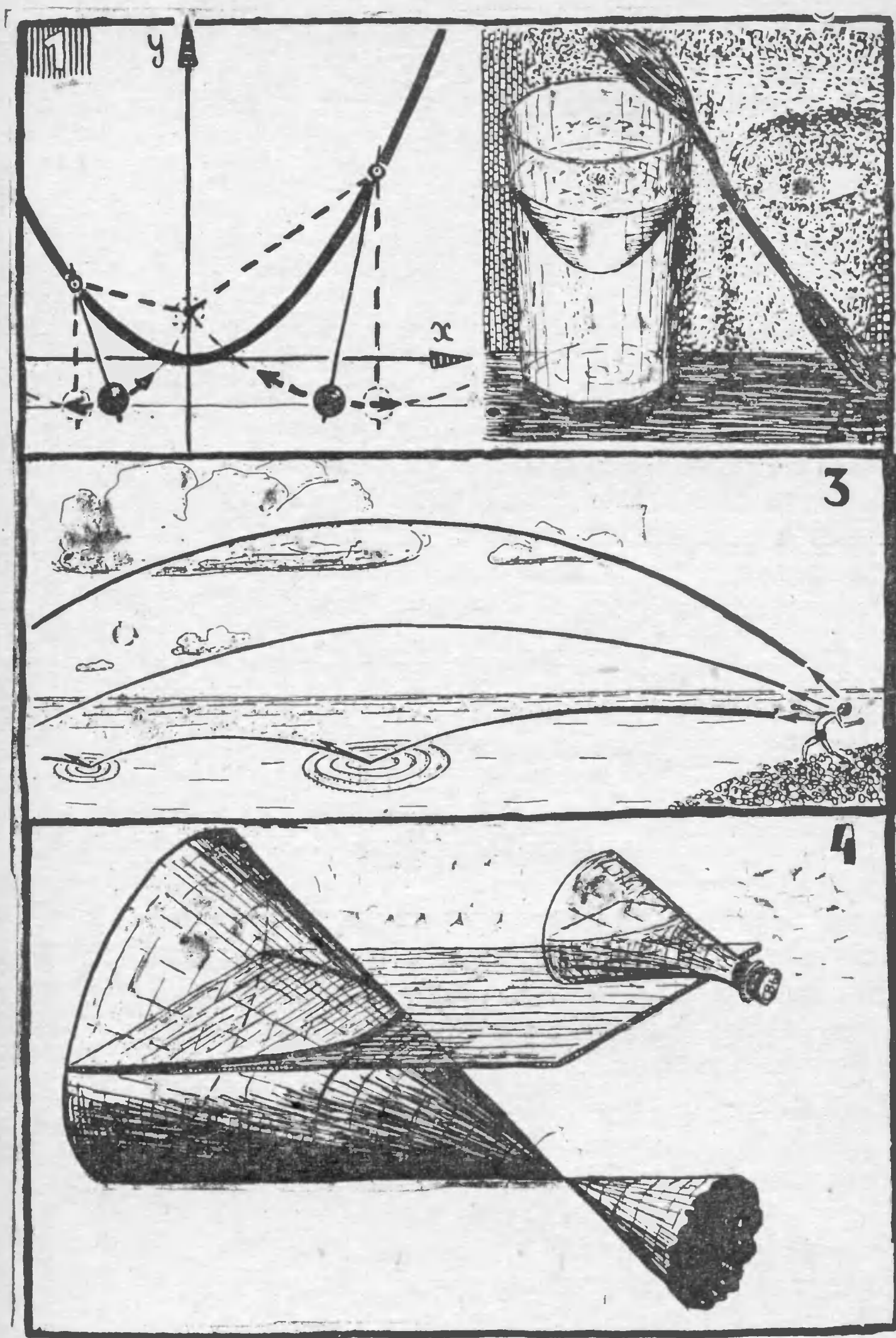


Рис. 9

*) Сдвиг на $-p/2$ по оси Ox означает сдвиг вправо, если $-p/2 > 0$, и сдвиг влево, если $-p/2 < 0$.



Интересные свойства параболы

1. Любая точка параболы равноудалена от некоторой точки, называемой фокусом параболы, и некоторой прямой, называемой ее директрисой.

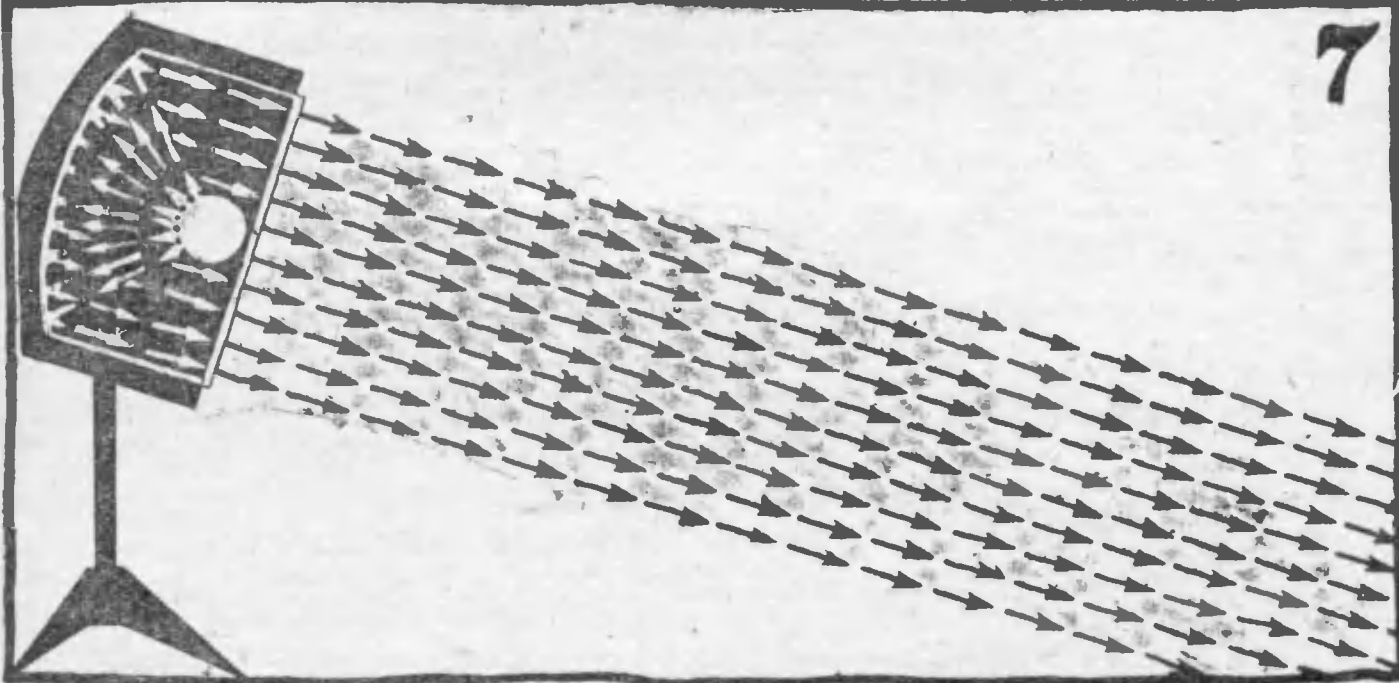
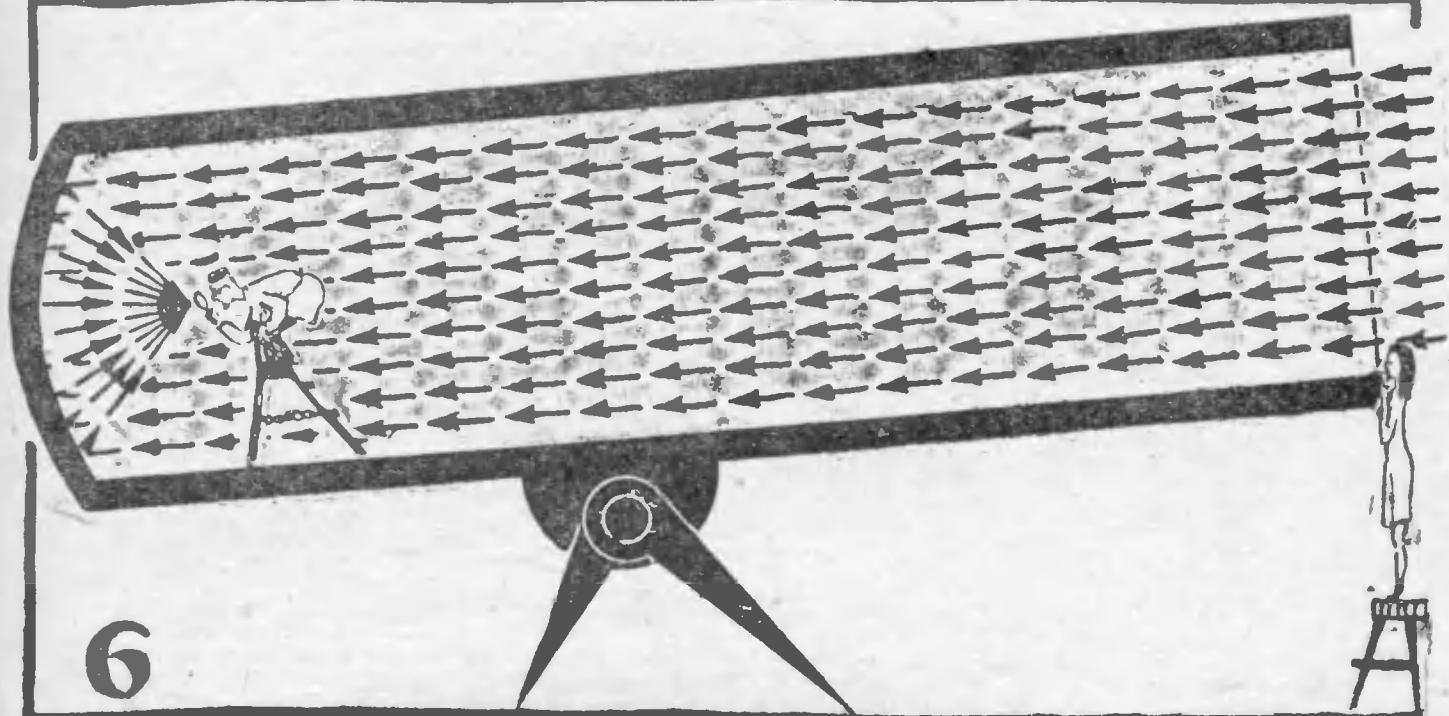
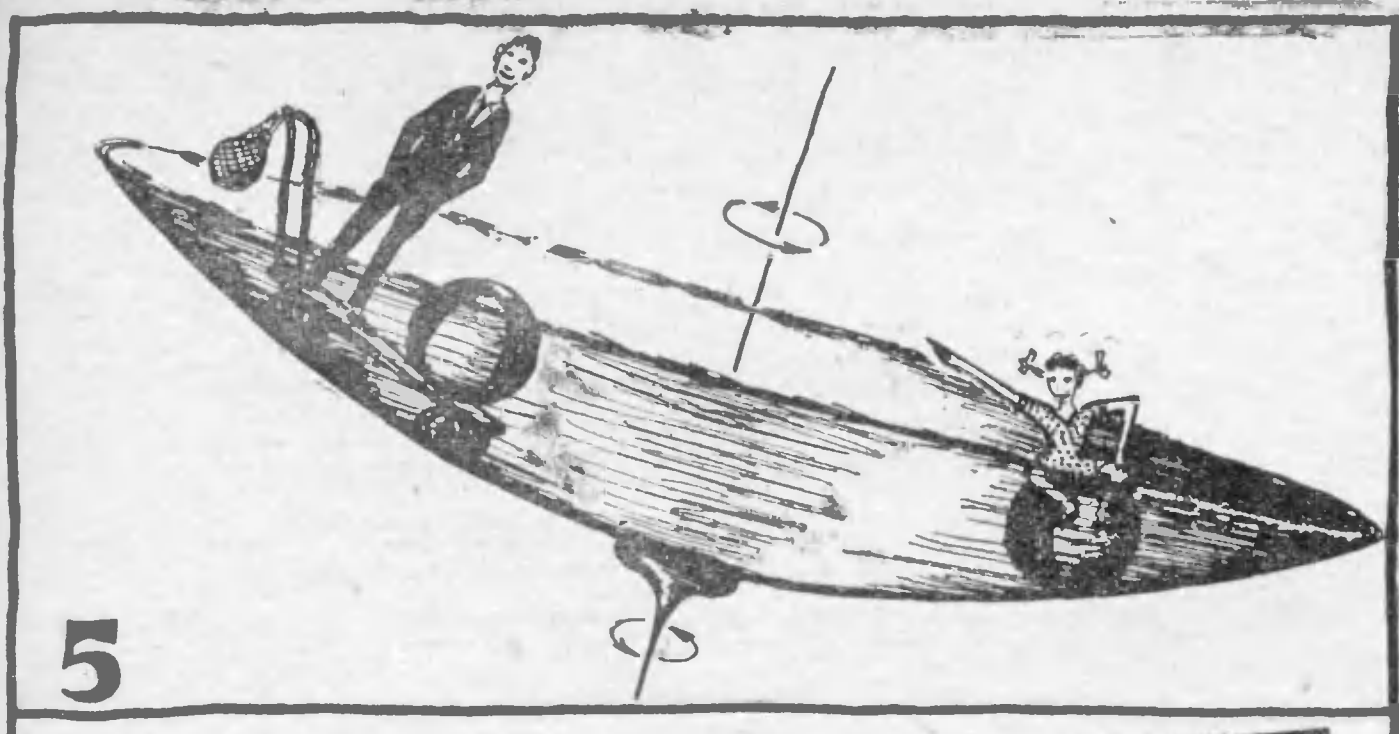
2. Если вращать параболу вокруг оси ее симметрии (например, параболу $y = x^2$ вокруг оси Oy), то получается очень интересная поверхность, которая называется *параболоидом вращения*.

Поверхность жидкости во вращающемся сосуде имеет форму параболоида вращения. Вы можете увидеть эту поверхность, если сильно помещаете ложечкой в неполном стакане чая, а потом вынете ложечку.

3. Если в пустоте бросить камень под некоторым углом к горизонту, то он полетит по параболе.

4. Если пересечь поверхность конуса плоскостью, параллельной какой-либо одной его образующей, то в сечении получится парабола.

5. В парках культуры устраивают иногда забавный аттракцион «Параболоид чудес». Каждому из стоящих внутри вращающегося парабо-



лоида кажется, что он стоит на полу, а остальные люди каким-то чудом держатся на стенках*).

6. В зеркальных телескопах тоже применяют параболические зеркала: свет далекой звезды, идущий параллельным пучком, упав на зеркало телескопа, собирается в фокусе.

7. У прожекторов зеркало обычно делается в форме параболоида. Если поместить источник света в фокусе параболоида, то лучи, отразившись от параболического зеркала, образуют параллельный пучок.

*) Опыты, описанные в пунктах 4 и 5, основаны на одном и том же свойстве параболоида: если вращать параболоид с подходящей скоростью вокруг его оси, расположенной вертикально, то равнодействующая центробежной силы и силы тяготения в любой точке параболоида направлена перпендикулярно к его поверхности.

[4.] Взяв «за основу» график $y = ax^2$, можно таким же образом получить график квадратного трехчлена более общего вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Разберем это на примере. Возьмем трехчлен $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$. Вынесем коэффициент при x^2 за скобки:

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12).$$

В выражении, стоящем в скобках, выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 12) &= \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3x + \\ &+ 9 + 3) = \frac{1}{2}[(x - 3)^2 + 3]. \end{aligned}$$

Итак, окончательно

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{3}{2}.$$

Мы видим, что график $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{3}{2}$ получается из параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ сдвигом по оси Ox на 3 единицы вправо и по оси Oy на $\frac{3}{2}$ единицы вверх.

Задачи

1. Сдвинуть параболу $y = ax^2$ по оси Ox и по оси Oy так, чтобы получить график трехчлена $y = ax^2 + bx + c$.

(О т в е т. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ получается из параболы $y = ax^2$ сдвигом по оси абсцисс на $-\frac{b}{2a}$ и по оси ординат на $\frac{4ac - b^2}{4a}$.)

2. Найти наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участках:

а) от $x = 0$ до $x = 5$ ($0 \leq x \leq 5$),

б) от $x = -5$ до $x = 0$ ($-5 \leq x \leq 0$).

Решение. Воспользуемся результатом предыдущей задачи и построим график функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ (рис. 10).

$$y = 2x^2 - 4x + 5$$

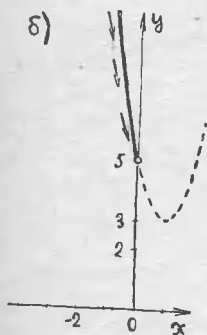


Рис 10

По рисунку видно, что при изменении x от значения $x = 0$ до значения $x = 5$ функция $y = 2x^2 - 4x + 5$ сначала убывает (до $x = 1$), затем возрастает. Таким образом, наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 4x + 5$ на участке а) есть ее значение при $x = 1$ (рис. 10, а). При изменении x от -5 до 0 функция $y = 2x^2 - 4x + 5$ все время убывает. Значит, наименьшее значение функции на участке б) есть ее значение при $x = 0$ (рис. 10, б).

(О т в е т. Наименьшее значение на участке а) равно 3, на участке б) равно 5.)

У п р а ж н е н и я

1. Нарисуйте графики следующих функций, указав точные координаты вершины каждой из парабол и координаты точек пересечения графиков с осями координат:

а) $y = x - x^2 - 1$;

б) $y = -3x^2 - 2x + 1$;

в) $y = 10x^2 - 10x + 3$;

г) $y = 0,125x^2 + x + 2$.

2. График какой функции получится, если параболу $y = x^2$ сначала растянуть по оси ординат в два раза, а потом сдвинуть по той же оси на три единицы вниз? График какой функции получится, если эти два преобразования проделать в обратном порядке: сначала сдвинуть параболу $y = x^2$ на три единицы вниз, а потом полученную кривую растянуть в два раза вдоль оси Oy ? (См. рис. 11).

3. Насколько нужно сдвинуть параболу $y = x^2 - 3x + 2$ по оси Ox и по оси Oy так, чтобы получилась параболa $y = x^2 + x + 1$?

