

БИБЛИОТЕКА ЗНАНИЕ

ЛЕВ КАТОЛИН

**„Мы были
тогда
дерзкими парнями...“**



БИБЛИОТЕКА
«ЗНАНИЕ»

...Что за польза мне от субъекта, знающего всю математическую литературу, но не понимающего математики?

К. МАРКС

...Для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием. Маркс был основательным знатоком математики...

Ф. ЭНГЕЛЬС

...Открытие дифференциального и интегрального исчисления невозможно было бы без фантазии.

В. И. ЛЕНИН

ЛЕВ КАТОЛИН

„Мы были
тогда
дерзкими парнями...“

*ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И
ДОПОЛНЕННОЕ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1979

Лев КАТОЛИН

«МЫ БЫЛИ ТОГДА ДЕРЗКИМИ ПАРНЯМИ...»

Зав. редакцией
М. Новиков.

Редактор
Н. Яснопольский.

Мл. редактор
В. Саморига.

Художник
А. Сергеев.

Худож. редактор
Т. Егорова.

Техн. редактор
А. Красавина, Т. Пичугина.

Корректор
Н. Мелешкина.

ИБ № 1349

Сдано в набор 22.06.78 г. Подпи-
сано к печати 30.01.79 г. Индекс
заказа 9—761, Формат 84×108^{1/8}.
Бумага типогр. № 1. Гарнитура
литературная. А 07064. Печать вы-
сокая. Бум. л. 3,25. Печ. л. 6,5.
Усл. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л.
10,90. Тираж 100 000 экз. Изд. № 258.
Заказ 9-761. Цена 50 коп. Изда-
тельство «Знание», 101835, Москва,
Центр, проезд Серова, д. 4.

Отпечатано с матриц Киевской
книжной фабрики на Головном
предприятии республиканского про-
изводственного объединения «По-
лиграфкинига» Госкомиздата УССР,
г. Киев, ул. Довженко, 3.

Лев Католин

К29 «Мы были тогда дерзкими парнями...» Изд.
второе, дополн. М., «Знание», 1979.
208 с. (Б-ка «Знание»).

В книге, названием которой стала фраза из письма Ф. Энгель-
са дочери К. Маркса Лауре, рассказывается об одной малозна-
вестной области научных интересов Карла Маркса — о его
занятиях математикой, о судьбе его математических рукопи-
сей, расшифрованных, изученных и подготовленных к печати
советскими учеными.

К $\frac{10103-052}{073(02)-79}$ БЗ-100-01-77 0103010000 13.2
3К16

© Издательство «Знание», 1979 г.
Дополнения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора

6

Глава I. «Все тайны этого чердака»

17

Интермеццо первое

25

Глава II. «Не для печати,
а для уяснения вопросов
самому себе»

33

Интермеццо второе

50

Глава III. «Запонки для дифференцирования»

80

Интермеццо третье

117

Глава IV. «Трактуемые математически»

131

Интермеццо четвертое

155

Интермеццо пятое

177

Глава V. «В надлежащие руки»

185

ОТ АВТОРА

В этой книге рассказывается об одной малоизвестной области научных интересов Карла Маркса — о его занятиях математикой. Проблемы, волновавшие его в этой науке, отнюдь не просты для понимания. И тем не менее как бы далек от точных наук ни был читатель, у него нет оснований страшиться разверзающейся перед ним «бездны премудрости». Ведь речь пойдет не о самой математике, а о том, что увлекло в ней Маркса. Маркса, которого волновали самые основы любой проблемы — настолько общие и глубокие, что они представляют интерес для каждого, кто привык мыслить. Маркса, который любое дело озарял светом своей гениальности.

А то, что гениально, то просто.

Роль автора этой книги весьма и весьма скромна: он лишь рассказал о судьбе самих математических рукописей Маркса и о тех людях, благодаря которым они увидели, наконец, свет, попытался изложить результаты большого научного труда, который выпущен в свет Институтом марксизма-ленинизма. Труд этот — его объем превышает шестьсот книжных страниц — подготовлен под руководством ныне покойной Софьи Александровны Яновской, профессора МГУ, одного из крупнейших в нашей стране специалистов в области методологии, философии и истории математики. Ее дружеское участие и заинтересованное внимание определили судьбу этой книги, и потому с чувством глубокой благодарности она посвящается ее памяти.

Непосредственным поводом для написания этой книги послужил доклад, сделанный С. А. Яновской в конфе-

ренцале Института экономики АН СССР. Он был посвящен занятиям Маркса математикой и тем последствиям, которые имели эти занятия для главного дела его жизни — анализа экономики капитализма. Это было одно из многих ее выступлений на подобную тему, но Софья Александровна говорила так, как рассказывают впервые об интереснейшей, дух захватывающей находке, проливающей свет на многие бывшие до сих пор не ясными вопросы. В ее речи не было никаких эффектных лекторских приемов. Да они и не требовались. Тема ее доклада была сверхсовременной: в те годы знаменитое высказывание Маркса, донесенное до нас Лафаргом, о том, что наука только тогда достигает совершенства, когда начинает пользоваться математикой, еще не стало хрестоматийным. Говорила Яновская и о тех самостоятельных идеях, которыми Маркс обогатил науку, об обосновании математического анализа, но эта часть его математических работ, вытесненная тогда экономико-математическими мыслями, прошла мимо внимания. И лишь впоследствии, во время самостоятельного знакомства с Марксовым математическим наследием, стало ясно, насколько важны чисто математические изыскания, проведенные им, для понимания его образа мысли, стиля и характера. Из этих страниц — а их около тысячи — постепенно возникал совершенно непривычный, отнюдь не хрестоматийный его образ. Не великий борец и мыслитель, окруженный верными помощниками и одну за другой одерживающий победы в той области, где он был стократ сильнее своих врагов, но утомленный горестями и болезнями человек, который более тридцати с лишним лет урывками, крадя часы и минуты от главного дела своей жизни, чуть ли не втайне от самого себя постигает сложнейшие проблемы математики, в одиночку пробираясь сквозь непроходимые теоретические дебри в незнакомой ему области знания — и находя в этом отдых и утешение.

И вот тут-то возникал главный, принципиальный вопрос, не найдя ответа на который — хотя бы для самого себя, — невозможно было браться за рассказ о математических увлечениях Маркса. Чем была математика в его жизни, что заставляло Маркса исписывать многие сотни страниц математическими формулами, конспектировать учебник за учебником, как этот изнурительный труд мог возвращать бодрость его уставшему

мозгу, что нашел он в математике созвучное своему духу и подходу к жизни?

Беседы с Софьей Александровной Яновской скорее вызывали и обостряли все эти вопросы, чем давали на них ответ. Константин Алексеевич Рыбников, защитивший под ее руководством докторскую диссертацию по математическим работам Маркса, прочно усвоил научный стиль своего учителя: нет доказательств — нет и предмета для разговора. Без помощи Яновской и Рыбникова, без их благожелательного отношения к намерению разобраться в сути Марксовых математических работ эта книга, конечно, не могла бы увидеть свет. Но факты и материалы, полученные от них, осмысливать надо было самостоятельно: для математиков, даже если они заняты историей своей науки, вопросы психологического плана стоят отнюдь не на первом месте.

Были проведены и кое-какие собственные поиски на основе следующей гипотезы: любое сильное интеллектуальное увлечение человека творческого труда не может не сказаться в его основной деятельности, как бы далеко оно от этой деятельности ни стояло. Исходя из этого предположения, разумно было прежде всего сделать как можно больше хронологических «срезов», соотнося математические работы, датировка которых установлена, с той основной деятельностью, что вел в это время Маркс. Оказалось, что на этом пути ждали пусть очень небольшие, но чисто психологически важные для понимания роли математики в жизни Маркса находки.

Видимо, мыслить математическими категориями стало к тому времени уже частью натуры Маркса. В сугубо личных письмах, да еще написанных в трудные минуты жизни, математические фигуры вроде « >0 », « $\pm \infty \mp$ » или « $\frac{0}{\infty}$ » возникают отнюдь не случайно, они говорят о многом.

Маркс писал эти значки для самого себя — смертельно усталый, посреди незаконченных и неотложных дел, выбрав несколько минут передышки, он устраивал своему могучему мозгу маленький праздник: позволял ему думать о самых близких людях и о самых любимых проблемах. В таких — мы бы сказали теперь «экстремальных» — условиях всплывающие математические

ассоциации имеют особое значение для понимания тех мыслей, что владели Марксом все эти годы.

Математические примеры, аналогии, формулы и выкладки щедро рассыпаны по многим страницам «Капитала», основного труда жизни Маркса. Даже знаменитейшая фраза из предисловия к французскому переводу 1-го тома «Капитала»: «В науке нет широкой столбовой дороги, и только тот может достигнуть ее сияющих вершин, кто, не страшась усталости, карабкается по ее каменистым тропам», это со школьных лет знакомое каждому высказывание Маркса тоже имеет «математические» корни, тоже родилось из его увлечения математикой. Конспектируя книгу Иоганна Генриха Морица Поппе «История математики», Маркс делает несколько выписок — отмечает, что в истории арифметики многие достижения были связаны с развитием торговли и ранними проявлениями капитализма в шестнадцатом веке, что Архимед был не только равноценным Евклиду геометром, но и прославленным механиком, что для геометрии новая эпоха наступает с конца семнадцатого века в связи с открытием анализа бесконечно малых величин, что древние народы Востока неплохо знали тригонометрию — имели таблицы тангенсов намного раньше европейцев, — возвращается вновь к древнегреческой математике и заносит в свою «Записную тетрадь» несколько строк о несовершенстве метода древних, о роли Платона и Евклида, и именно тут появляется приписываемое Евклиду изречение о том, что «к изучению математики нет царского пути». Много лет спустя заключенную в этих словах мысль Маркс распространил на науку вообще в своем ставшем ныне хрестоматийном обращении к «Гражданину Морису Лашатру», издателю французского перевода «Капитала».

Подобные отблески математических занятий Маркса можно обнаружить не только в «Капитале», но и в других его работах. Уже одни только эти мелкие сами по себе штрихи убеждали, что математика не была в жизни Маркса тем, что именуется сейчас словечком «хобби». Это не было неким «анти-Я», специально призванным противостоять всем привычкам, облику, роду занятий своего владельца. Нет, «математические мысли» пронизывают жизнь Маркса, хотя он и подходил к ним

как к некоей интеллектуальной роскоши, которую можно позволить себе далеко не всегда.

Итак, не побочное, случайное увлечение, а длительная, сильная страсть, проходящая через лучшие годы жизни, до самого конца ее и наложившая свой отпечаток на многие дела и работы Маркса. Утвердиться в этой мысли было тем важнее, что в то время, когда шла работа над первым изданием книги, то есть до 1968 года, почти все математики, с кем приходилось говорить о математических работах Маркса, на редкость единодушно считали, что они явились для него пустой забавой, не дали, да и не могли дать никаких результатов, и потому лучшее, что можно сделать, — это ничего не говорить об этих написанных рукой Маркса страницах, недаром же не слышно о них со времени первой публикации в 1933 году. Некоторые ссылались на слова академика А. Н. Колмогорова (которых он никогда не произносил), другие высказывали свое личное мнение о рукописях (которых они никогда не читали), третьи исходили из тех общих положений, что математика настолько сложная и специфичная наука, что ей необходимо отдать всю жизнь и лишь в этом случае можно говорить о каких-то «математических работах».

Разумеется, такие мнения, да еще вдобавок высказываемые людьми, в чьем личном расположении и к Марксу, и к тем, кто занимался изучением его трудов, нельзя было сомневаться, не могли не расхолаживать. Теперь уже вопрос стоял так: пусть удалось установить, что математические увлечения Маркса не были для него ни случайными, ни временными, ни специально придуманными для того, чтобы отвлекать от основной работы, но считал ли сам Маркс эти свои работы важными и нужными или же это была лишь тренировка ума, черновая работа мысли, необходимая для некоей другой деятельности, в лучшем случае нечто вроде игры на скрипке для Эйнштейна — занятие любимое, даже в некотором смысле необходимое, но не имеющее тем не менее права называться «работой»?

Первая гипотеза не давала ответа на вопросы. Да, в трудах Маркса, в его письмах удалось увидеть следы его математических занятий. Это, однако, позволяет говорить лишь о силе и длительности увлечения, но отнюдь не о его самостоятельной ценности — в глазах самого Маркса в первую очередь.

Было выдвинуто следующее предположение: если верна первая гипотеза, то и обратная ей тоже верна. То есть на любом серьезном интеллектуальном увлечении человека творческого труда не может не сказаться характер его основной деятельности. Иными словами, если Маркс применял в своих математических занятиях арсенал накопленных им средств решения сложных проблем науки, то, следовательно, занятия эти в его собственных глазах были важным, серьезным делом, стоящим того, чтобы использовать в нем дорогой жизненный опыт. Если же он не считал возможным ставить на службу своим математическим изысканиям методы и приемы, добытые ценой многолетней работы, то тысячу страниц, написанных его рукой, едва ли стоит считать чем-то большим, чем гимнастикой ума — занятием, хотя и любимым, но ценимым лишь постольку, поскольку в нем виделся прок для других, несравненно более важных дел.

Раньше его письма и труды просматривались под «математическим» углом зрения, теперь, наоборот, Марксовы математические рукописи изучались с точки зрения использованных в них методов научного анализа.

Вообще Маркс успел подготовить всего две законченные математические работы, с которыми намеревался ознакомить Энгельса. Одна из них — «О производной функции». В ней есть такие слова: «Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит, таким образом, буквально к *ничему*. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и в понимании *отрицания отрицания* вообще) заключается именно в том, чтобы увидеть, *чем* она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам». Эти строки — а затем и многие другие — объяснили смысл известных слов Лафарга о Марксе: «В высшей математике он находил диалектическое движение в его наиболее логичной и в то же время простейшей форме». И отрицание отрицания, и переход количественных изменений в качественные, и единство и борьба противоположностей — весь этот аппарат материалистической диалектики, который Маркс ковал своими руками и которым он умел владеть, как никто другой, был пущен в ход для решения вопросов, волновавших Маркса в математике. Подтверждение этой мысли нашлось и в давнишней работе С. А. Янов-

ской «О так называемых «определениях через абстракцию», написанной ею еще в 1936 году. Там есть такое место: «Из опубликованных недавно математических рукописей Маркса ясно, что... применяемый им метод тот же, каким он пользуется в «Капитале»... Больше того, самое изложение диалектики развития дифференциала напоминает (конечно, только в самых общих чертах) общий ход развития понятия о деньгах в «Капитале». Дифференциальные символы возникают сначала как символические эквиваленты некоторых реальных алгебраических процессов и лишь в ходе дальнейшего развития меняются с ними ролями...»

Отсюда следовало, что сам Маркс относился к своим математическим исследованиям вполне всерьез, и по одному этому они требуют к себе самого пристального внимания как еще одна, до сих пор не до конца исчерпанная возможность дополнить наши знания о Марксе.

Вероятно, психологический подход не был бы с таким усердием применен при решении тех или иных вопросов, связанных с занятиями Маркса математикой, если бы во время работы над книгой неожиданно не пришла поддержка со стороны самого Маркса. В своих математических рукописях он сам не раз и не два приходит к вполне определенным выводам, исследуя проблему с позиций психологии научного творчества. Вот, скажем, Марксово объяснение тех сложностей, что встретились на пути создателей нового исчисления — Ньютона и Лейбница: «Итак, сами верили в таинственный характер новооткрытого исчисления... сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие...»

Маркс анализирует работы математиков, применяя свои представления о психологии творчества ученого: благодаря им он уясняет для себя чисто математические вещи. Даже вопрос о том, равно или не равно нулю бесконечно малое число, вопрос, вокруг которого было так много горячих споров, он решает, основываясь на понимании особенностей мышления ученого. Он считает, что создатели дифференциального анализа Ньютон и Лейбниц отнюдь не по злой воле приписывали дифференциалам таинственные необъяснимые свойства: они и нули и не нули одновременно. Но иначе ничего не получалось: чтобы результаты всегда были правильными, приходилось в одних случаях принимать одну точку зрения, в других — другую. Психологическая

сторона вопроса, таким образом, была весьма важна для Маркса, он многое постигал именно таким способом, как бы становясь на место другого человека, чтобы увидеть мир его глазами.

Совершенно самостоятельным стал вопрос о том, насколько математические интересы Маркса затронули Энгельса. Теме этой в книге посвящено много страниц, потому что — и это было третьей гипотезой — самые глубокие мысли ученого, особенно те из них, что были особенно дороги ему самому, обычно не только наследуются его ближайшими соратниками и учениками, но и находят в их трудах наиболее яркое воплощение. Тут сказывается и естественное желание додумать любимые мысли ушедшего из жизни друга, и то, что сами мысли эти многократно внушались им еще при его жизни — в самой разной форме. Читая «Анти-Дюринга» и «Диалектику природы» Энгельса, невозможно не видеть в них самое сильное и прямое влияние Марксовых математических работ и многочисленных бесед на математические темы, которые имели место между двумя великими единомышленниками. В предисловии к «Анти-Дюрингу» Энгельс признается, что подверг себя в области математики процессу «полного линяния», пропитавшись идеями Маркса. И потому изложение этих идей столь похоже по стилю, по подбору эпитетов и сравнений, даже по используемым словам на Марксовы рукописи по математике.

Переписка Маркса и Энгельса показывает также, насколько глубоко проник Энгельс в суть Марксовых математических интересов. Поэтому анализ известных высказываний Энгельса в области математики позволяет немало узнать о проблемах, интересовавших Маркса в этой науке, и о тех путях, которыми шел он, решая их.

Чрезвычайно любопытно было проследить, как по-разному воспринимались математические работы Маркса людьми, окружавшими его, и теми, кто после его смерти имел отношение к его литературному наследию. «Маркс был основательным знатоком математики...». «Единственный человек, знающий, насколько мне известно, достаточно и математику и философию... это Маркс». Оба высказывания принадлежат Энгельсу. «...Он написал работу по исчислению бесконечно малых величин, которая, по отзывам читавших ее специали-

тов, имеет большое значение», — вспоминал Лафарг. Но Меринг, один из лучших биографов Маркса, в своей книге пишет: «Мы оставляем в стороне вопрос, действительно ли он сделал в этой области самостоятельные открытия, как утверждали Энгельс и Лафарг. Математики, рассматривавшие оставшиеся после него рукописи, держатся другого мнения».

Явное противоречие, заключающееся в этих различных оценках значения Марксовых математических работ, не может не вызвать желания попытаться как-то его разрешить, поскольку, кроме Самюэла Мура, адвоката и бывшего кембриджца, другие люди, кому Маркс показывал свои математические работы, неизвестны.

Но при изучении материалов, связанных с этой малоизвестной стороной деятельности Карла Маркса, не удалось найти ответ ни на этот, ни на многие другие вопросы. Так, например, пришлось выдвинуть три различных предположения о побудительных причинах, приведших Маркса к математическим занятиям. Очевидно, не лишено интереса попытаться более точно ответить на этот вопрос. Естественно, путь к тому — более глубокий анализ творчества Маркса, главным образом его психологических аспектов.

Вообще ни изучение, ни даже издание его математических работ невозможно было бы без попыток понять творческий метод Маркса, особый склад его научного мышления.

Математические работы Маркса, далеко не изученные в достаточной мере, дают еще одну возможность анализа его творчества. И возможность тем более ценную, что не только раскрывают перед исследователем малоизвестную область научных интересов Маркса, но и позволяют проследить творческий процесс, растянутый во времени на три десятилетия и вдобавок носивший характер побочного увлечения, отрывавшего силы Маркса от основной работы. Уже одни только эти обстоятельства говорят о чрезвычайно сильных стимулах, лежащих в основе этой работы Маркса, — стимулах, целиком объяснимых только с позиции изучения психологии его научного творчества, его удивительной личности человека и ученого. «Царство свободы начинается в действительности лишь там, где прекращается работа, диктуемая нуждой и внешней целесообразностью...» — писал он в «Капитале». Трудно удержаться от того, чтобы не вы-

сказать еще одну, последнюю, гипотезу: нет ли и в этих словах, написанных по совершенно иному поводу, отзвука «математических» увлечений, которые хронологически совпадают с работой над «Капиталом»?

Когда книга выходит в свет, автор ее приобретает право во всеуслышание поблагодарить тех, кто способствовал ее появлению. Кроме Софьи Александровны Яновской и Константина Алексеевича Рыбникова, роль которых в любой работе, связанной с математическими рукописями Маркса, совсем особая, неоценимую помощь автору оказала Ольга Константиновна Сенекина, заведующая секцией документов Маркса и Энгельса ИМЛ. Уточнением многих формулировок при переиздании книги обязана Вере Сергеевне Дунаевой, профессору Академии общественных наук.

Большую роль в формировании общей концепции книги и, главное, решимости взяться за ее написание, сыграли встречи с Леонидом Витальевичем Канторовичем, Норбертом Винером, Оскаром Ланге, Андреем Николаевичем Колмогоровым, многими сотрудниками Василия Сергеевича Немчинова, работавшими в те годы в Москве и Новосибирске. При работе над книгой автор постоянно испытывал заинтересованное, дружеское внимание многих людей. Это прежде всего Даниил Семенович Данин, «благословивший» эту работу не только экземпляром журнала «Под знаменем марксизма» за 1933 год (с первой публикацией Марксовых математических рукописей и со статьей С. Я. Яновской) из своей библиотеки, но и многими ценными советами, и ныне покойный Борис Николаевич Агапов, прочитавший первый вариант рукописи книги. В своей рецензии, датированной 2 мая 1967 года, он писал: «...В этом есть отсвет той необыкновенной жизни интеллекта, которой сверкает все творчество Маркса, и которая заряжает каждого, кто не чужд мышлению... Особенно важным кажется мне довести до зримой, для всех ощутимой ясности главную мысль Маркса о том, что дифференциал есть не количество, не величина, а оперативный прием, вполне свободный от всякой мистики и от всяких вещественных нагрузок. Тайно я глубоко убежден, что изложение математики вообще затруднено и неоправданно усложняется. Мне кажется, что — судя по тому, что написано в этом очерке, — Маркс искал пути осмыслить дифференциальное исчисление как аппаратуру для слож-

нейших задач, поставленных новым временем, и нашел очень точное и очень простое решение прагматического порядка. Это, конечно, может и не понравиться тем, кто хочет непременно вырядить математику в самодовлеющую мистериальную область духа.

Я — за печатанье этой интересной работы. Пусть потом нам будет позволено сказать о себе: «Мы были тогда дерзкими парнями!»

Публикуя эти лестные для него строки, автор надеется, что упрек в нескромности минует его.

За те десять лет, что прошли со времени выхода в свет первого издания этой книги, появилось много работ, в которых изыскания Маркса в области математики стали предметом анализа или орудием для постижения сложных философских вопросов. Всего один пример: в 1978 году в первом номере журнала «Вопросы философии» в двух статьях, принадлежащих перу разных авторов и посвященных совсем разным проблемам, аргументами, подтверждающими основную мысль, служат отсылки к Марксовым математическим рукописям. Из многочисленных работ, так или иначе использованных при переиздании книги, хочется отметить статью доктора физико-математических наук В. Н. Молодшего в «Вестнике Академии наук» за 1968 год и книгу А. Насынбаева и Г. Шляхина «Развитие познания и математика», выпущенную издательством «Казахстан» в 1971 году, а из зарубежных публикаций — статью профессора Губерта Кеннеди «Карл Маркс и основания дифференциального исчисления» в журнале «Historia Mathematica» за 1977 год * и его доклад «Маркс, Пеано и дифференциалы», прочитанный в том же году на XV Международном конгрессе по истории науки в Эдинбурге.

И, наконец, автор считает своим приятным долгом поблагодарить профессора Светослава Славкова из Софии за присланные им работы, в которых он анализирует математические рукописи Карла Маркса.

* В ней американский историк науки с недоумением отметил, что в новом, третьем, издании БСЭ почему-то опущена статья К. А. Рыбникова о математических работах Маркса. Специально подчеркнув прекрасное качество перевода Марксовых трудов на русский язык, Кеннеди обращает внимание всего на одну неточность — перевод выражения «hocus rosus». Однако в письме к автору этой книги он сообщает, что считает теперь это замечание своей ошибкой.

«ВСЕ ТАЙНЫ ЭТОГО ЧЕРДАКА»



После смерти бедного Мавра Тусси в ответ на мой вопрос сообщила мне, что он сказал ей, чтобы она и я распорядились всеми его бумагами и позаботились об издании того, что следует издать, особенно второго тома и математических работ.*

В данный момент я вынужден... ждать в будущем случая, который позволил бы мне собрать и опубликовать добытые результаты,— быть может, вместе с оставшимися после смерти Маркса рукописями по математике, имеющими в высшей степени важное значение.

Фридрих Энгельс

1

И все-таки это было веселое занятие!

Ждал ли он, что эти старые бумаги, пропыленные, оставшиеся без хозяина рукописи-сироты, возвратят его к молодости? Думал ли, что бисерные строки толстых записных тетрадей, строки, которыми был отмечен каждый день человека, так недавно ушедшего из жизни, дадут ему радость, а не боль?

Никто и не предполагал, конечно, что он разрыдается на этом полутемном чердаке. Слишком он был для этого философ. Философ и мужчина. Но чтобы старые рукопи-

* Имеется в виду второй том «Капитала».

си принесли ему минуты веселья — этого он, пожалуй, и сам от себя не ждал. И потому писал дочери Маркса, Лауре Лафарг, в Париж, словно споря с ней и с собой:

«Уверяю тебя, мне очень забавно наталкиваться на эти старые вещи, бо́льшая часть которых касается меня в такой же мере, как и Мавра, и там так много такого, над чем можно посмеяться. Ним помогает мне — требуется вытирать огромное количество пыли! И мы от души смеемся, вспоминая старые времена... Но прежде чем мы проникнем во все тайны этого чердака, полного ящиков, пакетов, свертков, книг и т. д., должно пройти некоторое время...»

И снова — Лауре, через десять дней, 2 июня 1883 года:

«Среди бумаг Мавра я нашел целую кучу рукописей... Некоторые из них я скоро опубликую.

Одну рукопись я прочту тебе, когда ты будешь здесь; ты лопнешь от смеха. Я читал ее Ним и Тусси; Ним сказала: теперь-то я знаю, почему вы оба тогда в Брюсселе так хохотали по ночам, что ни один человек в доме не мог спать. Мы были тогда дерзкими парнями, поэзия Гейне — детски невинная штука в сравнении с нашей прозой».

(«Поэзия Гейне — детская игрушка по сравнению с нашей дерзкой, веселой прозой. ... Я хохотал до упаду, когда перечитывал старые рукописи», — почти в тех же словах рассказывал Энгельс о своих переживаниях Э. Бернштейну дней десять спустя.)

И Лаура, и ее младшая сестра Элеонора — Тусси, и Ним — Ленхен, Елена Демут, по сути, член семьи Марксов, а вовсе не прислуга, припомнившая, как когда-то в брюссельском изгнании Мавр, прозванный так за смуглый цвет лица и черные, как смоль, волосы, с упоеанием писал вместе с Энгельсом «Немецкую идеологию» и на чем свет стоит честил «истинных социалистов», — все они знали, что будь Маркс сегодня с ними, он бы тоже «от души смеялся, вспоминая старые времена», — так, как он это умел...

2

Нашел ли Энгельс тогда, весной 1883 года, на чердаке дома 41 на Мейтленд-парк-род тетради с конспектами и записями по математике? Должно быть, нашел,

во всяком случае уже в конце июня этого года он пишет своему и Марксовому старинному другу Фридриху Зорге: «Есть там также 3—4 тетради математических работ...» Старые конспекты двадцатилетней давности по коммерческой арифметике, по алгебре и тригонометрии не могли не оказаться на чердаке, они наверняка отправились туда в свое время. И наверно, листая страницы тетрадей, перечеркнутые карандашом, — в знак того, что материал использован и пошел в дело, — Энгельс подумал о том, что само дело так и осталось неоконченным, хотя последние рукописи по математике лежали в рабочем кабинете Маркса до дня его смерти. Осталось неоконченным, как многие иные труды последних лет.

И еще, разбирая эти страницы и страницы конспектов по агрономии и физиологии, по геологии и истории, Энгельс вспомнил, наверно, слова, которые так недавно говорил над могилой Маркса. Это был последний, самый последний, прощальный разговор — такой короткий и такой продуманный. Он долго отбирал для него каждое слово. И не забыл — не мог забыть — об увлечении последних лет жизни Маркса: о его математических работах. «...Маркс делал самостоятельные открытия в каждой области, которую он исследовал, — даже в области математики, — а таких областей было очень много, и ни одной из них он не занимался поверхностно», — говорил Энгельс в тот мартовский день на Хайгетском кладбище, и, конечно же, в памяти его были последние «математические» письма, полученные совсем недавно.

3

Почему Маркс занялся математикой? Да просто потому, что это доставляло ему радость. И если первое его знакомство с математическими трудами было делом необходимости — того требовали экономические расчеты в его работах, то все последние годы он обращался к математике, когда хотелось отдыха и выдавалась свободная минута. «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением», — писал он Энгельсу. Математика приносила радость, как всякое движение человеческой мысли, а мышление было для него высшим наслаждением. Красивым сцеплением идей он упивался всюду, где находил его, смаковал как знаток, как гурман и спешил поделиться со всяким, кто на-

ходил рядом, — из тех, конечно, кто способен был оценить красоту человеческой мысли. «Даже преступная мысль злодея величественнее и возвышеннее всех чудес неба», — любил он повторять слова Гегеля. Чудеса Маркс ценил не слишком-то высоко, хотя любознательность и завела его как-то на представление, где демонстрировались фокусы спиритов. Впрочем, и тут его увлекала если уж не сила, так по крайней мере ловкость мысли, и особое удовольствие получил он, когда фокусник признался, что он «не настолько прост, чтобы объяснить публике, как он это делает, так как в противном случае она перестанет бывать на его представлениях».

Но больше всего его влекли идеи, преображающие мир. Здесь азарт постижения уводил его к первоисточкам наук. Нет, это не было ни гимнастикой ума, ни вынужденной платой за знания, хотя Маркс сам повторял не раз, что идеи, революционизирующие науку, не бывают популярными — их популяризуют потом. Он был рад платить эту цену и получать сведения из первых рук. Он следовал извилистыми ходами чужой мысли, поглощенный самым движением, но не переставал наблюдать этот путь со стороны. И как же он смеялся, натываясь на след ложных шагов и понимая их причины и следствия! В этом упорном процессе приобщения к истине не было ни тени священнодействия, ни грана пиетета, и при всей его основательности — мальчишеская дерзость и непочтительность, и ничего от тех постных достоинств прусских приват-доцентов, которых Энгельс, любитель и знаток диалектов, припечатал берлинским словечком «Ernscht» — «сурьезность».

4

Из десяти последних писем, которые Энгельс получил от Маркса из Вентнора и которые для него, Энгельса, все еще не превратились в архивные документы, а так и оставались последними письмами, одно посвящено опытам по передаче электроэнергии на большие расстояния и другое — математике. В этом курортном городке на небольшом острове Уайт у южного побережья Англии Маркс пытался спастись от лондонской непогоды, а нашел лишь яростный ветер, бушующий постоянно, и непрестанные дожди. Мучимый застарелым бронхитом, терзаемый приступами кашля, который теперь при всяком волнении хватал его за горло, «как хватал Красный

Вольф своего брата, хлебного ростовщика», вынужденный в непогоду дышать через респиратор, Маркс писал Энгельсу:

«Дорогой Фред!

Что ты скажешь об опыте Дебре на Мюнхенской электрической выставке? Уже примерно год, как Лонге обещал мне достать работы Дебре (специально для доказательства, что электричество допускает передачу силы на большое расстояние при посредстве простой телеграфной проволоки). ... Лонге, по своему обыкновению, каждый раз забывал прислать мне это».

Что поделаешь, у Маркса были очень милые, но не слишком обязательные зятья, и умер он, так и не дождавшись обещанных мужем его старшей дочери Жени Шарлем Лонге статей. А должен он был получить не больше и не меньше, как парижские журналы «Электрический свет» и «Электричество», которые читались лишь специалистами-электротехниками, да и то не всеми. Он ждал эти журналы с нетерпением, раззадоренный газетными сообщениями о демонстрации первой опытной линии электропередачи между Мисбахом и Мюнхеном, предвидя новый переворот в промышленности («Плохо теперь быть «стариком» и иметь возможность лишь предвидеть, вместо того, чтобы видеть самому», — писал он дочери о своих взаимоотношениях с будущим), принялся читать и конспектировать книгу Госпитале «Современная физика. Основное применение электричества».

А в конце ноября того же 1882 года из Вентнора от Маркса пришло письмо о математике — ответ на критические замечания Сэма Мура, который прочел и не понял Марксову рукопись об обосновании дифференцирования. Энгельс сам ответил тогда Муру, и Маркс в своем письме лишь добавил к этому несколько строк, обрисовав путь дифференциального исчисления от Ньютона до Даламбера... Пока он писал, в Вентноре выглянуло солнце, и Маркс, истосковавшийся по хорошей погоде, оборвал себя на полуслове:

«Вот как раз показывается солнце, подходящий момент для прогулки, а потому не стану распространяться в этом письме про пипс * о математике, но позднее при случае вернусь подробно к различным методам».

Такого случая больше уже не представилось...

* про пипс — в данный момент, теперь (лат.).

И вот теперь посреди полутемного чердака, заваленного рукописями, в молчаливом царстве замыслов и планов, Энгельс думал о том, что же произойдет с их перепиской, с черновиками, которые успели и не успели превратиться в книги и статьи. Все это были вещи сугубо личные, потому что обществу может принадлежать лишь то, что человек сам отдает ему во владение и на суд. Здесь же, в этих набросках и письмах, могли быть догадки, не до конца подтвержденные логикой рассуждений, выводы без твердой опоры на факты, предположения, сомнительные подчас и для самого автора, и, наконец — ошибки, ибо без них не обходится при отыскании истины. Энгельс и сам был строг к своим творениям, отличаясь здесь педантизмом, казалось бы, не свойственным его увлекающейся натуре, но даже его порой выводила из себя щепетильность Маркса, не решавшегося, как утверждали знавшие его люди, напечатать ни одной фразы, которой он не мог бы доказать множеством различных способов. А форма — литературная отделка, на которую Маркс тратил столько времени, перекраивая и переписывая наново свои работы! Ведь Марксу была невыносима сама мысль появиться перед людьми с вещью, не доработанной до конца. Только ему, Энгельсу, мог Маркс показать рукопись, когда в ней еще не выправлена последняя запятая. Если же она попадала в руки кому-то еще, это было для него чистым мучением. И чувство это было столь болезненно, что он даже сказал однажды, что лучше сожжет свои рукописи, чем оставит их неоконченными.

Через две недели после смерти Маркса Энгельс писал Петру Лавровичу Лаврову, русскому социологу и публицисту, с которым они с Марксом были дружны: «...он всегда скрывал от нас, в каком состоянии его работы. Он понимал: если мы узнаем, что у него что-нибудь готово, то будем приставать к нему до тех пор, пока он не согласится это опубликовать».

И вот теперь эти рукописи окружают Энгельса...

Да, он отложит свою философию наук, над которой работал уже десять лет, и подготовит труды Маркса к печати. Но ведь и его жизни не хватит на это. Да и кто знает, сколько отпущено ему самому?

И через десять дней после письма Лауре о дерзкой и веселой прозе Энгельс пишет о рукописях, хранящихся на чердаке старого дома, в Цюрих Эдуарду Бернштейну — одному из тогдашних лидеров немецкой социал-демократии, который в это время редактировал в Швейцарии, подальше от бисмарковских ищеек, газету немецких социалистов и не превратился еще в политического болтуна, предателя рабочего дела:

«Эта переписка, имеющая также и историческое значение, попадет, насколько это будет зависеть от меня, в надлежащие руки».

Мысль эта уже никогда, до самой смерти, не оставляла Энгельса.

«Все мы стремимся к тому, чтобы достойным образом увековечить память Мавра, — писал он Лауре Лафарг спустя еще несколько дней, — и начало этому будет и должно быть положено публикацией его посмертных сочинений. Давайте же по мере наших сил все будем содействовать достижению этой цели».

И когда гамбургское издательство Нестлера и Мелле предложило ему взять на себя редактирование «Библиотеки политической экономии», Энгельс вынужден был ответить:

«Милостивые государи!

Как ни лестно для меня предложение, содержащееся в вашем любезном письме... я вынужден, к сожалению, отклонить его из-за отсутствия времени.

Обязанности в связи с изданием рукописей Маркса и использованием прочих оставшихся после него материалов целиком займут мое время на несколько лет и являются для меня долгом, перед которым все остальное должно отойти на задний план».

И уже много лет спустя — лет, беззаветно отданных редактированию и выпуску в свет сперва второго, а затем и третьего томов «Капитала», чтению корректур, просмотру переводов других произведений Маркса — на французском, итальянском, датском, голландском языках, — Энгельс вновь и вновь возвращается к мыслям и заботам, связанным с судьбой Марксовых рукописей. В конце июля 1893 года он пишет завещание — на всякий случай, воспользовавшись приездом Самюэла Мура, их общего с Марксом, друга, юриста и переводчика на английский язык «Капитала» и «Манифеста Коммунистической партии», того самого Сэма Мура, который чи-

тал, но не сумел понять Марксовы математические работы. В нем есть такие строчки:

«Я распоряжаюсь, чтобы все литературные рукописи, написанные моим покойным другом Карлом Марксом, и все личные письма, написанные им или адресованные ему, которые ко времени моей смерти будут находиться в моем владении или распоряжении, были бы переданы моими душеприказчиками Элеоноре Маркс-Эвелинг, младшей дочери вышеупомянутого Карла Маркса...»

И еще через полтора года он посылает своим душеприказчикам уточняющее распоряжение:

«...Я хочу дополнить мое завещание следующими указаниями относительно оставленных мной бумаг, а именно:

а) Все бумаги, написанные рукой Карла Маркса (за исключением его писем ко мне), и все адресованные ему письма (за исключением моих писем к нему) должны быть возвращены Элеоноре Маркс-Эвелинг как законной представительнице наследников Карла Маркса».

И словно всех этих предосторожностей мало, уже на пороге смерти, письмо, адресованное Лауре Лафарг, — одно из последних писем, Энгельс заканчивает словами о главной цели последних лет своей жизни:

«Относительно того, что ты пишешь о литературном наследстве Мавра и его судьбе в случае моей смерти, дело обстоит достаточно просто. Все это я *храню для вас*, это тебе известно; и, следовательно, после моей смерти вернется к вам. В завещании, которое я составил (когда Сэм Мур был здесь в позапрошлый раз), особого пункта нет, но в приложенных к завещанию инструкциях моим душеприказчикам содержится четкое распоряжение передать Тусси как исполнителю завещания все рукописи Мавра, написанные его рукой, а также все адресованные ему письма, за единственным исключением — моей собственной с ним переписки. А поскольку у Тусси, кажется, есть некоторые сомнения по этому вопросу, то, как только Сэм Мур летом вернется, я попрошу его составить новое завещание, в котором это будет ясно и недвусмысленно заявлено. Если у тебя есть какое-нибудь другое пожелание, дай мне, пожалуйста, знать».

Он и умер среди этих забот — передать оставшиеся после Маркса рукописи «в надлежащие руки»...



Книги имеют свою судьбу.

Теренциан Мавр

1

Судьбы рукописей еще более драматичны, чем судьбы книг.

Не избежали общей участи и «оставшиеся после Маркса рукописи по математике, имеющие в высшей степени важное значение», — их путь к людям оказался непрост.

Намерениям Энгельса издать их вкупе со своими трудами последних лет не суждено было осуществиться — его «Диалектика природы», вместе с которой он собирался опубликовать Марксовы математические работы, увидела свет лишь через тридцать лет после смерти автора. Все это время она пролежала под спудом в архивах немецкой социал-демократии и впервые была издана только в 1925 году у нас в стране. Героические попытки Энгельса во что бы то ни стало отсрочить смерть до того мгновения, когда все оставленные ему в наследство великим другом и единомышленником работы увидят свет, отнюдь не удлинили его жизни. «Мое положение таково: 74 года, которые я начинаю чувствовать,

и столько работы, что ее хватило бы на двух сорокалетних,— писал он в декабре 1894 года.— Да, если бы я мог разделить самого себя на Ф. Энгельса 40 лет и Ф. Энгельса 34 лет, что вместе составило бы как раз 74 года, то все быстро пришло бы в порядок. Но при существующих обстоятельствах все, что я могу, это продолжать свою теперешнюю работу и работать возможно больше и возможно лучше».

Это намерение было высказано Энгельсом всего за несколько месяцев до смерти. В августе 1895 года его не стало, а еще через три года ушла из жизни Элеонора Маркс-Эвелинг, младшая дочь Маркса, которой по завещанию Энгельса переходили все бумаги, все рукописи и письма ее отца, кроме писем, адресованных лично ему, Энгельсу. Лишь часть этого драгоценного наследия довелось сделать достоянием всех людей ее старшей сестре Лауре. И бесчисленные ящики, пакеты, свертки с чердака на Мейтленд-парк-род, так и не дождавшись ни чутких и внимательных Энгельсовых рук, ни заботливых рук дочерей Маркса, попали в конце концов, как и оставшиеся после Энгельса рукописи, в архив немецкой социал-демократии, который был создан по инициативе Августа Бебеля в Цюрихе за год до смерти Маркса. Ее лидеры только и ждали смерти верных друзей и единомышленников Маркса — живые, они насмерть стояли на их пути, защищая дело своей и Марксовой жизни. Естественно, ни Эдуард Бернштейн, ни Карл Каутский, ни кто другой из тех, кто жаждал заключить противоестественный брак — соединить марксизм со слегка подправленной философией Канта и Маха,— отнюдь не спешили распаковывать доставшиеся им сокровища. И уж, разумеется, Шейдеман и К°, эта «продажная и бесхарактерная банда лакеев капитала», как назвал ее Ленин в «Письме к немецким коммунистам» в августе 1921 года, и в мыслях не держала издавать оставшиеся после Маркса неопубликованные рукописи.

2

Забот и нужд у нас в те далекие двадцатые годы было немало — самых острых, самых неотложных. И все-таки в самом начале 1921 года Ленин пишет Давиду Борисовичу Рязанову, одному из организаторов Института

К. Маркса и Ф. Энгельса, а в то время первому его директору:

«т. Рязанов! Есть ли у Вас в библиотеке *коллекция* всех писем Маркса и Энгельса из газет? и из отдельных журналов?

...Есть ли *каталог всех писем* Маркса и Энгельса?

Нельзя ли мне его взглянуть на недельку, т. е. *каталог?*»

Второго февраля этого же трудного и голодного года Ленин пишет ему еще одну записку:

«т. Рязанов!

Большая просьба:...

1) Не знаете ли, *откуда* взяты *подчеркнутые места* из писем Энгельса?

2) Было ли и *где* это напечатано полностью?

3) Если было, нельзя ли найти и получить?

4) Нельзя ли нам *купить* у Шейдеманов и К^о (ведь это продажная сволочь) письма Маркса и Энгельса? или купить снимки?

5) Есть ли надежда собрать нам в Москве все опубликованное Марксом и Энгельсом?

6) Есть ли каталог *уже собранного здесь?*

7) Письма Маркса и Энгельса собираем мы (или копии), или это не осуществимо?»

Короткая записка из семи пунктов, за каждым из которых стоит забота о том, чтобы ничего из написанного рукой Маркса и Энгельса не пропало для подлинной наследницы их творчества — революционной России и, таким образом, для всего человечества. Ради того чтобы спасти эти драгоценные строчки, не жалко было ни сил, ни времени, ни денег, хотя всего этого так остро не хватало и хотя было совсем неясно, сколько может запросить Шейдеман и К^о. С этого ленинского письма и ведет свою историю ныне известный во всем мире фонд № 1 — под этим номером в Центральном партийном архиве Института марксизма-ленинизма при ЦК КПСС значится самое полное в мире собрание трудов Маркса и Энгельса, их собственных писем и писем к ним других людей, воспоминаний товарищей по борьбе и работе, материалов из архивов тайной полиции и всех иных документов об их жизни и деятельности. Собрано в этом фонде множество книг, журналов, газет, которыми пользовались Маркс и Энгельс, редкие прижизненные издания их произведений — все это приобретено в разное

время институтом и занесено в соответствующую опись. Но самое большое богатство — это содержимое описи № 1. В комнатах-«сейфах», всегда при одной и той же температуре 16—17 градусов, круглый год при одинаковой влажности воздуха — 60—70 процентов, тщательно оберегаются от разрушительного воздействия времени около семи тысяч рукописей Маркса и Энгельса или, если нет оригинала, их фотокопий. Каждый листок лежит в особой — двойной, даже тройной — папке, каждый лист рукописи переложен папиросной бумагой.

Но тогда, в феврале 1921 года, только что созданный Институт Маркса и Энгельса весь помещался в шести комнатах на углу Воздвиженки и Шереметьевского переулка, а все рукописи, которыми он обладал, — восемь писем Маркса к Руге, полученные от дочери Маркса Лауры Лафарг. К тому, чтобы приобрести другие документы, а уж особенно неопубликованные рукописи, путей в то время еще не было найдено, и Владимир Ильич особое внимание уделяет изданию для массового читателя самой малоизвестной, хотя и опубликованной уже части произведений великих друзей — их эпистолярного наследия. За это нелегкое дело по поручению Ленина взялся Владимир Викторович Адоратский, бывший в то время заместителем заведующего Центральным архивным управлением (впоследствии он стал директором ИМЭЛа, затем директором Института философии Академии наук). Он собрал многие из тех писем Маркса и Энгельса, которые были к тому времени у нас опубликованы, но, конечно, мечтал о том, чтобы собрать их все. И когда несколько месяцев спустя Рязанов отправляется, наконец, в Германию, Ленин посылает ему в Берлин письмо, как всегда короткое и энергичное:

«т. Рязанов! Я *очень* поддерживаю просьбу т. Адоратского, который проделал работу немалую и полезную. Собрать *все* письма Маркса и Энгельса важно, и Вы это сделаете лучше других».

Просьба В. В. Адоратского, переданная Владимиром Ильичем Д. Б. Рязанову, заключалась в том, чтобы собрать в Германии все опубликованные там письма Маркса и Энгельса не только в книжных изданиях, но и в периодической печати. Она была выполнена, и в 1922 году у нас на книжных полках появился сборник «Письма. Теория и политика в переписке Маркса и Энгельса», в

котором перевод, комментарии и вступительная статья принадлежали перу Адоратского.

Рязанов же сумел выполнить и высказанное ранее пожелание Ленина «собрать нам в Москве все опубликованное Марксом и Энгельсом». Давид Борисович, который еще до революции изучал рукописное наследие двух великих друзей, летом 1923 года вновь отправился в Берлин, где находился в то время архив германской социал-демократии. Он развил кипучую деятельность, проводя в жизнь программу собирания всех документов, связанных с Марксом и Энгельсом, программу, начертанную ленинской рукой. Пользуясь своими давнишними личными связями с руководителями германской социал-демократии, он сумел договориться о том, чтобы получить на известных условиях право перефотографировать рукописи из Берлинского архива, а сам этот архив Рязанов успел изучить вдоль и поперек, проводя в нём бесчисленные часы в годы эмиграции.

