

БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ШКОЛЫ

МАТЕМАТИКА

А. В. КУЖЕЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИМПРОВИЗАЦИИ

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1983

Математические импровизации. Кужель А. В.—
К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983.—96 с.—(Б-чка
физ.-мат. школы. Математика).

На доступных примерах показана импровизация в математике, способствующая развитию математических наклонностей учащихся, углублению их интереса к математике, укреплению уверенности в своих силах. Материал книги может быть использован как в процессе самостоятельной работы, так и на различных внеклассных мероприятиях.

Для учащихся физико-математических школ и старших классов общеобразовательной школы.

Табл. 5. Ил. 8.

Редакционная коллегия: член-корреспондент АН УССР А. В. Скороход (отв. редактор), профессор Л. А. Калужнин, профессор Н. И. Кованцов, доцент В. И. Коба, доцент Н. Я. Лященко, доцент Ю. М. Рыжов, профессор М. И. Ядренко (зам. отв. редактора), кандидат педагогических наук Л. В. Кованцова

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор М. И. Ядренко (Киевский государственный университет), старший научный сотрудник М. И. Кратко (Институт математики АН УССР)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией Б. Л. Корженевич

ПРЕДИСЛОВИЕ

Трудно представить себе человека, который назвал бы музыку скучной и неинтересной, мотивируя это изобилием в ней нот. Однако мнение о математике, как о науке скучной и неинтересной, где одни только формулы или иксы и игреки, можно услышать довольно часто. В действительности для специалистов-математиков формулы являются своеобразным языком, который дает возможность анализировать, выявлять закономерности, делать новые открытия и записывать их строгим и четким математическим языком. А для непосвященных формулы — это своеобразная стена, завеса, за которой укрылась математика.

Так ли непроницаема эта стена? Может быть, эту стену можно пробить, приподнять завесу «таинственности» математики, увлечь этой наукой молодых людей и любителей школьных, заставить их волноваться перед встречей с неизвестными разделами математики, почувствовать себя участниками открытий в некогда скучной и неинтересной для них науке. Такую трудную задачу ставит автор перед собой. И если предлагаемая книга заинтересует читателя, это будет высшей оценкой усилий автора.

В книге на конкретных и доступных для учащихся средней общеобразовательной школы примерах автор показал, что в математике, как и в музыке, можно «импровизировать», т. е. устанавливать новые факты, свойства, закономерности, другими словами, делать открытия и в такой области знаний, как математика. Надо только найти и рассмотреть более общий случай, порассуждать об аналогии, каким-то образом изменить метод доказательства или вместо конкретных чисел ввести определенные параметры.

Многие из приведенных в предлагаемой книге фактов публикуются впервые, а именно: условие несократимости дроби вида $\frac{an+b}{cn+d}$; второе обобщение теоремы Вильсона; достаточное условие существования не вещественных кор-

ней многочлена; условие периодичности функции; связь между $\operatorname{tg} n\alpha$ и многочленами Чебышева, а также формула для n -й степени квадратной матрицы; формулы для $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и e^α для кватернионов, а также общий вид функции на множестве кватернионов.

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.

ДЕЛИМОСТЬ ВЫРАЖЕНИЯ

$$ab^n + cn + d \text{ НА } m$$

§ 1. Делимость чисел (основные понятия)

Говорят, что целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число c , что $a = bc$. Если a делится на b , то кратко это записывают так: $a : b$ (или $b \backslash a$ — читается: b делит a). При этом a называют *делимым*, а b — *делителем* числа a .

Например, $52 : 13$, $52 : 52$, $52 : (-26)$ и т. д. Знак $:$ заменяет слово «делится» и является отношением, а не операцией (подобно отношениям параллельности (\parallel), перпендикулярности (\perp), меньше ($<$) и др.). Поэтому записи $(a + b) : c$ и $a + b : c$ означают одно и то же: сумма $a + b$ делится на c , тогда как записи $(a + b) : c$ и $a + b : c$ имеют, очевидно, различный смысл. В связи с этим будем пользоваться более простой записью: $a + b : c$. Точно так же из двух равносильных записей: $(a + b) < c$ и $a + b < c$ пользуемся второй, более простой, записью.

Запись $0 : 0$ не имеет смысла (делить на нуль нельзя), тогда как запись $0 : 0$ является правильным утверждением. Объясняется это тем, что деление чисел — это операция в множестве действительных чисел (подобно операции сложения, вычитания или умножения чисел) и результат применения этой операции должен быть однозначным. Что касается делимости чисел, то, как уже отмечалось, это отношение в множестве целых чисел (подобно отношениям $<$, \perp , \parallel , \sim и др.). И здесь уже, в отличие от предыдущего случая, однозначность элемента c , для которого $a = bc$, не требуется. Поэтому, так как существует такое число c , что $0 = 0 \cdot c$ (например, $0 = 0 \cdot 7$), то на основании определения понятия делимости чисел приходим к заключению, что 0 делится на 0 (т. е. $0 : 0$).

Запись $a \nmid b$ означает, что a не делится на b . Так, $10 \nmid 7$, $2 \nmid 3$, $1 \nmid 0$ и т. д.

Непосредственно из определения делимости чисел вытекают следующие свойства.

1. Если $a : b$, а $b : c$, то $a : c$.
2. Если $a : a$ и $b : c$, то $a + b : a$ и $a - b : a$.
3. Если $a : a$ или $b : a$, то $ab : a$.
4. Если $a : b$ и $a \neq 0$, то $|a| \geq |b|$.
5. Если $a : b$ и $|a| < b$, то $a = 0$.

Замечание 1. Если $a + b \vdots c$, то это не означает, что $a \vdots c$ и $b \vdots c$. Так, $17 + 18 \vdots 7$, тогда как $17 \not\vdots 7$ и $18 \not\vdots 7$. Однако, если известно, что сумма $a + b$ делится на c и одно слагаемое делится на c , то и второе слагаемое делится на c .

Замечание 2. Из того что $ab \vdots c$, также не вытекает, что $a \vdots c$ или $b \vdots c$. Так, $6 \cdot 8 \vdots 12$, тогда как $6 \not\vdots 12$ и $8 \not\vdots 12$. Однако, если кроме условия $ab \vdots c$ дополнительно известно, что один из множителей (a или b) взаимно прост с c , то тогда второй множитель делится на c (см. гл. 2, теорема 2.3).

§ 2. Конкретные примеры

На различных олимпиадах, в сборниках конкурсных задач часто встречаются задачи типа: доказать, что при любом целом неотрицательном n :

- 1) $4^n + 15n - 1 \vdots 9$; 4) $3^{2n+2} - 26n - 27 \vdots 169$;
- 2) $10^n + 18n - 1 \vdots 27$; 5) $2^{n+2}3^n + 5n - 4 \vdots 25$;
- 3) $3^{2n+2} + 40n - 27 \vdots 64$; 6) $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36 \vdots 64$.

Подобного типа задачи легко решаются с помощью принципа математической индукции. Покажем это на последнем примере.

Положим

$$T_n = 4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36.$$

При $n = 0$ $T_0 = 0 \vdots 64$. Пусть

$$T_k = 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 36 \vdots 64. \quad (1.1)$$

Тогда

$$T_{k+1} = 9 \cdot 4 \cdot 3^{2k+2} + 32k - 4. \quad (1.2)$$

Исключая из (1.1) и (1.2) $4 \cdot 3^{2k+2}$, находим

$$T_{k+1} = 9T_k - 256k + 320.$$

А так как $T_k \vdots 64$, $256 \vdots 64$, $320 \vdots 64$, то $T_{k+1} \vdots 64$ и, следовательно, на основании принципа математической индукции при любом целом неотрицательном n $T_n \vdots 64$.

§ 3. Общий случай

Каждое из соотношений 1) — 6) можно представить в виде

$$ab^n + cn + d \vdots m, \quad (1.3)$$

где здесь и в дальнейшем a , b , c и d — некоторые целые числа, а m — натуральное число ($m > 1$). Например, в случае предпоследнего выражения $a = 4$, $b = 6$, $c = 5$, $d = -4$, $m = 25$.

В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли исследовать рассматриваемую задачу в общем виде и сформулировать условия, которым должны удовлетворять числа a, b, c и d , чтобы выражение $ab^n + cn + d$ при любом целом неотрицательном n делилось на заданное натуральное число m ?

Оказывается, такие условия выполняются.

Теорема 1.1. При любом целом неотрицательном n выражение $ab^n + cn + d$ делится на m тогда и только тогда, когда

$$a + d : m, (b - 1)c : m, (b - 1) + c : m. \quad (1.4)$$

Например, в случае примера 5

$$a + d = 0 : 25, (b - 1)c = 25 : 25, a(b - 1) + c = 25 : 25,$$

и, следовательно, выражение $2^{n+2}3^n + 5n - 4$ делится на 25 (для любого $n \in N_0$, где $N_0 = N \cup \{0\}$ — множество целых неотрицательных чисел).

□ Обозначим

$$T_n = ab^n + cn + d.$$

Пусть известно, что при любом $n \in N_0$ $T_n : m$. Тогда, в частности, при $n = 0$ получим $T_0 = a + d : m$.

Используя теперь равенство

$$T_1 = a(b - 1) + c + (a + d),$$

а также то, что T_1 и $a + d$ делятся на m , приходит к заключению, что $a(b - 1) + c : m$ (см. замечание 1, § 1).

Аналогично, учитывая, что

$$T_2 - T_1 = ab(b - 1) + c, \quad T_3 - T_2 = ab^2(b - 1) + c$$

делятся на m , получаем, что

$$b(T_2 - T_1) - (T_3 - T_2) = c(b - 1)$$

также делится на m .

Таким образом, если при любом $n \in N_0$ выполняется (1.3) (или, что то же самое, $T_n : m$), то справедливы и соотношения (1.4).

Пусть теперь наоборот: выполняются соотношения (1.4). Покажем, что при таком условии $T_n : m$ при любом $n \in N_0$.

Действительно,

$$T_0 = a + d : m, \quad T_1 = a(b - 1) + c + T_0 : m.$$

Предположим, что при некотором $k \in N$ $T_k : m$, и покажем, что $T_{k+1} : m$. Для этого рассмотрим разность

$$T_{k+1} - T_1 = bT_k - k(b - 1)c - b(a + d). \quad (1.5)$$

Так как $(b-1)c \div m$, $a+d \div m$ и, на основании предположения, $T_k \div m$, то правая часть (1.5) делится на m . Следовательно, и левая часть этого равенства делится на m :

$$T_{k+1} - T_1 \div m. \quad (1.6)$$

А так как $T_1 \div m$, то, учитывая (1.6), T_{k+1} также делится на m . Но тогда, на основании принципа математической индукции, приходим к заключению, что при любом $n \in N_0$ выражение $ab^n + cn + d$ делится на m . ■

§ 4. Об одном свойстве коэффициента c

Рассмотрим примеры 1) — 6) из § 1. В каждом из этих примеров квадрат коэффициента при n делится на m :

$$15^2 \div 9, 18^2 \div 27, 40^2 \div 64, 26^2 \div 169, 32^2 \div 64.$$

В связи с этим возникает вопрос: случайное ли это совпадение или общее свойство? Оказывается, что отмеченное свойство носит общий характер.

Теорема 1.2. Если при любом n из N_0 выражение $ab^n + cn + d$ делится на m , то $c^2 \div m$.

□ При условии теоремы выполняются соотношения (1.4). А так как $c^2 = cA - aB$, где $A = a(b-1) + d \div m$, $B = (b-1)c \div m$, то и $c^2 \div m$. ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Известно, что при любом $n \in N_0$ $4^n + 15n + d \div 9$. Каким условиям удовлетворяет d ?
2. Известно, что при любом $n \in N_0$ $4^n + cn - 1 \div 9$. Каким условиям удовлетворяет c ?
3. Известно, что при любом $n \in N_0$ $b^n + 15n - 1 \div 9$. Каким условиям удовлетворяет b ?
4. Подберите a , b , c и d так, чтобы при любом $n \in N_0$ выражение $ab^n + cn + d$ делилось на 1980.

ГЛАВА 2

УСЛОВИЕ НЕСОКРАТИМОСТИ ДРОБИ

$$\text{ВИДА } \frac{an + b}{cn + d}$$

§ 1. Наибольший общий делитель

Если целые числа a и b делятся на некоторое целое число d , то d называют *общим делителем* этих чисел. Наибольший из общих делителей заданных чисел a и b

называют наибольшим общим делителем этих чисел (сокращенно НОД). В литературе употребляются различные обозначения:

$$\text{НОД}(a, b), \quad Д(a, b), \quad (a, b).$$

Мы будем пользоваться последним обозначением для НОД чисел a и b .

Точно так же можно определить НОД произвольной конечной совокупности целых чисел. Однако в дальнейшем нам понадобится лишь понятие НОД двух чисел.

Нетрудно видеть, что если хотя бы одно из чисел a или b отлично от нуля, то их НОД существует и является натуральным числом. Так, $(28, 49) = (-28, 49) = 7$. Аналогично, на основании определения, $(18, 0) = 18$. В то же время НОД $(0, 0)$ не существует, так как нет наибольшего числа, на которое делились бы числа 0 и 0.

Непосредственно из определения НОД вытекают следующие его свойства:

1) $(a, b) = (|a|, |b|)$ ($|x| = \sqrt{x^2}$ — модуль числа x).

2) Если $a \div b$ ($b \neq 0$), то $(a, b) = |b|$.

Числа a и b называются взаимно простыми, если $(a, b) = 1$. Так, числа 25 и 12 взаимно простые. Числа 1 и -1 и только эти числа являются взаимно простыми с любым целым числом (в том числе и сами с собой).

Теорема 2.1 (о делении с остатком). Пусть a — целое, b — натуральное число. Тогда существуют и при том единственные целые числа q и r такие, что

$$a = bq + r \quad (0 \leq r < b). \quad (2.1)$$

□ Пусть $^1 q = \left[\frac{a}{b} \right]$. Тогда $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$, откуда

$$bq \leq a < bq + b. \quad (2.2)$$

Пусть $r = a - bq$. Тогда $a = bq + r$ и, на основании (2.2), $0 \leq r < b$. Таким образом, возможность представления числа a в виде (2.1) доказана. Остается доказать единственность такого представления.

Предположим, что наряду с (2.1) имеет место также

$$a = bq_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < b). \quad (2.3)$$

Вычитая из (2.1) (2.3), получим $0 = b(q - q_1) + r - r_1$, т. е.

$$b(q - q_1) = r_1 - r. \quad (2.4)$$

¹ $[x]$ означает «целая часть числа x ». По определению, $[x]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Следовательно, $r_1 - r \vdots b$. А так как $0 \leq r_1 < b$ и $-b < -r \leq 0$, то $-b < r_1 - r < b$, т. е. $|r_1 - r| < b$. Поэтому, с учетом свойства 5 (гл. 1, § 1), $r_1 - r = 0$, т. е. $r_1 = r$. После этого (2.4) запишем в виде $b(q - q_1) = 0$, откуда вытекает, что $q_1 = q$ (так как $b \neq 0$). Этим доказана и единственность (2.1). ■

Числа q и r из (2.1) называют соответственно неполным частным и остатком от деления a на b .

Теорема 2.2. Пусть a, b — произвольные, не равные одновременно нулю целые числа. Тогда найдутся такие целые числа u и v , что

$$(a, b) = au + bv. \quad (2.5)$$

□ Рассмотрим целые числа вида $ax + by$, где $\{x, y\} \subset \mathbb{Z}$ (т. е. $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{Z}$). Среди таких чисел имеются как отрицательные, так и положительные числа. Пусть A — множество всех натуральных чисел вида $ax + by$

$$A = \{ax + by \mid \{x, y\} \subset \mathbb{Z}, ax + by \in \mathbb{N}\}.$$

Обозначим через m наименьшее число¹ в множестве A . Таким образом, при некоторых u и v из \mathbb{Z} $m = au + bv$. Применяя к числам a и m теорему о делении с остатком, получим

$$a = mq + r \quad (0 \leq r < m),$$

откуда

$$r = a - mq = a - (au + bv)q = as + bt,$$

где $s = 1 - uq \in \mathbb{Z}$ и $t = -vq \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что $r \neq 0$. Тогда $r = as + bt \in A$ и $r < m$, что противоречит выбору числа m . Следовательно, $r = 0$, т. е. $a \vdots m$ (так как $a = mq$).

Точно так же, применяя теорему о делении с остатком к числам b и m , устанавливаем, что $b \vdots m$. Следовательно, m — общий делитель чисел a и b . Но тогда $m \leq d = (a, b)$. С другой стороны, так как $m = au + bv$ и $a \vdots d$, $b \vdots d$, то $m \vdots d$ и, таким образом, $m \geq d$. В результате приходим к заключению, что $m = d$, т. е. имеет место равенство (2.5). ■

Следствие 2.1. Наибольший общий делитель (a, b) чисел a и b делится на любой общий делитель этих чисел.

¹ Невяно мы пользуемся так называемым принципом наименьшего числа, который формулируется так: в каждом непустом множестве натуральных чисел содержится наименьшее число. Заметим, что на практике этим принципом часто пользуются как очевидным фактом.

□ Если $a:m$ и $b:m$, то, на основании равенства (2.5), (a, b) также делится на m . ■

Следствие 2.2. Пусть числа a, b — взаимно простые. Тогда найдутся такие целые числа u и v , что

$$au + bv = 1. \quad (2.6)$$

□ Так как числа a и b взаимно простые, т. е. $(a, b) = 1$, то равенство (2.6) непосредственно следует из равенства (2.5). ■

Теорема 2.3. Пусть произведение ab делится на c и $(a, c) = 1$. Тогда $b:c$.

□ Так как $(a, c) = 1$, то, на основании следствия 2.2, $au + cv = 1$, где u и v — некоторые целые числа. Умножая обе части последнего равенства на b , получим

$$abu + cbv = b. \quad (2.7)$$

А так как по условию $ab:c$, то левая часть равенства (2.7) делится на c . Следовательно, b также делится на c . ■

Числа u и v в теореме 2.2 определяются неоднозначно. Действительно, пусть $u_k = u + kb$, $v_k = v - ka$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$au_k + bv_k = au + bv = (a, b).$$

Теорема 2.4. Пусть a, b — целые числа, m — натуральное число и $(a, m) = 1$. Тогда существует и при том единственное число r и такое, что

$$ar + b:m \quad (0 \leq r < m).$$

□ На основании следствия 2.2 найдутся такие целые числа u и v , что $au + mv = 1$. Умножая это равенство на $-b$, получим

$$a(-bu) - mbv = -b. \quad (2.8)$$

Применим теперь к числам $-bu$ и m теорему о делении с остатком:

$$-bu = mq + r \quad (0 \leq r < m). \quad (2.9)$$

На основании (2.8) и (2.9) $ar + b = m(bv - aq)$, откуда следует, что $ar + b:m$.

Предположим, что при некотором целом k ($0 \leq k < m$) $ak + b:m$. Тогда

$$(ar + b) - (ak + b) = a(r - k):m.$$

А так как $(a, m) = 1$, то, в силу теоремы 2.3, $r - k:m$. Но $|r - k| < m$. Следовательно, $k = r$. ■

§ 2. Конкретный пример

Довольно распространенными являются задачи типа: доказать, что при любом целом n ($n \in \mathbb{Z}$) дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

Решение. Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{Z}$ рассматриваемая дробь сократима. Тогда существует такое натуральное число $d > 1$, что

$$14n+3 : d, \quad 21n+4 : d.$$

Но тогда при любых целых k и l

$$(14n+3)k + (21n+4)l : d.$$

В частности, при $k=3$ и $l=-2$ получаем, что $1 : d$. А это невозможно, так как, на основании предположения, $d > 1$.

Таким образом, предположение о том, что дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ сократима, неверно. Следовательно, при любом целом n рассматриваемая дробь несократима.

§ 3. Общий случай. Регулярные дроби

Рассмотрим теперь дробь

$$\frac{an+b}{cn+d}, \quad (2.10)$$

где a, b, c, d — фиксированные целые числа (параметры), а n может быть любым целым числом. Выясним, каким условиям должны удовлетворять параметры дроби (2.10), чтобы эта дробь была несократимой при любом целом n .

Преджде всего ясно, что числа b и d должны быть взаимно простыми, так как в противном случае при $n = k \cdot (b, d)$, и, в частности, при $n=0$ дробь (2.10) будет сократимой.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что

$$(b, d) = 1. \quad (2.11)$$

Кроме того, предполагаем, что каждое из чисел a, b, c и d отлично от нуля.

Лемма 2.1. Если числитель и знаменатель дроби (2.10) делятся на t , то числа n и t , а также $u = (a, c)$ и t взаимно простые.

□ Пусть $an + b \vdots m$ и $(n, m) = s$. Тогда $an + b \vdots s$ (так как $m \vdots s$) и $n \vdots s$. Следовательно, $b \vdots s$. Аналогично устанавливаем, что и $d \vdots s$ (если $cn + d \vdots m$). Следовательно,

$$1 \leq s \leq (b, d) = 1,$$

т. е. $s = 1$.

Аналогично, если $(u, m) = k$, где $u = (a, c)$, то $a \vdots k$ (так как $a \vdots u$, а $u \vdots k$) и $an + b \vdots k$ (так как $an + b \vdots m$, а $m \vdots k$). Но тогда $b \vdots k$. Точно так же устанавливаем, что $d \vdots k$. А так как $(b, d) = 1$, то $k = 1$. ■

Теорема 2.5. Пусть при некотором $n \in \mathbb{Z}$ числитель и знаменатель дроби (2.10) делятся на натуральное число m . Тогда m есть делитель целого числа Q , определяемого равенством

$$Q = \frac{ad - bc}{(a, c)}. \quad (2.12)$$

□ Пусть $u = (a, c)$. Тогда $a = ua_1$, $c = uc_1$, где a_1, c_1 — некоторые целые числа. Если при этом числитель и знаменатель дроби (2.10) делятся на m ($m \in \mathbb{N}$), то, очевидно,

$$a_1(cn + d) - c_1(an + b) \vdots m. \quad (2.13)$$

А так как $a_1c = c_1a$, то (2.13) запишем так: $a_1d - bc_1 \vdots m$. Теперь остается заметить, что

$$a_1d - bc_1 = \frac{a}{u}d - b\frac{c}{u} = \frac{ad - bc}{u} = Q. \quad (2.14)$$

Следствие 2.3. Если

$$|ad - bc| = (a, c), \quad (2.15)$$

то дробь (2.10) несократима.

□ При условии (2.15) $Q = 1$ или $Q = -1$. Но тогда, на основании теоремы 2.5, при любом $n \in \mathbb{Z}$ общий делитель m числителя и знаменателя дроби (2.10) равен 1 (так как $Q \vdots m$). ■

Определение. Дробь (2.10) будем называть регулярной, если ее параметры удовлетворяют условию (2.15).

Так, рассмотренная в § 2 дробь является регулярной

$$|14 \cdot 4 - 21 \cdot 3| = (14, 21).$$

Таким образом, на основании предыдущего, произвольная регулярная дробь является несократимой.

§ 4. Нерегулярные дроби

Рассмотрим теперь тот случай, когда дробь (2.10) не является регулярной. Это означает, что число Q , определяемое равенством (2.12), отлично от 1 и -1 . Если при этом $Q = 0$, то $ad = bc$. Следовательно, $ad : b$ и $bc : d$. А так как $(b, d) = 1$, то (теорема 2.3) $a : b$ и $c : d$, т. е. $a = ba_1$, $c = dc_1$. Но тогда $ba_1d = bdc_1$, откуда $a_1 = c_1$. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$\frac{an + b}{cn + d} = \frac{b(kn + 1)}{d(kn + 1)},$$

где $k = a_1 = c_1$. Следовательно, при $Q = 0$ дробь (2.10) является несократимой лишь при $n = 0$ или при $n = -\frac{2}{k}$, если $2 : k$.

Пусть теперь $Q \notin \{-1, 0, 1\}$, т. е. $|Q| > 1$.

Теорема 2.6. Если у числа Q имеется такой делитель $m > 1$, что $(a, m) = 1$ или $(c, m) = 1$, то при некотором $n \in \mathbb{Z}$ числитель и знаменатель дроби (2.10) делятся на m .

□ Пусть, например, $Q : m$, $m > 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда (теорема 2.4) найдется такое целое число r ($0 \leq r < m$), что $ar + b : m$. А так как, на основании (2.13) и (2.14),

$$a_1(cr + d) - c_1(ar + b) = Q : m,$$

то и $a_1(cr + d) : m$. Но $(a_1, m) = 1$, так как a_1 — делитель числа a и $(a, m) = 1$. Поэтому (теорема 2.3) $cr + d : m$.

Таким образом, в рассматриваемом случае числитель и знаменатель дроби (2.10) при $n = r$ делятся на m , т. е. дробь (2.10) не является несократимой при всех целых n . ■

Например, рассмотрим дробь $\frac{14n + 4}{21n + 3}$. Для этой дроби $Q = \frac{14 \cdot 3 - 21 \cdot 4}{(14, 21)} = \frac{-42}{7} = -6$. У числа Q имеются делители 2 и 3 взаимно простые соответственно с числами 21 и 14. Поэтому при некоторых значениях n числитель и знаменатель рассматриваемой дроби делятся на 2 (или на 3). Действительно, числа $14n + 4$ и $21n + 3$ при $n = 1 + 2k$ делятся одновременно на 2, а при $n = 1 + 3k$ — на 3.

В связи с предыдущим возникает вопрос: может ли нерегулярная дробь быть несократимой? Оказывается, может. Действительно, рассмотрим следующую дробь:

$\frac{12n+1}{20n+3}$. Для этой дроби $Q = \frac{36-20}{4} = 4$. Предположим, что при некотором $n \in \mathbb{Z}$

$$12n + 1 \div m, \quad 20n + 3 \div m \quad (m > 1).$$

А так как, на основании теоремы 2.5, число m должно быть делителем числа Q , то $m = 2$ или $m = 4$. Однако очевидно, что ни при каком целом n числа $12n + 1$ и $20n + 3$ не могут делиться ни на 2, ни на 4. Следовательно рассматриваемая дробь является несократимой.