4. Сдвиньте параболу $y = x^2$ вдоль оси Ox так, чтобы она прошла через точку $(3, 2)$. График какой функции Вы при этом получите? (См. рис. 12.)

[5.] Посмотрим теперь, что можно сказать по графику функции $y = x^2 + px + q$ о решении квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Корни этого уравнения — это те значения x , при которых значение функции $y = x^2 + px + q$ равно нулю. На графике эти точки имеют ординаты, равные нулю, т. е. лежат на оси абсцисс.

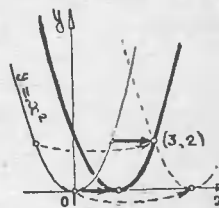
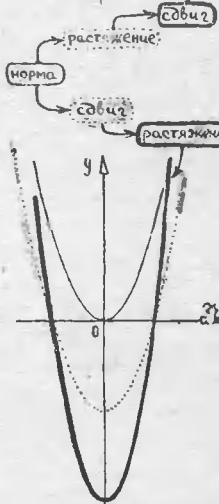
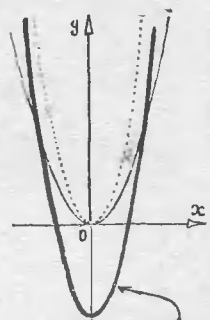


Рис 12

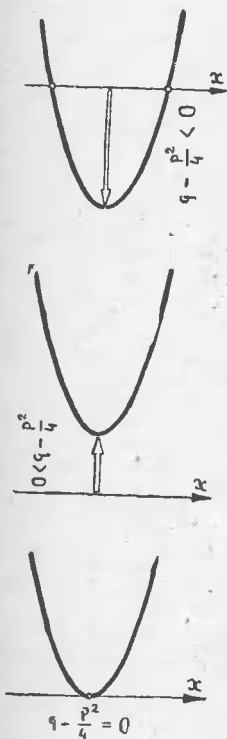


Рис. 13

Из графика квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ сразу видно, что квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два действительных корня, если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, и не имеет корней, если $\frac{p^2}{4} - q < 0$. (Вспомните, что парабола $y = x^2$ сдвигается вниз, если $q - \frac{p^2}{4} < 0$, и вверх, если $q - \frac{p^2}{4} > 0$; см. рис. 13.)

Если же $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ превращается в уравнение $(x + \frac{p}{2})^2 = 0$. Этот случай особенно интересен. Рассмотрим его подробно.

Уравнение $x - 2 = 0$ имеет одно решение $x = 2$. Уравнение $(x - 2)^2 = 0$ тоже имеет лишь решение $x = 2$ — ведь никакое другое число не удовлетворяет этому уравнению.

Однако в первом случае мы говорим, что уравнение $x - 2 = 0$ имеет один корень, а во втором случае мы говорим, что уравнение $(x - 2)^2 = 0$ имеет кратный корень, или два равных корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$.

Как же объяснить это различие?

Есть несколько способов это сделать. Мы приведем один из них. Изменим немного первое уравнение: заменим нуль в правой части каким-нибудь маленьким числом. Корень, конечно, изменится, но он по-прежнему останется единственным: уравнению по-прежнему будет удовлетворять только одно число. Например, $x - 2 = 0,01$, $x = 2,01$.

Изменим теперь таким же образом второе уравнение:

$$(x - 2)^2 = 0,01, \quad x^2 - 4x + 3,99 = 0.$$

Полученное уравнение теперь будет иметь два корня: $x_1 \approx 2,1$ и $x_2 \approx 1,9$. Бу-

дем теперь в уравнении $(x - 2)^2 = 0,01$ опять менять правую часть, заменяя ее все меньшими и меньшими числами. До тех пор, пока эта правая часть не будет равна нулю, уравнение будет иметь два различных корня. С уменьшением правой части корни будут «сближаться», так что их значения будут отличаться друг от друга на все меньшую и меньшую величину. Наконец, когда правая часть станет равной нулю, два корня «соются» в один — значения двух корней станут равными друг другу. Поэтому говорят, что уравнение $(x - 2)^2 = 0$ имеет два корня, слившихся в один двукратный корень.

Геометрически случай слившихся корней соответствует касанию параболы $y = (x - 2)^2$ с осью Ox .

Разберем теперь геометрически общий случай квадратного трехчлена. Пусть сначала свободный член q меньше $p^2/4$ (т. е. $q - p^2/4 < 0$), так что парабола $y = x^2 + px + q$ имеет две точки пересечения с осью абсцисс (рис. 14). Будем увеличивать свободный член: первое время парабола, двигаясь вверх, все еще будет иметь две точки пересечения с осью Ox (уравнение $x^2 + px + q$ тогда имеет два различных корня), затем эти точки пересечения, сближаясь, в некоторый момент (когда $q - p^2/4 = 0$) сливаются в одну. В этот момент парабола $y = x^2 + px + q = (x + p/2)^2$ касается оси, а уравнение $x^2 + px + p^2/4 = 0$ имеет один двукратный корень. При дальнейшем увеличении свободного члена парабола перестает пересекать ось Ox , и уравнение $x^2 + px + q = 0$ не будет иметь действительных корней.

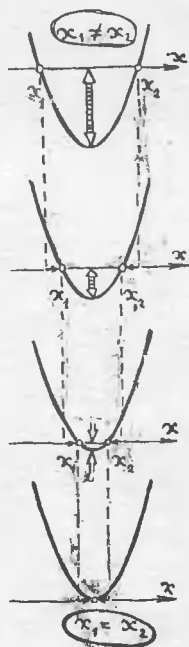


Рис. 14

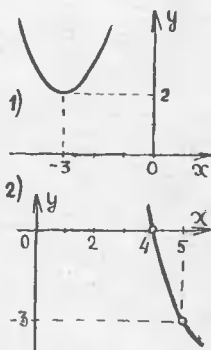


Рис. 15

Упражнения

1. Найти параболу $y = ax^2 + bx + c$, которая пересекает ось абсцисс в точках $x = 3$ и $x = -5$, а ось Oy — в точке $y = 30$.

Задачи

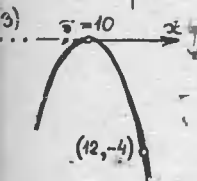
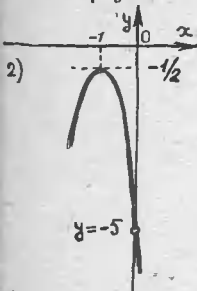
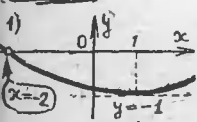


Рис. 16

$$x^2 - 5x + 4$$

корни: $x_1 = 1, x_2 = 4$

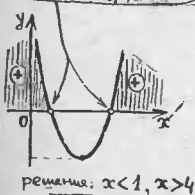


Рис. 17

Решение. Квадратный трехчлен, задающий эту параболу, будет иметь вид:

$$a(x-3)(x+5).$$

Точка пересечения с Oy получается при $x=0$. Значит, при $x=0$ наша функция должна равняться 30. Получаем

$$a(-3)(+5) = 30, \text{ откуда } a = -2.$$

(Ответ. Парабола $y = -2x^2 - 4x + 30$.)

2. а) Найти квадратный трехчлен вида $x^2 + px + q$,

если его график пересекает ось абсцисс в точках $x=2$ и $x=5$.

б) Найти кубический многочлен вида $y = x^3 + px^2 + qx + r$, если известно, что его график пересекает ось Ox в точках $x=1$, $x=2$ и $x=3$.

в) Не можете ли Вы придумать многочлен, график которого пересекал бы ось Ox в 101 точке:

$$x_1 = -50, x_2 = -49, x_3 = -48, \dots, x_{101} = 50?$$

Какова наименьшая степень таких многочленов?

3. Трехчлен $-x^2 + 6x - 9$ имеет два одинаковых корня;

а) измените на 0,01 свободный член так, чтобы у полученного трехчлена было два различных корня;

б) можно ли добиться того же результата, изменяя на 0,01 только коэффициент при x ?

4. На рис. 15 1) и 2) изображены графики квадратных трехчленов $y = x^2 + px + q$. Найдите p и q . Нарисуйте график 2), выбрав более удачно масштаб и положение осей.

5. На рис. 16 1), 2) и 3) изображены графики квадратных трехчленов

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Найдите a , b и c .

6. а) Решите неравенство

$$x^2 - 5x + 4 > 0.$$

Решение. Из рис. 17 видно, что функция $y = x^2 - 5x + 4$ положительна на двух участках: при x , меньших 1, и при x , больших 4. (Ответ. $x < 1$ и $x > 4$.)

б) Решите неравенство

$$x - 1 < |x^2 - 5x + 4|.$$

Решение. Нарисуем на одном чертеже графики функций, стоящих в правой и левой части. По рис. 18 видно, что прямая $y = x - 1$ имеет с графиком $y = |x^2 - 5x + 4|$ три общих точки: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Условие $x - 1 < |x^2 - 5x + 4|$ выполняется на трех участках: $x < x_1$, $x_1 < x < x_2$, $x > x_3$. Значения x_1 и x_3 находятся из уравнения $x - 1 = x^2 - 5x + 4$. Значение x_2 находится из уравнения

$$x - 1 = -(x^2 - 5x + 4).$$

(Ответ. $x < 1$, $1 < x < 3$ и $x > 5$, т. е. все x , кроме $x = 1$ и $3 \leq x \leq 5$.)

в) Напишите ответ для неравенств

$$x - 1 > |x^2 - 5x + 4|,$$

$$x - 1 \geq |x^2 - 5x + 4|.$$

7. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 5|x| + 4$ на участке от -2 до 2 .

[6.] График $y = x^2$ можно также нарисовать, «возводя в квадрат» график $y = x$, т. е. мысленно возведя в квадрат значение каждой ординаты (рис. 19).

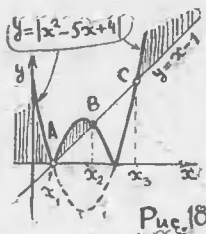


Рис. 18

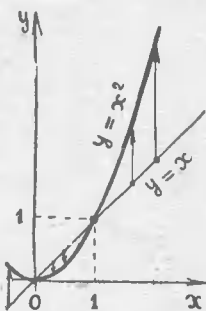


Рис. 19

Упражнения

1. Нарисован график (рис. 20)

$$y = x - 1.$$

Нарисовать на этом же чертеже график

$$y = (x - 1)^2.$$

2. Нарисован график (рис. 21)

$$y = f(x).$$

Нарисовать на том же чертеже график

$$y = (f(x))^2.$$

3. Воспользовавшись графиком

$$y = x(x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

(см. рис. 9 на стр. 16), нарисовать график

$$y = x^2(x + 1)^2(x - 1)^2(x - 2)^2.$$

4. Нарисовать графики:

$$а) y = [x]^2; б) y = (x - [x])^2.$$

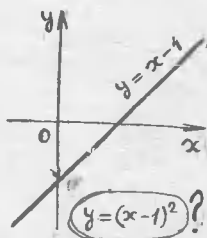


Рис. 20

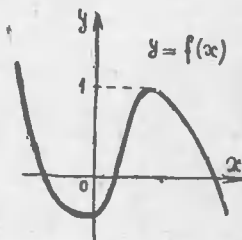
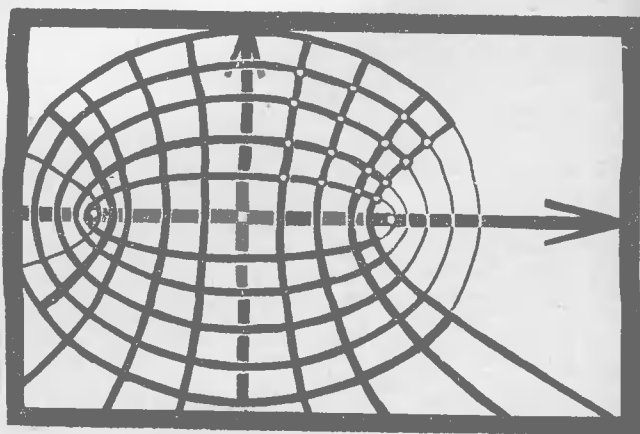


Рис. 21



§ 5. Дробно-линейная функция

[1.] На рис. 1 изображен «график» функции $y = 1/x$ в том виде, как его часто рисуют люди, не искушенные в построении графиков. Они рассуждают так: «При $x = 1, y = 1$. При $x = 2, y = 1/2$. При $x = 3, y = 1/3$. При $x = -1, y = -1$. При $x = 0, \dots$? Неясно... Что значит $1/0$ — неизвестно, поэтому $x = 0$ пропустим...»

Вы уже знаете из предыдущего текста, что так рисовать графики нельзя. Чтобы представить себе правильную картину, заметим сначала, что при $x = 0$ функция не определена. В таких случаях интересно посмотреть, как ведет себя функция около этой точки. Когда x , уменьшаясь по абсолютной величине, подходит к 0, то y установится по абсолютной величине как угодно большим. При этом, если x приближается к нулю справа ($x > 0$), то $y = 1/x$ тоже положителен. Поэтому при приближении к нулю справа кривая графика поднимается вверх (рис. 2, а). Если же x приближается к ну-

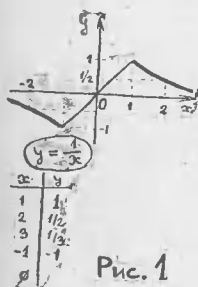


Рис. 1

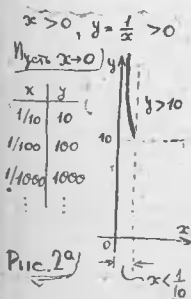


Рис. 2а)

лю слева ($x < 0$), то y отрицателен, поэтому слева график спускается вниз (рис. 2, б).

Теперь ясно, что около «запрещенного» значения $x = 0$ график, разорвавшись на две ветви, расходится вдоль оси Oy : правая ветвь идет вверх, а левая вниз (рис. 3).

Посмотрим теперь, как ведет себя функция, если x увеличивается по абсолютной величине. Сначала рассмотрим правую ветвь, т. е. значения $x > 0$. При положительном x значения функции y тоже положительны. Значит, вся правая ветвь расположена выше оси абсцисс. При увеличении x дробь $1/x$ уменьшается. Поэтому при движении от нуля вправо кривая $y = 1/x$ опускается все ниже и ниже, причем она может подойти к оси Ox на как угодно маленькое расстояние (рис. 4, а). Для $x < 0$ получается аналогичная картина (рис. 4, б).

Таким образом, при неограниченном увеличении x по абсолютной величине функция $y = 1/x$ неограниченно уменьшается по абсолютной величине и обе ветви

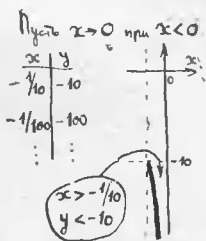


Рис. 2 б

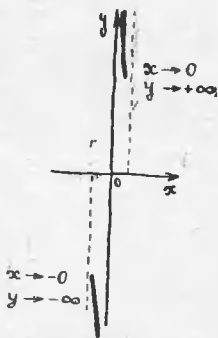


Рис. 3

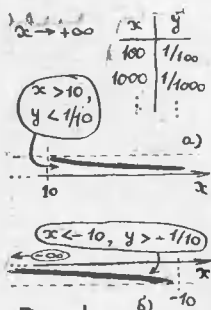


Рис. 4

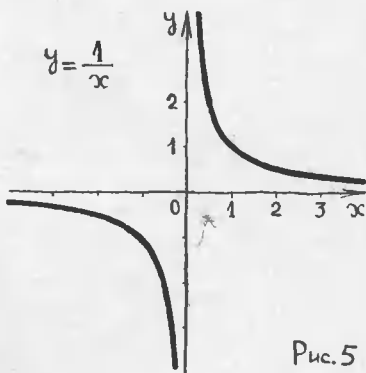
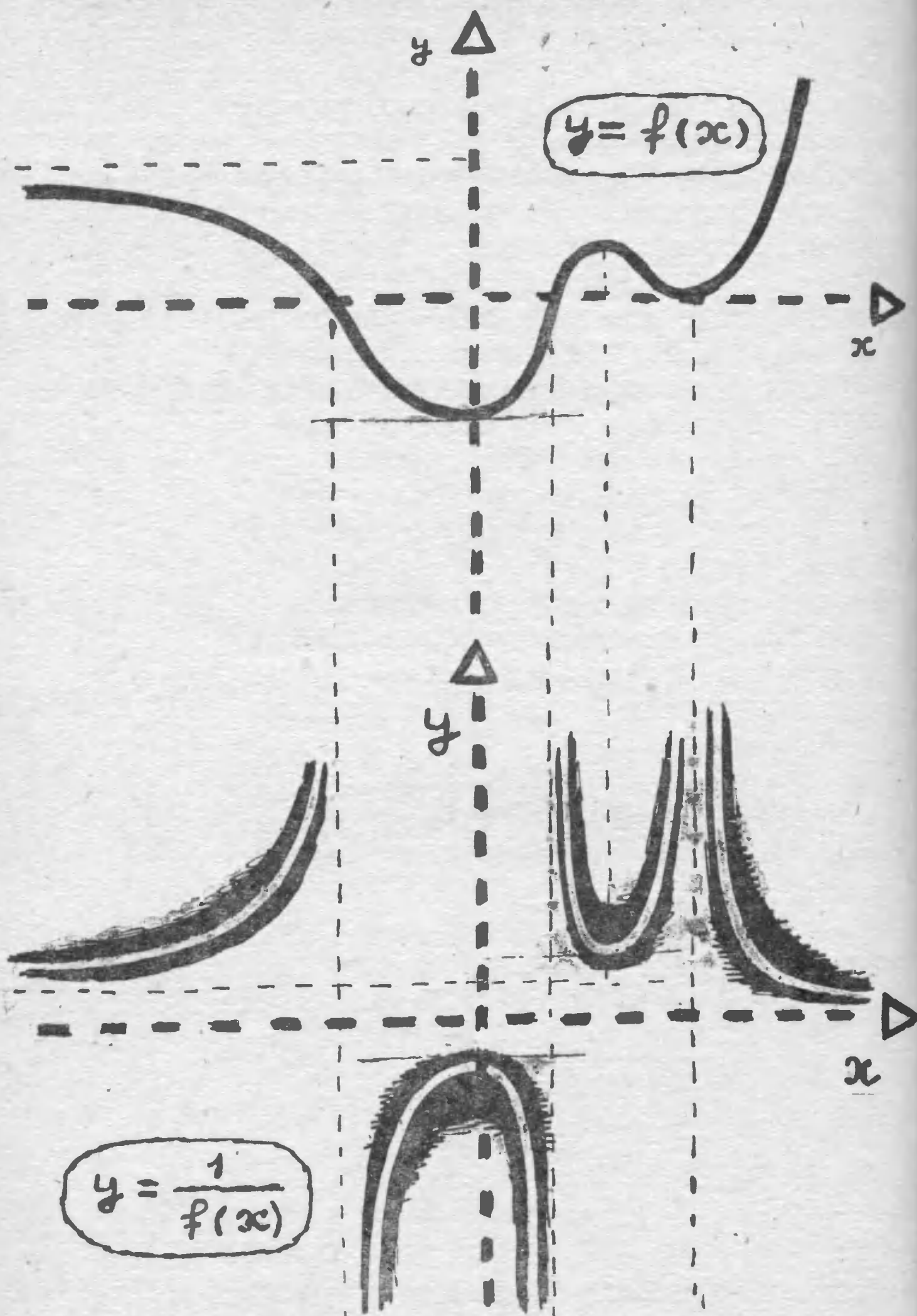