8

О том, что добиться такого права было непросто, свидетельствует, например, цитата из статьи, опубликованной в 1965 году в западногерманской газете *Süddeutsche Zeitung*: «После первой мировой войны, когда посланцы Москвы разыскивали рукописи своих идеологических вождей, СДПГ* с ожесточением держалась за это сокровище». Понятно, что едва вырвав согласие на свою работу, Рязанов сразу взялся за дело, и осенью того же года первая партия фотокопий была уже в Москве, в бывшем особняке князей Долгоруких в Малом Знаменском переулке (который стал теперь улицей Маркса-Энгельса), куда к тому времени переехал институт. На следующий год Рязанов снова едет в Германию и снова дни и ночи напролет проводит в архиве. Германские социал-демократы навели в нем страшный беспорядок, и работать Рязанову было чрезвычайно трудно. Но именно этот беспорядок принес ему радость, даже счастье — человек, привыкший по листочкам собирать подлинные документы Маркса и Энгельса, увидел вдруг в архивной пыли и сумятице никому не извест-

* СДПГ — социал-демократическая партия Германии.

ные ранее рукописи Маркса, сотни его и Энгельса писем, нигде, никогда и никем не опубликованные! Конечно, Рязанову не терпелось поскорее привезти эти сокровища в Москву, а уж там только насладиться своей удачей. Но перефотографировать несколько десятков тысяч листов — по тем временам это было сложной задачей. И главная трудность была даже не в денежном недостатке — несмотря на тогдашнюю нашу нищету, Советская Республика дала на соби́рание наследства основоположников научного коммунизма достаточно средств. Однако съемка, проявление, печать — все это было в двадцатые годы делом сложным и, главное, долгим. Рязанов раздобыл несколько фотостатов — последнюю новинку фотографического дела тех лет, которые снимали копию не на пластину-негатив, а сразу на специальную бумагу, правда, текст на них получался белым на черном фоне. Нанял трех немцев — больших специалистов в этом деле, организовал во Франкфурте-на-Майне, при Институте социальных исследований, специальную лабораторию. Дело закипело...

Сам же Рязанов со свойственной ему энергией занялся скрупулезным изучением архивных материалов. В этом была его подлинная страсть, недаром товарищи прозвали его «Буквоедом». Человек сложного характера, соединявший в себе массу противоречий, из-за чего его политическая позиция часто оказывалась шаткой, он не раз вступал в резкое столкновение с линией партии.

В начале 1918 года он выходил из ее рядов, не будучи согласен с ленинской позицией в вопросе о Брестском мире. Позже, во время так называемой профсоюзной дискуссии, он также проводил антипартийную линию и в 1931 году был исключен из ВКП(б). Но если кипучая энергия Рязанова была направлена в правильное русло, она всегда приносила реальную пользу — как тогда, в начале двадцатых годов, когда он работал в Берлинском архиве, стремясь составить возможно полную опись материалов. И вот, приводя в порядок крайне запущенное архивное хозяйство, он обнаружил, что многих страниц, написанных рукою Маркса и рукою Энгельса, в архиве недостает.

Это было в высшей степени неприятное открытие, но его следовало ожидать. Беда коренилась в завещании Энгельса, едва не сыгравшем роковую роль в судьбе

его и Маркса литературного наследия. Энгельс передал все бумаги и все авторские права на издание своих произведений социал-демократической партии Германии — по самому духу своего завещания. Но по букве его все это переходило к Августу Бебелю и Эдуарду Бернштейну, потому что по существовавшим тогда в Англии законам имущество можно было завещать только частным лицам. «Я завещаю вышеупомянутым Августу Бебелю и Эдуарду Бернштейну все рукописи, которые будут находиться ко дню моей смерти в моем владении или распоряжении...» — писал Энгельс. Такова была его воля относительно всех своих работ. Что же касается трудов Маркса, то они, как известно, были переданы его младшей дочери Элеоноре, но большинство их вскоре тоже перешло к тогдашним лидерам германской социал-демократии. И вот Бернштейн, пользуясь своим положением литературного душеприказчика Энгельса, оставил у себя часть рукописей — его и Маркса. Рязанов, проводя описание и систематизацию рукописного наследства Маркса и Энгельса в Берлинском архиве, обнаружил это и сумел вынудить Бернштейна после ряда проволок сдать утаенные им бумаги. Среди них оказалась и часть математических рукописей Маркса.

Однако Рязанову не нужно было перебирать архивные описи, чтобы заметить еще один существенный пробел. Он прекрасно знал, что еще одна — и немалая — часть рукописей в архиве отсутствует. Да и как ему было не знать об этом, ведь именно он, Рязанов, много лет назад, будучи еще эмигрантом (тогда подпись «Н. Рязанов» служила ему литературным псевдонимом, скрывающим настоящую фамилию — Гольденбах) и работая над изучением наследия Маркса и Энгельса, получил от Бернштейна немало бумаг, написанных ими. Он нашел тогда среди них вполне готовую для печати, как ему казалось, математическую работу Маркса и предложил Фридриху Адлеру, одному из лидеров австрийской социал-демократии, опубликовать ее. Это не удалось, но, возвращаясь после февраля семнадцатого года в Россию, Рязанов оставил драгоценные рукописи Адлеру на хранение. Адлер, за год до того застреливший австрийского премьер-министра графа Штюрге, после революции 1918 года в Австрии открыто перешел в лагерь реакции и отнюдь не спешил возвращать не-

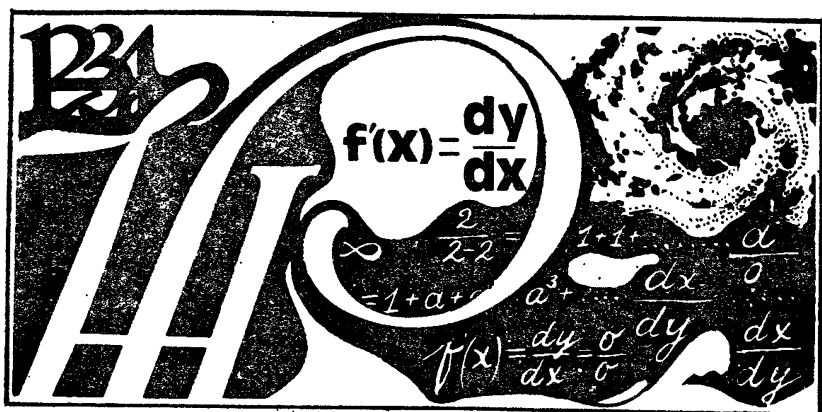
жданно попавшее ему в руки богатство пусть и не слишком законным, но все-таки хозяевам.

.. Институт Маркса — Энгельса потребовал, чтобы Адлер немедленно передал бумаги в Берлинский архив. Только через полгода ящик с материалами, присвоенными Адлером, был доставлен, наконец, на место. В нем среди прочих манускриптов были упакованы и 10 тетрадей с математическими рукописями Маркса. Все вновь полученные документы были, разумеется, тотчас же перифотografiрованы: пополняя Берлинский архив, Институт Маркса — Энгельса стремился прежде всего выполнить ленинское указание о сосредоточении в Москве, хотя бы в виде фотокопий, всего, что было когда-нибудь написано Марксом и Энгельсом.

Бесценные фотокопии неопубликованных материалов очень скоро, а по тем временам необыкновенно скоро, были доставлены в Москву и дополнили опись № 1 фонда № 1.

Около тысячи страниц из них составили математические работы Маркса.

«НЕ ДЛЯ ПЕЧАТИ, А ДЛЯ УЯСНЕНИЯ
ВОПРОСОВ САМОМУ СЕБЕ»



*Читать — означает «брать в долг». Сделать на
основе этого открытие — значит «уплатить долг».*

Георг Лихтенберг

1

«При разработке основ политической экономии меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах, что с отчаяния я снова засел за быстрое прохождение алгебры. Арифметика никогда не давалась мне. Но окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел», — так 11 января 1858 года впервые в письмах Энгельсу Маркс упоминает о своих занятиях математикой.

«Арифметика никогда не давалась мне». Вряд ли Маркс мог быть доволен своими гимназическими познаниями в этой области. И не потому, что плохо успевал в математических дисциплинах — нет, он по всем предметам был одним из лучших учеников Трирской гимназии,

Но сам прусский гимназический дух не слишком располагал к постижению точных наук. Преподаватели, воспитанные на латинских текстах, воспринимали математику как варвара-пришельца и всячески старались изгнать ее из учебных курсов. Всего лишь за несколько лет, перед тем как Маркс отправился на первый урок в Трирскую гимназию, влиятельный чиновник прусского министерства по делам культуры, просвещения и медицины, его высокопревосходительство тайный советник Иоганнес Шульце (тот самый, что покровительствовал Гегелю) с пафосом утверждал: «В одной строке Корнелия Непота больше материала для образования, чем в двадцати математических формулах».

Правда, Марксу повезло на учителей. Директором и вместе с тем преподавателем истории и философии Трирской гимназии в годы его ученичества был Иоганн Виттенбах, один из образованнейших педагогов того времени. Прусские власти, естественно, не слишком жаловали его, а в последние годы жизни Виттенбах состоял даже под наблюдением полиции. Но еще большим свободомыслием отличался преподаватель математики и физики Иоганн Штайнингер — его обвиняли в злостной ереси: считали приверженцем материализма. Быть может, именно он сумел заронить в душу юного гимназиста Карла Маркса семена любви к строгости и красоте математики — семена, которые проросли много лет спустя...

Впервые после гимназии Маркс возвращается к математике, когда ему уже под тридцать. В одну из записных тетрадей 1846 года в заметки по политической экономии, в выписки из Шютца, Листа, Осландера, Рикардо врезаются семь страниц, испещренных формулами, — здесь решение уравнений первой степени, подсчет процентных отношений, вычисление степеней при дробных и отрицательных показателях, заметки по теории соединений, логарифмы, вычисление коэффициентов бинома Ньютона. Трудно сказать, конечно, относятся ли эти записи именно к 1846 году или сделаны позже на свободных листах тетради. Во всяком случае уже в 1851 году Маркс конспектирует книгу Поппе «История математики». Еще через несколько лет в подготовительных записях к работе «К критике политической экономии» возникают страницы геометрических чертежей,

здесь же алгебраические выкладки, относящиеся к обобщению понятия степени и логарифма.

Но все это — занятия урывками, с длительными перерывами на много месяцев, а иногда и лет. Математика спасает Маркса, когда нет сил заниматься чем-либо другим. «Писать статьи для меня теперь почти невозможно. Единственное занятие, которым я поддерживаю необходимое душевное равновесие, это — математика». Эти строки — из письма, посланного Энгельсу в ноябре 1860 года, когда все мыслимые несчастья — от постоянных материальных затруднений до тяжелой болезни верной и единственной Женни — свалились вдруг и все сразу на Маркса. Но и через двадцать лет, когда занятиям математикой отдавалась значительно большая часть его времени и сил, он мог бы повторить эти слова — разве что трагические ноты звучали бы не так отчетливо, потому что годы эти, принесшие бесчисленные лишения и невозполнимые утраты, сделали Маркса более сдержанным.

В течение долгих лет математика помогала ему в самые трудные минуты его нелегкой жизни.

Зимой 1866 года, когда Маркс месяцами работал ночи напролет над «Капиталом», а дни отдавал делу создания Интернационала, когда нищета и тяжкий труд подорвали его здоровье, он пишет Энгельсу письмо, в котором сквозит отчаяние: «Дорогой Фриц! На этот раз дело шло о жизни... Если эта история повторится в той же форме еще три-четыре раза, то я обречен на смерть. Я отчаянно похудел и все еще дьявольски слаб, правда, ослабли не голова, а бедра и ноги. Врачи совершенно правы: главная причина этого рецидива — *чрезмерная ночная работа*. Но я не могу сообщить этим господам — да это было бы и совершенно бесцельно — о причинах, *вынуждающих* меня к этой экстравагантности». Тремя днями позже он вновь пишет Энгельсу, и в этих новых строках тяжесть его положения видна, пожалуй, еще отчетливее. Марксу вовсе не до шуток или «красивых» слов, он пишет с предельной простотой — как думает. Именно потому отчетливо видно, что мыслить математическими категориями уже стало частью его натуры. Даже в такую отчаянную минуту и даже в таком столь личном письме он вдруг использует математические значки и термины: «Вчера я опять лежал в постели, так как вскочил злокачественный карбункул на левом бед-

ре. Если бы у меня было достаточно денег, то есть > 0 , для моей семьи и если бы моя книга была готова, мне было бы совершенно безразлично, сегодня или завтра быть выброшенным на живодерню, alias * издохнуть. Но при упомянутых условиях это пока не годится».

И у этого так неожиданно возникшего в письме к Энгельсу « > 0 », и у математических фигур вроде « $\pm \infty \mp$ » и « $\frac{0}{\infty}$ » в письмах к Лауре и Элеоноре, написанных

спустя несколько месяцев, была, вероятно, одна и та же причина и одна и та же цель. Мысль, даже кратковременная, о своем «тайном увлечении» приносила Марксу успокоение, давала силы, чтобы утешить горе — свое и людей, ему близких. «Наряду с поэтами и романистами у Маркса было еще замечательное средство для умственного отдыха — математика, к которой он питал особое пристрастие, — писал Поль Лафарг, друг и ученик Маркса, муж его дочери Лауры. — Алгебра служила ему даже нравственным утешением: он прибегал к ней в самые мучительные минуты своей беспокойной жизни. Во время последней болезни жены он не мог продолжать обычных научных занятий: и в этом тяжелом состоянии он мог сколько-нибудь успокоиться, только погружаясь в математику».

И все-таки, хотя математика была для Маркса «отдыхом души», он не только наслаждается приносимым ею покоем и умиротворенностью, но упрямо движется вперед, настойчиво выискивая в ней наиболее близкие своему сердцу разделы и идеи. Так он открывает для себя, наконец, дифференциальное исчисление. Здесь его математические интересы раздваиваются. Увлечшись высшей математикой, Маркс тем не менее продолжает осваивать и те разделы арифметики и алгебры, которые были необходимы ему для экономических исследований.

На математику по-прежнему не остается времени, и занятия ею по-настоящему становятся системой лишь с 1878 года, в последние пять лет жизни Маркса.

Но фундамент для самостоятельных математических исследований он к тому времени уже успел заложить, законспектировав сотни страниц учебников и специальных трудов.

* alias — иначе говоря (англ.).

В 1869 году, когда уже вышел в свет первый том «Капитала» и Маркс был всецело поглощен продолжением своего гигантского труда, он особенно пристально интересовался литературой, связанной с обращением денег. В одной из бесчисленных его записных тетрадей появляется конспект книги Гошена «Теория международного обмена». В этом солидном руководстве Маркс обратил особое внимание на правила операций с векселями вполне естественно, потому что они играли в то время большую роль в межгосударственных расчетах. Но вексельные курсы — это прежде всего вычисления, и Марксу пришлось научиться решать несколько типов специальных арифметических задач, для которых уже давно были придуманы особые правила — тройное, цепное, правило товарищества, смеси и т. п. И Маркс, не доверяя своим познаниям в арифметике («...Ты, кажется, с ней в довольно далеких отношениях, — судя по невыправленным позорным опечаткам в числах», — писал ему Энгельс в мае 1864 года, комментируя взятый у Маркса учебник математики Франкера и считая, что раз Маркс держал книгу в своей библиотеке и не выправил опечатки в ней, то он несет за них всю меру ответственности), обращается к помощи крупных авторитетов — Феллера и Одерманна. Два директора коммерческих училищ выпустили книгу (она выдержала огромное количество изданий), незаменимую для любого серьезного коммерсанта. «Коммерческая арифметика» была сугубо практическим руководством, она давала возможность быстро и без особого труда разобраться в запутанной системе европейских платежных отношений. Иными словами, это был именно тот учебник, которого не доставало Марксу. Позже — «Капитал» выходил уже в третий раз — Энгельс вспоминал то время в предисловии к нему: «Когда появилось первое издание «Капитала», в Германии различных единиц меры и веса было столько, сколько дней в году; к тому же имелось два вида марок... два вида гульденов и по крайней мере три вида талеров... В естественности господствовали метрические, на мировом рынке — английские системы меры и веса».

Маркс не стал изучать эту книгу «от корки до корки» — перед ним стояла частная, вполне определенная задача: разобраться в вексельных расчетах. Конспект

поэтому начинается сразу же с четырнадцатой главы «Исчисление векселей, расчеты, связанные с вексельными курсами». Без труда покончив с техникой прямых вексельных расчетов между городами и странами, он вскоре прерывает конспект фразой, обращенной к самому себе: «Прежде чем перейти к *арбитражу на непрямом пути, Intermezzo...*»

Марксу, очевидно, нравилось это звучное слово — оно не раз встречается в его математических рукописях. Иногда он не отказывает себе в удовольствии употребить его еще раз — в конце «отступления». Тогда появляются написанные его характерным почерком слова: «Schluß des Intermezzos».

«Интермеццо» оказалось весьма внушительным. Маркс переворочил еще пять глав книги, сопровождая конспекты порой довольно резкими замечаниями («*обиходные скидки* — это чистое шарлатанство»). Запас знаний Маркса по коммерческой арифметике растет, и он считает свое отступление законченным. Снова следует глава четырнадцатая, и снова Маркс воюет с вексельным правом. Тетрадь — объемистая тетрадь, в которых он привык вести свои конспекты, заканчивается, и Маркс начинает новую.

Это было в 1869 году. А в 1878 году он снова вернулся к этой книге, несмотря на то, что хорошо видел ее недостатки: Маркс просто не умел оставлять дело, если в нем имелась хоть малейшая для него неясность. В тот год он весьма интересовался экономической системой России и взялся за русскую книгу И. И. Кауфмана «Теория и практика банковского дела», которая вновь потребовала от него математических знаний.

Маркс был уже знаком, правда, заочно, с ее автором, который сам и прислал ему свою книгу из далекой России. «Появление первой части «Капитала» подало повод теперешнему профессору Петербургского университета Иллариону Игнатьевичу Кауфману написать весьма ученый и в общем сочувственный этюд в «Вестнике Европы»... Из всего написанного о «Капитале» в России Маркс всего более ценил статью Кауфмана», — писал много лет спустя Максим Максимович Ковалевский, русский историк, социолог, этнограф и юрист, «сайентифик фрэнд» — «научный друг» Маркса. В тот год, когда появилась статья Кауфмана, Ковалевский как раз приехал

из своего Харькова продолжать образование за границей и познакомился с Марксом.

«Сочувственный этюд» — это одна из первых рецензий на «Капитал» не только в России, но и вообще в мировой литературе. Она появилась в либеральном петербургском ежемесячнике всего через месяц после того, как 8 апреля 1872 года на полках книжного магазина А. Черкесова был выставлен первый том «Капитала» на русском языке. Кстати сказать, это был первый перевод гигантского труда на иностранный язык, он на три года опередил английский и на пятнадцать — французский. Кауфман прислал Марксу в Лондон «Вестник Европы» со своей рецензией, что было очень кстати: как раз в это время Маркс горько жаловался друзьям на заговор молчания, который составила вся европейская наука вокруг главного труда его жизни. И впоследствии, полемизируя с буржуазными критиками «Капитала», Маркс часто ссылался на эту рецензию, несмотря на то, что русский профессор так и не сумел правильно воспринять Марксову теорию трудовой стоимости. Рецензия Кауфмана была ценна другим — в ней, как писал потом Ленин, было дано «описание диалектического метода, которое Маркс выудил из бездны журнальных и газетных заметок о «Капитале» и перевел на немецкий язык потому, что эта характеристика метода, как он сам говорит, совершенно точна».

Маркс весьма ценил такое описание своего диалектического метода, сделанное как бы «со стороны». Это видно хотя бы из того, что он цитирует его в «Послесловии» ко второму изданию своего «Капитала». Поэтому не удивительно, что Маркс обратился к труду именно этого автора, желая поглубже разобраться в тонкостях банковского дела, хотя труд этот и потребовал от него расширить свой математический багаж.

Книга Одерманна и Феллера вновь легла на стол. Да, опять она — глава четырнадцатая. Но теперь уже Маркс хочет кой-чему подучить Фридриха Эрнста Феллера с Карлом Густавом Одерманном: он пытается вывести общую формулу для облегченного вычисления сложных процентов. Директоры-соавторы, то ли по незнанию, то ли не желая забивать голову коммерсантов излишней премудростью, предлагали вычислять сложные проценты самым простым и длинным путем: год за годом находя искомые цифры. Но универсальная формула

требовала знания логарифмов, и Маркс берется за них, достав книгу Сори «Полный курс математики», пятитомный труд французского аббата, профессора математики и натуральной философии из университета в Монпелье. Этот солиднейший источник математических знаний послужит Марксу еще не раз, а пока в экономические исследования вклинивается объемистая «Вставка»: *А. Геометрические прогрессии, В. Арифметические прогрессии, С. Логарифмы*».

Второй тетради тоже приходит конец, и неугомонный Маркс открывает еще одну, написав на обложке «3, следующая за Кауфманом 2». Экономист из России не господствует в ней безраздельно. Маркс успел уже к тому времени убедиться, что у Кауфмана глубокие знания экономики подменяются часто торжественностью стиля— он настолько вдохновенно воспекает спекулятивные операции биржевиков, что заставляет вспомнить о древнегреческом сочинителе парадных од. «... Я был несколько удивлен, увидев, что мой прежний рассудительный критик из петербургского «Вестника Европы» превратился в какого-то Пиндара современного биржевого плутовства,— пишет Маркс в Петербург Николаю Францевичу Дениельсону, переводчику «Капитала».— Кроме того, рассматривая эту книгу даже исключительно с точки зрения данной специальности,— а я вообще не ожидаю от книг этого рода ничего другого,— я нахожу ее далеко не оригинальной в ее частностях». Конспекту книги Кауфмана приходится потесниться, чтобы дать место очередным арифметическим выкладкам, и уже по одному этому она вполне сыграла свою роль, побудив Маркса еще раз обратиться к математике.

3

В записных тетрадях Маркса арифметике отведено самое скромное место. И даже первое упоминание Марксом о его занятиях математикой касается не столько арифметики, сколько алгебры: «...с отчаяния я снова зашел за быстрое прохождение алгебры... Окольным алгебраическим путем я скоро опять возьму правильный прицел».

В этих строках из послания Энгельсу внимание привлекает мысль о том, что изучение математики проще и

лучше начинать не с арифметики, а с алгебры (в наше время идея эта все увереннее проникает в педагогику). Любопытно, что через несколько лет, в мае 1864 года, Энгельс в письме Марксу выскажет сходные соображения.

Поводом для них послужил учебник математики, составленный французом Луи Бенжаменом Франкером. Энгельс тщательнейшим образом проштудировал экземпляр этой книжки из личной библиотеки Маркса. Они часто обменивались книгами, журналами, газетами, в случаях особо срочных даже пересылая их друг другу по почте. Нет, наверное, ни одной сколько-нибудь заметной книги или статьи, которая была бы прочтена одним и не рекомендована другому с указанием на особо любопытные места и с краткой, в нескольких словах, но исчерпывающей — а иногда убийственной — характеристикой всего произведения. Сообщения об отсылке и получении литературы почти всегда присутствуют в их письмах.

Итак, весной 1864 года Энгельс знакомится с учебником Франкера, принадлежащим Марксу, и пишет своему другу (колкая реплика из этого письма по поводу «позорных опечаток» уже приводилась): «Отдельные места весьма изящны, *практическая* же часть арифметики, напротив, постыдно плоха и поверхностно разработана. ...Сомневаюсь также, практично ли даже в элементарной форме излагать такие вещи, как корни, степени, ряды, логарифмы и т. д., при помощи *одних только* чисел (совершенно не прибегая к алгебре и по существу не предполагая у читателей даже элементарных алгебраических познаний). Как ни хорошо пользоваться числовыми примерами для иллюстрации, мне все же кажется, что ограничение в данном случае числами было бы менее наглядным приемом, чем простое алгебраическое изложение при помощи $a + b$, именно потому, что общее выражение в алгебраической форме проще и нагляднее, а без общего выражения здесь также не обойтись. Правда, это как раз та часть алгебры, которая для математиков *par excellence* * — ниже их достоинства».

(Полтора десятилетия спустя злосчастному Франкеру снова достанется — на этот раз от Маркса, и теперь уже по поводу «новшеств», введенных им в дифференциальное

* *par excellence* — по преимуществу (лат.).

исчисление. Маркс не забудет, как аттестовал Франкера Энгельс в письме от мая 1864 года, и помянет Франкера следующими словами: «известный [тебе] «элегантный» француз» — поскольку перевод одной из фраз письма Энгельса — «Einzelnes ist sehr elegant» — буквально означает: «Кое-что весьма элегантно» — с некоторым снисходительно-ироническим оттенком в адрес автора легковесного учебника).

И Маркс, и Энгельс часто обращались к математической литературе, в том числе к истории математики, и далеко не всегда с целью какой-нибудь непосредственной пользы. Очень часто Маркса заинтриговывал частный вопрос, например, как ту или иную проблему разрешали древние математики, и он ворошил груду специальной литературы, пока не прояснил себе все до конца.

Следы математических проблем, волновавших двух великих друзей, остались не только в их переписке друг с другом, но даже и с третьими лицами. Энгельс, например, давая отчет дочери Маркса Женни Лонге о состоянии здоровья ее отца, писал в последний день мая 1881 года в Аржантей: «Что касается его простуды, то наступившая теплая погода скоро сведет ее к бесконечно малой величине». Порой «математические» нотки звучат в их письмах к совсем уж далеким людям. «...Один непризнанный великий математик письменно жаловался Марксу, будто я дерзновенно затронул честь $\sqrt{-1}$ », — писал много лет спустя в предисловии к новому изданию «Анти-Дюринга» Энгельс, рассказывая о том, как немецкий социал-демократ Генрих Вильгельм Фабиан в ноябре 1880 года обратился к Марксу с просьбой приструнить Энгельса, позволившего себе высказаться по сугубо математическим проблемам. В письмах к Каутскому и Зорге, которые так же, как и Фабиан, знали, конечно, о Марксовых математических увлечениях, Энгельс уже после смерти Маркса сообщал об этом мелком, по сути дела, эпизоде, ему доставляло удовольствие всякое, даже незначительное воспоминание о том времени и «тайной страсти» Маркса — его занятиях математикой. Карлу Каутскому Энгельс пишет в апреле 1884 года в Цюрих об инциденте с Фабианом: «...он ополчился на мое диалектическое толкование математики и пожаловался Марксу, что я оклеветал $\sqrt{-1}$ ». А еще год с лишним спустя Энгельс советует Фридриху Адольфу Зорге в

письме, отправленном в Хобокен, в далекую Америку: «Фабиана лучше всего совершенно игнорировать... Его главное обвинение по моему адресу заключается в том, что я в «Анти-Дюринге» злонамеренно оклеветал $\sqrt{-1}$, на что он уже жаловался в письме Марксу». «Математические» письма Маркса, беседы о сути этой науки не могли, конечно, не вспоминаться Энгельсу, когда Маркса уже не было с ним...

Для мыслей о математике Маркс находил время всегда, в самых неожиданных ситуациях. После смерти матери он, больной, провел два зимних месяца у своего дяди Лиона Филипса в Голландии, в Залтбommеле. Болезнь дала Марксу некоторый досуг, а с ним — долгие разговоры с любознательным собеседником на самые разные темы — от древней истории до современной политики, от юриспруденции до строения мирового пространства. Возвратившись в Лондон, Маркс весной того же 1864 года пишет Лиону Филипсу, «славному старику», как он называл его, словно продолжая прерванную беседу:

«В Музее (речь идет о библиотеке Британского музея.— Л. К.) я прочел в книге Боэция «Об арифметике» (писатель времен переселения народов) о делении у римлян (*никакого другого* он, конечно, не знал). Отсюда и из других сочинений, которые я с ним сравнивал, вытекает следующее: не слишком большие вычисления, например, в домашнем хозяйстве и торговле, никогда не производились с помощью цифр, а лишь с помощью камней и других подобных знаков — на счетной доске. На этой доске было начертано несколько параллельных линий, и одни и те же камни или другие осязаемые знаки обозначали здесь на первой линии единицы, на второй — десятки, на третьей — сотни, на четвертой — тысячи и т. д. Такие счетные доски служили в течение почти всех средних веков и еще ныне употребляются китайцами. Что касается более значительных математических вычислений, то к тому времени, когда в них появилась необходимость, римляне уже имели таблицу умножения или Пифагорову таблицу, правда, еще очень неудобную и громоздкую, так как таблица эта была составлена частью из особых знаков, частью из букв греческого (позднее римского) алфавита. ...Что при очень больших вычислениях старый способ создавал неодолимые препят-

ствия, видно по тем фокусам, к которым прибегал выдающийся математик Архимед».

Так глубоко забирался Маркс даже в дебри нелюбимой им арифметики. Но еще пристальнее был его интерес к алгебре.

«...Я снова засел за быстрое прохождение алгебры».

Снова засел... Маркс любил подобное «повторение пройденного». Когда первый том «Капитала» лежал еще в исписанных его характерным почерком листках на письменном столе, в эти сугубо экономические рукописи частенько вклинивались математические формулы: линейные уравнения, сведения по комбинаторике, биномиальные коэффициенты. Но в этих же листках и начальные сведения из аналитической геометрии — уравнения прямой линии и окружности.

Подобных «математических отступлений» в трудах Маркса немало, просто до января 1858 года он не находил нужным сообщать кому бы то ни было, даже Энгельсу, об этой стороне своих занятий. Но сами занятия отнюдь не были бессистемными.

В записке к Энгельсу, помеченной 6 июля 1863 года (в свое время будет любопытно привести ее полностью), Маркс сообщает, что перешел к изучению высшей математики. «Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, — пишет он, — здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями».

В рукописях Маркса почти нет записей по тригонометрии, кроме сводки чисто элементарных сведений (двадцать три страницы, сам заголовок которых — «Резюме» — говорит об отношении автора к этому труду), никаких геометрических интересов, кроме конических сечений, зато «обычные алгебраические вещи» заняли более двухсот страниц.

Несмотря на свои экскурсии в математику древних и во многие разделы современной ему математики, Маркс не пытался «объять необъятное». Он очень определенно знал, к чему стремится в своих математических изысканиях, и уверенной рукой прокладывал свой путь в бескрайних просторах этой науки.

Двести двадцать две «алгебраические» страницы — это бетонные плиты, которые Маркс продуманно и терпеливо укладывал во взлетную полосу того невидимого аэродрома, с которого привыкла стартовать его мысль.

Для ее свободного полета всегда был нужен надежный, уверенный разбег...

Так, продвигаясь все глубже и глубже в суть вопроса, привлечшего его внимание, захватывая все новые и новые страницы специальных трудов, Маркс готовил конспекты, записи, заметки, которые были для него необходимым началом всякой серьезной работы.

Предваряя свою книгу «К критике политической экономии» несколькими страницами предисловия, Маркс так оценил поистине титаническую подготовительную работу, сделанную им в области экономической науки, и те немалые усилия, которые еще потребуются для ее завершения: «Весь материал лежит предо мной в форме монографий, которые были написаны с большими перерывами в различные периоды не для печати, а для уяснения вопросов самому себе; последовательная обработка этих монографий по указанному плану будет зависеть от внешних обстоятельств».

Если бы когда-нибудь Марксу было суждено приступить к публикации своих математических работ, он мог бы предварить их теми же словами.

4

«Два курьера, выехавшие из двух городов в одно и то же время, двигаются в одном направлении, догоняя один другого, со скоростями b и c ...»

Кого бы могла привлечь эта навязшая в зубах задача? Но Маркс именно ее высмотрел в учебнике Лакруа. (Ныне известный лишь специалистам по истории математики, в свое время этот труд французского академика «Элементы алгебры» считался одним из лучших и переиздавался более десяти раз. Он служил Марксу главным путеводителем по алгебре.) «Такая задача,— пишет далее Лакруа,— имеет случай, в котором она совершенно лишена смысла. Этот случай представляется, когда мы предполагаем, что они не могут никогда встретиться, так как сохраняют между собой исходный интервал. И эта абсурдность, которую никакое видоизменение формулировки задачи не может уничтожить, с полной очевидностью проявляется в уравнениях». И в самом деле, число, поделенное на нуль. Раздел конспекта из тетради «Алгебра I» (есть еще и «Алгебра II» и еще отдельные

«алгебраические» странички) так Марксом и назван: «Первое элементарное появление $\frac{a}{0} = \infty$ и $\frac{0}{0}$ в обычной алгебре». Тут на самых простых примерах он пробует понять, как скромная «обычная» алгебра переходит в исчисление бесконечно малых и бесконечно больших величин — иными словами, ищет, как он писал в своих математических рукописях, «прообразы» дифференциального анализа в алгебре.

Лакруа тоже пытался кое-что выяснить в этом абсурдном с его точки зрения примере. Он проделывает серию мысленных экспериментов. Первый курьер во всех них не изменяет своей скорости, выбранной Лакруа равной 6 километрам в час. Зато второй каждый раз наращивает темпы, проходя в час последовательно 5,8; 5,9; 5,99 и так далее километров. А значит, разница в скоростях курьеров ($b - c$) беспрерывно стремится к нулю, становясь бесконечно малой. Лакруа замечает по этому поводу лишь одно: этот процесс бесконечен. Но Маркса такой подход к делу устроить не может. Едва начав углубленно заниматься алгеброй, он уже поставил перед собой вопрос, который волновал его до самых последних дней жизни. А именно: как отражается движение и связанные с ним изменения переменной величины в операциях и формулах математики.

И потом, сколько Маркс ни конспектировал, сколько ни выводил формулу за формулой, составляя свои «монографии для самого себя», он всегда думал об этой проблеме, мимо которой прошли, не замечая ее или же не желая замечать, почти все математики, чьи труды побывали в его руках.

5

Маркс конспектирует — все его рукописи по алгебре носят, как уже говорилось, лишь самообразовательный характер. Но он вовсе не стремится «усвоить материал». Нет, Маркс спорит, бунтует, даже если оппонентом оказывается такой гигант, как Эйлер.

Вот, к примеру, важный вопрос: каким образом в математике делается шаг от конечных — пусть очень малых, но все-таки имеющих вполне определенное значение — величин к бесконечным: бесконечно малым или бесконечно большим. Он познакомился с определением

Бушарла — еще одного француза, благодаря которому сумел в непонятно короткий срок пробраться сквозь дебри алгебры. Вот оно во всей своей старомодной многословности: «Бесконечно малым называется количество очень малое, имеющее пределом нуль, которое может неограниченно убывать, не останавливаясь на каком-нибудь поддающемся оценке значении, которое можно считать меньшим всякого данного количества».

Ну и что? Достаточно этого, чтобы разобраться, о чем идет речь? Например, вызывает ли сомнение законспектированный Марксом отрывок из Эйлера издания «3-го года республиканской эры» *.

«Здесь необходимо еще рассеять достаточно распространенную ошибку тех, кто считает бесконечно большое недоступным увеличению. Это мнение несовместимо с надежными началами, которые мы только что установили (а Эйлер ввел следующее равенство: единица, деленная на бесконечность, равна нулю, т. е., записывая эту фразу на языке алгебры, $\frac{1}{\infty} = 0$. Отсюда следует, что единица, деленная на нуль, дает бесконечность, т. е. $\frac{1}{0} = \infty$. — Л. К.); ибо, если $\frac{1}{0}$ обозначает бесконечно большое число, то, так как $\frac{2}{0}$ есть, несомненно, удвоенное $\frac{1}{0}$, ясно, что число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше».

К своим рассуждениям Эйлер добавляет выкладки, называя их «элегантным подтверждением».

Они и в самом деле изящны. Что значит разделить единицу на нуль? Стоит только выполнить «углом» — как в третьем классе школы — деление $\frac{1}{1-a}$, а затем приравнять в этой дроби «а» единице. Тогда получится, что $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1...$ и так далее, до бесконечности **. Иными словами, получаем ряд, сумма которого в алгебре записывается знаком ∞ — поверженной восьмеркой, призванной символизировать собой бесконеч-

* 1795 года.

** Как легко убедиться: $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + ...$ до бесконечности.

ность. Вот вам и доказательство принятого ранее Эйлером априори равенства: $\frac{1}{0} = \infty$.

Все вроде бы безукоризненно, особенно учитывая эйлеровский авторитет.

Но Маркс не согласен!

«Эйлер в своих «Элементах алгебры» говорит... — пишет он, — было бы ошибкой думать, что бесконечно большое число не может возрастать. (Раньше он говорил, что ∞ получается от деления 1 на 0, так как $\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1 + 1 + 1 + \dots$ до бесконечности.)

Так как $\frac{1}{0}$ означает бесконечно большое число, а $\frac{2}{0}$ есть, без сомнения, удвоенное $\frac{1}{0}$, именно $= \frac{2-1}{0}$, то очевидно, что число, *даже бесконечно большое*, тем не менее может стать больше в 2, 3 или x раз.

Здесь, прежде всего, нужно заметить, что $\frac{2}{0}$ (или любой другой числитель с 0 в качестве знаменателя), разложенное в ряд, есть в точности то же, что и $\frac{1}{0}$, потому что $\frac{2}{0} = \frac{2}{2-2} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ до бесконечности.

Следовательно... $\frac{2}{0} = \frac{1}{0}$... можно сказать только, что ряды по-разному шагают в бесконечность».

Так, не оробев перед авторитетом Эйлера, Маркс перефразирует его утверждение насчет того, что «число, хотя бы и бесконечно большое, может стать еще в два или несколько раз больше», подвергает его критике и в противоположность Эйлеру утверждает равенство: $\frac{1}{0} = \frac{2}{0}$.

...Так состоялась эта первая серьезная встреча с бесконечностью. С тех пор бесконечность — с ее внутренней противоречивостью, недоступная приземленному здравому смыслу, волновавшая всех философов, начиная с Аристотеля (великий учитель, как называли его бесчисленные последователи, писал когда-то: «Ведь нет ничего невозможного в том, чтобы оно (тело. — Л. К.) было разделено бесконечное число раз, хотя, пожалуй оно не могло бы быть разделено вследствие ограничен-

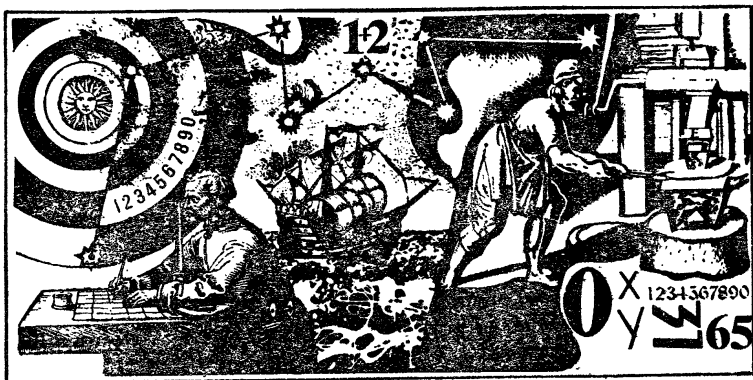
ности сил производящего деление человека»), — пленяет Маркса.

Она становится его математической любовью на всю жизнь.

И даже осенью 1866 года — самого, быть может, трудного и плодотворного года своей жизни, занятого подготовкой к печати первого тома «Капитала» и одновременно первого конгресса Интернационала, — Маркс все-таки не забывает об этом увлечении. Он пишет Лауре и Элеоноре, которые жили в то время в Гастингсе, шуточные письма. Чтобы не огорчать своих дочерей, он не позволил проникнуть в эти письма ни своей невероятной усталости, ни своим бесчисленным заботам и хворостям. Но вот как он начинает одно из них, адресованное младшей, Элеоноре: «Возлюбленный мой мэтр $\pm \infty \mp$! Склоняюсь до земли перед Вашей безмерностью, какую бы роль Вы ни сообразили взять на себя — бесконечно малых или бесконечно больших величин».

И в том, что в другом письме, старшей, Лауре, он тоже просит передать «наилучшие пожелания $\pm \infty \mp$ », и в том, как подписывает он письмо Элеоноре: «Твой $\frac{0}{\infty}$ »,

и в самом необычном прозвище, очевидно, неспроста придуманном для своей одиннадцатилетней дочери, которая, конечно же, не могла его даже как следует понять (как, впрочем, она едва ли что могла уловить и из слов, начинавших письмо отца, кроме их шуточного тона), — во всем этом отблеск тех мыслей о математической бесконечности, что не покидали Маркса до последних дней его жизни.



Математический анализ столь же обширен, как и сама природа, он определяет все чувственные отношения, измеряет время, пространство, силы, температуры.

Огюст Фурье

1

Летом 1633 года, после допросов, растянувшихся на три с лишним месяца, Галилей опустился на колени в церкви святой Марии и произнес слова отречения.

Сто лет спустя бывший выученик дублинского Тринити-колледжа Джордж Беркли (тот самый, от философии которого камня на камне не оставил Ленин в «Материализме и эмпириокритицизме»), готовившийся к посвящению в сан епископа Клойнского, писал с известной долей добродушия: «Я не собираюсь вызывать инквизицию против математиков, я хочу лишь доказать, как мало именно они имеют права требовать строгого доказательства того, во что люди верят».

2

Связь между этими двумя событиями не столь поверхностна, как может показаться на первый взгляд. Если «святая инквизиция» не углядела в сочинениях

Галилея подозрительного интереса к идее бесконечного, к бесконечно малым величинам, то исправлять ее упущение пришлось уже епископу англиканской церкви. «Недоработка» святых отцов не вызывает сомнения: ведь Галилей отверг установления божественного Аристотеля не только в том, что касалось строения Вселенной, но не посчитался и с его запретом на введение бесконечно малых в математику.

Мало того, Галилей совратил с пути истинного своего ученика Бонавентуру Кавальери, настоятеля монастыря ордена Иеронимитов, и плодом их многолетней переписки явилась книга Кавальери «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного». Кавальери учил определять размеры плоских фигур и тел, считая их сложенными из мельчайших — «неделимых» — частиц. Паутина, сотканная из отдельных, неуловимо тонких нитей, паук, непрерывно ткущий геометрию из неделимых, — вот тот образ пространства, который хотел он пробудить в читателе.

Есть что-то необъяснимое и счастливое в том, как человечество сумело сохранить в себе идею бесконечного, как пронесло ее через проклятия словом и огнем, через пожары библиотек, подоженных завоевателями и изуверами, через два тысячелетия войн и погромов. Деление пространства на бесконечно малые части идет от Демокрита и его учителя Левкиппа, через школу Платона, где родилась теория «атомных линий». Идея атомов, «неделимых», мельчайших, меньше которых уже и представить себе невозможно, осветила не только строение вещества, но и геометрию пространства. Треугольник рассматривался как сумма бесконечно большого числа параллельных отрезков, причем ширина каждого отрезка считалась исчезающе малой — «атомной». Пирамиду представляли нарезанной на ломти треугольников, их было бесконечно много, и каждый из них не толще «атома». Слово «бесконечный» не было еще под запретом, и математики древности с детской жадностью применяли новую идею к вычислению площадей и объемов.

Но вот появляется Аристотель. Его пуританской строгости в рассуждениях, его холодному уму, признающему лишь гладкие, совершенные, уравновешенные конструкции, претит буйство этого многозначного слова, не желающего укладываться в определения. «Самое ма-

ленькое отступление от истины,— говорит он в своем трактате «О небе», — в дальнейшем ходе рассуждения увеличивается в десятки тысяч раз... введение самой маленькой величины расшатывает самые великие основы математики».

И в самом деле, что такое бесконечность? И что такое «атомный» треугольник? Есть ли толщина у этого ломтя пространства или толщины этой нет, и, следовательно, он не существует, и тогда сколько бы этих несуществующих треугольников мы ни громоздили друг на друга, нам никогда не получить пирамиды, имеющей реальный объем. И по наущению Аристотеля один из его учеников обрушивается на «атомные линии». В этом нападении не было ничего страшного, наоборот, призыв к известной трезвости и строгости был бы только полезен, если бы не тот непререкаемый авторитет, которым пользовался Аристотель у потомков на протяжении столетий. И надо было родиться Архимедом, чтобы, подчинившись аристотелевскому призыву к строгости, сохранить для себя идею бесконечно малых как метод рассуждения и анализа.

Архимед не просто сберег все, сделанное предшественниками, но настолько усовершенствовал этот способ вычисления поверхностей и объемов, что ему удалось отыскать площадь спирали, получившей его имя, площадь параболы, объем шара и даже площадь его поверхности. При этом он ни на йоту не отступил от самых жестких требований строгости: каждую задачу он решал как бы дважды — первый раз для себя, второй — для строгого критика. Для себя методом бесконечно малых он вычислял нужную площадь или объем. Для критика, имея эту величину в руках и не давая себе труда объяснить, откуда она взялась, он показывал абсолютно строгими построениями, что она может быть только такой и не может быть ни больше ни меньше. Классический «метод исчерпывания» — метод перебора возможностей и доказательства того, что все они, кроме одной, приводят к абсурду. Да, к этому методу не придершья!

Но каждого, кто столетия и даже тысячелетия спустя изучал элементарную геометрию, этот метод исчерпывания приводил в исступление: откуда же, черт возьми, автор доказательства знал с самого начала правильный результат? Не нашептал же его господь бог ему на уш-

ко! И только когда в 1907 году копенгагенский филолог Гейберг напечатал архимедовское «Послание Эратосфену», получившее подзаголовок «Учение о методе», стало ясно, что все свои результаты Архимед получал сначала методом бесконечно малых и только потом строго доказывал их методом исчерпывания. В этом сочинении Архимед всегда рассматривает часть площади круга как составленную из «всех своих хорд», шар — как заполненный «всеми параллельными кругами» и признается, что некоторые результаты, позднее доказанные им строгим геометрическим путем, он сначала нашел именно этим способом.

«Этот прием, по моему глубокому убеждению, не в меньшей мере полезен и для доказательства теорем: многие факты стали для меня впервые ясными благодаря механическому методу, но затем их необходимо было доказать геометрически, так как указанный метод строгих доказательств не дает,— пишет Архимед своему коллеге.— Ясно, что легче найти строгое доказательство после того, как при помощи этого метода приобретена некоторая ориентировка в вопросах, чем найти его без такой ориентировки. ...Я оказываю этим немаловажную услугу математике: я полагаю, что многие из моих современников или последователей, ознакомившись с этим методом, будут в состоянии находить новые теоремы, до которых я не додумался».

Поистине прав Лейбниц, когда пишет: «Внимательно читая сочинения Архимеда, перестаешь удивляться всем новейшим открытиям геометров...»

3

...Но «Учение о методе» считалось безвозвратно утерянным, от сочинений Демокрита и Левкиппа уцелели лишь обрывки, а паровой каток Аристотеля так загладил геометрию, что в ней, казалось, не осталось и места для бесконечно малых. Сонм толкователей Аристотеля и не помышлял об их реабилитации. «Эти люди,— писал Галилей Кеплеру,— полагают, что философия — книга вроде «Энеиды» и «Одиссеи» и что истину следует искать не в природе, а путем сравнения текстов»: Галилей мог быть уверен в сочувствии адресата: Кеплера пытались отлучить от науки за пользование бесконечно малыми уже не именем Аристотеля, а именем Архимеда, хотя

дух Архимеда настолько пронизал кеплеровскую «Новую стереометрию», что у историков впоследствии не однажды возникало сомнение: а не раздобыл ли он где-нибудь копию «Послания Эратосфену», утаив ее и от современников, и от потомков?

Впрочем, такое подозрение, конечно же, безосновательно. По намекам, по случайным обмолвкам, разбросанным в сочинениях Архимеда и его учеников, Кеплеру удалось гениально воссоздать тот метод вычисления с помощью бесконечно малых, которым Архимед пользовался «для себя». За два десятилетия до Кавальери и почти через два тысячелетия после Архимеда он вновь ввел бесконечно малые в математику, подсчитав этим способом объемы девяноста двух тел вращения довольно сложной формы.

Но всей гениальности великого астронома и геометра не достало бы для такой реконструкции, если бы не потомственная изустная память ремесленников, которую можно назвать инженерным фольклором. Идея Демокрита и Архимеда не были достоянием лишь философских школ, они вошли в инструментарий греческих ремесленников и землемеров. Сквозь сито средневековых схоластов до времен Возрождения добрался лишь один-единственный чертеж, в котором можно рассмотреть идею бесконечно малых — треугольник, для вычисления площади разбитый на множество мельчайших прямоугольничков. Но ремесленники по-прежнему пользовались этим методом, определяя размеры сложных фигур, и передавали его из поколения в поколение.