Нетрудно видеть, что и в общем случае выражения $an + b$ и $cn + d$ ни при каком целом n не могут делиться на заданное число m , если число b не делится на (a, m) или число d не делится на (c, m) .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Что можно сказать о сократимости (или несократимости) дробей

$$\frac{10n+9}{15n+8}, \quad \frac{15n+10}{8n+9}, \quad \frac{8n+15}{9n+10}, \quad \frac{9n+8}{10n+15}?$$

2. Каким условиям должны удовлетворять числа a, b, c и d , чтобы дроби

$$\frac{an+9}{15n+8}, \quad \frac{10n+b}{15n+8}, \quad \frac{10n+9}{cn+8}, \quad \frac{10n+9}{15n+d}$$

были регулярными?

ГЛАВА 3

ТЕОРЕМА ВИЛЬСОНА

§ 1. Простые числа

Натуральное число $p > 1$ называется *простым*, если у него нет других натуральных делителей, кроме единицы и самого числа p . Если же $p = p_1 p_2$, где p_1 и p_2 — отличные от единицы натуральные числа, то p называется *составным* числом. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Так, первыми простыми числами являются следующие числа:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Свойство 1. Если простое число p делится на некоторое натуральное число $a > 1$, то $a = p$.

Действительно, если бы $a \neq p$, то у простого числа p было бы три делителя: 1, a и p ($1 < a < p$), что невозможно.

Свойство 2. Произвольное целое число a либо делится на простое число p , либо взаимно простое с p .

В самом деле, если $(a, p) = d$, то $d = 1$ или $d = p$. В первом случае числа a и p взаимно простые, а во втором — $a \div p$.

Свойство 3. Если произведение двух (или нескольких) целых чисел делится на простое число p , то хотя бы один из множителей делится на p .

Действительно, пусть $ab \div p$ и a не делится на p . Тогда (свойство 2) $(a, p) = 1$ и, следовательно, $b \div p$ (теорема 2). Аналогично рассматривается случай большего числа множителей.

Свойство 4. Наименьший не равный единице натуральный делитель целого числа a есть простое число.

Действительно, пусть $a \div q$, где $q > 1$ — наименьший натуральный делитель числа a и q составное. Тогда $q = bc$, где $1 < b < q$, $1 < c < q$ и $\{b, c\} \subset N$. Но тогда $a \div b$, что противоречит выбору числа q . Следовательно, q — простое число.

Свойство 5. Наименьший простой делитель составного натурального числа a не превосходит \sqrt{a} .

В самом деле, пусть p — наименьший простой делитель числа a . Тогда $a = pb$, где $p \leq b$. Но тогда $p^2 \leq pb = a$, т. е. $p \leq \sqrt{a}$.

Таким образом, если у натурального числа a нет простых делителей, не превосходящих \sqrt{a} , то число a простое. Этот факт часто используют на практике при установлении простоты числа a .

Теорема 3.1 (основная теорема арифметики). Произвольное натуральное число $a > 1$ можно представить в виде произведения простых чисел и при том единственным способом (если не учитывать порядок расположения множителей).

Доказательство этой теоремы несколько громоздкое, и мы не будем его приводить (см. [2], с. 9).

Теорема 3.2. (Евклида). Множество простых чисел бесконечно.

□ Пусть множество простых чисел конечное и p_1, p_2, \dots, p_n — все такие простые числа. Рассмотрим натуральное число $Q = p_1 p_2 \dots p_n + 1$. На основании теоремы 3.1 число Q можно представить в виде произведения

некоторых простых чисел q_1, q_2, \dots, q_s (среди которых могут быть и равные). Таким образом,

$$p_1 p_2 \dots p_n + 1 = q_1 q_2 \dots q_s. \quad (3.1)$$

Правая часть равенства (3.1) делится на простое число q_i . При этом q_i не может совпадать ни с одним из чисел p_1, p_2, \dots, p_n . Следовательно, предположение о том, что множество простых чисел конечное и совокупность p_1, p_2, \dots, p_n содержит все простые числа — неверное. А это означает, что множество простых чисел бесконечное. ■

З а м е ч а н и е. Довольно распространенным является следующее «определение» простого числа: *натуральное число $p > 1$ называется простым, если оно делится только на себя и единицу*. Однако среди натуральных чисел нет таких, которые делятся «только на себя и единицу». Действительно, число 5, например, делится не только на 5 и 1, но и на -5 и -1 . А среди целых чисел имеются лишь одно число, которое делится только на себя и единицу — это число -1 .

Таким образом, если строго логически пользоваться сформулированным определением, то мы должны сделать заключение, что простых чисел попросту не существует.

Правильная формулировка предыдущего определения такая: *натуральное число $p > 1$ называется простым, если натуральными делителями этого числа есть лишь само число p и 1*.

§ 2. Теорема Вильсона

Теорема 3.3. *Натуральное число $p > 1$ является простым тогда и только тогда,¹*

$$(p-1)! + 1 \div p. \quad (3.2)$$

□ Пусть p — простое число. Если $p = 2$, то $(p-1)! + 1 = 2 \div p$. Точно так же легко проверяется, что $(p-1)! + 1$ делится на p при $p = 3$ и $p = 5$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $p > 5$.

Рассмотрим множество $A = \{2, 3, \dots, p-2\}$, и пусть $a \in A$. Тогда $(a, p) = 1$ и, следовательно, на основании теоремы 2.1, существует и при том единственное число r_a такое, что

$$0 \leq r_a < p, \quad ar_a - 1 \div p.$$

¹ Произведение первых n натуральных чисел кратко обозначают $n!$ (читается: эн-факториал). Так, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Кроме того, по определению, $0! = 1$.

При этом $r_a \neq 0$ и $r_a \neq 1$. Следовательно, $r_a \geq 2$. Кроме того, $r_a \neq p-1$. Действительно, предположим, что $r_a = p-1$. Тогда

$$ar_a - 1 = ap - (a+1) : p,$$

что невозможно, так как $a+1 \leq p-1$, и, следовательно, число $a+1$ не может делиться на p . Таким образом, $r_a \neq p-1$. Но тогда $2 \leq r_a \leq p-2$, т. е. $r_a \in A$.

Покажем, что $r_a \neq a$. Действительно, пусть $r_a = a$, т. е. $a^2 - 1 : p$. Тогда $(a-1)(a+1) : p$, и, следовательно, $a-1 : p$ или $a+1 : p$. Однако это невозможно, так как $1 \leq a-1 \leq p-3$, $3 \leq a+1 \leq p-1$.

Итак, для произвольного числа a из множества A в этом множестве существует и при том единственное число r_a такое, что $ar_a - 1 : p$, причем $r_a \neq a$. Обозначим

$$a_1 = a, \quad a_2 = r_a, \quad A_1 = \{a_1, a_2\},$$

и пусть a_3 — некоторое число из A , отличное от a_1 и a_2 (т. е. $a_3 \in A$, $a_3 \notin A_1$). Рассуждая как и раньше, приходим к заключению, что в множестве A имеется такое число a_4 ($a_4 \neq a_3$), что $a_3a_4 - 1 : p$. При этом число a_4 определяется однозначно и отлично от a_1 и a_2 . Действительно, предположим, что $a_4 = a_2$. Тогда $a_3a_2 - 1 : p$ и $a_1a_2 - 1 : p$, и, следовательно,

$$(a_3a_2 - 1) - (a_1a_2 - 1) = a_2(a_3 - a_1) : p.$$

А так как $(a_2, p) = 1$, то $a_3 - a_1 : p$, где $|a_3 - a_1| < p$. Но тогда (см. гл. 1, § 1, свойство 5) $a_3 = a_1$, что противоречит выбору числа a_3 ($a_3 \notin A_1$). Таким образом, $a_4 \notin A_1$.

Рассмотрим множество $A_2 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Пусть $A_2 \neq A$ и a_5 — некоторое число из A , не принадлежащее A_2 . Для этого числа в A найдется и при том единственное число a_6 и такое, что

$$a_5a_6 - 1 : p, \quad a_6 \notin A_2, \quad a_6 \neq a_5.$$

Если множество $A_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \neq A$, то рассуждая как и раньше, найдем числа a_7 и a_8 из A , не принадлежащие множеству A_3 , и такие, что $a_7a_8 - 1 : p$.

Продолжая этот процесс, через конечное число шагов получим

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n\},$$

где $n = p-1$ — четное число и при $k = 2, 4, \dots, n$ $a_{k-1}a_k - 1 : p$ или, что то же самое,

$$a_{k-1}a_k = 1 + pq_k \quad (k = 2, 4, \dots, n).$$

Перемножая эти равенства, получим

$$a_1 a_2 \dots a_n = 1 + pq.$$

А так как числа a_1, a_2, \dots, a_n совпадают с числами $2, 3, \dots, p-2$ (но расположены, вообще говоря, в другом порядке), то

$$a_1 a_2 \dots a_n = 2 \cdot 3 \dots (p-2) = (p-2)!$$

Таким образом,

$$(p-2)! = 1 + pq.$$

Умножая обе части этого равенства на $p-1$, получим

$$(p-1)! = -1 + p(q+1).$$

Следовательно, $(p-1)! + 1 \vdots p$.

Обратное утверждение доказывается совсем просто. Действительно, пусть $(p-1)! + 1$ делится на p . Предположим, что p — составное число. Тогда p делится на некоторое число m такое, что $1 < m < p$. Но тогда $(p-1)! \vdots m$, и, следовательно, $1 \vdots m$, что невозможно. Таким образом, предположение о том, что число p — составное, неверное. ■

Замечание. Прежде чем приступить к доказательству теоремы Вильсона, идею доказательства первой части этой теоремы можно проиллюстрировать на конкретном примере. Пусть, например, $p = 11$. Тогда $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Пусть $a_1 = 2$. Тогда $a_2 = 6$, так как $a_1 a_2 - 1 = 12 - 1 \vdots 11$, и $A_1 = \{2, 6\}$. Пусть теперь $a_3 = 3$. Тогда $a_4 = 4$ ($a_3 a_4 - 1 = 11 \vdots 11$). Следовательно, $A_2 = \{2, 3, 4, 6\}$. Рассматриваем следующее число $a_5 = 5$. Тогда $a_6 = 9$, $A_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. Аналогично $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, после чего $A_4 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = A$. Но тогда

$$a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 - 1 = 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 - 1 = 9! - 1 \vdots 11.$$

Следовательно, $10! + 1 \vdots 11$.

§ 3. Первое обобщение теоремы Вильсона

Теорема 3.4. Пусть p — простое число. Тогда для любого целого числа n ($0 \leq n \leq p-1$)

$$n! (p - (n+1))! + (-1)^n \vdots p. \quad (3.3)$$

Наоборот, если $p > 1$ и (3.3) имеет место хотя бы для одного целого числа n , удовлетворяющего условию $0 \leq n \leq p-1$, то p — простое число.

□ Пусть p — простое число и

$$a_n = n! (p - (n + 1))! + (-1)^n.$$

Тогда, как легко проверить,

$$a_n + a_{n+1} = n! (p - (n + 2))! p.$$

Следовательно, $a_n + a_{n+1} \vdots p$. А так как $a_0 = (p - 1)! + 1 \vdots p$, то и $a_1 \vdots p$. Но тогда $a_2 \vdots p$ и т. д.

Таким образом, числа a_0, a_1, \dots, a_{p-1} делятся на p , что и доказывает 3.3. Наоборот, пусть при некотором n $a_n \vdots p$ ($0 \leq n \leq p - 1$). Тогда $a_{n+1} \vdots p$ (так как $a_n + a_{n+1} \vdots p$). Продолжая эти рассуждения, получим, что $a_{p-1} = (p - 1)! + 1 \vdots p$. Но тогда, на основании теоремы Вильсона, p — простое число. ■

Следствие 3.1. *Натуральное число $p > 2$ является простым тогда и только тогда, когда*

$$\left[\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 + (-1)^{\frac{p-1}{2}} \vdots p. \quad (3.4)$$

□ Достаточно в предыдущей теореме взять $n = \frac{p-1}{2}$. ■

Следствие 3.2. *Пусть p — простое число вида $4k + 3$. Тогда*

$$\left(\frac{p-1}{2} \right)! + 1 \vdots p \text{ или } \left(\frac{p-1}{2} \right)! - 1 \vdots p. \quad (3.5)$$

□ При $p = 4k + 3$ соотношение (3.4) запишем в виде

$$\left[\left(\frac{p-1}{2} \right)! \right]^2 - 1 \vdots p,$$

откуда и следует (3.5). ■

Теорема 3.5. *Пусть p — простое число. Тогда*

$$C_{p-1}^n + (-1)^{n+1} \vdots p \quad (0 \leq n \leq p - 1), \quad (3.6)$$

где C_m^n — биномиальный коэффициент.

□ Воспользовавшись формулой $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, получим, что

$$\begin{aligned} n! [p - (n + 1)]! (C_{p-1}^n + (-1)^{n+1}) &= \\ &= (p - 1)! + 1 + (-1)^{n+1} (n! [p - (n + 1)]! + (-1)^n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

А так как правая часть в (3.7) делится на p , то и левая часть в этом равенстве делится на p . Однако $n! [p - (n + 1)]!$ не может делиться на p . Следовательно, $C_{p-1}^n + (-1)^{n+1} \vdots p$. ■

Следствие 3.3. Для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots, p-2\}$

$$C_{p-1}^k + C_{p-1}^{k+1} \vdots p.$$

Пример. Пусть $p = 11$. Тогда

$$C_{10}^1 + 1 = 10 + 1 \vdots 11, \quad C_{10}^2 - 1 = 45 - 1 \vdots 11, \quad C_{10}^3 + 1 = 120 + 1 \vdots 11, \\ C_{10}^4 - 1 = 210 - 1 \vdots 11, \quad C_{10}^5 + 1 = 252 + 1 \vdots 11.$$

При этом

$$C_{10}^0 + C_{10}^1 = 11 \vdots 11, \quad C_{10}^1 + C_{10}^2 = 55 \vdots 11, \dots$$

Теорема 3.6. (Ферма). Пусть $(a, p) = 1$. Тогда $a^{p-1} - 1 \vdots p$.

□ Применяя к числам a и p теорему о делении с остатком (гл. 2, § 1), получим $a = pa_1 + r$ ($0 < r < p$). Но тогда

$$a^{p-1} - 1 = (pa_1 + r)^{p-1} - 1 = pN + r^{p-1} - 1.$$

Следовательно,

$$a^{p-1} - 1 \vdots p \Leftrightarrow r^{p-1} - 1 \vdots p. \quad (3.8)$$

На основании (3.8) приходим к заключению, что при $r = 1$ утверждение справедливо: $a^{p-1} - 1$ делится на p .

Пусть $r = 2$. Тогда

$$r^{p-1} - 1 = (1+1)^{p-1} - 1 = C_{p-1}^0 + C_{p-1}^1 + C_{p-1}^2 + \dots + C_{p-1}^{p-2}. \quad (3.9)$$

А так как, с учетом следствия 3.3, в правой части равенства (3.9) сумма двух рядом расположенных слагаемых делится на p , то и $2^{p-1} - 1 \vdots p$.

Предположим, что при некотором $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ $k^{p-1} - 1 \vdots p$. Если при этом $k+1 < p$, то

$$(k+1)^{p-1} - 1 = k^{p-1} + C_{p-1}^1 k^{p-2} + C_{p-1}^2 k^{p-3} + \dots + C_{p-1}^{p-2} k, \quad (3.10)$$

где, на основании теоремы 3.5,

$$C_{p-1}^k = pq_k + (-1)^k. \quad (3.11)$$

Но тогда, с учетом равенств (3.10) и (3.11),

$$(k+1)^{p-1} - 1 = pq + k(k^{p-2} - k^{p-3} + \dots + k - 1).$$

Умножая обе части последнего равенства на $k+1$, получим

$$(k+1)[(k+1)^{p-1} - 1] = pq(k+1) + k(k^{p-1} - 1). \quad (3.12)$$

А так как на основании предположения $k^{p-1} - 1 \vdots p$, то правая часть в (3.12) делится на p . Учитывая теперь, что

$k+1$ не делится на p (так как $k+1 < p$), приходим к заключению, что $(k+1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Следовательно, для любого $r \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, что, на основании (3.8), и доказывает теорему. ■

§ 4. Второе обобщение теоремы Вильсона

Пусть $m > 1$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрим совокупность

$$a_1, a_2, \dots, a_s \quad (a_1 = 1, a_s = m-1) \quad (3.13)$$

всех натуральных чисел, меньших m и взаимно простых с m . Число a из совокупности (3.13) назовем *согласованным* с m , если $a^2 \equiv 1 \pmod{m}$. В противном случае (т. е. если $a^2 \equiv 1$ не делится на m) число a из совокупности (3.13) будем называть *несогласованным* с m .

В таблице, которая здесь приведена, выписаны совокупности вида (3.13) для натуральных чисел $m \leq 15$. При этом числа, согласованные с m , выделены жирным шрифтом.

m	Совокупность (3.13)	m	Совокупность (3.13)
2	1,	9	1, 2, 4, 5, 7, 8
3	1, 2	10	1, 3, 7, 9
4	1, 3	11	1, 2, 3, ..., 9, 10
5	1, 2, 3, 4	12	1, 5, 7, 11
6	1, 5	13	1, 2, 3, ..., 11, 12
7	1, 2, 3, 4, 5, 6	14	1, 3, 5, 9, 11, 13
8	1, 3, 5, 7	15	1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

Отметим некоторые свойства согласованных и несогласованных чисел.

Свойство 1. У простого числа $p > 2$ имеются лишь два согласованных числа: 1 и $p-1$.

□ Действительно, если $1 < a < p-1$, то, как уже отмечалось в § 2 (при доказательстве теоремы Вильсона), разность $a^2 - 1$ не может делиться на p . Следовательно, a не является согласованным с p числом. ■

Свойство 2. Если число a согласованное с m , то число $m-a$ также согласованное с m .

□ Действительно, пусть $a^2 - 1 \vdots m$. Тогда $(m - a)^2 - 1 = m^2 - 2am + (a^2 - 1) \vdots m$, причем $1 \leq m - a \leq m - 1$ и $(m - a, m) = 1$.

Следовательно, $m - a$ — согласованное с m число. ■

Следствие 3.4. Если a — несогласованное с m число, то $m - a$ — также несогласованное с m .

Свойство 3. Пусть a — согласованное с m число. Тогда

$$a(m - a) + 1 \vdots m.$$

□ Действительно, так как $a^2 - 1 \vdots m$, то

$$a(m - a) + 1 = am - (a^2 - 1) \vdots m. \quad \blacksquare$$

Теорема 3.7. Пусть $m > 2$ и a_1, a_2, \dots, a_s ($a_1 = 1, a_s = m - 1$) — все натуральные числа, меньшие m и взаимно простые с m . Тогда

$$a_1 a_2 \dots a_s = (-1)^{\frac{\delta(m)}{2}} \vdots m, \quad (3.14)$$

где $\delta(m)$ — количество согласованных с m чисел.

Заметим, что если $m = p$ — простое число, то $a_1 a_2 \dots a_s = (p - 1)!$, и, на основании свойства 1, $\delta(p) = 2$. Следовательно, в этом случае (3.14) запишем в виде $(p - 1)! + 1 \vdots p$, что согласуется с теоремой Вильсона.

□ Пусть b_1, b_2, \dots, b_r ($r = \delta(m)$) — все согласованные с m числа, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$, $x_1 = b_1$, $x_2 = m - b_1$. На основании свойства 2, $x_2 \in B$, причем $x_2 \neq x_1$. Действительно, если бы $x_2 = x_1$, то имело бы место равенство $m = 2b_1$. А так как $(m, b_1) = 1$, то указанное равенство возможно лишь при $b_1 = 1$. Но тогда $m = 2$, что противоречит условию теоремы.

Пусть $B_2 = \{x_1, x_2\}$. Если $B_2 \neq B$, то обозначим через x_3 некоторое число из B , не принадлежащее B_2 , и пусть $x_4 = m - x_3$. Тогда $x_4 \neq x_3$ и, кроме того, $x_4 \neq x_1$, $x_4 \neq x_2$. Действительно, предположим, что $x_4 = x_1$, т. е. $m - x_3 = x_1$. Тогда $x_3 = m - x_1 = x_2$, что противоречит выбору числа x_3 . Аналогично, если $x_4 = x_2$, то $m - x_3 = m - x_1$, и, следовательно, $x_3 = x_1$, что также невозможно. Продолжая эти рассуждения и учитывая, что при $m > 2$ число $\delta(m)$ — четное, получим

$$B = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_r\},$$

причем, на основании предыдущего,

$$x_2 = m - x_1, x_4 = m - x_3, \dots, x_r = m - x_{r-1}.$$

Но тогда, с учетом свойства 3,

$$x_1x_2 + 1 \vdots m, x_3x_4 + 1 \vdots m, \dots, x_{r-1}x_r + 1 \vdots m,$$

или, что то же самое,

$$x_1x_2 = -1 + mq_1, x_3x_4 = -1 + mq_2, \dots, x_{r-1}x_r = -1 + mq_k, \quad (3.15)$$

где $k = \frac{r}{2} = \frac{\delta(m)}{2}$. Перемножая равенства (3.15), получим

$$x_1x_2 \dots x_r = (-1)^{\frac{\delta(m)}{2}} + mq. \quad (3.16)$$

При этом числа x_1, x_2, \dots, x_r совпадают с числами b_1, b_2, \dots, b_r , расположенными, может быть, в другом порядке. Поэтому равенство (3.16) можно записать в виде

$$b_1b_2 \dots b_r = (-1)^{\frac{\delta(m)}{2}} + mq. \quad (3.17)$$

Если $r = s$, то теорема доказана (так как в таком случае (3.14) легко следует из (3.17)).

Предположим, что $r < s$ и

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_{s-r}\} -$$

совокупность всех несогласованных с m чисел. Обозначим $y_1 = c_1$. Тогда, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы Вильсона (§ 2), приходим к заключению, что в C найдется такое число y_2 , что $y_1y_2 - 1 \vdots m$. При этом $y_2 \neq y_1$, так как y_1 — несогласованное с m число.

Пусть $C_2 = \{y_1, y_2\}$. Если $C_2 \neq C$, то обозначим через y_3 некоторое число из C , не принадлежащее C_2 . Для числа y_3 в C найдется такое число y_4 , что $y_3y_4 - 1 \vdots m$, причем $y_4 \notin C_2$ (последнее обосновывается так же, как и при доказательстве теоремы Вильсона).

Продолжая этот процесс, получим

$$C = \{y_1, y_2, \dots, y_{s-r}\},$$

причем, на основании предыдущего,

$$y_1y_2 - 1 \vdots m, y_3y_4 - 1 \vdots m, \dots, y_{s-r-1}y_{s-r} - 1 \vdots m.$$

Но тогда

$$y_1y_2 = 1 + mt_1, y_3y_4 = 1 + mt_2, \dots, y_{s-r-1}y_{s-r} = 1 + mt_i.$$

Таким образом,

$$y_1y_2 \dots y_{s-r} = 1 + mt.$$

При этом числа y_1, y_2, \dots, y_{s-r} совпадают с числами c_1, c_2, \dots, c_{s-r} , записанными, возможно, в другом порядке. А это означает, что равенство (3.13) можно записать в виде

$$c_1 c_2 \dots c_{s-r} = 1 + mt. \quad (3.19)$$

Перемножая теперь почленно равенства (3.17) и (3.19) и учитывая, что

$$(b_1 b_2 \dots b_r) (c_1 c_2 \dots c_{s-r}) = a_1 a_2 \dots a_s,$$

получим равенство

$$a_1 a_2 \dots a_s = (-1)^{\frac{s(m)}{2}} + md,$$

откуда следует (3.14) ■

УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеются ли среди чисел 1983, 1987, 1991, 1993, 1997, 1999 простые числа?

2. Докажите следствие 3.3 без использования теоремы Вильсона и теоремы 3.5.

Указание. Используйте свойство суммы $C_{p-1}^k + C_{p-1}^{k+1}$.

3. Докажите теорему 3.5, воспользовавшись следствием 3.3.

ГЛАВА 4

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ

$$x^n + px^k + q = 0$$

§ 1. Комплексные числа

Комплексные числа часто определяют как выражения вида $a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — некоторый символ, который называют мнимой единицей. При этом предполагается, что комплексные числа удовлетворяют следующим условиям (аксиомам).

Аксиома 1.

$$a + bi = c + di \leftrightarrow a = c, b = d,$$

Аксиома 2.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Аксиома 3.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Таким образом, аксиомой 1 характеризуется равенство комплексных чисел, а аксиомами 2 и 3 — операции сложения и умножения таких чисел.

Опираясь на аксиомы 1—3, нетрудно уже чисто логическим путем установить, что операции сложения и умножения комплексных чисел коммутативны, ассоциативны и операция умножения связана с операцией сложения дистрибутивным законом. Другими словами, если

$$z = a + bi, \lambda = c + di, u = k + li$$

есть произвольные комплексные числа, то

$$\begin{aligned} z + \lambda &= \lambda + z, (z + \lambda) + u = z + (\lambda + u), \\ z\lambda &= \lambda z, (z\lambda)u = z(\lambda u), \\ (z + \lambda)u &= zu + \lambda u. \end{aligned}$$

Кроме того, операции сложения и умножения комплексных чисел оказываются обратимыми. Это дает возможность ввести операции вычитания и деления рассматриваемых чисел:

$$\begin{aligned} (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i; \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

При этом последнее равенство имеет место лишь при условии, что $c^2 + d^2 \neq 0$, или, что то же самое, если $c + di \neq 0 + 0i$.

Отождествляя комплексное число $a + 0i$ с действительным числом a , получим «включение» множества действительных чисел R в множество комплексных чисел, которое обычно обозначается буквой C ($R \subset C$). При этом, применяя к действительным числам a и b , которые рассматриваются как комплексные числа ($a = a + 0i$, $b = b + 0i$), операции сложения, умножения, вычитания и деления, которые были определены для комплексных чисел, мы получим те же результаты, которые получили бы, применяя к указанным числам соответствующие операции, определенные для действительных чисел. Например, $(a + 0i)(b + 0i) = (ab - 0 \cdot 0) + (a0 + 0b)i = ab + 0i = ab$.