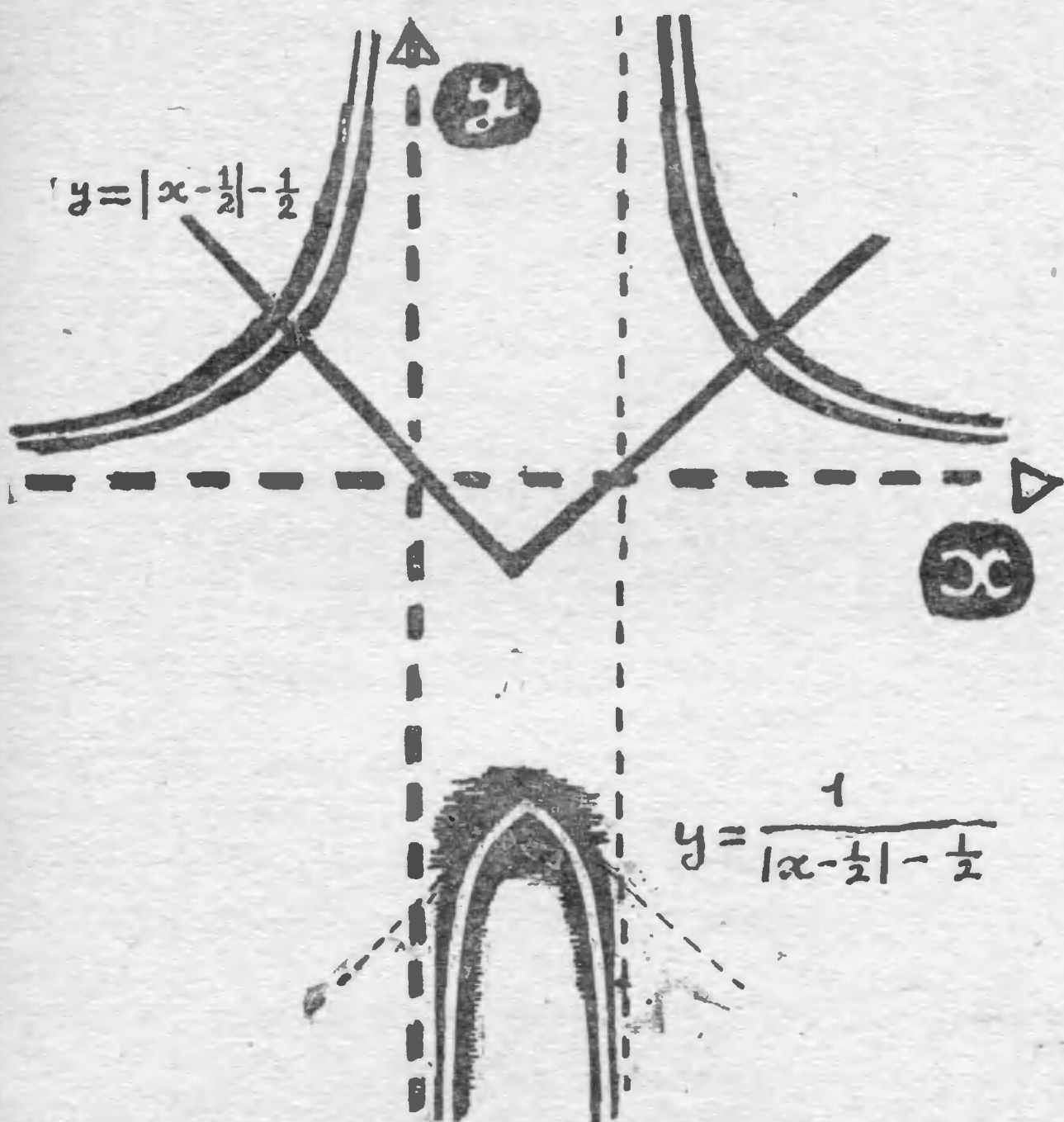
Рис. 5

графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, левая снизу (рис. 5).

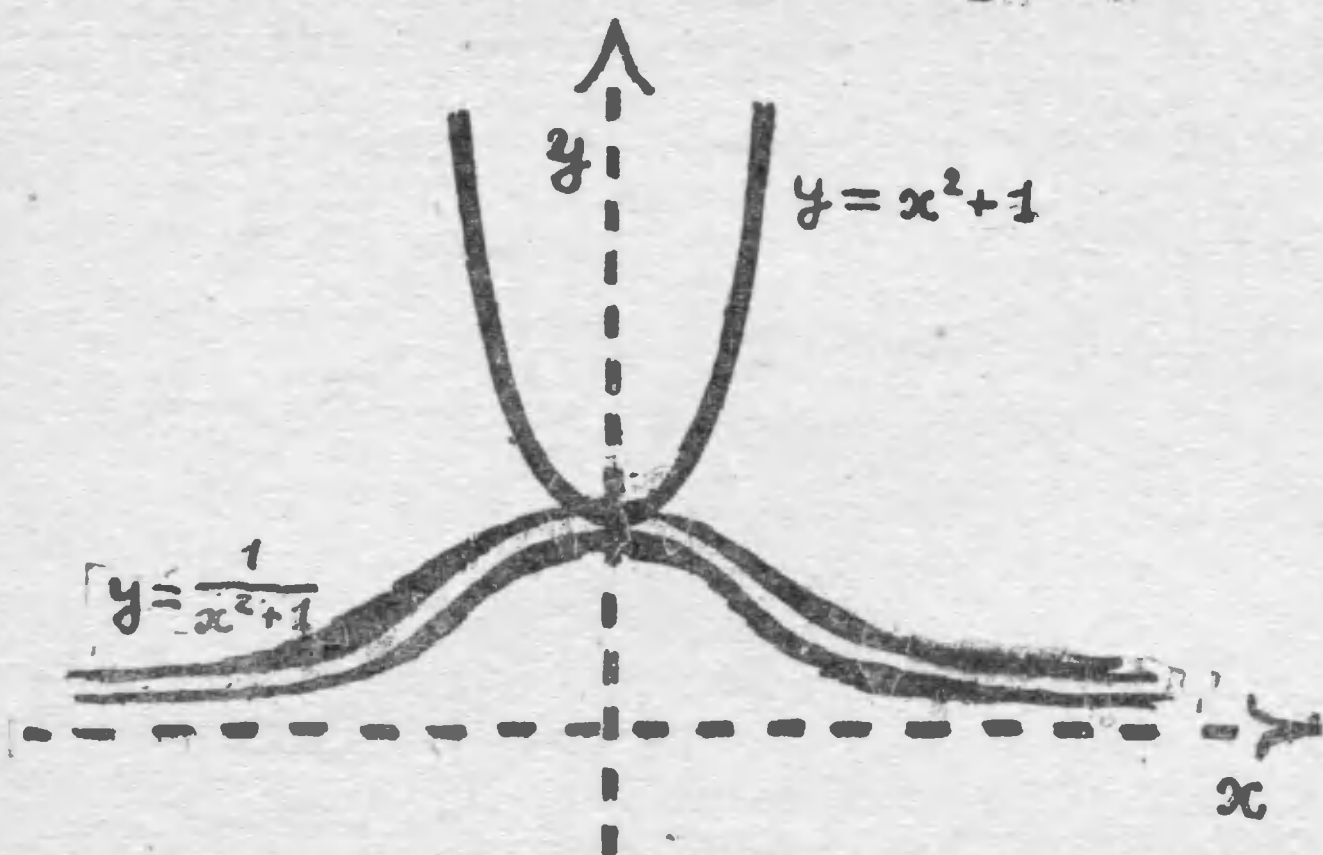
Кривая, являющаяся графиком $y = 1/x$, называется *гиперболой*. Прямые, к

$$y = f(x) \rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$





$$y = f(x) \rightarrow y = \frac{1}{f(x)}$$



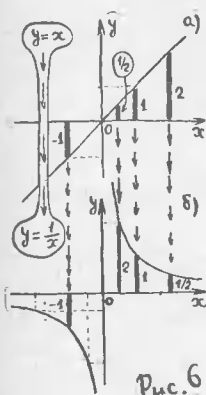


Рис. 6

которым приближаются ветви гиперболы, называются ее *асимптотами*.

[2.] Можно построить график $y = 1/x$ несколько иначе.

Нарисуем график функции $y = x$ (рис. 6, а). Заменяем каждую ординату величиной, ей обратной, и нарисуем соответствующие точки на рис. 6, б. Получим график $y = 1/x$.

Нарисованная картина наглядно показывает, как маленькие ординаты первого графика превращаются в большие ординаты второго и, наоборот, — большие ординаты первого в маленькие ординаты второго.

Этот прием «деления» графиков бывает полезен всегда, когда мы умеем строить график $y = f(x)$, а нам нужно построить график функции $y = \frac{1}{f(x)}$ (см. стр. 54—55).

Упражнения

1. Зная график $y = x^2$, построить график $y = 1/x^2$. (Решение на рис. 7.)
2. Построить графики:

$$а) y = \frac{1}{x^2 - 3x - 2}; \quad б) y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}.$$

(Вы увидите, что эти два графика выглядят совершенно по-разному).

3. Зная графики $y = [x]$ (см. стр. 9) и $y = x - [x]$, построить графики:

$$а) y = \frac{1}{[x]}; \quad б) y = \frac{1}{x - [x]}.$$

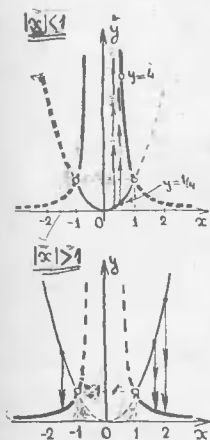


Рис. 7

[3.] Кривые, которые Вы будете строить в следующих упражнениях, получаются из гиперболы $y = 1/x$ известными Вам преобразованиями. Все они тоже называются гиперболой.

У п р а ж н е н и я

1. Нарисуйте графики функций:

а) $y = \frac{1}{x} + 1$; б) $y = \frac{1}{x+1}$;

в) $y = \frac{1}{x-2} + 1$.

Укажите, какие асимптоты имеет каждая из этих гипербол.

2. а) Докажите, что прямые $y = x$ и $y = -x$ являются осями симметрии гиперболы $y = 1/x$.

б) Имеет ли ось симметрии правая ветвь графика $y = 1/x^2$? ⊕

3. Зная график $y = 1/x$, постройте график $y = 4/x$. Имеет ли эта кривая оси симметрии?

Графики функций вида

$$y = \frac{b}{cx+d} \text{ (где } c \neq 0 \text{ и } d \neq 0 \text{)}$$

получаются из графика $y = 1/x$ сдвигом по оси Ox и растяжением по оси Oy . Чтобы правильно определить величину сдвига и коэффициент растяжения, нужно числитель и знаменатель дроби поделить на c — коэффициент при x :

$$\frac{b}{cx+d} = \frac{b/c}{x+d/c}.$$

Проведем это на примере $y = \frac{1}{3x+2}$.

Имеем:

$$\frac{1}{3x+2} = \frac{1/3}{x+2/3}.$$

Теперь видно, что график нашей функции $y = \frac{1}{3x+2}$ это график $\frac{1}{x}$, сдвинутый по оси Ox на $(-2/3)^*$ и сжатый по оси Oy втрое (рис. 8).

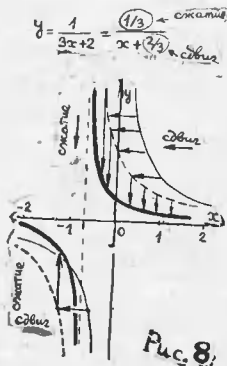
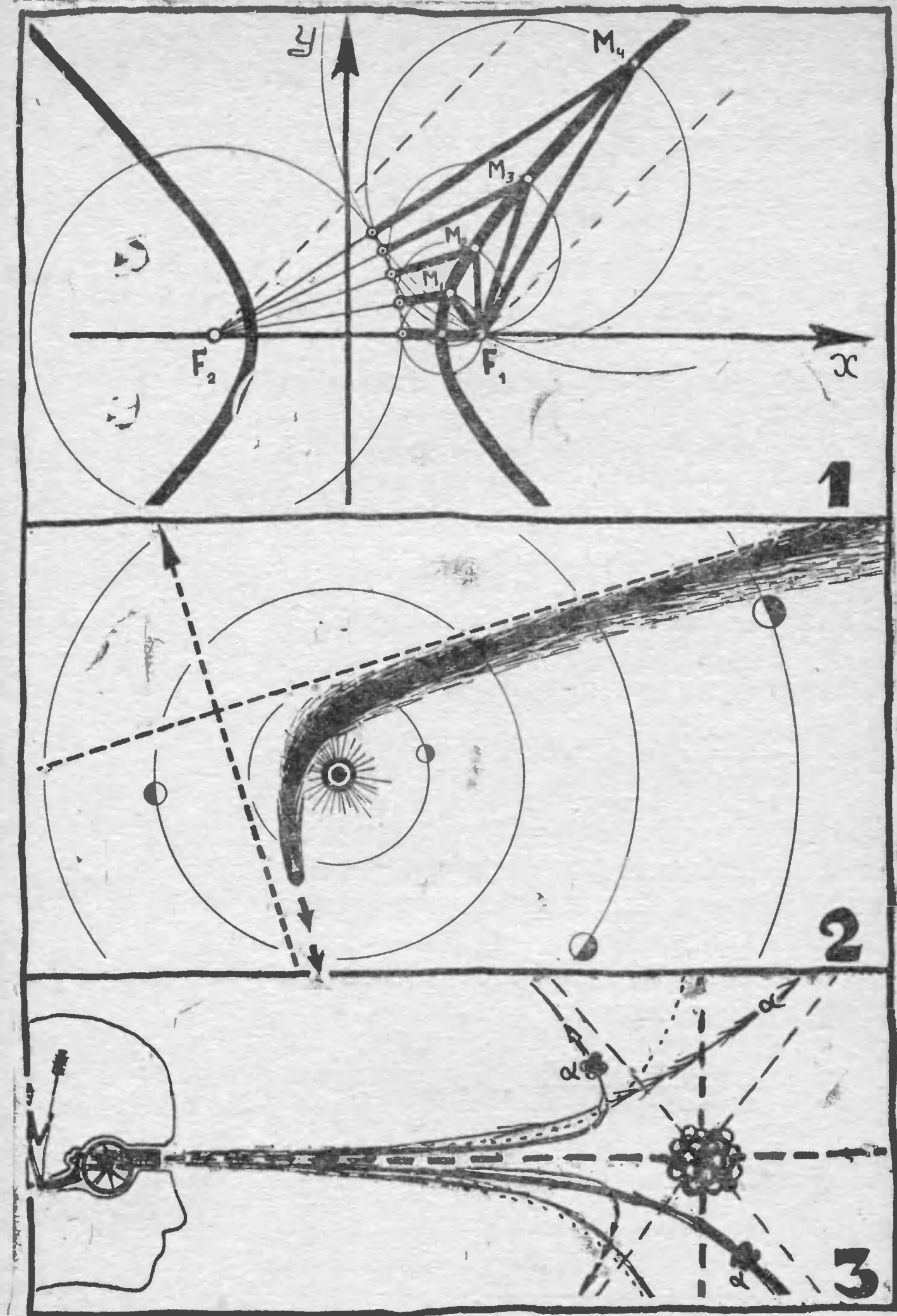


Рис. 8.

*А не на (-2) , как часто необдуманно говорят ученики!