Оно и понятно: кто бы ни занимался искоренением идей, плодами их он не переставал пользоваться. Чтобы жить, надо было строить, чтобы строить, надо было вычислять. И если кардинал Барберини, бывший математик и бывший друг Галилея, ставший папой Урбаном VIII, отправил престарелого ученого «прогуляться» в зал пыток, то он и не подумал запретить морякам пользоваться галилеевыми звездными таблицами. Корабли везли в Европу золото и пряности, и тот, кто точнее определял курс, быстрее прибывал в порт назначения. И когда сто лет спустя епископ Беркли ополчился на бесконечно малые, он тоже не собирался оспаривать результаты дифференциального исчисления или запрещать пользоваться им — он хотел лишь искоренить «противоестественные» идеи...

А корабли все спешили в дальние страны, и капитаны направляли зрительные трубы астролябий на звезды, которые уже не были больше неподвижны. Инженеры и ученые изобретали новые машины, и челноки в зеве ткацких станков летали теперь, перебрасываемые рычагами, а не руками рабочих. Люди учились ценить скорость, и им нужно было уметь определять ее. Даже время бежало по-иному, и с тех пор как в часах появился маятник, счет времени пошел не на доли часа, а на доли минуты. А на земле шли войны и грохотали пушки, и нужно было, чтобы ядра летели как можно дальше и точно поражали цель. Артиллеристы и оружейные мастера рисовали кривые — траектории полета снаряда. Математики тоже рисовали кривые и поняли, что их можно не только вычерчивать, но и вычислять — каждой соответствует своя формула, так же как каждой формуле — своя кривая. Научились рассчитывать и касательные к кривым, и вскоре решенных задач на касательные оказалось едва ли меньше, чем задач на подсчет площадей. Результаты эти были, помимо прочего, ценны тем, что по касательной можно было определить скорость. И наконец, кембриджский математик Исаак Барроу выступил со своим знаменитым утверждением, что задачи на площади и задачи на касательные тесно соприкасаются друг с другом и одна — как бы обратная сторона другой. Поясняя свою мысль открытиями Галилея и Торричелли, он показал, что если направить на рисунке по горизонтальной оси равномерно текущее время и отложить вверх по оси значения пройденного пути, а вниз — величину скорости в каждый момент времени, то для каждого мгновения площадь, ограниченная нижней кривой, кривой скорости, будет пропорциональна пройденному пути, а по касательной к верхней кривой, изображающей путь, можно отыскать значение скорости.

Таким образом, получалось, что, зная график пути, можно вычислить скорость; зная график скорости — подсчитать путь.

4

И, таким образом, еще и еще раз подтвердилась мысль Энгельса, вошедшая теперь в учебники и энциклопедии: «Как и все другие науки, математика возник-

ла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики».

Если же потом, с течением времени, такие простые с виду вещи, как вычисление скорости по пройденному пути, вдруг превращались в целую науку со своими законами, правилами, сложностями, где уже и речи нет ни о пути, ни о скорости, а, напротив, возникают совершенно новые понятия — производная, дифференциал, то и тут нет ничего непонятного или даже необычного: так было и так есть со всеми науками. «...Как и во всех других областях мышления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы; с которыми мир должен сообразоваться. Так было с обществом и государством, так, а не иначе, *чистая математика применяется* впоследствии к миру, хотя она заимствована из этого самого мира и только выражает часть присущих ему форм связей,— и как раз *только по этому* и может вообще применяться»,— писал Энгельс в «Анти-Дюринге».

5

Когда на лукасовской кафедре в Кембридже у Исаака Барроу появился способный ученик Исаак Ньютон, а молодой магистр философии Готфрид Вильгельм Лейбниц почувствовал вкус к точным наукам и опубликовал свою первую математическую работу «Рассуждение о комбинаторном искусстве», все было готово к изобретению дифференциального и интегрального исчислений. Что это действительно так, показать просто: открытие было сделано англичанином и немцем независимо друг от друга в одно и то же десятилетие.

Но что, собственно, значит «изобрести исчисление»? Ведь поруганная честь бесконечно малых была уже восстановлена предшественниками Ньютона и Лейбница. Что же осталось на их долю? Им предстояло превратить метод рассуждений в метод вычислений. Кеплер и Кавальери, хоть и преуспели в пользовании бесконечно малыми, все же недалеко ушли от Архимеда, как и сам Архимед продвинулся в этом деле немногим дальше Демокрита. Все они совершенствовали словес-

ный, так сказать, рассудительный подход к отдельным задачам, шлифовали идею. Надо было уловить то общее, что присуще всем задачам, и создать удобный и простой способ, которым бы решалась каждая из них. Требовался математический аппарат — своеобразное прокрустово ложе, в которое каждая задача укладывалась бы, в противоположность мифическому станку, без существенных потерь. Выражаясь языком современной техники, нужна была пресс-форма: закладываете в нее податливую массу, одно нажатие пресса — и изделие готово.

Или, пользуясь еще одним современным сравнением, нужно было перейти от старой школьной программы по математике к новой. Ведь что представляла собой прежняя школьная математика до шестого класса? Это была чистая арифметика — мудреный свод правил о том, как решать каждый отдельный тип задачи: задача на части, на пропорции, на тройное правило, действие первое, действие второе, действие третье... Но весь этот задачник укладывается в четыре слова, которым школьника обучают по новой программе буквально на первых же уроках. Они просты: «обозначим неизвестное через x ...» И дальше мы уже переходим на новую, алгебраическую платформу — платформу решения уравнений, где есть свои законы и свои трудности, но это уже иные законы и иные трудности. А вся прежняя школьная арифметика исчерпалась четырьмя магическими словами — «обозначим неизвестное через x ».

Вот эти-то магические слова: обозначим то-то и то-то через то-то и то-то и предстояло произнести Ньютону и Лейбницу для задач на площади и касательные. Сказав их, они перевели бы отдельные задачи алгебры и геометрии на новую платформу — платформу дифференциального исчисления.

6

Бурный спор о том, кто изобрел дифференциальное исчисление — Ньютон или Лейбниц, два с лишним столетия лихорадивший различные математические школы, захватил и Энгельса. В предварительных заметках к «Диалектике природы», сделанных «для себя» и явно не рассчитанных на последующее появление в печати, а потому гротескно заостренных и резких, как мгновен-

ная фотография мысли, остановленной для памяти, есть такие строки: «...Лейбниц — основатель математики бесконечного, по сравнению с которым индуктивный осел Ньютон является испортившим дело плагиатором...» Энгельс был здесь небеспристрастен и, скорее всего, сам чувствовал это. Его увлекающей натуре претила тягеловесная методичность Ньютона, признававшего лишь один метод исследования — метод индукции, движение от фактов к обобщениям, и с презрительной категоричностью заявлявшего: «Hypotheses non fingo» — «Гипотез не измышляю». Но вот уже через два года, по-видимому, не без влияния частых бесед с Марксом, который как раз в это время постигал Ньютона и отзывался о нем с глубоким уважением, Энгельс не только пишет о Ньюtone и Лейбнице «на равных», но даже упоминает имя Ньютона первым — в соответствии с современными воззрениями, утверждающими, что Ньютон не только пришел к открытию дифференциального и интегрального исчисления независимо от Лейбница, но даже совершил это раньше него. А главное, переносит в своем высказывании центр тяжести со спора о личностях на анализ хода развития науки в целом, на соответствие достижений науки ее потребностям.

Снова парадоксально заостряя свою мысль, он высказывается в том духе, что изобретатели дифференциального исчисления заложили в его здание не первый, а последний камень: «Поворотным пунктом в математике была Декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и тем самым *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено, Ньютоном и Лейбницем».

И Энгельс снова возвращается к той же мысли о потребностях науки и общества, о том, как наука отвечает на вопрос времени:

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только *состояния*, но и *процессы*: движение».

Каких бы трудов это ни стоило, дифференциальное исчисление было изобретено, поскольку таково было *время*.

И еще одну трудность нужно было преодолеть великим мужам науки. Не из чистого каприза Аристотель воспротивился применению бесконечно малых: математика — наука строгая, и даже бесконечно малую величину не позволяет считать нулем без достаточных на то оснований. И Архимед отнюдь не из научного кокетства пользовался двумя методами — одним для себя, другим для публики — он понимал, что в различии слов «показать» и «доказать» есть глубокий смысл. Показав вначале результат, полученный с помощью бесконечно малых, которые вроде бы существуют и отличаются от нуля, Архимед утверждал затем, что результат точен, и доказывал это. Доказательство строилось обычно на том, что при последовательном проведении приема, избранного для построения, эти бесконечно малые могут быть сделаны меньше «любой заданной телесной величины» и в пределе равны нулю. Для настоящего, строго обоснования анализа бесконечно малых нужно было сплавить оба архимедовских метода — «для себя» и «для публики» — воедино.

Если с первой задачей — созданием аппарата нового исчисления — Ньютон и Лейбниц справились блестяще, передав его в наши руки почти таким, каким мы нынче пользуемся, то вторую задачу — обоснования — им так и не удалось решить, хотя Ньютон был почти у цели, и, окажись он более последовательным, наука обошлась бы без споров, растянувшихся на два столетия. Но не ученый властвует над временем, в котором живет, а время над ним, и Исаак Ньютон семнадцатого столетия так и не смог превратиться в Огюста Коши девятнадцатого столетия.

Окажись он более последовательным...

Как часто представляем мы своим современником и единомышленником ученого, чья жизнь отделена от нашей столетиями! А ведь время не может не наложить отпечатка на его образ мышления. Путешественник, открывающий дорогу в новые, неизведанные земли, смотрит на возникающий перед ним незнакомый мир глазами сына своего времени и своей страны и не может

смотреть иначе. Один из историков математики заметил, что тот, кто пролагает пути к новым воззрениям, закладывает основы эпохального переворота в науке, сам чаще всего остается в плену старых представлений.

Мы привыкли считать Ньютона ученым, близким нам по духу, по взгляду на природу. Ведь недаром он не только разработал новые научные основы мироздания, но и изложил их в виде «Математических начал натуральной философии» — именно математических, как это сделал бы всякий современный нам физик.

И все же даже эти «Начала» написаны — полностью! — языком классической греческой геометрии. А уж вне математики — в физике и астрономии — Ньютон, создавший такой великолепный математический инструмент, как дифференциальное исчисление, вовсе не пользуется им, а предпочитает выражать свои идеи в духе греческих геометров. И если где-то ему не удавалось выдержать столь архаический даже для его времени стиль, то это, как он сам признавался, причиняло ему немалое огорчение. А чего стоит его склонность к алхимии, к древним апокалиптическим писаниям!

И, наконец, всего один пример — а их могло бы быть множество — подхода Ньютона к окружающему миру, природе, ее устройству, бесконечности пространства, механизму сил, которые действуют в нем, чтобы обеспечить ту сложную механику, то точное взаимодействие между телами, которые следовали из открытых им законов и формул: «Не становится ли ясным из явлений, что есть бестелесное существо, живое, разумное, всемогущее, которое в бесконечном пространстве, как бы в своем чувствилище, видит все вещи вблизи, пронзает их насквозь и понимает их вполне благодаря их непосредственной близости к нему». И это — вывод, венчающий удивительную по строгости и математической точности работу «Оптика, или Трактат об отражениях, преломлениях, изгибаниях и цветах света»!

Лорд Кейнс, коллекционер и знаток неопубликованных рукописей Ньютона, так писал о нем: «Начиная с восемнадцатого столетия, Ньютона считают первым и величайшим ученым современного склада, рационалистом, научившим нас мыслить на основе трезвого и строгого анализа. Мне он представляется совсем иным. Да, я думаю, что мою точку зрения разделит каждый,

кто попытается разобраться в содержимом ящика, который Ньютон упаковал перед тем, как в 1696 году окончательно оставил Кембридж. Ньютон не был первым представителем века разума. Он был последним из магов, последним из вавилонян и шумеров, последним великим умом, который смотрел как на зримый, так и на интеллектуальный мир такими же глазами, как и те, кто заложил основы нашего интеллектуального наследия немногим менее десяти тысяч лет назад. Исаак Ньютон, родившийся в Рождество 1642, вскоре после смерти отца, был последним чудо-младенцем, которому древние волхвы могли бы воздать искренние и достойные почести».

«Все, что нам известно об отношении Ньютона к математике, о его математическом стиле и вкусе, согласуется с выводами Кейнса», — писал недавно Ф. Дж. Дайсон, известный современный ученый, профессор Принстонского университета.

9

...Когда Лейбниц обнаружил, что кое-что из его открытий, обсуждавшихся им в доверительных беседах с приятелями, начало просачиваться наружу, он поспешил вбить заявочный столб на новой математической полянке. В качестве такового должна была послужить статья в третьем номере начавшего незадолго перед тем выходить журнала ученых «Acta Eruditorum» за 1684 год. Лейбниц перестраховался дважды — тем, что опубликовал эту статью, и тем, как он это сделал. Статья сжата настолько, что едва можно сообразить, что же хотел сказать автор, и это при том, что в черновиках сохранилось по крайней мере два наброска, изложенные куда понятнее! В этом не слишком благовидном деле ему основательно помогла и типография, оснатившая текст рекордным числом опечаток. Но как бы то ни было, в мемуаре с длинным названием «Новый метод нахождения наибольших и наименьших значений и определения касательных, не изменяющий в случае дробных или иррациональных величин и особый для этого род исчисления» уже заложен фундамент нового исчисления — дифференциального анализа. Лейбниц вводит понятие дифференциала как бесконечно малой разности двух соседних значений величины и обозначает его символом

« d » — первой буквой латинского слова «differentia», что значит «разность». Дифференциал от величины x отныне будет обозначаться dx (читается «дэ-икс»), от величины y — dy («дэ-игрек»).

Сразу стала ясна связь между кривой, описывающей путь тела, и скоростью этого тела в каждой точке этой кривой. А именно, скорость в любой точке определяется углом наклона касательной к кривой, проведенной через эту точку.

Почему так? Да очень просто. Если y — это путь, а x — время, то y , следовательно, есть некая математическая функция, зависящая от x . Этой функции соответствует некая кривая. В какой-то любой точке к ней проведена касательная. Угол ее наклона вычисляется элементарно просто — тангенс его равен $\frac{dy}{dx}$. Но поскольку

игрек — путь, а икс — время, то эта величина и есть скорость. В самом деле, ведь если мы хотим определить скорость ядра, вылетающего из жерла орудия, то надо отметить где-нибудь отрезок пути (dy) и посмотреть, за какое время (dx) ядро его пролетит. При этом, разделив путь на время ($\frac{dy}{dx}$), мы получим, естественно,

среднее значение скорости за данный промежуток времени. Но если этот промежуток брать все меньше и меньше, мысленно стягивая его в точку, то как раз и получится точное значение скорости в данной точке.

Особой строгостью подобное рассуждение не отличается, но не больше строгости было и у самого Лейбница. Забегая вперед, следует сказать, что величина $\frac{dy}{dx}$

была впоследствии окрещена «производной» (в том смысле, что произведена от функции y , зависящей от x) и стала наряду с дифференциалом основным понятием нового анализа.

Уже в первых своих работах Лейбниц дал правила, как дифференцировать сумму и разность двух функций, их произведение и частное, показал, как получить дифференциал степени, ввел понятие о бесконечно малых и дифференциалах высших порядков и доказал множество других важнейших теорем дифференциального исчисления.

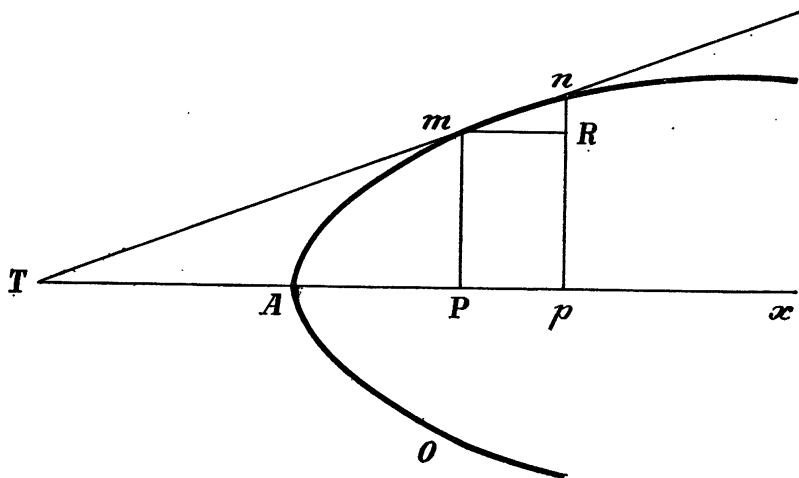
Попробуем, отталкиваясь от Лейбницева метода, вычислить или, как принято говорить в математике, «взять» какой-нибудь простенький дифференциал, чтобы обрести в этом деле хоть какой-нибудь собственный опыт. Итак, отыщем дифференциал для y , равного x^2 . Соседней с x , бесконечно близкой к нему величиной, будет $x+dx$. Тогда бесконечно близкая к y величина $y+dy$ будет равна $(x+dx)^2$, то есть $x^2+2xdx+(dx)^2$. Если вычесть отсюда прежнее значение y , равное x^2 , то получится, что бесконечно малое приращение величины y , то есть dy , равно $2xdx + (dx)^2$. Но $(dx)^2$ есть dx , умноженное на dx , то есть бесконечно малая второго порядка, в бесконечное число раз меньшая бесконечно малой первого порядка dx , и по сравнению с dx ею, как утверждает Лейбниц, можно пренебречь и отбросить ее. Отсюда дифференциал dy в этом случае равен $2xdx$, что и соответствует всем учебникам и справочникам.

Теперь, когда нам не только не вчуже сама дифференциальная терминология, но по силам даже найти дифференциал от квадратичной функции x^2 , описывающей, как известно, кривую, называемую параболой, приложение к письму, которое Энгельс получил однажды от Маркса, мы, как и его получатель, сможем понять без особых затруднений. Само письмо, к сожалению, так и не найдено до сих пор, и мы ничего не знаем о его содержании. Известно лишь, что написано оно что-то в конце 1865 — начале 1866 года, то есть в то самое необычайно трудное для Маркса время, когда он одновременно заканчивал работу над первым томом «Капитала» и готовил первый конгресс Интернационала и далеко уже, увы, не в первый раз испытывал одновременно тяготы бедности и разрушенного непосильным трудом здоровья. Но приложение — Маркс называет его «аппендиксом» — к этому письму написано так просто и ясно, что отнюдь не наводит на мысль о невзгодах, обрушившихся на его автора, и дает четкое представление о сути дифференциального исчисления. Именно эту цель и ставил перед собой Маркс, когда писал Энгельсу:

«Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении *касательных* к произвольной кривой через любую ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела.

Пусть линия tAo — произвольная кривая, природы которой (является ли она параболой, эллипсом и т. д.) мы *не* знаем, и где в точке t требуется провести касательную.

Ax — ось. Мы опускаем перпендикуляр tP (ординату) на абсциссу Ax . Представь себе теперь, что точка n — бесконечно *ближайшая* точка кривой возле t . Если я опущу на ось перпендикуляр np , то p должна быть бесконечно ближайшей точкой к P , а np — бесконечно ближайшей параллельной линией к tP . Опустим теперь бесконечно малый перпендикуляр mR на np . Если ты



теперь примешь абсциссу AP за x , а ординату tP за y , то $np = mP$ (или Rp), увеличенной на бесконечно малое приращение $[nR]$, или $[nR] = dy$ (дифференциал от y), а $mR = (Pp) = dx$. Так как часть mn касательной бесконечно мала, то она совпадает с соответствующей частью самой кривой. Я могу, следовательно, рассматривать mnR как Δ (треугольник), Δ -ки же mnR и mTP подоб-

ные треугольники. Поэтому: $dy(=nR): dx(=mR) = y(=mR): PT$ (которое есть подкасательная для касательной Tn). Следовательно, подкасательная $PT = y \frac{dx}{dy}$.

Это и есть *общее дифференциальное уравнение* для всех точек касания *всех* кривых. Если мне теперь нужно дальше оперировать с этим уравнением и с его помощью определить величину подкасательной PT (имея последнюю, мне остается только соединить точки T и t прямой линией, чтобы получить касательную), то я должен знать, каков *специфический характер* кривой. В соответствии с ее характером (как парабола, эллипс, циссоида и т. д.) она имеет *определенное общее уравнение* для ее ординаты и абсциссы каждой точки, которое известно из алгебраической геометрии. Если, например, кривая tAo есть парабола, то я знаю, что y^2 (y — ордината каждой произвольной точки) $= ax$, где a — параметр параболы, а x — абсцисса, соответствующая ординате y .

Если я подставляю это значение для y в уравнение $PT = y \frac{dx}{dy}$, то я должен, следовательно, искать сначала dy , то есть найти дифференциал от y (выражение, которое добавляется к y при его бесконечно малом возрастании). Если $y^2 = ax$, то я знаю из дифференциального исчисления, что $d(y^2) = d(ax)$ (я должен, разумеется, дифференцировать обе части уравнения) дает $2ydy = adx$ (d везде обозначает дифференциал). Следовательно, $dx = \frac{2ydy}{a}$. Если я подставляю это значение для dx в формулу $PT = \frac{ydx}{dy}$, то получу $PT = \frac{2y^2 dy}{ady} = \frac{2y^2}{a} =$ (так как $y^2 = ax$) $= \frac{2ax}{a} = 2x$. Или: подкасательная для каждой точки t параболы равна двойной абсциссе той же самой точки. Дифференциальные величины исчезают в операции».

Такое письмо вместе с чертежом, который воспроизведен на 64-й странице, получил от Маркса Энгельс, и ему, как и нам теперь, стали ведомы и суть дифференциального исчисления, и принятые в нем обозначения, и то, как дифференцировать уравнение квадратичной функции, параболы, то есть что $d(x^2) = 2xdx$. И, быть может, именно благодаря этому письму у нас есть те-

перь возможность рассмотреть наглядное, даже объемное — не только в переносном, но и в прямом смысле этого слова — объяснение, почему дифференциал еще одной, кубической функции, то есть $d(x^3)$, равняется $3x^2dx$. Это объяснение дал не кто иной, как Энгельс, в заметках и фрагментах к своей «Диалектике природы». Такова глубина следа, оставленного в его душе Марксовыми «математическими посланиями». Но, конечно, Энгельс совсем не собирался пересказывать основы дифференциального исчисления, которым учил его Маркс. Нет, он попытался даже такую абстрактную математическую процедуру, как вычисление дифференциала, поставить на службу главной идее своей книги: показать, что мир вне нас — все, что нас окружает, и мир внутри нас — наше мышление, тесно связаны, что они «подчинены одним и тем же законам и что поэтому они и не могут противоречить друг другу в своих результатах, а должны согласоваться между собой».

«Из всех теоретических успехов знания вряд ли какой-нибудь считается столь высоким триумфом человеческого духа, как изобретение исчисления бесконечно малых во второй половине XVII века. Если уж где-нибудь мы имеем перед собой чистое и исключительное деяние человеческого духа, то именно здесь. Тайна, окружающая еще и в наше время те величины, которые применяются в исчислении бесконечно малых, — дифференциалы и бесконечно малые разных порядков, — является лучшим доказательством того, что все еще распространено представление, будто здесь мы имеем дело с чистыми «продуктами свободного творчества и воображения» человеческого духа, которым ничто не соответствует в объективном мире. И тем не менее справедливо как раз обратное. Для всех этих воображаемых величин природа дает нам прообразы».

Что же за «прообразы» дифференцирования усмотрел в природе Энгельс?

Рассуждения его таковы. Все тела состоят из мельчайших частиц — молекул. По сравнению с любым телом молекула — это бесконечно малая величина. Но и любой предмет на Земле бесконечно мал по сравнению с нею самой, во всяком случае именно из этой предпосылки исходит механика: «Радиус Земли $= \infty$, таков принцип всей механики при рассмотрении закона падения». В свою очередь, для астронома Земля — бесконеч-

но малая песчинка в мироздании. «Таким образом, мы уже имеем здесь перед собой бесконечные величины не только первого, но и второго порядка, и можем предоставить фантазии наших читателей,— если им это понравится,— построить себе в бесконечном пространстве еще и дальнейшие бесконечные величины более высоких порядков». «...И ничто не мешает каждому, кому это доставляет удовольствие, предположить, что в природе должны быть еще также и аналоги для d^3x , d^4x и т. д.»

Так окружающий мир, по Энгельсу, дарит нам бесценные намеки, и «человеческому духу» остается лишь улавливать их и строить свои теории, даже самые абстрактнейшие из них.

Но в чем, однако, состоит тот намек, благодаря которому мы сумеем продифференцировать функцию y , равную x^3 ?

Да очень просто — если молекулы можно уподобить дифференциалам, то природа, видимо, должна обходиться с ними в каком-то смысле так же, как математики с введенными ими же самими понятиями — бесконечно малыми величинами. И Энгельс утверждает, что так оно и есть!

«...Даже если мы допустим, что наибольшая молекула достигает диаметра в одну двадцатипятимиллионную долю миллиметра, то и в этом случае молекула все еще остается исчезающе малой величиной по сравнению с наименьшей массой, с какой только имеют дело механика, физика и даже химия. Несмотря на это, молекула обладает всеми характерными для соответствующей массы свойствами; она может представлять в физическом и химическом отношении эту массу и, действительно, представляет ее во всех химических уравнениях. Короче говоря, молекула обладает по отношению к соответствующей массе совершенно такими же свойствами, какими обладает математический дифференциал по отношению к своей переменной, с той лишь разницей, что то, что в случае дифференциала, в математической абстракции, представляется нам таинственным и непонятным, здесь становится само собой разумеющимся и, так сказать, очевидным.

Природа оперирует этими дифференциалами, молекулами, точно таким же образом и по точно таким же законам, как математика оперирует своими абстрактными дифференциалами. Так, например, дифференциал

от x^3 будет $3x^2dx$, причем мы пренебрегаем $3xdx^2$ и dx^3 . Если мы сделаем соответствующее геометрическое построение, то получим куб, длина стороны которого x увеличивается на бесконечно малую величину dx . Допустим, что этот куб состоит из какого-нибудь легко возгоняемого химического элемента, скажем, из серы; допустим, что поверхности трех из его граней, образующих один угол, защищены, а поверхности трех других граней свободны. Если мы поместим этот серный куб в атмосферу из паров серы и в достаточной степени понизим температуру этой атмосферы, то пары серы начнут осаждаться на трех свободных гранях нашего куба. Мы не выйдем за пределы обычных для физики и химии приемов, если, желая представить себе этот процесс в чистом виде, мы допустим, что на каждой из этих трех граней осаждается сперва слой толщиной в одну молекулу. Длина стороны куба x увеличилась на диаметр одной молекулы, на dx . Объем же куба x^3 увеличился на разность между x^3 и $x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3$, причем мы с тем же правом, как и математика, можем пренебречь dx^3 , т. е. одной молекулой, и $3xdx^2$, т. е. тремя рядами, длиной в $x + dx$, линейно расположенных молекул. Результат одинаков: приращение массы куба равно $3x^2dx$.

Так просто, наглядно, даже изящно выводит Энгельс формулу для дифференциала функции, равной x^3 . Конечно, тот же самый результат был бы получен, если бы еще раз пожелали воспользоваться методом Лейбница. Пример, приведенный Энгельсом, — всего лишь живописная иллюстрация к методу Лейбница, который позволяет находить дифференциалы не только для кубической функции, но и для множества других.

12

Ну а чем же обосновал Лейбниц новое исчисление? Какова была, как говорили в те времена, его метафизика? Вот что пишет один из самых ортодоксальных представителей школы Лейбница, маркиз Лопиталь, в первом печатном курсе анализа: «Обыкновенный анализ имеет дело только с конечными величинами, излагаемый же в этой книге проникает в самую бесконечность. Он сравнивает между собой бесконечно малые разности конечных величин, он находит отношения этих разностей и тем самым позволяет открыть отношения

величин конечных, которые в сравнении с бесконечно малыми сами как бы являются бесконечными. Можно сказать даже, что этот анализ выходит за пределы бесконечного, ибо он не ограничивается бесконечно малыми разностями, а определяет отношения разностей этих разностей, отношения третьих, четвертых разностей и т. д., не останавливаясь при этом нигде. Таким образом, он обнимает не только бесконечность, но и бесконечность бесконечностей».

Лопиталь говорит здесь о бесконечно малых разностях, то есть, в понимании Лейбница, о дифференциалах, но среди всех этих громких и торжественных «объятий бесконечного» остается по-прежнему неясным, так что же такое бесконечность или даже бесконечность бесконечностей? Не останавливаясь на таких пустяках, Лопиталь продолжает: «Только такого рода анализ позволяет понять истинные принципы кривых, ибо кривые линии суть не что иное, как многоугольники с бесконечным количеством сторон... И, собственно говоря, вписанные и описанные вокруг кривых многоугольники, сливающиеся с кривыми при бесконечном увеличении числа их сторон, всегда принимались за самые кривые».

Энгельс писал: «Когда математика прямого и кривого оказывается, можно сказать, исчерпанной,— новое, почти безграничное поприще открывается такой математикой, которая рассматривает кривое как прямое... и прямое как кривое... О метафизика!».

Итак, первый постулат: кривая — это вовсе и не кривая, а некоторый многоугольник, стороны которого, хотя и бесконечно малые, но все же прямые... Отсюда уже недалеко и до второго, основного постулата, который, в категорическом изложении другого ученика Лейбница, Иоганна Бернулли, звучит так: «Величина, увеличенная или уменьшенная на бесконечно малую величину, не увеличивается и не уменьшается».

Как раз этот постулат и позволил нам в разобранном ранее примере считать, что $2xdx + dx dx$ — это то же самое, что $2xdx$, поскольку $dx dx$ бесконечно мало по сравнению с dx .

Отсюда немедленно возникал вопрос: так что же, анализ бесконечно малых — это точная наука или просто способ приближенного вычисления? Нельзя же, в самом деле, полагать, что, прибавив даже очень малую величину к чему-то, мы ничего не прибавили, так

может быть только, если эта малая величина равна нулю. Но ведь утверждается вроде бы, что она не равна нулю, а всего лишь бесконечно мала...

Нуль она или не нуль?!

Чувствуя шаткость своей позиции, Лейбниц в письме, направленном одному из своих коллег, пытается убедить себя и других: «...То, что несравненно меньше, бесполезно принимать в расчет по сравнению с тем, что несравненно больше его: так частица магнитной жидкости, проходящая через стекло, несравнима с песчинкой, песчинка с земным шаром, а этот последний с небесной твердью...» Но ведь это рассуждение не математика, а землемера! И потому не удивительно, что строки, в которых один из виднейших современных историков математики, Адольф Павлович Юшкевич, в течение ряда лет бывший президентом Международной академии истории науки, резюмирует метафизику Лейбница, так похожи на текст обвинительного заключения:

«Воззрения и методы исследования школы Лейбница, как видно, не отличаются строгостью и четкостью. Основные принципы нового исчисления, собственно, здесь почти не разработаны, а те идеи, которые играют руководящую роль, логически безупречны. Главное орудие анализа — бесконечно малые величины, из бесконечного числа которых складываются конечные величины, точно не определяются и принимаются не то за действительную величину, не то за абсолютный нуль и ничто или, лучше, — то за действительную величину, то за ничто. Это понятие, двойственное и мистически неясное, подвергается затем действиям, явно противоречащим логике, ибо прибавление бесконечно малой величины не изменяет конечного слагаемого, хотя эта бесконечно малая все же не нуль».

Впрочем, с Лейбницем до сих пор не все ясно. По словам Бертрана Рассела, «есть две философии, каждую из которых можно рассматривать как представляющую взгляды Лейбница: одна, которую он открыто провозглашал, была оптимистической, ортодоксальной, фантастической и мелкой; другая, которую постепенно извлекали из его рукописей недавние издатели, была глубокой, ясной... удивительно логичной». А ведь в ганноверском архиве Лейбница хранится около 75 000 (!!) отдельных его работ, и многие из них до сих пор не опубликованы...

Но, может быть, Ньютону, который начал заниматься анализом лет на десять раньше Лейбница, удалось то, с чем не справился его немецкий коллега? Подход его к проблемам анализа был во всяком случае иным — Ньютон всегда и всюду шел от механики и физики. «Геометрия», — писал он в своих «Математических началах натуральной философии», — основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения». На механических аналогиях построен и его метод флюксий — так он назвал новое исчисление, все задачи которого могут быть сведены к двум кардинальным задачам механики: определению скорости движения в данный момент времени по известному пути и определению пути, пройденного за данное время, по известной скорости. При этом «время» так же, как и «путь», было просто переменной величиной, для которой существует удобная аналогия в механике. Переменную величину Ньютон назвал «флюентой» (текущей), ее скорость — «флюксией» (то же, что Лейбницево $\frac{dy}{dx}$). Третьим важным понятием метода флюксий

был «момент», соответствующий дифференциалу, — бесконечно малое, «едва-едва зарождающееся начало конечных величин». Эта бесконечно малая, без которой Ньютон тоже не сумел обойтись, доставила ему немало огорчений, ибо он глубже Лейбница чувствовал ее противоречивость. На протяжении всей своей жизни он мужественно сражался с ней, пытаясь изгнать ее из своего метода, и каждый раз, когда, казалось, уже одерживал победу, вынужден бывал отступить, плененный ее наглядностью и простотой совершаемых над нею операций.

В первые годы своей научной работы Ньютон оперирует с бесконечно малыми подобно всем своим современникам, по известным правилам в одних случаях оставляя их, в других — отбрасывая. Но вскоре уже они кажутся ему «недостаточно строгими и математически». Однако Ньютон не отрицает их практической пользы и, подобно Архимеду, хочет оставить их «для себя», если не как способ доказательства, то как метод получения правильного результата. Это — леса, которые

должны быть убраны после окончания постройки, но совершенно негодный материал для ее фундамента. Поэтому Ньютон старательно изгоняет бесконечно малые и пытается заменить их «методом первых и последних отношений». Иными словами, он намеревается избавиться от dx и dy , взятых отдельно, и пользоваться только их отношением $\frac{dy}{dx}$ *. В этом есть свой резон — ведь отношение есть величина конечная, что легко понять из той же механической аналогии: если бесконечно малый отрезок пути поделить на бесконечно малый промежуток времени, за который этот путь пройден, частное — скорость — будет вполне определенной конечной величиной.

В книге первой «Математических начал», в схолии — поучении — к одиннадцатой лемме первого раздела Ньютон пишет: «Я предпослал эти леммы с целью избежать утомительного проведения доказательств путем приведения к нелепости по методу древних геометров. Метод неделимых дает значительно более короткие доказательства. Но так как гипотеза неделимых несколько груба... и метод этот соответственно почитается менее геометрическим, то я предпочитаю свести доказательства последующих предложений к первым и последним суммам и отношениям зарождающихся и исчезающих величин, т. е. к пределам этих сумм и отношений, и таким образом, выводы этих пределов сделать по возможности краткими. Ибо таким путем получается то же самое, что и при помощи метода неделимых, и поскольку эти принципы будут доказаны, то мы сможем пользоваться ими с большей безопасностью. Таким образом, если я в последующем буду рассматривать величины, как состоящие из частиц или же применять маленькие кривые линии как прямые, то не нужно полагать, что я подразумеваю при этом неделимые величины, а величины исчезающие и делимые; не суммы и отношения определенных частей, но всегда пределы сумм и отношений».

* Это отношение стало называться «производной»; точнее — «производной от y по x ». Так появилось в анализе равенство $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. По-русски оно звучит: «эф-штрих от икса равняется дэ-игрек по дэ-икс». Фраза эта — последняя дифференциальная премудрость, которую нам предстоит постичь. Она очень важна, как будет видно дальше.

Как видим, Ньютон полон благих намерений: неделимые как метод доказательства изгоняются, отныне царствует метод пределов. Но оказавшись в не слишком привычном для его современников царстве пределов, Ньютон сразу же чувствует себя неуверенно и пытается прибегнуть к самозащите. Он предвидит возражения: а вдруг нет никакого «последнего отношения исчезающих величин»? Ибо если эти величины еще есть, то отношение их — не последнее, а если величин нет, то вроде бы нет и никакого отношения... И Ньютон снова апеллирует к скорости. «С таким же правом можно утверждать, что нет последней скорости у тела, прибывающего в какое-нибудь место... последняя скорость — это скорость ни до, ни после момента достижения последнего места движения, а скорость в самый момент его достижения». «Точно так же под последним отношением исчезающих величин нужно понимать их отношение ни до и ни после их исчезновения, но отношение, с которым они исчезают. Подобным же образом первое отношение зарождающихся величин — это то, с которым они начинают существовать... И существует подобный же предел для всех величин и отношений, которые начинают и перестают существовать».

Из всех этих рассуждений с их чуть ли не нарочитой запутанностью ясно одно: если раньше мы как будто бы понимали, что такое скорость в некоторый момент времени, то теперь это понимание от нас ускользает. А слова «отношение в момент исчезновения» снова приводят к вопросу — величины уже исчезли или еще нет? Нули они или не нули? И все начинается сначала...

Еще хуже дело обстоит там, где Ньютон напрямую переходит к практике дифференцирования. Тут ему все-таки приходится пользоваться бесконечно малыми, которые он называет «моментами» и определяет как «едва-едва зарождающиеся начала конечных величин». И тогда он уже не стесняется давать указания: а теперь уничтожьте члены, содержащие моменты, «как бесконечно малые»...

Как, например, предлагает Ньютон вычислять флюксию, то есть по-нынешнему производную, от произведения двух функций?

Рассуждения его таковы. Пусть вдоль некой оси движутся две точки. Их координаты — в терминологии Ньютона «флюенты» — описываются функциями u и v . Они зависят, конечно, от времени. А теперь нам нужна такая новая флюента y , которая равна произведению двух первых, то есть $y=uv$. Конечно, зная u и v , найти y не представляет труда. Но дело в том, что нас просят узнать, как связана скорость изменения новой функции со скоростями изменения двух старых. Иными словами, какова связь между их флюксиями или, на языке нынешней математики, их производными.

Если в данный миг «новая» флюента приняла значение y и при этом скорость ее изменения (вспомните угол наклона касательной к кривой!) равнялась y' , то через бесконечно малый отрезок времени, который условно обозначим буквой t , флюента примет значение $y + y't$.

«Пусть, например, дано уравнение $y=uv$. Подставь в него $u+u't$, $v+v't$ и $y+y't$ вместо u , v и y , и ты получишь $y+y't=(u+u't)(v+v't)=uv+u'vt+uv't+u'v'tt$. Но по предположению $y=uv$. Поэтому вычлени эти члены, а остальные раздели на t . При этом останется

$$y' = u'v + uv' + u'v't.$$

Но так как мы предположили t бесконечно малой величиной для того, чтобы она могла выражать моменты величин, то те члены, которые на нее умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю, и остается

$$y' = u'v + v'u.$$

В таком духе писал Исаак Ньютон, правда, обозначения у него были иными. Что же касается самой формулы для флюксии — производной произведения, то и сегодня ее учат студенты точно в таком же виде: «производная произведения равна производной первой функции, помноженной на вторую, плюс производная второй функции, помноженная на первую». И при этом студенты нимало не задумываются над тем, что Исаак Ньютон получил сию формулу, мягко говоря, не совсем корректным способом.

В общем, если оценка позиции Лейбница звучала у Адольфа Павловича Юшкевича как обвинительный акт,

то в поведении Ньютона он находит смягчающие обстоятельства и уличает его главным образом в непоследовательности: «Сторонник бесконечно малых в первом периоде, он развивает во втором относительно строгую теорию пределов. Однако наряду с теорией пределов у него постоянно встречаются высказывания инфинитезимального толка (то есть в духе бесконечно малых. — Л. К.), в самом изложении теории пределов являются недоговоренности и логические неясности и, наконец, практическое пользование бесконечно малыми не сопровождается подлинным углублением доказательств при помощи перехода к пределу. Непосредственно последующие ученые не смогли установить ни этой эволюции Ньютона, ни зависимости между теорией пределов и доказательствами с помощью бесконечно малых. Смешав то и другое, эти ученые внесли на некоторое время изрядную путаницу в философию математики».

Как кратко определяет ситуацию другой историк математики — Брэншви́г, Ньютону не удалось «ни заставить себя понять полностью, ни, может быть, полностью объяснить».

Фундамент анализа бесконечно малых выглядел настолько шатким, что должны были найтись желающие испытать его прочность.

15

Первая баталия разыгралась уже через несколько лет после появления статей Лейбница. В Парижской академии наук Мишель Ролль обрушил на бесконечно малые целый каскад докладов и мемуаров. В Италии Гвидо Гранди, со злорадством обнаружив у Лейбница парадоксальное равенство: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots = \frac{1}{2}$, немед-

ленно заявил, что оно вполне согласуется с таинствами христианской религии и с идеей сотворения мира, когда «абсолютная бесконечная сила создала нечто из абсолютного ничего». Споры на континенте не утихли, когда в Англии объявился сильный и умный противник метода флюксий, понаторевший в философских дискуссиях с теологами и учеными Старого и Нового Света.

...Приятель епископа Беркли отказался на смертном одре от причастия. По всей вероятности, этот грустный факт остался бы никак не отмеченным в анналах мате-

матики, если бы умирающий не сообщил причины отказа. А она заключалась в том, что христианская вера, на его взгляд, не обладает доказательной силой науки и, в частности, математики. Можно понять чувства, которые при этом известии охватили новоиспеченного епископа Клойнского. Надо полагать; что он считал себя лично уязвленным, тем более что с математикой у него были старые счеты — еще в юношеских дневниках младший учитель дублинского Тринити-колледжа Джордж Беркли отверг бесконечно малые и даже в «Трактате о началах человеческого знания» не пожалел нескольких параграфов, чтобы еще раз разделаться с ними.

Спор за одну человеческую душу, распропагандированную математиками, Беркли проиграл. Но он хотел защитити от пагубного влияния души остальных.

Сочинение Беркли называлось «Аналист, или Обращение к неверующему математику». Говорят, что у обращения был конкретный адресат — математик и астроном Эдмунд Галлей — тот самый Галлей, по настоянию которого Ньютон издал свои знаменитые «Начала», где с благодарностью говорит о Галлее как об «остроумнейшем и во всех областях науки учнейшем муже».

Беркли начинает с обращения: «Лично Вас я не знаю, но мне знакомо имя Ваше, которое завоевали Вы в отрасли науки, образующей предмет Вашего особого изучения, а также то влияние, которым Вы пользуетесь в делах, совершенно посторонних Вашей профессии, а также то предосудительное употребление, которое Вы и слишком многие Вам подобные даете этому не заслуженному Вами влиянию, чтобы невнимательных людей вводить в заблуждение в вопросах высочайшего значения, в коих Ваши математические познания ни в какой мере недостаточны, дабы придать Вам свойства истинного судьи».

Беркли обвиняет математиков, что они пользуются своим влиянием на друзей, чтобы настроить их скептически к догматам веры, которые строго недоказуемы. Против этого он берется показать, что основные положения нового исчисления бесконечно малых, используемого в математике ныне как ключ, с помощью которого открывают тайны геометрии и ее отражений в природе, еще менее доказуемы, чем догматы веры.

При этом он вовсе не желает быть неправильно понятым. Он отнюдь не предлагает отказываться от ре-

зультатов, полученных приверженцами нового метода, или оспаривать их. Он хочет лишь испытать правомерность их рассуждений, их ясность или темноту — имеют ли они цену строгой науки или беспорядочных блужданий. Он жаждет показать, как заблуждение порождает истину, хотя и не порождает при этом науки. Нет, он не собирается вызывать инквизицию против математиков, он ставит своей целью лишь показать, как мало именно они имеют права требовать строго доказательства того, во что люди верят.

Беркли пишет: «Я сказал (и я осмеливаюсь снова повторить это), что флюксия непонятна; что вторая, третья и четвертая флюксии еще более непонятны, что невозможно постичь простое бесконечно малое; что еще менее постижимо бесконечно малое от бесконечно малого, и так далее. Что можете Вы сказать в ответ на это? Попытались ли Вы выяснить понятие флюксии или разности? Ничего подобного».

А как выводит Ньютон флюксию для одной из функций? «При помощи фокуса». Ибо предположив сначала бесконечно малое существующим, он затем отбрасывает его как вовсе несуществующее. И Беркли продолжает: «Когда он (Ньютон.— Л. К.) говорит, пусть приращения исчезнут, то есть пусть они станут ничем, то есть пусть уже не будет приращений, то предыдущее допущение, что приращения были чем-то, что были приращения, отбрасывается, однако же последствия этого допущения, то есть полученное в силу него выражение, сохраняются. Это... ложный способ рассуждения...»

«Я был бы очень счастлив, если бы лицо со столь светлым умом было столь добрым, что объяснило бы, должны ли мы понимать под флюксиями сами зарождающиеся или исчезающие количества, или их движения, или их скорости, или просто их пропорции... чтобы вы удостоили объяснения учение о второй, третьей и четвертой флюксиях и показали бы, если вы можете, что оно не противоречит здравому смыслу», — продолжает свое обращение к анонимному математику епископ Джордж Беркли.

Математика бесконечно малого действительно приводит к правильным результатам. Обстоятельство это представляется воистину странным, если иметь в виду все упреки, сделанные в ее адрес Беркли. Пытаясь объяснить это чудесное явление, он приходит к мысли, что

все обусловлено наличием двух равных и противоположных ошибок в выводе, которые потом взаимно компенсируются. В общем — так считает Беркли — наука и человечество ничего бы не потеряли, если бы отпали теория флюксий и исчисление бесконечно малых...

Как только появился «Аналист», всколыхнулись защитники метода флюксий. Беркли был удостоен сразу двух ответов — от дублинского профессора Вальтона и от известного лондонского врача, секретаря Королевского общества Джеймса Джарина. Секретарь, впрочем, не решился проставить своего имени на собственном сочинении, опасаясь, по-видимому, неприятных осложнений с церковью, а назвал его скромно и достойно: «Геометрия — недруг непостоянства, в изложении Филалета Кентерберийского». Как следует уже из псевдонима (Филалет — «любящий постоянство»), автор был здесь более озабочен тем, чтобы отвести от математиков упрек в неверии, чем защитой флюксий. Вот образчик стиля Джарина. На вопрос, не пытается ли он, определяя «зарождающееся количество», дать жизнь несуществующей вещи, Джарин отвечает, что «флюксию нельзя считать ни несуществующей вещью, ни просто существующей. Это несуществование, переходящее в существование, или существование, возникающее из несуществования, начинающееся существование, нечто возникающее из ничего».

Беркли снова берется за перо. В ответе Джарину, не без юмора названном «В защиту свободомыслия в математике», он снова нападает на флюксию, но уже с новых и довольно любопытных философских позиций, известных еще, впрочем, со времен апорий Зенона, с задачами которого Беркли, как и все теологи, был несомненно знаком. Ньютон говорит о скорости в точке в данный момент времени. Но точка есть отсутствие пространства, а момент — отсутствие времени, а там, где нет пространства и времени, нет и движения. О какой же скорости идет речь? И Беркли требует для читателя, не имеющего математической подготовки, но обладающего здравым смыслом, права судить о том, может ли он мыслить себе «скорость без движения; движение, не пробегающее никакого пространства; величины, которые ни конечны, ни бесконечны; или вещь без величины, которая, однако, делима; фигуру без протяжения; отношение ничего к ничему; действительное произведение из ничего, умноженного на нечто».