Таким образом, действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных чисел. В связи с этим комплексное число $a + bi$ называют невещественным, если $b \neq 0$.

На основании предыдущего, осуществляя арифметические операции над действительными числами, мы не можем получить невещественное число. Однако обратное

не всегда верно: в результате применения арифметических операций к не вещественным комплексным числам мы можем получить как не вещественные, так и вещественные числа. Прежде чем проиллюстрировать это, условимся относительно следующих естественных обозначений:

$$0 + bi = bi, \quad 1 \cdot i = i, \quad i^2 = ii.$$

Тогда $i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)i = -1$, т. е. $i^2 = -1$.

Учитывая последнее равенство, часто пишут: $i = \sqrt{-1}$. Однако при этом следует помнить, что равенство $i = \sqrt{-1}$ можно получить (при соответствующем расширении понятия корня), но нельзя использовать его в качестве определения числа i .

В связи с этим, например, в «Пособии для поступающих в вузы» (Наука, 1973, с. 87) Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов и Н. Х. Ровов пишут: «И все же поступающий не должен допускать при изложении теории комплексных чисел явных нелепостей. Например, часто «определяют» комплексные числа так: «комплексным числом называют числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ ». На самом деле это определение просто непонятно. Ведь знак радикала употребляется (см. гл. 1, § 2) для обозначения арифметического квадратного корня из положительного действительного числа, а что означает $\sqrt{-1}$ — неизвестно!».

Число $\bar{z} = a - bi$ называют *комплексно сопряженным* (или просто *сопряженным*) с комплексным числом $z = a + bi$. Как легко проверить,

$$z + \bar{z} = 2a, \quad z\bar{z} = a^2 + b^2,$$

т. е. сумма и произведение числа z и сопряженного числа \bar{z} есть вещественные числа. При этом вещественное число $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ называют *модулем* комплексного числа z .

Впервые о комплексных числах упоминается в книге итальянского математика Кардано (1501—1576) в связи с исследованием уравнения третьей степени (см. § 4). Однако долгое время комплексные числа считали нереальными; их называли «абсурдными», «мнимыми», «невозможными», «фиктивными» и т. п. Объясняется это тем, что все наивные числа можно было как-то связать с реальными объектами (счет, измерение и т. п.), тогда как в случае комплексных чисел сделать это долгое время не удавалось.

Однако все это не мешало ученым пользоваться комплексными числами как некоторыми вспомогательными величинами, что часто упрощало математические преобразования.

Постепенное выяснение свойств комплексных чисел привело к осознанию того, что эти числа не менее реальны и важны для математики и различных приложений, чем более привычные натуральные, рациональные или иррациональные числа.

Окончательное признание комплексные числа получили после того, как было найдено геометрическое истолкование их в работах датского математика Каспера Весселя (1745—1818) и швейцарского математика Аргана (1768—1822).

§ 2. Квадратные уравнения

В школьном курсе математики подчеркивается, что квадратное уравнение, т. е. уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (4.1)$$

может либо иметь корни, либо их не иметь. Например, уравнение

$$x^2 + 10x + 26 = 0, \quad (4.2)$$

которое может быть преобразовано к виду

$$(x + 5)^2 + 1 = 0, \quad (4.3)$$

не имеет корней, так как «выражение $(x + 5)^2 + 1$ при любом значении переменной x положительно, следовательно, уравнение (4.3) не имеет корней». Все это верно, если корни квадратного уравнения искать среди действительных чисел. Однако ситуация существенно изменится, если мы будем искать корни уже в более широком множестве — в множестве комплексных чисел. Так нетрудно проверить, что комплексные числа $x_1 = -5 + i$ и $x_2 = -5 - i$ есть корни уравнения (4.3), или, что то же самое, уравнения (4.2).

Оказывается, что не только указанное конкретное уравнение, но и любое квадратное уравнение имеет корни в множестве комплексных чисел. В дальнейшем мы покажем это в случае квадратного уравнения с действительными коэффициентами. Но предварительно рассмотрим уравнение вида

$$z^2 = a \quad (a < 0). \quad (4.4)$$

Найдем z в виде $z = x + yi$. Подставляя это значение в (4.4) и возводя в квадрат, получим

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a,$$

откуда

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = 0.$$

Так как $a < 0$, то, очевидно, $y \neq 0$. Но тогда $x = 0$ и, следовательно, $y^2 = -a$ больше нуля. Корни этого урав-

нения $y_1 = \sqrt{-a}$ и $y_2 = -\sqrt{-a}$. А это означает, что корни уравнения (4.4) имеют вид

$$z_1 = \sqrt{-a}i, \quad z_2 = -\sqrt{-a}i \quad (4.5)$$

(или, что то же самое, $z_1 = \sqrt{|a|}i$, $z_2 = -\sqrt{|a|}i$).

Учитывая равенство $z_1^2 = a$, условимся (по аналогии со случаем $a \geq 0$) писать $z_1 = \sqrt{a}$. Тогда, на основании (4.5),

$$\sqrt{a} = \sqrt{-a}i \quad (a < 0) \quad (4.6)$$

и, в частности, при $a = -1$ $\sqrt{-1} = i$.

На основании (4.5) также получаем $z_2 = -\sqrt{a}$.

Рассмотрим теперь общее квадратное уравнение

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (4.7)$$

с действительными коэффициентами a , b и c . Поступая так же, как и в случае обычного квадратного уравнения (относительно вещественного неизвестного), преобразуем это уравнение к виду

$$a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = 0,$$

где $D = b^2 - 4ac$, или, что то же самое,

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Но тогда, учитывая предыдущие рассуждения, можем найти корни z_1 и z_2 уравнения (4.7):

$$z_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\bar{D}}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\bar{D}}}{2|a|}, \quad z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\bar{D}}}{2|a|}.$$

При $a > 0$ последние выражения запишем так:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (4.8)$$

Если же $a < 0$, то $|a| = -a$, и мы получим равенства (4.8), в которых, однако, z_1 и z_2 поменяются местами.

Таким образом, корни z_1 и z_2 квадратного уравнения (4.7) с действительными коэффициентами всегда существуют и находятся по тем же формулам, что и корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $b^2 - 4ac \geq 0$. Следует только помнить, что в случае $b^2 - 4ac < 0$ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ вычисля-

ется по формуле (4.6). Для иллюстрации рассмотрим снова уравнение (4.2). На основании (4.8) устанавливаем, что

$$z_1 = \frac{-10 + \sqrt{100 - 104}}{2} = \frac{-10 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{-10 + \sqrt{4}i}{2},$$

т. е. $z_1 = -5 + i$. Аналогично $z_2 = -5 - i$.

В общем случае, как и в случае вещественных корней, также справедлива теорема Виета: сумма корней квадратного уравнения (4.7) равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$, т. е.

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \quad (4.9)$$

Равенства (4.9) легко установить, используя равенства (4.8).

§ 3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Поставим в соответствие комплексному числу $a + bi$ точку плоскости с координатами (a, b) . В результате получим взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точек плоскости. В связи с этим на практике комплексные числа часто отождествляют с точками плоскости и вместо «комплексное число $z = a + bi$ » говорят «точка $z = a + bi$ ».

С другой стороны, учитывая, что каждой точке плоскости с координатами (a, b) соответствует единственный вектор с началом в точке $(0, 0)$ и концом в точке (a, b) , комплексное число $a + bi$ часто отождествляют с таким вектором (что более удобно при иллюстрации действий над комплексными числами). В связи с этим вместо «комплексное число $z = a + bi$ » говорят также «вектор $z = a + bi$ ».

Угол α между осью абсцисс и вектором $z \neq 0$, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс, называют *аргументом* комплексного числа z . Из рис. 1 видно, что

$$b = r \sin \varphi, \quad a = r \cos \varphi, \quad (4.10)$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — длина вектора z (или, что то же самое, модуль комплексного числа z).

Используя (4.10), убеждаемся, что

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (4.11)$$

Правую часть в (4.11) называют *тригонометрической формой* комплексного числа z . Тригонометрическая форма комплексных чисел особенно удобна для записи операций умножения и деления комплексных чисел. Например, если

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \lambda = s(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то, как легко проверить (используя теоремы сложения тригонометрических функций),

$$z\lambda = rs[\cos(\varphi + \alpha) + i \sin(\varphi + \alpha)], \quad (4.12)$$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{r}{s}[\cos(\varphi - \alpha) + i \sin(\varphi - \alpha)]. \quad (4.13)$$

В частности, на основании (4.12),

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Воспользовавшись принципом математической индукции, нетрудно проверить, что

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (4.14)$$

В частности, при $r = 1$ получаем так называемую *формулу Муавра*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (4.15)$$

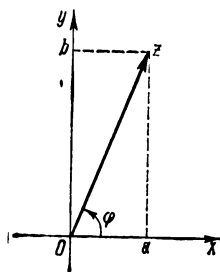


Рис. 1.

При этом формулы (4.14) и (4.15) справедливы не только при натуральных n , но и при любых целых n .

Тригонометрическая форма комплексного числа дает возможность довольно просто решать уравнения вида $z^n = \theta$, где $n \in \mathbb{N}$, а θ — фиксированное комплексное число. Действительно, записывая θ в тригонометрической форме

$$\theta = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

простой проверкой (с использованием формулы (4.14)), убеждаемся, что рассматриваемое уравнение имеет n различных корней, которые определяются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (4.16)$$

где $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Все эти корни расположены через равные промежутки на окружности радиуса $R = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат.

§ 4. Уравнение $x^3 + px + q = 0$

Произвольное кубическое уравнение

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

с помощью подстановки $y = x - \frac{a}{3}$ можно привести к виду

$$x^3 + px + q = 0. \quad (4.17)$$

Поэтому, не ограничивая общность, можем рассматривать лишь кубические уравнения вида (4.17). В дальнейшем условимся, что p и q — вещественные числа.

В отличие от квадратного уравнения корни кубического уравнения находятся уже не так просто. Если способ решения квадратного уравнения знали еще за 2000 лет до нашей эры (Вавилон), то общий способ решения кубического уравнения был предложен лишь в XVI веке.

Если $p = 0$, то корни уравнения (4.17) могут быть найдены способом, рассмотренным в предыдущем параграфе, или простым разложением на множители

$$x^3 + q = (x + \alpha)(x^2 - x\alpha + \alpha^2) \quad (\alpha = \sqrt[3]{-q}).$$

Откуда следует, что $x_1 = -\sqrt[3]{q}$, а остальные два корня x_2 и x_3 уравнения $x^3 + q = 0$ находим как корни уравнения $x^2 - x\alpha + \alpha^2 = 0$.

Теорема 4.1. Пусть $p \neq 0$. Тогда корни уравнения (4.17) могут быть найдены по формуле

$$x_k = \alpha_k - \frac{p}{3\alpha_k} \quad (k \in \{1, 2, 3\}), \quad (4.18)$$

где α_k — корни уравнения.

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D} \quad \left(D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right). \quad (4.19)$$

□ Действительно, пусть α — корень уравнения (4.19) и $x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}$ (индекс k для удобства не пишем). Тогда

$$\begin{aligned} x^3 + px + q &= \alpha^3 - 3\alpha^2 \frac{p}{3\alpha} + 3\alpha \frac{p^2}{9\alpha^2} - \frac{p^3}{27\alpha^3} + p\alpha - \\ &\quad - \frac{p^2}{3\alpha} + q = \alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} + q. \end{aligned}$$

А так как¹ $\frac{p^3}{27\alpha^3} = \frac{q}{2} + \sqrt{D}$, то

$$\alpha^3 - \frac{p^3}{27\alpha^3} + q = -q + q = 0. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Обозначим $\beta_k = -\frac{p}{3\alpha_k}$. Тогда, как легко проверить, β_k есть корень уравнения

$$\beta^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D}, \quad (4.20)$$

удовлетворяющий условию $\alpha_k \beta_k = -\frac{p}{3}$. Поэтому формулы для корней уравнения (4.17) часто записывают в следующем виде (формулы Кардано): $x_k = \alpha_k + \beta_k$, где α_k и β_k — корни соответственно уравнений (4.19) и (4.20), удовлетворяющие условию $\alpha_k \beta_k = -\frac{p}{3}$.

Иногда корни уравнений (4.19) и (4.20) записывают также в виде

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}. \quad (4.21)$$

Тогда формулу для корней уравнения (4.17) записывают так:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}, \quad (4.22)$$

где D определяется равенством (4.19). Однако при этом следует помнить, что корни (4.21) определяются неоднозначно и что в формуле (4.22) следует брать такие значения α и β , произведение которых равно $-\frac{p}{3}$.

§ 5. Исследование корней уравнения

$$x^3 + px + q = 0$$

Установленные в предыдущем параграфе формулы Кардано для решений кубического уравнения (4.17) дают возможность выяснить, какие корни этого уравнения вещественные, а какие — нет. При этом оказывается, что все зависит от знака числа $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. А именно, имеют место следующие утверждения.

1. Если $D > 0$, то уравнение (4.17) имеет один вещественный корень и два не вещественных корня.

¹ Действительно, на основании (4.19)

$$\left(\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)\alpha^3 = D - \frac{q}{4} = \frac{p^3}{27},$$

откуда и следует рассматриваемое равенство.

2. Если $D < 0$, то все три корня уравнения (4.17) — вещественные.

3. Если $D = 0$, то все корни уравнения (4.17) — вещественные, причем два из них совпадают (кратный корень).

Доказательство этих утверждений существенно опирается на формулы Кардано, и, следовательно, такие доказательства применимы лишь в случае кубического уравнения (4.17). Однако, оказывается, сформулированные утверждения можно обосновать совершенно иным методом, который при этом применим и в случае других классов уравнений (см. § 6).

Итак, с целью исследования корней уравнения (4.17) рассмотрим функцию f , которую задано формулой

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

Так как $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, то при достаточно больших по модулю отрицательных значениях x $f(x) < 0$, а при достаточно больших положительных значениях x $f(x) > 0$.

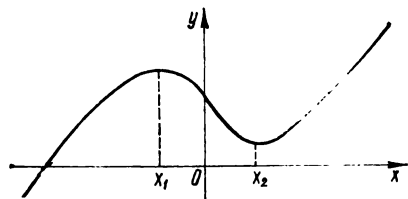


Рис. 2

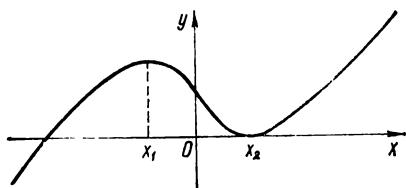


Рис. 3

Кроме того, функция f непрерывна. Поэтому ее график должен хотя бы один раз пересечь ось абсцисс. А это означает, что уравнение (4.17) имеет хотя бы один вещественный корень.

Чтобы выяснить вопрос о наличии или отсутствии других вещественных корней, рассмотрим производную функции f : $f'(x) = 3x^2 + p$. Если $p > 0$, то $f'(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$). Следовательно, f — возрастающая функция. Поэтому график этой функции пересекает ось абсцисс лишь в одной точке. А это означает, что при $p > 0$ функция f имеет лишь один вещественный корень.

К такому же заключению приходим и в случае $p = 0$.

Пусть $p < 0$. Тогда, как легко убедиться, точки

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

являются соответственно точкой максимума и точкой минимума рассматриваемой функции f . Все возможные случаи размещения экстремальных значений функции f пока-

заны на рис. 2—6. Так, на рис. 2 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) > 0$, а на рис. 3 $f(x_1) > 0$, $f(x_2) = 0$.

Очевидно, если значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ одного знака или, что то же самое, если $f(x_1)f(x_2) > 0$ (см. рис. 2 и 4), то график функции f перескает ось абсцисс только в одной точке, т. е. если $f(x_1)f(x_2) > 0$, то уравнение (4.17) имеет лишь один вещественный корень (а двумя другими корнями уравнения (4.17) являются некоторые сопряженные комплексные числа z_1 и z_2 ($z_1 \neq z_2$)).

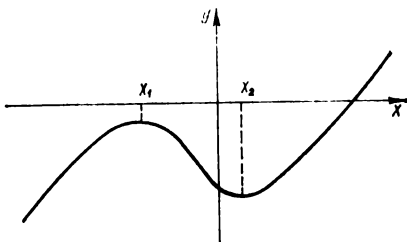


Рис. 4

Аналогично, если $f(x_1)f(x_2) < 0$ (см. рис. 5), то уравнение (4.17) имеет три вещественных корня.

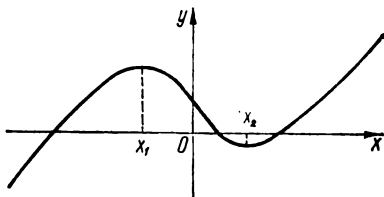


Рис. 5

Если же $f(x_1)f(x_2) = 0$ (см. рис. 3 и 6), то уравнение (4.17) имеет два вещественных корня.

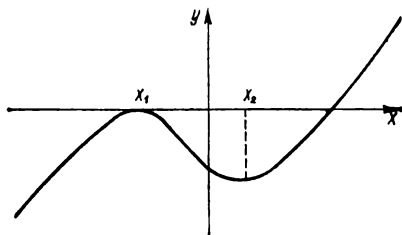


Рис. 6

В случае, указанном на рис. 3, $f(x_2) = f'(x_2) = 0$. Точно так же (см. рис. 6) $f(x_1) = f'(x_1) = 0$. В таких случаях говорят, что соответственно x_2 (x_1) есть корень многочлена $f(x) = x^3 + px + q$ кратности 2. Целесообразность такой терминологии можно объяснить так. В первом случае (рис. 3) многочлен $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = (x - \alpha_1)(x - x_2)^2$, где α_1 — отрицательный действительный корень уравнения (4.17), причем, с учетом тождества $(x - \alpha_1)(x - x_2)^2 = x^3 + px + q$, корень $\alpha_1 = -2x_2$.

Аналогично и во втором случае (рис. 6): $f(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_2)$, где $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, а $\alpha_2 = -2x_1 > 0$.

Рассмотрим теперь число $D = \frac{1}{4} f(x_1)f(x_2)$. Учитывая, что $f(x) = q + x(x^2 + p)$ и $x_1 = -x_2$, получаем

$$\begin{aligned} f(x_2) &= q + x_2(x_2^2 + p), \\ f(x_1) &= f(-x_2) = q - x_2(x_2^2 + p). \end{aligned}$$

Поэтому

$$4D = q^2 - x_2^3 (x_2^2 + p)^2, \quad (4.23)$$

где

$$x_2^2 = -\frac{p}{3}, \quad (x_2^2 + p)^2 = \left(\frac{2p}{3}\right)^2 = \frac{4p^2}{9}. \quad (4.24)$$

Используя теперь (4.23) и (4.24), получим

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

При этом, на основании равенства $D = \frac{1}{4} f(x_1) f(x_2)$ и предыдущих рассуждений, приходим к заключению, что если $D > 0$, то уравнение (4.17) имеет один вещественный корень и два не вещественных корня, а при $D \leq 0$ уравнение (4.17) имеет три вещественных корня, причем в случае $D = 0$ два из них совпадают (кратный корень).

Таким образом, сформулированные в начале параграфа утверждения мы установили без использования формул Кардано. В следующем параграфе этот метод будет использован в более общем случае.

§ 6. Исследование корней уравнения

$$x^n + px^k + q = 0$$

Рассмотрим уравнение

$$x^n + px^k + q = 0, \quad (4.25)$$

где n и k ($n > k$) — нечетные натуральные числа, а p и q — некоторые вещественные числа, и попробуем методами предыдущего параграфа выяснить вопрос о количестве вещественных (невещественных) корней уравнения (4.25). С этой целью рассмотрим функцию

$$f(x) = x^n + px^k + q.$$

Так как n — нечетное, то, как и в предыдущем случае, при достаточно больших по модулю отрицательных значениях x $f(x) < 0$, а при достаточно больших положительных значениях x $f(x) > 0$. Кроме того, функция f непрерывна и, следовательно, ее график должен хотя бы один раз пересечь ось абсцисс. А это означает, что уравнение (4.25) также имеет хотя бы один вещественный корень.

Чтобы установить природу других корней уравнения (4.25), рассмотрим производную функции f :

$$f'(x) = x^{k-1}(nx^{n-k} + pk). \quad (4.26)$$

Так как числа $k-1$ и $n-k$ четные, то, как следует из (4.26), при $p \geq 0$ $f'(x) > 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$). А это означает, что f — возрастающая функция на числовых промежутках $]-\infty, 0[$ и $]0, \infty[$. Но тогда функция f возрастает и на всей числовой прямой¹. Поэтому в рассматриваемом случае уравнение (4.25) имеет лишь один вещественный корень (а остальные корни — невещественные).

Рассмотрим теперь случай $p < 0$. Тогда, с учетом (4.26), критическими точками функции f являются точки: $x_1 = -\sqrt[n-k]{-\frac{pk}{n}}$, $x_2 = 0$ (при $k > 1$), $x_3 = \sqrt[n-k]{-\frac{pk}{n}}$. Для исследования функции f строим соответствующую таблицу

x	$]-\infty; x_1[$	x_1	$]x_1; x_2[$	x_2	$]x_2; x_3[$	x_3	$]x_3; +\infty[$
$f'(x)$	+	0	—	0	—	0	+
$f(x)$	\nearrow	$f(x_1)$	\searrow	$f(x_2)$	\searrow	$f(x_3)$	\nearrow
		max				min	

Таким образом, x_1 есть точка максимума, а x_3 — точка минимума функции f . Поэтому, как и в случае (4.17), приходим к заключению:

1. Если $f(x_1) f(x_3) > 0$, то уравнение (4.25) имеет лишь один вещественный корень.
2. Если $f(x_1) f(x_3) = 0$, то уравнение (4.25) имеет два вещественных корня.
3. Если $f(x_1) f(x_3) < 0$, то уравнение (4.25) имеет три вещественных корня.

¹ Заметим, что если на промежутках $]-\infty, 0[$ и $]0, \infty[$ функция f убывает (или возрастает), то из этого не следует, что f убывает (или возрастает) на всем множестве определения. Примером тому является функция f , определяемая формулой $f(x) = \frac{1}{x}$. Однако в нашем случае такое заключение (о возрастании функции f) справедливо в силу того, что эта функция непрерывна в точке $x = 0$.

Остальные корни в каждом из предыдущих случаев — не вещественные¹.

Рассмотрим выражение

$$D = \frac{1}{(n-k)^2} f(x_1) f(x_3). \quad (4.27)$$

Воспользовавшись тем, что $x_3 = -x_1$, $f(x) = x^k (x^{n-k} + p) + q$ и $x_1^{n-k} = x_3^{n-k} = -\frac{pk}{n}$, приходим, после несложных преобразований, к равенству

$$f(x_1) f(x_3) = q^2 - k^{\frac{2k}{n-k}} \left(\frac{-p}{n} \right)^{\frac{2n}{n-k}} (n-k)^2.$$

Но тогда

$$D = \left(\frac{q}{n-k} \right)^2 - k^{\frac{2k}{n-k}} \left(\frac{-p}{n} \right)^{\frac{2n}{n-k}} \quad (4.28)$$

Учитывая теперь равенство (4.27) и сформулированные ранее утверждения 1—3, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть число D определяется равенством (4.28). Тогда при $D > 0$ уравнение (4.25) имеет лишь один вещественный корень, при $D = 0$ — два вещественных корня, а при $D < 0$ — три вещественных корня. Остальные корни уравнения (4.25) — не вещественные.

З а м е ч а н и е. Введем функцию $\text{sign } x$ („знак числа x “), которая определяется так:

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x = 0), \\ -1 & (x < 0). \end{cases}$$

Тогда общее количество вещественных корней уравнения (4.25) определяется формулой $2 - \text{sign } D$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что корни уравнения $z^2 = a + bi$ ($b \neq 0$) определяются формулами

$$\begin{aligned} z_1 &= -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - \theta \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i, \\ z_2 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \theta \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} i, \end{aligned}$$

где $\theta = \text{sign } b$ — знак числа b .

¹ Относительно возможного количества не вещественных корней см. гл. 6, § 1.

2. Докажите формулы (4.12), (4.13) и (4.14).

3. Воспользовавшись формулой Муавра (формула 4.15), докажите, что при любом натуральном n

$$\sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots,$$

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots$$

4. При каком p уравнение $x^9 + px^3 + 12 = 0$ имеет только один вещественный корень? два вещественных корня? три вещественных корня?

5. При каких q уравнение $x^9 - 18x^3 + q = 0$ имеет только один вещественный корень? два вещественных корня? три вещественных корня?

6. Исследуйте уравнение $x^n + px^k + q = 0$, где $n > k$ — натуральные числа при условии, что а) n — четное, k — нечетное; б) n — нечетное, k — четное; в) n и k — четные числа.

ГЛАВА 5

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА

§ 1. Корни многочлена

В гл. 4 было показано, что в случае многочленов второй или третьей степени корни таких многочленов существуют и могут быть вычислены непосредственно. Существуют также формулы для вычисления корней многочлена четвертой степени. Однако в общем случае нет формул для вычисления корней многочленов степени $n > 4$. Поэтому для таких многочленов возникает, прежде всего, вопрос о существовании корней. Ответ на этот вопрос дает теорема Гаусса: *у произвольного многочлена степени $n \geq 1$ имеется хотя бы один комплексный корень*. Заметим, что в настоящее время существует много различных доказательств теоремы Гаусса, однако все они чрезвычайно сложные и громоздкие или устанавливаются с помощью неэлементарных предположений, на обоснование которых также затрачиваются значительные усилия.

Пример многочлена

$$f(x) = (x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \quad (5.1)$$

показывает, что многочлен может иметь один и только один корень.