Интересные свойства гиперболы

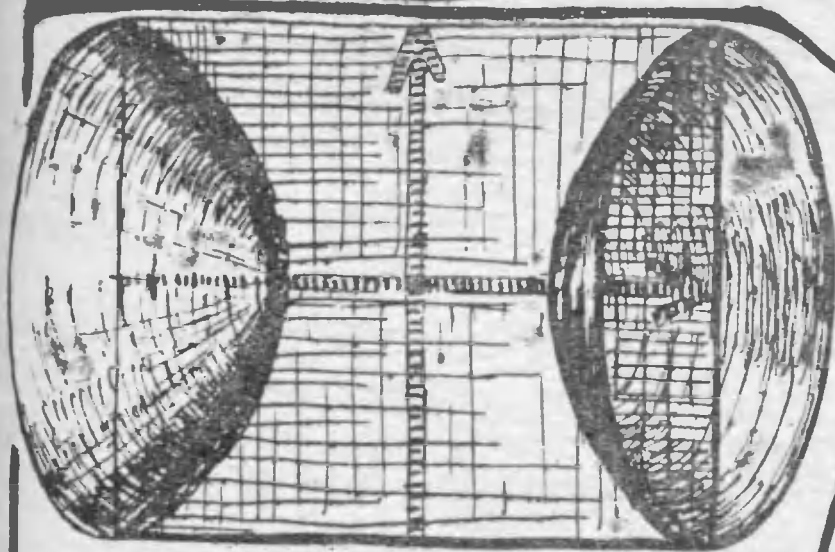
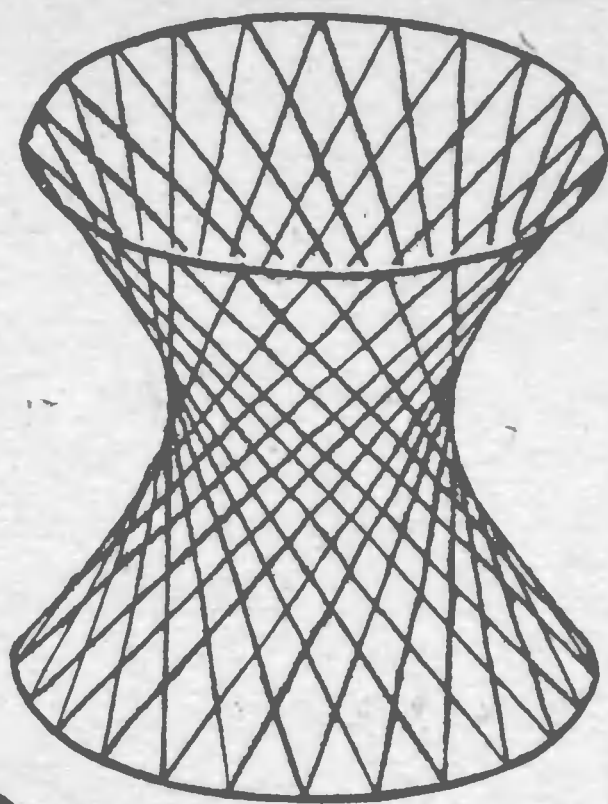
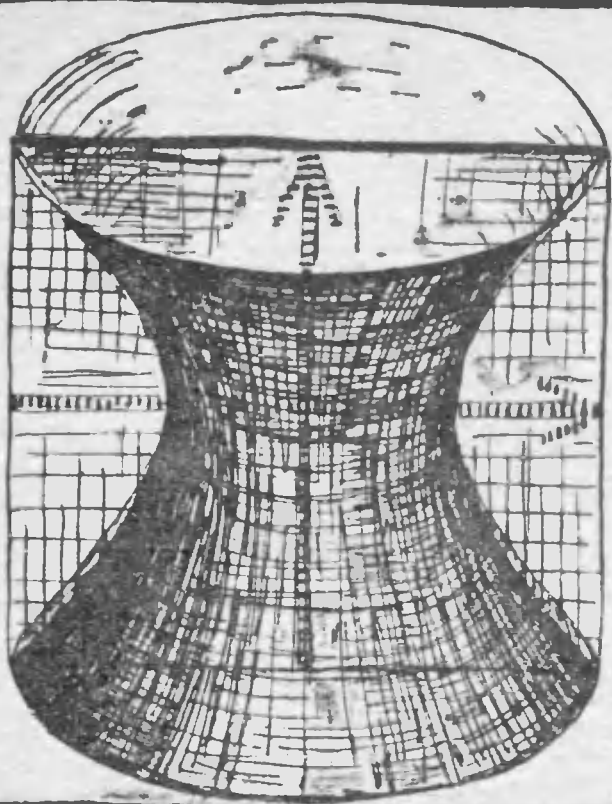
1. Гипербола есть геометрическое место точек M , разность расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, по абсолютной величине равна заданному числу.

2. Комета или метеорит, залетевшие издалека в солнечную систему, движутся по ветви гиперболы. В фокусе находится Солнце. Одна асимптота*) дает направление, в котором комета прилетает, вторая — направление, в котором она покидает солнечную систему.

3. При бомбардировке атомного ядра α -частица, пролетающая мимо ядра, движется по гиперболе.

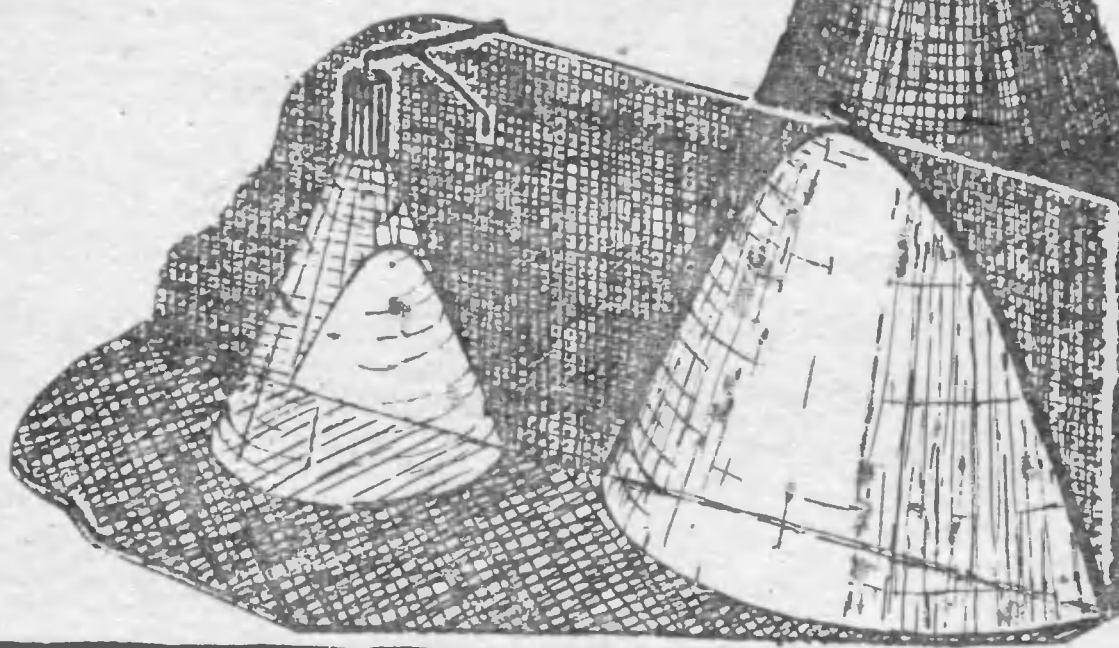
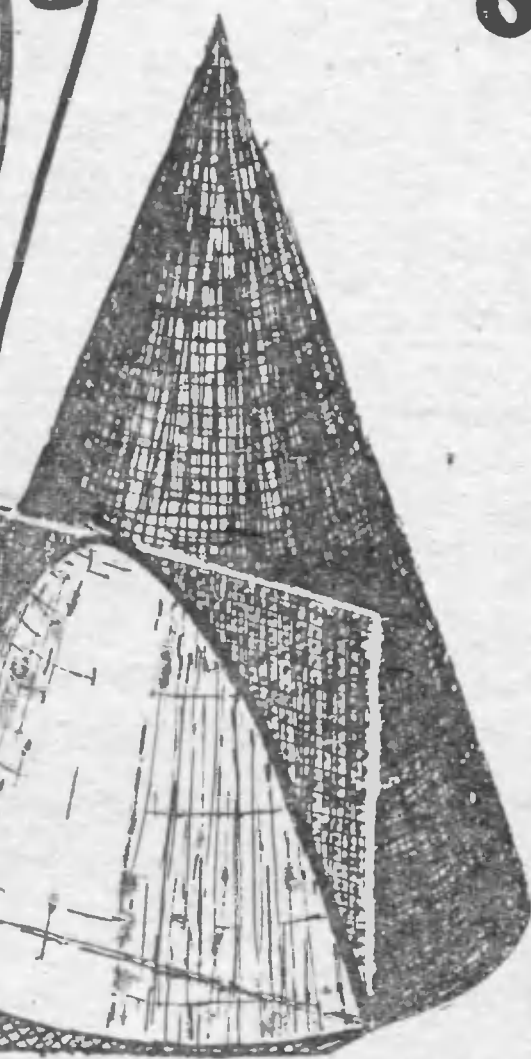
*) У всякой гиперболы есть две асимптоты. У гипербол, являющихся графиками дробно-линейных функций $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, асимптоты взаимно перпендикулярны. У других гипербол асимптоты бывают расположены под другим углом.

4



5

6



4. Если вращать гиперболу вокруг ее оси симметрии, не пересекающей ее ветвей, то получится поверхность, называемая *однополостным гиперболоидом*. Эта поверхность обладает удивительным свойством: она «соткана» из прямых линий. Ажурная мачта московского телецентра составлена из «кусков» таких гиперболоидов, целиком сделанных из прямых стальных стержней.

5. Если вращать гиперболу вокруг другой оси симметрии, то получается поверхность, состоящая из двух «кусков» — *двуполостный гиперболоид*. Именно его имел в виду А. Толстой в своем романе «Гиперболоид инженера Гарина». Впрочем, нужным инженеру Гарину свойством — собирать лучи в параллельный пучок — обладает не гиперболоид, а параболоид. Так что правильной было бы назвать книгу «Параболоид инженера Гарина».

6. Если подходящим образом пересечь бесконечный конус плоскостью, то в сечении получится гипербола. Если у Вас есть лампа с круглым абажуром, Вы можете в этом убедиться. Лампа освещает часть стены, ограниченную куском гиперболы.

Упражнение

Нарисуйте график

$$y = \frac{1}{2-x} + 1.$$

(Указание. Дробь $\frac{1}{2-x}$ преобразуйте, как сказано выше: поделите числитель и знаменатель на коэффициент при x , т. е. на (-1) . Получится

$$y = \frac{-1}{x-2} + 1.)$$

4. Графики функций вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

называемых *дробно-линейными*, по форме не отличаются от графика $y = 1/x$. Мы предполагаем, конечно, что $c \neq 0$ (иначе получится линейная функция $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$) и что $a/c \neq b/d$, т. е. числитель не есть кратное знаменателя (как у функции $y = \frac{4x+6}{2x+3}$), иначе функция постоянна.

Докажем это. Рассмотрим сначала пример: $y = \frac{2x+1}{x-3}$. Выделим «целую часть» дроби, разделив числитель на знаменатель (рис. 9). Мы получим

$$\frac{2x+1}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}.$$

Теперь видно, что график этой функции получается из графика $y = 1/x$ следующими преобразованиями: сдвигом на 3 единицы вправо, растяжением в 7 раз вдоль оси Oy и сдвигом на 2 единицы вверх.

Любую дробь $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ можно записать аналогичным образом, выделив

2/5

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{2x-6+7}{x-3} = \frac{2x-6}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$$

сдвиг вверх на 2

Рис. 9

«целую часть». Следовательно, графики всех дробно-линейных функций

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

есть гиперболы (различным образом сдвинутые вдоль координатных осей и растянутые по оси Oy).

З а м е ч а н и е. Для построения графика какой-нибудь дробно-линейной функции не обязательно преобразовывать дробь, задающую эту функцию. Поскольку мы знаем, что график есть гипербола, достаточно найти прямые, к которым приближаются ее ветви (асимптоты гиперболы), и еще несколько точек.

П р и м е р. Построим график функции

$$y = \frac{3x + 5}{2x + 2}.$$

Найдем сначала асимптоты этой гиперболы. Функция не определена там, где $2x + 2 = 0$, т. е. при $x = -1$ (рис. 10). Стало быть, вертикальной асимптотой служит прямая $x = -1$.

Чтобы найти горизонтальную асимптоту, посмотрим, к чему приближаются значения функции, когда аргумент возрастает по абсолютной величине. Для больших (по абсолютной величине) значений x

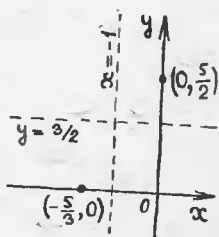


Рис. 10

$$y = \frac{3x + 5}{2x + 2} \approx \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

Стало быть, горизонтальная асимптота — прямая $y = 3/2$.

Определим точки пересечения нашей гиперболы с осями координат. При $x = 0$ имеем $y = 5/2$. Функция равна нулю, когда $3x + 5 = 0$, т. е. при $x = -5/3$.

Отметив на чертеже точки $(-5/3, 0)$ и $(0, 5/2)$, построим график (рис. 11).

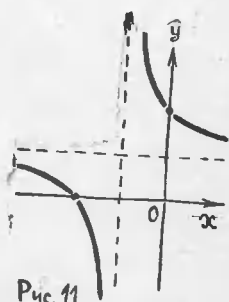


Рис. 11

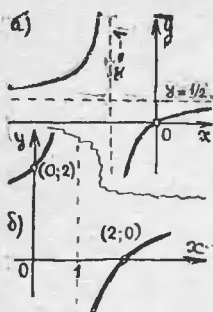


Рис. 12

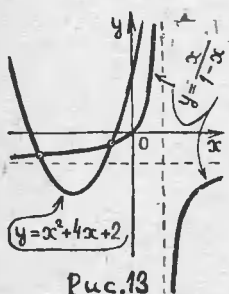


Рис. 13

У п р а ж н е н и я

1. Постройте графики функций:

а) $y = \frac{1}{1-2x}$; б) $y = \frac{3+x}{3-x}$; в) $y = \left| \frac{2x+1}{x+1} \right|$.

2. На рис. 12, а и б изображены графики дробно-линейных функций

$$y = \frac{px+q}{x+r}.$$

Найдите эти функции (т. е. определите p , q и r).

3. а) Сколько решений имеет уравнение

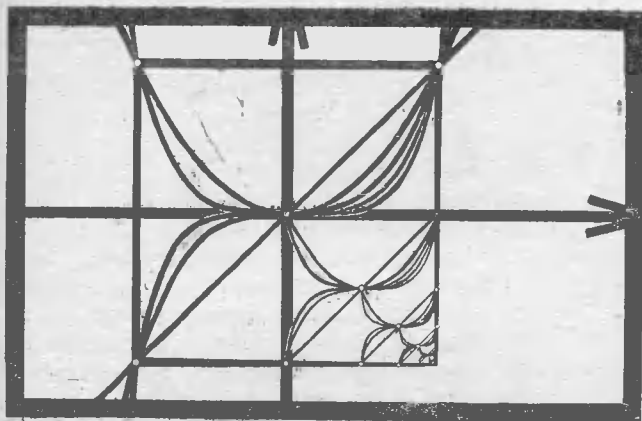
$$\frac{x}{1-x} = x^2 + 4x + 2?$$

Р е ш е н и е. Построим на одном чертеже графики функций

$$y = \frac{x}{1-x} \quad \text{и} \quad y = x^2 + 4x + 2.$$

На рис. 13 видны две точки пересечения этих графиков. Ясно, что есть и третья точка, так как парабола пересекает асимптоту гиперболы. Абсциссы точек пересечения графиков и являются решениями уравнения.

(О т в е т. Три решения.)



§ 6. Степенные функции

1. Степенные функции — это функции вида $y = x^n$. Графики степенных функций для первых двух натуральных значений показателя n ($n = 1$ и $n = 2$) мы уже строили. При $n = 1$ получаем функцию $y = x$; график этой функции — прямая (рис. 1, а). При $n = 2$ получается функция $y = x^2$; график этой функции — параболa (рис. 1, б).

График функции $y = x^3$ ($n = 3$) тоже называется параболой — *параболой третьего порядка*, или *кубической параболой*. Для положительных значений аргумента кубическая параболa $y = x^3$ похожа на параболу второго порядка $y = x^2$. Действительно, при $x = 0$ функция $y = x^2$ равна нулю, и функция $y = x^3$ тоже равна нулю — оба графика проходят через начало координат; при $x = 1$ значение x^2 равно 1 и x^3 тоже равен 1 — оба графика проходят через точку (1,1).

С увеличением x (если x положителен) увеличиваются и значения функции $y = x^2$ и значения функции $y = x^3$, кубическая параболa $y = x^3$, как и обычная

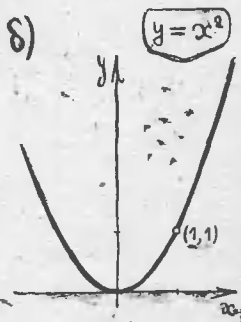
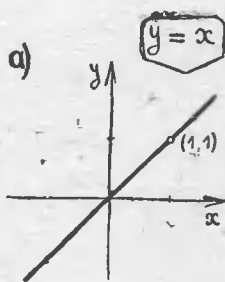


Рис 1

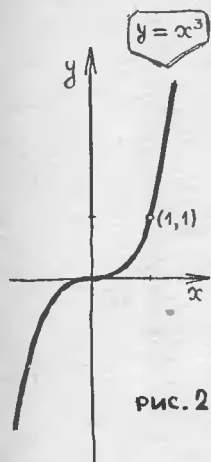


рис. 2

парабола $y = x^2$, справа от начала координат все время поднимается вверх (рис. 2).

Для отрицательных значений x кривая $y = x^3$ ведет себя иначе, чем кривая $y = x^2$: при отрицательных x значения x^3 тоже отрицательны, поэтому кривая уходит вниз (см. рис. 2). Таким образом, в целом кубическая парабола совсем непохожа на квадратную.

Левую половину графика $y = x^3$ можно получить из правой его половины с помощью симметрии, правда, другого рода, чем та, которую мы рассматривали на стр. 12—14. Возьмем какую-нибудь точку M на правой половине графика $y = x^3$ (рис. 3). Если a — абсцисса этой точки, то ее ордината b равна a^3 ($b = f(a) = a^3$). Найдем теперь точку графика, соответствующую противоположному значению абсциссы, $x = -a$. Ордината такой точки равна $(-a)^3$, т. е. $-a^3$, или $-b$. Итак, для каждой точки $M(a, b)$ на правой половине графика $y = x^3$ на левой его половине найдется точка $M'(-a, -b)$. Очевидно (см. рис. 3), точка M' симметрична точке M относительно начала координат. Значит, всю левую половину графика можно получить из правой симметричным отражением относительно начала координат.

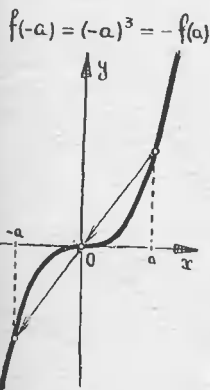


Рис 3

У п р а ж н е н и я

1. Какие из графиков следующих функций имеют центр симметрии, какие ось симметрии:

$$y = x^4; y = x^5; y = x^7; y = x^{16}?$$

2. Докажите, что график функции $y = 1/x^3$ симметричен относительно начала координат.