Вальтон выступил в защиту скорости. Он попытался объяснить, что скорость тела, к которому приложена сила, неодинакова в любых двух точках пройденного пути и может сильно меняться даже при очень малом изменении места, но получил от Беркли издевательский ответ: «Как? Из того, что в двух точках не может иметь место одинаковая скорость, должно следовать, что в одной точке имеет место одна скорость? Не есть ли это заключение того сорта, как если бы мы сказали: один и тот же человек не может находиться в двух ореховых скорлупах, следовательно, он может находиться в одной скорлупе?»

16

...Епископу Беркли хотелось бы праздновать победу. Он готов был считать спор законченным. Но своим умным и по-настоящему талантливо написанным «Анализом» он добился лишь одного — математики усиленно начали устранять недостатки и противоречия, которыми с таким блеском воспользовался их неожиданный оппонент.

А епископ Беркли махнул рукой на математику и занялся другими философскими вопросами, чтобы, заняв видное место среди самых отъявленных мракобесов, перейти на старости лет к страстной проповеди целебных свойств дегтярной воды.

«ЗАПОНКИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ»



Искусная уловка принимать незначительные отклонения от истины за самую истину (что является сутью дифференциального исчисления) лежит также в основе наших остроумных мыслей: ведь целое рухнуло бы, если бы мы подошли к этим отклонениям с философской строгостью.

Георг Лихтенберг

1

С сомнениями, которые терзали души математиков, Маркс вплотную познакомился позже, когда им были прочитаны и законспектированы сотни страниц учебников, когда он освоил капитальные труды основоположников дифференциального исчисления и их учеников. Изрядная доля иронии, с которой он отнесся к «враждебным воплям» противников нового анализа, не помешала ему оценить реальную пользу этих «воплей», необходимых «для прокладывания пути новому». Это тоже видишь, листая его математические рукописи, откуда и взяты заковыченные слова.

Первое знакомство с математическим анализом по курсу аббата Сори доставило ему огромное эстетиче-

ское удовлетворение. Его пленили простота и изящество Лейбницевых алгоритмов исчисления, и он с увлечением решает пример за примером, заполняя страницы рукописей вычислением дифференциалов. Его библиотека пополняется математическими трудами, и скоро Маркс уже считает своим долгом написать Энгельсу о новом своем увлечении и предложить ему вкусить от радостей познания. Вот строка из упоминавшегося уже письма, где Маркс впервые уведомил Энгельса, что перешел к изучению высшей математики: «В свободное время занимаюсь дифференциальным и интегральным исчислением. Кстати. У меня избыток книг по этим вопросам, и я готов одну из них переслать тебе, если ты хочешь этим делом заняться. Я считаю это почти необходимым для твоих военных занятий. Кроме того, этот раздел математики гораздо легче (поскольку речь идет о чисто технической стороне), нежели, например, высшие разделы алгебры. Никаких предварительных знаний, кроме обычных алгебраических и тригонометрических вещей, здесь не требуется, но необходимо общее знакомство с коническими сечениями».

Если бы и тогда обычай перлюстрировать корреспонденцию «нежелательных иностранцев» уже был в такой чести, как сейчас, то соответствующее ведомство Великобритании не раз имело бы случай обратиться за консультацией к математикам. Вероятно, ученые мужи заверили бы чиновников спецслужбы, что в переписке господ Маркса и Энгельса не делается попытки под видом обсуждения математических формул совершить посягательство на существующий строй. И почти так же вероятно, что они не смогли бы точно и квалифицированно ответить, что же именно интересует в математике этих беспокойных господ.

2

Конечно, понимание математики, ее методов, понимание математического «взгляда на вещи» не раз помогало Марксу и при разработке, казалось бы, чисто экономических проблем. Это естественно. Чернышевский, например, труды которого ценили Маркс и Энгельс, писал в своих замечаниях на трактат английского экономиста Д. С. Милля «Основы политической экономии»: «Мы видим уже много примеров тому, какими приемами

пользуется политическая экономия при решении своих задач. Эти приемы математические. Иначе и быть не может, потому что предмет науки — количества, подлежащие счету и мере, понимаемые только через измерение и вычисление».

Любопытное признание того, что занятия высшей математикой наложили свой отпечаток на стиль Марксовых исследований, содержится в переписке Маркса и Энгельса по поводу критической статьи Дюринга о первом томе «Капитала» (того самого Евгения Дюринга, приват-доцента Берлинского университета, которого Энгельс, похоронив как ученого, одновременно «обессмертил», выступив против него со своей знаменитой полемической книгой).

В январе 1868 года Энгельс пишет Марксу:

«Дорогой Мавр!

Возвращаю Дюринга... Вся статья — сплошное смятение и страх. ...В каждой строке сквозит страх, как бы его не разделали...»

Маркс отвечает Энгельсу: «Кое-чего Дюринг явно не понял». И в тот же день отправляет еще одно письмо, в котором разъясняет:

«...Этот парень не уловил... принципиально новых положений в книге... Что впервые заработная плата представлена как иррациональная форма проявления скрывающегося за нею отношения, и это ясно показано на примере обеих форм заработной платы: повременной и сдельной. (Мне помогло то, что в высшей математике часто встречаются такие формулы.)».

Но математика служила Марксу не только инструментом понимания глубинных, скрытых от поверхностного взгляда явлений экономики, но и средством для сжатого, ясного и точного изложения полученных результатов. Именно в математической форме представил он в «Капитале» разработанные им схемы воспроизводства: в виде алгебраического уравнения для простого воспроизводства и в виде неравенства — для расширенного.

Маркс не успел завершить комментарии к схеме расширенного воспроизводства. Он посвятил этому лишь небольшую тетрадь. Впоследствии, уже после его смерти, издавая второй том «Капитала», Энгельс включил эту рукопись в книгу как главу «Накопление и расширенное воспроизводство».

А в предисловии к третьему тому «Капитала» Энгельс писал:

«Для главы III имелся целый ряд неоконченных математических вычислений, а также целая, почти законченная тетрадь, относящаяся к семидесятым годам и представляющая в уравнениях отношение нормы прибавочной стоимости к норме прибыли. (Энгельс имел в виду написанную Марксом в 1875 году работу «Норма прибавочной стоимости и норма прибыли, трактуемые математически». — Л. К.) Мой друг Самюэл Мур, выполнивший также большую часть английского перевода первой книги, взялся обработать для меня эту тетрадь, к чему он в качестве старого кембриджского математика был несравненно более способен. Из его резюме я составил затем главу III, пользуясь для этого кое-где и основной рукописью».

Именно Мура первого посвятил Маркс в свои планы, которые он долго и любовно вынашивал — вывести в математической формуле «главные законы» экономического движения. В конце мая 1873 года он, больной, приехал в Манчестер показаться доктору Гумперту. Гумперт был в отъезде (возвратившись, он предписал Марксу ограничить свое рабочее время самым большим четырьмя часами в день), и Маркс часто встречался и подолгу беседовал с Муром. В эти дни он пишет Энгельсу, который к тому времени уже перебрался из Манчестера в Лондон:

«Я рассказал здесь Муру одну историю, с которой *privatim* * долго провозился. Но он думает, что вопрос неразрешим или, по крайней мере, *pro tempore* **, неразрешим ввиду многих и большей частью еще лишь подлежащих обнаружению факторов, относящихся к этому вопросу. Дело в следующем: ты знаешь таблицы, в которых цены, учетный процент и т. д. и т. д. представлены в их движении в течение года и т. д., в виде восходящих и нисходящих зигзагообразных линий. Я неоднократно пытался — для анализа кризисов — вычислить эти *up and downs* *** как неправильные кривые и думал (да и теперь еще думаю, что с достаточно проверенным материалом это возможно) математически вывести из

* *privatim* — между нами говоря (лат.).

** *pro tempore* — временно (лат.).

*** *up and downs* — повышения и понижения (англ.).

этого главные законы кризисов. Мур, как я уже сказал, считает задачу пока невыполнимой, и я решил до поры до времени отказаться от нее».

Пожалуй, нельзя сказать, что, расхолаживая Маркса, Мур был совсем уж неправ. Задача, к которой подбирался Маркс, была бесконечно трудна. Настолько трудна, что и нынешняя математическая экономика все еще топчется на ее подступах.

Впрочем, и некоторые современные Марксу ученые пытались вводить те или иные достижения высшей математики в политэкономии, и эти работы, естественно, не могли остаться вне его поля зрения. Его «научный друг» Максим Максимович Ковалевский вспоминал о временах своего знакомства с Марксом: «Он возобновил также занятия математикой, дифференциальными и интегральными вычислениями для того, чтобы сознательно отнестись к только что возникавшему тогда математическому направлению в политической экономии, во главе которого мы находим ныне таких ученых, как Эджворс и каким во времена Маркса являлся уже Джевонс».

Положим, Ковалевский (он мало разбирался в математике, да и с Марксом был знаком довольно непродолжительное время) тут ошибается — едва ли Маркс столь пристально изучал математический анализ с единственной лишь целью разобраться в том или ином направлении в политэкономии. Но одно ясно: экономические исследования настоятельно требовали от него углубленных знаний математики, а эти знания обещали, в свою очередь, новые, неожиданные возможности экономического анализа.

3

Но что же все-таки интересовало Маркса в самой математике?

Пожалуй, он и сам затруднился бы в первые годы ответить на такой вопрос. Во всяком случае в его заметках нет никаких специальных указаний на то, как и почему математика из вспомогательного средства в экономических исследованиях превратилась для него в предмет самостоятельного изучения. Рукописи распадаются на две неравные части, и там и там Маркс обращается к самым разным разделам математики, но если

вначале изучение элементарной математики было необходимо ему для решения экономических задач, то в последние годы обращение к алгебре и геометрии связано всегда с желанием глубже разобраться в проблемах анализа.

Сейчас, в век математизации всех наук, широко известны слова из воспоминаний Поля Лафарга о том, что Маркс «считал также, что наука только тогда достигает совершенства, когда ей удастся пользоваться математикой». Менее известна фраза, непосредственно предшествующая этим словам: «В высшей математике он находил диалектическое движение в его наиболее логичной и в то же время простейшей форме». Лафарг нашел очень точные слова, говоря о математических увлечениях Маркса. Анализ бесконечно малых, хоть и созданный метафизиками, был, по сути, пересыщен диалектикой. Переходы от конечного к бесконечному. Попытка описать движение, дать его математическую картину — противоречивую в своей основе, ибо всякая картина по необходимости есть нечто неподвижное, и во все неясно, как с помощью таких «неподвижностей», как точка в пространстве и момент во времени, можно отобразить движение. Сам метод анализа, требовавший сначала полагать, что приращения величин существуют, а затем устремлять их к нулю. Наконец, история возникновения анализа, который появился, казалось бы, неожиданно, «как бог из машины», и в то же время (Марксу это было очевидно!) не мог не уходить корнями в предшествующие разделы высшей алгебры...

«Элементарная математика, математика постоянных величин, движется, по крайней мере в общем и целом, в пределах формальной логики; математика переменных величин, самый значительный отдел которой составляет исчисление бесконечно малых, есть по существу не что иное, как применение диалектики к математическим отношениям», — писал Энгельс в «Анти-Дюринге» и продолжал свою мысль в заметках к «Диалектике природы»: «...Диалектическое отношение уже в дифференциальном исчислении, где dx бесконечно мало, но тем не менее действенно и производит все».

Для Маркса было чистым наслаждением разбираться во всем этом.

Есть и еще одно, вполне правдоподобное, предположение о том, почему сердце Маркса потянулось к математике: быть может, Маркс, вспоминая свои юношеские увлечения Гегелем, захотел в зрелом возрасте еще раз вступить с ним в логическую дуэль и выбрал классическое оружие — математику.

Гегель был знатоком математики, о чем Маркс и Энгельс считали своим долгом напоминать всякому, кто, по незнанию или забывчивости, утверждал обратное.

Весной 1865 года, через три с лишним десятилетия после смерти Гегеля, Энгельс в письме сурово отчитал философа Фридриха Ланге: «Я не могу не упомянуть о Вашем замечании по поводу старика Гегеля, которому Вы откачиваете в глубоком математическом и естественнонаучном образовании. Гегель знал математику настолько, что никто из его учеников не был в состоянии издать оставшиеся после него многочисленные математические рукописи. Единственный человек, знающий, насколько мне известно, достаточно и математику и философию для того, чтобы это сделать, — это Маркс».

И Энгельс заключает письмо словами: «Я, конечно, теперь больше уже не гегельянец, но чувствую все еще большое почтение и привязанность к великому старику». Маркс тоже многому научился у «великого старика». Даже в Марксовой нелюбви к арифметике видится нечто гегелевское — тот недаром ведь говорил, что в арифметике мышление «движется в сфере безмыслия».

Гегель не только хорошо знал математику — он считал ее необходимым слагаемым в сумме знаний, потребных философу. Когда молодой ротмистр русской гвардии Борис Икскуль, из прибалтийских помещиков, решил заняться своим образованием и направился прямо в Гейдельберг к Гегелю, тот прежде всего посоветовал ему начать с алгебры, естествознания, географии и латинского языка. И лишь через полгода, лично проэкзаменировав прилежного ученика, Гегель дал ему наставления по изучению философии.

Гегель владел математикой настолько свободно, что, будучи еще ректором Нюрнбергской гимназии, где преподавал философию и религию, в случае необходимости заменял учителей высшей математики. Но нет нужды

ссылаться на гимназические уроки: в «Науке логики», его важнейшем сочинении, главной книге его жизни, десятки страниц посвящены количеству, числу, мере, а главное, бесконечности,— математике в целом и дифференциальному исчислению в частности. И предшествовало написанию этих глав тщательное изучение трудов древних и новых математиков и глубокое постижение алгебры.

Он не только дал новое определение математики, свободное от торгашеского преклонения перед количеством и довольно точно устанавливающее границы математики, ее роль и место в системе наук. Он увидел и истинное место дифференциального исчисления в боевых порядках математики, утверждая, что область анализа — это качественно новая область, и потому любая попытка свести анализ к элементарной математике, ликвидировать качественный скачок между ними обречена с порога на неудачу. В примечании «Цель дифференциального исчисления, выведенная из его «приложения», Гегель пишет: «...По методу дифференциального исчисления сразу видно, что он изобретен и установлен не как нечто самодовлеющее». Не элементарная математика по собственному почину произвела из себя на свет математический анализ — ее побудили к этому потребности естествознания и техники. И далее, уже прямо метя в то «шарлатанство» и «фокусничество», в те, как он выражался, «кунштюки», которыми создатели анализа пытались оправдать свои «противозаконные» действия, утверждает: «Видимость случайности, являемая дифференциальным исчислением в его приложениях, значительно уменьшилась бы, если бы отдавали себе отчет в характере тех областей, в которых приложение может иметь место, и в своеобразных потребностях и условиях этого приложения». Эта мысль прямо продолжена у Энгельса в его «Диалектике природы», где он говорит об аналогии дифференциального исчисления с известными процессами природы: «...как только математики укроются в свою неприступную твердыню абстракции, так называемую чистую математику, все эти аналогии забываются; бесконечное становится чем-то совершенно таинственным, и тот способ, каким с ним оперируют в анализе, начинает казаться чем-то совершенно непонятным, противоречащим всякому опыту и всякому смыслу».

И при всем том Гегель умудрился рассматривать развитие математики всего лишь как ответ саморазвития логических категорий, искаженный, испорченный вмешательством этих самых «приложений» и «применений». И даже Лагранжа — самого близкого ему математика — хвалит не за попытку вскрыть реальные отношения между математикой конечного — алгеброй и математикой бесконечного — анализом, а за то, что Лагранж вводит в анализ понятие производной якобы «из головы», извне, произвольным и необязательным способом.

Гегель открыто утверждал, что никакой диалектики в математике нет и быть не может: внутри нее нет связи, нет переходов, один из ее разделов никак не связан с другим. Диалектическая математика для Гегеля — квадратный круг, полная бессмыслица. И он с удовлетворением суммировал бесчисленные попытки обосновать анализ на почве самой математики, каждая из которых кончалась крахом. Он считал, что иначе и быть не могло, и лишь поражался упрямству математиков.

Мог ли Маркс не принять вызов? Особенно теперь, когда он окончательно избавился от юношеских восторгов перед стройностью гегелевской философской мысли, а в самой математике разобрался, пожалуй, глубже, чем кумир его юности...

Впрочем, полемический запал не обязательно сразу же был заложен между строк математических рукописей Маркса. Ведь не исключено, что сами занятия высшей математикой диктовались желанием еще глубже понять Гегеля. С тех давних пор в памяти Маркса должно было сохраниться ощущение, которое испытывал, читая Гегеля, почти всякий настоящий философ. Недаром ведь Ленин в «Философских тетрадах» писал, что некоторые утверждения Гегеля непонятны без знания высшей математики. Вполне могло случиться и так: раз и навсегда покончив, казалось бы, с критикой Гегеля, Маркс много лет спустя вновь вернулся к этому вопросу, — ему показалось, что остались какие-то невыясненные частности. А то, что для этого выяснения надо разобраться в сложнейших вопросах высшей математики, Маркса, конечно, остановить не могло...

В «Науке логики» Гегель попытался решить проклятый вопрос бесконечно малых: нуль они или не нуль? «В уравнении... x и y , как таковые, должны... обозна-

чать собой некоторые величины; это значение совершенно утрачивается в так называемых бесконечно малых приращениях. dx , dy суть уже вовсе не величины и не должны обозначать собой величины; они имеют значение только в своем отношении, они имеют смысл только как моменты. Они уже не суть нечто, нечто, взятое как величина, они не суть конечные приращения; однако они не суть также ничто, это не лишенные определения нули. Вне своего отношения они чистые нули и должны быть приняты лишь как моменты отношения, как определения дифференциального коэффициента $\frac{dy}{dx}$.

Гегель вознамерился здесь объяснить, истолковать уже сделанное до него математиками — и тем ограничился. Маркс, начавший свое исследование от той же отправной точки, не только в значительной мере «объяснил казус», но и выдвинул продуктивную философскую — и математическую! — идею о дифференциале как оперативном символе, которая, будучи повторно высказана несколько десятилетий спустя другим ученым, послужила базой для нового и оригинального построения курса анализа.

Не правда ли, какая неожиданная иллюстрация знаменитой мысли о том, что если раньше философы лишь объясняли мир, то теперь задача их — изменить его!

5

...Узкая, необычная для Марксовых рукописей полоска бумаги, но на ней — его характерный почерк. Это — приложение (Маркс назвал его «аппендиксом») к одному из писем Энгельсу, дата которого, как уже было сказано, известна лишь ориентировочно.

«Ты как-то просил меня во время моего последнего пребывания в Манчестере объяснить дифференциальное исчисление. На следующем примере ты сможешь полностью уяснить себе этот вопрос. Все дифференциальное исчисление возникло первоначально из задачи о проведении касательных к произвольной кривой через любую ее точку. На этом же примере я и хочу пояснить тебе существо дела».

Следующие за этим строки (полностью они приведены в «Интермеццо», предшествующем этой главе) составляют самую раннюю по времени часть рукописей

Маркса по высшей математике. А самая поздняя написана в последние годы его жизни, точнее, не «написана», а «писалась», потому что смерть не дала ему выполнить замысел: закончить большую, последнюю свою работу — обосновать дифференциальное исчисление, раскрыть его природу и диалектику. И словно предчувствуя скорую кончину, он решает выбрать из своих черновиков самое главное, переписать начисто и отослать Энгельсу. Таких работ должно было получиться три, но Энгельс ознакомился только с двумя, третью, последнюю, Маркс так и не успел дописать.

Маркс, которому давно уже было за шестьдесят, больной и усталый, надломленный смертельным недугом жены, писал эти страницы с дерзким задором юности, он писал их сочным языком человека, знающего цену острому слову и острой мысли. И Энгельс ответил ему мальчишески восторженно: «Вчера, наконец, я набрался храбрости проштудировать без пособий твои математические рукописи и был рад убедиться, что не нуждаюсь в книгах. Прими по этому поводу мои комплименты. Вещь ясна, как солнце, так что, право, диву даешься, почему математики так упорно настаивают на том, чтобы окутывать ее тайной». И заканчивает письмо в том же ключе: «Эта штука так меня захватила, что я не только весь день думал о ней, но и во сне: в прошлую ночь мне приснилось, что я дал одному парню свои запонки для дифференцирования, а он с ними удрал».

Между этими манускриптами, написанными специально для Энгельса — между «аппендиксом» и двумя последними работами, — лежат пятнадцать лет жизни и немалое число страниц, составляющих самую интересную часть Марксова математического наследства.

6

«Я работаю теперь, как лошадь. ...В перерывах между работой — нельзя же все время писать — занимаюсь дифференциальным исчислением $\frac{dx}{dy}$. У меня не хватает терпения читать что-нибудь еще. Всякое другое чтение гонит меня обратно к письменному столу».

Урывками, похищая минуты у часов, отданных «Капиталу», старался Маркс уже в те весенние дни 1865 года понять, отчего так странно получается с дифферен-

циальным методом: строго говоря, он весь — сплошное нарушение математики, а результаты неизменно получаются правильными. «...Мы дошли до того,— писал Энгельс в «Анти-Дюринге»,— что большинство людей дифференцирует и интегрирует не потому, что они понимают, что они делают, а просто потому, что верят в это, так как до сих пор результат всегда получался правильным». Но не мог же Маркс, в самом деле, примириться с советом отчаявшегося Даламбера: «Идите вперед, а вера придет!». Галльское легкомыслие этой фразы было не по душе Марксу. «Идите вперед» — значит, пользуйтесь всеми известными правилами дифференцирования и не ломайте голову над тем, откуда они появились. Постепенно еретические идеи сами выйдут из вашей головы — каждый новый удачный вояж под «дифференциальным парусом» приучит к мысли, что с ним не страшны никакие математические штормы. «Вера придет».

Вера! Этого еще не хватало математике!

«Те глупости и нелепости, которыми математики не столько объясняли, сколько извиняли этот свой метод, приводящий странным образом всегда к правильным результатам, превосходят самое худшее... фантазерство натурфилософии (например, гегелевской), по адресу которого математики и естествоиспытатели не могут найти достаточных слов для выражения своего ужаса. Они сами делают — притом в гораздо большем масштабе — то, в чем они упрекают Гегеля...»

Подбор резких слов и нелестное сравнение не случайны: Энгельс чутко уловил настроение своего друга. Хотя слова эти он написал много позже, но, надо думать, ему вспоминался и «аппендикс», и «математические» письма Маркса, и он вновь сопереживал с ним прекрасную злость человека, которому мало двадцати четырех часов в сутках.

И все-таки наступил момент; когда Маркс смог позволить себе взяться за задачу, к которой давно тянулись его руки. Правда, все получилось не совсем так, как хотелось бы — не то, чтобы по-настоящему высвободилось время, а просто он был очень нездоров. «После 1870 г. снова наступила пауза, обусловленная главным образом болезненным состоянием Маркса. По обыкновению, он заполнял это время изучением; агрономия, американские и в особенности русские поземельные отношения, денежный рынок и банки, наконец, естественные

науки: геология и физиология, и в особенности самостоятельные математические работы составляют содержание многочисленных тетрадей Маркса с выписками, относящихся к этому времени». Слова эти из предисловия Энгельса ко второму тому «Капитала», конечно, общеизвестны. Но далеко не все знают, как храбро сражался в те годы больной Маркс с задачей, которую и по сию пору нельзя считать полностью решенной, несмотря на то, что попыткам обосновать дифференциальное исчисление посвящены сотни книг, составляющие самостоятельную отрасль математической литературы.

7

Итак, надо еще раз применить испытанное оружие диалектики. Для Маркса это значило в первую очередь рассмотреть вопрос исторически — откуда что взялось и где в старом зародились ростки нового. Ничто в природе не возникает на пустом месте. Никакой пропасти между обычной — низшей — и основанной на анализе бесконечно малых — высшей — математикой существовать не должно, наоборот, обязательно есть переход, но математики, даже самые великие среди них, его не заметили: ведь если они и были философами, то все без исключения метафизиками. Именно потому их так пугало, что иные положения высшей математики казались совершеннейшим абсурдом с точки зрения низшей — как выглядели, например, почти все операции с исчезающе малыми величинами, которые то надо, а то не надо принимать в расчет.

Энгельс, который как раз в эти годы работал над своей «Диалектикой природы» и, постоянно общаясь с Марксом, был в курсе всех его проблем и интересов, писал в своей книге о том, как развитие наук заставило ученых девятнадцатого века стихийно, помимо их воли, «перековываться» из метафизиков в диалектиков: «...Известное замешательство вызвала уже высшая математика, которая рассматривает вечную истину низшей математики как преодоленную точку зрения, часто утверждает нечто противоположное ей и выставляет положения, кажущиеся представителю низшей математики просто бессмыслицей».

По одним только этим словам видно, как проникся Энгельс идеями Маркса. Но Энгельс продолжает:

«Нет ничего комичнее, чем жалкие уловки, увертки и вынужденные приемы, к которым прибегают математики, чтобы разрешить это противоречие, примирить между собой высшую и низшую математику, уяснить себе, что то, что у них получилось в виде неоспоримого результата, не представляет собой чистой бессмыслицы,— и вообще рационально объяснить исходный пункт, метод и результаты математики бесконечного».

«Методом и результатами математики бесконечного» Маркс собирался поглубже заняться позже, но уже с самого начала он был безусловно убежден, что «исходный пункт» ее следует искать в недрах «низшей» математики, что корни анализа бесконечно малых величин исходят из той математической почвы, где оперируют с самыми обычными, вполне конечными количествами.

Но одно дело быть уверенным, что поиски должны дать результат (это само по себе половина успеха), а другое — знать, где искать. Маркс опять прибегает к обычному для него методу — он самым тщательным образом изучает всю предысторию вопроса. Скоро он уже четко видит, где пролегает условная граница между двумя «сортами» математики. Бином Ньютона — последний пограничный столб элементарной алгебры. Теорема Тейлора (и ее частный случай теорема Маклорена) — аванпосты высшей математики. Бином — царство конечного. Теоремы — это уже ряды, число членов которых не имеет счета...

Поначалу у Маркса появляется соблазнительная мысль — все крайне просто: «II. Теорема Тейлора основана на переводе биномиальной теоремы с алгебраического языка на дифференциальный способ выражения». Странная пунктуация цитаты объясняется тем, что она — заглавие одного из разделов рукописей, а смысл ее очевиден из фразы, написанной на полях: «Фактически все заимствовано из алгебры, даже *последовательное дифференцирование*...»

Марксу, вероятно, казалось, что он приближается к разгадке тайны дифференциального исчисления. В словах, которые он употребляет по отношению к биному Ньютона, звучат нотки восторга: «Открытие Ньютоном биномиальной теоремы... произвело революционный переворот во всей алгебре... [Она] является также главной основой дифференциального исчисления». Но ведь и бином, и дифференциальное исчисление — и то и другое —

создания ньютоновского гения. И в душу Маркса закрадывается подозрение: а что если Ньютон уже знал и теорему Тейлора, и теорему Маклорена? Что если он вывел их сам для себя, получил «втихомолку» свои результаты прямо из применения биномиальной теоремы?»

Мысль эта долго не дает покоя Марксу, она перекоачивает из тетради в тетрадь. Он подозревает другого гения в том, что и тот также был способен извести кипы бумаги, чтобы потом сказать людям всего несколько отточенных предложений... «Не обстояло ли дело так, что Ньютон, поведав миру только свои результаты, как это он делает, например, в самых трудных случаях в *«Arithmetica Universalis»*, втихомолку вывел для своего личного потребления из открытой им биномиальной теоремы и Тейлорову, и Маклоренову теорему?» — еще раз спрашивает себя Маркс. И решает, что надо, наконец, покончить с сомнениями.

«На это можно с полной уверенностью сказать: нет, — следуют решительные строки в математических рукописях. — Он не был из тех, которые предоставляют своим ученикам возможность присвоить себе такое открытие. В действительности он был еще слишком поглощен разработкой самих дифференциальных операций, которые у Тейлора и Маклорена предполагаются уже имеющимися и известными. К тому же, как свидетельствуют его первые элементарные формулы исчисления, Ньютон явно пришел к ним первоначально, отправляясь от механических, а не принадлежащих чистому анализу исходных пунктов.

С другой стороны, что касается Тейлора и Маклорена (Маркс и их тоже неоднократно пытался заподозрить в том, что они все знали, но молчали. — Л. К.), то они с самого начала в своей работе оперируют на почве самого дифференциального исчисления, и ничто их не побуждало поэтому доискиваться наивозможно более простых алгебраических исходных пунктов этого исчисления, тем более что спор между последователями Ньютона и Лейбница вращался вокруг определенных, уже готовых форм исчисления, как только что открытой, совершенно особой математической дисциплины, до которой обычной алгебре, как до звезды небесной, далеко».

Так выясняет для себя Маркс психологическую сторону вопроса. Он не только убеждается, что до него

никто не искал «алгебраических прообразов дифференцирования», но и понимает, почему так получилось: «Я не думаю, чтобы какой-нибудь математик... доказал или хотя бы заметил необходимость этого перехода от первого, алгебраического метода... Для этого они были слишком поглощены материалом исчисления».

Еще несколько предложений, и Маркс считает вопрос исчерпанным: «Подлинные и в силу этого простейшие взаимосвязи нового со старым открываются всегда лишь после того, как это новое само приобретет уже завершённую форму, и можно сказать, что в дифференциальном исчислении это возвращение (отнесение) назад было осуществлено теоремами Тейлора и Маклорена. Поэтому только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе».

8

И Маркс берется за Лагранжа всерьёз. В сущности, на него одного у Маркса надежда: ведь Маклорен с Тейлором подвели его. Их теоремы (которые Маркс называл «колоссальными обобщениями»), хотя и родственны биному Ньютона, но все-таки развивались на почве дифференциального исчисления, и Маркс никак не мог считать, что они и есть желанная отгадка — те алгебраические корни высшей математики, которые он искал.

Лагранж поначалу увлек Маркса прозрачной логикой мысли, да и сама идея подвести, пусть задним числом, алгебраический фундамент под уже готовое здание дифференциального исчисления была близка Марксову сердцу. «В отличие от других архитекторов, наука не только рисует воздушные замки, но и возводит отдельные жилые этажи здания, прежде чем заложить его фундамент». Нет, эта фраза взята не из математических рукописей — мы помним ее по известнейшей Марксовой работе, никакого отношения не имеющей к математике. Но метод — подход к предмету — у Маркса был всегда один и тот же, шла речь о политической экономии или же о естественной дисциплине. («...Принимать *одну* основу для жизни, другую для *науки* — это значит с самого начала допускать ложь», — писал он еще в молодые годы).

...Немало добрых слов посвящено Лагранжу в Марксовых рукописях. Но чем больше ценил Маркс Лагранжа, чем больше симпатизировал его начинанию, тем горше ему было разочаровываться в Лагранже. «Теория аналитических функций, содержащая принципы дифференциального исчисления, освобожденные от всякого рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов и флюксий, сведенные к алгебраическому анализу бесконечных количеств» — так по-боевому назвал Лагранж свою книгу. Но, увы, Лагранж со своим делом не справился — ему все-таки пришлось, хоть и в неявной форме, апеллировать к бесконечно малым, и Маркс с огорчением вынужден был это заметить: «...Лагранж действительно освобождается от всего, что представляется ему метафизической трансцендентностью во флюксиях Ньютона, в бесконечно малых разного порядка Лейбница, в теории пределов исчезающих величин, в подстановке символа $\frac{0}{0} (= \frac{dy}{dx})$ вместо дифференциальных коэффициентов и др. Это, однако, не мешает ему самому, в применении его теории к кривым и т. д., постоянно пользоваться тем или иным из этих «метафизических» представлений». Мало того, и в главном, от-правном пункте своей работы — в попытке вывести теорему Тейлора не из дифференциального исчисления, а из чистой алгебры — Лагранж допускает жестокую натяжку. Маркс уличает его и с горечью пишет: этот вывод «представляется покоящимся на обмане». Таков суровый, но совершенно справедливый приговор, который Маркс вынес Лагранжу. И Маркс вынужден снова возвратиться к исходной точке: «В учебниках теперь даже вошло в моду показывать, что как из теоремы Тейлора и Маклорена можно вывести теорему о биноме, так и обратно. Однако нигде, даже у Лагранжа... эта связь между теоремой о биноме и двумя другими не раскрыта во всей ее девственной простоте, и здесь, как и всюду, важно сорвать с науки покров тайны».

С присущей ему тщательностью Маркс проштудировал не только сочинения самого Лагранжа, но и всех тех, кто пытался связать «алгебраический» метод Лагранжа, построенный на понятии «производной», с дифференциальным исчислением Лейбница, имеющим дело с символами для дифференциала. И здесь — теперь уже под его обстрел — попали труды математика Франкера,

«элегантного француза», учебник которого был когда-то сурово раскритикован Энгельсом за скверное изложение арифметики. Маркс, обращаясь к Энгельсу, пишет: «Один французский математик первой трети 19-го века — Бушарла, который, как и известный [тебе] «элегантный» француз, но совсем по-иному ясно связал дифференциальный метод с алгебраическим методом Лагранжа, говорит...» — Маркс пересказывает смысл очередного «казуса», с помощью которого Бушарла пытается оправдать самостоятельное существование дифференциала. Иронический оттенок относительно «ясности» проделанных манипуляций очевиден: Бушарла вводит заведомо ложную формулу, и Маркс действительно ясно показывает ее ложность. Что же касается Франкера, то он попросту утверждает, что дифференциал «является синонимом для производной и отличается от нее только обозначением».

И Маркс заключает свое исследование эпигонов Лагранжа:

«Итак, для того, чтобы «облегчить алгебраические операции», вводят заведомо ложную формулу, окрещивая ее именем «дифференциал».

9

Обманутый Лагранжем, Маркс отступает. Отступает, чтобы снова идти вперед, снова вчитываться в страницы математических трактатов.

Так появляется на свет очерк «Об истории дифференциального исчисления». Маркс раскладывает по полочкам все попытки обосновать дифференциальное исчисление. Он никогда не любил лишней мебели — таких полок всего три.

«Мистическое дифференциальное исчисление» — называет он первую. На ней создатели, корифеи — Ньютон и Лейбниц. Им приходилось, — конечно, отнюдь не по злой воле — приписывать дифференциалам таинственные, необъяснимые свойства — они и нули и не нули одновременно. Но иначе ничего не получалось: чтобы результаты всегда были правильными, приходилось в одних случаях принимать одну точку зрения, в других — другую. Маркс рассматривает самый простой пример и пишет: «...этот математически правильный результат ос-

новывается на столь же математически ложном в самом основании предположении... Иначе тот же результат был бы получен и предложен математическому миру не с помощью фокуса, а посредством алгебраической операции простейшего типа».

Ньютон, выводя правило дифференцирования произведения двух функций u и v , был вынужден «насильственно уничтожить» член $u'v't$, в который в качестве множителя входит бесконечно малая величина t . Ничего другого не остается делать и при выводе всех других формул дифференциального исчисления. Вот это-то и не устраивает Маркса. «...Почему насильственно уничтожаются стоящие на пути члены?» — спрашивает он. И разрешает собственное недоумение: «*Ответ* очень прост: это нашли чисто экспериментально».

И вот резюме, подводящее итог всему первому периоду в истории дифференциального исчисления — периоду Ньютона и Лейбница:

«Итак, сами верили в таинственный характер нового открытого исчисления, которое давало правильные (и притом в геометрическом применении прямо поразительные) результаты математически положительно неправильным путем. Таким образом, сами себя мистифицировали и тем более ценили новое открытие, тем более бесили толпу старых ортодоксальных математиков и вызывали с их стороны враждебные вопли, будившие отклик даже в мире неспециалистов и необходимые для прокладывания пути новому».

Читая эти строки математических рукописей Маркса, нельзя еще раз не вспомнить «Анти-Дюринга» и еще раз не подивиться глубине взаимопроникновения идей двух великих друзей. «...Почти все доказательства высшей математики,— писал Энгельс,— начиная с первых доказательств дифференциального исчисления, являются, с точки зрения элементарной математики, строго говоря, неверными. Иначе оно и не может быть, если, как это делается здесь, результаты, добытые в диалектической области, хотят доказать посредством формальной логики. Пытаться посредством одной диалектики доказать что-либо такому грубому метафизику, как г-н Дюринг, было бы таким же напрасным трудом, какой потратили Лейбниц и его ученики, доказывая тогдашним математикам теоремы исчисления бесконечно малых.

Дифференциал вызывал у этих математиков такие же судороги, какие вызывает у г-на Дюринга отрицание отрицания, в котором, впрочем, как мы увидим, дифференциал тоже играет некоторую роль. В конце концов те из этих господ, которые не умерли тем временем, ворча сдались, но не потому, что их удалось убедить, а потому, что решения получались всегда верные».

Слово «единомышленник», когда его применяют к Марксу и Энгельсу, полно удивительно глубокого смысла...

«Даламбер сорвал с дифференциального исчисления покров тайны и тем самым сделал огромный шаг вперед». Эта фраза относится уже ко второму периоду — Маркс называл его «рациональным». Есть и третий, «чисто алгебраический», в котором ведущая роль принадлежит Лагранжу.

Скрупулезно изучает Маркс все известные способы дифференцирования, конспектирует страницу за страницей, сравнивает один метод с другим, но не находит удовлетворения. И лишь убедившись, что ничего нового в книгах ему уже не почерпнуть, откладывает в сторону конспекты и пишет выкладку за выкладкой безо всяких отсылок к авторитетам. Так появляется его собственный способ дифференцирования, который Маркс назвал просто «алгебраическим».

К счастью, он успел написать несколько страниц, где эти мысли изложены не в форме разговора с самим собой, а как слова, обращенные к другому человеку. Маркс надписал на конверте: «Для Генерала» — так Лаура и Женни прозвали Энгельса за его военные занятия (статьи Энгельса о франко-прусской войне, напечатанные в 1870 году в «Pall Mall Gazette», привлекли внимание специалистов — и не удивительно, поскольку он точно предсказал битву при Седане и поражение французов; а за полтора десятилетия до этого, во время Крымской кампании, он напечатал в «New York Daily Tribune» обзоры военных действий, написанные с таким знанием дела, что американцы всерьез считали их автором генерала Скотта, главнокомандующего армией США).

Это и есть первое послание «Генералу» — Энгельсу, первая Марксова законченная математическая работа — «О производной функции».

«Сначала полагание разности, а затем обратное ее снятие приводит, таким образом, буквально к ничему. Вся трудность в понимании дифференциальной операции (как и в понимании отрицания отрицания вообще) заключается именно в том, чтобы увидеть, чем она отличается от такой простой процедуры и как ведет поэтому к действительным результатам».

Для Энгельса слова эти были «ясны, как солнце», потому, быть может, что в общении с Марксом он подверг себя в эти годы в области математики процессу «полного линяния», как признается он в предисловии к «Анти-Дюрингу». И результаты этого «линяния» столь ощутимы, что некоторые «математические» страницы этой книги, вызвавшей живейший интерес Маркса (он не только обсуждал с Энгельсом ее план, читал всю работу в рукописи, но даже написал сам главу об истории политэкономии), — математические страницы этой книги воспринимаются так, словно они вышли из-под пера Маркса. «...Еще разительнее отрицание отрицания выступает в высшем анализе, в тех «суммированиях неограниченно малых величин», которые сам г-н Дюринг объявляет наивысшими математическими операциями и которые на обычном языке называются дифференциальным и интегральным исчислениями. Как производятся эти исчисления? Я имею, например, в какой-нибудь определенной задаче две переменные величины x и y , из которых одна не может изменяться без того, чтобы и другая не изменялась вместе с ней в отношении, определяемом обстоятельствами дела. Я дифференцирую x и y , т. е. принимаю их столь бесконечно малыми, что они исчезают по сравнению со всякой, сколь угодно малой действительной величиной и что от x и y не остается ничего, кроме их взаимного отношения, но без всякой, так сказать, материальной основы, — остается количественное отношение без всякого количества. Следовательно, $\frac{dy}{dx}$, т. е. отношение обоих дифференциалов — от x и

от y , — равно $\frac{0}{0}$, но $\frac{0}{0}$, которое берется как выражение отношения $\frac{y}{x}$. Упомяну лишь мимоходом, что это отношение между двумя исчезнувшими величинами, этот фиксированный момент их исчезновения, представляет собой противоречие; но это обстоятельство так же мало

может нас затруднить, как вообще оно не затрудняло математику в течение почти двухсот лет. Но разве это не значит, что я отрицаю x и y , только не в том смысле, что мне нет больше до них дела,— так именно отрицает метафизика,— а отрицаю соответственно обстоятельствам дела? Итак, вместо x и y я имею в используемых мной формулах или уравнениях их отрицание, dx и dy . Затем я произвожу дальнейшие действия с этими формулами, обращаюсь с dx и dy как с величинами действительными, хотя и подчиненными некоторым особым законам, и в известном пункте я отрицаю отрицание, т. е. интегрирую дифференциальную формулу, вместо dx и dy получаю вновь действительные величины x и y ; на таком пути я не просто вернулся к тому, с чего я начал, но разрешил задачу, на которой обыкновенная геометрия и алгебра, быть может, понапрасну обломали бы себе зубы».

10

«Математические» страницы «Анти-Дюринга», особенно те из них, которые посвящены бесконечно малым,— это прямой отзвук Марксовых изысканий в области дифференциального исчисления. Энгельс выбирает для ответа Дюрингу и подробно развивает именно те вопросы, которые волновали в математике и Маркса, и которые они, безусловно, не единожды обсуждали с ним вдвоем.

Прежде всего, поскольку дифференцировать можно только функции, что вообще означает это слово? Что понимается под словами: «игрек есть функция от икс»? Простое объяснение, приготовленное Марксом для самого себя: «..значение y , для примера, меняется, когда на место x , например, подставляются численные значения 3, 4, 5 и т. д. Тут y называется функцией от x , потому что он должен подчиняться его приказу, как каждый функционер, хотя бы сам великий Вильгельм I, тоже от кого-нибудь зависит».

Итак, вот функция. Будем ее дифференцировать, то есть искать «производную от игрека по иксу», ту самую «эф-штрих от икс», о которой шла речь в «Интермеццо».

Как? Проще простого. Пусть x изменится на очень небольшую величину. Тогда и y , «подчиняясь его приказу», тоже отклонится от своего значения. Искомая

производная и есть отношение этих отклонений *икса* и *игрека*, но — и в этом весь ужас положения! — лишь когда отклонения стали бесконечно малыми. (Звучит главная музыкальная фраза «Интермеццо»:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Вот оно — «отрицание отрицания»! Сперва, чтобы найти производную, «полагали» разности, то есть считали, что отклонения существуют, а потом их «сняли», устремив к нулю. Пришли «буквально к ничему» — получилось знаменитое выражение $\frac{0}{0}$, под которое Маркс неоднократно подкапывался еще в своих алгебраических тетрадах.

«Так как в выражении $\frac{0}{0}$ испарился всякий след его происхождения и значения, то мы заменяем его на $\frac{dy}{dx}$, где конечные разности... появляются в символической форме как *снятые* или *исчезнувшие*... Утешение, за которое крепко держатся некоторые рационализирующие математики, что якобы количественно dy и dx в действительности являются лишь бесконечно малыми, [что их отношение] лишь близко к $\frac{0}{0}$, есть химера...»

И вот слова Энгельса, получившего это первое послание: «Вещь ясна, как солнце, так что, право, диву даешься, почему математики так упорно настаивают на том, чтобы окутывать ее тайной. Но это происходит из-за односторонности мышления этих господ. Решительно и без обиняков признать, что $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, — это не укладывается у них в черепе. И однако ясно, что $\frac{dy}{dx}$ лишь тогда может быть чистым выражением происходящего с x и y процесса, если исчезли даже последние следы *количеств* x и y и осталось лишь выражение происходящего процесса их изменения без всякого количества... Этот способ заслуживает величайшего внимания, в особенности потому, что он ясно показывает, что обычный метод, при котором пренебрегают $dx dy$ и т. д., *положительно неправилен*. Особенно великолепно при этом то,

что только когда $\frac{dy}{dx} = 0$, и только тогда, операция является математически абсолютно правильной».

Позже Энгельс писал Марксу:

«...Основное различие твоего и старого метода состоит... в том, что ты даешь *x*... *действительно изменяться*».

У Ньютона, Лейбница, Даламбера, Лагранжа — у всех у них величина меняется из-за того, что к ней «приращивается» другая величина — некая постоянная, которая существует заранее, сразу, «как плод рядом со своей матерью до того, как та забеременела». А Марксов метод построен так, чтобы отказаться от такого логического сдвига. Математическая величина во всех его рассуждениях меняется сама: не «приращение» готового куска, а развитие, не статика, а динамика. В математику вошло движение — и тогда лишь она стала «высшей». Так пусть ее формулы отражают это движение! Старая, как сама философия, проблема — не есть ли движение сумма неизменных состояний или, в известной формулировке апории Зенона, догонит ли Ахилл черепаху — явственно просвечивает сквозь формулы его математических рукописей.

11

Энгельсу не терпелось поделиться с кем-нибудь радостью, которую доставили ему математические работы Маркса. «...Я показывал однажды твоему Адольфу пример нового обоснования Марксом дифференциального исчисления», — сообщал он своему и Марксову другу и соратнику Фридриху Адольфу Зорге, члену I Интернационала и организатору его американской секции, двоюродному деду прославленного советского разведчика Рихарда Зорге. Адольф — это сын Фридриха Зорге, инженер-механик. Энгельс ничего не говорит о том, как Адольф отнесся к показанным ему материалам. Видимо, они его не заинтересовали. И не удивительно, инженеры ведь не задумываются над обоснованием тех или иных математических методов, они просто применяют их.

Среди друзей Энгельса были и крупные ученые: химик Шорлеммер, видный специалист по предельным углеводородам, фигура небывалая по тем временам — коммунист и член Королевского общества; знаменитый

зоолог Рей Ланкастер; были экономисты, социологи, историки. Но людей, достаточно знавших математику, не было никого. Никого, если не считать адвоката Самюэла Мура, переведшего на английский язык «Капитал» и «Манифест Коммунистической партии».

По нашим нынешним представлениям Мур был не слишком силен в высшей математике. Впрочем, у него самого на этот счет был несколько иной взгляд. К тому были достаточные основания.

Мур почерпнул свои математические знания из тех книг, по которым занимались в английских университетах и прежде всего в Кембридже. А там — и для британского склада мысли это естественно — до такой степени чтили Ньютона, что даже попытка пользоваться «континентальной» символикой — обозначениями Лейбница — долгое время расценивалась как «кошунственное прегрешение против памяти сэра Исаака». Маркс, конечно, хорошо знал об этом. «Вряд ли есть необходимость заметить, — писал он в своих математических работах, — что Ньютон господствовал в Англии вплоть до первых десятилетий XIX века». Деятнадцатый век был уже на исходе, а на Британских островах практически ничего не знали о той математике, что развивалась в Европе, хотя переплыть Ла-Манш и в ту пору было пустяковым делом.

(Харди, известный английский ученый, написал в 1917 году «Курс чистой математики», в котором постарался окончательно разрушить этот противоестественный для науки барьер. Переиздавая свой труд через двадцать лет, он предпослал книге любопытные слова: «Она была написана в то время, когда в Кембридже пренебрегали математическим анализом, и ее патетический стиль кажется теперь немного смешным. Если бы я переписал ее теперь, то я бы уже не писал (по выражению проф. Литтлвуда), как «проповедник, разговаривающий с каннибалами».)

Из-за культа Ньютона, культа флюксий и моментов английские математики сумели сильно отстать от своих европейских коллег: их понятия о дифференциальном исчислении оставались на «каннибальском» уровне. На континенте уже был создан в общих чертах современный математический анализ вместе с теорией пределов, уже были изданы труды Вейерштрасса, Дедекинда и Кантора, а на островах об этом почти ничего не слы-

шали. Математическая мысль Кембриджа отставала чуть ли не на полвека. Мур, как и Маркс, пользовался учебниками, которые устарели еще до того, как попали на полки библиотек. Но если Маркс, даже не будучи знаком с новейшими европейскими работами, сумел раздвинуть рамки английской школы, то Муру сделать это было не суждено.