Пусть $f(x)$ — многочлен степени n и x_1 — корень этого многочлена. Разделив $f(x)$ на $x - x_1$, получим тождество

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x) + r, \quad (5.2)$$

где r — некоторое число, а $f_1(x)$ — многочлен степени $n - 1$. Подставляя в (5.2) $x = x_1$, получим $r = 0$, и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_1) f_1(x). \quad (5.3)$$

Если при этом $n - 1 > 1$, то, на основании теоремы Гаусса, у многочлена $f_1(x)$ имеется некоторый корень x_2 . Но тогда, по аналогии с (5.3),

$$f_1(x) = (x - x_2) f_2(x), \quad (5.4)$$

где $f_2(x)$ — многочлен степени $n - 2$. Подставим (5.4) в (5.3). В результате получим

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) f_2(x).$$

Продолжая этот процесс, получим тождество

$$f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (5.5)$$

где $a_0 = f_n(x)$ — многочлен степени $n - n = 0$, т. е. число. Очевидно, a_0 — старший коэффициент многочлена $f(x)$, т. е.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n, \quad (5.6)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — некоторые другие числа — коэффициенты многочлена $f(x)$. Подставляя (5.6) в (5.5), раскрывая скобки в правой части тождества (5.5), получим (приравнивая соответствующие коэффициенты при x^{n-1}, x^{n-2}, \dots)

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_2}{a_0}, \quad (5.7)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Формулы (5.7) являются обобщением формул Виета, о которых шла речь в четвертой главе.

На основании (5.5) числа

$$x_1, x_2, \dots, x_n \quad (5.8)$$

являются корнями многочлена $f(x)$. При этом среди чисел x_1, x_2, \dots, x_n могут быть и равные (так, в случае

многочлена (5.1) $x_1 = x_2 = x_3 = a$). Если некоторый корень x_m встречается в (5.8) ровно k раз ($k > 1$), то говорят, что x_m есть кратный корень k -кратности. Так, в случае многочлена (5.1) a есть кратный корень кратности 3.

На основе предыдущих рассуждений приходим к заключению, что с учетом кратности у произвольного многочлена $f(x)$ степени n имеется ровно n корней. Так, у многочлена (5.1) без учета кратности — один корень, а с учетом кратности — три корня.

Отметим, что существует простой способ проверки кратности корня. Так, корень x_0 многочлена $f(x)$ является кратным корнем этого многочлена тогда и только тогда, когда $f'(x_0) = 0$, т. е. если x_0 является также корнем производной многочлена $f(x)$. При этом, если $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, тогда как $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то x_0 есть корень многочлена $f(x)$ кратности k .

§ 2. Случай квадратного уравнения

Известное из школьного курса математики условие отсутствия вещественных корней (или, что то же самое, наличия невещественных корней) уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p и q — вещественные числа, состоит в том, что

$$p^2 - 4q < 0. \quad (5.10)$$

При $q < 0$ неравенство (5.10) невозможно и, таким образом, в этом случае уравнение (5.9) не может иметь невещественных корней.

Неравенство (5.10) устанавливается в процессе решения уравнения (5.9), причем соответствующий метод обоснования неприменим в случае многочленов более высокого порядка.

Однако неравенство (5.10) может быть установлено и другим способом. Действительно, если x_1 и x_2 — вещественные корни уравнения (5.9), то

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 x_2^2}. \quad (5.11)$$

А так как $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$ и $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 - 2q$, то неравенство (5.11) запишем так: $p^2 - 2q \geq 2|q|$. Таким образом, если справедливо неравенство

$$p^2 < 2(q + |q|), \quad (5.12)$$

то корни уравнения (5.9) не могут быть вещественными.

Следовательно, неравенство (5.12) является достаточным условием существования не вещественных корней уравнения (5.9). При $q < 0$ неравенство (5.12) невозможно. Если же $q > 0$, то неравенство (5.12) запишем в виде (5.10).

Таким образом, условие существования не вещественных корней уравнения (5.9) (т. е. неравенство (5.10)) можно установить другим способом, который, как оказывается, применим и в случае многочленов произвольной степени (см. § 3).

§ 3. Общий случай

Рассмотрим теперь уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad (5.13)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — вещественные числа, и пусть x_1, x_2, \dots, x_n — вещественные корни уравнения (5.13) (выписаны с учетом кратности). Воспользовавшись известным неравенством¹

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n},$$

которое справедливо для любых неотрицательных чисел b_1, b_2, \dots, b_n , получим

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \geq \sqrt[n]{x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2}. \quad (5.14)$$

При этом (см. формулы Виета в § 1)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -a_1, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n a_n, \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n &= a_2. \end{aligned}$$

Но тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - \\ &- 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) = a_1^2 - 2a_2. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (5.14) можем записать так:

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \geq \sqrt[n]{a_n^2}. \quad (5.15)$$

На основании предыдущего, неравенство (5.15) выполняется при условии, что все корни уравнения (5.13) ве-

¹Доказательство этого неравенства можно найти в [8].

ществленные. Следовательно, если для некоторого уравнения вида (5.13) справедливо неравенство

$$a_1^2 - 2a_2 < n \sqrt[n]{a_n^3}, \quad (5.16)$$

то корни такого уравнения не могут быть все вещественными.

Таким образом, неравенство (5.16) является достаточным условием существования не вещественных корней уравнения (5.13).

На основании предыдущего, если $a_n \neq 0$ и $a_1^2 \leq 2a_n$ (в частности, если $a_1 = a_2 = 0$), то независимо от значений других коэффициентов уравнения (5.13) среди корней этого уравнения имеются и не вещественные корни.

Рассмотрим теперь уравнение

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + 1 = 0, \quad (5.17)$$

которое получается из уравнения (5.13) в результате замены $x = \frac{1}{y}$. Если x_1, x_2, \dots, x_n — корни уравнения (5.13), то, очевидно, $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ — корни уравнения (5.17) (предполагая, что $a_n \neq 0$, и, следовательно, $x_k \neq 0$).

Рассуждая теперь так же, как и при обосновании условия (5.16), получим другое достаточное условие существования не вещественных корней уравнения (5.13) (или, что то же самое, уравнения (5.17)) в виде следующего неравенства:

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n < n \sqrt[n]{a_n^{2n-2}}. \quad (5.18)$$

(Это неравенство можно получить, непосредственно используя неравенство (5.16)).

На основании (5.18) приходим, в частности к заключению, что если оба предпоследних коэффициента уравнения (5.13) равны нулю (или $a_{n-1}^2 \leq 2a_{n-2} a_n$) и $a_n \neq 0$, то некоторые из корней уравнения (5.13) не вещественные.

З а м е ч а н и е. Условие существования не вещественных корней уравнения (5.13) (т. е. неравенства (5.16) или (5.18)) в общем случае является достаточным, но не является необходимым. Действительно, рассмотрим уравнение

$$x^3 - 11x^2 + 36x - 26 = 0. \quad (5.19)$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5 + i, \quad x_3 = 5 - i.$$

При этом

$$a_1^2 - 2a_2 = 11^2 - 2 \cdot 36 = 49, \quad n \sqrt[n]{a_n^2} = 3 \sqrt[3]{26^2}.$$

Таким образом, $a_1^2 - 2a_2 > 3 \sqrt[3]{a_n^2}$ (так как, очевидно, $49^3 > 27 \times \times 26^3$). Следовательно, не все корни уравнения (5.19) вещественны и в то же время неравенство (5.16) не выполняется. В случае квадратного уравнения рассматриваемые условия являются не только достаточными, но и необходимыми.

Применим полученные результаты к решению такой задачи.

Задача. Найти все многочлены, коэффициенты которых равны 1 или -1 , имеющие только вещественные корни.

Решение. При $n = 1$ такими являются многочлены $x - 1$ и $x + 1$ (старший коэффициент, очевидно, можем считать равным 1). Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $n \geq 2$.

Если корни многочлена $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ вещественны и $a_k \in \{-1, 1\}$, то неравенство (5.15) в таком случае запишем в виде $1 - 2a_2 \geq n$. Это неравенство, очевидно, может выполняться лишь при $a_2 = -1$ и $n \leq 3$. Таким образом, остается рассмотреть два возможных случая: $n = 2$ и $n = 3$.

а) Пусть $n = 2$. Тогда $f(x) = x^2 + a_1x - 1$, где $a_1 \in \{-1, 1\}$. Искомые многочлены $x^2 + x - 1$ и $x^2 - x - 1$.

б) Пусть $n = 3$. Тогда $f(x) = x^3 + a_1x^2 - x + a_3$. Заменяя x на $\frac{1}{y}$ и рассуждая точно так же относительно многочлена $\varphi(y) = a_3y^3 - y^2 + a_1y + 1$ (или воспользовавшись неравенством (5.15)), убеждаемся, что a_1 и a_3 должны быть числами разных знаков. Следовательно, возможные многочлены такие:

$$x^3 + x^2 - x - 1, \quad x^3 - x^2 - x + 1.$$

Каждый из этих многочленов удовлетворяет условию задачи (корни этих многочленов соответственно $-1, -1, 1$ и $-1, 1, 1$).

Таким образом, существует всего лишь шесть многочленов, удовлетворяющих условию задачи: $x + 1, x - 1, x^2 + x - 1, x^2 - x - 1, x^3 + x^2 - x - 1, x^3 - x^2 - x + 1$.

Заметим, что ответ в этой задаче не изменится, если потребовать, чтобы только первые три коэффициента и свободные члены рассматриваемых уравнений равнялись 1 или -1 .

УПРАЖНЕНИЯ

1. Запишите формулы Виета для корней уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^3 + px + q &= 0, \\ \text{б) } x^4 + x^3 + 9x^2 - 8x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

2. Подберите p так, чтобы уравнения

$$\begin{aligned} \text{а) } x^5 + px^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 32 &= 0, \\ \text{б) } x^5 + 6x^4 + px^3 + x^2 + 8x + 32 &= 0 \end{aligned}$$

имели невещественные корни.

3. На V республиканской олимпиаде юных математиков предлагалось найти положительные корни уравнения

$$nx^{n-1} - (n+1)x^n + 1 = 0 \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (5.20)$$

Оказывается, это уравнение имеет единственный положительный корень $x = 1$ (см. [7], с. 86). Докажите, что:

- а) $x = 1$ — кратный корень уравнения (5.20) (кратности 2);
- б) при $n \geq 3$ не все корни уравнения (5.20) вещественные;
- в) при нечетном n уравнение (5.20) не имеет отрицательных корней, а при четном — имеет один отрицательный корень первой кратности, содержащийся в интервале $]-1, 0[$.

ГЛАВА 6

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ФУНКЦИИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ

$$f(x+a) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{\gamma f(x) + \delta} \quad (\alpha \neq 0)$$

§ 1. Конкретный пример

Рассмотрим известную задачу: доказать, что функция f , удовлетворяющая условию

$$f(x+a) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}, \quad (x \in \mathbb{R}), \quad (6.1)$$

где $a \neq 0$ — некоторое фиксированное число, периодическая.

Обосновывается это уравнение следующим образом. Используя тождество (6.1), находим

$$f(x+2a) = \frac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1} = -\frac{1}{f(x)}. \quad (6.2)$$

Учитывая теперь (6.2) и (6.1), получаем

$$f(x+3a) = -\frac{1}{f(x+a)} = -\frac{f(x)+1}{f(x)-1}.$$

Но тогда, на основании (6.3) и (6.2),

$$f(x + 4a) = -\frac{f(x + a) + 1}{f(x + a) - 1} = f(x).$$

Следовательно, функция f , удовлетворяющая условию (6.1), является периодической с периодом $T = 4a$.

Может возникнуть вопрос: существуют ли функции, удовлетворяющие условию (6.1)? Покажем, что таких функций можно построить бесконечное множество. Пусть

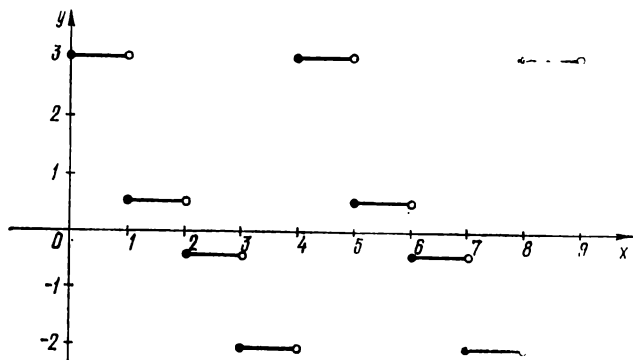


Рис. 1

например, $a = 1$ и $f(x) = 3$ при $x \in [0, 1[$. Тогда, на основании (6.1), при $x + 1 \in [1, 2[$

$$f(x + 1) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично, на основании (6.2), при $x + 2 \in [2, 3[$

$$f(x + 2) = -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{3}.$$

Точно так же, на основании (6.3), при $x + 3 \in [3, 4[$

$$f(x + 3) = -\frac{3 + 1}{3 - 1} = -2.$$

Если же $x + 4 \in [4, 5[$, то $f(x + 4) = 3$ и значения функции f начинают повторяться.

График рассматриваемой функции изображен на рис. 7.

Аналогично, выбирая $f(x) = c$, где $c \in \{-1, 0, 1\}$, можем построить новую периодическую функцию с периодом $T = 4$. При этом, разумеется, на промежутке $[0, 1[$ функция f не обязательно должна быть постоянной (см. упр. 1).

В связи с рассмотренным примером возникает следующая задача. Предположим, что функция f удовлетворяет условию

$$f(x+a) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{\gamma f(x) + \delta} \quad (x \in R), \quad (6.4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и $a \neq 0$ — некоторые фиксированные действительные числа (параметры). Всегда ли будет такая функция периодической? В § 3 будет показано, что нет, не всегда. Но тогда возникают следующие естественные вопросы:

1) какими должны быть параметры α, β, γ и δ , чтобы функция f , удовлетворяющая условию (6.4), была периодической?

2) пусть n — фиксированное натуральное число. Можно ли подобрать параметры α, β, γ и δ так, чтобы число na было периодом рассматриваемой функции f , тогда как числа ma при $m < n$ ($m \in N$) уже не являлись бы периодом функции f ?

Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные понятия, которые представляют и самостоятельный интерес.

§ 2. Квадратные матрицы и действия над ними

В различных теоретических построениях, а также при решении многих задач, имеющих важное прикладное значение, используются таблицы чисел вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \dots$$

Такие таблицы называют *квадратными матрицами* (второго порядка¹⁾). Числа (или величины), из которых составлена матрица, называют *элементами* этой матрицы. При этом две матрицы считаются равными тогда и только тогда, когда их соответствующие элементы равны:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \leftrightarrow a = k, \quad b = l, \\ c = m, \quad d = n.$$

¹ При решении многих вопросов часто возникает необходимость использовать квадратные матрицы, у которых три строки и три столбика — матрицы третьего порядка, а также матрицы 4-го и вообще произвольного n -го порядка, или прямоугольные матрицы типа $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Однако в дальнейшем нам понадобятся только квадратные матрицы второго порядка.

В множестве таких матриц определяют следующие операции:

а) Операция умножения на число. Эта операция определяется равенством

$$c \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx & cy \\ cz & ct \end{pmatrix}.$$

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, необходимо на это число умножить все элементы рассматриваемой матрицы.

б) Операция сложения матриц. Сумма двух матриц определяется равенством

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ называется *нулевой* и выполняет роль нуля в множестве матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Операция сложения матриц коммутативна, ассоциативна и обратима. Это означает следующее. Если мы для удобства условимся обозначать матрицы большими буквами: $A, B, C, \dots X, Y$ и т. д., то, с учетом определения операции сложения матриц, без труда убеждаемся в справедливости следующих предложений.

1) Для любых матриц A, B и C

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

2) Для любых матриц A и B существует такая матрица X , что $A + X = B$.

в) Операция умножения матриц. Эта операция, представляющая для нас особый интерес, определяется так:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Операция умножения матриц уже некоммутативна (т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$), однако ассоциативна: $(AB)C = A(BC)$ и связана с операцией сложения дистрибутивным законом:

$$(A + B)C = AC + BC, \quad A(B + C) = AB + AC.$$

Наряду с нулевой матрицей особую роль в множестве матриц играет *единичная* матрица E , которая опреде-

ляется равенством: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Используя (6.6), нетрудно проверить, что для любой матрицы A справедливо

$$AE = EA = A.$$

Операция умножения матриц дает возможность также рассматривать степени произвольной матрицы A :

$$A^2 = AA, A^3 = A^2A, \dots, A^n = A^{n-1}A.$$

При этом, по определению, $A^0 = E$.

§ 3. Условие периодичности в общем случае

Пусть функция f удовлетворяет условию (6.4). Поставим в соответствие указанному тождеству матрицу $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, т. е. матрицу, элементами которой являются параметры α , β , γ и δ , входящие в тождество (6.4). Используя (6.4) и рассуждая так же, как и в § 1, получим

$$f(x + 2a) = \frac{\alpha f(x + a) + \beta}{\gamma f(x + a) + \delta} = \frac{\alpha_2 f(x) + \beta_2}{\gamma_2 f(x) + \delta_2}, \quad (6.7)$$

где соответствующая матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A^2.$$

Таким образом, если тождеству (6.4) отвечает матрица A , то (6.7) отвечает матрица A^2 . Точно так же убеждаемся, что тождеству

$$f(x + 3a) = \frac{\alpha_3 f(x) + \beta_3}{\gamma_3 f(x) + \delta_3}$$

отвечает матрица A^3 . Используя принцип математической индукции, приходим к заключению, что при любом натуральном $n \geq 2$ $f(x + na)$ можно представить в виде

$$f(x + na) = \frac{\alpha_n f(x) + \beta_n}{\gamma_n f(x) + \delta_n}, \quad (6.8)$$

где $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = A^n$. Другими словами, тождеству (6.8) отвечает матрица A^n .

Теорема 6.1. Пусть при некотором натуральном n $A^n = sE$, где $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — матрица, отвечающая тождеству (6.4), $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица и $s \neq 0$ —

некоторое число. Тогда функция f , удовлетворяющая условию (6.4), является периодической с периодом $T = na$.

Если при этом функция f принимает не менее трех разных значений, то наименьшее натуральное число n , при котором na есть период функции f , определяется условиями: $A^n = sE$ и ни при каком s $A^k \neq sE$, если $k < n$.

□ Пусть при некотором $n \in N$ $A^n = sE$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad (s \neq 0).$$

Тогда

$$\alpha_n = \delta_n = s, \quad \beta_n = \gamma_n = 0.$$

Следовательно, на основании (6.8),

$$f(x + na) = \frac{s \cdot f(x) + 0}{0f(x) + s} = f(x),$$

т. е. f — периодическая функция и $T = na$ — ее период.

Пусть теперь функция f , удовлетворяющая условию (6.4), принимает не менее трех различных значений и при некотором натуральном n $A^n = sE$. Предположим, кроме того, что при любом натуральном $k < n$ $A^k \neq cE$, каким бы ни было число c . Тогда, на основании предыдущего, na — период функции f . Пусть при некотором натуральном $m < n$ ma также является периодом функции f , т. е.

$$f(x + ma) = \frac{\alpha_m f(x) + \beta_m}{\gamma_m f(x) + \delta_m} = f(x), \quad (6.9)$$

где $\begin{pmatrix} \alpha_m & \beta_m \\ \gamma_m & \delta_m \end{pmatrix} = A^m$. Запишем (6.9) в виде

$$\gamma_m y^2 + (\delta_m - \alpha_m) y + \beta_m = 0, \quad (6.10)$$

где $y = f(x)$. Если хотя бы один из коэффициентов в (6.10) отличен от нуля, то уравнение (6.10) не может иметь более двух решений. С другой стороны, по условию, функция f , а значит, и переменная y в (6.10) принимают не менее трех различных значений. Другими словами, уравнение (6.10) имеет три (и более) различных корня. Это возможно только при условии, что все коэффициенты уравнения (6.10) равны нулю, т. е. $\gamma_m = \delta_m - \alpha_m = \beta_m = 0$. Но тогда

$$A^m = \begin{pmatrix} \alpha_m & 0 \\ 0 & \delta_m \end{pmatrix} = cE \quad (c = \alpha_m = \delta_m),$$

что противоречит условию ($A^m \neq cE$).

Таким образом, предположение о том, что ma ($m < n$) есть период функции f , приводит в рассматриваемом случае к противоречию.

Пример. Пусть функция f удовлетворяет условию

$$f(x+a) = \frac{f(x) \cos \varphi - \sin \varphi}{f(x) \sin \varphi + \cos \varphi} \left(\varphi = \frac{\pi}{n} \right), \quad (6.11)$$

где n — фиксированное натуральное число. Соответствующая тождеству (6.11) матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

При этом, как нетрудно убедиться,

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix} \quad (k \in N).$$

А так как $\varphi = \frac{\pi}{n}$, то $\cos n\varphi = -1$, $\sin n\varphi = 0$. Следовательно, $A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$. Это означает, на основании предыдущей теоремы, что na является периодом рассматриваемой функции f . С другой стороны, если $m < n$ ($m \in N$), то $0 < m\varphi < \pi$. Тогда $\sin m\varphi \neq 0$, и, следовательно, $A^m \neq cE$ (для любого числа c). Таким образом, ma (при $m < n$) не может быть периодом функции f (если множество значений этой функции состоит более чем из трех различных значений).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Постройте график функции f , которая удовлетворяет условию (6.1), если:

- а) $a = 1$, $f(x) = x$ ($x \in [0, 1]$);
- б) $a = 1$, $f(x) = x^2$ ($x \in [0, 1]$);
- в) $a = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \sin x$ ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

2. Можно ли подобрать параметр p так, чтобы функция f , удовлетворяющая условию:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x+a) &= \frac{pf(x)+9}{8f(x)+3}, & \text{б) } f(x+a) &= \frac{f(x)+p}{8f(x)+3}, \\ \text{в) } f(x+a) &= \frac{f(x)+9}{pf(x)+3}, & \text{г) } f(x+a) &= \frac{f(x)+9}{8f(x)+p}, \end{aligned}$$

была периодической с периодом $2a$? $3a$?

3. Пусть функция f удовлетворяет условию

$$f(x+a) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{\gamma f(x) + \delta}. \quad (6.12)$$

Докажите, что эта же функция удовлетворяет условию

$$f(x-a) = \frac{-\delta f(x) + \beta}{\gamma f(x) - \alpha}. \quad (6.13)$$

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ — матрицы, отвечающие соответственно тождествам (6.12) и (6.13). Чему равны произведения AB и BA ?

5. Пусть функция f удовлетворяет условию:

$$f(x+a) = \frac{f(x) \cos \sqrt{2}\pi - \sin \sqrt{2}\pi}{f(x) \sin \sqrt{2}\pi + \cos \sqrt{2}\pi}.$$

Докажите, что при любом натуральном n $f(x+na) \neq f(x)$.

ГЛАВА 7

ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Числа Фибоначчи

Рассмотрим последовательность вида

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, \quad (7.1)$$

где $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ ($n > 1$). Таким образом, каждый член последовательности (7.1), начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих и эта последовательность содержит такие числа: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Рассматриваемые числа принято называть числами Фибоначчи (более подробно о таких числах см. [3]).

Для нахождения n -го числа Фибоначчи u_n нет необходимости знать все предыдущие числа Фибоначчи. Оказывается, что для u_n имеет место следующая формула, которую принято называть формулой Бине:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (7.2)$$

Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что если числа u_n определяются формулой (7.2), то $u_1 = u_2 = 1$. Кроме того, как легко проверить,

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right). \quad (7.3)$$

А так как

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

то, на основании (7.3) и (7.2),

$$u_n + u_{n-1} = u_{n+1}.$$

Это и означает, что произвольный член последовательности (7.1) определяется формулой (7.2). Другое обоснование (7.2) можно найти в [3].

§ 2. Возвратные последовательности

По аналогии с предыдущим рассмотрим последовательность

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, \quad (7.4)$$

где

$$v_1 = a, v_2 = b \text{ и } v_{n+1} = 2\alpha v_n + \beta v_{n-1} \quad (7.5)$$

(a, b, α, β — некоторые параметры). В частности, при $a = b = 2\alpha = \beta = 1$ последовательность (7.4) совпадает с последовательностью чисел Фибоначчи.

Как для чисел Фибоначчи, так и для более общих последовательностей вида (7.4) характерной особенностью является то, что каждый член такой последовательности, начиная с третьего, определяется через предшествующие два члена. Такие последовательности называют возвратными (или рекуррентными) последовательностями второго порядка¹.

В дальнейшем предполагаем, что $\alpha^2 + \beta \neq 0$. Покажем, что при таком условии для элементов (7.4) имеет место следующий аналог формулы Бине:

$$v_n = \frac{1}{2} [(a + \gamma)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-1} + (a - \gamma)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-1}], \quad (7.6)$$

где $\gamma = \frac{b - a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta}}$. Действительно, если v_n определяется формулой (7.6), то, как нетрудно проверить, $v_1 = a, v_2 = b$. Кроме того, при $n > 1$

$$\begin{aligned} 2\alpha v_n + \beta v_{n-1} &= \frac{1}{2} [(a + \gamma)(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-2} (2\alpha^2 + \\ &+ 2\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta} + \beta) + (a - \gamma)(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta})^{n-2} (2\alpha^2 - \\ &- 2\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta} + \beta)], \end{aligned} \quad (7.7)$$

¹ Рассматривают также возвратные последовательности 3-го, 4-го и вообще n -го порядка — см. [6].

где

$$2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \beta = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta})^2, \quad (7.8)$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \beta = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta})^2. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.8) и (7.9) в (7.7), получим, на основании (7.6), что $2\alpha v_n + \beta v_{n-1} = v_{n+1}$. Следовательно, элементы последовательности (7.4) определяются формулой (7.6). В частности, если $a = b = 2\alpha = \beta = 1$, то формула (7.6), как легко проверить, совпадает с (7.2).

§ 3. Многочлены Чебышева

При доказательстве формулы (7.6) нигде не использовался тот факт, что a , b , α и β — числа. Это означает, что формула (7.6) справедлива также и в том случае, если (7.4) есть последовательность значений функции или некоторых многочленов, которые удовлетворяют условию (7.5).