Р е ш е н и е. Рассмотрим две точки кривой $y = 1/x^3$ с абсциссами $x = a$ и $x = -a$. Ордината первой равна $1/a^3$, ордината второй $1/(-a)^3 = -1/a^3$.

Значит, для каждой точки $M(a, 1/a^3)$ нашей кривой найдется точка $M_1(-a, -1/a^3)$, симметричная первой относительно начала координат. Следовательно, вся кривая $y = 1/x^3$ симметрична относительно начала координат.

3. Какие из следующих функций являются четными и какие нечетными*):

$$y = x^3 |x|; \quad y = |x^3| + x; \quad y = \frac{x}{|x|};$$

$$y = |x - x^2|; \quad y = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^4;$$

$$y = \frac{1}{|2x - x^2|} - \frac{1}{|2x + x^2|}; \quad y = (x^3 + 1)^2;$$

$$y = (x^2 + 1)^3; \quad y = \frac{1}{x + \frac{1}{x + 1/x}};$$

$$y = (3 - x)^5 - (3 + x)^5?$$

$$y = (x) \cdot (x^2) = x^3$$

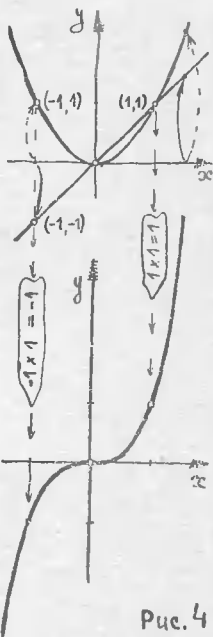


Рис. 4

[2.] Посмотрим теперь, чем отличаются друг от друга графики $y = x^3$ и $y = x^2$ для положительных значений x . Для этого представим x^3 как $x^2 \cdot x$ и получим график $y = x^3$, «умножая» график $y = x^2$ на график $y = x$ (рис. 4).

При $x = 1$ значение x^3 равно значению x^2 : точка $(1, 1)$ — общая для обоих графиков. Пойдем теперь от этой точки направо и налево.

Справа от точки $(1, 1)$ значения функции $y = x^3$ получаются из значений функции $y = x^2$ умножением на числа, большие единицы. Поэтому для $x > 1$ значения x^3 больше, чем x^2 — справа от точки $(1, 1)$ кубическая парабола $y = x^3$ идет выше параболы $y = x^2$, все больше и больше ее обгоняя (так как приходится умножать x^2 на все большие и большие числа).

Если пойти от точки $(1, 1)$ налево, к $x = 0$, то значения x^3 будут получаться из значений x^2 умножением на число, меньшее единицы. Поэтому слева от точки $(1, 1)$ кубическая парабола лежит ниже параболы $y = x^2$, еще более тесно прилегая в начале координат к оси абсцисс (рис. 5).

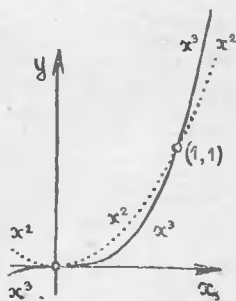


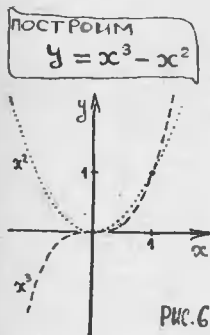
Рис. 5

*) Определение четной функции — на стр. 13, определение нечетной — на стр. 71.

Вопросы

При каком x значение x^3 будет больше, чем значение x^2 в 100 раз? в 1000 раз? На сколько выше окажется при этих x кубическая парабола, чем квадратная? Поднимется ли при каком-нибудь x кубическая парабола выше, чем квадратная на 100 единиц? на 1 000 000?

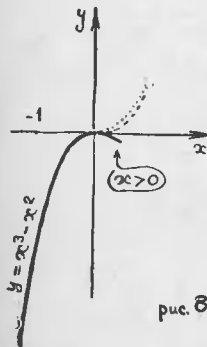
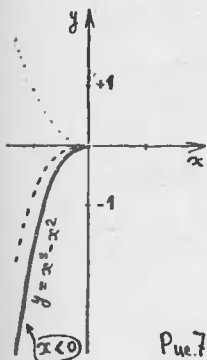
Если считать, что толщина карандашной линии равна 0,1 мм и принять за единицу масштаба 1 см, то при $x = 0,1$ парабола $y = x^2$ на глаз сливается с осью Ox . Во сколько раз ближе к оси Ox находится при этом значении x кубическая парабола?



[3.] Получая x^3 из x^2 умножением на x , мы видим, во сколько раз ордината $y = x^3$ больше (или меньше), чем ордината $y = x^2$. Постараемся теперь наглядно изобразить, на сколько значения функции $y = x^3$ больше (или меньше), чем значения $y = x^2$. Для этого нарисуем график функции $y = x^3 - x^2$, ординаты которого можно получить, вычитая из ординат графика $y = x^3$ ординаты графика $y = x^2$ (рис. 6).

При $x = 0$ и x^3 и x^2 обращаются в нуль, значит, график функции $y = x^3 - x^2$ проходит через начало координат. Слева от начала координат из отрицательного x^3 вычитается положительный x^2 ; разность $x^3 - x^2$ отрицательна, так что график $y = x^3 - x^2$ идет ниже оси Ox (и даже ниже, чем график $y = x^3$; см. рис. 7).

Справа от начала координат дело сложнее: обе функции положительны, и результат зависит от того, что больше по абсолютной величине: x^3 или x^2 . Сначала x^2 больше, чем x^3 ; поэтому кривая $y = x^3 - x^2$ около начала координат расположена ниже оси Ox (рис. 8). Постепенно x^3 начинает расти все быстрее и к $x = 1$ догоняет по своему значению функцию $y = x^2$. Поэтому кривая $y = x^3 - x^2$, где-то между $x = 0$ и $x = 1$ начинает



подниматься и при $x = 1$ пересекает ось абсцисс (рис. 9).

В дальнейшем, после $x = 1$ значения функции $y = x^3 - x^2$ увеличиваются, график идет вверх и для больших x , когда x^2 по сравнению с x^3 мал, по форме почти не отличается от графика $y = x^3$ (рис. 10).

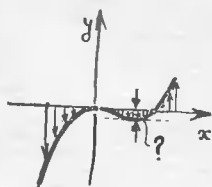


рис. 9

У п р а ж н е н и я

1. Рассматривая значения функции $y = x^3 - x^2$, можно приблизительно определить, при каком x эти значения начинают увеличиваться. Попробуйте найти это значение, хотя бы с точностью до 0,1 (т. е. один знак после запятой). Мы потом сможем найти это значение точно. Как раз на этом месте и находится нижняя точка «впадины» графика.

2. Решите неравенства:

$$x^3 - x^2 > 0, \quad x^3 - x^2 \leq 0.$$

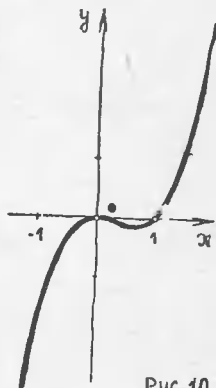


Рис 10

Сравним теперь поведение функции $y = x^3$ и $y = cx^2$ и построим график функции $y = x^3 - cx^2$. Возьмем сначала маленькое значение c , например, $c = 0,3$. Вид графика зависит от того, как расположены друг относительно друга два графика $y = x^3$ и $y = 0,3x^2$. На рис. 11 легко понять, что построение графика вдали от начала координат, т. е. для значений x , больших по абсолютной величине, не вызовет затруднений. Однако на рисунке не разглядишь, как расположены графики $y = x^3$ и $y = 0,3x^2$ вблизи начала координат: какая из этих парабол лежит ниже, а ведь от этого зависит, будет ли на результирующем графике впадина или не будет.

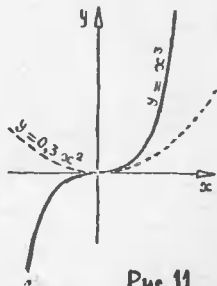


Рис.11.

Чтобы уточнить этот вопрос, решим неравенство:

$$x^3 > 0,3x^2, \text{ или } x^2(x - 0,3) > 0.$$

Теперь ясно, что вблизи начала координат, а именно для положительных значений x , меньших 0,3, кубическая

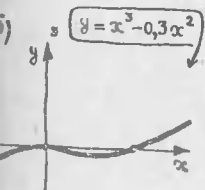


Рис. 12

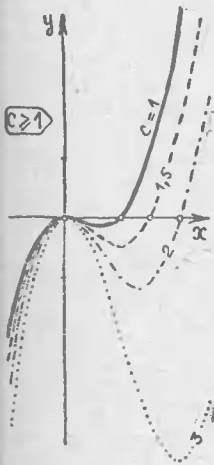


Рис. 13 а.

парабола лежит ниже параболы $y = 0,3x^2$ (см. рис. 12, а). Поэтому мы можем теперь нарисовать неясное нам ранее место рис. 11 в увеличенном виде и построить график разности $y = x^3 - 0,3x^2$.

На этом графике, как и на графике $y = x^3 - x^2$, будет впадина, только более узкая (рис. 12, б).

У п р а ж н е н и я

1) Найдите ширину «впадины» для графиков функции:

а) $y = x^3 - 0,01x^2$;

б) $y = x^3 - 1000x^2$.

2) Будет ли впадина на графике

$$y = x^3 + 0,001x^2?$$

3) Укажите, после какого x парабола $y = x^2$ будет лежать выше параболы $y = 50x^2$; параболы $y = 10\,000x^2$.

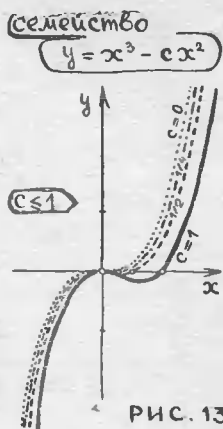
Прodelав эти упражнения, Вы поймете, что графики функций $y = x^3 - cx^2$ при любом $c > 0$ имеют один и тот же характер, одну и ту же форму: слева от начала координат график идет вниз, в начале координат касается оси абсцисс, далее заворачивает опять вниз, а потом вверх; впадина, получающаяся при этом на графике, тем больше, чем больше c (рис. 13, а).

Если мы будем постепенно уменьшать c , то впадина постепенно заравнивается и в конце концов, когда c станет равным нулю, заравняется совсем, и график превратится в обычную кубическую параболу $y = x^3$ (рис. 13, б).

[4.] Теперь мы можем сделать общий вывод относительно того, как ведет себя функция $y = x^3$ для положительных значений x по сравнению с любой функцией вида $y = cx^2$. Для x , близких к нулю,

функция $y = x^3$ будет меньше любой функции $y = cx^2$, даже если коэффициент c будет очень мал. Для больших значений x , напротив, функция $y = x^3$ будет больше, чем всякая функция вида $y = cx^2$, даже если коэффициент c очень велик.

Можно сказать иначе: парабола третьего порядка в начале координат прилегает к оси абсцисс настолько тесно, что между параболой и осью не может пройти не только ни одна прямая, но и ни одна парабола $y = cx^2$, каким бы малым ни был коэффициент c . Наоборот, при больших значениях x (для $x > 0$) парабола $y = x^3$ «перегоняет» любую параболу $y = cx^2$ с любым (даже очень большим) коэффициентом c .



Упражнения

1. Нарисуйте графики функций:

$$y = -x^3;$$

$$y = |x^3|;$$

$$y = 1 + x^3;$$

$$y = (2 + x)^3;$$

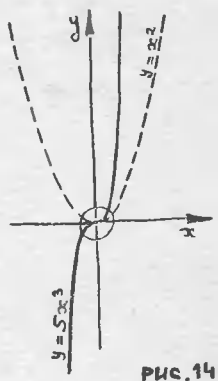
$$y = (2 - x)^3;$$

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x.$$

2. На рис. 14 изображены параболы $y = 5x^3$ и $y = x^2$; из-за небольшого масштаба рисунка не ясно взаимное расположение графиков около нуля.

Посмотрите на этот чертеж под «микроскопом» и нарисуйте, что Вы там увидите: область, отмеченную маленьким кружочком, нарисуйте в увеличенном масштабе.

3. Докажите, что график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ всегда имеет центр симметрии.



[5.] Функции $y = x^n$ при $n > 3$ мы не будем разбирать столь подробно, как $y = x^3$. Графики этих функций по внешнему виду напоминают либо параболу $y = x^2$ (при n четном), либо параболу $y = x^3$ (при n нечетном).

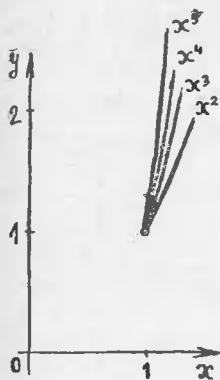


Рис. 15

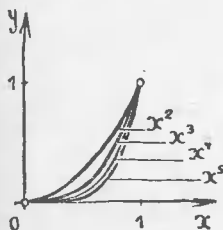


Рис. 16

Понятно, что функция $y = x^4$ для больших (по абсолютной величине) значений x растет еще быстрее, чем $y = x^3$, а функция $y = x^5$ — быстрее, чем $y = x^4$. Вообще, чем больше n , тем быстрее растет степенная функция $y = x^n$ для больших значений x (рис. 15).

Когда x приближается к нулю, значения всех степенных функций $y = x^n$ тоже приближаются к нулю, причем тем быстрее, чем больше n . Графики всех степенных функций $y = x^n$ (начиная с $n = 2$) касаются в начале координат оси абсцисс, прилегая к ней тем тесней, чем больше n (рис. 16).

При большом n график функции $y = x^n$ нарисовать с соблюдением масштаба практически невозможно. Почти на всем отрезке от 0 до 1 значения функции очень малы и график $y = x^n$ сольется с осью Ox . На маленьком участке около $x = 1$ функция подрастает до 1 и затем быстро вырастает настолько, что график выходит за пределы любого листа бумаги *). Пусть, например, $n = 100$. Попробуем нарисовать график $y = x^{100}$, начиная от $x = 1$. При $x = 2$ получим $y = 2^{100}$. Это слишком много! Возьмем $x = 1,1$. Тогда $y = (1,1)^{100}$. Это все еще большое число. В самом деле: $(1,1)^{100} = [(1,1)^{10}]^{10}$.

Воспользуемся теперь неравенством $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$ (справедливым при $\alpha > 0$) **). Мы получим $(1,1)^{10} > 1 + 10 \cdot 0,1 = 2$. Итак, $(1,1)^{100} > 2^{10} > 1000$.

Таким образом, участок от 1 до 1,1 все еще слишком велик для построения графика $y = x^{100}$. Только на участке длиной в одну-две сотых значения функции отличаются друг от друга не слишком сильно.

Выберем теперь масштаб по оси Ox в 100 раз больше, чем по оси Oy . График $y = x^{100}$ растянется

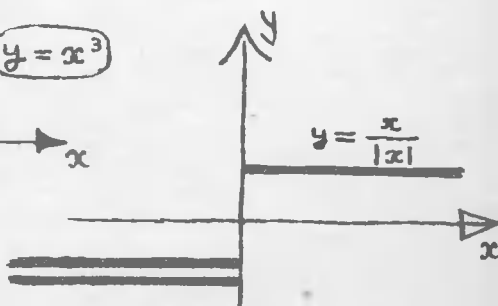
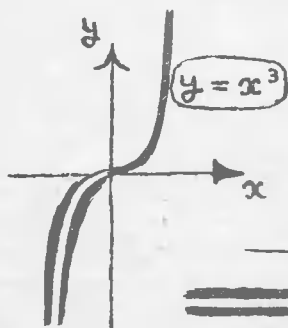
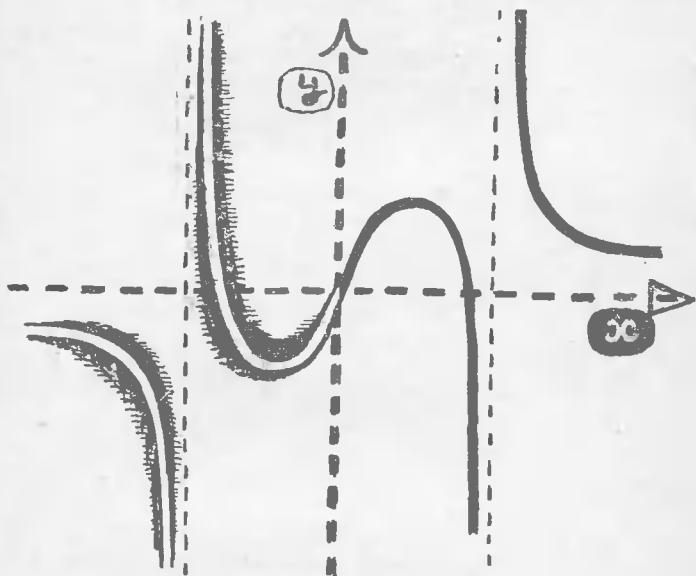
*) Для отрицательных значений x все обстоит аналогично.

**) $(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)(1 + \alpha) \dots (1 + \alpha) =$
 $= \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1}_n + \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1 \cdot \alpha}_{n-1} + \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1 \cdot \alpha}_{n-1} +$
 $+ \dots + \underbrace{1 \cdot 1 \dots 1 \cdot \alpha}_{n-1} + \dots = 1 + n\alpha + \dots$

Обозначенные через ... невыписанные члены все положительные.

$$f(-a) = -f(a)$$

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если при всяком a выполняется равенство $f(-a) = -f(a)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.



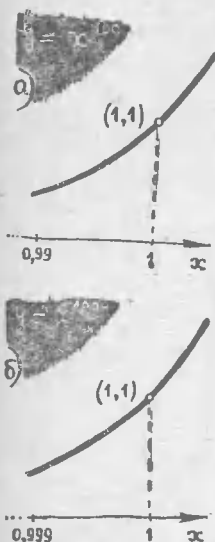


Рис. 17

при этом в горизонтальном направлении в 100 раз и будет иметь вид, изображенный на рис. 17,а.

Если n еще больше, то участок для аккуратного построения графика придется выбирать еще меньшим. На рис. 17, б Вы видите график $y = x^{1000}$, растянутый в 1000 раз по оси Ox . Замечательно, что получились две одинаковые кривые!).