И тем не менее это был единственный человек, с которым Маркс и Энгельс могли говорить о математике. Когда Маркс, увлеченный анализом, решил применить его в экономике, чтобы вывести внутренние законы экономического развития в математической форме, он обратился за советом именно к Муру. И ему же десять лет спустя Энгельс пересылает Марксовы математические труды. Мур принимается за их изучение — и не видит в них ничего, кроме того, что чертеж построения касательной к кривой, следующий из Марксова метода, совпадает с обычным, общепринятым. Но ведь всякий чертеж — это уже статика, неподвижность, неизменность, а в Марксовых рукописях речь идет о новом толковании динамики процесса!

Энгельс, разочарованный и огорченный, пишет Марксу в Вентнор:

«При сем 1) математическое исследование Мура. Вывод, что алгебраический метод есть не что иное, как замаскированный дифференциальный метод, относится, разумеется, только к его собственному методу геометрического построения... Я написал ему, что ты не придаешь никакого значения способу, каким кто-то делает для себя вещи наглядными путем геометрического построения. ...Ведь всякое графическое изображение *протекшего* процесса, *результата*, следовательно, величины, сделавшейся постоянной...»

Маркс отвечает Энгельсу сразу же, в день получения письма:

«Сэм, как ты тоже сразу заметил, критикует примененный мной аналитический метод тем, что спокойно отбрасывает его в сторону и занимается вместо этого геометрическим применением, о котором я еще не сказал ни слова.

Таким же манером я мог бы разделаться со всем... историческим развитием анализа, заявив, что оно *практически* существенно не повлияло на применение

дифференциального исчисления к геометрии, то есть на геометрическую интерпретацию».

Мур был на двенадцать лет моложе Маркса. Говорят, что в математике возраст играет немаловажную роль — крупнейшие свои открытия математики совершают, как правило, в первой половине жизни, когда свежи восприятия и не растрочен задор молодости. Маркс вошел в глубины математики на склоне лет, но вошел тем же «дерзким парнем», каким был на брюссельской эмигрантской квартире и каким оставался всю жизнь.

Этой дерзости и свежести не хватило Муру, хотя на его стороне были еще не прожитые им двенадцать лет жизни.

Того, что лежало на поверхности Марксовых рукописей, Мур не понял. Того, что было скрыто в их глубине, он попросту не увидел.

12

Заметим в скобках: у Самюэла Мура, лондонского адвоката, в математике в конце концов не более чем серьезного дилетанта (пусть даже и с кембриджским образованием), есть все-таки если не оправдание, то хоть извинение. Но можно ли оправдать математиков-профессионалов, а таковые, читавшие математические работы Маркса, но не понявшие их, видимо, существовали, хоть нам и неизвестны их имена.

В книге Франца Меринга, по общему признанию, одного из лучших биографов Маркса, есть такие слова: «Кроме изящной литературы Маркс обычно находил отдых еще в совершенно иной области духовного творчества. Особенно в дни душевных огорчений и тяжких страданий он часто искал убежище в математике, оказывавшей на него успокоительное влияние. Мы оставляем в стороне вопрос, действительно ли он сделал в этой области самостоятельные открытия, как утверждали Энгельс и Лафарг. Математики, рассматривавшие оставшиеся после него рукописи, держатся другого мнения». Меринг не указывает никаких подробностей, связанных с изучением Марксова математического наследства специалистами-математиками. Но ясно одно: кто бы это ни был и как бы внимательно он ни изучал рукописи Маркса, он все равно не мог прочесть их це-

ликом, потому что до самого последнего времени они не были расшифрованы и упорядочены. Рассчитывать же, что человек, как бы капитально он ни был подкован математически, сумеет пробраться сквозь Марксову скоропись, сквозь многоязычие его более чем тысячеязычного математического наследства,— рассчитывать на это не приходится никак.

Но есть и другая, пожалуй, еще более важная сторона дела.

«По-моему, математикам, постольку, поскольку они математики, нет нужды заниматься философией. К тому же это мнение не раз высказывали и многие философы». Слова эти принадлежат знаменитому французскому математику Анри Лебегу. В них очень четко выражена позиция, которую занимали практически все математики прошлого века. «Беспокойство по поводу оснований математики чаще всего возникает в критические моменты, когда кажется, что основополагающие идеи становятся шаткими, и математики вынуждены проверять их»,— это мнение профессора философии Гарвардского университета У. В. Куайна имеет под собой, видимо, достаточно твердую почву. Что же касается математики того времени, то положение дифференциального исчисления в ней отнюдь не казалось шатким. Наоборот, с помощью строгого определения основных понятий математического анализа, скрупулезным и точным описанием «действительного числа», «предела», «непрерывности», целой плеяде математиков девятнадцатого века, начиная с Коши, удалось временно вернуть равновесие колеблющемуся зданию анализа.

В то время когда Маркс, не знакомый с этими работами, искал выход своим сомнениям, современные ему математики пребывали в состоянии некоторой самоуспокоенности: процесс обоснования дифференциального исчисления представлялся им доведенным почти до конца. Но Маркс увидел выход из тупика не там, где забрезжил свет математикам, жившим в одни годы с ним.

Он проложил дорогу прямо к одному из направлений математики двадцатого века. Вот почему Маркс и современные ему математики кое в чем оказались как бы говорящими на разных языках. Это движение по разным дорогам и привело, вероятно, к тому, что математики девятнадцатого столетия — даже если бы им удалось разобраться в Марксовых записях — не разглядели

бы в них ничего, кроме возврата к старым, уже, казалось бы, разрешенным и преодоленным противоречиям, а математики наших дней обнаружили на страницах этих рукописей немало идей, столь близких их собственным.

Впрочем, об этом — дальше. А пока следует сказать, что нет, конечно, никаких оснований категорически утверждать, что прав Франц Меринг, весьма сдержанно повествующий о признании математиками значения оставшихся после Маркса математических рукописей, а не Поль Лафарг, который писал в своих воспоминаниях: «В это время — время душевных страданий — он написал работу по исчислению бесконечно малых величин, которая, по отзывам читавших ее специалистов, имеет большое значение». Тем не менее нам неизвестен ни один из математиков тех времен, который бы сумел проникнуть в суть того, что интересовало Маркса в дифференциальном исчислении.

13

На страницах Марксовых рукописей, где строгие математические формулы уживаются с такими, например, фразами, как «нисхождение в ад через 0», где переплетаются английские, немецкие и французские слова, где сосуществуют азбучные истины, выписанные из учебников, и собственные мысли Маркса, — десятки раз встречаются абзацы, где Маркс снова и снова возвращается к одной и той же мысли.

Мысль эту можно выразить в нескольких словах: дифференциал есть оперативный символ. Не некоторая величина, обладающая особыми свойствами, а символ определенной операции. Пользуясь словами Энгельса, «выражение происходящего процесса... без всякого количества». Энгельс, прочитав Марксово послание, тонко почувствовал эту сторону дела. «Тебе нечего опасаться, что в этом тебя опередил какой-нибудь математик», — пишет он в ответ. И, действительно, Маркс первым понял, что подобное определение дифференциала имеет право на жизнь. Более того, он показал, как именно, в результате какого скрытого процесса обретает дифференциальный символ право на самостоятельное существование.

Обдумывая эти идеи, Маркс, вероятно, вспоминал первые годы своих математических занятий. Феллер с Одерманном, кроме дотошности и пунктуальности, внесли в свою «Коммерческую арифметику» одну любопытную особенность: они рассматривали все арифметические действия как некие операции, которые изменяют либо форму, либо значение числа. Например, сократить дробь — это изменение ее формы, а вот применить к ней сложение, вычитание, умножение или деление — это уже изменение ее значения. Таким образом, Феллер и Одерманн подходят к одному из чисел, участвующих в арифметических действиях, как к некоему оператору, изменяющему другое число.

«Ньютон и Лейбниц, как и большинство их последователей, действуют с самого начала на почве дифференциального исчисления, а потому и дифференциальные выражения служат им сразу оперативными формулами для отыскания реального эквивалента. Все дело в этом».

«Все дело» в том, что сначала ищут производную функции. Это, по выражению Маркса, «реальный» процесс. С ним были знакомы все математики, занимавшиеся дифференциальным исчислением. Но как только полученную производную обозначили и таким способом появился «символический дифференциальный коэффициент», происходит довольно забавная история: «Первоначально возникший как символическое выражение «производной», т. е. уже выполненных операций дифференцирования, символический дифференциальный коэффициент теперь играет роль символа тех операций дифференцирования, которые только предстоит еще произвести». Значок $\frac{dy}{dx}$ становится «оперативной стратегией», подлежащей выполнению независимо от вида функции! Он указывает, предписывает, командует, что и как надо сделать с функцией, чтобы получить ее производную.

Происходит «оборачивание метода» — «оборачивается постановка вопроса, поскольку вместо того, чтобы искать символическое выражение для реальных дифференциальных коэффициентов (для $f'(x)$) ищется реальный дифференциальный коэффициент для его символического выражения». Символ устремляется из прошлого в будущее, из указания на уже содеянное он превраща-

ется в приказ о том, что еще только предстоит совершить.

«...Не подлежит сомнению, что на этот поворот, на это оборачивание ролей никто из математиков не обратил внимания, и тем более никто из них не доказал необходимость этого на каком-либо совершенно элементарном дифференциальном уравнении». Маркс нисколько не заблуждается на этот счет, он совершенно отчетливо сознавал, что идет по нехоженной тропе. И в самом деле, подобные идеи впервые появились в математической литературе лишь много десятилетий спустя, когда начала создаваться общая теория символических исчислений.

И в первой работе — «О понятии производной функции» и во второй — «О дифференциале» можно найти немало цитат, каждая из которых вполне выражает мысль Маркса. Он стремился отшлифовать ее, это совершенно явственно чувствуешь, листая рукописи, наконец поселить ее у себя в голове и подарить Энгельсу в самом ярком, афористичном, очевидном и вместе с тем парадоксальном виде. Отсюда фразы вроде: «Односторонне появились они на свет, тени без тела, которое их отбросило» или «Множитель... есть пуповина, которая указывает на происхождение производной». Отсюда — непрерывное, навязчивое даже, повторение слов об оборачивании метода, о смене ролей, о «символическом злключении», которое происходит со значком $\frac{dy}{dx}$. И на-

конец, итоги: «...дифференциальное исчисление выступает как некое специфическое исчисление, которое оперирует уже самостоятельно, на собственной почве, ибо исходные пункты его $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ суть лишь ему принадлежащие и его характеризующие математические величины...» Они «тотчас же превращаются в *оперативные символы*, в символы процессов, которые должны быть выполнены».

Маркс, вероятно, видел «оборачивание метода» не в одной лишь математике. Он, всегда живо интересовавшийся всем, что связано с познанием человеком окружающего мира, прекрасно знал и позицию Канта, который считал, что еще до начала процесса познания человек по собственному произволу изобретает некоторые мыслительные орудия, и точку зрения Гегеля, со-

гласно которой без познавательных инструментов — понятий, идей, заданных заранее, «мы имели бы перед собой ночь, в которой все кошки серы», и мнение Декарта, который постулировал врожденные идеи, с самого начала заключенные в интеллекте познающего субъекта. Но ему, вне сомнения, был известен и вполне материалистический подход к этому вопросу Баруха Спинозы, считавшего, что в самом процессе постижения истины — как это и произошло с Марксом, когда он работал над обоснованием дифференциального исчисления — рождаются орудия для дальнейшего продвижения вперед, они берутся из наличного материала, происходит «оборачивание метода», при котором инструменты и формулы, только что полученные из ранее хорошо известных материалов и теорем, сами становятся орудиями, с помощью которых эти материалы и теоремы можно исследовать, улучшать и развивать. Самому духу Марксовых математических изысканий, приведших его к идее оборачивания метода, созвучны слова Спинозы, великого мыслителя, жившего за два века до него:

«Здесь дело обстоит так же, как и с материальными орудиями... Чтобы ковать железо, нужен молот, а чтобы иметь молот, необходимо его сделать; для этого нужен другой молот и другие орудия; а чтобы их иметь, также нужны будут другие орудия, и так до бесконечности; таким образом кто-нибудь мог бы попытаться доказать, что у людей нет никакой возможности ковать железо. Но подобно тому как люди изначала сумели природными орудиями... сделать некоторые наиболее легкие... так и разум природной своей силой создает себе умственные орудия, от которых обретает другие силы для других умственных работ, а от работ — другие орудия, т. е. возможность дальнейшего исследования, и так постепенно подвигается, пока не достигнет вершины мудрости».

14

«...Только Лангранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебраической основе. Быть может, ему предшествовал в этом отношении Джон Ланден, английский математик середины 18 века, в его *«Residual Analysis»*. Но чтобы составить себе

окончательное суждение об этом, я должен предварительно посмотреть эту книгу в Музее».

Намерение изучить работу ныне совершенно забытого землемера и члена Королевского общества неоднократно зафиксировано на страницах математических рукописей Маркса. Оно продиктовано, очевидно, словами Лагранжа, которые Маркс не мог не прочитать: «Один искусный английский геометр, сделавший в анализе важные открытия, предложил в последнее время заменить метод флюксий, которому до сих пор пунктуально следовали все английские геометры, другим методом, чисто аналитическим и аналогичным дифференциальному...» Однако Марксу так и не удалось достать «Анализ вычетов» Джона Ландена в библиотеке Британского музея. Впрочем, он едва ли нашел бы там что-либо для себя новое, разве только еще раз убедился, что в своем стремлении подвести под все дифференциальные операции строгую и логически безупречную базу он был не одинок. Ланден, так же как и Лагранж, пытался найти простые и всегда верные правила, по которым можно было бы для любой функции тут же построить ее производную.

Этот набор правил, безотказно срабатывающий во всех случаях жизни, очевидно, лишал сна почти каждого мыслителя и семнадцатого и восемнадцатого века. Универсальный метод заменил собой философский камень — нечто, завладев которым, знаешь, как превратить что угодно во что угодно. Этот всепригодный рецепт искал Лейбниц, он верил, что наступит время, когда люди научатся решать самые сложные вопросы с помощью математических правил. Вместо того чтобы спорить или враждовать, они возьмут в руки карандаши и будут вычислять. Ферма придумал свод правил, руководствуясь которым удавалось справиться со многими задачами. Ему тоже хотелось считать его универсальным. «Этот метод никогда не изменяет, — писал он. — Напротив, он может быть распространен на многочисленные прекрасные вопросы». Декарт утверждал в своем «Рассуждении о методе», что, обладая хорошим руководством к действию, получаешь преимущество перед более сильными и умными, потому что «те, кто ходят очень медленно, могут продвинуться значительно больше, если они следуют прямым путем, по сравнению с теми, которые бегут, но удаляются от него».

Ньютон, как известно, тоже искал — и тоже безуспешно — общий прием, с помощью которого можно дифференцировать любую функцию. Поначалу ему казалось даже, что он нашел этот универсальный рецепт: каждую функцию, какой бы сложной она ни была, надо научиться раскладывать в степенной ряд, то есть заменять ее суммой самых простых функций. Затем, найдя производную от каждой из них, — а это-то уже проще простого, — сложить все производные вместе — и ответ готов. Ньютон считал, что он открыл и «весьма тщательно доказал общий метод», пригодный для любых функций. Но скоро он понял, что торжество его было преждевременным: вовсе не каждая функция раскладывалась в ряд, состоящий из конечного числа членов, а складывать бесконечное количество производных было не таким простым делом. До конца дней своих Ньютон пытался обнаружить какое-нибудь решение этого вопроса, найти пусть сложную, но всегда пригодную процедуру, с помощью которой можно было бы дифференцировать любую функцию, но, не найдя ее, так и не решился при жизни опубликовать свои капитальные труды: «Аналист» и «Метод флюксий и бесконечных рядов».

Математики рангом пониже не так взыскательно относились к своим внезапным прозрениям. Викарий из английского графства Кент Джон Кирби (известный в истории математики благодаря тому, что перевел с латыни и издал «Математические лекции» учителя Ньютона Исаака Барроу) написал книжку под заголовком: «Учение об ультиматорах. Или открытие истинного и подлинного обоснования того, что до сих пор ошибочно преобладало под неподходящими названиями флюксий и дифференциального исчисления. С помощью которого мы теперь полностью освободим эту вершину всей математической науки от слепого и негеометрического метода, который до сих пор затруднял доступ к ней».

...Изучая труды математиков семнадцатого и восемнадцатого веков, Маркс мог найти еще немало примеров — пусть не таких саморекламных — поисков математического философского камня. Но, по существу, тоска по универсальному методу восходит к седой древности, ибо что иное двигало рукой Архимеда, когда он писал свое «Послание Эратосфену»?

И потому может показаться, что в этой своей части математические воззрения Маркса давно устарели —

ведь сведения, которыми он располагал, не выходили за рамки известного Лагранжу, а саму мысль о всемогущем методе уж никак нельзя считать новой. И тем не менее строгость Марксовой логики свидетельствует, что он искал не просто какой-то метод или прием, он жаждал получить алгоритм, «стратагему действий», как писал он, набор ясных, точных и однозначных предписаний, указывающих, с чего нужно начинать и что делать дальше, шаг за шагом, пока задача не будет решена.

Он искал такую «стратагему», чтобы она смогла дать математику точную программу действий в любом, даже самом запутанном «дифференциальном вопросе». Какое-то время ему даже казалось, что он сумел ее обнаружить: «Таким образом... я нашел две развитые далее оперативные формулы, образующие основу всего дифференциального исчисления... я могу при отыскании $\frac{dy}{dx}$ пользоваться ими так же, как таблицей умножения в арифметике».

Правда, формулы оказались не универсальными, они пригодны лишь для определенных, так называемых «аналитических», функций, то есть таких, которые можно разложить в ряд, представить в виде суммы других, элементарных функций. Да и сами формулы, предложенные Марксом, не содержат в себе принципиально нового. Но мысль обосновать математический анализ с помощью строгих алгоритмов намного обогнала его время. «Обилие законов доставляет нередко повод к оправданию пороков, и государство лучше управляется, если их немного, но они строго соблюдаются». Без большой натяжки можно сказать, что эти общеизвестные слова переосмыслены Марксом и переведены на язык математической теории. Он, так мало зная даже о современных ему математических веяниях, сумел все-таки нащупать правильный путь к тому, чтобы обуздать «пороки» дифференциального исчисления.

15

И еще один философский (и в то же время математический) вопрос волновал Маркса — вопрос уже, по сути дела, нашего двадцатого века.

Ученый, изобретающий новое исчисление, выдумыва-

ет для него значки, символы по своему вкусу. Так ли уж важно, что это за символ? Связан ли ученый необходимостью отразить символом реальный процесс или здесь полный простор вкусовщине и произволу? Ведь если считать, как это делал великий математик Анри Пуанкаре, что математика — это игра, правила которой устанавливаем мы сами, то такой выбор действительно ничем не ограничен.

...Еще в алгебраических тетрадах, когда Маркс знакомился с книгой Бушарла, он законспектировал то место, где французский математик предлагает заменить символ $\frac{0}{0}$, в котором «исчез всякий след как функции, так и переменной», на выражение $\frac{dy}{dx}$, «напоминающее нам, что функцией была y , а переменной x ». Но так ли уж важно, что и как обозначать в математике? Маркс, не колеблясь, в самых ранних математических тетрадах четко отвечает на этот вопрос. Далеко не все равно! С символом $\frac{0}{0}$ никакого дифференциального исчисления построить нельзя, а с символом $\frac{dy}{dx}$ можно.

Почему?

«Карандаш бывает умнее самого математика», — основатель Геттингенской школы Феликс Клейн недавно произнес эти слова: чтобы выполнять какие-то операции, надо прежде всего облечь свою мысль в удачную символическую форму.

$$f'(x) = \frac{0}{0}.$$

Что можно извлечь из этого равенства? Да ничего, ведь написать $0 = 0 \cdot f'(x)$ — значит ничего не написать: что бы на нуль ни умножилось, нуль и получится.

А если ввести другое обозначение: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$?

Тогда сразу же появляется равенство $dy = dx \cdot f'(x)$. Это — первая из тех двух оперативных формул, о которых говорит Маркс. Это — «стратегема действий» для получения дифференциала dy .

Маркс обосновывает право пользоваться выражением $\frac{dy}{dx}$ как обыкновенной дробью с числителем и знамена-

телем, как удобным символом. Право, которое до работ Коши присвоили себе математики, не вникая в существо дела и потому не умея объяснить, почему всегда получается правильный результат, если следовать раз навсегда заданным правилам.

Исчезает «ужасающий вид» производной, как с облегчением пишет Маркс, разобравшись, наконец, в таинственных превращениях дифференциального коэффициента, которые он явно не в традициях бесстрастного языка математических трактатов называл «символическими злоключениями». Маркс не стал развязывать узел, основательно запутанный поколениями предшествующих ему комментаторов анализа бесконечно малых. Он разрубил его, предложив неожиданное решение — рассматривать производную как оперативный символ. В результате оказалось, если вновь воспользоваться цитатой из Марксовых математических работ, что в «действительности казус не столь злостен».



Там, где прежде были границы науки, там теперь ее центр.

Георг Лихтенберг

1

«Когда в математику были введены переменные величины и когда их изменяемость была распространена до бесконечно малого и бесконечно большого,— тогда и математика, вообще столь строго нравственная, совершила грехопадение: она вкусила от яблока познания, и это открыло ей путь к гигантским успехам, но вместе с тем и к заблуждениям. Девственное состояние абсолютной значимости, неопровержимой доказанности всего математического навсегда ушло в прошлое; наступила эра разногласий...»

Энгельс написал эти слова спустя несколько лет после того, как прочел математические послания Маркса. Но годы не ослабили первого сильного впечатления, которое они на него произвели: даже система сравнений и метафор осталась той же, что и в Марксовых математических рукописях.

Проблема обоснования математики — самая, пожалуй, важная в математическом наследии Маркса. «Со времен греков говорить «математика» — значит говорить «доказательство», — начинают свой знаменитый

труд «Начала математики» французские ученые, работающие под псевдонимом Бурбаки. В этом и состоит особенность математики — прародительницы наук, сквозь тысячелетия пронесшей свою строгость в рассуждениях и построениях. «Неопровержимость — имя тебе, математика, — пишет современный ученый У. В. Куайн. — Пусть представитель естественных наук удовлетворяется очевидностью, математику нужны доказательства. И в самом деле, в какой еще области знаний можно надеяться найти основания, хотя бы наполовину столь же прочные?»

Непрочность того фундамента, на котором покоилось все многоэтажное здание дифференциального исчисления, очень скоро открылась Марксу.

«Труднейшая даже для нашего времени задача обоснования дифференциального исчисления стала для него пробным камнем силы метода материалистической диалектики в применении даже к столь абстрактной науке, как математика».

«Поиски алгебраических корней дифференциального исчисления, обнаруживающиеся в математических рукописях Маркса... указывают, что путь к логическому обоснованию математических дисциплин пролегает обязательно через изучение их действительной истории».

Эти цитаты (они взяты из докторской диссертации К. А. Рыбникова «О работах Карла Маркса по математике») показывают отношение историка математики к Марксовым математическим трудам.

Совершая длительные и сложные исторические экскурсии, углубляясь в тонкости дифференциального исчисления, Маркс искал простых и доступных наглядному пониманию первооснов, на которых базируется этот важнейший отдел математики. Его нисколько не удивляло, что и тут, в новой для него области знаний, истинные причины событий, их механизм, скрыты от глаз наблюдателя. Ведь он всегда считал, что если бы явления и их сущности совпадали, то всякая наука была бы излишня. И потому со свойственной ему настойчивостью изучал одного автора за другим, все ближе подбираясь к цели своего исследования.

Маркс шел к ней очень последовательно, отнюдь не стремясь просто приобщиться к тонкостям математических выкладок. Его интересовало лишь главное, основное, а технические подробности лишь постольку-посколь-

ку. «Можно бы изложить таким манером все операции дифференциального исчисления,— пишет он на одной из страниц своих математических рукописей,— но это было бы чертовски бесполезным педантизмом».

Так двигался в своих математических занятиях Маркс, строго очертив самому себе поле деятельности, удивительно быстро впитав свойственное всем истинным математикам стремление к совершенству логических начал. Эта тяга к незыблемости оснований не угасла и сегодня. «...В отличие от времени создания Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления математики умеют сейчас без большого промедления подводить фундамент логически безукоризненных логических построений под любые методы расчета, родившиеся из живой физической и технической интуиции и оправдавшие себя на практике. Но фундамент этот иногда оказывается столь хитро построенным, что молодые математики, гордые пониманием его устройства, принимают фундамент за все здание. Физики же и инженеры, будучи не в силах в нем разобраться, изготовляют для себя вместо него временные шаткие подмости»,— пишет академик Андрей Николаевич Колмогоров в газетной статье, само название которой декларирует его позицию. Она называется «Простота — сложному», и пафос ее заключается в призыве «привести общие логические основы современной математики в такое состояние, чтобы их можно было излагать подросткам четырнадцати-пятнадцати лет».

Эта мысль о кристальной ясности основных положений, об изначальной простоте сложнейшей и абстрактнейшей из наук была свойственна гигантам математики, в том числе, например, и Давиду Гильберту, который полагал, что математическую теорию можно считать вполне законченной лишь тогда, когда ее удастся объяснить первому встречному.

Маркс проникся этой мыслью с первых же дней своих самостоятельных занятий высшей математикой.

2

Иероним Цейтен, историк математики и великий знаток математических текстов (это его ученику Гейбергу посчастливилось разыскать в хранилищах одного из константинопольских монастырей архимедово «Послание

Эратосфену»), уподобил изобретение нового исчисления переходу от ремесленного производства к фабричному.

В этом сравнении глубокий смысл. Вещь, созданная талантливыми руками ремесленника, хранит на себе печать его вкусов, его индивидуальности. Изготовить ее сумеет далеко не всякий, да и от самого мастера это потребовало немалых усилий и долгого времени. Нынешняя ценность такого уникального предмета для нас — не в его полезности, а в той частичке души, которую мастер вложил в свое детище, в том, что мы осязаем в предмете человека, его создавшего. Изделия фабричного производства лишены этой человеческой теплоты. Но зато их много, они под силу каждому, кто становится к станку.

Задачи, одоленные великими математиками прежних времен, подобны созданиям ремесленников. Но со дня, когда изобретен общий метод, с ними способен справиться любой грамотный человек — правда, его решение обнаружит не душу мастера, а фабричное клеймо. (Для того чтобы «совершать с дифференциалом чудесные операции», — пишет Маркс в своих математических рукописях, — отнюдь не требуется проникновение в природу dx , dy).

Вся история математики полна таких переходов: от единичных находок и открытий — к массовому методу, от исключений — к правилу, от прозрений гениев — к бездумному, механическому повторению заученных приемов. Высокие научные ценности с течением времени становятся разменной монетой школяров.

Но этот поток, низвергающийся с вершин в низины, парадоксально сочетается со встречным движением к заоблачным высям абстракций.

На первую ступеньку абстракции человечество поднялось, кутаясь в звериные шкуры. Величайшим математиком нашей планеты был тот, кто обнаружил, что два топора и два барана имеют нечто общее — количество, и придумал ему меру — число.

Тысячелетия протекли, пока люди сумели разглядеть нечто общее и в самих числах и изобрели четыре правила арифметики — первое исчисление, доступное не избранным, а тысячам и миллионам.

Следующей великой ступенью была алгебра — математики ввели буквенные символы, под каждым из которых могло скрываться любое число.

Еще выше — функции: синусы, косинусы, тангенсы, логарифмы, степени, корни всяких степеней... Они складываются, делятся, умножаются — становятся предметом исчисления, как раньше числа и буквы.

И, наконец, новый этап — появилось понятие оператора — значка, диктующего порядок операций, которым надо подвергнуть функцию, чтобы преобразить ее в другую, с какими-то вполне определенными свойствами, скажем, такую, чтобы она была производной от «оперируемой»...

3

Маркс ощущал этот исторический процесс. Именно потому он искал в алгебре прообразы дифференциального исчисления, и именно отсюда идет его понимание нового исчисления как своего рода алгебры, надстроенной над обычной алгеброй и включающей, кроме чисел, букв и обозначений функций, еще и дифференциальные символы.

Математики пытались объяснить дифференциалы как некую количественную реальность. Для них эти значки были прежде всего отражением некоторых величин, другого понимания дифференциалов у них не было, и они цеплялись за него, боясь потерять ощущение твердой почвы под ногами. Маркс сознательно отказался рассматривать дифференциалы как некие величины и оставил за ними лишь значение символов, связанных с определенными действиями. Он отбросил столетиями тянувшийся за дифференциалом след бесконечно малой величины и стал рассматривать его как некий указующий знак, говоря языком современной математики — «оператор». Это означало — подняться еще на одну ступень математической абстракции.

Историю дифференциального исчисления Маркс изучал не для того, чтобы проставить даты жизни и смерти великих ученых и годы выхода в свет капитальных научных трудов. Он стремился извлечь историю математики из сути самих математических процессов. «Историческое развитие всех наук приводит к их действительной исходной точке только через множество перекрещивающихся и обходных путей», — эта его старая мысль оказалась и на сей раз удивительно продуктивной. Она позволила Марксу отделить бесконечно малые, истори-

ческий путь получения математической истины от самой истины — дифференциала как оперативного символа нового математического процесса.

4

Что же такое оператор?

Маркс впервые встретился с этим понятием, вероятно, штудировав Феллера и Одерманна. Оно оказалось чем-то близким его складу мышления и было немедленно взято на вооружение. Простейший оператор, каким его трактовали директора коммерческих училищ, послужил трамплином для предложенного Марксом толкования дифференциального символа как оператора сложного математического процесса.

Оператор есть некто, выполняющий определенную операцию.

Человека, производящего такие операции, одну или несколько, или управляющего их выполнением, тоже называют оператором.

Оператор сортирует корреспонденцию на почтовом предприятии, разделяя ее по пунктам назначения. И оператор управляет сложнейшим агрегатом — исполинским блюмингом, нажатием рычагов и кнопок приводя в движение многотонные слитки металла.

Простейший неодушевленный оператор — станок-автомат, стоящий в заготовительном цехе завода. Настроенный на определенную длину заготовки, он нарезает на равные куски брусья и трубы, независимо от того, какова площадь поперечного сечения попавшего к нему «в лапы» предмета, и от того, из какого металла этот предмет изготовлен.

Подобный же оператор — автомат, изгибающий любые прутки под одним и тем же углом.

В качестве более сложного оператора можно представить себе некую автоматическую линию, состоящую из печи и литейной машины. Вы засыпаете в горло печи любой металл, в любом виде, а на выходе получаете ряд изделий из этого металла, имеющих заданную форму.

Математический оператор — это машина (воображаемая, конечно!), которая производит определенные математические преобразования над математическим сырьем. Устройство такой машины можно представить себе

каким угодно сложным, а в роли математического сырья могут выступать любые математические объекты.

Что же касается оперативного символа, то это всего лишь условный значок, указывающий: в этом месте должна быть применена машина-оператор.

Сырьем для Марковского оператора служили функции, а операцией, которая производилась над ними, было дифференцирование.

5

Для Ньютона и Лейбница дифференциал — это бесконечно малое приращение переменной. Что значит «бесконечно малое приращение», ни тот, ни другой так и не сумели объяснить, хотя им, вероятно, и казалось, что объяснение где-то совсем рядом и вот-вот найдется. Это «вот-вот» заняло два столетия. Огюст Коши в двадцатых годах девятнадцатого века дал точное и строгое определение бесконечно малой величины. Математики немецкой школы — Вейерштрасс, Абель, Дедекинд, Кантор завершили к концу века построение здания анализа. Оно стало теперь строгим и прочным, но ценой тяжеловесности конструкций: для того чтобы определение дифференциала было безукоризненным и наглядным, пришлось дифференциалы независимой и зависимой переменной определить по-разному. Строгость определения, таким образом, оплачена здесь тем, что в каждой задаче приходится с самого начала выделять некоторые величины как независимые, а ведь в реальных задачах, которые ставятся жизнью, все величины так или иначе зависят друг от друга.

...Пока рукописи Маркса лежали в архивах, французский математик Жак Адамар (по всем формальным признакам самый талантливый из абитуриентов Эколь Нормаль, поскольку набрал при поступлении в нее рекордное число баллов за все время существования этой высшей школы) попытался избавиться от обременительных ограничений. Он сумел сделать это, определив дифференциал как некий оператор. Адамар отказался от наглядности, но придал анализу недостававшую ему долю изящества. Сделано это было им через четыре десятилетия после смерти Маркса.

Когда в 1933 году часть Марковских математических рукописей была впервые опубликована, советский иссле-

дователь В. И. Гливенко сравнил работы Маркса и Адамара и показал, что оба они пришли к понятию оперативного символа формально одним и тем же способом — извлекли его из дифференциала сложной функции. Но истинные пути к новому определению не совпадают у Маркса и Адамара ни в одной точке: первый пришел к своему пониманию дифференциала, стремясь постичь, какое место занимает новое исчисление в общей системе математики, второй — пытаясь придать этому исчислению наиболее общую и изящную форму.

Глубина подхода позволила Марксу подметить общую черту, свойственную любому символическому исчислению, — оборачивание метода. Символ устремляется из прошлого в будущее, из указания на уже содеянное он превращается в приказ о том, что еще только предстоит совершить.

Это — непреложный закон всех символических исчислений, общую теорию которых современные математики еще только начинают разрабатывать.

1:5.

6

Математика двадцатого века поднялась на новую ступень абстракций. Она стала изучать объекты еще более сложной природы: в них меняются не только величины, но даже сам характер зависимости между ними. Предметом исследования стали не просто переменные величины, а переменные зависимости между переменными величинами! В новой области — она получила название функционального анализа — получили права гражданства основные понятия дифференциального и интегрального исчислений, которые к тому времени отошли уже в разряд «классического» анализа.

В 1937 году в журнале французских математиков появилась статья Мориса Фреше «О понятии дифференциала». Фреше продолжил мысль Гливенко и показал, что операторное понятие дифференциала в функциональном анализе шире, чем обычное определение дифференциала. Он привел примеры задач, где это обычное определение оказывается неработоспособным, а операторное сохраняет свою силу. Фреше в этой работе писал: «Гливенко, опубликовавший статью с целью привлечения внимания (к операторному понятию дифференциала. — Л. К.), высказал нам в частной беседе

мнение о желательности ввести в функциональный анализ оперативное определение дифференциала, основанное на тех же принципах, что и определение, данное Адамаром для функций классического анализа».

Упомянуть математические рукописи Маркса — о чем, собственно, и шла речь в статье Гливенко — французский математик, видимо, не посчитал необходимым...

7

Маркс не знал ничего о работах Огюста Коши, который положил начало строгой теории пределов и сумел, таким образом, найти обоснование математического анализа. Но даже если бы он был знаком с ними, вероятнее всего, что они его не удовлетворили бы. Ведь понятие предела не может быть уложено в рамки какого-нибудь алгоритма. Мысль Маркса двигалась иным путем, ему был нужен «реальный» процесс отыскания производной, то есть алгоритм, который во всех случаях позволяет, во-первых, ответить на вопрос, есть ли у данной функции производная, а во-вторых, дает способ найти ее, если она существует. Поэтому о производных, полученных с помощью Марковского метода «алгебраического дифференцирования», современный математик сказал бы, что они «построены конструктивно».

Как выяснилось много лет спустя, такая задача выполняема далеко не для всех функций. Но Маркс занимался как раз теми из них — аналитическими, то есть разложимыми в степенные ряды, — которые позволяют совершить над собой эту процедуру. Именно они и явились объектом Марковского «алгебраического дифференцирования».

Сейчас класс таких функций значительно расширен — математики заставили их отвечать на оба вопроса алгоритма. И, таким образом, приблизились к построению математического анализа на твердой основе теории алгоритмов. Это направление научной мысли получило название «конструктивный математический анализ». Он появился только в самое последнее время. О причинах, вызвавших его к жизни, и о связи, которая существует между этим новейшим направлением в современной математике и теми идеями, что содержатся в Марковских математических работах, образно сказано в статье московского математика А. А. Рывкина, опубли-

кованной в журнале «Природа» к столятидесятилетию со дня рождения Маркса: «Возникновение математического анализа вызвало среди математиков продолжительное смятение. Его и по сей день испытывает каждый, кто ближе сталкивается с основаниями этой науки, претендующей на роль хранительницы логики. Получив в руки бесконечное как объект исследования, математики наводнили свою науку страшными призраками, среди которых функция, разрывная в каждой точке, считается вполне безобидным. Вот уже несколько столетий математики стремятся обосновать методы классического анализа, и чем более тонкое обоснование они находят, тем более ошеломляющие парадоксы появляются на горизонте. Кого не приведет в уныние известный парадокс теории множеств, утверждающий, что существует такое разбиение шара на части, которое позволяет из получившихся частей составить два точно таких же шара!

Конструктивное направление появилось в математике как мессия, обещающий спасение ценой жертв и воздержания. Математика должна была отказаться от рассмотрения бесконечных множеств в качестве непосредственного объекта исследования. Был отвергнут и закон исключения третьего, на котором основано доказательство от противного. В своем распоряжении конструктивисты оставили лишь те объекты, конструктивное построение которых потенциально осуществимо, то есть возможно в предположении, что нам дано достаточное количество времени, пространства и «строительного материала».

Стеснив себя столь жесткими рамками, они стремятся заново построить существующие математические теории, в том числе и математический анализ, который назван конструктивным анализом...

В настоящее время конструктивисты, среди которых много замечательных советских математиков (А. А. Марков, Н. А. Шанин, И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин), все настойчивее проникают в различные области математики, получая подчас исключительные по своей неожиданности результаты.

Сейчас представители конструктивного направления ведут непримиримую войну с теми, кто стоит на классических позициях. Конечно, мало кто из математиков верит, что они смогут «похоронить» классическую мате-

матику, основанную на идеях создателя теории множеств Георга Кантора. Однако оздоровительная ценность конструктивных идей, пожалуй, бесспорна. У этого направления большое будущее, и многие открытия грядущей математики должны появиться при его участии.

Сделанное сейчас отступление выполнило свою роль, если помогло за кажущейся наивностью метода «алгебраического дифференцирования» разглядеть отблеск глубокой идеи, которая в настоящее время завоевала прочное место в математике».

Право математиков пользоваться значком $\frac{dy}{dx}$, считая его просто обычной алгебраической дробью, еще долго обсуждалось в математической литературе. Анри Пуанкаре в 1899 году рассказывал не без иронии (понятной, правда, лишь тем, кто хоть немного знаком с основами дифференциального исчисления) о том, как сам он присутствовал на экзамене, когда студент следующим образом излагал теорию распространения звука: «Нам надо решить уравнение $\frac{d^2z}{dt^2} = a^2 \frac{d^2z}{dx^2}$. Я делю левую и правую часть уравнения на d^2z и умножаю на dx^2 . Тогда получается, что $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2$, а отсюда следует, что $\frac{dx}{dt} = \pm a$. То есть звук может распространяться в обе стороны со скоростью a ». Экзаменатор, блестящий физик, имя которого Пуанкаре, однако, не называет, воскликнул, выслушав это «объяснение»: «Замечательно! Ваше доказательство намного проще, чем все, что мне известны», и поставил студенту оценку «19» — практически самую высокую из возможных.

Конечно, это не более чем остроумный физико-математический анекдот, но смысл его настолько глубок, что Джузеппе Пеано, известный итальянский математик, профессор Туринского университета (более всего он знаменит благодаря кривой, носящей его имя, которая целиком заполняет некий квадрат, проходя через каждую его точку) в своей работе «Производная и дифференциал», опубликованной в 1912 году, полностью воспроизводит всю статью Пуанкаре, в которой излагается этот забавный эпизод. Примеру слишком уж буквального

подхода к дифференциалу как к обыкновенной дроби, при которой студент не стал решать дифференциального уравнения, а отнесся к нему как простому алгебраическому, Пеано противопоставляет мнение некоторых математиков — Тодхантера, Веблера, которые считают символ $\frac{dy}{dx}$ неразложимым на dy и dx , поскольку

он является значком для понятия «производная». И Пеано пишет: «Дело намного упрощается, если считать, что дифференциал — это синоним производной. Для обоснования этого единства производной и дифференциала можно привести аргументы логического и исторического порядка. Самый простой логический аргумент состоит в том, что в любом случае, когда написан дифференциал, можно читать его как производную и при этом не нарушится правильность данного математического высказывания». В статье Пуанкаре, цитируемой Пеано, есть любопытное признание, подтверждающее этот «логический» аргумент: «Что касается меня, я обычно пользуюсь дифференциальной символикой, потому что это язык, на котором говорит большинство моих современников... Но, хотя пишу я в дифференциалах, думаю чаще всего в производных». Видимо, чтобы сделать свой «логический» аргумент еще и «историческим», Пеано высказывает предположение, что Лейбниц тоже мыслит производными, а не дифференциалами.

Но все эти не лишённые интереса соображения нужны были Пеано в конце концов для того, чтобы высказаться в пользу четкого и ясного математического символизма, указать коллегам на то, сколь он важен и плодотворен.

Анри Пуанкаре выступил против оценки роли символизма в математике, данной Джузеппе Пеано. «Трудно допустить, — писал он, — чтобы слово если, будучи написано в виде $\subset$, приобрело такие качества, каких у него не было раньше». Вот Лейбниц ввел в математический обиход два знака — d и $\int$; для дифференциала и интеграла, возможно, они удобны, говорит Пуанкаре, но невероятно, чтобы знаки эти могли обновить математику.

Здесь, несмотря на весь свой авторитет гениального математика, Пуанкаре услышал голоса несогласия. Можно, конечно, сказать о такой, например, классической ветви математики, как алгебра, что она состоит

лишь в том, что изображает знаками слова «плюс», «минус», «равняется» и так далее, возражал ему Луи Кутюра, его соотечественник, ученик Бертрана Рассела и автор книг «Логика Лейбница» и «Алгебра логики». И в самом деле, нелепо думать, что слово «плюс», записанное знаком «+», вдруг станет обладать некими совсем новыми качествами. И тем не менее разве можно было бы разработать теорию решения алгебраических уравнений, если бы математики довольствовались словами? Ответ — разумеется, отрицательный — на этот вопрос дает японская математика, которая не смогла выработать символического языка и застыла в своем развитии.

Лазарь Карно писал в «Размышлениях о метафизике исчисления бесконечно малых», что математические знаки «не являются только записью мысли, средством ее изображения и закрепления, — нет, они воздействуют на саму мысль, они до известной степени направляют ее, и бывает достаточно переместить их на бумаге, согласно известным, очень простым правилам, для того, чтобы безошибочно достигнуть новых истин». Наоборот, неудобная словесная запись полностью лишает математика возможности увидеть пути решения задачи. Символизм математики — не просто удобный способ сокращения (хотя и этим его качеством пренебрегать не стоит), язык математики позволяет сделать предмет обозримым, наглядным, в конечном итоге — постижимым. К примеру, простейшая формула куба разности двух чисел:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

А вот она же в тяжеловесной словесной записи:

куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.

Можно ли работать с такой «формулой»? Помогает ли она математику охватить сразу взглядом суть дела? Стоит ли подобно индийским астрономам заменять цифры словами для того лишь, чтобы можно было зарифмовать таблицы синусов и заучивать их наизусть? Нет, нет и еще раз нет! «Математика — это язык плюс рассуждения, это как бы язык и логика вместе», —

считает Ричард Фейнман, один из самых известных физиков современности. Очевидно, что он говорит тут именно о математическом символизме. Ведь без него вообще невозможна была бы современная физика. Альберт Эйнштейн и Леопольд Инфельд рассказывают в «Эволюции физики» о том, как для построения классической механики были применены векторы — в итоге тоже всего-навсего математические значки, черточки, которые ставят над той или иной величиной: «Здесь скептик может заметить, что он не видит никакого преимущества от введения векторов. Все, что было сделано,— это перевод признанных ранее фактов на необычный и сложный язык. В этой стадии, в самом деле, было бы трудно убедить скептика, что он не прав. Но... именно этот странный язык приводит к важным обобщениям, в которых векторы оказываются существенными».

...«Недостаточно только иметь хороший разум. Главное — хорошо применять его». Декарт, наверное, ничего не имел бы против того, чтобы эти его слова вспомнил человек, перевернувший последнюю страницу Марксовых математических рукописей.

Глава IV.
«ТРАКТУЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИ»



Чем ты обладаешь, то обладает и тобою.

Петроний Арбитр

1

В отличие от большинства современных ему экономистов Маркс знал и любил математику, и этот обширный запас знаний и эта привязанность материализовались в его экономических произведениях.

Многие экономические работы Маркса, построенные на математической базе, все еще опубликованы не полностью. Достаточно напомнить о черновой тетради, которая носит название «Норма прибавочной стоимости и норма прибыли, трактуемые математически». Подготавливая после смерти Маркса к печати третий том «Капитала», Энгельс в его третью главу включил лишь небольшую часть материала из этой тетради, сопроводив главу примечанием: «В рукописи имеются еще очень

подробные вычисления разности между нормой прибавочной стоимости и нормой прибыли ($m' - p'$); она отличается разнообразными любопытными особенностями, и ее движение обнаруживает случаи, когда обе нормы удаляются друг от друга или сближаются друг с другом. Это движение можно изобразить и в виде кривых. Я воздерживаюсь от воспроизведения этого материала, так как он менее важен для непосредственных целей настоящей книги. Здесь достаточно будет просто обратить на это внимание тех читателей, которые захотят изучить данный вопрос более глубоко».

Исследователя, которому предстоит изучать неопубликованные до сих пор экономические труды Маркса, ждет, очевидно, немало чисто «математических» находок, но и того, что написано рукой Маркса в «Капитале», вполне достаточно, чтобы увидеть, насколько сильно математический образ мышления проник в его занятия экономикой. Лейпцигский ученый Феликс Буркхардт обозначает три основных направления «вторжения» математики в экономические труды Маркса. Прежде всего математика выступала как вспомогательное средство при анализе сложных экономических структур и процессов. Далее, математический подход, аналогии с задачами из различных разделов математики, сама манера мышления помогали более глубокому пониманию экономических закономерностей. Наконец, математика была прекрасным средством для придания наглядности экономическим законам и соотношениям.

Вот начало третьей главы третьего тома «Капитала»: «Поскольку прибыль предполагается количественно равной прибавочной стоимости, ее величина и величина нормы прибыли определяются отношениями простых числовых величин, которые даны или могут быть определены для каждого отдельного случая. Таким образом исследование движется сначала в чисто математической области». И далее Маркс записывает алгебраическое соотношение, приводит его затем к виду пропорции и детально анализирует ее при различном характере входящих в нее членов, рассматривая те или другие из них как постоянные или переменные.

Четкая постановка экономической задачи, ее формализация, затем — чисто математический анализ («...ис-

следование движется сначала в чисто математической области») и, наконец, возвращение на почву экономики. Математика выступила во всех трех ипостасях, отмеченных Буркхардтом, — и как средство для уяснения закономерностей экономики, и как вспомогательный инструмент для расчетов, и как способ придания наглядности задаче на всех стадиях ее решения — от постановки до анализа результатов.

Часто Маркс обращался к различным разделам математики и там, где ему, собственно говоря, не требовалась ее доказательная и аналитическая сила. Известно, что его любимый метод — иллюстрация новой мысли с помощью аналогий, но как-то не обращают внимание на то, насколько часто они взяты из математики.