Например, если $a = x$, $b = 2x^2 - 1$, $\alpha = x$, $\beta = -1$, то соответствующая последовательность (7.4) состоит из многочленов, которые называют *многочленами Чебышева* первого рода и обозначают $T_n(x)$. Первые пять многочленов Чебышева первого рода такие:

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2^2x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2^3x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 2^4x^5 - 20x^3 + 5x.$$

В случае многочленов Чебышева (при указанных значениях a , b , α и β) $\gamma = \sqrt{x^2 - 1}$, и, следовательно, на основании (7.6), соответствующую формулу для многочленов $T_n(x)$ запишем в виде

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}. \quad (7.10)$$

(В записанном виде формула (7.10) определяет многочлены Чебышева при $|x| \geq 1$. Однако после возведения в степень выражений, входящих в (7.10), корни исчезают и мы получаем формулу для многочленов Чебышева на всей числовой прямой).

Из (7.10) также следует, что при любом натуральном n $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$.

Аналогично, если $a = 2x$, $b = 4x^2 - 1$, $\alpha = x$, $\beta = -1$, то соответствующая последовательность (7.4) является последовательностью многочленов Чебышева второго рода, которые обычно обозначают $u_n(x)$. В этом случае

$$\gamma = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad a + \gamma = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad -\gamma = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Следовательно, соответствующая формула для многочленов Чебышева второго рода имеет вид

$$u_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (7.11)$$

Воспользовавшись формулами (7.10) и (7.11), нетрудно проверить, что многочлены Чебышева первого и второго рода связаны между собой соотношениями:

$$T_{n+1}(x) = (n+1)u_n(x), \\ u'_n(x) = \frac{n+1}{x^2 - 1} T_{n+1}(x) - \frac{x}{x^2 - 1} u_n(x).$$

§ 4. Формула для $\operatorname{tg} n\alpha$

Формулу для $\operatorname{tg} n\alpha$ можно получить, используя выражения для $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ (см. гл. 4, упр. 3). В дальнейшем будут получены другие формулы для $\operatorname{tg} n\alpha$. При этом существенно используется формула 7.6 (аналог формулы Бине для общего члена возвратной последовательности).

Так как

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (7.12)$$

то

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2x}{1 - x^2} \quad (x = \operatorname{tg} \alpha), \quad (7.13)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \quad (7.14)$$

и вообще, при любом натуральном n ,

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \quad (x = \operatorname{tg} \alpha), \quad (7.15)$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — некоторые многочлены. При этом

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 2x, \quad P_3(x) = 3x - x^3, \dots; \\ Q_1(x) = 1, \quad Q_2(x) = 1 - x^2, \quad Q_3(x) = 1 - 3x^2, \dots$$

Воспользовавшись формулами (7.12) и (7.15), получим

$$\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \operatorname{tg}(n\alpha + \alpha) = \frac{\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} + x}{1 - x \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}} = \frac{P_n(x) + xQ_n(x)}{Q_n(x) - xP_n(x)},$$

и, следовательно,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + xQ_n(x), \quad (7.16)$$

$$Q_{n+1}(x) = Q_n(x) - xP_n(x). \quad (7.17)$$

На основании (7.16) и (7.17)

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) + x(Q_n(x) - Q_{n-1}(x)), \quad (7.18)$$

$$Q_n(x) - Q_{n-1}(x) = -xP_{n-1}(x). \quad (7.19)$$

Подставляя (7.19) в (7.18), получим

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) - x^2P_{n-1}(x).$$

Следовательно, $P_{n+1}(x) = 2P_n(x) - (1 + x^2)P_{n-1}(x)$. Точно так же устанавливаем, что

$$Q_{n+1}(x) = 2Q_n(x) - (1 + x^2)Q_{n-1}(x).$$

Таким образом, многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению: $u_{n+1} = 2\alpha u_n + \beta u_{n-1}$, где $\alpha = 1$, $\beta = -(1 + x^2)$. При этом в случае многочленов $P_n(x)$ $u_1 = x$, $u_2(x) = 2x$, тогда как в случае многочленов $Q_n(x)$ $u_1 = 1$, $u_2 = 1 - x^2$. Но тогда для нахождения многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ мы можем воспользоваться общей формулой (7.6). Так, в случае многочленов $P_n(x)$ $\alpha = 1$, $\beta = -(1 + x^2)$, $a = x$, $b = 2x$.

Тогда $\gamma = \frac{2x - x}{\sqrt{-x^2}} = \frac{x}{|x|i}$. Следовательно,

$$a + \gamma = \frac{x}{|x|i}(1 + |x|i), \quad a - \gamma = -\frac{x}{|x|i}(1 - |x|i),$$

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = 1 + |x|i, \quad \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta} = 1 - |x|i,$$

после чего

$$P_n(x) = \frac{x}{2|x|i} [(1 + |x|i)^n - (1 - |x|i)^n].$$

Рассматривая случаи $x > 0$ и $x < 0$, убеждаемся, что независимо от знака x $P_n(x)$ определяется формулой

$$P_n(x) = \frac{i}{2} [(1 - xi)^n - (1 + xi)^n]. \quad (7.20)$$

Аналогично в случае многочленов $Q_n(x)$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -(1 + x^2), \quad a = 1, \quad b = 1 - x^2,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{-x^2}{|x|i} = |x|i, \\ a + \gamma &= 1 + |x|i, \quad a - \gamma = 1 - |x|i, \\ \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} &= 1 + |x|i, \quad \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta} = 1 - |x|i. \end{aligned}$$

Но тогда, независимо от знака x ,

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} [(1 - xi)^n + (1 + xi)^n]. \quad (7.21)$$

Используя (7.20) и (7.21), получим следующую общую формулу для $\operatorname{tg} n\alpha$:

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{(1 - xi)^n - (1 + xi)^n}{(1 - xi)^n + (1 + xi)^n} i \quad (x = \operatorname{tg} \alpha). \quad (7.22)$$

Формулу (7.22) можно, очевидно, записать в виде

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n - (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n}{(\cos \alpha - i \sin \alpha)^n + (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n} i. \quad (7.23)$$

Заметим, что в справедливости (7.23) можно убедиться и непосредственно, воспользовавшись формулой Муавра.

Обозначим теперь $t = \cos \alpha$, и пусть $\sin \alpha = \sqrt{1 - t^2}$. Тогда формулу (7.23) запишем в виде

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{(t - i\sqrt{1 - t^2})^n - (t + i\sqrt{1 - t^2})^n}{(t - i\sqrt{1 - t^2})^n + (t + i\sqrt{1 - t^2})^n} i, \quad (7.24)$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{(t - \sqrt{t^2 - 1})^n - (t + \sqrt{t^2 - 1})^n}{(t - \sqrt{t^2 - 1})^n + (t + \sqrt{t^2 - 1})^n} i. \quad (7.25)$$

С другой стороны, на основании (7.10) и (7.11),

$$(t - \sqrt{t^2 - 1})^n - (t + \sqrt{t^2 - 1})^n = -2\sqrt{t^2 - 1}u_{n-1}(t). \quad (7.26)$$

$$(t - \sqrt{t^2 - 1})^n + (t + \sqrt{t^2 - 1})^n = 2T_n(t). \quad (7.27)$$

Но тогда, с учетом (7.25), (7.26) и (7.27),

$$\operatorname{tg} n\alpha = -\frac{\sqrt{t^2 - 1}u_{n-1}(t)}{T_n(t)} i. \quad (7.28)$$

А так как $t^2 - 1 \leq 0$, то

$$\sqrt{t^2 - 1} = i\sqrt{1 - t^2} = i \sin \alpha. \quad (7.29)$$

Подставляя (7.29) в (7.28), получим следующую формулу для $\operatorname{tg} n\alpha$:

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{u_{n-1}(t)}{T_n(t)} \sin \alpha, \quad (7.30)$$

где $t = \cos \alpha$, а $u_{n-1}(t)$ и $T_n(t)$ — многочлены Чебышева соответственно второго и первого рода. Отметим, что формула (7.30) справедлива и в том случае, если $\sin \alpha = -\sqrt{1-t^2}$.

Таким образом, формула (7.30) устанавливает интересную связь между $\operatorname{tg} n\alpha$ и многочленами Чебышева.

§ 5. Формула Мечина для числа π и ее аналоги

Формулой Мечина называют формулу

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}, \quad (7.31)$$

которую установил английский астроном и математик Джон Мечин (1680—1751) и использовал ее для вычисления числа π . Позже были получены различные аналоги формулы Мечина:

1. Формула Гаусса:

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

2. Формула Стирлинга:

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{70} + \operatorname{arctg} \frac{1}{99}.$$

3. Формула Штермера:

$$\frac{\pi}{4} = 6 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

4. Формула Шульца:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

Существуют разные способы доказательства указанных формул (см. доказательство формулы Штермера в [1], с. 374, 450). Здесь мы покажем, как рассматриваемые формулы могут быть обоснованы с помощью результатов,

установленных в предыдущем параграфе. Действительно, пусть

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{P_4(x)}{Q_4(x)} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{P_4(x)}{Q_4(x)} \cdot \frac{1}{239}},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \frac{239 \cdot P_4(x) - Q_4(x)}{239 \cdot Q_4(x) + P_4(x)}, \quad (7.32)$$

где $x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$. А так как, на основании (7.20) и (7.21),

$$P_4(x) = -4x^3 + 4x, \quad Q_4(x) = x^4 - 6x^2 + 1,$$

то

$$P_4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{4 \cdot 24}{5^3}, \quad Q_4\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5^4 - 6 \cdot 25 + 1}{5^4}. \quad (7.33)$$

Но тогда, на основании (7.32) и (7.33),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(4\alpha - \beta) &= \frac{239 \cdot 480 - 476}{239 \cdot 476 + 480} = \frac{239 \cdot 240 - 238}{239 \cdot 238 + 240} = \\ &= \frac{239(239 + 1) - 238}{239(239 - 1) + 240} = \frac{239^2 + 1}{239^2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(4\alpha - \beta) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$. А так как $\left| (4\alpha - \beta) - \frac{\pi}{4} \right| < \pi$, то, на основании предыдущего равенства, приходим к заключению, что $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. А это и есть равенство (4.31).

Аналогично могут быть обоснованы и остальные формулы (т. е. формулы Гаусса, Стирлинга, Штермера и Шульца).

Рассмотрим теперь некоторые аналоги предыдущих формул. А именно, предположим, что при некоторых целых m , n , p и q справедливо равенство

$$m \operatorname{arctg} \frac{1}{p} + n \operatorname{arctg} \frac{1}{q} = \frac{\pi}{4}. \quad (7.34)$$

Запишем эту формулу в виде:

$$\frac{\pi}{4} = m\alpha + n\beta \left(\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{q} \right). \quad (7.35)$$

Тогда, на основании (7.12) и (7.15),

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} &= \operatorname{tg}(m\alpha + n\beta) = \frac{\operatorname{tg} m\alpha + \operatorname{tg} n\beta}{1 - \operatorname{tg} m\alpha \operatorname{tg} n\beta} = \\ &= \frac{\frac{P_m(x)}{Q_m(x)} + \frac{P_n(y)}{Q_n(y)}}{1 - \frac{P_m(x)P_n(x)}{Q_m(x)Q_n(y)}} = \frac{P_m(x)Q_n(y) + P_n(y)Q_m(x)}{Q_m(x)Q_n(y) - P_m(x)P_n(y)}, \quad (7.36) \end{aligned}$$

где $x = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{p}$, $y = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{q}$. Учитывая, кроме того, что $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, запишем равенство (7.36) в виде

$$\begin{aligned} P_m\left(\frac{1}{p}\right)Q_n\left(\frac{1}{q}\right) + P_n\left(\frac{1}{q}\right)Q_m\left(\frac{1}{p}\right) &= Q_m\left(\frac{1}{p}\right)Q_n\left(\frac{1}{q}\right) - \\ &- P_m\left(\frac{1}{p}\right)P_n\left(\frac{1}{q}\right), \end{aligned}$$

или, что то же самое,

$$P_n\left(\frac{1}{q}\right)\left[Q_m\left(\frac{1}{p}\right) + P_m\left(\frac{1}{p}\right)\right] = Q_n\left(\frac{1}{q}\right)\left[Q_m\left(\frac{1}{p}\right) - P_m\left(\frac{1}{p}\right)\right]. \quad (7.37)$$

Таким образом, если выполняется (7.34), то справедливо также и равенство (7.37). Наоборот, если выполняется равенство (7.37), то, на основании (7.36),

$$\operatorname{tg}(m\alpha + n\beta) = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4},$$

откуда следует, что

$$m\alpha + n\beta = \frac{\pi}{4} + k\pi. \quad (7.38)$$

Если при этом окажется, что

$$\left|m\alpha + n\beta - \frac{\pi}{4}\right| < \pi,$$

то в (7.38) $k = 0$ и, следовательно, выполняется равенство (7.35) (или, что то же самое, равенство (7.34)).

Используя равенство (7.37), можно подбирать m , n , p и q так, чтобы выполнялось равенство (7.34). Например, имеют место равенства:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3},$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{7},$$

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

Точно так же можно рассмотреть, например, различные аналоги формулы Шульца, т. е. формулы вида

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{p} + \operatorname{arctg} \frac{1}{q} + \operatorname{arctg} \frac{1}{r}. \quad (7.39)$$

Если выполняется равенство (7.39), то, как легко проверить (вычисляя тангенс от обеих частей равенства (7.39)), имеет место равенство

$$1 = \frac{pq + pr + qr - 1}{pqr - p - q - r}.$$

Исключая из последнего равенства r , найдем

$$r = \frac{pq + p + q - 1}{pq - p - q - 1} = 1 + \frac{2(p + q)}{pq - p - q - 1}.$$

В частности, при $p = 2$

$$r = 1 + \frac{2(q + 2)}{q - 3} = 3 + \frac{10}{q - 3}.$$

Следовательно, в этом случае ($p = 2$) необходимо проверять все значения q , для которых 10 делится на $q - 3$. Приведем соответствующие значения q и r .

q	-7	-2	1	2	4	5	8	13
r	2	1	-2	-7	13	8	5	4
	+	+			+	+		

Остается проверить значения q и r , отмеченные знаком $+$ (остальные значения симметричны).

Точно так же можно проанализировать случаи $p = 3$, $p = 4$ и т. д.

§ 6. Формула для n -й степени квадратной матрицы

В главе 6 было показано, что функция f , удовлетворяющая условию (6.4), является периодической, если при некотором натуральном n $A^n = sE$, где $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — матрица, отвечающая тождеству (6.4), $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица и $s \neq 0$ — некоторое число (теорема 6.1). Однако исследовать соотношение $A^n = sE$ непосредственным воз-

ведением в n -ю степень — довольно громоздкая и утомительная работа. Здесь мы покажем, как эту задачу можно значительно облегчить, если воспользоваться изложенными выше результатами.

Теорема 7.1. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда

$$A^2 + pA + qE = \theta, \quad (7.40)$$

где $p = -(a + d)$, $q = ad - bc$, а $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — нулевая матрица.

□ Действительно, так как

$$A + pE = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + d & 0 \\ 0 & a + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

то

$$A^2 + pA = A(A + pE) = \begin{pmatrix} bc - ad & 0 \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix} = -qE,$$

что и доказывает равенство (7.40). ■

Запишем теперь равенство (7.40) так:

$$A^2 = -pA - qE. \quad (7.41)$$

Тогда, на основании (7.40) и (7.41),

$$\begin{aligned} A^3 &= -pA^2 - qA = -p(-pA - qE) - qA = \\ &= (p^2 - q)A + pqE. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, убеждаемся, что при любом натуральном n

$$A^n = u_n A + v_n E, \quad (7.42)$$

где u_n и v_n — некоторые величины, зависящие от p , q и n . При этом, очевидно, $u_1 = 1$, $u_2 = -p$, $u_3 = p^2 - q$; $v_1 = 0$, $v_2 = -q$, $v_3 = pq$. Воспользовавшись теперь равенствами (7.41) (7.42), получим

$$A^{n+1} = A^n A = u_n A^2 + v_n A = (-pu_n + v_n) A - qu_n E,$$

и, таким образом, $u_{n+1} = -pu_n + v_n$, $v_{n+1} = -qu_n$. Но тогда при $n > 1$ $v_n = -qu_{n-1}$, и, следовательно,

$$u_{n+1} = -pu_n - qu_{n-1}. \quad (7.43)$$

Это означает, что $\{u_n\}$ — возвратная последовательность второго порядка. Но тогда ее члены могут быть найдены с помощью обобщенной формулы Бине (формулы (7.6)).

В рассматриваемом случае $u_1 = \tilde{a} = 1$, $u_2 = \tilde{b} = -p$,
 $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = -q$. Поэтому, если $\alpha^2 + \beta = \frac{1}{4}(p^2 - 4q) \neq 0$,
 то

$$\gamma = \frac{\tilde{b} - \tilde{a}\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta}} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 - 4q}}, \quad \tilde{a} + \gamma = \frac{\sqrt{p^2 - 4q} - p}{\sqrt{p^2 - 4q}},$$

$$\tilde{a} - \gamma = \frac{\sqrt{p^2 - 4q} + p}{\sqrt{p^2 - 4q}}, \quad \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Но тогда, как нетрудно убедиться,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{(p - \sqrt{p^2 - 4q})^n - (p + \sqrt{p^2 - 4q})^n}{\sqrt{p^2 - 4q}}. \quad (7.44)$$

Теорема 7.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $b \neq 0$ или $c \neq 0$.
 Тогда равенство $A^n = sE$ выполняется в том и только
 том случае, если в (7.42) $u_n = 0$.

□ Пусть $u_n = 0$. Тогда, на основании (7.42), $A^n = sE$,
 где $s = v_n$.

Наоборот, пусть известно, что при некотором натуральном n $A^n = sE$. Тогда равенство (7.42) запишем так:
 $sE = u_n A + v_n E$, т. е. $u_n A = rE$, где $r = v_n - s$. Или,
 что то же самое,

$$u_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если при этом $b \neq 0$, то из равенства $u_n b = 0$ имеем, что
 $u_n = 0$. Если же $b = 0$, то, по условию, $c \neq 0$. Но тогда
 из равенства $u_n c = 0$ получаем $u_n = 0$. ■

Таким образом, на основании результатов, установленных
 в предыдущей главе и настоящем параграфе, вопрос
 о периодичности функции f , удовлетворяющей условию
 (6.4), сводится к вопросу о нахождении таких значений n ,
 при которых $A^n = sE$. А этот вопрос, в свою очередь,
 сводится к задаче нахождения таких натуральных n , для
 которых $u_n = 0$.

Рассмотрим в связи с этим следующие возможные
 случаи.

1. $p^2 - 4q \neq 0$ ($q \neq 0$). Предположим, что при некото-
 ром $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$. Тогда, на основании предыдущей
 теоремы, $A^n = sE$, где $s = v_n = -qu_{n-1}$. Покажем, что в
 этом случае $u_{n-1} \neq 0$, и, следовательно, $s \neq 0$. Действи-
 тельно, пусть $u_{n-1} = 0$, т. е.

$$(p - h)^{n-1} = (p + h)^{n-1} \quad (h = \sqrt{p^2 - 4q}). \quad (7.45)$$

С другой стороны, так как $u_n = 0$, то

$$(p - h)^n = (p + h)^n. \quad (7.46)$$

Но тогда, на основании (7.45) и (7.46),

$$(p - h)^{n-1}(p + h) - (p - h)^n = 2h(p - h)^{n-1} = 0.$$

А так как, по предположению, $h \neq 0$, то $p = h$, т. е. $p^2 = p^2 - 4q$, что невозможно, так как $q \neq 0$. Пришли к противоречию. Следовательно, $s \neq 0$.

В рассматриваемом случае u_n определяется формулой (7.44). Укажем в связи с этим один довольно простой способ нахождения таких натуральных чисел n , что $u_n = 0$. Действительно, если $u_n = 0$, то, на основании (7.44), $(p - \sqrt{p^2 - 4q})^n = (p + \sqrt{p^2 - 4q})^n$ или, что то же самое,

$$\theta^n = 1 \quad \left(\theta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{p + \sqrt{p^2 - 4q}} \right). \quad (7.47)$$

Ясно, что и наоборот: если имеет место равенство (7.47), то $u_n = 0$. Таким образом, задача нахождения периода функции f , удовлетворяющей условию (6.4), сводится к нахождению таких натуральных чисел n , для которых справедливо равенство (7.47).

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. A есть матрица, отвечающая уравнению (6.1). Тогда $p = -2$, $q = 2$, $p^2 - 4q = -4$. Следовательно,

$$\theta = \frac{2 - 2i}{2 + 2i} = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{2} = -i.$$

Но тогда $\theta^4 = 1$, и функция f , удовлетворяющая условию (6.1), является периодической с периодом $T = 4a$.

2. Пусть $p^2 = 4q$ ($q \neq 0$). Тогда соотношение (7.43) запишем так: $u_{n+1} = -pu_n - \frac{p^3}{4}u_{n-1}$, причем, как и раньше, $u_1 = 1$, $u_2 = -p$. Нетрудно проверить, что в таком случае

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{np^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Следовательно, ни при каком натуральном n $u_n \neq 0$. А это означает, что при $b \neq 0$ или $c \neq 0$ $A^n \neq sE$.

В предыдущих двух случаях предполагалось, что $q \neq 0$. Объясняется это тем, что если $q = ad - bc = 0$

и одно из чисел b или c отлично от нуля, то функция f , удовлетворяющая условию

$$f(x+l) = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d} \quad (l \neq 0),$$

является постоянной (периодической с любым периодом $T \neq 0$).

Действительно, пусть, например, $c \neq 0$. Тогда

$$\frac{af(x)+b}{cf(x)+d} = \frac{acf(x)+bc}{c(cf(x)+d)} = \frac{acf(x)+ad}{c(cf(x)+d)} = \frac{a}{c}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите формулы Гаусса, Стирлинга и Штермера (§ 5).
2. Проанализируйте формулу (7.39) при $p = 3$.
3. Пусть $z = a + bi$ — комплексное число. Тогда

$$z^2 + pz + q = 0 \quad (p = -(z + \bar{z}), \quad q = |z|^2).$$

Рассуждая так же, как и в § 6, найдем, что $z^n = u_n z + v_n$. Установите формулы¹ для u_n и v_n .

ГЛАВА 8

КВАТЕРНИОНЫ

§ 1. Современная теория комплексных чисел

В гл. 4 отмечалось, что комплексные числа часто определяют как выражение вида $a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — «некоторый символ, который называют мнимой единицей». При этом, естественно, возникают вопросы: что это за символ? существует ли он? а если существует, то сколько их? и т. п.

Здесь мы рассмотрим современный подход при построении теории комплексных чисел, а затем изложенные идеи используем для построения новых, важных для решения многих прикладных задач, объектов — кватернионов. При этом использование результатов гл. 6 дает возможность рассмотреть свойства функций, определенных на множестве кватернионов, и, в частности, изучить свойства $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и e^α (α — кватернион).

¹ Многочлены u_n и v_n имеют ряд важных свойств. В частности, они дают возможность построить одну последовательность ортогональных на всей числовой прямой функций (см.: Кужель О. В. Про один клас многочленів та ортогональних на осі $(-\infty, \infty)$ функцій.—Доповіді АН УРСР, 1967, сер. А, № 12).

Приступая к построению комплексных чисел, напомним, что еще в шестом классе рассматриваются пары действительных чисел (a, b) . Каждая такая пара есть, по сути, множество, состоящее из двух действительных чисел a и b с указанием, какое из этих чисел должно стоять на первом месте, а какое — на втором. В связи с этим такие пары называют также упорядоченными парами.

Так, на основании сказанного, множества $\{5, 7\}$ и $\{7, 5\}$ равны, тогда как пары $(5, 7)$ и $(7, 5)$ — различны. И действительно, если мы рассматриваем на плоскости точку A с координатами $(5, 7)$ и точку B с координатами $(7, 5)$, то это, очевидно, различные точки плоскости.

В связи с этим две пары (a, b) и (c, d) считаются равными тогда и только тогда, когда $a = c$, $b = d$. Таким образом, по определению,

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c, b = d.$$

Введенное так отношение равенства в множестве пар удовлетворяет обычным условиям. А именно: $z = z$; если $z = \lambda$, то $\lambda = z$; если $z = \lambda$, $\lambda = u$, то $z = u$, где z , λ и u — рассматриваемые пары.

Обозначим через C совокупность всех упорядоченных пар вида (a, b) , где a, b — действительные числа, и определим в множестве C операции сложения $(+)$ и умножения (\cdot) следующим образом:

$$\begin{aligned}(a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d), \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc).\end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что определенные так операции сложения и умножения коммутативны, ассоциативны и операция умножения связана с операцией сложения дистрибутивным законом. Другими словами, если z , λ и u — упорядоченные пары, то

$$\begin{aligned}z + \lambda &= \lambda + z, & (z + \lambda) + u &= z + (\lambda + u), \\ z\lambda &= \lambda z, & (z\lambda)u &= z(\lambda u), & z(\lambda + u) &= z\lambda + zu.\end{aligned}$$

Множество упорядоченных пар C будем называть *множеством комплексных чисел*, а элементы множества C — *комплексными числами*.

Последующие две теоремы характеризуют то, что операции сложения и умножения комплексных чисел обратимы.

Теорема 8.1. Для любых комплексных чисел $z = (a, b)$ и $\lambda = (c, d)$ найдется такое комплексное число $u = (x, y)$, что $z + u = \lambda$.

□ Пусть $x = c - a$, $y = d - b$. Тогда, как легко проверить, $z + u = \lambda$. ■

Комплексное число u , определяемое предыдущей теоремой, называют *разностью* комплексных чисел λ и z и обозначают так: $u = z - \lambda$.

Таким образом, в множестве комплексных чисел C определена операция вычитания чисел.

Теорема 8.2. Пусть $z = (a, b) \neq (0, 0)$ и $\lambda = (c, d)$ — произвольные комплексные числа. Тогда найдется такое комплексное число u , что $zu = \lambda$.

□ Так как $a \neq 0$ или $b \neq 0$, то $a^2 + b^2 \neq 0$. Рассмотрим комплексное число

$$u = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \cdot (c, d). \quad (8.1)$$

Тогда, как нетрудно проверить, $zu = (1, 0)(c, d) = (c, d)$. ■

Комплексное число u , определяемое равенством (8.1), называют *частным* комплексных чисел λ и z и обозначают: $u = \frac{\lambda}{z}$.