У п р а ж н е н и я

1. Постройте график функции

$$y = x^2 - x^4$$

двумя способами:

- вычитанием графиков $y = x^2$ и $y = x^4$;
 - разложив многочлен $x^2 - x^4$ на множители.
2. а) Даны две возрастающие последовательности

$$a_n: 0,001; 0,004; 0,009; \dots$$

$$b_n: 100; 300; 500; \dots$$

Может ли первая последовательность перегнать вторую (т. е. может ли при каком-нибудь n выполняться неравенство $a_n > b_n$)?

б) Ответьте на этот же вопрос для последовательностей

$$a_n: 0,001; 0,008; 0,027; \dots,$$

$$b_n: 100; 400; 900; \dots$$

3. Определите, сколько решений имеют следующие уравнения:

$$\text{а) } x^3 = x^2 + 1; \text{ б) } x^3 = x + 1;$$

$$\text{в) } x^3 + 0,1 = 10x; \text{ г) } x^5 - x - 1 = 0.$$

4. а) Нарисуйте графики функций

$$y = x^3 - x; y = x^3 + x.$$

б) Подберите a и b так, чтобы на графике функции $y = ax^3 + bx$ была впадина шириной в 10 и глубиной не меньше 100.

[6.] Говоря о поведении степенных функций $y = x^n$ для малых значений аргумента x , мы отмечали, что графики этих функций в начале координат касаются оси Ox . Остановимся на этом вопросе, чтобы уточнить смысл выражения: прямая касается кривой.

В самом деле, почему мы говорим, что ось Ox касается и параболы $y = x^2$ и

*) Разница между кривыми, конечно, есть, но она слишком мала, чтобы ее можно было заметить на графике.

кубической параболы $y = x^3$ (хотя параболу $y = x^2$ ось Ox «протыкает насквозь» (см. рис. 18)?

Все зависит от того, какой смысл придать выражению «прямая касается кривой», что считать основным, определяющим свойством касательной, какое дать определение этому понятию. До сих пор в курсе школьной геометрии мы знакомились только с одной-единственной кривой — с окружностью и знали только определение касательной к окружности.

Попробуем понять, чем отличается касательная к окружности от секущей. Нам сразу бросаются в глаза два следующих обстоятельства: 1) касательная имеет с окружностью только одну общую точку, а секущая — две (рис. 19); 2) касательная около точки касания M «прилегает» к кривой ближе, чем секущая. (Поэтому даже если на чертеже поместилась не вся окружность, и мы не видим, есть ли на самом деле вторая общая точка, мы можем отличить касательную от секущей; рис. 20.)

Какое же из этих двух обстоятельств считать более важным (главным), какое следует положить в основу определения касательной к кривой вообще (а не только к окружности)?

Более простым является первое. Можно попробовать назвать касательной прямую, имеющую с кривой только одну общую точку. Однако, приняв такое определение, мы будем часто приходить в противоречие со здравым смыслом и с нашим наглядным представлением о касательной.

Например, через вершину параболы $y = x^2$, кроме оси абсцисс, проходит еще одна прямая, имеющая с параболой только одну общую точку — это ось Oy ; однако ось Oy не называется касательной к параболе $y = x^2$ (см. рис. 18).

На рис. 21 положение еще хуже: все прямые, лежащие внутри угла AOB ,

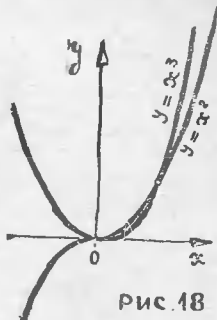


Рис. 18

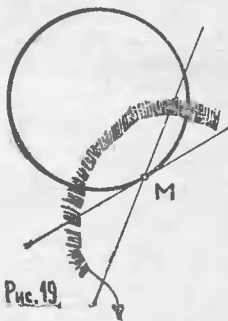


Рис. 19



Рис. 20

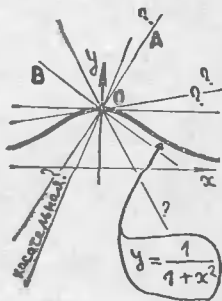


Рис. 21

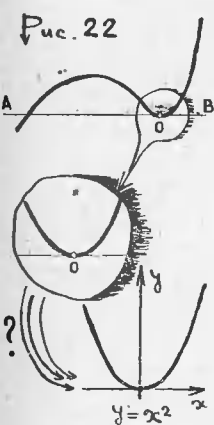


Рис. 23

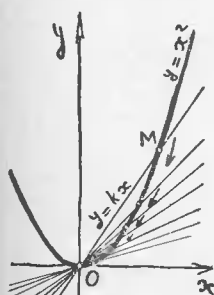


Рис. 24

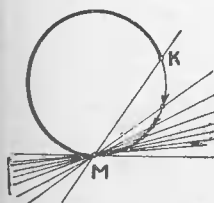


Рис. 25

пересекают кривую только один раз! С другой стороны, на рис. 22 прямая AB имеет с кривой две общие точки, но, очевидно, имеет полное право называться касательной. Действительно, если «обрезав» чертеж, посмотреть, на участок кривой вблизи точки касания O , то расположение кривой и прямой будет по своему характеру совершенно таким, как расположение параболы относительно оси Ox (рис. 23).

Значит, в качестве основного, определяющего свойства разумно выбрать то, что касательная тесно прилегает к кривой.

Так, например, естественно считать, что кубическая параболa $y = x^3$ касается в начале координат оси Ox : параболa $y = x^3$ в начале координат тесно прилегает к оси Ox (еще тесней, чем параболa $y = x^2$).

Чтобы дать определение касательной, нам осталось сформулировать, что значит прямая «тесно прилегает» к кривой. Рассмотрим снова параболу $y = x^2$. Между осью Ox (прямой $y = 0$) и параболу не может пройти ни одна прямая: всякая прямая $y = kx$ (при $k > 0$) на некотором участке идет выше параболы и пересекает ее еще один раз.

Если, поворачивая прямую, уменьшать k , то вторая точка (точка M на рис. 24) приближается к первой (к точке O) и в конце концов сливается с ней. В этот момент прямая из секущей превращается в касательную.

То же самое можно увидеть в любом случае касания. На рис. 25 через точку M окружности проведена секущая MK . Если точку K приближать к M , то секущая поворачивается вокруг точки M и, в конце концов, когда точка K сольется с точкой M , превращается в касательную к окружности в точке M . При этом она других общих точек с окружностью иметь не будет. Но это обстоятельство является несущественным, второстепенным.

Итак, мы примем следующее определение касательной.

О п р е д е л е н и е. Пусть имеется некоторая кривая (L) и точка M на этой кривой (рис. 26). Проведем через точку M и еще какую-нибудь точку K кривой (L) прямую MK (такая прямая, проходящая через какие-нибудь две точки кривой, называется секущей; она может пересечь кривую и еще в каких-нибудь точках). Если теперь двигать точку K по кривой (L) так, чтобы она приближалась к точке M , то секущая MK будет поворачиваться вокруг точки M . Если в конце концов, когда точка K сольется с точкой M , прямая совпадает с некоторой определенной прямой MN (см. рис. 26), то эта прямая MN и называется касательной к кривой (L) в точке M .

Итак, существенным отличием прямой, касающейся некоторой кривой в точке M , от других прямых, проходящих через ту же точку, является то, что для касательной общая ее точка с кривой — точка касания является двойной, получается как результат слияния двух сближающихся точек пересечения.

Иногда в точке касания сливаются не две точки, а три (рис. 27).

З а м е ч а н и е 1. В определении ничего не говорится о числе общих точек кривой и касательной к ней. Это число может быть любым. На рис. 28, а вы видите прямую, касающуюся кривой (Γ) в точке M и пересекающую ее еще в двух точках, а на рис. 28, б прямую MN , которая касается кривой сразу в нескольких точках.

З а м е ч а н и е 2. В определении касательной предполагается, что точка K может приближаться к точке M любым способом. Во всех случаях секущая должна стремиться к одной и той же прямой, которая и называется касательной.

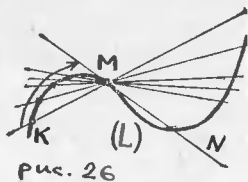


рис. 26

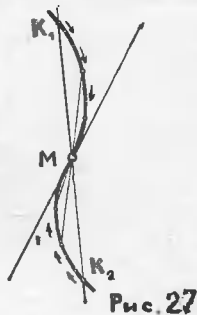


Рис. 27

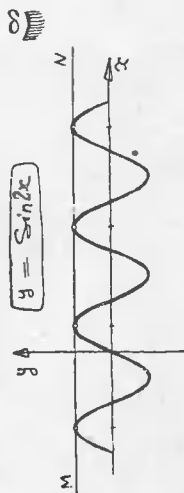
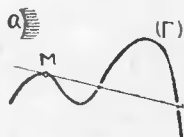


рис. 28

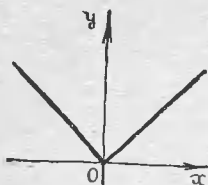


РИС. 29

Если при различных способах приближения K к M секущая стремится к разным прямым, то говорят, что кривая в этой точке не имеет касательной (например, график функции $y = |x|$ в точке $(0, 0)$ не имеет касательной; см. рис. 29).

У п р а ж н е н и я

1. Найти касательную в точке $O(0, 0)$ к параболе $y = x^2 + x$.

Р е ш е н и е. Возьмем на параболе некоторую точку M с координатами (a, b) . Очевидно, $b = a^2 + a$. Проведем прямую через точки O и M .

Уравнение этой прямой имеет вид $y = kx$. При $x = a$ имеем $y = a^2 + a$, значит, $k = a + 1$, и уравнение секущей есть $y = (a + 1)x$. Будем теперь приближать точку $M(a, b)$ к точке $O(0, 0)$. Когда точка M сольется с точкой O , ее абсцисса a обратится в нуль, а секущая $y = (1 + a)x$ превратится в касательную $y = x$.

О т в е т. Уравнение касательной $y = x$.

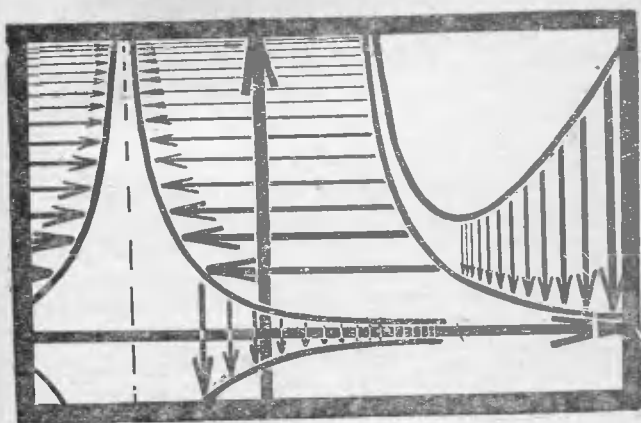
2. Найдите касательную к параболе $y = x^2 + x$ в точке $A(1, 2)$. \oplus

3. Какая из прямых, параллельных прямой $y = x$, касается параболы $y = -x^2 + 1$? \oplus

4. а) Докажите, что прямая $y = 0$ есть касательная к кривой $y = x^3 + x^2$ в начале координат.

б) Найти касательную в точке $O(0, 0)$ к кривой $y = x^3 - 2x$.

5. Для каких кубических многочленов $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ось Ox служит касательной в начале координат?



§ 7. Рациональные функции

[1.] Рациональные функции — это функции, которые можно представить в виде частного двух многочленов.

Примеры рациональных функций:

$$y = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^6 + 1}; \quad y = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2 + 3};$$

$$y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}^*).$$

Разобранная в § 5 дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ является рациональной. Она представляет собой частное двух линейных функций — многочленов первой степени.

Если функция $y = f(x)$ представляет собой частное двух многочленов степени выше первой, то график ее будет, как

*) $y = x^2 + 3 - \frac{1}{x-1}$ — рациональная функция, так как ее можно записать в виде отношения двух многочленов:

$$x^2 + 3 - \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2 + 3)(x-1) - 1}{x-1}.$$

правило, более сложен, и построить его точно, со всеми деталями бывает иногда трудно. Однако часто достаточно применить приемы, аналогичные тем, с которыми мы уже познакомились.

[2.] Разберем несколько примеров. Построим график функции $y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$.

Обратим прежде всего внимание на то, что при $x = -1$ функция не определена (так как знаменатель дроби $x^2 + 2x + 1$ при $x = -1$ равен нулю). При x , близких к -1 , числитель дроби $x - 1$ приблизительно равен -2 , а знаменатель $(x + 1)^2$ положителен и мал по абсолютной величине. Значит, вся дробь $\frac{x-1}{(x+1)^2}$ будет отрицательна и велика по абсолютной величине (и тем больше, чем ближе x к значению $x = -1$). Вывод: график распадается на две ветви (поскольку на нем нет точки с абсциссой, равной -1); обе ветви уходят вниз, когда x приближается к -1 (рис. 1).

$$y = \frac{x-1}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

Знаменатель = 0 при $x = -1$

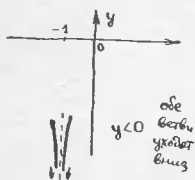


Рис. 1

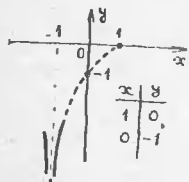


Рис. 2

Обратим внимание на числитель. Он обращается в нуль при $x = 1$. Значит, в точке $x = 1$ график пересекает ось абсцисс. Нарисовав еще точку пересечения с осью Oy (при $x = 0, y = -1$), мы можем примерно представить себе ход графика в средней его части (рис. 2).

Остается посмотреть, что делается с функцией при больших по абсолютной величине значениях x .

Если x положительно и увеличивается, то числитель и знаменатель дроби увеличиваются. Но так как в числителе стоит x в первой степени, а в знаменателе есть член x^2 , то знаменатель при больших x увеличивается гораздо быстрее, чем числитель. Поэтому при неограниченном увеличении x функция $y = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$ будет все

больше и больше приближаться к нулю. Таким образом, правая ветвь графика правее точки $x = 1$ немного поднимется над осью абсцисс (рис. 3), а потом опять начнет опускаться и будет приближаться к оси Ox .

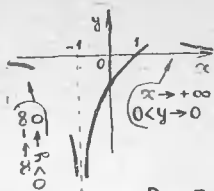


Рис. 3.

Аналогичные соображения покажут нам, что левая ветвь кривой при увеличении x по абсолютной величине тоже приближается к оси абсцисс, только не сверху, а снизу (рис. 3). Позже мы покажем (см. стр. 81), как можно точно найти место наивысшего подъема правой ветви графика.

По отмеченным деталям можно найти общий вид графика (рис. 4).

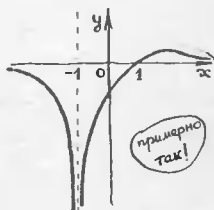


Рис. 4

[3.] Построим график функции

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Для удобства начертим сначала графики числителя $y = x$ и знаменателя $y = x^2 + 1$ (рис. 5). Для построения графика нашей функции нужно значения числителя делить на значения знаменателя.

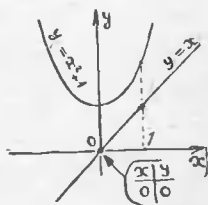


Рис. 5

При $x = 0$ числитель равен нулю — график проходит через начало координат. Пойдем теперь направо (т. е. рассмотрим положительные значения аргумента). Так как величина x^2 много меньше x при очень маленьких x , то при выходе из начала координат знаменатель будет некоторое время почти равен единице (немного больше, чем единица); поэтому вся функция будет примерно равна числителю x (чуть-чуть меньше числителя) — график пойдет рядом с прямой $y = x$, постепенно от нее отставая (рис. 6).

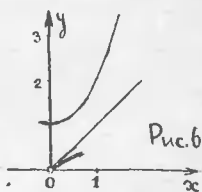


Рис. 6

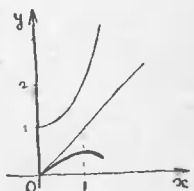


Рис. 7

Вскоре, однако, $x^2 + 1$ начинает расти быстрее, чем x , знаменатель обгоняет числитель и дробь начинает уменьшаться — график заворачивает вниз (рис. 7).

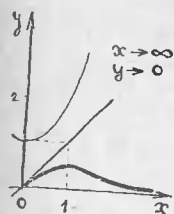


Рис. 8

Так как в числителе стоит x в первой степени, а в знаменателе есть член с x^2 , то при больших x знаменатель растет быстрее числителя. Поэтому дробь с увеличением x становится все более маленькой — график приближается к оси абсцисс (рис. 8).

Левую половину графика можно получить, заметив, что данная функция — нечетная. Общий вид графика показан на рис. 9.

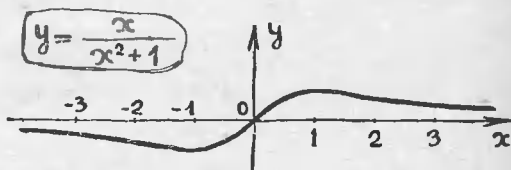


Рис. 9

[4.] Вернемся снова к построенному нами графику функции $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ и разберем на этом примере еще один интересный вопрос. Попробуем точно найти самую высокую точку правой половины графика (а значит, конечно, и самую низкую точку левой половины).

Очевидно, что наша кривая не может подняться очень высоко, так как знаменатель $x^2 + 1$ довольно быстро начинает обгонять числитель x . Посмотрим, может ли она подняться на высоту, равную 1, т. е. может ли при каком-нибудь x значение y быть равным 1.

Так как $y = \frac{x}{x^2 + 1}$, то для этого нужно решить уравнение $\frac{x}{x^2 + 1} = 1$ или уравнение $x^2 - x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней. (Проверьте!) Значит, на графике нет точек с ордина-

той $y = 1$ — график не пересекает прямой $y = 1$ (рис. 10).

Посмотрим, поднимается ли кривая на высоту, равную $1/3$. Для этого нужно, чтобы было $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$ или $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Это уравнение имеет два действительных корня (проверьте!), и, значит, наш график имеет две точки с ординатами, равными $1/3$, т. е. пересекает прямую $y = 1/3$ в двух точках (рис. 11).