В первой главе «Капитала» Маркс рассматривает товарный обмен и пишет: «Иллюстрируем это простым геометрическим примером. Для того чтобы определять и сравнивать площади всех прямолинейных фигур, последние рассекают на треугольники. Самый треугольник сводят к выражению, совершенно отличному от его видимой фигуры, — к половине произведения основания на высоту. Точно так же и меновые стоимости товаров необходимо свести к чему-то общему для них, большие или меньшие количества чего они представляют».

В том же первом отделе «Капитала», в главе «Деньги, или обращение товаров», Маркс пишет о том, что в ряде случаев цена вообще перестает выражать стоимость, поскольку цену могут назначать и за то, что по самой сути своей не имеет стоимости. «...Совесть, честь и т. д., — пишет Маркс, — могут стать для своих владельцев предметом продажи и, таким образом, благодаря своей цене приобрести товарную форму». И добавляет: «Выражение цены является здесь мнимым, как известные величины в математике».

Буквально через страницу — аналогия из области механико-математической: «Мы видели, что процесс обмена товаров включает в себе противоречащие и исключающие друг друга отношения. Развитие товара не снимает этих противоречий, но создает форму для их движения. Таков и вообще тот метод, при помощи которого разрешаются действительные противоречия. Так, например, в том, что одно тело непрерывно падает на другое и непрерывно же удаляется от последнего, заключается противоречие. Эллипсис есть одна из форм

движения, в которой это противоречие одновременно и осуществляется и разрешается». Законы движения небесных тел, орбиты вращения которых представляют собой эллипсы, поясняют здесь не только глубинную суть процесса обмена товаров, но и более общие философские закономерности всякого разрешения противоречий.

Такие примеры буквально рассыпаны по страницам экономических исследований Маркса. Умножать их число — все равно, что переписывать «Капитал» и примыкающие к нему труды. И то, что абзацы с математическими реалиями встречаются не только в окончательном, чистовом тексте произведения, но и на страницах черновых тетрадей, предназначенных для себя, доказывает, что математический подход становился для Маркса с годами стилем мышления и, как следствие, — стилем изложения.

Конечно же, во многих случаях Маркс мог изложить те же самые мысли и не прибегая к математическим иллюстрациям.

Но математика вошла в его плоть и кровь. Определив в известной мере стиль его письма, она стала одновременно и средством самовыражения.

2

Вполне вероятно — об этом говорят многие современные комментаторы Маркса, — что первоначально его обращение к математике было связано не только с решением конкретных экономических примеров, но и с общей его неудовлетворенностью методологией современной ему экономической науки. Когда Маркс начал заниматься политической экономией, он с удивлением, можно даже сказать, с возмущением обнаружил у многих своих предшественников не только отсутствие четкой логики рассуждений, но и самодовольное нежелание стремиться к научной строгости и доказательности. Тавтологии с пафосом подавались как великие научные открытия. Маркс замечает в первом томе «Капитала»: «Ни в одной науке, кроме политической экономии, не провозглашаются с такой претенциозностью элементарнейшие общие места». Наивное неумение отличить явление от сущности, отсутствие у многих современных ему политэкономов навыков абстрактного мышления вызывают горькую иронию Маркса: «Что вещи в своем проявлении часто представ-

ляются в извращенном виде, признано как будто во всех науках, за исключением политической экономии». Он пишет о «бессилии анализа» и иллюстрирует этот свой тезис примерами из Жана Батиста Сэя, одного из патриархов буржуазной политэкономической апологетики. «...Сэй берется судить о кризисах, зная только одно: что товар есть продукт», — осуждающе отмечает Маркс. И в другом месте: «Еще удобнее, конечно, не подразумевать под термином «стоимость» совершенно ничего определенного. Тогда можно без стеснения подводить под эту категорию все, что угодно. Так поступает, например, Ж. Б. Сэй. Что такое «стоимость»? Ответ: «То, чего стоит вещь». А что такое «цена»? Ответ: «Стоимость вещи, выраженная в деньгах». А почему имеет «стоимость... труд земли»? «Потому что за него дают известную цену». И Маркс саркастически заключает череду сэевских цитат: «Итак, стоимость есть то, чего стоит вещь, а земля имеет «стоимость», потому что стоимость ее «выражают в деньгах». Это, во всяком случае, очень простой метод разрешать вопросы о причине и происхождении вещей».

Маркс искал в математике инструмент очищения политэкономии от скверны пустозвонства, он обратился к математике в надежде на ее доказательную силу. И подтверждается это уже первыми страницами «Капитала», где образное, вдохновенное изложение соседствует с бесстрастными математическими формулами. Подготавливая «Капитал» к переизданию, он вновь и вновь возвращался к этим математическим выражениям, добиваясь все большей строгости и безукоризненной логики.

Впрочем, для Маркса поэзия и математика никогда не исключали друг друга — это доказывают его экономические, и собственно математические работы. Сам характер его мышления был образным, и в этом, быть может, один из истоков естественности и раскованности, которые определяли движение его мыслей в мире абстракций.

И быть может, Маркса на определенных этапах его занятий политэкономией интересовало не столько практическое применение математики, сколько философия этой науки и прежде всего законы возникновения математических абстракций и последующего обращения с ними. Ведь трудно представить себе науку более абстрактную и в то же время более связанную с жизнью, чем

математика. Но такими же — одновременно живыми и отвлеченными — представлялись автору «Капитала» понятия политэкономии, о чем он не устал напоминать своим читателям. Маркс ощущал эту общность подхода к абстракциям экономическим и математическим, и его собственные исследования в области экономических абстракций и в «чистой» математике имеют одну и ту же диалектическую основу.

3

И все же дело не в общности философского подхода, и, конечно уж, не в стиле изложения. Суть — в характере рассмотрения явлений экономики. Целые главы «Капитала» посвящены математическому анализу экономических закономерностей: инструмент исследования, примененный Марксом, — математическая модель.

Модель... Логическая, мысленная абстракция. Совокупность основных связей. Все второстепенное отброшено. Все первостепенное — на виду. Трудно даже оценить, как весома такая абстрагирующая деятельность исследователя для политической экономии. Объект ее изучения ненагляден. Маркс писал, что в политической экономии нельзя использовать ни микроскоп, ни реактивы, невозможно в натуре осуществить эксперимент. Все лабораторное оборудование исследователю экономики заменяет одна только сила абстракции. Причем Маркс всегда подчеркивал, что абстракция должна быть как-то выражена — «овеществлена, символизирована, реализована посредством [какого-либо] знака». Эта реализация абстракции, собственно говоря, и есть модель.

Первые серьезные экономические модели носили графический характер. Они принадлежали доктору Франсуа Кенэ, выпустившему в 1758 году, почти за сто лет до публикации первого тома «Капитала», небольшую брошюру под названием «Экономическая таблица».

К этому французскому врачу, ставшему одним из крупнейших экономистов мира, основателем научной школы физиократов, Маркс относится с особым уважением, даже симпатией. Это не мешает ему, естественно, объективно разбираться в ошибках предшественника, но о его методе, о личности ученого Маркс говорит с неиз-

менной теплотой. «Большая заслуга физиократов заключается в том, что они в своей *«Экономической таблице»* впервые сделали попытку дать картину годового воспроизводства в том виде, в каком оно выходит из обращения. Их изложение во многом ближе к истине, чем изложение их преемников». Это из фрагментов французского издания первого тома *«Капитала»*. Во втором томе *«Капитала»* Маркс пишет о «большом и верном такте» Кенэ. Наконец, в *«Теориях прибавочной стоимости»*, представляющих собой набросок четвертого, заключительного тома *«Капитала»*, Маркс так оценивает таблицу Кенэ: «Эта попытка, сделанная во второй трети XVIII века, в период детства политической экономии, была в высшей степени гениальной идеей, бесспорно самой гениальной из всех, какие только выдвинула до сего времени политическая экономия».

Кенэ — первый экономист, замысливший составить целостную модель хозяйства всей страны, попытавшийся проанализировать жизнь целой страны с народнохозяйственной точки зрения. Мириады ручейков — отдельных актов производства и обмена материальных ценностей — он рассматривает слитыми в могучие русла потоков производимых общественных продуктов, их обмена и распределения между потребителями. Кенэ анализировал жизнь современной ему Франции как жизнь земледельческой нации. Он показал, как перетекают средства от одного класса (сословия) к другому, как «производительный» класс — им Кенэ ошибочно считал только фермеров-земледельцев, не разглядев слабого в те времена рабочего класса, — содержит за счет своих работ на земле, этом «даре природы», собственников, а также «бесплодный» класс, к которому Кенэ причислял торговцев, ремесленников и всех других, кто не связан непосредственно с земледелием. Первый вариант *«Экономической таблицы»* был построен на базе геометрической прогрессии. В выбранном им числовом примере сумма дохода в 600 ливров делится пополам — 300 ливров идут на покупку сельскохозяйственных продуктов, другие 300 ливров тратятся на изделия промышленности. Суммы, возвратившиеся земледельческому классу, снова идут в дело и вновь дают доход, который делится в том же отношении. И так далее.

Таблица 1758 года построена в виде графика, который внешне выглядит как многократно повторяющийся

зигзаг из трех переплетающихся линий, показывающих перемещение материальных ценностей.

Через восемь лет, в 1766 году, Кенэ опубликовал второй вариант своей таблицы, которую в этом новом виде назвал «арифметической формулой». Хотя суть анализа осталась неизменной — рассматривался ход обмена между тремя сословиями, — математическая основа несколько изменилась, поскольку Кенэ заменил формулу геометрической прогрессии арифметической.

Таблица 1766 года внешне очень проста. Она содержит всего пять перекрещивающихся линий, соединяющих между собой точки, которыми помечены «получатели» и «отправители» потоков материальных ценностей и денежных средств. На схеме даны и числовые оценки этих потоков, характерные для социально-экономической жизни тогдашней Франции. Кенэ сумел понять и выявить в своей схеме механизм циркуляции богатства и продукта, образующий процесс простого воспроизводства.

Анализ этой модели, построенный на реальных данных экономической жизни страны, привел Кенэ к фундаментальному выводу — он открыл «экономический излишек», который без всякого возмещения присваивался классом собственников, королем и церковью. В таблице было весьма наглядно показано, как этот «излишек» образуется и как распределяется. Нет ничего удивительного в том, что класс собственников до сих пор не может простить Франсуа Кенэ этого великого открытия, которое с полным основанием можно считать первым замечательным результатом математической экономики. Старейшина французских экономистов Л. Бодэн, член Французской академии моральных и политических наук, в докладе «Зигзаг доктора Кенэ», посвященном двухсотой годовщине таблицы Кенэ, писал с явным укором, что идея «экономического излишка», высказанная Кенэ, «войдя в историю, произвела там разрушения».

Таким образом, важнейшему научному достижению политической экономии — исследованию Марксом прибавочной стоимости — предшествовало открытие доктором Франсуа Кенэ «экономического излишка», сделанное с помощью методов математической экономики. Ибо идея «экономического излишка» и есть — еще в простейшей и неразвитой форме — впервые научно сформулированная идея прибавочной стоимости.

(В своей книге «Экономико-математические методы и модели» академик В. С. Немчинов писал: «В течение 100 лет «Экономическая таблица» оставалась непонятой. И все эти годы взгляды Франсуа Кенэ были предметом непрерывных нападков как со стороны приверженцев мелкого земледелия, так и со стороны крепнущей буржуазии... Только Карл Маркс справедливо и объективно оценил как достижения, так и ошибки в экономических воззрениях Франсуа Кенэ».)

4

Простейшие математические модели появляются уже в первой главе «Капитала» — «Товар». Для характеристики товарного обмена Маркс использует математическое равенство: « x товара $A = y$ товара B ». Это простой случай обмена, реализация единичной или случайной формы стоимости. Маркс показывает и полную форму стоимости, которую он называет также развернутой: «Единичное выражение стоимости товара превращается... в ряд различных простых выражений его стоимости, причем ряд этот может быть удлинен как угодно». И Маркс вновь показывает это с помощью математического соотношения, демонстрируя, что z товара $A = u$ товара B , или v товара C , или w товара D , или x товара E , или и т. д.

На этой простейшей модели, которая с экономической точки зрения оказывается совсем не так проста, как кажется, Маркс исследует превращение простой или случайной формы стоимости в развернутую, возникновение, далее, всеобщей формы стоимости и, наконец, появление денежной формы стоимости. Что сам Маркс придавал математической стороне этого анализа первостатейное значение, свидетельствует послесловие ко второму изданию «Капитала», где Маркс дает сводку важнейших изменений, внесенных автором по сравнению с первым изданием. Начинается этот перечень с сообщения о том, что в первой главе им «...с большей научной строгостью выполнено выведение стоимости из анализа уравнений, в которых выражается всякая меновая стоимость...»

Маркс применяет и числовые модели. Построив таблицу, отображающую за длительный период реальное соотношение постоянного и переменного капитала

и значения нормы прибыли, Маркс обнаруживает тенденцию нормы прибыли к понижению, которая связана с тем, что как в отдельных отраслях, так и во всем обществе происходит повышение постоянного капитала. Исходные числа приняты Марксом умозрительно, но механизм их изменения от года к году — формула пересчета — отражает реальные процессы. Поэтому «гипотетический ряд», сконструированный автором этой числовой модели, «...выражает действительную тенденцию капиталистического производства». Так с помощью математической модели Маркс сформулировал закон тенденции средней нормы прибыли к понижению. Сам Маркс очень высоко ценил это открытие, рассматривая его как свою бесспорную победу над всеми предшествующими экономическими школами. Этот закон, писал, он, «...составляет тайну, над разрешением которой бьется вся политическая экономия со времени Адама Смита, и... различие между разными школами после А. Смита состоит в различии попыток ее разрешения». И еще раз, подтверждая эту мысль: «Как ни прост кажется этот закон после всего нами изложенного, но всей предшествующей политической экономии не удавалось открыть его...»

«После всего нами изложенного...» Но ведь изложение это базировалось на анализе разработанной Марксом числовой модели, и только модель позволила ему проявить закономерность, которую никак не могли ни понять, ни даже обнаружить современные ему экономисты.

На числовых моделях Маркс анализирует и капиталистические земельные отношения, прослеживая образование дифференциальной ренты. И снова математическая модель помогает ему победить в споре с научными противниками: с ее помощью он опровергает тезис о связи дифференциальной ренты с так называемым законом убывающего плодородия почвы, имевший широкое хождение в среде буржуазных политэкономов.

Но главное у Маркса — его модели воспроизводства — схемы, как называл их он сам.

Самый первый вариант схемы простого воспроизводства Маркс дал взамен экономической таблицы Кенэ образца 1766 года. Как о всяком новом своем открытии, он прежде всего написал об этом Энгельсу. В письме от 6 июля 1863 года Маркс помещает схему своей «эконо-

мической таблицы», а под ней чертит схему Кенэ. В письме он поясняет свою таблицу, отмечая, что «цифры безразличны» (эти цифры, которые поставлены Марксом в узловых точках схемы, обозначают соответствующие количества продукта или капитала). Тем самым Маркс подчеркивает всеобщность этой модели, обращая внимание своего адресата на то, что главным в ней является структура, связи. Выявление истинного характера потоков богатств в капиталистическом обществе — вот в чем видит здесь свою задачу Маркс. Воспользовавшись блестящей методологической находкой Кенэ, отталкиваясь от открытой его предшественником идеи «экономического излишка», Маркс хочет показать, каким образом этот неостанавливающийся механизм перекачки обогащает капиталиста.

Ошибки Кенэ должны быть исправлены. А главная из них заключалась в том, что Кенэ не понял природы прибавочного продукта, в его терминологии — «экономического излишка». Основатель школы физиократов отождествил его с излишком земледельческого продукта, считая, что только земля способна что-то давать «даром». Если бы Кенэ понял, что прибавочный продукт есть результат прибавочного труда, ему бы открылось, что найденный им «излишек», поглощаемый классом собственников, создается неоплаченным трудом рабочих — на фабриках и на полях. И тогда он, надо полагать, не отнес бы работников промышленности к «бесплодному» классу, как сделал это в своей таблице...

Итак, Маркс поставил перед собой задачу на основе схемы движения годового продукта народного хозяйства показать, каким образом капитал, потребленный в процессе производства, возмещается по своей стоимости из годового продукта, и каким образом процесс этого возмещения переплетается с потреблением прибавочной стоимости капиталистами и заработной платы рабочими?

Важнейший методический прием, примененный Марксом, — разделение всего хозяйства на две отрасли — производящую средства производства («Машины и сырье», — пишет Маркс), и производящую средства потребления (у Маркса на схеме — «Жизненные средства»). Маркс четко различает особенности в реализации продукта этих подразделений — участники производства машин и сырья должны получать жизненные средства из отрасли, про-

изводящей предметы потребления, а постоянный капитал в отрасли, где выпускаются средства потребления, может пополняться только за счет производства средств производства.

Таким образом, Маркс дал, выражаясь языком современных экономистов, «двухсекторную» модель экономики.

Исследуя свою схему, являющуюся математической моделью распределения продукта народного хозяйства, построенной в таблично-графической форме, Маркс вывел кардинальный закон - простого воспроизводства, то есть производства, совершаемого в одном и том же масштабе и с неизменной производительностью труда. Этот закон гласит: $I(v + m) = IIc$, то есть сумма дохода первого подразделения (производящего средства производства), состоящая из переменного капитала Iv (заработной платы) и прибавочной стоимости в этой отрасли Im , должна быть равна тому постоянному капиталу IIc , который авансируется на покрытие материальных издержек второго подразделения — отрасли, производящей предметы потребления.

5

По генеральному плану «Капитала», который Маркс много раз, совершенствуя его, записывал в своих черновых тетрадах, воспроизводство продукта — и простое, и расширенное — должно было рассматриваться во втором томе. Работа над ним продвигалась медленно. Первоначальные наброски уже не казались исчерпывающими, во многих главах стиль изложения не удовлетворял автора, не отвечал его взыскательному вкусу. И Маркс снова и снова брался за переделку и переписывание своих подготовительных рукописей. Дело, однако, шло уже к закату этой великой жизни, полной каждодневного духовного и физического напряжения на последнем пределе человеческих возможностей. Здоровье его было подорвано, он тяжело и подолгу болел. В те редкие промежутки времени, когда болезнь отпускала его, он снова возвращался мыслью и пером к неоконченному второму тому, и тетради, одна за другой, постепенно приближались к тому состоянию, когда можно было бы задуматься о подготовке их для печати. Но смерть оборвала эту работу Маркса. Незадолго до кончины Маркс,

говоря со своей дочерью Элеонорой о судьбе рукописей для второго тома, сказал, что из этого материала Энгельс должен «что-нибудь сделать».

Редактирование оказалось для Энгельса трудной задачей. С одной стороны, многие разделы рукописей были не завершены — не дописаны слова и фразы, многие мысли только намечены. С другой — Энгельс хотел, чтобы книга осталась произведением Карла Маркса, и стремился везде, где только можно, ограничить свое редакторское вмешательство. Он детально просмотрел все рукописи будущей второй книги, сличил между собой многочисленные редакции одних и тех же разделов, отдавая предпочтение последней по времени, а главное — сравнил их с теми задачами, которые Маркс намечал для себя в набросках планов второго тома.

О рукописи VIII, из которой взят раздел о расширенном воспроизводстве, о работе, выполненной Марксом при последней переделке этого материала, говорится в предисловии Энгельса ко второму тому «Капитала»: «...Весь отдел следовало переработать таким образом, чтобы он соответствовал расширившемуся кругозору автора. Так возникла рукопись VIII, тетрадь всего в 70 страниц в четверть листа; но как много сумел Маркс вместить в эти страницы...»

6

В главе «Накопление и расширенное воспроизводство», последней главе второго тома, Маркс по обычному своему методу рассматривает расширенное воспроизводство прежде всего на числовой модели. Модель эта снова двухсекторная. Подробно проанализировав изменение производства по годам, Маркс делает кардинальный вывод: «При производстве на основе возрастающего капитала I ($v + m$) должно быть равно II с плюс та часть прибавочного продукта, которая вновь присоединяется к капиталу, плюс добавочная часть постоянного капитала, необходимая для расширения производства в подразделении II; а минимум этого расширения должен быть таким, без которого неосуществимо действительное накопление, т. е. действительное расширение производства в самом подразделении I». Маркс снова и снова подчеркивает главное отличие математической модели расширенного воспроизводства от модели простого: «Само собой

разумеется, что поскольку предположено накопление, то $I(v+m)$ больше IIc , а не равно IIc , как при простом воспроизводстве...»

Построенная математическая модель позволяет Марксу исследовать ход воспроизводства при тех или иных особенностях структуры капитала в отраслях, варьируя исходные данные, менять уровень развития производительных сил моделируемого общества.

Модели, построенные Марксом, с математической точки зрения весьма просты — это всего лишь алгебраические соотношения. Но их глубинный смысл, их ясность позволили Марксу выявить ведущие закономерности экономической жизни капиталистического общества.

Многие важнейшие выводы получены Марксом в «Капитале» с помощью довольно простых, двухсекторных моделей экономики, которые он построил: один сектор — производство средств производства, другой — производство предметов потребления. Но у Маркса в одной из его более ранних работ — «Главе о капитале» из «Критики политической экономии», чернового наброска 1857—1858 годов, имеется схема-таблица, еще более близкая по форме и сути современным. В ней уже не два, а пять секторов экономики, взаимные связи между которыми Маркс и исследует:

	Оплата труда	Сырье	Машины	Прибавочный продукт	Стоимость продукта
А) Фабрикант сырья	20	40	20	20	100
В) Фабрикант сырья	20	40	20	20	100
С) Производитель машин	20	40	20	20	100
Е) Производитель необходимых жизненных средств для рабочих	20	40	20	20	100
Д) Производитель прибавочного продукта	20 10	40 20	20 10	20 10	100 50

Эту таблицу следовало бы взять в кавычки, поскольку она является прямой цитатой из Маркса. В этом наброске он, снова на числовой модели, рассматривает обмен продуктами производства между капиталистами А

и *B*, производящими сырье, фабрикантом машин *C*, капиталистом *E*, производящим предметы потребления только для рабочих, и *D* — производителем товаров с условным клеймом «только для капиталистов». Как и всякая модель, эта таблица условна. Безусловна в ней методология, почти на три четверти века обогнавшая ход экономической науки, ибо таблица Маркса — не что иное, как вполне современная «шахматная» таблица межатраслевых связей *.

Таким образом, в заголовках строк и столбцов Марксовой таблицы проставлены одни и те же наименования капиталистов. Если читать подряд строку, то видно, кто и сколько получил продуктов отрасли, поименованной в начале строки. Аналогична и структура столбца.

«...Капиталист *E*, — пишет Маркс после того, как привел таблицу, — обменивает весь свой продукт, стоимость которого равна 100 талерам, на 20 талеров заработной платы своих собственных рабочих, на 20 талеров заработной платы рабочих производителя сырья *A*, на 20 талеров заработной платы рабочих производителя сырья *B*, на 20 талеров заработной платы рабочих производителя машин *C* и на 20 талеров заработной платы рабочих производителя прибавочного продукта *D*. Из вырученных им 100 талеров капиталист *E* обменивает 40 талеров на сырье, 20 талеров — на машины, 20 талеров он выдает [своим собственным] рабочим, покупающим у него необходимые жизненные средства на эту сумму, а 20 талеров ему остаются на покупку прибавочного продукта, за счет которого живет он сам. В той же самой пропорции обменивают свой продукт и другие капиталисты. То, что составляет их прибавочную стоимость, есть $\frac{1}{5}$ стоимости их продукта, или 20 талеров, которые все они могут обменять на прибавочный продукт. Если бы они потребляли весь свой прибавочный продукт, то к концу [про-

* Название «шахматная» идет от шахматной доски, где каждая клеточка помечена двумя координатами — по горизонтали и по вертикали. Так и в этой таблице Маркса, и в других, аналогичных, но появившихся почти на семь десятилетий позже, каждая цифра на пересечении строки и столбца «помечена» их заголовками, показывает численное значение их связи. Впрочем, быть может, более удачное название для такой таблицы — турнирная, поскольку в ней, как в обычной таблице хода турнира, показано, кто у кого сколько взял, например, очков, и кому отдал, а в строках и столбцах расположены имена участников турнира.

цесса производства] они оказались бы в том же самом положении, что и в начале этого процесса, и прибавочная стоимость их капитала не возростала бы».

Изложив эту программу простого воспроизводства, Маркс переходит к анализу расширенного и поясняет смысл последней строки таблицы: «Предположим теперь, что капиталисты проедают только 10 талеров, или $\frac{1}{10}$ часть стоимости продукта, поедают половину прибавочной стоимости... Предположим, следовательно, что капиталист *D* производит потребительских товаров [для потребления капиталистов] только на 50 талеров. Тогда на 400 талеров, существующих в виде сырья, машин и необходимых жизненных средств для рабочих, только 50 талеров приходится на предметы личного потребления капиталистов. Но каждый из капиталистов теперь обладает избытком в 10 талеров, из которых 5 талеров могут быть затрачены на сырье, $2\frac{1}{2}$ талера — на машины, $2\frac{1}{2}$ талера — на необходимые жизненные средства для рабочих; на эти 10 талеров капиталист должен получить прибыль в $2\frac{1}{2}$ талера...» И Маркс излагает далее программу расширенного воспроизводства.

7

Знакомство Маркса с математикой было настолько глубоким, владение ею настолько органичным, что он никогда не испытывал при очередной встрече с ней на дорогах экономики ничего, подобного неразборчивому восторгу неопита. Поражает неизменно ровное, спокойное, доброжелательное, точнее всего — деловое отношение Маркса к математике в его экономических занятиях. Ему никогда даже не приходило в голову, что математика сама по себе способна обеспечить решение каких бы то ни было задач, выдвинутых экономической наукой. Суть должна быть экономической, форма может быть и математической — так, вероятно, можно сформулировать отношение Маркса к этой проблеме.

Английский естествоиспытатель Гексли, сподвижник Дарвина (с трудами Гексли Маркс был знаком, а Жени Маркс водила дочерей на его публичные лекции), говорил: «Математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают. И как, засыпав лебеду, вы не получили пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предпо-

сылок». Эта фраза должна была бы прийтись по душе Марксу. Ведь он не раз выступал против тех, кто с помощью математики пытался строить здание экономической науки на фундаменте ложных предпосылок. Так, Маркс много раз выступал против «глубокой низости мысли» английского священника Мальтуса, который выдумал такую «математическую модель» развития человеческого общества: производство средств существования в силу ограниченности природных ресурсов растет лишь в арифметической прогрессии, тогда как люди размножаются в геометрической. Этим он и объяснял все беды капитализма и, мало того, приветствовал нищету трудящихся как средство сокращения народонаселения (это по предложению мальтузианцев английский парламент принял в 1834 году «закон о бедных», которым отменялась всяческая помощь нуждающимся).

Не меньше досталось от Маркса и тем, кто обожествлял ссудный капитал, считал формулу сложных процентов верной до скончания века и без всяких ограничений. Такие экономисты считали, что способность приносить проценты — это неотъемлемое свойство капитала. Капитал приносит проценты так же, как и фруктовое дерево — плоды. Отсюда ученые экономисты договаривались до вещей совсем уже фантастических. Доктор Прайс открыл, например, что один пенс, отданный в рост из 5% годовых где-то в первый год нашей эры, к восемнадцатому веку вырос бы в сумму, большую чем 150 миллионов земных шаров, состоящих из чистого золота. Маркс пишет: «Представление о капитале как самовоспроизводящейся и возрастающей в процессе воспроизводства стоимости, как о стоимости, вечно сохраняющейся и возрастающей в силу прирожденного ей свойства... это представление привело д-ра Прайса к фантастическим измышлениям, перед которыми бледнеют все фантазии алхимиков». Открыв это поразительное явление, Прайс совершенно теряет голову. В другой своей работе он подсчитывает уже доходы не на пенс, а на шиллинг, отданный в рост «в год рождения нашего Христа» (вероятно, в храме Иерусалимском, — издевательски замечает Маркс) «из 6% под сложные проценты». Так вот, этот шиллинг «вырос бы в сумму большую, чем сколько могла бы вместить вся солнечная система, превращенная в шар, диаметр которого равнялся бы диаметру орбиты Сатурна».

Маркс замечает по этому поводу: «Прайса попросту ослепила чудовищность числа, возникающего из геометрической прогрессии. Так как он рассматривал капитал, не принимая во внимание условия воспроизводства и труда, как самодействующий автомат, как простое самоувеличивающееся число (совершенно так же, как Мальтус считал, что население растет в геометрической прогрессии), то он вообразил, что открыл закон возрастания капитала в формуле $s = c(1 + z)^n$, где s = сумме капитала + проценты на проценты, c = авансированному капиталу, z = ставке процента (выраженной в соответственных частях 100), а n — ряд лет, на протяжении которых протекает процесс».

...Мерное движение математического жернова не завораживало Маркса. Ясность исходных экономических посылок позволяла ему оставаться хозяином мельницы — использовать жернов как нужный и совершенный инструмент и не более. Именно этим он отличался от сторонников возникавшего у него на глазах математического направления в экономической науке.

8

Можно, стало быть, с уверенностью сказать, что Максим Максимович Ковалевский был не прав, когда писал, будто Маркс возобновил свои занятия высшей математикой только для того, чтобы «сознательно отнестись к только что возникавшему тогда математическому направлению в политической экономии».

Несколькими страницами ранее Ковалевский в своих воспоминаниях пишет об исключительной, феноменальной научной добросовестности Маркса, о том, что он готов был проводить недели в библиотеке Британского музея, чтобы вызволить из небытия какого-нибудь второстепенного и малоизвестного ученого прошлых времен, если, по его представлению, этот ученый мог высказывать интересные мысли по вопросу, занимающему Маркса. Естественно, Маркс досконально знал и всю современную ему литературу по политэкономии. И, конечно, он не остановился бы перед тем, чтобы освоить высшую математику, если бы это потребовалось ему для «сознательного отношения» к трудам Джевонса. Но не творчество Джевонса подвигло Маркса на изучение высшей математики, а, наоборот, знакомство со многими раз-

делами математики позволило ему ознакомиться с работами Джевонса.

Да и так ли уж нужно было Марксу знание математики, чтобы разобратся в том, что представляли собой работы Уильяма Стэнли Джевонса, профессора логики и политэкономии в Лондоне и Манчестере, который ввел в экономику математические методы, но выхолостил самую ее суть? Ведь Джевонс не видел, например, в чем же состоит роль труда в образовании капитала. С таким политэкономом можно было расправиться, и не углубляясь в бездны дифференциального и интегрального исчисления.

В 1888 году Энгельс писал в Петербург Николаю Францевичу Даниельсону, своему постоянному корреспонденту и первому переводчику «Капитала» на русский язык: «Вы удивляетесь, почему политическая экономия в Англии находится в таком жалком состоянии. Но то же самое мы видим теперь повсюду. Даже классическая политическая экономия, более того, даже самые вульгарные разносчики свободной торговли встречают презрение со стороны еще более вульгарных «высших» существ, занимающих ныне университетские кафедры политической экономии. И в этом виноват в значительной степени наш автор (по цензурным соображениям Энгельс не называет имени Маркса, а всюду говорит о нем: наш автор.— Л. К.), который открыл людям глаза на опасные выводы классической политической экономии; вот они и находят теперь, что, по крайней мере в этой области, всего безопаснее не иметь совсем *никакой* науки. И им удалось до такой степени ослепить обыкновенных филистеров, что здесь, в Лондоне, в настоящее время имеется четыре человека, называющих себя «социалистами» и в то же время уверяющих, будто они совершенно опровергли нашего автора, противопоставив его учению теории Стэнли Джевонса!»

В другом письме, адресованном Ф. Зорге, Энгельс пишет о почитателях Джевонса: «...благонамеренная банда, состоящая из «образованных» буржуа, которые опровергли Маркса с помощью гнилой вульгарной политической экономии Джевонса; она настолько вульгарна, что ее можно толковать как угодно, даже социалистически».

И в самом деле, на чем зиждилась экономическая философия Джевонса? Он был одним из авторов и ревнителей пользовавшейся одно время шумным успехом

«теории предельной полезности» — той самой, которая усовершенствовала древнюю истину: «Чем полезнее вещь, тем она дороже», придав этому нехитрому тезису сугубо научный вид. Если у вас есть десять кусков хлеба, то всего дороже вам первый, а всего меньше цените вы последний, десятый кусок, утверждали творцы новой теории. Отсюда и ее название: предельная полезность, полезность «последнего куска». Джевонс, знаток логики и математики, не мог не увлечься экономической теорией, само название которой «предельная» ласкает слух человека, знакомого с бесконечно малыми величинами и пределами. Однако математика, придав трудам Джевонса академическую солидность, не могла, естественно, сделать их верными.

Джевонс, по существу, изгонял экономику из математической экономии. Он считал, что экономическая теория — это всего лишь «своего рода математический аппарат, используемый для количественной оценки причин и следствий в деятельности человека». «Моя теория по своему характеру является чисто математической», — писал он.

Но «предельная полезность» именно в силу своей субъективной ограниченности — одному «полезно» одно, другому — другое — должна была встретиться с трудностями при соприкосновении с математикой, для которой необходима объективная шкала измерений. Поэтому Джевонсу и его сподвижникам пришлось искать какие-то объективные мерила. Джевонс забрался здесь в чудовищные дебри. Раз под полезностью понимается субъективная оценка благ, соответствующая вкусам данного хозяина, то она, естественно, есть определенная функция его желаний и склонностей, полученных им удовольствий и причиненных ему страданий. Джевонс даже пытался ввести такие понятия, как «валовые» и «чистые» наслаждения: чтобы подсчитать «чистые» наслаждения, нужно из «валового» наслаждения вычесть «валовое» страдание.

В этом безвыходном положении Джевонс пытается отыскать некую средневзвешенную полезность и обращается к ценам, декларируя, что рынок своим механизмом, своей системой цен помогает постичь такие субъективные факторы, как потребность и полезность. Итак, вульгарная политэкономия в лице Джевонса совершила круг, возвратилась к тому, с чего начинала — к фетишизации цены...

С одной стороны, полезность определяет цену вещи, с другой — сама полезность является ценой. Избавиться от этой тавтологии не сумел ни сам Джевонс, ни другие представители так называемой «математической школы» вульгарной политической экономии, которым, как и их предшественникам из «исторической школы», неудачи в теории не мешали доказывать гармонию интересов всех классов капиталистического общества. Об одном из представителей этой школы Маркс писал Энгельсу 6 марта 1868 года: «Г-ну Маклеоду удалось-таки добиться второго издания своей пошлой и педантично-схоластической книги о банках. Он — надутый осел, который каждую банальную тавтологию 1) облекает в алгебраическую формулу и 2) изображает ее геометрически. Я уже его основательно лягнул в появившемся у Дункера выпуске». Маркс имеет в виду свое примечание к одной из страниц работы «К критике политической экономии», печатавшейся в берлинском издательстве Ф. Дункера отдельными выпусками: «Господин Маклеод, несмотря на свое доктринерское пристрастие к дефинициям, настолько не понимает элементарнейших экономических отношений, что выводит происхождение денег вообще из их наиболее развитой формы...»

Это высказывание Маркса, оброненное мимоходом и по частному поводу, затрагивает «больной вопрос» всей современной ему «математической школы» — непонимание ею сути экономических процессов.

...Нет, не для сражения с джевонсами ковал он свое математическое копьё. Маркс слишком хорошо понимал суть математики как науки, чтобы не представлять себе со всей очевидностью, насколько справедливо сравнение Гексли: этот жернов и в самом деле способен перемолоть все на свете, и потому в какие бы пышные математические одежды ни рядилась та или иная теория, выводы ее неизбежно будут ложными, если неверны исходные предпосылки. И Маркс, обнаружив «экономическую слепоту» Джевонса, не стал останавливаться на критике его работ. Замах Маркса был куда шире и куда неожиданнее по мысли — он хотел, как и сообщал Самюэлу Муру, «математически вывести... главные законы кризисов». Иными словами, построить математическую модель капиталистического хозяйства. Желание это родилось у него не сразу и не само по себе — оно вытекало из самого подхода его к экономике.

На границе девятнадцатого и двадцатого веков, в 1900 году, русский «легальный марксист» С. Булгаков с неудовольствием писал, что таблицы и формулы в «Капитале» являются результатом чрезмерного иногда пристрастия Маркса к облачению его мыслей, нередко очень простых, в сложную математическую одежду.

Вполне респектабельный ученый, видимо, разделял ту наивную точку зрения обывателя, согласно которой Маркс все «сначала придумал, а потом — для научности — обрядил в математику».

Если бы нужно было оспаривать этот тезис, то в качестве аргумента лучше всего использовать десятки тетрадей, тысячи страниц с черновыми записями Маркса, с подготовительными работами, которые он выполнял «не для печати, а для уяснения вопросов самому себе». Там мы увидим множество листов, исписанных уравнениями, с помощью которых Маркс изучал законы экономической жизни капиталистического мира. Маркс применял математику для анализа форм стоимости и денег, состава капитала, нормы прибавочной стоимости и нормы прибыли, для исследования процесса обращения капитала, его воспроизводства и накопления, для изучения ссудного капитала и кредита, дифференциальной ренты...

Гигантское здание «Капитала», возводившееся Марксом, планом своим напоминает план другого величественного сооружения науки — механики. Первый том «Капитала», где рассматривается непосредственный процесс производства капитала — это статика, второй том, посвященный процессу обращения капитала, — кинематика, и, наконец, третий, где весь процесс капиталистического производства анализируется в целом, — это синтез первой и второй частей, динамика. Построив конструкции первого и второго тома, Маркс, вероятно, предполагал объединить их в третьем томе в единую структуру, дав целостную математическую картину всего капиталистического производства. Частично это удалось ему сделать в анализе связи нормы прибыли и нормы прибавочной стоимости...

Предположения о вторичности математической формы «Капитала» исчезают после первого же, даже поверхностного знакомства с методом работы Маркса над

экономическими задачами. Наоборот, в чистовом печатном варианте иногда даже отсутствуют те или иные стадии его математического обоснования...

Он строит свои экономические модели, постепенно совершенствуя их форму и накапливая опыт их анализа — об этом свидетельствует переход от графической схемы простого воспроизводства, которая в значительной степени была еще данью школе Кенэ, к алгебраическим соотношениям — уравнению для простого воспроизводства и неравенству — для расширенного. Примечательно, что к числу самых первых арифметических расчетов, найденных в сохранившихся рукописях Маркса, относятся выкладки, сделанные Марксом в тетради по политической экономии, содержащей выписки из книг Кенэ.

Особо интересны те численные эксперименты, которые проводил Маркс на созданных им моделях. «...Меня так чертовски задерживают ошибки в подсчетах», — сетовал Маркс. Его можно понять. Вся работа при анализе экономических моделей Марксу приходилось выполнять вручную — у него ведь не было ЭВМ. Отсюда, видимо, и его высказанное в письме к Энгельсу желание взять «правильный прицел» «окольным алгебраическим путем»: Маркс хотел там, где это возможно, получать результаты не в числовой, а в более общей алгебраической форме и сократить тем самым объем «рутинной работы».

Но Маркс в своем экономическом анализе не собирался ограничивать себя одной лишь элементарной математикой. Уже в черновых набросках к «Капиталу» он оперирует понятиями дифференциального исчисления для выражения процесса самовозрастания стоимости и рассматривает приращение стоимости как дифференциал некоторой функции. Маркс считал необходимым расширять арсенал математических средств, привлекаемых к анализу экономических задач. Известно, например, что в «Критике Готской программы», рассматривая совокупный общественный продукт, он указывает на необходимость исчислять размер отдельных его элементов «...на основе наличных средств и сил, отчасти на основе теории вероятности...»

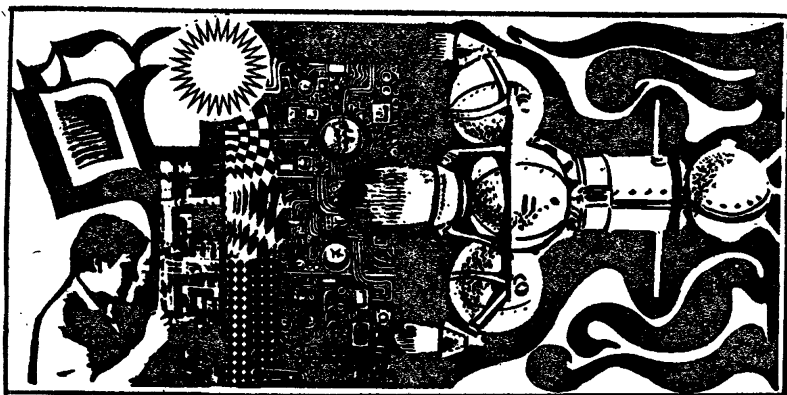
Что же касается формы, «математических одежд» экономических сочинений, то она действительно представлялась Марксу наиболее целесообразной, причем не только в научной, но и в популярной литературе. Это

видно из скоротечного обмена мнениями между Энгельсом и Марксом — как это часто бывало, в письмах — 22 и 23 мая 1868 года. К тому времени первый том «Капитала» уже был напечатан на немецком языке, и Энгельс собирался написать рецензию о нем для английского журнала «Fortnightly Review», причем так, чтобы донести до читателя суть сделанного Марксом. В письме автору «Капитала» Энгельс жалуется на трудности: «...до сих пор еще не могу справиться с началом. Дьявольски трудно объяснить диалектический метод читающему журналы англичанину, — ведь не могу же я сунуться к читающей публике с формулами $T-D-T$ и т. д.».

Маркс тут же отвечает своему другу и рецензенту:
«Дорогой Фред!

По-моему, ты напрасно опасаясь преподнести английскому филистеру, читателю журналов, такие простые формулы, как $D-T-D$ и т. п. ...Полагаю, что ты облегчишь дело и самому себе и читателям, если используешь эти формулы».

...Как видим, Маркс — в отличие от С. Булгакова — считал, что использование формул не затемняет, а проясняет мысль автора.



Из всех языков мира самый лучший — это искусственный, весьма сжатый язык, язык математики.

Н. И. Лобачевский

1

Современный американский эконометрост Герхард Тинтнер назвал в одной из своих книг два имени «выдающихся политэкономов, никогда не пользовавшихся математическим методом». Одним из этих имен было имя Карла Маркса.

Примерно в то же время теоретический журнал английских коммунистов «Мансли ревю» опубликовал статью Л. Иогансенсена «Марксизм и математическая экономика», в которой о Марксе говорилось: «Он видел потенциальные возможности применения математических методов в экономическом анализе и рассматривал применение или неприменение математики как критерий точности и научности данной области знания. Сам Маркс применял математические методы в «Капитале» и, вероятно, использовал их в еще большей степени в некоторых не опубликованных до сих пор работах».

Одну из таких все еще полностью не ставших достоянием печати работ Маркса — знаменитую тетрадь VIII «Норма прибавочной стоимости и норма прибыли,

тракуемые математически», изучала доктор экономических наук Вера Сергеевна Дунаева. Она изложила несколько примеров из нее в своей книге «Применение математического метода в политической экономии». Со всей осторожностью, диктуемой ситуацией и характером материала, она рискует сделать вывод: «Эти законы частных сфер, полученные математическим путем, могут быть использованы в какой-то мере при определении эффективности того или иного варианта капиталовложений в условиях социализма». Все оказалось интересным современному специалисту в этой черновой тетради столетней давности, густо исписанной математическими выкладками, — и метод и результаты...

В том, что при изучении еще не опубликованных экономико-математических работ Маркса исследователя могут ожидать открытия, по-новому рисующие место Маркса на фоне сегодняшних достижений экономической мысли, убеждает случай с польским ученым Вацлавом Пшелясковски. Коллега обратил его внимание на то, что в появившейся в 1953 году на языке оригинала в Москве и Берлине «Критике политической экономии» содержится таблица, очень похожая на популярные в нынешней экономической науке таблицы межотраслевых балансов. Пшелясковски открыл книгу и поразился — Маркс в своей черновой тетради действительно построил таблицу сбалансированного обмена между несколькими отраслями хозяйства, причем выполнил ее в виде «шахматной» таблицы. А ведь именно разработка межотраслевых балансов точно в таком табличном виде считается одним из самых сильных современных экономико-математических методов.

Как же получилось, что такой важный факт истории науки прошел мимо внимания специалистов? Дело в том, что «Критика политической экономии» — черновая работа Маркса, первый набросок будущего «Капитала», так сказать, лабораторный стенд, с помощью которого создавался «Капитал». Свою первую задачу эта стопка черновых тетрадей, написанных в 1857—1858 годах, выполнила — исследование было закончено, первый том «Капитала» опубликован. А поскольку, по мысли Маркса, «...способ изложения не может с формальной стороны не отличаться от способа исследования», то Маркс и не собирался, видимо, обнародовать эти тетради, где он, по его словам, детально осваивался с материалом,

анализировал различные формы его развития, прослеживал их внутреннюю связь... Впервые эта рукопись была подготовлена к печати Институтом марксизма-ленинизма и опубликована полностью на языке оригинала перед самой войной, в 1939—1941 годах. Потом последовало послевоенное издание 1953 года, и, наконец, впервые на русском языке текст рукописи полностью появился лишь в 1968 году в 46-м томе Сочинений К. Маркса и Ф. Энгельса.

Первый комментатор этой таблицы Маркса, Вацлав Пшелясковски, писал в журнале «Штудии экономичны»: «Это первая в истории экономической мысли шахматная таблица межотраслевых связей, выраженных в денежном исчислении или в процентном соотношении... Первый столбец отвечает строке схемы Леонтьева (американский экономист, которому на Западе приписывалась честь открытия балансовых таблиц.— Л. К.), обозначающей заработную плату рабочим, занятым в производстве. Последний столбец обозначает прибавочную стоимость — прибыль. Ясно, что это замкнутая модель». И далее, касаясь второго варианта таблицы, когда предполагается, что часть прибавочного продукта капиталисты снова вкладывают в производство: «Мы имеем здесь дело с динамической схемой расширенного воспроизводства. Это — линейная схема в виде матрицы стоимостных коэффициентов...»

Впрочем, и не обратив внимания на Марксову пятисекторную модель с ее «турнирной» формой, советские экономисты давно считали Маркса родоначальником межотраслевых балансов: «В системе планового руководства народным хозяйством огромное значение имеют отчетные и плановые балансы народного хозяйства, в основе которых лежит схема расширенного производства Карла Маркса». Эти слова принадлежат академику В. С. Немчинову, который когда-то стоял у самых истоков плановой и научной деятельности экономистов Советской России и участвовал в ней на протяжении десятилетий.

2

В том, что была установлена роль Маркса как предтечи современной математической экономики, особенно значительна заслуга одного из крупнейших польских экономистов профессора Оскара Ланге. Опытный теоре-

тик и практик (Ланге много лет был экономическим экспертом Организации Объединенных Наций), Ланге обладал обширными познаниями в математике, теории регулирования, был настоящим знатоком марксистской экономической науки и стремился развивать ее на базе современных методов. Он много писал и говорил о роли и заслугах Маркса в математизации экономики и доказательно отстаивал этот тезис, рассматривая схемы воспроизводства, приведенные Марксом в «Капитале». В своей книге «Введение в экономическую кибернетику» он возводит их на уровень открытий современной математической экономики. Ланге анализирует обе схемы Маркса в той главе своей книги, которая носит название «Кибернетические схемы теории воспроизводства», и считает, что Марксовы схемы настолько исчерпывают эту тему в ее самом общем виде, что рассматривать какие-либо иные кибернетические модели нет необходимости. Собственно, эта глава в книге Ланге и ограничивается анализом двух основных схем Маркса.

Ланге показывает также, что Марксовы схемы воспроизводства полезны и при анализе хозяйства с точки зрения другой модной современной теории — устойчивости экономических систем. В параграфе «Динамика процесса воспроизводства по Марксу» Ланге проводит динамический анализ схем Маркса и показывает, что процесс, смоделированный Марксом, устойчив.