Следовательно, в множестве комплексных чисел C определена также и операция деления чисел.

Отождествим теперь комплексное число $(a, 0)$ с действительным числом a :

$$(a, 0) = a. \quad (8.2)$$

Тогда множество действительных чисел R будет подмножеством множества комплексных чисел C ($R \subset C$). При этом, как нетрудно убедиться, для любого комплексного числа (c, d)

$$a(c, d) = (a, 0)(c, d) = (ac, ad). \quad (8.3)$$

Рассмотрим, кроме того, комплексное число $(0, 1)$, которое называют *мнимой единицей* и обозначают буквой i :

$$i = (0, 1). \quad (8.4)$$

Тогда, на основании определения операции умножения и равенства (8.2), $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, т. е. $i^2 = -1$. Таким образом, при таком способе построения множества комплексных чисел мнимой единицей является вполне реальный объект — упорядоченная пара $(0, 1)$.

Теорема 8.3. Произвольное комплексное число (a, b) можно представить в виде

$$(a, b) = a + bi. \quad (8.5)$$

□ Воспользовавшись соотношениями (8.2), (8.3) и (8.4), получим $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1) = a + bi$. ■

Так же, как и в гл. 4, определяются сопряженное число $\bar{z} = a - bi$ и модуль $|z|$ комплексного числа z :
 $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

§ 2. Определение и основные свойства кватернионов

Таким образом, рассмотрение упорядоченных пар действительных чисел дает возможность построить новое, более широкое, числовое множество — множество комплексных чисел \mathbb{C} . В связи с этим возникает естественный вопрос: а нельзя ли построить новое «числовое» множество, рассматривая упорядоченные пары комплексных чисел? Оказывается, можно, и к решению этой задачи мы сейчас приступаем.

Итак, рассматриваем упорядоченные пары в виде (z, λ) , где z и λ — комплексные числа. Как и раньше, считаем, что

$$(z, \lambda) = (u, v) \leftrightarrow z = u, \lambda = v. \quad (8.6)$$

Совокупность всех таких пар обозначим через H и введем в H операции сложения и умножения следующим образом:

$$\begin{aligned} (z, \lambda) + (u, v) &= (z + u, \lambda + v), \\ (z, \lambda)(u, v) &= (zu - \lambda\bar{v}, zv + \lambda\bar{u}). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Множество H с такими операциями называем *множеством кватернионов*, а элементы множества H — *кватернионами*.

Как и в случае комплексных чисел, убеждаемся, что операция сложения кватернионов коммутативна, ассоциативна и обратима. Что же касается операции умножения кватернионов, то она уже не является коммутативной. Действительно, $(0, 1)(0, i) = (i, 0)$, $(0, i)(0, 1) = (-i, 0)$, и, таким образом, $(0, 1)(0, i) \neq (0, i)(0, 1)$.

В остальном свойства операции умножения кватернионов такие же, как и в случае комплексных чисел; операция умножения в H ассоциативна, дистрибутивна относительно операции сложения и обратима. Первые два из указанных свойств доказываются непосредственным умножением кватернионов. Поэтому более детально рассмотрим лишь свойство обратимости операции умножения кватернионов.

Действительно, пусть $(z, \lambda) \neq (0, 0)$ и (u, v) — некоторые кватернионы. Покажем, что существует такой кватернион (e, θ) , что

$$(z, \lambda)(e, \theta) = (u, v). \quad (8.8)$$

На основании (8.7) уравнение (8.8) можно записать так: $(ze - \lambda\bar{\theta}, z\bar{\theta} + \lambda\bar{e}) = (u, v)$, откуда, с учетом (8.6),

$$\begin{cases} ze - \lambda\bar{\theta} = u, \\ z\bar{\theta} + \lambda\bar{e} = v. \end{cases}$$

Записывая последнюю систему в виде

$$\begin{cases} ze - \lambda\bar{\theta} = u, \\ \bar{\lambda}e + \bar{z}\bar{\theta} = \bar{v}, \end{cases}$$

находим e и $\bar{\theta}$:

$$e = \frac{\bar{z}u + \lambda\bar{v}}{|z|^2 + |\lambda|^2}, \quad \bar{\theta} = \frac{z\bar{v} - \bar{\lambda}u}{|z|^2 + |\lambda|^2}.$$

Таким образом, искомым кватернион

$$(e, \theta) = \left(\frac{\bar{z}u + \lambda\bar{v}}{|z|^2 + |\lambda|^2}, \frac{z\bar{v} - \bar{\lambda}u}{|z|^2 + |\lambda|^2} \right),$$

что и доказывает обратимость операции умножения в H .

Отождествим кватернион $(z, 0)$ с комплексным числом z :

$$(z, 0) = z. \quad (8.9)$$

Тогда множество комплексных чисел C будет подмножеством множества кватернионов H ($C \subset H$). При этом, как нетрудно убедиться, для любого кватерниона (u, v)

$$z(u, v) = (zu, zv), \quad (u, v)z = (uz, v\bar{z}). \quad (8.10)$$

Следовательно, в общем случае $z(u, v) \neq (u, v)z$.

§ 3. Базисные кватернионы

На основании (8.9), $(1, 0) = 1$, $(i, 0) = i$. Введем еще следующие обозначения: $j = (0, 1)$, $k = (0, i)$. Тогда, как легко проверить, учитывая равенства (8.7) и (8.9),

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \quad ik = -j, \quad (8.11)$$

$$ji = -k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad kj = -i.$$

Например, $kj = (0, i)(0, 1) = (-i, 0) = -i$.

Соотношения (8.11) удобно записать в виде следующей таблицы:

x	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Из (8.11) имеем

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (8.12)$$

Можно показать, что и наоборот: из (8.12) вытекают все соотношения (8.11).

Теорема 8.4. Произвольный кватернион $\alpha = (z, \lambda)$ единственным способом представим в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k, \quad (8.13)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — некоторые действительные числа.

□ Пусть $z = \alpha_0 + \alpha_1 i$, $\lambda = \alpha_2 + \alpha_3 i$. Тогда $\alpha = (z, 0) + (0, \lambda) = (\alpha_0 + \alpha_1 i, 0) + (0, \alpha_2 + \alpha_3 i) = \alpha_0 + \alpha_1 i + (0, \alpha_2) + (0, \alpha_3 i) = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$.

Таким образом, возможность представления (8.13) обоснована. Докажем теперь его единственность. Предположим, что имеет место также равенство: $\alpha = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k$. Вычитая из этого равенства (8.13), получим

$$c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k = 0, \quad (8.14)$$

где $c_r = \beta_r - \alpha_r$ — действительные числа. При этом (8.14) можно записать в виде $(c_0 + c_1 i, c_2 + c_3 i) = (0, 0)$, откуда вытекает, что $c_0 + c_1 i = c_2 + c_3 i = 0$. Но тогда $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, т. е. $\beta_0 = \alpha_0$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$, что и доказывает единственность представления (8.13). ■

В связи с доказанной теоремой кватернионы $1, i, j$ и k называют базисными кватернионами.

§ 4. Векторная часть кватерниона

На основании теоремы 8.4, произвольный кватернион α можно представить в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \vec{\alpha} \quad (\vec{\alpha} = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k). \quad (8.15)$$

При этом α_0 называют *действительной частью*, а $\vec{\alpha}$ — *векторной частью* кватерниона α .

Величину (т. е. кватернион) $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ называют *коммутатором* кватернионов α и β . Очевидно, коммутатор $[\alpha, \beta] = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta = \beta\alpha$. В таком случае говорят, что кватернионы α и β коммутируют.

Нетрудно также проверить, что $[\alpha, \beta] = \vec{[\alpha, \beta]}$, т. е. коммутатор кватернионов α и β совпадает с коммутатором их векторных частей.

Учитывая правило умножения базисных кватернионов, убеждаемся, что

$$\vec{\alpha\beta} = -(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) + \vec{\alpha} \times \vec{\beta}, \quad (8.16)$$

где

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3, \quad (8.17)$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)j + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k. \quad (8.18)$$

При этом действительное число $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ называют *скалярным произведением* кватернионов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$, а кватернион $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ — *векторным произведением* кватернионов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

Приведем основные свойства скалярного произведения векторных частей кватернионов.

$$1. (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) \geq 0, \text{ причем } (\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = 0.$$

$$2. (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\alpha}).$$

$$3. (a\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = a(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$4. (\vec{\alpha} + \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) + (\vec{\beta}, \vec{\gamma}).$$

Далее нас будут больше интересовать свойства векторного произведения $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$. В частности, имеют место следующие свойства:

$$\text{I. } \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha}.$$

$$\text{II. } (a\vec{\alpha}) \times \vec{\beta} = a(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

$$\text{III. } \vec{\alpha} \times \vec{\alpha} = 0.$$

IV. $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$ тогда и только тогда, когда кватернионы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ линейно зависимы.

При этом $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ называют *линейно зависимыми*, если $\vec{\alpha} = c\vec{\beta}$ (или $\vec{\beta} = c\vec{\alpha}$), где c — некоторое действительное число.

Обоснование первых трех свойств векторного произведения не представляет труда. Поэтому рассмотрим лишь последнее свойство.

Пусть векторные части $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ кватернионов α и β линейно зависимы. Если, например, $\vec{\alpha} = c\vec{\beta}$, то $\alpha_1 = c\beta_1$, $\alpha_2 = c\beta_2$, $\alpha_3 = c\beta_3$. Но тогда, на основании (8.17), $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$.

Наоборот, предположим, что $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$. Если при этом $\vec{\alpha} = 0$, то $\vec{\alpha} = c\vec{\beta}$ ($c = 0$) и, таким образом, сформулированное свойство имеет место. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\vec{\alpha} \neq 0$ и $\vec{\beta} \neq 0$. Это, в частности, означает, что среди чисел β_1 , β_2 и β_3 хотя бы одно отлично от нуля. Пусть, например, $\beta_1 \neq 0$. Так как, по предположению, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$, то, на основании (8.18),

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 = \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1. \quad (8.19)$$

Пусть $c = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$. Тогда $\alpha_1 = c\beta_1$. Кроме того, на основании (8.19), $\alpha_2 = c\beta_2$, $\alpha_3 = c\beta_3$, т. е. $\vec{\alpha} = c\vec{\beta}$.

Аналогично рассматриваются и другие случаи ($\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$, а также $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ или $\alpha_3 \neq 0$). Этим рассматриваемое свойство (свойство IV) обосновано.

Теорема 8.5. Кватернионы α и β коммутируют тогда и только тогда, когда их векторные части $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ линейно зависимы.

□ Учитывая (8.16), а также равенства $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\alpha})$, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha}$, находим

$$[\alpha, \beta] = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}] = \vec{\alpha}\vec{\beta} - \vec{\beta}\vec{\alpha} = 2\vec{\alpha} \times \vec{\beta}. \quad (8.20)$$

Пусть кватернионы α и β коммутируют (т. е. $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$). Тогда $[\alpha, \beta] = 0$ и, на основании (8.20), $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$. Но тогда (свойство IV) $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ линейно зависимы.

Наоборот, пусть $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ линейно зависимы. Тогда $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = 0$ и, на основании (8.20), $[\alpha, \beta] = 0$. ■

§ 5. Сопряженные кватернионы

Кватернион $\bar{\alpha} = (\bar{z}, -\lambda)$ будем называть *сопряженным* относительно кватерниона $\alpha = (z, \lambda)$. Непосредственно из определения сопряженного кватерниона следует, что

1. $\bar{1} = 1, \bar{i} = -i, \bar{j} = -j, \bar{k} = -k.$

2. Если $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, то $\bar{\alpha} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$. Или, что то же самое, если $\alpha = \alpha_0 + \vec{\alpha}$, то $\bar{\alpha} = \alpha_0 - \vec{\alpha}$.

3. $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha.$

4. $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}.$

5. $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}.$

Первые четыре свойства очевидны. Докажем последнее. Пусть $\alpha = (z, \lambda)$, $\beta = (u, v)$. Тогда $\alpha\beta = (zu - \lambda\bar{v}, zv + \lambda\bar{u})$, $\overline{\alpha\beta} = (\bar{z}\bar{u} - \bar{\lambda}v, -zv - \lambda\bar{u})$, $\bar{\beta}\bar{\alpha} = (\bar{u}, -v)(\bar{z}, -\lambda) = (\bar{u}\bar{z} - v\bar{\lambda}, -\bar{u}\lambda - v\bar{z})$. Следовательно, $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$.

Заметим также, что кватернионы α и $\bar{\alpha}$ всегда коммутируют. Действительно, если $\alpha = \alpha_0 + \vec{\alpha}$, то $\bar{\alpha} = \alpha_0 - \vec{\alpha}$. Следовательно, векторные части ($\vec{\alpha}$ и $-\vec{\alpha}$) кватернионов α и $\bar{\alpha}$ линейно зависимы. Но тогда, на основании теоремы 8.5, $[\alpha, \bar{\alpha}] = 0$, что и доказывает рассматриваемое предположение.

§ 6. Норма кватерниона

Пусть $\alpha = (z, \lambda)$. Тогда $\alpha\bar{\alpha} = (z, \lambda)(\bar{z}, -\lambda) = (|z|^2 + |\lambda|^2, 0) = |z|^2 + |\lambda|^2 \geq 0$. Или, что то же самое, если $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, то $\alpha\bar{\alpha} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

Определение. Число $N(\alpha) = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$ называется *нормой*¹ кватерниона α .

Таким образом, на основании предыдущего, если

$$\alpha = (z, \lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k,$$

то

$$N(\alpha) = \sqrt{|z|^2 + |\lambda|^2} = \sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$

¹ Часто нормой кватерниона α называют число $\alpha\bar{\alpha}$. Но при таком определении свойство 6 уже не выполняется.

Приведем следующие свойства нормы кватерниона.

$$1. N(1) = N(i) = N(j) = N(k) = 1.$$

□ Доказательство очевидно. ■

$$2. N(\bar{\alpha}) = N(\alpha).$$

□ Действительно, $N(\bar{\alpha}) = \sqrt{\bar{\alpha}\bar{\alpha}} = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha} = N(\alpha)$. ■

3. Пусть z — комплексное число, а α — кватернион.

Тогда

$$N(z\alpha) = N(\alpha z) = |z| N(\alpha).$$

□ Действительно, $N(z\alpha) = \sqrt{z\alpha\bar{z}\bar{\alpha}} = \sqrt{z\alpha\bar{\alpha}\bar{z}} =$
 $= \sqrt{|z|^2 N^2(\alpha)} = |z| N(\alpha)$. ■

$$4. \alpha + \bar{\alpha} \leq 2N(\alpha).$$

□ Действительно, $\alpha + \bar{\alpha} = 2\alpha_0 \leq 2\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = 2N(\alpha)$. ■

$$5. N(\alpha\beta) = N(\alpha) N(\beta).$$

□ Действительно, $N(\alpha\beta) = \sqrt{\alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha}} = \sqrt{N^2(\beta) \alpha\bar{\alpha}} =$
 $= N(\beta) \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = N(\beta) N(\alpha)$. ■

$$6. N(\alpha + \beta) \leq N(\alpha) + N(\beta).$$

□ Действительно, воспользовавшись свойствами 4 и 5, получим $N^2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha} =$
 $= N^2(\alpha) + N^2(\beta) + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \leq N^2(\alpha) + N^2(\beta) + 2N(\alpha\bar{\beta}) =$
 $= N^2(\alpha) + N^2(\beta) + 2N(\alpha)N(\beta) = [N(\alpha) + N(\beta)]^2$. ■

Теорема 8.6. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда решение уравнения $\alpha x = \beta$ ($x\alpha = \beta$) определяется формулой

$$x = \frac{\bar{\alpha}\beta}{N^2(\alpha)} \quad \left(x = \frac{\beta\bar{\alpha}}{N^2(\alpha)} \right).$$

□ Умножая обе части равенства $\alpha x = \beta$ слева на $\bar{\alpha}$, получим $(\bar{\alpha}\alpha)x = \bar{\alpha}\beta$, или, что то же самое, $N^2(\alpha)x = \bar{\alpha}\beta$. Но тогда $x = \frac{\bar{\alpha}\beta}{N^2(\alpha)}$. Аналогично рассматривается случай уравнения $x\alpha = \beta$. ■

§ 7. Функция e^z

Пусть $z = x + yi$. Определим e^z равенством $e^z = e^x \times (\cos y + i \sin y)$. (8.21)

Основные свойства определенной так функции e^z следующие.

1. Если $z = x + yi$, то $|e^z| = e^x$.

□ На основании (8.21) $|e^z| = \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = e^x$. ■

2. Для любого комплексного z $e^z \neq 0$.

□ Так как для любого действительного x $e^x \neq 0$ и $|e^z| = e^x$, то $e^z \neq 0$. ■

3. Для любых комплексных z и λ $e^z e^\lambda = e^{z+\lambda}$. (8.22)

□ Пусть $z = x + yi$, $\lambda = \alpha + \beta i$. Тогда $e^z e^\lambda = e^x e^{\alpha} \times (\cos y + i \sin y)(\cos \beta + i \sin \beta) = e^{x+\alpha} [(\cos y \cos \beta - \sin y \times \sin \beta) + i (\cos y \sin \beta + \sin y \cos \beta)] = e^{x+\alpha} [\cos(y + \beta) + i \sin(y + \beta)] = e^{z+\lambda}$. ■

4. Функция e^z периодическая с периодом $2\pi i$.

□ На основании (8.21) $e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^x \times (\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z$. Следовательно, если $f(z) = e^z$, то для любого комплексного числа z $f(z + 2\pi i) = f(z)$. ■

5. Для любого целого числа m

$$(e^z)^m = e^{mz}. \quad (8.23)$$

■ При $m = 0$ и $m = 1$ равенство (8.23) очевидно. Если $m = 2$, то, на основании (8.22), $(e^z)^2 = e^z e^z = e^{2z}$.

Предположим, что равенство (8.23) справедливо для всех натуральных $m \leq k$. Тогда $(e^z)^{k+1} = (e^z)^k e^z = e^{kz} e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}$. Таким образом, на основании принципа математической индукции, равенство (8.23) справедливо для всех натуральных m .

Пусть m — целое отрицательное число. Тогда $m = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. При этом

$$(e^z)^m (e^z)^n = (e^z)^{m+n} = (e^z)^0 = e^{0 \cdot z} = e^{mz+nz} = e^{mz} e^{nz}. \quad (8.24)$$

А так как для натуральных n равенство (8.23) обосновано, то, учитывая (8.24), имеем $(e^z)^m e^{nz} = e^{mz} e^{nz}$. Следовательно, $(e^z)^m = e^{mz}$. ■

§ 8. Функции $\sin z$ и $\cos z$

На основании равенства (8.21), $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$, откуда следует (формулы Эйлера):

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (8.25)$$

Равенства (8.25) справедливы для любого действительного числа y . Однако правые части этих равенств, на основании предыдущего, имеют смысл и в случае комп-

лексных значений y . Учитывая это, мы можем определить с помощью равенств

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (8.26)$$

функции $\cos z$ и $\sin z$ для любого комплексного числа z . Рассмотрим основные свойства определенных так функций $\sin z$ и $\cos z$.

1. $\sin z$ и $\cos z$ — периодические функции с периодом 2π .

□ На основании равенств (8.26) и свойства 4 (§ 7),

$$\sin(z + 2\pi) = \frac{e^{iz+2\pi i} - e^{-iz-2\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Аналогично доказывается, что $\cos(z + 2\pi) = \cos z$. ■

2. Функция $\cos z$ — четная, а $\sin z$ — нечетная, т. е.

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

□ Доказательство вытекает непосредственно из равенств (8.26). ■

3. Имеют место следующие формулы сложения:

$$\sin(z + \lambda) = \sin z \cos \lambda + \cos z \sin \lambda, \quad (8.27)$$

$$\cos(z + \lambda) = \cos z \cos \lambda - \sin z \sin \lambda. \quad (8.28)$$

□ Вычисляя, с учетом равенств (8.26), правую часть в (8.27), получим

$$\begin{aligned} & \sin z \cos \lambda + \cos z \sin \lambda = \\ &= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}) + (e^{iz} + e^{-iz})(e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})}{4i} = \\ &= \frac{2e^{iz}e^{i\lambda} - 2e^{-iz}e^{-i\lambda}}{4i} = \frac{e^{i(z+\lambda)} - e^{-i(z+\lambda)}}{2i} = \sin(z + \lambda), \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (8.27). Аналогично обосновывается и равенство (8.28). ■

Заметим, что на основании равенств (8.27) и (8.28) можем записать обычные формулы двойного угла:

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z.$$

Кроме того, положив в (8.28) $\lambda = -z$, получим тождество $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

4. Равенство $\sin z = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $z = k\pi$; равенство $\cos z = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

□ Так как, на основании равенств (8.25) и (8.26), при вещественных z $\sin z$ является обычной тригонометрической функцией, то $\sin k\pi = 0$.

Пусть теперь наоборот: известно, что для некоторого $z + \alpha + \beta i$ $\sin z = 0$. Тогда, на основании (8.26), $e^{iz} = e^{-i\alpha - \beta}$ и, следовательно, $|e^{iz}| = |e^{-i\alpha - \beta}|$. А так как $iz = i\alpha - \beta$, то, с учетом свойства 1 (§ 7), $|e^{iz}| = e^{-\beta}$. Аналогично $|e^{-iz}| = e^{\beta}$. Следовательно, $e^{\beta} = e^{-\beta}$, т. е. $e^{2\beta} = 1$. Это возможно только при условии, что $\beta = 0$. Но тогда $\sin z = \sin \alpha = 0$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), откуда $z = \alpha = 2k\pi$.

Аналогично устанавливается, что если $\cos z = 0$, то $z \in \mathbb{R}$ и $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. ■

Таким образом, на основании предыдущего, нули (или корни) функций $\sin z$ и $\cos z$ расположены на вещественной прямой и совпадают с нулями тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

Рассмотренные свойства функций $\sin z$ и $\cos z$ такие же, как и соответствующие свойства рассматриваемых в школьном курсе математики тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$. Однако, оказывается, не все свойства тригонометрических функций сохраняются при переходе в комплексную область. Так, на множестве комплексных чисел \mathbb{C} функции $\sin z$ и $\cos z$ не являются ограниченными по модулю, тогда как в случае действительных x $|\sin x| \leq 1$ и $|\cos x| \leq 1$.

Например, при $z = yi$, на основании (8.26),

$$\cos yi = \frac{e^{-y} + e^y}{2}, \quad \sin yi = \frac{e^{-y} - e^y}{2i}.$$

Таким образом, $\cos yi$ — положительное вещественное число, тогда как $\sin yi$ — чисто мнимое число. При этом, если $y \neq 0$, то $e^{-y} \neq e^y$. Но тогда, на основании неравенства $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$), приходим к заключению, что $\cos yi > \sqrt{e^{-y}e^y} = 1$ ($y \neq 0$). Кроме того, очевидно $\lim_{y \rightarrow \infty} \cos yi = \infty$, $\lim_{y \rightarrow \infty} |\sin yi| = \infty$.

§ 9. Кватернион e^{α}

Пусть α — кватернион. Тогда (§ 4) $\alpha = \alpha_0 + \vec{\alpha}$, где $\vec{\alpha} = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ — векторная часть кватерниона α . Рассмотрим кватернион $J(\alpha)$, который определяется равенством

$$J(\alpha) = \begin{cases} \frac{\vec{\alpha}}{N(\vec{\alpha})} & (\vec{\alpha} \neq 0), \\ 0 & (\vec{\alpha} = 0). \end{cases} \quad (8.29)$$

Основные свойства величины $J(\alpha)$ такие:

- 1) $\overrightarrow{J(\alpha)} = -J(\alpha)$;
- 2) $J(i) = i$;
- 3) $J^2(\alpha) = -1$ ($\vec{\alpha} \neq 0$);
- 4) $N(J(\alpha)) = 1$ ($\vec{\alpha} \neq 0$).

Первое свойство непосредственно вытекает из равенства $\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}$.

Для обоснования второго свойства достаточно заметить, что если $\alpha = i$, то $\vec{\alpha} = i$ и $N(\vec{\alpha}) = N(i) = 1$.

На основании равенства (8.16) и определения нормы $N(\vec{\alpha})$ (§ 6) при $\vec{\alpha} \neq 0$

$$J^2(\alpha) = \frac{\vec{\alpha}^2}{N^2(\vec{\alpha})} = \frac{-(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = -1,$$

что и доказывает третье свойство $J(\alpha)$.

Для доказательства последнего свойства воспользуемся равенством $N(z\alpha) = |z| N(\alpha)$ ($z \in \mathbb{C}$). Тогда при $\vec{\alpha} \neq 0$ $N(J(\alpha)) = \frac{1}{N(\vec{\alpha})} N(\vec{\alpha}) = 1$. Определим теперь e^α равенством

$$\alpha = e^{\alpha_0} [\cos N(\vec{\alpha}) + J(\alpha) \sin N(\vec{\alpha})], \quad (8.30)$$

где α_0 — действительная часть кватерниона α (§ 4).

В частности, если $\alpha = a \in \mathbb{R}$, то $\alpha_0 = a$, $\vec{\alpha} = 0$, $N(\vec{\alpha}) = 0$, $J(\vec{\alpha}) = 0$. На основании (8.30), $e^\alpha = e^a$.

Аналогично, если $\alpha = z = a + bi$ ($b \neq 0$) — комплексное число, то $\alpha_0 = a$, $\vec{\alpha} = bi$, $N(\vec{\alpha}) = |b|$, $J(\alpha) = \theta i$, где

$$\theta = \frac{b}{|b|} = \begin{cases} 1 & (b > 0), \\ -1 & (b < 0). \end{cases}$$

Но тогда, с учетом (8.30),

$$e^\alpha = e^a [\cos |b| + i\theta \sin |b|],$$

где $\cos |b| = \cos b$, $\theta \sin |b| = \sin \theta |b| = \sin b$.

Следовательно, $e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$.