Чтобы найти самую высокую точку, надо узнать, при каком самом большом h уравнение $\frac{x}{x^2+1} = h$ будет иметь решение

(рис. 12). Уравнение $\frac{x}{x^2+1} = h$ заменим квадратным: $hx^2 - x + h = 0$. Это уравнение имеет решение, когда $1 - 4h^2 \geq 0$.

Отсюда находим самую большую высоту, на которую поднимается график: $h = 1/2$.

Найдем, при каком x это большое значение y достигается. Так как $y = \frac{x}{x^2+1}$, то $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}$, $x^2 - 2x + 1 = 0^*$, откуда $x = 1$.

Итак, самая высокая точка графика — это точка $(1, 1/2)$.

У п р а ж н е н и е

Найдите самую большую ординату графика $y = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ (см. п. 2).

[5.] Построим график функции

$$y = \frac{x^2+1}{x}.$$

Общий вид его легко нарисовать, если заметить, что

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{x/(x^2+1)},$$

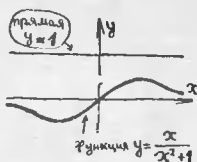


Рис. 10

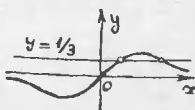


Рис. 11

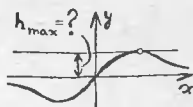


Рис. 12

^{*}) Случайно ли получился полный квадрат?

и, следовательно, мы пришли к задаче, которую уже решали: зная график $y = f(x)$, построить график $y = \frac{1}{f(x)}$ (см. стр. 54—55).

Получаем примерно такую картину (рис. 13).

Построим этот график другим способом. При этом выяснится еще одна его интересная особенность.

Поделим числитель на знаменатель:

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}.$$

Теперь построим график $y = x + 1/x$ «сложением» известных нам графиков $y = x$ и $y = 1/x$ (рис. 14).

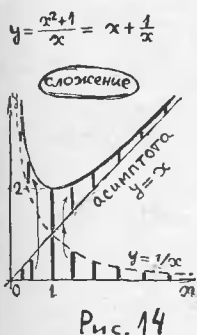
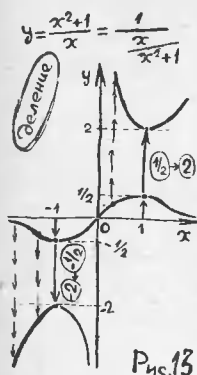
Мы видели, что график $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту — ось Oy , к которой график приближается, когда x уменьшается по абсолютной величине. Теперь видно, что этот график имеет еще наклонную асимптоту — прямую $y = x$ (к этой прямой он приближается, когда x неограниченно возрастает).

Упражнения

1. Проверьте, что график $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ симметричен относительно начала координат.

2. Найдите координаты самой низкой точки правой ветви графика $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Ответ на второе упражнение ясен из первого способа построения этого графика (см. рис. 13): самая низкая точка графика $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ получается при том x , при котором на графике $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ получается самая высокая, т. е. при $x = 1$. Наименьшее значение ординаты графика $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ равно, таким образом, 2.



Мы получили интересное неравенство: для положительных x (речь шла о правой части графика) всегда $x + 1/x \geq 2$.

Задачи

1. Докажите неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ для } x > 0 \quad (1)$$

непосредственно.

2. Докажите неравенство

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Оно выражает такой факт: «среднее арифметическое двух положительных чисел a и b всегда больше или равно среднему геометрическому этих же чисел».

Неравенство (1) есть частный случай неравенства (2). При каких a и b ?

3. Неравенство $x + 1/x \geq 2$ используется при решении известной задачи о «честном купце». Один честный купец знал, что весы, на которых он взвешивает товар, неточны, потому что одно коромысло немного длиннее другого (в то время еще пользовались весами с двумя чашками, см. рис. 15). Что делать? Обвешивать покупателей — грех, но и себя обижать не хочется. Купец решил, что половину товара каждому покупателю он будет взвешивать на одной чашке, а вторую половину — на другой чашке.

Спрашивается, что при этом получилось: оказался ли купец в выигрыше или в проигрыше?



Рис. 15

[6.] В следующем примере возьмем функцию $y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$.

Она представлена в виде суммы двух функций, и, конечно, можно строить ее график сложением графиков $y = \frac{1}{x+1}$ и $y = \frac{1}{x-1}$. Но здесь, пожалуй, можно и сразу выяснить общий вид графика из таких соображений:

а) функция не определена при $x = 1$ и $x = -1$, значит, кривая распадается на три ветви (рис. 16);

б) при приближении к $x = 1$ второе слагаемое, а значит, и вся функция растет

$$y = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

разрывы в точках
 $x = -1$
 $x = +1$

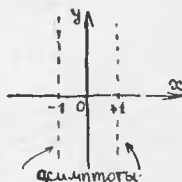


Рис. 16.

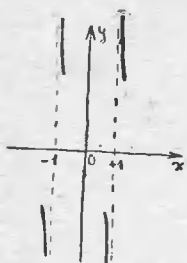


Рис. 17

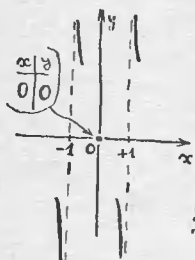


Рис. 18

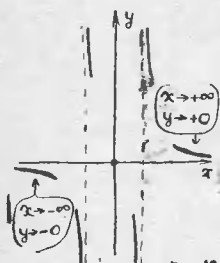


Рис. 19

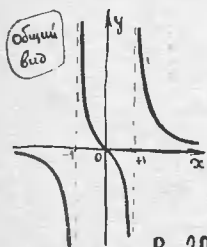


Рис. 20

по абсолютной величине — значит, ветви графика удаляются от оси абсцисс, приближаясь к прямой $x = 1$. При этом справа от $x = 1$ кривая идет вверх, а слева — вниз (рис. 17).

Аналогичная картина получается около прямой $x = -1$;

в) $y = 0$ при $x = 0$; кривая проходит через начало координат (рис. 18);

г) для больших по абсолютной величине значений x оба слагаемых малы по абсолютной величине — обе крайние ветви графика приближаются к оси абсцисс: правая сверху, а левая снизу (рис. 19).

Объединив все эти сведения, получим общий вид графика (рис. 20).

Покажите, что этот график симметричен относительно начала координат.

[7.] Разобранные примеры показывают, что даже при построении одного и того же графика можно пользоваться различными приемами. Поэтому сейчас мы дадим еще несколько примеров на построение графиков и не будем лишать Вас удовольствия самим подобрать подходящие приемы для их построения.

Упражнения

1. Постройте график

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

На сколько «кусков» распадается кривая?

2. а) Постройте график

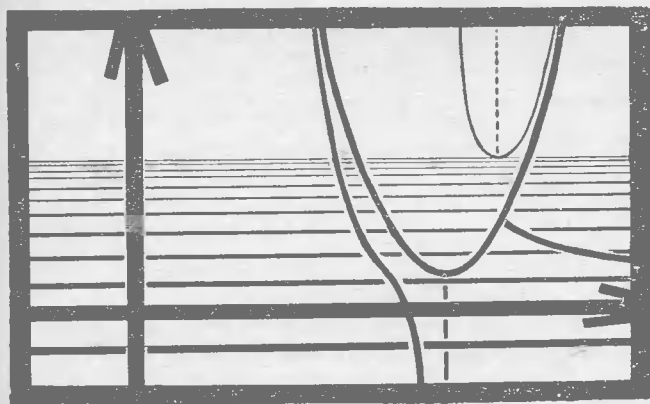
$$y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$

б) Постройте график $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Укажите ось симметрии этой кривой.

3. Постройте графики:

а) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$;

б) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x+1)}$; в) $y = x + \frac{1}{x^2}$.



Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте графики функций:

а) $y = x(1 - x) - 2$; б) $y = x(1 - x)(x - 2)$;

в) $y = \frac{4 - x}{x^3 - 4x}$;

г) $y = \frac{2|x| - 3}{3|x| - 2}$; д) $y = \frac{1}{4x^2 - 8x - 5}$; е) $y = \frac{1}{x^3 - 5x}$;

ж) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1}$; з) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$; ⊕

и) $y = (2x^2 + x - 1)^2$;

к) $y = |x| + \frac{1}{1 + x^2}$; л) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 3}$; м) $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2}$;

н) $y = (x - 3)|x + 1|$; о) $y = |x - 2| + 2|x| + |x + 2|$;

п) $y = \left[\frac{1}{x} \right]$; р) $y = \frac{|x + 1| - x}{|x - 2| + 3}$; с) $y = \frac{x}{[x]}$; ⊕

т) Постройте графики дробно-линейных функций вида

$$y = \frac{3x + a}{2x + 2}$$

для различных значений a .

2. Функция $y = f(x)$ определена следующим правилом:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$



Эта функция часто встречается, и потому для нее есть специальное обозначение $y = \text{sgn } x$ (читается «сигнум икс» — по-латыни signum — это «знак»). График этой функции изображен на рис. 1. Функцию $\text{sign } x$ можно

для $x \neq 0$ задать формулой $y = \frac{x}{|x|}$ (*). Нарисуйте графики функций:

Рис. 1

$$y = \text{sgn}^2 x; y = (x - 1) \text{sgn } x; y = x^2 \text{sgn } x.$$

3. Общий вид графика функции, являющейся частным от деления одного квадратного трехчлена на другой:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q},$$

зависит от того, сколько корней и какие корни будут иметь числитель и знаменатель.

а) Постройте графики функций:

$$y = \frac{4x^2 - 8x + 3}{x - x^2}, \quad y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2}, \quad y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - x - 6}.$$

б) Какой вид имеет график функции $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$, если оба корня числителя меньше корней знаменателя? ⊕

в) Разберите все возможные случаи и нарисуйте возможные типы графиков у функций вида $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

Постарайтесь не пропустить ни одного случая и приведите по примеру на каждый тип.

4. Постройте график функции $y = \sqrt{3}x$.

а) Докажите, что он не может пройти ни через одну точку, координаты которой — целые числа, кроме точки (0, 0).

Если Вы возьмете за единицу масштаба одну клеточку, то такими «целочисленными» точками будут вершины клеток. Возьмите начало координат поближе к левому нижнему углу тетради и проведите аккуратно прямую $y = \sqrt{3}x$. (Под каким углом к оси Ox ее надо провести?) Некоторые из целочисленных точек окажутся очень близко от этой прямой. Пользуясь этим, найдите приближенные значения для $\sqrt{3}$ в виде обыкновенных дробей. Сравните полученные значения с табличным: $\sqrt{3} \approx 1,7321$.

б) Трудная задача: докажите, что найдется целочисленная точка, отстоящая от прямой $y = \sqrt{3}x$ на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{1000}$ (**).

*) Почему только для $x \neq 0$?

**) Число $\frac{1}{1000}$ можно заменить любым другим числом. Тогда будет доказано, что какое бы малое число ни взять, найдется точка с целыми координатами, отстоящая от прямой $y = \sqrt{3}x$ на расстояние, меньшее этого числа.

При решении задачи 5—9 используйте графики подходящим образом подобранных функций.

5. Сколько решений имеют уравнения:

а) $-x^2 + x - 1 = |x|$; б) $|3x^2 + 12x + 9| + x = 0$;

в) $\frac{1}{x^2 - x + 1} = x$; г) $|x - 1| + |x - 2| + |x + 1| + |x + 2| = 6$;

д) $x(x + 1)(x + 2) = 0,01$; е) $|x + 3| = |x + 2|(x^2 - 1)$;

ж) $[x] = x$ на участке $|x| < 3$; з) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 100$?

6. Решите уравнения:

а) $2x^2 - x - 1 = |x|$; б) $|2x^2 - x - 1| - x = 0$;

в) $|x| = |x - 1| + |x - 2|$.

7. а) Определите, сколько решений может иметь уравнение $|1 - |x|| = a$ при различных значениях a .

б) Тот же вопрос для уравнения $x^2 + \frac{1}{x} = a$ *).

8. Решите неравенства:

а) $\frac{2-x}{x^2+6x+5} > 0$; б) $x \leq |x^2 - x|$; в) $|x| + 2|x+1| > 3$.

9. Найдите наибольшее значение функции и определите, при каких значениях x оно достигается:

а) $y = x(a - x)$; б) $y = |x|(a - |x|)$; в) $y = x^2(a - x^2)$;

г) $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$; д) $y = 1 - \sqrt{2}x$ на участке $|x| \leq \sqrt{2}$;

е) $y = -x^2 + 2x - 2$ на участке $-5 \leq x \leq 0$;

ж) $y = \frac{x+3}{x-1}$ на участке $x \geq 2$.

10. Две дороги пересекаются под прямым углом. По направлению к перекрестку движутся две автомашины: по первой дороге — со скоростью 60 км/час, по второй — со скоростью 80 км/час. В 12 час. обе машины находились за 10 км от перекрестка.

В какой момент расстояние между машинами будет наименьшим? Где будут находиться машины в этот момент?

11. Среди всех прямоугольных треугольников с данным периметром p найти треугольник, имеющий наибольшую площадь.

12. Пусть $y = f(x)$ — четная функция, а $y = g(x)$ — нечетная функция. Что можно сказать о четности или нечетности функций:

$y = f(x) + g(x)$; $y = f(x) \cdot g(x)$; $y = |g(x)|$;

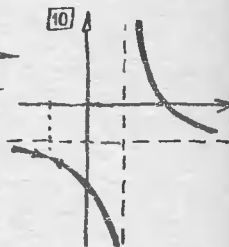
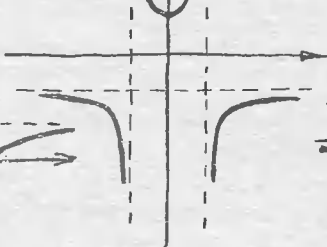
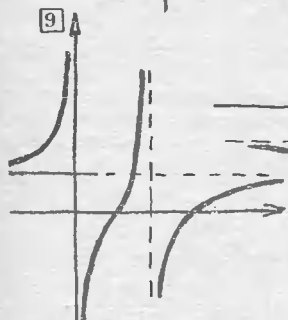
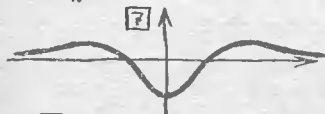
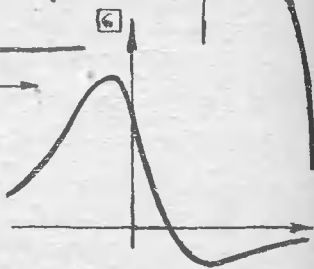
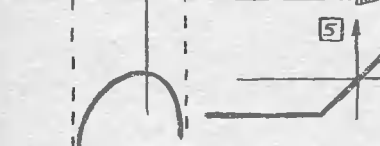
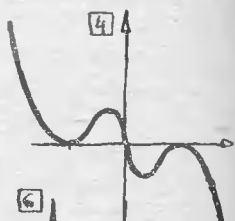
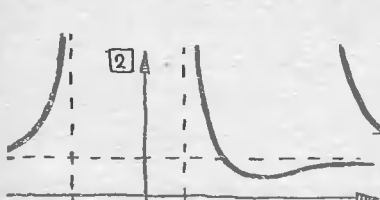
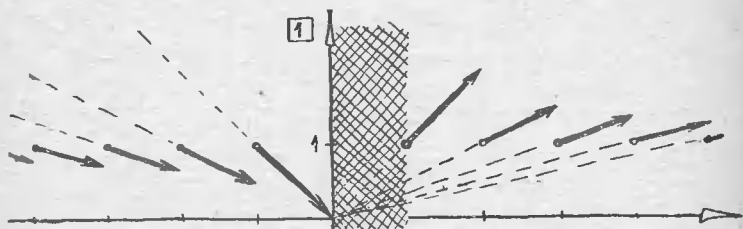
$y = f(x) - g(x)$; $y = f(|x|) - g(x)$; $y = f(x) - g(|x|)$?

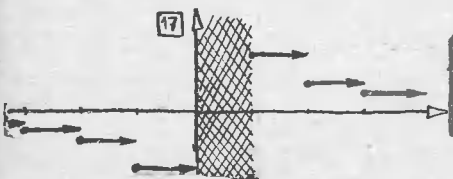
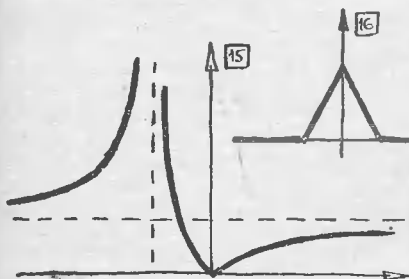
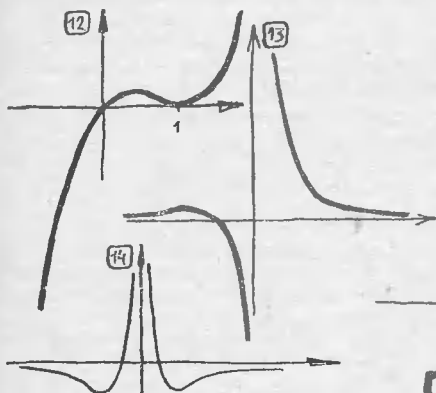
13. Найдите все четные и все нечетные функции вида:

а) $y = kx + b$; б) $y = \frac{px + q}{x + r}$; в) $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}$.

14. Функция $y = x^4 - x$ не является ни четной, ни нечетной функцией. Однако эту функцию легко представить в виде суммы четной функции $y = x^4$ и нечетной функции $y = -x$ (рис. 2).

*) Значение a , разделяющее разные случаи, найдите приближенно по графику.





$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x}$$

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} \quad \left| \frac{x}{x+1} \right|$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \boxed{2} \end{matrix} \quad -x^5 + 2x^3 - x$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \quad \frac{\frac{1}{4} - x^2}{x^2 + x^4}$$

$$0 \quad |1 - |x|| - |x| + 1$$

$$\frac{x+1}{x^3} \quad \frac{1}{[x]} \quad \frac{x}{[x]}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^3 - 2x^2 + x & (1+x)(1-|x|) \end{matrix}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x - 2} \quad |x - [x] - \frac{1}{2}|$$

$$\frac{1}{2}|x+1| - \frac{1}{2}|x-1|$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$$

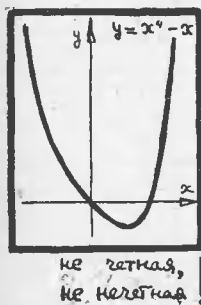
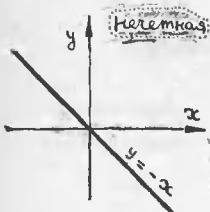
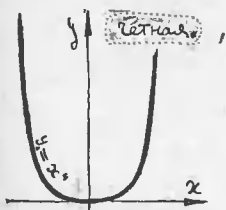


Рис. 2.