Марксовы схемы воспроизводства послужили моделями для изучения экономических процессов не только самому автору «Капитала». Дополняя, расширяя возможности этих моделей прежде всего за счет раскрытия входящих в формулы Маркса переменных (кстати, в полном соответствии с идеями Маркса и во многих случаях пользуясь другими формулами и соотношениями, приведенными в том же «Капитале»), экономисты углубляли исследование воспроизводства и обнаруживали новые закономерности.

Первое веское слово сказал здесь тогда еще совсем молодой Ленин. Выступив в 1893 году с рефератом «По поводу так называемого вопроса о рынках», Ленин дал свой вариант Марксовой схемы воспроизводства, выполнив его в виде компактной таблицы. Он дополнил модель, введя в нее не учитывавшееся Марксом изменение органического строения капитала. Учет тенденции к росту постоянного капитала (с) по отношению к перемен-

ному (v), то есть, по существу, учет непрерывного совершенствования техники, придал модели Ленина целенаправленный динамический характер и позволил ему сформулировать закон о преимущественном росте средств производства.

Любопытно, что своей работой Ленин словно бы заранее ответил тем критикам, которые впоследствии неоднократно пытались в той или иной форме утверждать, что «Маркс устарел», что-де разработанные им модели не учитывают возможностей технического прогресса, не способны вместить в себя те бурные изменения в технике и технологии, которые принес двадцатый век. В числе этих критиков одно время была и Роза Люксембург: «Итак,— писала она в 1912 году,— если мы вместе со схемой Маркса допускаем, что расширение капиталистического производства всегда происходит только за счет прибавочной стоимости, произведенной наперед в форме капитала, и далее — что является лишь другой стороной того же самого допущения,— что накопление одного подразделения капиталистического производства находится в строжайшей зависимости от накопления в другом подразделении, то получится, что изменение в технической основе производства невозможно (поскольку оно выражается в отношении s к v)».

Люксембург писала даже, что в примерах, разобранных Марксом, просто-напросто имеют место математические действия над удачно подобранными числами...

Ленинский разбор дополненной и усовершенствованной Марксовой схемы, учитывающей фактор технического прогресса,— прекрасный ответ критикам Маркса. Числовые примеры Маркса оказались верны и сохранили свою доказательность не потому, что были «подогнаны под ответ», а потому, что отражали объективный характер пропорций в капиталистическом производстве. Именно поэтому они сохранили и важнейшее свойство всякой модели — воспроизводимость результатов, возможность получать качественно аналогичные процессы при иных (в разумных пределах, конечно) исходных данных. И еще одним важнейшим качеством всякой модели обладают Марксовы схемы — и это тоже показал Ленин в своем реферате — они допускают усложнение, позволяют расшифровывать, раскрывать структуру отдельных простейших звеньев, входящих в модель.

Метод работы Маркса заключался обычно в том,

чтобы на основе экономического анализа исходного материала суметь абстрагировать существенные зависимости и выразить их в математической форме, а затем путем анализа числовых моделей, а также математическим исследованием самих формул выявить характер изменения одних величин при изменении других.

Маркс описал достаточно простыми алгебраическими формулами основные зависимости капиталистического производства. Выведенная им формула стоимости «всякого капиталистически произведенного товара (W)», выраженная соотношением: $W = c + v + m$, где m — прибавочная стоимость, а остальные два члена — «...эквивалент или стоимость, возмещающая в товаре капитальную стоимость $c + v$, израсходованную в виде элементов производства», стала базой для исследования многочисленных связей капиталистической экономики, реализуемых через стоимость. Путем алгебраических преобразований Маркс получал из одних формул другие, математически исследовал их, интерпретировал экономически и формулировал законы, зачастую до него неизвестные и составлявшие неодолимые трудности для его предшественников. Раскрывая в формулах значения отдельных переменных (обычно подстановкой вместо той или иной переменной алгебраического выражения, отражающего ее зависимости от других величин), Маркс анализировал и более сложные связи. Нечего и говорить, что такой анализ без математики был бы попросту невозможен. Яркий пример такого движения мысли — исследование зависимости нормы прибыли $p' = \frac{m}{c+v}$ (здесь те же обозначения,

что и выше, то есть m — прибавочная стоимость, c и v — соответственно постоянный и переменный капитал) от органического строения капитала, то есть от отношения $\frac{c}{v}$. Маркс использует дополнительно выражение нормы

прибавочной стоимости $m' = \frac{m}{v}$ и выводит математический результат, отражающий зависимость нормы прибыли от соотношения между постоянным и переменным капиталом, то есть от его строения: $p' = \frac{m'}{1 + \frac{c}{v}}$. Так он уста-

навливает закон о том, что средняя норма прибыли имеет тенденцию к понижению.

Таким же путем Маркс исследует и связи между обоими подразделениями капиталистического производства — первым, производящим средства производства с общей стоимостью совокупного продукта I ($c + v + m$), и второго, производящего предметы потребления, с общей стоимостью продукта II ($c + v + m$), и устанавливает свои знаменитые соотношения $I(c+v) = IIc$ для простого воспроизводства и $I(v+m) > IIc$ — для расширенного. Анализ связей между основными подразделениями капиталистического производства позволяет Марксу вскрыть закономерности образования цен и продемонстрировать тот механизм, который, действуя в условиях домонополистического капитализма, с неизбежностью приводит к периодическим кризисам.

Не называя слова «модель», Маркс тем не менее четко определяет особенности обращения с этим инструментом. Он, например, рассматривая схему простого воспроизводства, специально оговаривается, что она не является точным сколком с действительности, а отражает лишь ее самые существенные черты, причем при вполне определенных условиях: «Простое воспроизводство, т. е. воспроизводство в неизменном масштабе, является абстракцией лишь постольку, поскольку, с одной стороны, на базисе капиталистического производства отсутствие всякого накопления или воспроизводства в расширенном масштабе является неправдоподобным предположением, и поскольку, с другой стороны, условия, при которых совершается производство, в различные годы не остаются абсолютно неизменными (а они предполагаются неизменными)».

...Примером гениальной простоты навсегда останется модель тяготения, которой пользовался Исаак Ньютон. Он не знал — да и до сих пор никто не знает — всех свойств ни Солнца, ни Земли. Но Ньютон предположил, что для изучения взаимодействия этих двух небесных тел неважно, какова их температура, химический состав, форма, размеры, достаточно знать лишь их массу и расстояние между ними — и ничего более. Его гипотетическая модель представляла собой всего две точки — одна весила столько же, сколько Солнце, другая — сколько планета, на которой мы живем. Но и сегодня траектории спутников вычисляют, пользуясь законом всемирного тяготения, открытого Ньютоном с помощью этой гениально простой модели.

Живая реальность с ее сложными связями словно растворялась, оставляя в руках исследователя сухой «перечень переменных» и зависимостей между ними.

Такой перечень переменных и пытаются обычно отыскать экономисты при построении своих моделей. Отбросить второстепенное и оставить главное, найти связи, скрепляющие звенья системы, и построить костяк модели. Дальше в работу может вступать математика, облегчая исследование полученной модели.

И все же вплотную приближают нас к истине те модели, где внешнее проявление является отражением правильного и глубоко понятого внутреннего механизма. Практика показывает, что тезис этот особенно справедлив для экономики, где в течение десятилетий многие ученые пытались строить модели отдельных процессов, не понимая основ функционирования экономического общества в целом, не разобравшись до конца в экономических законах.

Как видим, модель модели рознь. А ведь, казалось бы, чем геометрическая прогрессия Прайса или Мальтуса хуже той геометрической прогрессии, которую использовал Кенэ при построении своего «зигзага»? А уж о формуле Прайса и говорить нечего, она ежегодно реализуется и в любом западном банке и в каждой советской сберкассе.

Теперь пожалуй, самое время еще раз коснуться темы об экономико-математической модели и ее особенностях. Похоже, что в этой области науки, как, может быть, нигде, важно понять и отразить в модели внутренний механизм процесса, а не только его внешние проявления. Впрочем, речь здесь идет, собственно, о двух стилях в составлении моделей. Один идет от теории, когда анализ порождает абстракцию. Математика служит средством выражения этой абстракции и ее исследования. Второй подход — попытка, не вдумываясь в механизм, уловить внешний характер процесса и оформить его математически.

Кеплер, как известно, открыл законы движения планет, сопоставляя наблюдения о положении небесных тел за многие годы. Если выражаться в терминах современной эконометрики — путем обработки «статистических данных». Его законы определяют траектории движения планет и связывают интервалы времени и геометрические характеристики перемещения планет. Законы Кеп-

лера верны, они позволяют предсказывать движение планет. Несомненна их практическая польза и их роль в познании природы. Но Ньютон подошел к делу иначе. Его законы описывают тяготение, следствием которого является движение планет. Законы Ньютона в качестве переменных используют массу, силу, ускорение. Из уравнения, данного Ньютоном для материальной точки, движущейся в поле притяжения центральной силы, можно как частный случай получить уравнения Кеплера для траекторий планет. Ясно, что модель Ньютона несравненно богаче модели Кеплера, ибо она не просто в своем внешнем проявлении совпадает с внешним проявлением процесса, но и правильно выражает его суть.

Экономическая наука знает модели обоих видов. Но методика Маркса близка здесь методике Ньютона, давшего решение задач движения на базе модели тяготения. Пожалуй, аналогия здесь глубже, чем кажется на первый взгляд. В предисловии к «Капиталу» Маркс писал, что конечной целью его работы «...является открытие экономического закона движений современного общества». Маркс открыл этот закон, установив механизм экономических процессов и построив его модели.

3

Капитализм — с его конкурентной борьбой, с его кризисами и безработицей — по сути своей строй расточительный, неоптимальный. Здесь, как писал Маркс, существует лишь «...случайная связь между всем количеством общественного труда, затраченного на данный общественный продукт... с одной стороны, и, с другой стороны, между тем объемом, в котором общество стремится удовлетворить потребность при помощи данного определенного продукта». В трудах основоположников марксизма есть немало высказываний о том, как должен выглядеть экономический механизм общества, не знающего конкуренции. Одно из самых первых принадлежит двадцатичетырехлетнему Энгельсу и опубликовано в 1844 году Марксом в «Немецко-французском ежегоднике»: «В строе, достойном человечества... общество должно будет рассчитать, что можно произвести при помощи находящихся в его распоряжении средств, и сообразно с отношением этой производительной силы к массе потре-

бителей определить, насколько следует повысить или сократить производство...»

В первые же годы Советской власти, когда выявилась необходимость сконструировать экономические модели для руководства плановым хозяйством страны, по инициативе Владимира Ильича правительство поручило Центральному статистическому управлению составить баланс народного хозяйства СССР на 1923—1924 годы. В 1925 году в газете «Экономическая жизнь» был опубликован доклад руководителя ЦСУ СССР П. И. Попова, сделанный в Совете Труда и Обороне. Первые результаты построения баланса были изложены Поповым здесь, на заседании СТО, как называли тогда Совет, поскольку именно Советом в июне 1924 года было принято постановление о разработке баланса.

Журнал «Плановое хозяйство» отозвался на этот доклад подробной рецензией, которая начиналась словами: «В ряду многообразных задач, разрешение которых предстоит современной русской статистике, может быть, наиболее интересной, но и наиболее сложной является задача представить в цифрах общий кругооборот хозяйственной жизни. В результате многолетних работ Центрального статистического управления появился «Баланс Народного Хозяйства СССР в 1923/24 г.». Принципиально новым в этом балансе, при сравнении его с обычными хозяйственно-статистическими обследованиями, как, например, с американским и английским цензом, является попытка охватить цифрами не только производство, но и распределение общественного продукта, чтобы таким путем получить общую картину всего процесса воспроизводства в форме некоторого «Tableau économique» («Экономической таблицы»).

В следующем году данные были изданы в виде обширной монографии, где приводились балансы по трем десяткам сельскохозяйственных продуктов, по двум продуктам лесного хозяйства и по нескольким продуктам фабрично-заводского производства. Но особый интерес в этой работе, как отмечал впоследствии академик В. С. Немчинов, представляли стоимостные балансовые таблицы: капиталы, баланс производства и распределения общественного продукта, народный доход, а также «шахматный» баланс производственного потребления, то есть затрат сырья, материалов, топлива и орудий труда.

В таблицах были приведены и данные о выплаченной заработной плате.

Первая публикация баланса народного хозяйства уже содержала «шахматную» таблицу «Потребление продуктов промышленности», где показан оборот средств между отдельными отраслями промышленности. Межотраслевые связи с сельским хозяйством были даны в таблице «Валовая и чистая продукция».

В первом советском балансе «орудия производства» выделены в отдельные строки. Предусмотрено также выделение строительства как отдельной отрасли. Таким образом, коллективный труд советских экономистов содержит не только «шахматный» баланс затрат и выпуска продукции, но и баланс орудий производства и строительства (то есть капитальные вложения). Такой баланс как бы увязывал между собой настоящее и будущее, ибо капитальные вложения — это подготовка будущего, и стыковка их с планами развития народного хозяйства — один из самых трудных динамических вопросов балансовой модели.

Советскими экономистами подмечен еще один кардинальный аспект баланса, позволяющий рассматривать его не только как отчет о прошлом, но и как многосвязную модель народного хозяйства страны, помогающую просчитывать и увязывать между отдельными отраслями планы на будущее. Эта особенность «шахматной» модели — возможность использования цифр, стоящих в пересечении строк и столбцов как неких «технических коэффициентов» обмена продукцией между отраслями, обычно мало меняющихся от года к году. По этому поводу советский ученый М. Баренгольц писал уже в 1928 году, анализируя «шахматные» балансы одиннадцати отраслей промышленности СССР за три года: «При отсутствии технической «революции» в области производства коэффициенты внутрипромышленного оборота... дают в натуре, а при соответствующей поправке на изменения цен и в ценностном выражении, вполне устойчивые динамические показатели, как для определения общего размера потребления и внутрипромышленного оборота, так и для установления конкретной взаимной связи между отдельными отраслями промышленности».

Авторы первого в мире народнохозяйственного баланса (вместе с П. И. Поповым, возглавлявшим работу, основной вклад в нее был сделан Л. Н. Литошенко,

О. А. Квиткиным, Ф. Г. Дубовиковым, Н. О. Дубенцким и И. А. Морозовой) понимали значение нового шага, совершенного ими в экономической науке и практике. Ведь даже название — баланс народного хозяйства — принадлежало им и было употреблено ими впервые! Конечно, они представляли себе, сколько еще предстоит сделать — тоже впервые — тем, кто продолжит работы в этой области, но все же отмечали с гордостью: «...баланс 1923/24 года и предположительный баланс 1924/25 года разрешили в основном вопросы методологии балансов». И продолжали: «Мы надеемся, что научно беспристрастная критика скажет, что проблема баланса народного хозяйства, в общем и целом, как проблема, нами разрешена, что путь для будущих работ по балансу — открыт, и те, кто пойдет по этому пути, пойдут, опираясь на нашу работу, исправляя, углубляя и совершенствуя ее».

Поразительно, с какой спокойной деловитостью новая Россия, разрушенная и истощенная войной, вела целенаправленный, научный учет своей хозяйственной жизни. Уже с 1918 года ЦСУ начало систематическое исследование и обработку статистических данных, в последующие годы неоднократно производились разного рода экономические переписи и переписи населения. Неоценимую методическую помощь авторам баланса оказал, конечно, знаменитый план ГОЭЛРО, который также решал определенную балансовую задачу, сопоставляя потребности и возможности разоренной страны. Но все же здание народнохозяйственного баланса — от фундамента и до крыши — его авторам предстояло и задумывать и строить самим. Ни российская дореволюционная, ни зарубежная статистика не знали ничего подобного. И составители баланса обращаются к Марксу, к его схемам воспроизводства. «Общие теоретическо-методологические предпосылки, — писал П. И. Попов в предисловии к «Балансу народного хозяйства», — мы находили в положениях, которые были разработаны К. Марксом, подведшим итог исследованиям Кенэ и давшим законченную систему как простого, так и расширенного воспроизводства общественного хозяйства».

...С именем Карла Маркса связан и новый взлет экономико-математической мысли в нашей стране, начавшийся в пятидесятые годы и отразившийся не только в возникновении нового мощного научного направления,

но и в перестройке всей хозяйственной жизни страны в целом.

Пример такой связи — обращение к Марксовым схемам воспроизводства одного из ведущих наших экономистов, академика В. С. Немчинова, бывшего в те годы председателем Совета по изучению производительных сил. Немчинов искал средства повысить эффективность экономической науки, усилить ее влияние на реальную производственную деятельность, на всю хозяйственную практику. В начале 1958 года Василий Сергеевич был по делам Совета в научной командировке в Англии. Знакомство с материалами межотраслевого баланса этой страны, — а к тому времени балансовый метод изучения народного хозяйства стал уже достоянием экономистов всего мира, — натолкнуло его на мысль, что в основе научного анализа балансовых схем должна лежать все та же Марксова модель. И хотя находился он в заграничной командировке совсем по иному поводу, Немчинов все свое свободное время посвящает исследованию народнохозяйственного баланса Великобритании с этой новой точки зрения. Он разрабатывает алгоритм перевода таблиц английского межотраслевого баланса в схемы расширенного воспроизводства «по Марксу» и, подгоняемый нетерпеливым желанием скорее убедиться в плодотворности такого подхода, посылает в письме на родину подробную программу для реализации этой задачи методом ручного счета. Ведь для решения экономических задач электронные вычислительные машины у нас в те годы еще не использовались. На основе Марксовых схем Немчинов вводит в политическую экономию новое понятие — потенциал расширенного воспроизводства — и дает способ расчета этого потенциала как разности между вновь созданной стоимостью в подразделении, выпускающем средства производства, и перенесенной стоимостью в подразделении, изготовляющем средства потребления. Этот потенциал Немчинов предлагает использовать как меру сбалансированности национальной экономики...

К тому времени многие наши экономисты и математики были уже увлечены идеями научно обоснованного анализа и синтеза социалистической экономики и горели желанием построить оптимальную систему хозяйства. Вместе с В. С. Немчиновым в центре подобных интересов были экономист В. В. Новожилов и математик

Л. В. Канторович. Работы этих ученых, возглавивших поначалу небольшие группы молодых энтузиастов, привели к созданию в скором времени новых крупных научных учреждений во многих городах, а главное — к широкому внедрению их предложений в народнохозяйственную практику страны. Знаменитая хозяйственная реформа 1965 года, осуществленная Центральным Комитетом партии и направленная на повсеместное внедрение хозрасчета и принципов материального стимулирования, в научном плане была подготовлена работами этих трех ученых и их многочисленных последователей. Василий Сергеевич Немчинов умер незадолго перед началом реформы. В некрологе, посвященном его памяти, газета «Нью-Йорк таймс» написала, что он был «тайным советником Кремля». Это определение, как отмечалось в сборнике, выпущенном после смерти Немчинова его учениками и соратниками, ошибочно только на одну треть — первую.

4

Метод межотраслевого баланса, развитый советскими экономистами в двадцатые годы под непосредственным влиянием идей К. Маркса, оказал влияние и на развитие экономической мысли на Западе.

Сокрушительный экономический кризис 1929—1933 годов, потрясший до основания весь капиталистический мир, заново поставил перед буржуазными исследователями вопрос о разработке каких-то антикризисных мер. А это, естественно, требовало и соответствующего методологического оснащения. Нужно было научиться выявлять количественные взаимосвязи отдельных элементов капиталистической экономики.

Американский экономист Василий Леонтьев начал в 1931 году исследования межотраслевых связей в экономике США. Он рассматривал годы 1919 и 1929 — первый послевоенный год и год, с которого начался кризис. Леонтьев учился в Ленинградском университете, который окончил в середине двадцатых годов, был хорошо знаком с работами советских экономистов по составлению балансов народного хозяйства (это его перу принадлежит упоминавшаяся уже рецензия в журнале «Плановое хозяйство» на доклад Попова о первых результатах работы над балансом страны). Достижения советской экономической мысли были с успехом исполь-

зованы В. Леонтьевым в его работе, а в 1936 году опубликованы первые ее результаты. Леонтьев принял не только «шахматную» форму советской таблицы, но и вслед за советскими экономистами включил в валовой общественный продукт предметы труда, то есть промежуточные продукты. Это противоречило традициям англо-американской экономической школы, но зато позволило «замкнуть» схему баланса производства и распределения продукции между отраслями.

В. Леонтьев развил метод балансового анализа производственных связей, наложив друг на друга две таблицы: баланса производства и распределения общественного продукта и народного дохода. Но едва ли не самым важным было то, что он записал соотношения баланса в виде системы уравнений с коэффициентами, выражающими межотраслевые связи — при этом он воспользовался идеями первого русского специалиста в области математической экономики В. К. Дмитриева).

(Небольшая деталь... Когда возник спор о приоритете в создании балансовых таблиц, В. С. Немчинов сравнил первую такую таблицу, сделанную американскими экономистами в тридцатые годы, с таблицей народнохозяйственного баланса, построенной советскими специалистами еще в начале двадцатых годов, и обратил внимание на множество совпадений в форме этих таблиц, указывавших на очевидное знакомство американцев с работами их советских коллег. В частности, Немчинов говорил, что в первой таблице американцев целый ряд строк стоял на тех же самых местах — там же, где и в советском балансовом документе. Но нелишне заметить, что форма и советской, и американской таблиц следует за первой таблицей Маркса, где отрасли промышленности были расположены по «строкам», а в нижней, итоговой «строке» приводились данные по совокупному продукту. Кстати говоря, и в этом схема Маркса отлична от схемы Кенэ...)

В своей книге «Введение в эконометрику», вышедшей в Польше в конце пятидесятых годов, Оскар Ланге писал: «...Анализ Леонтьева, вероятно всего, исторически возник под влиянием Марксовой теории воспроизводства и практики составления материальных балансов в Советском Союзе, ибо Леонтьев хорошо знаком как с трудами Маркса, так и с советской экономической литературой». И Ланге подчеркивал силу и глубину те-

оретической мысли Маркса: «Интересно также то, что анализ Леонтьева, исходящий из эмпирических критериев, приведет к понятиям, соответствующим тем, которые были введены в теоретических трудах Маркса...» Схемы воспроизводства, созданные Марксом, явились, таким образом, теоретической основой моделей межотраслевого баланса.

Жаль, но В. Леонтьев упорно отрицал влияние на него работ советских экономистов. В шестидесятых годах он даже опубликовал в журнале «Форин афферз» статью, в которой пытался оспорить тот факт, что впервые методология анализа межотраслевых связей в народном хозяйстве была дана в подготовленном ЦСУ балансе народного хозяйства на 1923/24 год. Более того, он не захотел признать даже своего близкого знакомства с этой работой. «Отрицая приоритет советских экономистов и статистиков в разработке метода межотраслевых производственных связей,— говорил в своем докладе на совещании по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании академик Василий Сергеевич Немчинов,— В. Леонтьев, в частности, выдвигает явно неправдоподобную версию о том, что его статья (в то время В. Леонтьев оканчивал экономический факультет Ленинградского университета), напечатанная в журнале «Плановое хозяйство» (1925, № 12) и написанная им по поводу только что опубликованного в газете «Экономическая жизнь» баланса народного хозяйства СССР 1923/24 г., якобы является переводом из немецкого журнала. В. Леонтьев умалчивает также о том, что использованные им в работе «Структура американской экономики» математические уравнения в сущности являются уравнениями ленинградского экономиста-математика В. К. Дмитриева...»

Пожалуй, дело здесь не в простом замалчивании предшествующих работ, чтобы возвысить свою,— скорее всего, В. Леонтьева не устраивало признание того, что открытия, послужившие отправным пунктом его собственных исследований, принадлежали советской экономической школе. Ведь в той же статье в «Форин афферз» он утверждал, что, применяя математические методы в экономических исследованиях и планировании, советские ученые и практики лишь используют успехи буржуазной экономической науки.

Леонтьев не был одинок в этом утверждении. Тезис

об «эпигонстве» советской экономико-математической мысли развивали и другие его коллеги. Но вот недавно — одна за другой — выходят две книжки доктора Альфреда Заубермана из Лондонской школы экономики, изданные Оксфордским университетом. Первая — рассчитана на широкого читателя. В ней А. Зауберман повторяет избитую мысль об «импортированных с Запада математически сформулированных идеях». Вторая предназначена узкому кругу специалистов, и здесь автор уже не скупится на похвалы советской экономико-математической школе, говорит о необходимости заимствования у нее оригинальных идей, методов, моделей... В этой книге Зауберман пишет о том, что в фундаменте всех моделей советских экономистов лежит теория расширенного воспроизводства Маркса. Более того, вслед за многими объективными учеными он отмечает несомненное влияние Марксовой модели на построения ряда ведущих западных экономистов, в том числе и В. Леонтьева. Зауберман цитирует Леонтьева о том, что западные теоретики экономического роста в последнее время все больше осознают не признававшееся ими ранее воздействие идей и методов Карла Маркса...

В работах японского буржуазного экономиста Мичио Моришимы показано, что с формальной стороны в русле Марксовых схем воспроизводства находится и другая экономическая модель, созданная одним из крупнейших западных математиков Джоном фон Нейманом. Моришима обратил внимание на то, что модель Неймана, несмотря на всю ее математическую сложность, не противоречит моделям Маркса. Так же оценил модель Неймана и венгерский экономист Броди, выступая в 1967 году в Москве на Международной конференции по разработке межотраслевых балансов. Он отметил, что, по его мнению, это несомненно «уступка марксистской экономии со стороны Неймана». В предисловии к русскому переводу книги М. Моришимы «Равновесие, устойчивость, рост», в которой дается своеобразная сводка математических моделей экономических процессов, разработанных как самим автором, так и другими западными учеными, академик Л. В. Канторович писал: «...Автор, как и другие ученые экономисты капиталистических стран, принадлежащие к числу более объективных и добросовестных, занимаясь исследованием и развитием проблем экономической теории, не мог не указать на ра-

боты Карла Маркса, ибо в работах Маркса ставилось и глубоко анализировалось большинство важнейших проблем экономической теории и сделан особенно существенный вклад в экономическую динамику».

Столетняя годовщина выхода в свет первого тома «Капитала» стала своеобразным рубежом в отношении к Марксу буржуазных экономистов. Замалчивание, огульное отрицание сделанного Марксом сменилось почтительным «расшаркиванием» перед «Капиталом» и другими трудами Маркса. Конечно, буржуазная наука по-прежнему не желает принимать Марксову теорию прибавочной стоимости как результата неоплаченного труда рабочих. Но вклад Маркса в исследование экономической динамики, его роль в построении первых строгих экономических моделей сегодня общепризнаны. Недаром даже в той своей книжке, которая адресована массовому читателю и написана с заведомой необъективностью, Альфред Зауберман уже на самых первых страницах признает, что Марксова схема экономического роста была первой строгой моделью в истории экономической науки.

5

...Расчеты многочисленных вариантов межотраслевого баланса, попытки отыскать из них наилучший вызвали к жизни естественный вопрос: как строгим математическим методом, следуя определенным расчетным алгоритмам, а не перебирая все мыслимые варианты плана, найти оптимальный? Вопрос этот первым четко сформулировал молодой ленинградский математик Леонид Витальевич Канторович. Ему же — первому — и удалось вскоре отыскать ответ, причем в самой общей математической форме.

В конце тридцатых годов в Ленинградский университет пришли со своей задачей работники фанерного треста. Задача на первый взгляд казалась несложной: имеется восемь станков, на них нужно выпускать пять видов изделий. Известно, какой процент плана должны составлять изделия каждого вида. Известно также, что на каждом станке может изготавливаться любой из пяти видов изделия, но с разной производительностью. Нужно было так распределить работу между станками, чтобы выпуск продукции был наибольшим.

Орешек оказался крепким. Ни одним из известных

математике способов вопрос этот решить было невозможно. Дело в том, что на условия реальных задач, возникающих в процессе человеческой деятельности — особенно хозяйственной! — всегда наложены ограничения: все величины обретают смысл лишь в узком диапазоне, зажатом между границами «от — до». Эти ограничения весьма существенны, ими нельзя пренебрегать. Для фанерного треста, например, таким ограничением были производительность станков и требование выпускать изделия в пропорции, предусмотренной планом. Ясно, что если бы эти положения были нарушены, любая, даже самая выгодная загрузка станков не устроила бы трест. Классическая математика — испытанный метод нахождения экстремума, предсказанный Кеплером, сформулированный Ферма и доведенный до блеска Ньютоном, Лейбницем, Эйлером и Лагранжем, — умела справляться не со всеми задачами, связанными с ограничениями.

Разумеется, никто не стал бы разрабатывать новый математический метод, чтобы справиться с одной узкой и частной задачей. Но Леонид Витальевич Канторович еще раньше подметил, что проблемы, подобные той, которая занимала специалистов из фанерного треста, возникают в жизни довольно часто. Значит, речь шла не о случайной консультации, а о решении широкого класса технико-экономических задач: как, например, подобрать наилучшим образом комплект сельскохозяйственных машин для колхоза, как определить оптимальный раскрой материала, как рассчитать самый экономный план использования транспорта. Работа приобретала особый интерес, и потому двигалась вперед очень быстро. В том же году Леонид Витальевич предложил для решения подобных задач метод так называемых «разрешающих множителей». С его помощью аспирант Канторовича Юдин без труда справился с «фанерным вопросом». А сам Канторович уже обдумывал другие, более широкие проблемы. Перед ним раскрывались новые горизонты. К тому времени Леонид Витальевич уже понимал, что найденный им путь позволяет решать не только отдельные, пусть и важные задачи, но пригоден для построения и анализа технико-экономических планов, причем таких, лучше которых при данных хозяйственных ограничениях создать принципиально невозможно. И планы эти в условиях нашей страны могли быть со-

ставлены не для одного цеха или завода, и даже не только для одной какой-либо отрасли промышленности, а для всего народного хозяйства в целом. Это было уже целой новой наукой — наукой об оптимальном планировании. (Той самой наукой, один из методов которой спустя десятилетие получил название «линейное программирование» из уст американских ученых, заново переоткрывших его и начавших широко внедрять в практику.)

6

Двадцатипятилетний профессор понимал важность решенной им задачи. Понимали это, видимо, и его коллеги по университету. В мае 1939 года в университете состоялся доклад Л. В. Канторовича «Математические методы организации и планирования производства», на который были приглашены представители промышленных институтов. Через несколько дней докладчик выступил на ту же тему перед работниками строительства, а в том же году стенограмма его докладов, значительно расширенная и дополненная, была выпущена в виде отдельной монографии.

Введение к этой работе, провозглашающее рождение новой науки на стыке экономики и математики, заслуживает того, чтобы привести его полностью: «Грандиозные задачи, выдвинутые в плане третьей пятилетки, требуют, чтобы на основе наилучшего использования существующих резервов промышленности — материалов, рабочей силы, оборудования — добиться максимального выпуска продукции.

Существуют два пути повышения эффективности работы цеха, предприятия и целой отрасли промышленности. Один путь — это различные улучшения в технике, то есть новые приспособления в отдельном станке, изменение технологического процесса, нахождение новых, лучших видов сырья. Другой путь, пока гораздо меньше используемый, — это улучшения в организации производства и планирования. Сюда относятся, например, такие вопросы, как распределение работ между отдельными станками предприятия или механизмами, правильное распределение заказов по предприятиям, правильное распределение различных видов сырья, топлива и пр. Об этом весьма отчетливо сказано в решениях XVIII партсъезда. Там говорится, что «важней-

шим условием выполнения заданий программы роста производства в третьей пятилетке является... широкое развертывание работ по внедрению новейшей техники и научной организации производства». Тут именно отмечены оба указанных выше момента: наряду с внедрением новейшей техники подчеркнута роль научной организации производства.

В связи с решением одной задачи, предложенной Институту математики и механики ЛГУ лабораторией фабричного треста, нами обнаружено, что целый ряд проблем, относящихся к научной организации производства самого разнообразного характера (вопросы наилучшего распределения работы станков и механизмов, максимального уменьшения отходов, наилучшего использования сырья и местных материалов, топлива, транспорта и пр.), приводит к одной и той же группе (экстремальных) математических задач. Эти задачи не подходят непосредственно под задачи, рассматриваемые в математическом анализе. Вернее сказать, они формально подходят и даже формально оказываются очень простыми, но процесс решения, который там получается, совершенно не применим практически, так как для его выполнения требуется решение десятков тысяч или даже миллионов систем уравнений.

Нам удалось указать сравнительно простой общий метод решения этой группы проблем, который применим ко всем задачам, о которых говорилось выше, и достаточно прост и эффективен, так что решение их делается вполне осуществимым в практических условиях.

Следует еще подчеркнуть тот момент, что большая часть этих задач, относящихся к организации и планированию производства, связана именно с советской системой хозяйства и в большинстве случаев не возникает в экономике капиталистического общества. Там выбор продукции определяется не планом, а интересами, выгодами отдельных капиталистов. Владелец предприятия выбирает для производства те товары, которые в данный момент имеют более высокую цену, легче могут найти сбыт и потому дадут большую прибыль. Сырье берется не то, большие запасы которого имеются в стране, а то, которое предприниматель может купить дешевле. Вопрос о наиболее полном использовании оборудования не ставится: все равно большинство предприятий работает в половинную мощность.

В СССР дело обстоит иначе. Основной задачей предприятия является выполнение и перевыполнение плана, входящего в общегосударственный план, и притом не только выполнение плана по суммарным показателям, по общей продукции, общему тоннажу, и т. д., но непременно выполнение плана по всем видам продукции, т. е. ассортиментность — выдерживание плана по отдельным видам продукции, комплектность выпуска, выполнение комплектных изделий и пр.

Вот этот момент — необходимость выполнения плана комплектно и по ассортименту — является весьма существенным для нас, так как при постановке задач, связанных с получением максимального выхода продукции, мы должны учитывать ассортиментность и комплектность как весьма важные дополнительные условия. Весьма важным является также использование сырья и материалов, не как-нибудь априорно выбранных, но тех, которые реально имеются, в частности местных материалов, использование материалов в соответствии с тем, сколько их производится в данном районе; следует заметить, что наши методы позволяют решать задачи, связанные именно с этими реальными условиями и обстановкой».

...В 1928 году, когда советские экономисты с увлечением создавали все новые и новые «шахматные» таблицы межотраслевых балансов, один из основателей нашей отечественной математической экономики, Г. А. Фельдман, писал в журнале «Плановое хозяйство»: «Нельзя себе представить несложного метода проектирования такого сложного аппарата, каким является народное хозяйство. С другой стороны, мы не знаем более совершенной формы анализа, чем математика. Мы убеждены, что более или менее совершенное планирование народного хозяйства может быть осуществлено лишь на основе четко, математически сформулированной теории... Непреодолимые пока стихийные факторы будут определять лишь выбор определенных вариантов, заранее заготовленных, как планы боевых кампаний». Слова эти вызывают в памяти предвидение о том, что при «строе, достойном человечества», общество научится оптимальным образом рассчитывать стратегию своего хозяйства, высказанное Энгельсом и поддержанное Марксом в годы, когда оба они были молодыми и «дерзкими парнями».



Репрессиям товарищ Герш начал подвергаться вместе с Соней Яновской, Иваном Соколовым и Моноззоном в 1913 году в городе Николаеве...

Исаак Бабель

1

Она занимала номер на втором этаже гостиницы в Николаеве. Снизу, из ресторана, доносились пьяные голоса. Кухонный чад сочился сквозь стены.

Она подошла к окну. Редкие блики света падали на мостовую. Окна ресторана были плотно зашторены. Яновская усмехнулась: рекомендации генерала фон Бельца, командующего оккупационными частями в Одессе, пользовались успехом и в Николаеве. Это ему принадлежала идея занавешивать окна в ресторанах, чтобы голодающие не могли туда заглядывать. Истинно немецкое решение проблемы...

Звон шпор в коридоре, грохот сапог. В дверь соседнего номера стучат: «Проверка документов!» Под кроватью, в тюке, обернутом мешковиной, — листовки, подпольные газеты, револьверы. Она вытаскивает тюк, ставит его посередине комнаты. Отбрасывает засов на дверях, зажигает лампу и ждет. Дверь распахивается от удара. Офицер пристально разглядывает крохотную женщину, почти девочку, прижавшуюся к столу. Она

едва достает ему до пояса. Кругленькое личико, острый носик.

«Документы!» Яновская медленно и тщательно разворачивает бумаги — документы у нее в порядке. Офицер стремительно проходит вперед, спотыкается о тую и, выругавшись, отпихивает его в сторону. Заглядывает под кровать, отбрасывает матрац, выдвигает ящики стола. Уже в дверях он оборачивается и с презрительной, чуть брезгливой усмешкой — женщины появляются в этой гостинице лишь с определенной, ему хорошо известной целью — бросает: «Приятной ночи, мамзель...»

Как долго можно играть со смертью? Сколько месяцев, сколько дней, сколько раз на день? В прошлый раз она так же, как теперь, ехала связной одесского подпольного губкома. Ее арестовали еще в поезде. Офицер вошел в вагон на последней станции перед Николаевом. Сел на скамью напротив, улыбнулся, завел разговор. Спрашивал, куда и к кому едет, где остановится. С любопытством поглядывал на чемодан, вздувшийся от газет и брошюр. Она рассказала ему, что училась в Одессе на Высших женских курсах, увлекалась математикой. Поговорили о знакомых профессорах, о математических журналах. В Николаеве он сказал: «А теперь пройдемте со мной». В караульном помещении снял телефонную трубку: «Да, я арестовал ее. Нет, без очков... — он покосился на ее драповое пальто, — в тулупе. Не та? Слушаюсь!» И повесил трубку. «Вы можете передвигаться без очков?» — «Попробую». — «Спрячьте очки, снимите пальто и возьмите тулуп с вешалки, рукава закатите. Уходите с вокзала через багажное отделение».

Больше она его никогда не встречала...

Что сохраняет память спустя полвека? Пароль «засахаренные фисташки» (почему?), запах свежей типографской краски на оттисках подпольного «Коммуниста», отпечатанного в катакомбах, разнокалиберный шрифт (выкраден из различных наборных касс), отчего строчки в газете, казалось, подпрыгивают... В четыре часа ночи на пустынной одесской улице ее остановил патруль. Темно, где-то неподалеку стреляют. Она была уже в то время секретарем редакции «Коммуниста» и несла материалы очередного номера, вложенные в благонадежные «Одесские новости». Интересно, сколько раз ее должны были бы расстрелять, если за каждую ли-

ставку полагалась смертная казнь? На счастье, патруль интересовался только деньгами, а их у Яновской не было.

Восемнадцать контрразведок орудовали в Одессе. Восемнадцать контрразведок пытались отыскать редакцию газеты, каждую неделю расходившейся в пяти тысячах экземпляров. И каждую неделю маленькая женщина приходила на явочную квартиру — в молочную лавчонку на Нежинской улице, где в полутемной комнате хозяев собиралась редакция. Приходила, принося с собой выправленные материалы, собранные на заводах, сообщения, полученные с белогвардейских радиостанций, от железнодорожных телеграфистов, сочувствовавших большевикам. И уходила, унося с собой план нового номера.

А потом — фронт под Елисаветградом, борьба с остатками григорьевских банд, чоновские отряды в Чернигове, работа в Одесском губкоме партии. Осенью двадцать третьего года Яновскую командируют в Москву, в ИКП — Институт красной профессуры, а через два года она уже руководит в Московском университете семинаром для студентов и аспирантов по методологии математики и естествознания, ведет в ИКП ряд математических курсов.

2

Студенчество тех лет... Вчерашние школьники, привыкшие к тому, что все написанное в учебниках, изданных до революции, должно быть переделано, перевернуто, изменено. И выпускники рабфака, перед первой лекцией на рабфаке еще не знавшие, что земля — шар, и кричавшие своему преподавателю: «Врешь, профессор!» У всех неукротимая яростная жажда знаний, желание узнать все и сразу же, немедленно. И твердая уверенность, что все трудности на свете — даже если это трудности постижения науки — от происков мировой буржуазии. Предвзятое несогласие со всем, чему давность — десятилетие. И недоверие к профессорам, живым носителям этой давности, к их науке, к ее выводам и методам. Желание очистить науку от «буржуазной скверны», превратить ее в «пролетарскую» — у кого искреннее, а у кого и корыстное. В этом кипящем котле страстей Яновскую считали своей и профессора и сту-

денты. И в том, что математикам Московского университета не пришлось пережить тягостных и бесплодных дискуссий, которые в те времена лихорадили почти все наши учебные заведения,— заслуга Софьи Александровны. Многие ныне прославленные математики, ее бывшие ученики и коллеги, до сих пор с благодарностью вспоминают об этом.

Но и тогда, и позже — в конце двадцатых, даже в начале тридцатых годов — ситуация, в которой ей приходилось работать и проводить в жизнь свои идеи, касающиеся философии и методологии математики, была далеко не простой. Вот лишь несколько отрывков из статьи Софьи Александровны, напечатанной в майском номере журнала «Под знаменем марксизма» за 1930 год:

«Если естественников-марксистов у нас и вообще еще ничтожный процент, то среди математиков процент этот особенно низок — буквально по пальцам можно пересчитать всех наших математиков-марксистов, хоть сколько-нибудь активных в области истории и методологии математики. А между тем спрос на этого рода математиков растет буквально не по дням, а по часам. Еще сравнительно очень недавно диалектический материализм был отнюдь не популярен в среде математиков. Аспиранты-математики, если не вслух, то потихоньку называли курс истории и философии естествознания, организованный для них, «красным богословием», а старые профессора т. н. «Московской школы», авторитет которых в среде математиков был несокрушим, прилагали все усилия к тому, чтобы спасти «автономию» «чистой», «единой» для «всех времен и народов» математики от злостных покушений на нее со стороны материалистической философии, не стесняющейся открыто заявлять о своей партийности и классовом, пролетарском характере. Даже слово «товарищ» не имело права гражданства ни в Институте математики и механики, ни в Математическом обществе, ни в его журнале «Математический сборник».

Но с особенным презрением отзывались о диалектике в математике: в лучшем случае, в среде наиболее к нам близких математиков, работавших в Коммунистической Академии, говорили о собрании математических иллюстраций для законов диалектики, более или менее удачных, и зло издевались над философами за

малейшую математическую ошибку. Иногда, впрочем, надевали даже, по меткому выражению тов. Деборина, «диалектические штаны» на математические работы, то тут, то там упомянув о переходе количества в качество, диалектике развития и т. п., но чисто внешним, «безразличным» к содержанию образом... Уже не говоря о том, что ни в Московском, ни в Ленинградском математическом обществе ни разу не было даже упомянуто слово «диалектика», и что если бы не год, проставленный на протоколе, заседание Математического общества в 1929 году ничем нельзя было бы отличить от заседания 1909 г.»

Не правда ли, мысли Яновской об истинной роли диалектики в математике созвучны размышлениям Маркса на эти темы,— а ведь математические манускрипты Маркса ей еще не знакомы. Только в следующем, 1931-м, ИМЭЛ пригласит Софью Александровну для работы над рукописями Маркса...

Яновская пишет о том, что неверные философские посылки о математике как науке чисто абстрактной, не опирающейся на практический опыт человечества, приводят к методологической ущербности, отражаются на стиле и содержании математических работ. «...Даже когда ставились в обществе или помещались в «Математическом сборнике» статьи на прикладные темы, они были так отвлечены, что ни один техник никогда не мог действительно приложить их на практике,— причем особенно это справедливо по отношению к т. н. «Московской школе». Настолько далеко была последняя от практики, что даже такой «чистый» математик, как Лузин, сказал однажды, что когда задача уже считается решенной в Московской школе, ленинградцы признают ее лишь поставленной, ибо от «принципиального» решения москвичей до возможности практического применения в технике или естествознании дистанция столь велика, что задача ее преодоления часто труднее основной задачи; и то же повторял А. Я. Хинчин о теории вероятностей в Москве и Харькове... Взгляд на математику как на «отвлеченную, формально-логическую систему» буквально господствует еще не только в таких произведениях, как «Эволюция геометрической мысли» профессора Богомолова, но и во всем нашем вузовском преподавании, на нем же воспитывают в значительной мере наше учительство. Ибо полной четкости в вопросе об

отношении математических абстракций к действительности нет даже в нашей собственной партийной среде...»

Яновскую волнует не только научная, но и организационная, деловая сторона проблемы. Ее аналитический ум вскрывает связи между сегодняшними просчетами в подготовке математических кадров, в математическом воспитании широких масс, с завтрашними потерями в математической науке и практике.

«Можно смело сказать,— пишет она,— что положение на математическом фронте в настоящий момент характеризуется в первую очередь именно разрывом между «спросом» и «предложением». Нет или почти нет марксистов-методологов математики, а тех, которые есть, буквально рвут на части, нет или почти нет математиков-марксистов, знакомых с историей своей науки в связи с историей техники и экономики, нет или почти нет математиков, знакомых с техникой. Наконец, вообще мало, нехватает самих математиков,— математиков, умеющих заниматься с рабочей аудиторией, давать ей именно то, что нужно в дальнейшем в практической работе на предприятии, и при этом давать так, чтобы одновременно расширять математический кругозор, чтобы не просто загрузить память, но научить справляться с новой, нетрафаретной задачей... Между тем Наркомпрос предпочел выбрать линию наименьшего сопротивления и дошел, наконец, до того, что оставил только 20 мест для всего приема на 1929/30 учебный год на математическое отделение, хорошо зная, что из этих 20 человек вряд ли дойдут благополучно до конца учебы 7. Какие вузы и втузы можно будет при такой политике хотя бы количественно обеспечить преподавателями математики, об этом, по-видимому, в Главпрофобре не думали...

Вопросы преподавания математики, и притом не только в высшей, но и в средней и низшей школе, также не могут пройти мимо наших математиков-марксистов. Тут нужно создать серию учебников, приспособленных к задачам, выдвигаемым перед молодым инженером нашим социалистическим строительством, необходимы соответствующие учебники и для школ второй ступени и для рабфаков. Тут нужно изменить то характерное еще для царской России положение, когда математик-ученый считает ниже своего достоинства писать учебник по элементарной математике для средней шко-

лы (не говорю уже низшей), тут нужно изменить, наконец, то положение, какое создалось уже у нас, когда ученые-математики стоят совершенно в стороне от школы I и II ступени, даже от рабфаков, в то время как до Октября не было почти ни одного профессора, который не преподавал бы в старой «гимназии»...

...В заключение несколько слов о математических обществах. До сих пор это были настоящие средневековые цеховые организации, куда допускались только «посвященные», где даже стулья на заседаниях, предназначенные для «массы», устанавливались служителями вдоль стен («на галерке»), дабы не происходило смешения «простонародья» с «посвященными». Математики рангом пониже устраивали для себя организацию «подмастерьев», носившую более скромное название общества не математиков, а любителей математики, и копировали что было сил «мастеров» науки».