Аналогично устанавливаются следующие «частные» формулы

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + j \sin b), \quad (8.31)$$

$$e^{a+bk} = e^a (\cos b + k \sin b). \quad (8.32)$$

Таким образом, с учетом предыдущего, в случае действительных или комплексных α определение e^α по фор-

муле (8.30) не противоречит определению e^a ($a \in \mathbf{R}$) и e^z ($z = a + bi$ — формула (8.21)).

Рассмотрим теперь свойства кватерниона e^α .

1. Пусть $e^\alpha = \beta$. Тогда

$$\beta_0 = e^{\alpha_0} \cos N(\vec{\alpha}), \quad \vec{\beta} = J(\alpha) e^{\alpha_0} \sin N(\vec{\alpha}). \quad (8.33)$$

□ Доказательство непосредственно вытекает из формулы (8.30). ■

2. $N(e^\alpha) = e^{\alpha_0}$.

□ Пусть $e^\alpha = \beta$. Так как $N^2(\beta) = \beta_0^2 + N^2(\vec{\beta})$, то, с учетом равенств (8.33) и $N(z\alpha) = |z| N(\alpha)$ ($z \in \mathbf{C}$), получим $N^2(e^\alpha) = e^{2\alpha_0} \cos^2 N(\vec{\alpha}) + e^{2\alpha_0} \sin^2 N(\vec{\alpha}) N^2(J(\alpha)) = e^{2\alpha_0} (\cos^2 N(\vec{\alpha}) + \sin^2 N(\vec{\alpha})) = e^{2\alpha_0}$. ■

3. Для любого кватерниона α $e^\alpha \neq 0$.

□ Так как $N(e^\alpha) = e^{\alpha_0} \neq 0$, то $e^\alpha \neq 0$. ■

4. $e^{\alpha_0 + \vec{\alpha}} = e^{\alpha_0} e^{\vec{\alpha}}$.

□ Так как $J(\alpha) = J(\vec{\alpha})$, то сформулированное свойство непосредственно вытекает из равенства (8.30). ■

5. Равенства

$$e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}, \quad e^\beta e^\alpha = e^{\beta+\alpha} \quad (8.34)$$

выполняются тогда и только тогда, когда векторные части кватернионов α и β линейно зависимы.

□ На основании (8.29) и (8.30) кватернионы e^α и e^β можно представить в виде $e^\alpha = A + B\vec{\alpha}$, $e^\beta = C + D\vec{\beta}$, где A, B, C и D — вещественные числа. Предположим, что выполняются равенства (8.34). Тогда $e^\alpha e^\beta = e^\beta e^\alpha$. Следовательно, векторные части $B\vec{\alpha}$ и $D\vec{\beta}$ кватернионов e^α и e^β линейно зависимы. Но тогда, очевидно, линейно зависимы и векторные части $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ кватернионов α и β .

Наоборот, пусть кватернионы $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ линейно зависимы. Пусть, для определенности, $\vec{\beta} = r\vec{\alpha}$, где r — некоторое вещественное число. Если при этом $r = 0$, то $\vec{\beta} = 0$. Следовательно,

$$e^\alpha e^\beta = e^{\alpha_0} e^{\vec{\alpha}} e^{\beta_0} = e^{\alpha_0 + \beta_0} e^{\vec{\alpha}} = e^{\alpha_0 + \beta_0 + \vec{\alpha}} = e^{\alpha + \beta}.$$

Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $r \neq 0$. Пусть, например, $r < 0$. Тогда

$$N(\vec{\beta}) = |r| N(\vec{\alpha}) = -r N(\vec{\alpha}), \quad J(\beta) = \frac{\vec{\beta}}{N(\vec{\beta})} = -J(\alpha).$$

Следовательно,

$$e^{\beta} = e^{\beta_0} [\cos r N(\vec{\alpha}) + J(\alpha) \sin r N(\vec{\alpha})]. \quad (8.35)$$

Но тогда, на основании (8.30) и (8.35),

$$\begin{aligned} e^{\alpha} e^{\beta} &= e^{\alpha_0 + \beta_0} [(\cos N(\vec{\alpha}) \cos r N(\vec{\alpha}) - \sin N(\vec{\alpha}) \sin r N(\vec{\alpha})) + \\ &\quad + J(\alpha) (\cos N(\vec{\alpha}) \sin r N(\vec{\alpha}) + \sin N(\vec{\alpha}) \cos r N(\vec{\alpha}))]. = \\ &= e^{\alpha_0 + \beta_0} [\cos (1+r) N(\vec{\alpha}) + J(\alpha) \sin (1+r) N(\vec{\alpha})]. \end{aligned} \quad (8.36)$$

С другой стороны, $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (1+r)\vec{\alpha}$. Но тогда $N(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = |1+r| N(\vec{\alpha})$, $J(\alpha + \beta) = \theta J(\alpha)$, где $\theta = \frac{1+r}{|1+r|}$. Поэтому

$$\begin{aligned} e^{\alpha + \beta} &= e^{\alpha_0 + \beta_0} [\cos (1+r) N(\vec{\alpha}) + J(\alpha + \beta) \sin |1+r| N(\vec{\alpha})] = \\ &= e^{\alpha_0 + \beta_0} [\cos (1+r) N(\vec{\alpha}) + J(\alpha) \sin \theta |1+r| N(\vec{\alpha})] = \\ &= e^{\alpha_0 + \beta_0} [\cos (1+r) N(\vec{\alpha}) + J(\alpha) \sin (1+r) N(\vec{\alpha})]. \end{aligned} \quad (8.37)$$

В равенствах (8.36) и (8.37) правые части равны. Следовательно, $e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha + \beta}$. Аналогично рассматривается случай $r > 0$. Этим первое равенство из (8.34) доказано. Второе равенство вытекает из того, что в рассматриваемом случае $e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\beta} e^{\alpha}$. ■

6. Функция e^{α} не является периодической. Однако имеет место периодичность в следующем смысле (периодичность «по направлению»):

а) Для любого α вида $\alpha = a + bi$

$$e^{\alpha + 2m\pi i} = e^{\alpha} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

б) Для любого α вида $\alpha = a + bj$

$$e^{\alpha + 2m\pi j} = e^{\alpha} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

в) Для любого α вида $\alpha = a + bk$

$$e^{\alpha + 2m\pi k} = e^{\alpha} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

§ 10. Кватернионы $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$

Пусть $\alpha = \alpha_0 + \vec{\alpha}$ — кватернион. Определим $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ следующими равенствами

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 \cos i N(\vec{\alpha}) - i J(\alpha) \cos \alpha_0 \sin i N(\vec{\alpha}), \quad (8.38)$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha_0 \cos i N(\vec{\alpha}) + i J(\alpha) \sin \alpha_0 \sin i N(\vec{\alpha}). \quad (8.39)$$

При $\alpha = \alpha_0$ равенства (8.38) и (8.39) запишем так:
 $\sin \alpha = \sin \alpha_0$, $\cos \alpha = \cos \alpha_0$.

Аналогично, если $\alpha = z = \alpha_0 + \alpha_1 i$ ($\alpha_1 \neq 0$), то $N(\vec{\alpha}) = |\alpha_1|$,

$$J(\alpha) = \theta i \quad \left(\theta = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \begin{cases} 1 & (\alpha_1 > 0) \\ -1 & (\alpha_1 < 0) \end{cases} \right).$$

Следовательно, $\sin \alpha = \sin \alpha_0 \cos i |\alpha_1| - i^2 \cos \alpha_0 \sin \times \times i \theta |\alpha_1| = \sin \alpha_0 \cos i \alpha_1 + \cos \alpha_0 \sin i \alpha_1 = \sin(\alpha_0 + i \alpha_1) = \sin z$.

Аналогично устанавливается, что в случае $\alpha = z$ $\cos \alpha$, определенный по формуле (8.39), совпадает с $\cos z$, который был определен для комплексных z в § 8.

Таким образом, принятое здесь определение $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в случае, когда α — кватернион, не противоречит принятому ранее определению $\sin z$ и $\cos z$ для $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим некоторые свойства функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

1. $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ — периодические функции с периодом 2π .

□ Доказательство непосредственно вытекает из (8.38) и (8.39). ■

2. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

□ Доказательство вытекает из равенств (8.38) и (8.39) с учетом равенств $J(-\alpha) = -J(\alpha)$, $N(-\vec{\alpha}) = N(\vec{\alpha})$. ■

3. Для любого кватерниона α

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (8.40)$$

□ Равенство (8.40) проверяется непосредственным возведением в квадрат правых частей равенств (8.38) и (8.39). ■

4. $\sin \alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = m\pi$; $\cos \alpha = 0$, тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$).

□ Пусть $\alpha = m\pi$. Тогда $\vec{\alpha} = 0$. На основании (8.38), $\sin \alpha = 0$.

Наоборот, пусть $\sin \alpha = 0$. Если $\vec{\alpha} = 0$, то, на основании (8.38), $\sin \alpha_0 = 0$, откуда $\alpha = \alpha_0 = m\pi$.

Предположим, что $\vec{\alpha} \neq 0$. Тогда $J(\alpha) \neq 0$, $N(\vec{\alpha}) > 0$. Следовательно, $\sin iN(\vec{\alpha}) \neq 0$, $\cos iN(\vec{\alpha}) \neq 0$ (см. § 8). Кроме того, так как число $\sin iN(\vec{\alpha})$ чисто мнимое, то число $i \sin iN(\vec{\alpha})$ — вещественное. Но тогда действительная и векторная части кватерниона $\beta = \sin \alpha$ определяются равенствами $\beta_0 = \sin \alpha_0 \cos iN(\vec{\alpha})$, $\vec{\beta} = -iJ(\alpha) \cos \alpha_0 \sin \times$

$\times iN(\vec{\alpha})$. Если при этом $\beta = \sin \alpha = 0$, то $\beta_0 = 0$ и $\vec{\beta} = 0$, что возможно только при условии: $\sin \alpha_0 = 0$, $\cos \alpha_0 = 0$. Полученное противоречие указывает на то, что при $\vec{\alpha} \neq 0$ $\sin \alpha \neq 0$. Таким образом, из равенства $\sin \alpha = 0$ следует, что $\alpha \in \mathbf{R}$. Но тогда, на основании предыдущего, $\alpha = m\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$).

Аналогично устанавливается, что $\cos \alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} + m\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$). ■

5. Пусть кватернионы α и β линейно зависимы. Тогда

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (8.41)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (8.42)$$

□ Действительно, учитывая равенства (8.38) и (8.39), получим (приводя после перемножения подобные):

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= \sin(\alpha_0 + \beta_0) \cos iN(\vec{\alpha}) \cos iN(\vec{\beta}) = \\ &= iJ(\beta) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \cos iN(\vec{\alpha}) \sin iN(\vec{\beta}) - \\ &= iJ(\alpha) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \sin iN(\vec{\alpha}) \cos iN(\vec{\beta}) + \\ &+ J(\alpha)J(\beta) \sin(\alpha_0 + \beta_0) \sin iN(\vec{\alpha}) \sin iN(\vec{\beta}). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Если при этом¹ $\beta = r\vec{\alpha}$, где $r \in \mathbf{R}$, то $N(\vec{\beta}) = |r|N(\vec{\alpha})$, $J(\beta) = \theta J(\alpha)$ ($\theta = \frac{r}{|r|}$), и таким образом, с учетом равенства $J^2(\alpha) = -1$, можем записать (8.43) так:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \\ &= \sin(\alpha_0 + \beta_0) [\cos iN(\vec{\alpha}) \cos irN(\vec{\alpha}) - \\ &= \sin iN(\vec{\alpha}) \sin i\theta |r| N(\vec{\alpha})] - iJ(\alpha) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \times \\ &\times [\cos iN(\vec{\alpha}) \sin i\theta |r| N(\vec{\alpha}) + \sin iN(\vec{\alpha}) \cos irN(\vec{\alpha})] = \\ &= \sin(\alpha_0 + \beta_0) \cos i(1+r)N(\vec{\alpha}) - \\ &= iJ(\alpha) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \sin i(1+r)N(\vec{\alpha}). \end{aligned} \quad (8.44)$$

С другой стороны, $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha_0 + \beta_0 + (1+r)\vec{\alpha}) =$
 $= \sin(\alpha_0 + \beta_0) \cos i|1+r|N(\vec{\alpha}) - iJ(\alpha + \beta) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \times$

¹ Случай $r = 0$ тривиальный. Поэтому рассматривается случай $r \neq 0$.

$\times \sin i |1+r| N(\vec{\alpha})$, где $J(\alpha + \beta) = \frac{(1+r)\vec{\alpha}}{|1+r|N(\vec{\alpha})} = \varepsilon J(\alpha)$
 $(\varepsilon \in \{-1, 1\})$.
 Но тогда

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha_0 + \beta_0) i (1+r) N(\vec{\alpha}) - \\ &- i J(\alpha) \cos(\alpha_0 + \beta_0) \sin i \varepsilon |1+r| N(\vec{\alpha}). \end{aligned} \quad (8.45)$$

А так как $\varepsilon |1+r| = 1+r$, то правые части в (8.44) и (8.45) совпадают. Этим равенство (8.44) доказано. Точно так же обосновывается и равенство (8.42). ■

В заключение заметим, что из равенств (8.41) и (8.42) обычным способом получаем формулы «двойного угла»:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

§ 11. Функции от кватернионов

Може возникнуть, естественно, вопрос: почему кватернионы e^α , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ определялись именно формулами (8.30), (8.38) и (8.39), а не какими-то другими? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим некоторые предварительные понятия (ряды и их свойства, а также представление функций e^x , $\sin x$ и $\cos x$ в виде рядов).

Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ есть произвольная последовательность чисел (которые, вообще говоря, могут быть комплексными). Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (8.46)$$

называют рядом, а числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ членами ряда. Этот ряд называют *сходящимся*, если сходится числовая последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots, \quad (8.47)$$

где $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, \dots , $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. При этом числа S_n называют *частичными суммами* ряда (8.46).

Если S — предел последовательности (8.47), то S называют *суммой ряда* (8.46) и пишут

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

или

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

При этом говорят, что ряд (8.46) *сходится к сумме* S .

В том же случае, когда последовательность частичных сумм (8.47) не имеет предела, ряд (8.46) называют *расходящимся*.

Простейшим примером ряда является так называемый геометрический ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots, \quad (8.48)$$

членами которого являются элементы бесконечной геометрической прогрессии $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$. При этом, как известно из школьного курса математики, если $|q| < 1$, то ряд (8.48) сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$.

Ясно также, что при $a = 0$ ряд (8.48) сходится независимо от значения q и его сумма $S = 0$. Если же $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$, то ряд (8.48) расходится (расходящийся ряд). Заметим, что условие сходимости или расходимости ряда (8.48) справедливо не только в случае вещественных a и q , но также и в том случае, когда a и q — комплексные числа.

Необходимым условием сходимости ряда (8.46) является стремление к нулю его n -го члена при $n \rightarrow \infty$ (т. е. условие $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). Это вытекает из того, что $a_n = S_n - S_{n-1}$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Однако это условие не является достаточным. Так, ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, который называют гармоническим рядом, расходится, хотя его n -й член $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ (см., например, [4], с. 22).

Существуют различные признаки сходимости рядов. Здесь мы сформулируем (без доказательства) некоторые из наиболее употребляемых на практике достаточных признаков сходимости рядов.

1. (Признак сравнения рядов). Пусть $|a_n| \leq b_n$, где b_n — члены сходящегося ряда $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$. Тогда ряд (8.46) сходится.

2. (Признак д'Аламбера). Если существует такое число $q < 1$, что, начиная с некоторого номера m ,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \quad (n \geq m),$$

то ряд (8.46) сходится. Если же при $n \geq m$ выполняется неравенство $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, то рассматриваемый ряд расходится.

3. (Признак Коши). Если существует такое число $q < 1$, что

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad (n \geq m),$$

то ряд (8.46) сходится. Если же при $n \geq m$ $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, то рассматриваемый ряд расходится.

Обоснование этих признаков в случае рядов с вещественными (положительными) членами можно найти в [4]. В общем случае сформулированные признаки могут быть обоснованы методами, сходными с теми, которые рассматриваются в [4].

Воспользовавшись признаком д'Аламбера или признаком Коши, нетрудно убедиться, что при любом комплексном z сходятся следующие ряды:

$$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (8.49)$$

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (8.50)$$

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots. \quad (8.51)$$

При этом, оказывается, существуют следующие важные и интересные соотношения ($x \in \mathbb{R}$):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Обоснование этих равенств можно найти, например, в [4] (гл. 5, § 3, 8).

Учитывая последние три равенства, а также сходимость при любом комплексном z рядов (8.49), (8.50) и (8.51), определяют e^z , $\sin z$ и $\cos z$ ($z \in \mathbb{C}$) следующим образом:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots,$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots.$$

Тогда, как легко проверить, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$.

Таким образом, $\sin z$ и $\cos z$ можно записать в виде (8.26). А это означает, что принятое здесь определение $\sin z$, $\cos z$ (а также и e^z) эквивалентно определению, которое было дано в § 7 и 8.

Точно также можем поступить и в случае кватернионов. А именно, нетрудно показать, что для любого кватерниона α ряд

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

сходится¹ к некоторому кватерниону β . Этот кватернион, по аналогии с предыдущим, обозначим через e^α :

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \quad (8.52)$$

Точно так же определим $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots, \quad (8.53)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots. \quad (8.54)$$

Оказывается, что такое определение кватернионов e^α , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ эквивалентно прежнему. Чтобы не повторять рассуждения отдельно для e^α , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, рассмотрим общий случай.

Пусть в некотором круге $|z| < R$ ($R \leq \infty$)

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

Определим $f(\alpha)$ (α -кватернион) равенством

$$f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_n \alpha^n + \dots$$

Так как α — корень квадратного уравнения с действительными коэффициентами $\alpha^2 - p\alpha + q = 0$, где $p = \alpha + \bar{\alpha} = 2\alpha_0$, $q = N^2(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$, то, рассуждая так же, как и в гл. 7 (§ 6), убеждаемся, что $\alpha^n = u_n \alpha + v_n$, где $u_1 = 1$, $u_2 = p$; $v_1 = 0$, $v_2 = -q$. При этом $\alpha^{n+1} = (u_n \alpha + v_n) \alpha = u_n (p\alpha - q) + v_n \alpha = (u_n p + v_n) \alpha - q u_n = u_{n+1} \alpha + v_{n+1}$. Следовательно, $v_{n+1} = -q u_n$, $u_{n+1} = p u_n + v_n = p u_n - q u_{n-1}$. Таким образом, числа u_n образуют возвратную последо-

¹ Определение сходимости ряда, членами которого являются кватернионы, такое же, как и в случае обычных числовых рядов. При этом последовательность кватернионов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ называется сходящейся к кватерниону α , если $N(\alpha_n - \alpha) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

вательность второго порядка. Используя обобщенную формулу Бине для таких чисел, находим

$$u_n = \frac{i}{2N(\vec{\alpha})} (\bar{z}^n - z^n) \quad (z = \alpha_0 + iN(\vec{\alpha})), \quad (8.55)$$

$$v_n = \frac{iN^2(\alpha)}{2N(\vec{\alpha})} (z^{n-2} - \bar{z}^{n-1}). \quad (8.56)$$

Тогда

$$f(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n \right) \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n, \quad (8.57)$$

где, на основании (8.55),

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \frac{i}{2N(\vec{\alpha})} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right),$$

или, что то же самое,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n = \frac{i}{2N(\vec{\alpha})} (f(\bar{z}) - f(z)).$$

Аналогично находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n = \frac{iN^2(\alpha)}{2N(\vec{\alpha})} \left(\frac{f(z)}{z} - \frac{f(\bar{z})}{\bar{z}} \right).$$

Или, так как $z\bar{z} = \alpha_0 + N^2(\vec{\alpha}) = N^2(\alpha)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n = \frac{i}{2N(\vec{\alpha})} (\bar{z}f(z) - zf(\bar{z})),$$

что, в свою очередь, учитывая равенство $z = \alpha_0 + iN(\vec{\alpha})$, можно преобразовать к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n = \frac{i\alpha_0 (f(z) - f(\bar{z}))}{2N(\vec{\alpha})} + \frac{f(z) + f(\bar{z})}{2}. \quad (8.59)$$

Но тогда, на основании (8.57), (8.58) и (8.59),

$$f(\alpha) = \frac{i\alpha - i\alpha_0}{2N(\vec{\alpha})} (f(\bar{z}) - f(z)) + \frac{f(z) + f(\bar{z})}{2}, \quad (8.60)$$

где

$$\frac{i\alpha - i\alpha_0}{2N(\vec{\alpha})} = i \frac{\vec{\alpha}}{2N(\vec{\alpha})} = \frac{i}{2} J(\alpha) = -\frac{1}{2i} J(\alpha). \quad (8.61)$$

Подставляя (8.61) в (8.60), получим следующее окончательное выражение для $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{f(z) + f(\bar{z})}{2} + \frac{f(z) - f(\bar{z})}{2i} J(\alpha). \quad (8.62)$$

При этом формула (8.62) справедлива для всех α , для которых $|z| \leq R$. А так как $|z| = N(\alpha)$, то, таким образом, указанная формула имеет место для всех кватернионов α , норма которых $N(\alpha) < R$. В частности, соответствующие формулы для e^α , $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ справедливы для любого кватерниона α .

Пусть $f(z) = e^z$. Тогда, на основании (8.62),

$$\begin{aligned} e^\alpha &= \frac{e^{\alpha_0} e^{iN(\alpha)} + e^{\alpha_0} e^{-iN(\alpha)}}{2} + \frac{e^{\alpha_0} e^{iN(\alpha)} - e^{\alpha_0} e^{-iN(\alpha)}}{2i} J(\alpha) = \\ &= e^{\alpha_0} [\cos iN(\alpha) + J(\alpha) \sin iN(\alpha)], \end{aligned}$$

что согласуется с формулой (8.30). Аналогично, если $f(z) = \sin z$ или $f(z) = \cos z$, то получаем соответствующие формулы для $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ (т. е. формулы (8.38), (8.39)).

В заключение отметим, что так как $\alpha J(\alpha) = J(\alpha) \alpha$ и $J^2(\alpha) = -1$, то

$$(J(\alpha)\alpha)^n = J^n(\alpha) \alpha^n = \begin{cases} \alpha^n & (n = 4k), \\ J(\alpha) \alpha^n & (n = 4k + 1), \\ -\alpha^n & (n = 4k + 2), \\ -J(\alpha) \alpha^n & (n = 4k + 3). \end{cases} \quad (8.63)$$

Поэтому, как легко проверить, на основании (8.52), (8.53), (8.54) и (8.63),

$$e^{J(\alpha)\alpha} = \cos \alpha + J(\alpha) \sin \alpha. \quad (8.64)$$

Таким образом, мы получили аналог формулы Эйлера для кватернионов. Воспользовавшись (8.64), нетрудно также получить следующие аналоги формул Эйлера в случае кватернионов:

$$\cos \alpha = \frac{e^{J(\alpha)\alpha} + e^{-J(\alpha)\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{J(\alpha)\alpha} - e^{-J(\alpha)\alpha}}{2J(\alpha)}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Докажите, что при $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad \overline{\sin z} = \sin \bar{z}, \quad \overline{\cos z} = \cos \bar{z}.$$

2. Так же, как и при построении кватернионов, можем рассматривать упорядоченные пары кватернионов. В результате построим множество так называемых чисел Кели (см. [5]). Какими формулами следует определить e^s , $\sin s$, $\cos s$ в случае чисел Кели?

Метод математической индукции

1. **Индукция в математике.** Индукция (лат. *inductio* — наведение) означает переход от частного к общему. Другими словами, под индукцией понимают своеобразный метод рассуждений, в результате которого от некоторых частных фактов (примеров, утверждений, результатов наблюдений и т. п.) переходят к общим выводам, утверждениям, положениям.

Индукцией широко пользуются как в быту, так и в науке. Так, в физике многие законы формулируются на основе некоторой совокупности наблюдений, экспериментов. В математике индукцией также пользуются довольно широко и плодотворно. Например, уже в младших классах ученики приходят к общим правилам:

$$a + b = b + a, ab = ba,$$

неоднократно сталкиваются с конкретными примерами типа: $5 + 7 = 7 + 5$, $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ и т. д.

Во многих случаях индукция дает возможность получить новые формулы, установить те или иные закономерности. В то же время применение индукции может привести и к ошибочным выводам.

Приведем в связи с этим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть при некотором действительном a число $S = a + \frac{1}{a}$ — целое. Тогда $S^2 = a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}$, откуда следует, что число $a^2 + \frac{1}{a^2} = S^2 - 2$ также является целым.

$$\text{Точно также } S^3 = a^3 + 3\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^3}.$$

Таким образом, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ — снова целое число. Это наталкивает на мысль (индуктивный переход!), что при любом натуральном n число

$$S_n = a^n + \frac{1}{a^n} \quad (S_1 = S) \quad (1)$$

является целым. В п. 3 показано, что это действительно так.

Пример 2. Пусть $T_n = 2^{3^n} + 1$. Тогда $T_0 = 3 : 3$, $T_1 = 2^3 + 1 = 9 : 9$, $T_2 = 513 : 27$.

Таким образом, $T_0 : 3$, $T_1 : 3^2$, $T_2 : 3^3$. Поэтому естественно предположить, что $T_n : 3^{n+1}$. В п. 2 это предположение будет подтверждено.

Пример 3. Рассмотрим числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$. При $n = 0, 1, 2, 3, 4$ эти числа простые: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$.

В связи с этим французский математик П. Ферма (XVII в.) высказал предположение, что при любом натуральном n число F_n — простое. Однако в данном случае индуктивный переход оказался

ошибочным. Как позже показал Л. Эйлер (XVIII в.), при $n = 5$ это число составное: $F_5 = 641 \cdot 6700417$.

Некоторые другие поучительные примеры ошибочных утверждений, которые были сформулированы в результате индуктивного перехода от частных примеров к общим выводам, можно найти в [8].