У к а з а н и е. Возьмите на параболу некоторую точку M с координатами (a, a^2) . Запишите расстояние от этой точки до точки $F(0, 1/4)$ по формуле расстояния между двумя точками *). Запишите затем расстояние от точки $M(a, a^2)$ до прямой $y = -1/4$ **).

Докажите равенство полученных выражений.

18. Докажите, что точки

$$F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ и } F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

являются фокусами гиперболы $y = 1/x$, т. е. что разность расстояний любой точки этой гиперболы до точек F_1 и F_2 по абсолютной величине есть величина постоянная.

У к а з а н и е. Возьмите на гиперболе $y = 1/x$ произвольную точку $M(a, 1/a)$. Выразите через a расстояния этой точки от точки $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

*) Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ дается формулой $\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

**) Расстояние от точки $A(x_1, y_1)$ до прямой $y = c$ равно $|y_1 - c|$.

а) Представьте функцию $y = \frac{1}{x^4 - x}$ в виде суммы четной и нечетной функций.

б) Докажите, что любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций. ⊕

15. Через каждые две точки с разными абсциссами проходит прямая — график линейной функции $y = kx + b$. Аналогично, через каждые три точки с разными абсциссами, не лежащие на одной прямой, можно провести параболу — график функции $y = ax^2 + bx + c$.

Найдите коэффициенты квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, график которого проходит через точки:

- а) $(-1, 0); (0, 2); (1, 0);$
- б) $(1, 0); (4, 0); (5, 6);$
- в) $(-6, 7); (-4, -1); (-2, 7);$
- г) $(0, -4); (1, -3); (2, -1);$
- д) $(-1, 9); (3, 1); (6, 16).$

16. а) Совершите подобное преобразование параболы $y = x^2$, выбрав центр подобия в начале координат и коэффициент подобия, равный 2. Какая кривая получится?

б) Какое подобное преобразование переводит кривую $y = x^2$ в кривую $y = 5x^2$?

в) Воспользовавшись результатом задачи 16б, найдите фокус и директрису параболы $y = 4x^2$. (Определение директрисы и фокуса — на стр. 41.)

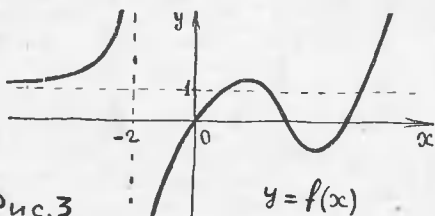
г) Докажите, что все параболы $y = ax^2 + bx + c$ геометрически подобны.

17. Докажите, что точка $F(0, 1/4)$ есть фокус, а прямая $y = -1/4$ — директриса параболы $y = x^2$, т. е. что любая точка этой параболы равноудалена от точки $F(0, 1/4)$ и прямой $y = -1/4$.

и от точки $F_2 (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Найдите разность этих расстояний. Покажите, что абсолютная величина этой разности при всех значениях a одинакова (и, значит, не зависит от выбора точки на гиперболу).

19. На стр. 88—89 даны 17 графиков и столько же формул. Ваша задача — определить, какая формула относится к какому номеру графика. Среди этих графиков вы найдете ответы к упражнениям.

Рис. 3



$$y = f(x)$$

20. На рис. 3 изображен график функции $y = f(x)$.

Нарисуйте эскизы графиков следующих функций:

а) $y = f(x) - 2$; б) $y = f(x + 2)$; в) $y = |f(x)|$;

г) $y = f(|x|)$; д) $y = -3f(x)$;

е) $y = \frac{1}{f(x)}$; ж) $y = (f(x))^2$; з) $y = f(-x)$;

и) $y = x + f(x)$; к) $y = \frac{f(x)}{x}$.

21. На плоскости нарисован квадрат со стороной a (рис. 4). Кривая L_S есть геометрическое место точек, наименьшее расстояние которых до какой-нибудь точки квадрата равно S . Обозначим площадь фигуры, ограниченной кривой L_S , через $P(S)$.

а) Найдите $P(S)$ как функцию S .

б) Решите задачу, аналогичную задаче 21а, взяв вместо квадрата прямоугольник со сторонами a и b .

в) Та же задача для треугольника со сторонами a , b и c .

г) Та же задача для круга радиуса r .

22. Не можете ли Вы заметить закономерность в получающихся выражениях для $P(S)$? Напишите общую формулу для любой выпуклой фигуры. Верна ли эта формула для невыпуклых фигур?

23. Будем рассматривать квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$; каждое такое уравнение задается двумя числами p и q . Условимся изображать это уравнение точкой на плоскости с координатами (p, q) . Например, уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$ изображится точкой $A(-2; 3)$; уравнение $x^2 - 1 = 0$ — точкой $B(0, -1)$.

а) Какое уравнение соответствует началу координат?

б) Нарисуйте множество точек, соответствующих тем уравнениям, у которых сумма корней равна 0.

в) Возьмите наугад точку на плоскости. Если уравнение, соответствующее Вашей точке, имеет два вещественных корня, отметьте эту точку зеленым

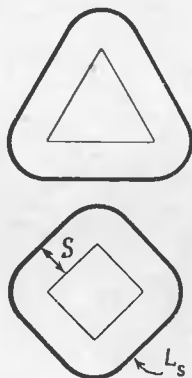


Рис. 4

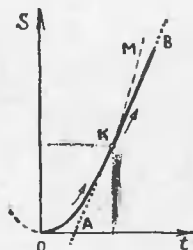


Рис. 5

$$19 + 9 + 26 + 8 + \\ + 18 + 11 + 14 = 105$$

$$105 : 7 = 15$$

$$9 + x - (x - 6) = 15$$

$$26 + (x - 6) = 20 + x$$

$$20 + x - (x + 5) = 15$$

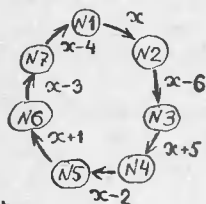


Рис. 6

$$S = |x+5| + |x+1| + \\ + |x| + |x-2| + \\ + |x-3| + |x-4| + \\ + |x-6|$$

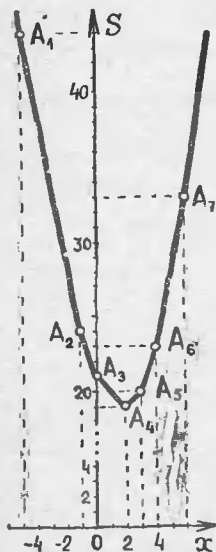


Рис. 7

карандашом. Если же уравнение не имеет вещественных корней, то отметьте точку красным карандашом. Возьмите еще несколько точек и сделайте с ними то же самое. Не можете ли Вы сказать, какую часть плоскости занимают «зеленые» точки и какую — «красные»? Какая линия отделяет «зеленые» точки от «красных»? Сколько корней имеют уравнения, соответствующие точкам этой линии?

г) Какое множество точек соответствует тем уравнениям, у которых корни вещественны и положительные?

д) Какой точкой может изображаться уравнение, если известно, что один из его корней равен 1?

24. Автомобиль двигался равноускоренно до некоторого момента и затем стал двигаться равномерно (с достигнутой им скоростью). График движения этого автомобиля изображен на рис. 5. Докажите, что прямая AB есть касательная к параболе OKM .

25. а) Воспользовавшись графиками, определите число решений следующих кубических уравнений:

$$1) 0,01 x^3 = x^2 - 1,$$

$$2) 0,001 x^3 = x^2 - 3x + 2.$$

б) Найдите приближенные значения корней этих уравнений.

26. а) На стр. 33 есть рисунок, показывающий, что график многочлена $y = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}$ получается из графика многочлена $y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ сдвигом вдоль оси Ox . Найдите величину этого сдвига.

б) Решите уравнение 4-й степени

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0.$$

Указание. Сдвиньте график многочлена $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x$ вдоль оси Ox так, чтобы он стал графиком некоторого биквадратного многочлена.

в) При каких условиях кривая $y = x^4 + bx^3 + cx^2 + d$ имеет ось симметрии? ⊕

27. Решим задачу 4, стр. 37. Всего спичек $19 + 9 + 26 + 8 + 18 + 11 + 14 = 105$. Поэтому нам нужно добиться, чтобы в каждой коробке было $105 : 7 = 15$ спичек.

Обозначим буквой x число спичек, которые нужно переложить из первой коробки во вторую. (Может быть, конечно, что спички придется перекладывать из второй коробки в первую — тогда x будет отрицательным.) После того как мы переложили x спичек из первой коробки во вторую, во второй коробке будет $x + 9$ спичек.

Значит, из второй коробки в третью нужно переложить $x - 6$ спичек, из третьей в четвертую $x + 5$ спичек. Аналогично из четвертой коробки в пятую перекладывается $x - 2$, из пятой в шестую

$x+1$, из шестой в седьмую $x-3$, наконец, из седьмой в первую $x-4$ спичек (рис. 6).

Обозначим теперь через S общее число переложенных спичек:

$$S = |x| + |x-6| + |x+5| + |x-2| + \\ + |x+1| + |x-3| + |x-4|.$$

В этой формуле знаки абсолютной величины использованы потому, что нам важно лишь число переложённых спичек, а не то, в каком направлении их перекладывали.

Нам теперь нужно выбрать x так, чтобы S имело наименьшую величину. Здесь нам может помочь график функции $S = f(x)$ (рис. 7). Самая низкая точка графика есть вершина A_4 , значит, функция $S = f(x)$ принимает свое наименьшее значение при $x = 2$. Таким образом, x найден, и мы можем сказать, сколько и куда спичек нужно перекладывать (рис. 8). Этим способом задачу можно решить, конечно, и для произвольного числа (n) коробок. Для этого нужно так же, как в нашем примере, написать выражение для S . Оно будет иметь вид:

$$S = |x| + |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_{n-1}|. \quad \text{Рис. 9}$$

Для того чтобы найти нужное значение x в случае нечетного числа n , можно воспользоваться следующим простым правилом: числа $0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ нужно выписать в возрастающем порядке. После этого x выбирается равным числу, стоящему ровно в середине этой последовательности чисел (если n нечетно, такое число всегда найдется). Подумайте, как выглядит график в случае четного n .

Попробуйте затем сформулировать правило для нахождения x в этом случае.

С этой похожей на игру задачей связана практически важная задача о перевозках по кольцевым маршрутам. Представьте себе кольцевую железную дорогу с равноотстоящими станциями. На некоторых станциях находятся склады угля, на других — потребители, которым нужно доставить весь этот уголь. На рис. 9 указаны запасы угля на складах и (со знаком —) потребность в нем.

Воспользовавшись решением предыдущей задачи, составьте наиболее экономный план перевозок.

Ответ

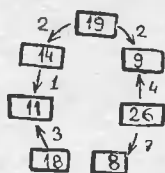


Рис. 8

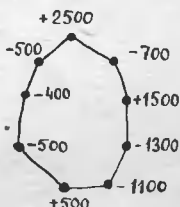


Рис. 9

Ответы и указания к задачам и упражнениям, отмеченным значком ⊕

Упр. 26, стр. 20. Ответ ищите среди графиков на стр. 88—89.

Упр. 36 на стр. 32, график рис. 12. Ответ ищите среди графиков на стр. 88—89.

Упр. 3, стр. 36. У к а з а н и е. Эта функция принимает наименьшее значение на целом отрезке.

Задача 4 на стр. 37. Решение см. в задаче 27 на стр. 92.

Упр. 26 на стр. 57. Нет, не имеет. Строгое доказательство этого факта не очень просто, и мы его здесь не приводим. Однако ясно, что так как и ось Ox и ось Oy являются асимптотами этой кривой, то осью симметрии могла бы быть только прямая $y = x$. То, что эта прямая не является осью симметрии, легко проверяется.

Упр. 2 на стр. 76. Уравнение касательной $y = 3x - 1$.

Упр. 3 на стр. 76. У к а з а н и е. Система $y = x + a$, $y = -x^2 - 1$ должна иметь два слившихся решения.

Задачи 1з и 1с, стр. 85. Ответ ищите среди графиков на стр. 88—89.

Задача 36, стр. 86. Возьмем числовой пример. Пусть корни числителя будут -5 и 0 , а корни знаменателя $+2$ и $+4$. Тогда наша функция имеет вид $y = \frac{ax(x+5)}{(x-2)(x-4)}$. Выберем какое-нибудь конкретное значение a ,

например $a = 2$. Функция $y = \frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)}$ не определена при $x = 2$ и $x = 4$. При приближении x к этим значениям знаменатель уменьшается, приближаясь к нулю; значит, функция неограниченно растет по абсолютной величине — прямые $x = 2$ и $x = 4$ являются вертикальными асимптотами графика.

Функция равна нулю при $x = 0$ и $x = -5$. Отметим на оси Ox две точки графика: $(0, 0)$ и $(-5, 0)$.

Четыре «особых» значения аргумента: $x = -5, 0, 2, 4$ делят ось Ox на 5 участков. При переходе через границу любого участка функция меняет знак (обращаясь в нуль или «уходя в бесконечность») (рис. 10).

Осталось выяснить поведение функции, когда аргумент неограниченно растет по абсолютной величине. Попробуем вместо x подставлять большие числа (например, $x = 10\,000$, $x = 1\,000\,000$ и т. д.). Так как $2x^2$ будет гораздо больше, чем $10x$, а x^2 гораздо больше, чем $-6x + 8$, то дробь

$$\frac{2x(x+5)}{(x-2)(x-4)} = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 - 6x + 8}$$

будет примерно равна отношению старших членов числителя и знаменателя

$$y = \frac{2x^2 + 10x}{x^2 - 6x + 8} \approx \frac{2x^2}{x^2} = 2,$$

причем тем ближе к 2, чем больше $|x|$. Значит, при удалении от начала координат график будет приближаться к горизонтальной прямой $y = 2$.

Общий вид графика — на рис. 11. Во всех случаях, когда оба корня знаменателя больше корней числителя, график будет примерно такой.

Задача 14, стр. 87. Как это часто бывает в математике, задачу легче решить в общем виде, чем для заданной конкретной функции. Поэтому мы сначала решим задачу б), а решение а) получим как частный случай.

Итак, пусть дана некоторая функция $f(x)$. Предположим, что задача решена, т. е. $f(x)$ представлена в виде суммы четной функции $g(x)$ и нечетной $h(x)$:

$$f(x) = g(x) + h(x). \quad (*)$$

Так как это равенство верно для всех значений x , то в него можно подставить $-x$ вместо x , и мы получим

$$f(-x) = g(-x) + h(-x). \quad (**)$$

Так как функция $g(x)$ четная, а $h(x)$ нечетная, то $g(-x) = g(x)$ и $h(-x) = -h(x)$. Пользуясь этим, мы сначала сложим (*) и (**), а затем вычтем одно из другого; найдем:

$$f(x) + f(-x) = 2g(x), \quad f(x) - f(-x) = 2h(x).$$

Отсюда находятся функции $g(x)$ и $h(x)$ и получается искомое разложение функции $f(x)$ на сумму четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \quad (1)$$

Заметьте, что формальное доказательство полученного результата еще проще: напишите сразу разложение (1), проверьте, что оно выполняется тождественно для всех x и что первое слагаемое в правой части — четная функция, а второе — нечетная.

Решение задачи а) получается непосредственно по формуле (1):

$$\frac{1}{x^4 - x} = \frac{x^2}{x^6 - 1} + \frac{1}{x^7 - x}.$$

З а м е ч а н и е. Если функция $y = f(x)$ не определена для некоторых значений x , то и функции $g(x)$ и $h(x)$ тоже будут определены не для всех значений x . При этом может оказаться, что для некоторых x функция $f(x)$ определена, а $g(x)$ и $h(x)$ не определены.

Упр. 26в, стр. 92. $4d = b^3 + 2bc$.

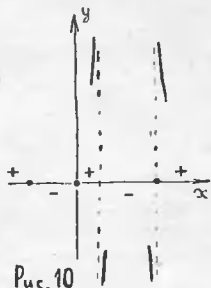


Рис. 10

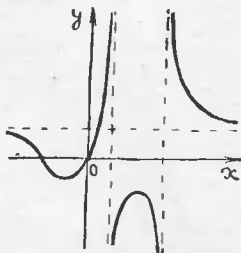


Рис. 11

Израиль
Моисеевич
Гельфанд

Елена
Георгиевна
Глаголева

Эммануил
Эльевич
Шноль

Функции и графики
(основные приемы)

М., 1968, 96 стр. с илл

Редактор
Художники
Техн. редакторы
Корректор

И. М. Овчинникова
В. В. Смолянинов, В. Б. Янкилевский
В. С. Никифорова, С. Я. Шкляр
Л. Н. Боровина

Сдано в набор
Подп. к печати
Бумага
Физ. печ. л.
Усл. печ. л.
Уч.-изд. л.
Т- 03844
Тираж
Цена книги
Заказ №

5/III 1968 г.
22/VII 1968 г.,
84×108^{1/32}
3.
5,04.
4,74.
220 000 экз.
13 коп.
232

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука».
Москва Г-99, Шубинский пер., 10

Математика

Библиотечка
физико-математической школы

Серия основная

- Выпуск 1 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, А. А. Кириллов, Метод координат.
- Выпуск 2 И. М. Гельфанд, Е. Г. Глаголева, Э. Э. Шноль, Функции и графики (основные приемы).
- Выпуск 3 С. И. Гельфанд, М. Л. Гервер, А. А. Кириллов, Н. Н. Константинов, А. Г. Кушниренко, Задачи по элементарной математике (последовательности, комбинаторика, пределы).

Серия вспомогательная

- Выпуск 1 * Е. Б. Дынкин, С. А. Молчанов, А. Л. Розенталь, А. К. Толпыго, Математические задачи.
- Выпуск 2 * А. А. Кириллов, Пределы.