3

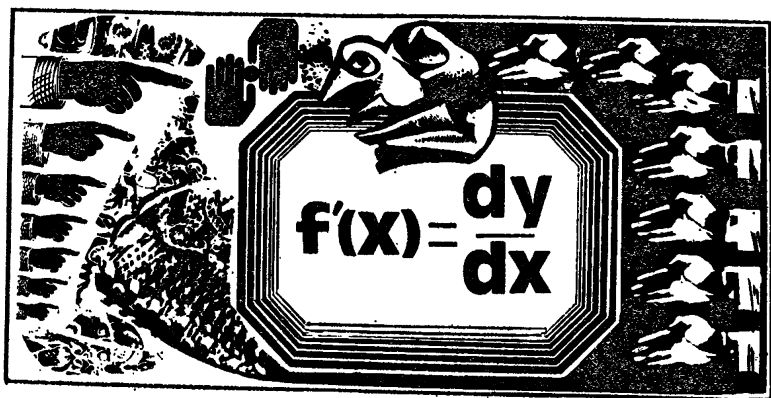
Такова была та ситуация и те трудности, с которыми пришлось столкнуться Софье Александровне Яновской в те времена. А два десятилетия спустя, в конце сороковых — начале пятидесятых годов, ей вновь понадобилась ее удивительная сила воли и негибкая уверенность в правоте своего дела, чтобы противостоять шквалу иной силы и иной злости. Яновская основала в Московском университете курс математической логики. В 1947 году появился перевод «Основ теоретической логики» Гильберта и Аккермана — первая монография такого рода, опубликованная у нас в стране. Книга была встречена в штыки многими философами. Одна только попытка сближения математики и философии вызвала яростные нападки и на редактора книги, и на автора вступительной статьи, и на составителя комментариев, а этим человеком, единым в трех лицах, была Софья Александровна. И тем не менее, по ее настоянию на следующий год выходит новая книга из этой серии, и потом в течение двух десятилетий — книги и статьи, на которых воспитано нынешнее поколение наших специалистов в этой области. И в том, что в годы самых безудержных нападков на кибернетику нам удалось сохранить и развить советскую школу математической логики — снова заслуга Софьи Александровны.

«Многие истины, ставшие в настоящее время привычными фактами научного сознания, С. А. Яновской приходилось отстаивать в нелегкой борьбе,— говорится в предисловии к посмертному сборнику ее избранных трудов «Методологические проблемы науки».— И такую борьбу вела уже немолодая женщина, со здоровьем, подорванным хронической болезнью... В ее портфеле всегда лежал аварийный запас медикаментов и инструкция окружающим на случай внезапной потери сознания обладательницей портфеля, а такие случаи происходили не так уже редко. В этом отношении поведение С. А. Яновской можно назвать героическим». Это определение приложимо и ко всей жизни, прожитой Софьей Александровной.

4

...А Бабель, строчки из рассказа которого послужили эпиграфом к этому «Интермеццо», просто воспользовался ее именем и фамилией — они были знакомы еще в Одессе. На самом же деле, в том, 1913-м, году, который упомянут в рассказе Бабея, Соня Яновская, юная семнадцатилетняя гимназистка, готовилась к поступлению на Высшие женские курсы и репрессиям не подвергалась.

«В НАДЛЕЖАЩИЕ РУКИ»



Время ничего не может сделать великим мыслям, которые так же свежи и теперь, как и тогда, когда в первый раз зародились в уме своих авторов. Что было когда-то продумано и сказано, то теперь так же живо говорится нам печатной страницей.

Самюэл Смайлс

1

В Институте Маркса — Энгельса фотокопии математических рукописей появились в 1925 году и заняли свое место в описи № 1 фонда № 1.

Первым за них взялся З. Гумбель, немецкий математик, еще в Германии работавший с этими рукописями. Он сумел за два года сильно запутать дело. Конечно, у него были извиняющие обстоятельства. Номера на листках фотокопий ставились кое-как. Да плюс сюда Марксов почерк, когда цифры «4» и «7» похожи, как родные сестры, а «5» и «8» — как близнецы, и когда нумерация страниц весьма нередко имеет такой вид: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 6, 7, 8, 6, 7, 5, 6. Почерк, который мог в совершенстве понимать разве что один только Эн-

гельс. «Мое зрение было бы полностью загублено прежде, чем я сделал бы половину работы,— писал он незадолго до смерти Лауре Лафарг, рассказывая ей о своих отчаянных попытках успеть подготовить к печати оставшиеся после Маркса неопубликованные рукописи.— Я убедился в этом много лет тому назад и попытался найти другой выход: решил, что было бы хорошо, если бы один или два толковых представителя младшего поколения научились читать почерк Мавра».

Кроме невероятно сложного почерка и более чем своеобразной системы нумерации страниц было и еще одно весьма характерное для Маркса обстоятельство, очень затруднившее впоследствии чтение и расшифровку его неопубликованных рукописей: привычка Маркса не раз, не два и не пять возвращаться к одному и тому же вопросу, пока он не становился кристально ясным — все это Гумбелю вполне могло показаться неинтересным. И потому, хотя расшифрованы рукописи довольно добросовестно (кроме Гумбеля этим нелегким делом занимались Матейка и Богдань, позже Вильдгабер), но в самом подборе материала для расшифровки не было ни системы, ни порядка.

В сущности, «приводя в порядок» математические манускрипты, никто не имел ни малейшего представления, в чем смысл этих работ. И потому в «Летописях марксизма» за 1927 год — а это первое упоминание о Марксовых математических рукописях — появились следующие удивительные строки: «Те рукописи, которые не содержат вычислений или выдержек, можно считать самостоятельными работами Маркса. Только их имеет смысл издать. Они содержат вольное изложение прочитанного Марксом, соединенное с многочисленными хронологическими датами, и философские размышления над прочитанным; в некоторых случаях Маркс ставит проблемы особым способом, свойственным только ему».

Разумеется, при таком подходе к делу трудно было рассчитывать на успех. И действительно, ключевая работа — «Исторический очерк» — была причислена к «выдержкам из различных авторов, так как способы обозначений меняются». А ведь в ней нет ни одной выдержки, а меняются способы обозначений только из-за того, что речь идет о различных этапах в развитии дифференциального исчисления! И, наоборот, в самостоя-

тельные работы попало немалое число явных конспектов — например, те листы, что относятся к расходящимся рядам. Особенно не повезло при «упорядочивании» записям Маркса о теоремах Тейлора и Маклорена, где нередко одна страница при расшифровке относилась к одной работе, а ее непосредственное продолжение — к другой.

В таком виде математические рукописи Маркса находились до 1931 года, когда на Международном конгрессе по истории науки и техники в Лондоне впервые было сделано сообщение о том, что в Москве собрано около тысячи страниц фотокопий работ Маркса, посвященных математике.

2

Приближалась знаменательная дата — полвека со дня смерти Маркса. Институт Маркса—Энгельса—Ленина готовился к этому дню, и, естественно, математические рукописи оказались в фокусе его внимания. Коммунистическая академия находилась в то время по соседству с институтом. Там работала Софья Александровна Яновская. Надо прямо сказать, что соседство это оказалось счастливым — и для ИМЭЛа, и для Софьи Александровны, и для самих рукописей.

Вряд ли можно представить себе человека, который лучше, чем Яновская, подходил бы для такого трудного дела, как подготовка Марксовых рукописей к печати. Ее настойчивость и упорство вошли в фольклор Московского университета. Но, разумеется, одних лишь настойчивости и упорства тут было явно недостаточно. Требовалось уникальное соединение знаний, интересов и умений. Конечно, надо было знать математику. Потом — историю математики. Затем — языки: немецкий, английский, французский. Далее — суметь отделить конспекты от собственных Марксовых работ, а для этого надо было найти те книги, что он изучал, работая над своими математическими манускриптами. И что самое главное — проникнуться логикой Марксовой мысли, а об этом нельзя было и думать, не зная его трудов и переписки.

Если бы, однако, дело шло только о подготовке рукописей к печати... Нет, их надо было воссоздавать заново. Нужно было понять, что же Маркс хотел сделать

и что он сделал, как развивались и трансформировались его идеи. Если угодно, нужно было на какое-то время перевоплотиться в Маркса, научиться думать его мыслями и говорить его языком.

Яновская была внутренне готова к этому. Ей повезло: в гимназии ее учил И. Ю. Тимченко, известный в то время знаток истории математики, а на Высших женских курсах — С. О. Шатуновский, которого в математике больше всего волновало, как и чем обоснованы ее основные положения. И в те же годы в подпольных кружках она познакомилась с трудами Гегеля и Маркса и почувствовала силу диалектики — научного метода, словно специально созданного для людей, глядящих на мир глазами математика.

Первая научная работа, опубликованная Софьей Александровной Яновской в 1928 году, называлась «Категория количества у Гегеля и сущность математики». За ней последовали «Закон единства противоположностей в математике», «Идеализм в современной философии математики» и наконец «Гегель и математика», появившаяся в печати в конце 1931 года, когда она уже начала работать над математическими рукописями Маркса. В этой статье, где Яновская была одним из соавторов, есть такой абзац:

«В вопросе о математике для нас тут важны наряду с различными местами из произведений и переписки Маркса и Энгельса, особенно наряду с «Анти-Дюрингом» и «Диалектикой природы» и с философскими сочинениями Ленина, еще не опубликованные пока математические рукописи Маркса, имеющиеся в фотокопиях в Институте Маркса—Энгельса—Ленина в количестве 863 убористо исписанных страниц».

Все эти работы Яновской, каждая из них, представляла собой попытку использовать знание марксистской диалектики для анализа сложных процессов, происходивших в математике. Вот такой вдумчивый и подготовленный читатель и комментатор оказался у Марксовых математических манускриптов. Они были по-настоящему единомышленниками — единство мыслей гарантировалось общими интересами и общим подходом к науке.

Софья Александровна и два ее аспиранта — Дмитрий Абрамович Райков и Анна Ионнасовна Нахимовская — взялись за этот гигантский труд. Прошло только два года, и в журнале «Под знаменем марксизма» появились

результаты их работы — размышления Маркса над сущностью дифференциального исчисления, которые он изложил Энгельсу в 1881 году, и подготовительный материал к ним. В том же 1933 году вышел сборник «Марксизм и естествознание» (его редактировал В. В. Адоратский, сменивший к тому времени Д. Б. Рязанова на посту директора ИМЭЛа), где была перепечатана эта первая и единственная до самого последнего времени публикация самых важных частей из математических рукописей Маркса. Разумеется, текст был на русском языке.

«Перевод рукописей представил довольно значительные трудности, — писали в послесловии к своей публикации Яновская, Райков и Нахимовская (они в духе того времени называли себя «бригадой»). — Раньше всего оказалось очень трудно передать язык Маркса, насыщенный образами и сравнениями, игрой слов, новыми словообразованиями и словоупотреблениями, переплетением трех основных языков (и где вдобавок в основном, немецком, языке чередуются латинские и готические буквы. — Л. К.). Тут и «выступающая предводителем других членов» производная, и «обремененный множителем» коэффициент, и «беременная» приращением переменная величина, и совершающий «нисхождение в ад через нуль» дифференциал, и «дифференциальный коэффициент, как тень без тела, которое отбрасывает ее»... и такое слово, как «wegescamotieren» (найдите в словаре!)... и такие фразы, которые состоят из трех слов, из которых одно — немецкое, другое — английское, а третье — французское.

Особенно труден был перевод тех работ Маркса, которые, как исторический обзор, например, имеются лишь в черновом наброске. Записывая мысли в момент их зарождения, Маркс, естественно, не думал еще о форме. В таких работах попадают поэтому и фразы без подлежащего или сказуемого и длиннейшие периоды, в которых очень трудно выделить главное предложение».

И в самом деле, легко ли было понять и перевести высказывание о том, что Ньютон «ставит над приращениями штамп дифференциалов»? Или прорваться сквозь эмоциональный строй Марксовых фраз, где бушуют страсти, где сарказм («это дитя [выражения] $\frac{0}{0}$... выглядит подозрительнее, чем его мать») соседствует с

трагизмом («Мы вращались в порочном кругу и снова пришли к нашему исходному пункту»). А сколько сил ушло на расшифровку характерной для Марковского стиля фразы «...steht es nicht ganz kausch»! «Дело обстоит не вполне...» — что? И действительно — что такое «каusch»? Первая мысль — а, может быть, Маркс все-таки успел проглядеть работы Огюста Коши? По-французски его фамилия пишется Cauchy и, учитывая почерк Маркса, мысль о сходстве в написании этих двух слов казалась вполне разумной. Ведь на первой странице его очерка «Об истории дифференциального исчисления», среди работ, которые он наметил себе прочесть, есть запись: *«Муаньо, «Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению»*. А Муаньо — ученик Коши. Как соблазнительно перевести загадочное слово притяжательным прилагательным от фамилии создателя теории пределов: «Дело обстоит не вполне в духе Коши»! И только изрядно поломав головы, «бригада» сообразила, что Маркс не был удовлетворен строгостью мысли английского математика Джона Хайнда, по учебнику которого он постигал в это время тонкости дифференциального исчисления, и для выражения своего неудовольствия употребил слово «кошерный», которым правверные евреи называют «чистую» пищу в отличие от «нечистой», тrefной. Маркс хотел, очевидно, подчеркнуть таким образом, что аргументы Хайнда не выдерживают критики даже с той точки зрения, которой тот сам придерживался в своих «Принципах дифференциального исчисления». Итак, «дело обстоит не вполне кошерно», рассуждения Хайнда, так сказать, «тrefные».

Сколько же таких головоломок на тысяче страниц математических рукописей! И снова — «почерк, который могу читать только я, да и то с трудом», — как жаловался однажды Энгельс в письме к Августу Бебелю, объясняя, почему он не может воспользоваться ничьей помощью, разбирая Марксово наследство. «...Я — единственный из оставшихся в живых, кто в состоянии расшифровать этот почерк и разобрать эти сокращения слов и целых фраз», — писал он несколько позже Петру Лавровичу Лаврову, не предполагая, что время внесет коррективы в это его проникнутое горечью высказывание...

Однако переводчикам и комментаторам Марковских математических работ, кроме незаурядных лингвисти-

ческих, математических, философских и даже чуть ли не криптологических талантов, нужно было обладать еще одним даром, относящимся уже не столько к свойствам ума, сколько характера.

Им необходима была смелость.

«Маркс имел возможность заниматься математикой либо в порядке отдыха от основной работы, либо когда был болен и не мог заниматься работой над «Капиталом». Оба последних обстоятельства обусловили ряд ошибок в рукописях, начиная от нумерации страниц и простых описок и кончая ошибками иногда и более серьезного характера», — так от лица «участников бригады ИМЭЛ по математическим рукописям Маркса» писала С. Яновская в послесловии к публикации и продолжала: «Случайные ошибки в вычислениях мы просто исправляли, более существенные описки оговаривали в примечаниях».

Но так ли просто определить, ошиблась ли рука Маркса, не поспев за мыслью, или слово, возникшее в скорописи черновика, таит глубокий смысл, просто еще не прояснившийся для читателей рукописи? Всегда трудно готовить к печати черновики человека, ушедшего из жизни: никто с абсолютной достоверностью не растолкует непонятный абзац, не подтвердит — здесь недоразумение, описка. Но «править» Маркса — дело особой сложности, и не потому только, что это Маркс — титан, гений, авторитет которого безграничен, но и потому, что сам нетривиальный склад его мышления, умение видеть вещи по-новому, в непривычном ракурсе, его любовь к парадоксам ставят перед издателем Марксовых рукописей невероятные трудности.

Пример из области, которая, по выражению «бригады ИМЭЛ», была, в отличие от занятий математикой, «основной работой» Маркса — из экономики, где взгляды его (совсем не так, как в математике) были изложены фундаментально, со всей свойственной Марксу основательностью, причем в главной своей части опубликованы либо им самим, либо Энгельсом, пример этот отчетливо демонстрирует суть сказанного.

...В 1960 году вышел в свет первый том «Капитала» в новом русском переводе, подготовленном сотрудником ИМЛ под руководством А. И. Малыша. Во всех предыдущих изданиях тома, как в тех, что вышли при

жизни Маркса, так и в тех, что после его смерти появились чуть ли не на всех языках мира, в главе третьей было написано, что из закона обращения средств платежа вытекает: «масса средств платежа... находится в обратном отношении к продолжительности платежных периодов». Маркс сохранил эту фразу неизменной и при переизданиях «Капитала». Не заметил здесь ничего предосудительного и Энгельс, который внимательнейшим образом отредактировал четвертое немецкое издание, вышедшее в свет в 1890 году и с тех пор принимаемое всеми переводчиками за основу. И тем не менее подготовители тома были убеждены: здесь у Маркса описка — не в обратном, а в прямом отношении находится масса средств платежа к продолжительности платежных периодов. И это тем более очевидно, что сам Маркс ссылается на Уильяма Петти, родоначальника английской буржуазной политэкономии, установившего как раз такую прямую зависимость.

Итак, в издании 1960 года появилось примечание: «У Маркса здесь, по-видимому, описка». И тут же журнал «Вопросы экономики» публикует статью, в которой экономист З. Атлас оспаривает правомерность этого примечания и утверждает, что никакой описки у Маркса тут нет. Разгорелась целая научная дискуссия, в которой приняли участие экономисты Советского Союза и ГДР. В результате этой баталии мнение А. И. Малыша и его группы восторжествовало, и при переиздании «Капитала» в ГДР описка Маркса была устранена — уже безо всякого примечания.

И такой спор развернулся вокруг фразы из «Капитала», да еще из первого его тома, где едва ли не каждое слово Маркса обсуждено и прокомментировано поколениями исследователей! Что уж тут говорить о математических манускриптах...

И все-таки в срок, к пятидесятилетию со дня смерти Маркса, журнал с переводом его математических рукописей был подписан к печати. Он вышел тиражом в тридцать пять тысяч экземпляров, и сейчас к нему едва ли применимо выражение «библиографическая редкость» — у букинистов его давно уже нет.

Публикация эта, хотя она и не была полной, имела огромное значение. Она не только открыла вдруг совершенно новую, дотоле не известную сторону научных интересов Маркса, но послужила «непосредственным толчком к изучению взглядов Маркса на развитие естественных наук». Такая оценка, данная ей в книге, выпущенной ИМЛом в 1969 году, — отнюдь не преувеличение. Ведь «Диалектика природы», написанная Энгельсом под сильным влиянием Марксовых идей, — книга, целиком посвященная задаче проследить, как законы диалектики действуют в различных областях естествознания, впервые появилась на полках всего за несколько лет до этого. Бернштейн никак не хотел допустить, чтобы рукопись ее добралась, наконец, до типографии, ведь сам дух ее противоречил исповедуемой им философии неокантианства и махизма, паразитирующей на математике и естествознании. Под давлением Бернштейна рукопись этой и сегодня злободневной книги была официально признана германской социал-демократической партией устаревшей и непригодной для печати. Для этого было даже подготовлено специальное заключение, составленное членом этой партии Лео Аронсом, физиком по специальности. Но в 1924 году Бернштейна все-таки заставили направить ее Альберту Эйнштейну, чей авторитет в науке был, конечно, несравненно выше, чем у партийного физика, столь скорого на расправу с умершим гением. И хотя Бернштейн и тут сжульничал — отправил не всю рукопись, а лишь часть ее, Эйнштейн определенно высказался за ее безотлагательную публикацию. «Диалектика природы» вышла в свет уже в 1925 году в московском журнале «Архив К. Маркса и Ф. Энгельса» сразу на русском и немецком языках. С той поры взгляды Энгельса на законы, действующие во всем естествознании, стали хорошо известны — тому, конечно, способствовало и подстегнутое появлением его новой книги усиленное изучение «Анти-Дюринга». Но то, как глубоко интересовался этими же вопросами Маркс, оставалось неизвестным до первой публикации его математических работ.

Сразу же после появления их в журнале «Под знаменем марксизма» в разных журналах и сборниках вышло несколько работ, специально посвященных анализу

взглядов Маркса на математику. Уже на следующий месяц, в своих февральских номерах, журнал «Книга и пролетарская революция» поместил статью С. Яновской «Математические рукописи Маркса», а журнал «Фронт науки и техники» напечатал статью А. Холщевникова «О математических рукописях Маркса». «Появление в печати математических работ Маркса несомненно является значительным событием, — писал ее автор. — Оставшаяся, к сожалению, в целом незавершенной, эта работа позволяет проникнуть в лабораторию творчества Маркса, что само по себе представляет огромный интерес, дает блестящий образец применения метода материалистической диалектики к одной из конкретных научных дисциплин и вскрывает, несмотря на усилия лучших математиков оставшуюся в течение столетий невыявленной, сущность основных понятий дифференциального исчисления и того переворота в методе, который претерпела математика при возникновении нового исчисления...

Гегель в «Науке логики» довольно много места отвел вопросу логического обоснования дифференциального исчисления в посвященных этому вопросу специальных примечаниях. Он считает, что математики сами виноваты в тех нападках, которые вызвало новое исчисление, ибо они оказались неспособны оправдать этот предмет как понятие. Ставя своей задачей вскрыть диалектическую сущность понятия дифференциала, Гегель говорит: «Так называемые бесконечно-малые разности выражают собой исчезание членов отношения как количеств и то, что остается за сим, есть их количественное отношение лишь постольку, поскольку оно определено качественно: качественное отношение при этом в такой мере сохраняется, что оно, оказывается именно тем, что возникает через переход конечных величин в бесконечные. В этом состоит, как мы видели, вся суть дела. Так, например, в последнем отношении исчезают как количества абсцисса и ордината; но члены этого отношения остаются по существу — один элементом ординаты, другой элементом абсциссы».

Гегелевская трактовка дифференциалов как исчезающих величин, идущая по линии в развитие ньютоновской концепции последних отношений исчезающих величин, страдает туманно-абстрактным характером рассмотрения поставленного вопроса и не свободна от свое-

го мистического элемента. Совершенно иначе обстоит дело с той трактовкой, которую этому понятию дает Маркс. Он не исходит из рассмотрения уже готового понятия, а он прежде всего действует. Для того чтобы вскрыть сущность понятия дифференциала, он воспроизводит на наипростейших примерах весь процесс получения производных функций, тщательно изучая отдельные детали этого процесса, и этим выявляет тот путь, который в конечном счете приводит к рождению нового символа».

Так излагается суть Марксовых исканий в математике в этой первой критической статье, появившейся сразу вслед за публикацией его трудов в журнале «Под знаменем марксизма». В том же журнале, но уже в майском номере следующего, 1934 года, напечатана серьезная аналитическая работа В. Гливенко «Понятие дифференциала у Маркса и Адамара», но о ней речь уже шла ранее. Другие материалы, посвященные той же теме, кажутся менее значительными, и уж во всяком случае самой глубокой из всех опубликованных работ, вне сомнения, следует признать статью Софьи Александровны Яновской, послужившую послесловием к опубликованным впервые математическим манускриптам Маркса.

В этой обширной работе, написанной со всем свойственным Софье Александровне блеском, есть такие слова:

«Энгельс недаром хотел издать математические рукописи Маркса вместе со своими работами по диалектике природы. Обе работы действительно дополняют друг друга. И можно смело сказать, что публикуемые Институтом Маркса—Энгельса—Ленина математические работы Маркса будут иметь для наших математиков-марксистов не меньшее значение, чем «Диалектика природы» для всего естественно-научного фронта вообще.

Не только для математиков, однако. Математические рукописи Маркса демонстрируют еще на одном примере метод Маркса — материалистическую диалектику — в действии. Они должны поэтому подвергнуться основательному изучению со стороны философов».

Подчеркивая огромное методологическое значение рукописей Маркса по математике, Яновская приводила слова Ленина о том, что «продолжение дела Гегеля и Маркса должно состоять в диалектической обработке

истории человеческой мысли, науки и техники». Она писала: «Математические рукописи Маркса впервые дают нам цельную, законченную и систематическую картину диалектики исторического хода развития некоторой, столь отличной от обществензнания, дисциплины, какой является дифференциальное исчисление. Подобного по глубине, по умению обнаружить корни различия и тождества различных исторически имевших место подходов к основным понятиям науки еще не существовало в истории математики и естествознания. Математические работы Маркса должны поэтому служить для наших математиков и естественников-марксистов образцом той работы над историей науки, о которой пишет Ленин».

Этот первый научный анализ значения математических работ Маркса Яновская заключила такими словами: «Маркс не был математиком-специалистом, но он основательно изучал математику и был вооружен методом материалистической диалектики, открывавшим перед ним такие перспективы в математике, которых не могли заметить и математики-специалисты. Через 50 лет после смерти Маркса его математические рукописи могут служить поэтому предметом изучения, образцом применения материалистической диалектики и стимулом для дальнейшей работы на новом, более широком современном основании».

Слова эти, написанные в 1933 году, и сегодня звучат так же современно, как и тогда.

4

В том же юбилейном 1933 году, на X Международном математическом конгрессе в Цюрихе было сделано сообщение о математических работах Маркса. Доклад ИМЭЛа был прочитан в секции философии и истории математики и назывался «Новое обоснование дифференциального исчисления Карлом Марксом». Хотя пятница девятого сентября была для конгресса днем, рекордным по насыщенности программы, само имя Маркса в заголовке доклада привлекло множество слушателей. В помещении, отведенном для занятий не слишком популярной на конгрессе и довольно слабо посещаемой секции философии, стало тесно. Пришлось перенести

заседание в другую, большую аудиторию, которая, впрочем, тоже оказалась переполненной.

В московском институте Маркса—Энгельса—Ленина, говорилось в докладе, имеются фотокопии ранее не опубликованных рукописей Маркса из области математики, естествознания и техники. Математические работы занимают здесь первое место. Это конспекты различных разделов арифметики, алгебры, геометрии и анализа, общим числом тридцать один, девятнадцать самостоятельных набросков, главным образом посвященных обоснованию анализа, а также разнообразные применения математики в политической экономии.

...За суховатым, внешне бесстрастным стилем изложения, свойственным обычному научному сообщению, угадывается гордость первооткрывателей, полемический задор. Бытовавшее среди математиков мнение о том, что Маркс занимался математикой как дилетант, как любитель, было хорошо известно тем, кто представил доклад: «Мы в состоянии доложить здесь об одной работе Маркса, содержащей очерк исторического развития понятия дифференциала и точку зрения Маркса на обоснование анализа. Таким образом, она представляет огромный интерес как для историков, так и для философов математики. Эта работа опровергает распространенное обычно мнение, будто Маркс занимался математикой лишь для того, чтобы рассеяться. Она доказывает, что Энгельс был прав, когда говорил над могилой Маркса, что гениальный автор «Капитала», первооткрыватель законов развития человеческого общества и творец диалектического материализма, основатель научного социализма и руководитель революционного рабочего движения «делал самостоятельные открытия в каждой области, которую он исследовал,— даже в области математики».

В докладе ИМЭЛа рассматривался лишь один аспект этой работы Маркса — ее роль для историков математики, для тех, кто исследует философские закономерности развития этой науки. Речь шла вот о чем.

Вслед за Гегелем, и в полном согласии с ним, Маркс видит полную бесперспективность любых усилий дать обоснование анализа чисто формальнологическим путем, всю детскую наивность сведения его к чисто чувственному восприятию, к опыту, к графическим построениям. И если он ставил перед собой задачу дать анализу обо-

снование на диалектической базе, вскрыть исторические и логические корни анализа, то это совсем не означало, что он собирался сводить анализ к арифметике. А ведь впоследствии, начиная с Вейерштрасса, именно это пытались делать многие математики, исповедывавшие теоретико-множественный подход к проблеме! Их большие заслуги в углублении обоснования математики несомненны, однако в итоге они пришли к известным парадоксам теории множеств, разрушившим не только математический, но и логический каркас всей специально возведенной ими постройки. Маркс, напротив, показывает, как из элементарной математики, на ее собственной почве вырастает качественно новое дифференциальное и интегральное исчисление, которое проявляет себя как специальный вид исчисления, оперирующий уже самостоятельно на своей собственной почве, так что алгебраический метод превращается в противоположный ему дифференциальный метод.

Но Маркс, препарировав историю анализа, во многих узловых моментах идет и наперекор Гегелю, который упорно проводит мысль о том, что появление анализа явилось не плодом опыта, а проявлением «самозарождающейся идеи». Гегель и Лагранжа-то воспринимает и ценит прежде всего как типичного формалиста и «конвенционалиста», человека, «из головы», чисто внешним, совершенно произвольным путем привнесшего в математику основные понятия анализа. (Впрочем, такая оценка Лагранжа и до наших дней распространена среди историков математики.) Напротив, Маркс, который тоже высоко оценивает заслуги Лагранжа, видит их прежде всего в том, что французский математик раскрывает связи между алгеброй и анализом, показывает, как анализ произрастает из алгебры. В докладе ИМЭЛа впервые вводится в обращение историков науки ставшая с тех пор знаменитой и многократно цитируемая фраза Маркса, оброненная им в одной из записей, посвященных Лагранжу: «Подлинные и в силу этого простейшие взаимосвязи нового со старым открываются всегда лишь после того, как это новое само приобретает уже завершенную форму, и можно сказать, что в дифференциальном исчислении это возвращение (отнесение) назад было осуществлено теоремами Тейлора и Маклорена. Поэтому только Лагранжу пришла в голову мысль свести дифференциальное исчисление к строго алгебра-

ической основе». В то же время Маркс бросает упрек Лагранжу, что он просмотрел диалектический характер этого процесса, слишком уж задержался на территории алгебры, недооценив собственные закономерности и методы анализа: «в этом смысле его можно использовать только как отправной пункт».

«Так Маркс,— подытоживал доклад ИМЭЛа,— как истый диалектик борется как против чисто аналитического сведения нового к старому, которое было столь свойственно методологии механистического материализма XVIII века, так и против чисто синтетического введения нового извне, что характерно не только для гегелевской точки зрения, но и для нынешнего интуиционизма...»

В последней фразе доклада сообщалось, что обсуждавшийся фрагмент манускриптов Маркса, а также другие его математические рукописи, изданием которых руководит «фрау профессор Яновская», будут вскоре опубликованы в Москве, в трудах института Маркса—Энгельса—Ленина.

...Прочитанный доклад, помимо реакции присутствовавших математиков, выслушавших его с огромным интересом и сожалевших, что он не был поставлен как пленарный, незамедлительно вызвал еще два отклика. Профессор Джино Лория, редактор международного журнала по истории математики «Архейон», попросил разрешения напечатать текст сообщения, фрагмент рукописи Маркса и фотокопию одной из ее страниц. А газета «Фоссише цайтунг», удостоившая конгресс математиков целой статьей, особо остановилась в ней на докладе ИМЭЛа, убеждая своих читателей, что, во-первых, Маркс занимался математикой просто от нечего делать, что, во-вторых, кроме повторения всем известной истины о необходимости строгого обоснования дифференциального исчисления, он ничего нового не сказал, и что в-третьих, ему вообще не хватало ни знания истории, ни знания предмета...

5

В течение последующих лет никаких заметных событий, связанных с математическим архивом Маркса, не происходило. Правда, Софья Александровна неизменно рассказывала о нем в своих лекциях и докладах. «На

кафедре математики читала в то время лекции профессор Яновская, а мы бегали слушать ее и пьянели от изложения математических тетрадей Маркса, где Маркс бросил мысль о «ноле», как не о ноле, потому что если б ноль был только ноль, от него был бы невозможен переход к единице». Это отнюдь не строгое, а лишь поэтическое изложение сути Марксовых математических работ принадлежит Мариэтте Шагинян — в другом юбилейном году, когда исполнилось 150 лет со дня рождения Маркса, она вспомнила о своей учебе в Плановой академии в тридцатые годы.

В апреле 1935 года у С. А. Яновской вышла новая большая работа «О так называемых «определениях через абстракцию». В ней Софья Александровна обрисовывала состояние дел в математике, точнее, в обосновании ее, но теперь уже с позиций тех мыслей и идей, что она почерпнула, изучая Марксово математическое наследие: «Подлинно материалистическое определение числа, таким образом, может быть только диалектическим, вскрывающим диалектику развития этого понятия, начиная с реальных множеств вещей, для которых оно служит эквивалентом, и кончая тем моментом, когда, пользуясь выражением Маркса, «роли оборачиваются» и число выступает уже не как производная от множества вещей их характеристика, а как нечто, предшествующее этим множествам. Для того, кто этой диалектики развития не видит, кто берет числа сразу в виде так называемого натурального ряда, предшествующего каким бы то ни было вещам и их множествам, понятие числа необходимо должно быть окутано мистическим покровом тайны и представляться возникшим в голове из чистого мышления. На самом деле «понятия числа... взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать, т. е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассмотрении этих предметов от всех прочих их свойств кроме числа, а эта способность есть результат долгого, опирающегося на опыт, исторического развития. ...Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей... Но, как и во всех других областях мыш-

ления, законы, абстрагированные из реального мира, на известной ступени развития отрываются от реального мира, противопоставляются ему как нечто самостоятельное, как явившиеся извне законы, с которыми мир должен сообразоваться».

Приведя эту энгельсовскую цитату, Яновская продолжает чуть позже: «От читателя, вероятно, не ускользнуло сходство самых общих черт развития понятия о числе — начиная с равномощности двух множеств и кончая множеством чисел, выступающим как предшествующее вещам и их множествам, — с общим ходом идей в первых главах «Капитала» Маркса. И в этом нет ничего удивительного. Характеризуя примененный Марксом в «Капитале» метод, Ленин пишет: «Таков же должен быть метод изложения (respective изучения) диалектики вообще (ибо диалектика буржуазного общества у Маркса есть лишь частный случай диалектики)». Правда, в силу особо абстрактного характера математики вопрос о приложимости к ней того же метода мог возбуждать сомнения. Однако из опубликованных недавно математических рукописей Маркса ясно, что он его решал в положительном смысле. Ибо применяемый им метод тот же, каким он пользуется в «Капитале». Ставя себе задачу обосновать дифференциальное исчисление, Маркс начинает с самого простого, обычного, массовидного — с обыкновенной алгебры и притом с простой суммы и разности двух чисел, вскрывая «в этом простейшем явлении... *все* противоречия (respective зародыши *всех* противоречий)» дифференциального исчисления. Больше того, самое изложение диалектики развития дифференциала напоминает (конечно, только в самых общих чертах) общий ход развития понятия о деньгах в «Капитале». Дифференциальные символы возникают сначала как символические эквиваленты некоторых реальных алгебраических процессов и лишь в ходе дальнейшего развития меняются с ними ролями: когда мы вступаем на собственную почву дифференциального исчисления, исходным пунктом становится не реальный процесс, а (эквивалентный ему) дифференциальный символ. И Маркс показывает, как забвение этой диалектики развития дифференциала, попытка метафизически начать сразу с этого понятия как уже готового, заранее данного символа приводят к мистике бесконечно малых, рассматриваемых как особый, таинственный сорт вели-

чин («мистическое дифференциальное исчисление» Ньютона и Лейбница). Не удивительно, что тот же метод оказывается применимым и по отношению к простейшему исходному математическому понятию — количественному числу, что диалектика развития понятия о числе также оказывается частным случаем диалектики вообще».

Чувствуется, что мысли о математических трудах Маркса не оставляют Софью Александровну Яновскую. Даже в ее рецензии на изданный у нас в 1937 году первый том работ Леонарда Эйлера «Введение в анализ бесконечно малых», опубликованной в журнале «Книга и пролетарская революция», встречается такая фраза: «В своем замечательном наброске истории анализа бесконечно малых Маркс замечает, что преемники Ньютона и Лейбница, к числу которых принадлежит и Эйлер, не возвращаются к исходному пункту своих предшественников. Они продолжают их работу, исходя из готовых, введенных до них понятий».

Спустя десять лет Яновская вновь обращается к тому же источнику, из которого постоянно черпала энтузиазм и замыслы новых работ. Публикуя в «Трудах Института истории естествознания» свое исследование «Мишель Ролль как критик анализа бесконечно малых», Софья Александровна начинает так: «В Математических рукописях» Маркса, в разделе о «Мистическом дифференциальном исчислении» Ньютона и Лейбница есть место, гласящее:

«Итак, сами верили в мистический характер новооткрытого исчисления...» — далее шли уже знакомые Марксовы фразы, заканчивающиеся словами: «...и вызывали таким образом враждебный крик, отдававшийся даже в мире несведущих в математике людей и бывший необходимым для того, чтобы проложить путь новому». (Поскольку математические работы Маркса цитировались по их первому изданию, перевод несколько отличался от нынешнего: «мистический», а не «таинственный» характер, «враждебный крик», а не «враждебные вопли», «отдававшийся» вместо «будивший отклик», «несведующие в математике люди», которым предстояло превратиться в «неспециалистов» в новом, уточненном переводе. По одному только этому небольшому отрывку видно, какая большая работа должна была быть про-

делана при подготовке Марковских рукописей к изданию их отдельной книгой.)

«В этих немногих словах,— продолжала С. А. Яновская,— дана краткая, но яркая характеристика ряда страниц из истории первых шагов дифференциального исчисления, которой обычно уделяют мало внимания потому, что собственно математическое содержание того «враждебного крика», о котором говорит Маркс, имеет лишь ограниченную ценность. Однако с исторической стороны и этот «враждебный крик» не лишен интереса. Недаром Маркс считал его даже «необходимым для того, чтобы проложить путь новому». С этой же исторической точки зрения крайне поучительно проследить за тем, как в истории математики подтверждается марксистско-ленинское положение о неодолимости того, что возникает и развивается.

Среди критиков дифференциального исчисления особенно любопытна фигура Мишеля Ролля. Всякий обучающийся теперь дифференциальному исчислению уже на первых шагах обучения встречается с теоремой Ролля. Но лишь немногим известно, что Ролль был горячим противником того самого дифференциального исчисления, успеху которого он содействовал не только своей теоремой, но и своими выступлениями против анализа бесконечно малых».

Ролль выступил с критикой книги Лопиталя, точнее, его труда «Анализ бесконечно малых», вышедшего анонимно. Работа эта не была неуязвимой для критики, и Яновская, когда пишет об этом, вновь обращается к Марковским математическим рукописям (цитируя их, естественно, в том переводе, которой был сделан «бригадой» в 1933 году): «Самые недостатки этой книги носили также типичный характер: они были присущи в основном той форме дифференциального исчисления, которую оно приняло в руках первых творцов и которую Маркс называет «мистическим дифференциальным исчислением». Сущность последнего состояла в том, что «дифференциалы... были введены с самого начала по определению как самостоятельные, отделенные от переменных величин, из которых они возникли, существования, а не выведены каким-либо математическим путем», что приращения переменных просто отождествлялись с дифференциалами: $x_1 = x + \Delta x$ с самого начала превращается в $x_1 = x + dx$, где dx предполагается с помощью

метафизического разъяснения. Сперва существует, а затем разъясняется». Того «что... математически правильный результат основывается на столь же математически ложном в самом основании предположении, именно на замене с самого начала $x_1 - x = \Delta x$ через $x_1 - x = dx$... этого не знали».

При этом дифференциалы не могли быть ни конечными отличными от нуля величинами, так как иначе была бы незаконна операция их отбрасывания, ни нулями. «Поскольку... Ньютон... не определяет наращений переменных x , y , etc с помощью математического вывода, но сразу штемпелует их в дифференциалах x , y , etc, последние не могут быть $= 0$... В самом деле, алгебраическое полагание этих наращений с самого начала $= 0$ приводит лишь к тому же, что и... полагание сразу же $h=0$, а значит... в последнем счете к $0=0$ ». «Таким образом не остается ничего другого, кроме как представить себе наращения переменных как бесконечно малые наращения и приписать им как таковым самостоятельное существование... Но бесконечно малые величины суть такие же величины, как бесконечно большие (слово «бесконечно» означает на самом деле лишь неопределенно малые)... $dx dx$ имеет такое же право на существование, как и $2x dx$. Уничтожая в $y = uz + zi + \dot{uz}$ слагаемое $\dot{uz}$ вследствие его бесконечной малости по сравнению с uz , или zi , мы могли бы математически помочь себе лишь тем, что смотрели бы на $uz + zi$ лишь как на приближенное значение, мыслимое сколь угодно близким к точному... Но тогда получается еще большее чудо: этим методом мы получаем для производной функции x совсем не приближенное, но совершенно точное... значение».

Именно это положение вещей и вызвало тот «враждебный крик», о котором речь уже шла выше и в котором голосу Ролля принадлежало не последнее место», — пишет С. А. Яновская и несколько позже приводит еще одну Марксову цитату: «В истории обоснования дифференциального исчисления следующим после «мистического дифференциального исчисления» Ньютона и Лейбница является, по Марксу, «рациональное дифференциальное исчисление» Эйлера и Даламбера... Это уже значительный прогресс. «Сорвав с дифференциального исчисления мистический наряд, — пишет К. Маркс, —

Д'Аламбер сделал громадный шаг вперед». «Д'Аламбер начинает непосредственно с отправного пункта Ньютона и Лейбница: $x_1 = x + dx$. Однако он вносит сразу фундаментальную поправку: $x_1 = x + \Delta x$, т. е. $x + \text{неопределенное}$, однако *prima facie* * *конечное приращение*, которое он обозначает через h . Превращение этого h или Δx в dx .. происходит лишь как конечный результат развития или по крайней мере непосредственно перед концом, тогда как у мистиков и инициаторов исчисления оно является исходным пунктом».

В том же 1947 году, когда появилась эта работа С. А. Яновской о Мишеле Ролле, в Тбилиси вышла первая книга, специально посвященная Марксовым математическим манускриптам — «Математические рукописи Карла Маркса и вопросы обоснования математики», написанная Л. П. Гокиели. На следующий год в журнале «Science and Society» была напечатана, очевидно, первая зарубежная публикация на эту же тему. Ее автор — известный историк науки Дирк Ян Стройк. В его книге «История математики» Марксовым работам по обоснованию анализа бесконечно малых уделено особое внимание.

Дело, таким образом, пусть и медленно, но двигалось.

Случались, правда, и курьезные истории. Однажды на кафедру истории математики МГУ к Софье Александровне Яновской явился запыхавшийся студент-философ и, страшно волнуясь и горячась, стал требовать, чтобы все преподавание математики в стране было немедленно перестроено «в духе указаний Маркса». Софья Александровна, человек мягкой души, ласково поговорила с реформатором. Выяснилось, что он принял за Марксовы слова конспекты из Бушарла и Хайнда...

А потом вдруг произошло нечто и забавное и одновременно грустное, что сдвинуло дело с мертвой точки. В Венгрии в 1950 году был математический конгресс. Советская делегация на нем была весьма представительной: академик Колмогоров, академик Виноградов, академик Александров... И еще в нее входил молодой кандидат наук Рыбников. Он работал тогда в Центральном Комитете партии, в отделе науки. И вот в Будапеште математики буквально всех социалистических

* *prima facie* — на первый взгляд (лат.).

стран «навалились» на наших ученых: когда, наконец, будут полностью опубликованы математические рукописи Маркса? Академики кивали на Рыбникова — он-де все знает. Но и Рыбникову сказать было нечего.

Вернувшись в Москву, он сразу же доложил о случившемся конфузе. «Но ведь вы математик?» — спросили его товарищи по работе. «Да», — ответил Рыбников, еще не понимая, в какую сторону клонится разговор. «Вот вы и займитесь математическими рукописями Карла Маркса». — «Но ведь на это нужны годы!» — «Значит, и работайте годы».

Так у Софьи Александровны Яновской появился докторант Константин Алексеевич Рыбников. (Они, впрочем, были старыми знакомыми — именно под руководством Софьи Александровны Рыбников защитил свою кандидатскую диссертацию — это было в 1941 году, на пятый день войны.)

6

Свою докторскую диссертацию, посвященную математическому наследию Маркса, по странному совпадению Рыбников защитил ровно через тринадцать лет после кандидатской — 25 июня 1954 года. Интерес к ней был большой, он подогревался еще и тем, что за месяц до защиты Константин Алексеевич выступил с докладом о своих изысканиях и выводах на заседании Московского математического общества. Оппонентами его диссертации выступили такие известные ученые, как А. О. Гельфонд и А. П. Юшкевич. Академик А. Н. Колмогоров прислал положительный отзыв. Но тем не менее от публикации самих рукописей Маркса решено было пока воздержаться — в них оставались еще неясные места.

Следующее десятилетие было заполнено трудом кропотливым и неброским: один за другим снимались вопросы, стоящие на полях рукописей. Надо было до конца выяснить, какими именно источниками пользовался Маркс, а это порой казалось невыполнимой задачей — книги эти давно вышли из употребления. В 1966 году Константин Алексеевич отправился в Лондон, как он выразился, «ловить льва в пустыне». Детальнейшим образом изучил он библиотечные фонды Британского музея, Лондонского и Кембриджского университетов,

Университетского колледжа Лондона, колледжей Тринити и Сент-Джонса в Кембридже, Лондонского Королевского общества, а также личные библиотеки крупных английских ученых девятнадцатого века — де-Моргана и Грейвза. Запросы были посланы и в другие библиотеки — например, в колледж Сент-Катарина. Немецкий математик Вуссинг обследовал библиотечные фонды ГДР, стремясь найти в них все математические книги, изданные в Германии, которыми мог пользоваться Маркс. Так удалось почти во всех случаях сличить Марксовы рукописи с использованной им литературой и отделать, таким образом, его самостоятельные записи от конспектов. В томе Большой советской энциклопедии, подписанном к печати 16 апреля 1954 года, появилась статья Рыбникова о математических рукописях Маркса. В написанном им учебнике по истории математики есть глава, посвященная этим работам. В 1958 году в журнале «Вопросы философии» был опубликован еще один отрывок из математических рукописей Маркса, «О понятии функции», которому предшествовало большое предисловие, написанное К. А. Рыбниковым. В 1961 году болгарский философ Светослав Славков опубликовал две статьи, посвященные Марксовым математическим работам, а в 1963 году вышла в Софии его книга «Карл Маркс и некоторые проблемы математики».

В августе 1964 года советская делегация была в Институте социальной истории в Амстердаме, где хранится большое число оригиналов рукописей Маркса, и Ольга Константиновна Сенекина, заведующая секцией документов Маркса и Энгельса ИМЛа, сумела получить фотокопии недостающих страниц, которые Рязанов в свое время в спешке пропустил.

В середине шестидесятых годов Софья Александровна Яновская смогла, наконец, передать другим людям свои многочисленные дела и обязанности и вплотную занялась почти исключительно подготовкой к печати Марксовых математических рукописей. (Что не помешало ей, правда, выступить с докладом на симпозиуме в Варшаве, посвященном новейшим разделам математической логики, и написать большую работу «О математической строгости» для «Вопросов философии»).

Но в конце 1966 года ее не стало.

Однако ей удалось довести до конца свой более чем тридцатилетний труд. Сорок с лишним авторских ли-

стов — свыше тысячи машинописных страниц — дожидались своего часа: к 150-летию со дня рождения Маркса, в 1968 году, мы смогли взять в руки этот весомый том.

7

...Рукописи лежат в ИМЛе — строгом здании на Советской площади и, кажется, хранят на себе тепло многих рук, которые бережно, как эстафету, пронесли их сквозь долгие годы. Энгельс, потом Рязанов, далее Гумбель, расшифровщики института Богдань, Вильдгабер, Матейка, затем — «бригада»: Яновская, Райков и Нахимовская, позже — Рыбников. И на протяжении многих лет постоянный интерес сотрудников ИМЛа — каждый, кто заведовал рукописями Маркса, вносил свою лепту в работу над ними и завещал это своему преемнику. Сначала это был В. А. Радус-Зенкович, потом — А. М. Бобков, затем — О. К. Сенекина. Ольге Константиновне посчастливилось больше других — ей довелось довести до конца эту многолетнюю работу. Она — один из двух редакторов (второй — математик А. З. Рывкин, он работал над рукописями, когда еще жива была С. А. Яновская) вышедшей в издательстве «Наука» книги К. Маркса «Математические рукописи».

Разумеется, пока книга готовилась к выпуску в свет, рукопись ее изучали и крупные специалисты-математики — об этом говорит и предисловие ИМЛа к ней: «При подготовке настоящего издания были учтены замечания и советы, высказанные академиками А. Н. Колмогоровым и И. Г. Петровским».

Труд этих и еще многих других, не названных здесь людей извлек пропыленные листки и тетради с чердака на далекой лондонской улице. Их настойчивая мысль проникла сквозь недописанные слова, недоконченные фразы, незавершенные замыслы.

«Труд подливает масла в лампу жизни, а мысль зажигает ее...» В «Капитале» Маркс нашел место для этих слов Джона Беллерса. Именно о людях труда и мысли думал Энгельс, пытаясь угадать будущих наследников своего архива.

Этой мечте Энгельса суждено было осуществиться в наше время. Рукописи Маркса попали «в надлежащие руки».