Таким образом, переход от частного к общему не всегда приводит к правильным утверждениям. В связи с этим возникает важный вопрос: когда такой переход закономерен? Во многих случаях ответ на этот вопрос можно получить с помощью так называемого принципа математической индукции.

2. Принцип математической индукции. Этот принцип заключается в следующем.

Если некоторое утверждение S справедливо для $n = 1$ и из предположения, что оно справедливо для $n = k$, следует его справедливость для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для любого натурального n .

Заметим, что принцип математической индукции иногда называют *принципом полной математической индукции*, тогда как индукцию, о которой шла речь раньше, называют *неполной индукцией*.

Таким образом, применение принципа математической индукции состоит из двух этапов:

1) *проверка или обоснование справедливости рассматриваемого утверждения S для $n = 1$;*

2) *на основании предположения о справедливости утверждения S для $n = k$ доказывается его справедливость для $n = k + 1$.*

Только после завершения указанных этапов можно делать вывод о справедливости утверждения S для любого натурального n .

Проиллюстрируем применение принципа математической индукции в случае примера 1 (п. 1).

Если $T_n = 2^{3^n} + 1$, то число $T_1 = 9$ делится на 3^2 и, таким образом, утверждение S (т. е. сформулированное ранее предположение о том, что $T_n : 3^{n+1}$ (для $n = 1$) справедливо).

Предположим, что рассматриваемое утверждение справедливо для $n = k$, т. е. $T_k : 3^{k+1}$. Тогда, очевидно, $T_{k+1} = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = (2^{3^k} + 1) [(2^{3^k})^2 - 2^{3^k} + 1]$ или, учитывая очевидное тождество $x^3 - x + 1 = (x + 1)(x - 1) - (x + 1) + 3$, $T_{k+1} = T_k [T_k(x - 1) - T_k + 3]$ ($x = 2^{3^k}$). В правой части последнего равенства $T_k : 3^{k+1}$ (на основании предположения), а выражение в скобках делится, очевидно, на 3. Следовательно, T_{k+1} делится на $3^{k+1} \cdot 3 = 3^{k+2}$, т. е. рассматриваемое утверждение справедливо и при $n = k + 1$. Но тогда, на основании принципа математической индукции, $T_n : 3^{n+1}$ при любом натуральном n .

3. Другие формы принципа математической индукции. Пусть требуется вычислить сторону a_{2^n} правильного 2^n -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. При $n = 2$ правильный 2^n -угольник есть квадрат, сторона которого $a_4 = \sqrt{2}$. Воспользовавшись формулой удвоения

$$a_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - 2 \sqrt{1 - \left(\frac{a_{2^n}}{2}\right)^2}},$$

находим a_8, a_{16}, a_{32} ($n = 3, 4, 5$) и выдвигаем гипотезу, что

$$a_{2^n} = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n-2 \text{ двойки}}}. \quad (2)$$

Формула (2) справедлива для $n = 2$, и из предположения, что она справедлива для $n = k$ ($k \geq 2$), вытекает, как нетрудно проверить, что эта формула справедлива и для $n = k + 1$. На основании сказанного приходим к заключению, что (2) справедлива при любом натуральном $n \geq 2$.

Таким образом, обоснование (2) состоит из обоснования следующих двух предложений: 1) формула (2) справедлива для $n = 2$ и 2), если (2) справедлива для $n = k$ ($k \geq 2$), то она справедлива и при $n = k + 1$.

Характерной особенностью в этих рассуждениях есть то, что справедливость формулы (2) проверяется не при $n = 1$ (в связи с тем что 2-угольника не существует), а при $n = 2$. Закономерность указанного подхода вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть утверждение S удовлетворяет условиям:

1) Утверждение S справедливо для $t = a$, где a — фиксированное целое число.

2) Если утверждение S справедливо для $t = k$ ($k \geq a$), то оно справедливо и при $t = k + 1$.

Тогда это утверждение справедливо для любого целого числа $t \geq a$.

□ Теорема легко доказывается с помощью принципа математической индукции. Действительно, так как для $t = a$ утверждение справедливо, то достаточно доказать для $t > a$. При этом $t > a$ тогда и только тогда, когда $t = a + n$, где $n \in \mathbb{N}$. Поэтому справедливость утверждения S достаточно доказать для всех t вида $t = a + n$ ($n \in \mathbb{N}$). С учетом условия утверждение S справедливо для $t = a + 1$ (так как оно справедливо для $t = a$), и, таким образом, это утверждение справедливо для $n = 1$.

Предположим, что оно справедливо для $n = k$, т. е. для $t = a + k$. Тогда оно справедливо и для $t + 1 = (a + k) + 1 = a + (k + 1)$, т. е. для $n = k + 1$. Но тогда, на основании принципа математической индукции, рассматриваемое утверждение справедливо для всех натуральных чисел n , или, что то же самое, для всех целых чисел $t = a + n$ ($n \in \mathbb{N}$), т. е. для $t > a$. ■

Отметим, что, на основании доказанной теоремы, в случае примера 2 мы могли бы проверять справедливость соответствующего утверждения не при $n = 1$, а при $n = 0$.

Теорема 2. Если утверждение S справедливо для $n = 1$ и из предположения о его справедливости для всех натуральных $n \leq k$ ($k \in \mathbb{N}$) следует его справедливость для $n = k + 1$, то это утверждение справедливо для всех натуральных n .

Теорема 3. Пусть M — множество натуральных чисел, удовлетворяющее следующим условиям: $1 \in M$, и если $k \in M$, то и $k + 1 \in M$. Тогда $M = \mathbb{N}$.

Совсем просто показать, что и наоборот: из предположения о справедливости теоремы 2 или теоремы 3 следует справедливость принципа математической индукции. Таким образом, принцип математической индукции эквивалентен утверждениям теорем 2 и 3. В связи с этим довольно часто теоремы 2 и 3 (и особенно теорему 2) формулируют как принцип математической индукции.

Нетрудно также теоремы 2 и 3 сформулировать в несколько более общем виде (аналогично теореме 1).

Воспользуемся теперь теоремой 2 для обоснования равенства (1).

При $n = 1$ $S_1 = a + \frac{1}{a}$ есть, по условию, целое число. Целым так-

же является и число $S_0 = a^0 + \frac{1}{a^0} = 2$. Предположим, что при всех

натуральных $n \leq k$ $S_n \in \mathbb{Z}$. Как легко проверить, $S_1 S_k = S_{k-1} - S_{k+1}$, и, следовательно, число $S_{k+1} = S_1 S_k - S_{k-1}$ целое (как разность двух целых чисел). Таким образом, на основании теоремы 2, число S_n целое при любом натуральном n .

4. Принцип наименьшего числа. Принцип математической индукции эквивалентен также так называемому принципу наименьшего числа: *в произвольном непустом множестве натуральных чисел содержится наименьшее число.*

Действительно, пусть T — непустое множество натуральных чисел (т. е. $T \subset \mathbb{N}$, $T \neq \emptyset$). Если $1 \in T$, то число 1 и будет наименьшим в T . Поэтому рассмотрим случай, когда $1 \notin T$. Тогда для любого a из T $1 < a$ (т. е. число 1 меньше любого числа a из T). Обозначим через M множество всех натуральных чисел, каждое из которых меньше любого числа a из T . Так как $1 \in M$, то $M \neq \emptyset$. Если мы предположим, что для любого k из M $k+1 \in M$, то, по принципу математической индукции (или теоремы 3), $M = \mathbb{N}$. Но тогда $T = \emptyset$ (так как T и M не имеют общих элементов). Следовательно, наше предположение неверно. Это означает, что в M найдется такое число k , для которого $k+1 \notin M$. Но это возможно только при $a = k+1 \in T$. Покажем, что a — наименьшее в T число. Действительно, предположим, что $b \in T$ и $b < a$. Тогда $b \leq a-1$, т. е. $b \leq k$. Следовательно, $b \in M$ (так как при любом x из T ($b \leq k < x$)). Но тогда (при $x = b$) имеем $b < b$, т. е. получим противоречие. Следовательно, для любого x из T $a \leq x$ и $a \in T$, т. е. a — наименьшее в T число.

Покажем теперь, что и наоборот: принцип математической индукции может быть обоснован с помощью принципа наименьшего числа. Действительно, пусть утверждение S справедливо для $n = 1$, из предположения о его справедливости для $n = k$ вытекает справедливость этого утверждения для $n = k+1$. Обозначим через T множество натуральных чисел n , для которых утверждение S не имеет места. Предположим, что $T \neq \emptyset$. Тогда, на основании принципа наименьшего числа, в T содержится наименьшее число a . При этом, очевидно, $a > 1$ (так как $1 \notin T$). Рассмотрим число $k = a-1$. Так как $k \notin T$, то для числа $n = k$ утверждение S справедливо. Но тогда, на основании условия, утверждение S справедливо и для $n = k+1$, т. е. для $n = a$. А так как $a \in T$, то для $n = a$ утверждение S не должно иметь места. Получили противоречие. Следовательно, предположение о том, что $T \neq \emptyset$, неверное. Таким образом, $T = \emptyset$. А это означает, что утверждение S справедливо для всех натуральных n . Этим доказательство эквивалентности принципа математической индукции и принципа наименьшего числа завершено.

5. Биномиальные коэффициенты. Пусть n — натуральное число. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается $n!$ (читается: эн-факториал). Кроме того, по определению, $0! = 1$. Таким образом,

$$0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то числа C_n^k , определяемые равенствами

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \in \{0, 1, \dots, n\}), \quad (3)$$

называют *биномиальными коэффициентами*.

Нетрудно убедиться, что эти числа можно записать также в виде

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k+1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

Основные свойства биномиальных коэффициентов такие:

$$1) C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1} C_n^k; \quad 2) C_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1} C_n^k;$$

$$3) C_n^k = C_n^{n-k}; \quad 4) C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Свойства 1, 2 и 3 непосредственно вытекают из (3). Для доказательства свойства 4 воспользуемся свойствами 1 и 2:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_n^k + \frac{n-k}{k+1} C_n^k = \frac{n+1}{k+1} C_n^k = C_{n+1}^{k+1}.$$

Теорема 4. Пусть n — натуральное число и a, b — произвольные (действительные или комплексные) числа. Тогда

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n. \quad (4)$$

□ При $n=1$ левая и правая части в (4) равны: $a+b = a+b$. Предположим, что формула (4) справедлива при $n=k$, т. е. $(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \dots + b^k$. Умножая обе части этого равенства на $a+b$ и перемножая почленно выражения в правой части полученного равенства, найдем

$$\begin{aligned} (a+b)^{k+1} &= a^{k+1} + (1+C_k^1) a^k b + (C_k^1+C_k^2) a^{k-1} b^2 + \\ &+ (C_k^2+C_k^3) a^{k-2} b^3 + \dots + b^{k+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользовавшись теперь свойством (4), запишем (5) в виде (4) (при $n=k+1$).

Таким образом, формула (4) справедлива при $n=1$ и из предположения, что она справедлива при $n=k$, вытекает, что эта формула справедлива и при $n=k+1$. Но тогда, на основании принципа математической индукции, эта формула справедлива при любом натуральном n . ■

ОТВЕТЫ

Глава 1. 1. $d = 9k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$); 2. $c = 9k - 3$ ($k \in \mathbb{Z}$); 3. $b = 9k - 5$ ($k \in \mathbb{Z}$); 4. Один из возможных наборов: $a = 25$, $b = 67$, $c = 330$, $d = 1955$.

Глава 2. 1. Каждая из заданных дробей сократима (например: первая — при $n = -2$; вторая — при $n = 2$; третья — при $n = 0$; четвертая — при $n = 3$). 2. $a \in \{15; 17\}$, $b = 5$, $c \in \{9; 10\}$, $d \in \{13; 14\}$.

Глава 3. 1. Простые числа: 1987, 1993, 1997, 1999.

Глава 4. 1. Пусть $z = x + yi$. Тогда уравнение $z^2 = a + bi$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Задача может быть решена и непосредственной проверкой.

4. $p > -3\sqrt[3]{36}$ — один вещественный корень; $p = -3\sqrt[3]{36}$ — два вещественных корня (один из них — кратный); $p < -3\sqrt[3]{36}$ — три вещественных корня.

5. $|q| > 8\sqrt[3]{6}$ — один вещественный корень; $|q| = 8\sqrt[3]{6}$ — два вещественных корня (один из них кратный); $|q| < 8\sqrt[3]{6}$ — три вещественных корня.

Глава 5. 1. а) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p$, $x_1x_2x_3 = -q$. 2. а) Если $|p| < 4\sqrt{2}$, то заданное уравнение имеет вещественные корни. б) Если $p > 8$, то заданное уравнение имеет не-вещественные корни.

Глава 6. 1. а) См. рис. 8. 2. а) $(p = -3) \Rightarrow T = 2a$; б) $(p = -\frac{13}{8}) \Rightarrow T = 3a$; в) $(p = -\frac{13}{9}) \Rightarrow T = 3a$; г) $(p = -1) \Rightarrow T = 2a$.

3. Достаточно из (6.12) найти $f(x)$ и в полученном тождестве заменить x на $x - a$.

5. Пусть при некотором n ($n \in N$) $f(x + na) = f(x)$. Тогда

$$f(x + na) = \frac{f(x) \cos n\varphi - \sin n\varphi}{f(x) \sin n\varphi + \cos n\varphi} = f(x),$$

где $\varphi = \sqrt{2}\pi$. Но тогда $(f^2(x) + 1) \sin \varphi = 0$, что невозможно, так как $\sin n\varphi \neq 0$ и $f^2(x) + 1 \neq 0$.

Глава 7. 2. При $p = 3$ возможные следующие значения для q и r :

q	-3	1	3	7
r	1	-3	7	3

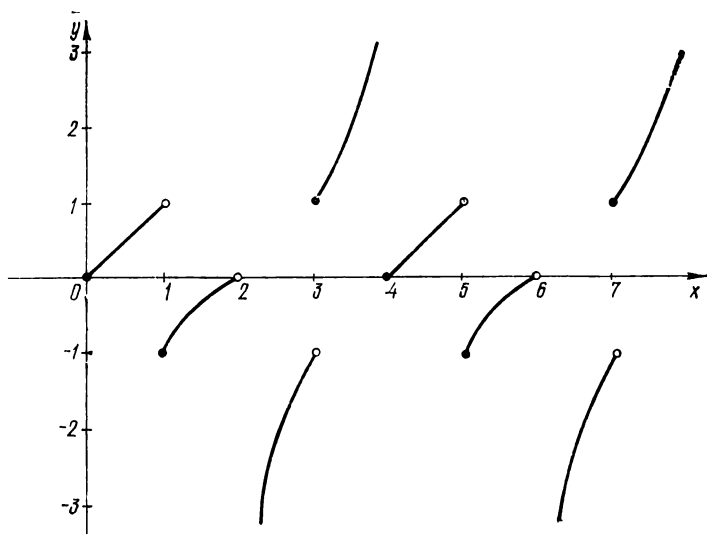


Рис. 8

3. $u_n = \frac{i}{2b} [(a - bi)^n - (a + bi)^n]$; $v_n = -(a^2 + b^2) u_{n-1}$.

Глава 8. 1. Использовать формулы для e^z , $\sin z$, $\cos z$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Делимость выражения $ab^n + cn + d$ на m	5
§ 1. Делимость чисел (основные понятия)	5
§ 2. Конкретные примеры	6
§ 3. Общий случай	6
§ 4. Об одном свойстве коэффициента c	8
Упражнения	8
Глава 2. Условие несократимости дроби вида $\frac{an + b}{cn + d}$	
§ 1. Наибольший общий делитель	8
§ 2. Конкретный пример	12
§ 3. Общий случай. Регулярные дроби	12
§ 4. Нерегулярные дроби	14
Упражнения	15
Глава 3. Теорема Вильсона	15
§ 1. Простые числа	15
§ 2. Теорема Вильсона	17
§ 3. Первое обобщение теоремы Вильсона	19
§ 4. Второе обобщение теоремы Вильсона	22
Упражнения	25
Глава 4. Исследование уравнения $x^n + px^k + q = 0$	25
§ 1. Комплексные числа	25
§ 2. Квадратные уравнения	28
§ 3. Тригонометрическая форма комплексных чисел	30 ₂
§ 4. Уравнение $x^3 + px + q = 0$	3 ₂
§ 5. Исследование корней уравнения $x^3 + px + q = 0$	33
§ 6. Исследование корней уравнения $x^n + px^k + q = 0$	36
Упражнения	38
Глава 5. Об одном достаточном условии существования не вещественных корней многочлена	39
§ 1. Корни многочлена	39
§ 2. Случай квадратного уравнения	41
§ 3. Общий случай	42
Упражнения	45
Глава 6. Периодичность функции, удовлетворяющей усло-	
вию $f(x + a) = \frac{\alpha f(x) + \beta}{\gamma f(x) + \delta}$ ($a \neq 0$)	45
§ 1. Конкретный пример	45
§ 2. Квадратные матрицы и действия над ними	47
	95

	§ 3. Условие периодичности в общем случае	4
	Упражнения	4
Глава 7.	Возвратные последовательности второго порядка	4
	§ 1. Числа Фибоначчи	4
	§ 2. Возвратные последовательности	5
	§ 3. Многочлены Чебышева	5
	§ 4. Формула для $\operatorname{tg} n\alpha$	5
	§ 5. Формула Мечина для числа π и ее аналоги	6
	§ 6. Формула для n -й степени квадратной матрицы	6
	Упражнения	6
Глава 8.	Кватернионы	6
	§ 1. Современная теория комплексных чисел	6
	§ 2. Определение и основные свойства кватернионов	6
	§ 3. Базисные кватернионы	7
	§ 4. Векторная часть кватерниона	7
	§ 5. Сопряженные кватернионы	7
	§ 6. Норма кватерниона	7
	§ 7. Функция e^z	7
	§ 8. Функции $\sin z$ и $\cos z$	7
	§ 9. Кватернион e^α	7
	§ 10. Кватернионы $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$	8
	§ 11. Функции от кватернионов	8
	Упражнения	8
Дополнение. Метод математической индукции		8
	1. Индукция в математике	8
	2. Принцип математической индукции	9
	3. Другие формы принципа математической индукции	9
	4. Принцип наименьшего числа	9
	5. Биномиальные коэффициенты	9
Ответы		9

**БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ**

МАТЕМАТИКА

Александр Васильевич Кужель

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИМПРОВИЗАЦИИ

Редактор О. С. Дзюба
Литредактор А. П. Ковальчук
Художественный редактор Е. В. Чурий
Технический редактор Л. Ф. Курышева
Корректор И. П. Бойко

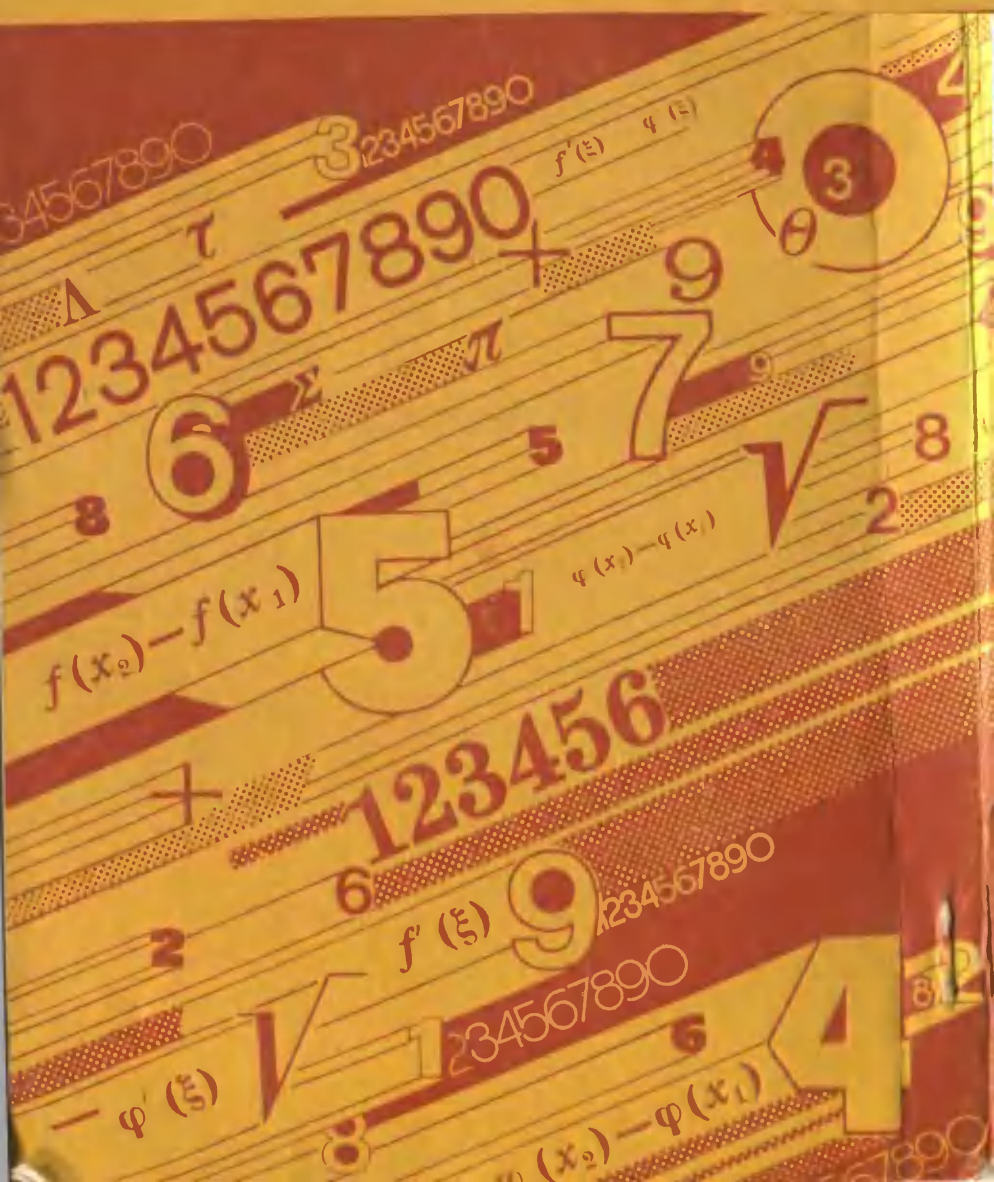


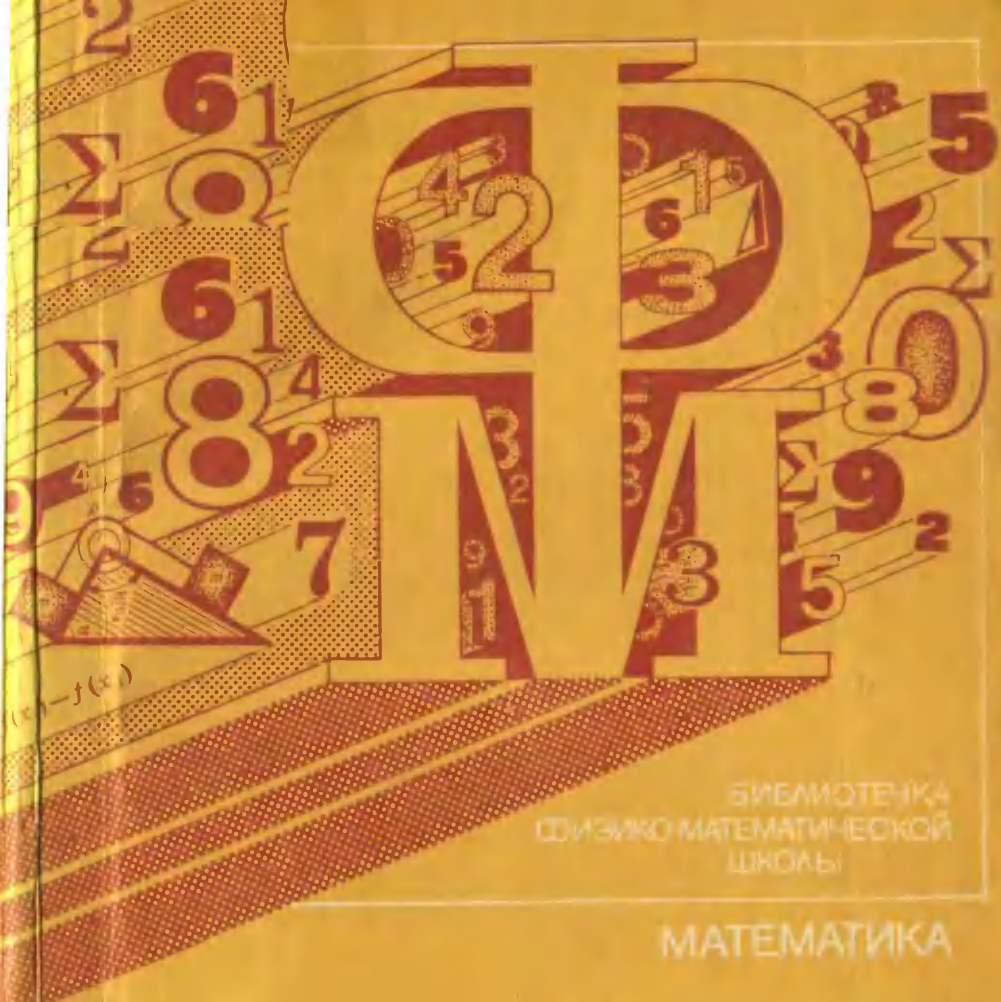
Информ. бланк № 7514

Сдано в набор 29. 12. 82. Подп. в печать 02.06.83. БФ 02675.
Формат 84×108/32. Бумага типогр № 2. Лит. гарн. Выс.
печать, 5,04, усл. печ. л. 5,36, усл. кр.-отт. 4,93 уч.-изд. л.
Тираж 10000 экз. Изд. № 6194 Зак 3-68 Цена 15 ч.

Главное издательство издательского объединения «Вища
школа», 252054, Киев-54. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики
им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии
№ 16, г. Харьков-3, ул. Университетская, 16. Зак. 1098.





БИБЛИОТЕКА
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ
ШКОЛЫ

МАТЕМАТИКА

А.В.КУЖЕЛЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИМПРОВИЗАЦИИ